

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В. С. Асланов, В. В. Юдинцев

Динамика систем твёрдых тел переменной структуры

Электронный практикум

Самара

2010

Авторы: Асланов Владимир Степанович,
Юдинцев Вадим Вячеславович

Рассматриваются вопросы практического использования методов алгоритмов формирования уравнений движения механических систем твёрдых тел переменной структуры. Представлены примеры составления уравнений движения для моделирования систем отделения и подвижных элементов конструкции КА и РН. Вычислительный практикум дополняет одноимённое учебное пособие. Практикум предназначен для студентов старших курсов направления 010800 «Механика и математическое моделирование». Практикум может быть полезен при выполнении курсовых работ, при дипломном проектировании, а также аспирантам и специалистам, занимающимся анализом динамики сложных механических систем. В качестве среды численного моделирования рекомендуется использовать математические пакет MATLAB или аналогичное по возможностям свободное ПО: OCTAVE, Python (с библиотеками numpy, scipy).

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2010

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)

Оглавление

Введение	5
I Уравнения движения систем твердых тел в декартовых координатах	7
1 Уравнения связи	8
1.1 Уравнения связи “точка-плоскость”	8
1.2 Уравнения связи, ограничивающее вращение смежных тел . .	17
1.2.1 Уравнения связи для плоских механических систем	18
1.3 Метод Баумгардта	24
2 Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений	26
2.1 Структура матриц коэффициентов	26

[Закреть](#)

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

2.2	Реструктуризация матрицы коэффициентов	29
2.3	Параметризация матрицы коэффициентов	35
2.3.1	Алгоритм	35
2.3.2	Пример	43
3	Примеры формирования уравнений движения	47
3.1	Трехзвенный маятник	47
3.2	Механические системы ракетно-космической техники	58
3.2.1	Система раскрытия солнечных батарей	58
3.2.1.1	Моделирование механизма фиксации створок	65
3.2.2	Отделение отработавших ступеней РН	72
3.2.3	Отделение створок хвостового отсека	82

II Уравнения движения в обобщённых координатах 88

4	Системы с плоскими цилиндрическими шарнирами со структурой дерева	89
4.1	Уравнения движения	89
4.2	Примеры	98
4.2.1	Определение векторов d_{ij} b_{j0}	98
4.2.2	Раскрытие створок СБ с механизмом синхронизации	103
4.3	Алгоритм метода отдельных тел	129
	Заключение	141



Список литературы 142

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть



Введение

В ракетно-космической технике существует множество задач, связанных с необходимостью анализа динамики подвижных элементов конструкции. Примерами таких систем являются системы отделения отработавших блоков РН, отделения космических аппаратов от последних ступеней РН, раскрытия антенн, раскрытия солнечных батарей. В системах раскрытия панелей солнечных батарей происходит последовательная фиксация смежных створок и следовательно (при жесткой фиксации) изменяется число степеней свободы всей системы. В системе отделения створок головного обтекателя или в системе отделения ступеней РН с течением времени происходит разрыв кинематической связи между разделяющимися объектами.

Особенностью этих систем, которую необходимо учитывать при формировании уравнений движения, является их *переменная структура*: в процессе движения меняется количество степеней свободы и структура соединений тел системы между собой [5]. Динамика этих систем на разных режимах работы описывается разными дифференциальными уравнениями, и в процессе функционирования происходит переход от одного непрерывного режима к другому. Для построения модели такой системы необходима удобный метод получения уравнений движения, который бы учитывал указанные особенности системы и позволил бы сформировать уравнения, удобные для их дальнейшего машинного представления.

Настоящий вычислительный практикум является дополнением к одноимённому учебному пособию. Однако для упрощения использования практикума в нём изложены краткие теоретические выводы, необходимые для

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть



практического использования рассматриваемых методов. Рассмотрены методы формирования уравнений движения механических систем ракетно-космической техники в матричной форме, удобной для численного решения на ЭВМ в математических пакетах **MATLAB**, **OCTAVE**. Представлены примеры составления уравнений движения для моделирования систем отделения и подвижных элементов конструкции КА и РН.

Настоящий практикум состоит из двух частей. Часть **I** посвящена методу формированию уравнений движения систем в избыточных декартовых координатах, уравнения движения решаются совместно с уравнениями связи. Рассматриваются практические вопросы решения системы дифференциально-алгебраических уравнений: методы эффективного решения, учитывающие особенности системы, метод стабилизации уравнений связи. Часть **II** посвящена методам формирования уравнений движения в обобщенных координатах: рассматривается прямой метод Й. Виттенбурга и метод отдельных тел. В каждой части приведены примеры формирования уравнений движения механических систем ракетно-космической техники.

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)



Домашняя



Назад

На весь экран

Часть I

Уравнения движения систем твёрдых тел в декартовых координатах

Заккрыть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Глава 1

Уравнения связи

1.1. Уравнения связи «точка-плоскость»

Шарнир, соединяющий два смежных тела, может ограничивать их относительное поступательное и вращательное движение. В общем случае в шарнире возникают произвольно направленные векторы реакции и момента.

Определим уравнения элементарной связи «точка-плоскость», которая ограничивает относительное поступательное движение двух тел таким образом, что определенная точка одного тела вынуждена находиться на плоскости, жестко связанной с другим телом. Это уравнение связи приводит к возникновению в точке контакта силы реакции перпендикулярной плоскости,



Домашняя



Назад

На весь экран

в которой разрешено движение заданной точки тела. Эта связь уменьшает на единицу число степеней свободы системы двух связанных тел. Задав несколько связей «точка-плоскость», возможно определение связи «точка-прямая» (минус 2 степени свободы) и «точка-точка» (минус 3 степени свободы). Данные типы соединений часто встречаются в механических системах РКТ. Связь «точка-точка» описывает сферический шарнир, а связь «точка-прямая» совместно с уравнениями связи, ограничивающими относительное вращение двух тел, может описывать движение одного тела относительно другого по некоторой направляющей.

Широко распространенными типами соединений тел в механических системах ракетно-космической техники и в технике вообще являются соединения типа цилиндрический шарнир, сферический шарнир, также взаимодействие тел может происходить путем скольжения одного тела по поверхности или некоторой направляющей, связанной с другим телом. Во всех этих случаях можно предположить, что взаимодействие тел механической системы будет определяться силой и моментом, приложенными в одной или нескольких точках контакта, что будет ограничивать относительное перемещение и относительное вращение двух тел. Даже если контакт тел происходит по поверхности, можно допустить, что силы реакции, распределенные по поверхности, приводятся к одному вектору силы реакции и вектору реактивного момента. Рассмотрим процедуру получения матричных уравнений движения некоторых типов соединений тел.

Предполагаем, что траектория точки контакта или шарнирной точки может быть ограничена плоскостью, линией или точкой, связанной с другим телом. Другими словами, траектория шарнирной точки в системе координат

Закреть

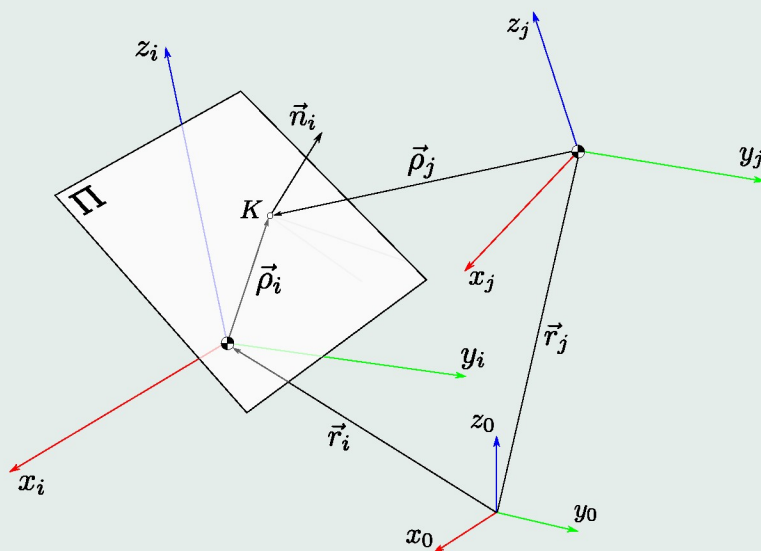


Рис. 1.1.1. К записи уравнения связи «точка-плоскость»

нат, связанной с одним из тел, будет представлять собой плоскую кривую, прямую или точку. Последнее означает совпадение двух точек взаимодействующих тел. Связи записываются в форме строгого ограничения на проекции относительного линейного и углового ускорения двух тел на заданное направление, определяемое вектором $\vec{n}_{ij}$, который связан с системой координат одного из двух тел. Уравнения связи на ускорения позволят сразу получить ДАУ индекса 1 для дальнейшего численного интегрирования. Первый

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

тип связи записывается в виде скалярного произведения двух векторов и имеет вид (рис. 1.1.1):

$$\vec{n}_i \cdot \vec{w}_{ij}^r = 0, \quad (1.1.1)$$

где $\vec{w}_{ij}^r$ – относительное ускорение точки контакта относительно системы координат, связанной с одним из взаимодействующих тел; $\vec{n}_i$ – вектор нормали, вдоль которого ограничено движение точки контакта. Приведем уравнения связи к матричной форме. Матричная запись уравнения связи (1.1.1) будет иметь следующий вид:

$$(\dot{\rho}_{ij}^{(i)})^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0, \quad (1.1.2)$$

где $\ddot{\rho}$ – координатный столбец ускорения точки контакта в связанной системе координат тела i . Здесь и далее верхний индекс в скобках обозначает индекс системы координат, в которой записывается координатный столбец соответствующего вектора. Выразим производную координатного столбца $\rho_{ij}^{(i)}$ через кинематические параметры центров масс взаимодействующих тел. Для этого, учитывая правило преобразования координат, выразим $\rho_{ij}^{(i)}$ через его проекции на оси системы координат $O_0x_0y_0z_0$:

$$\rho_{ij}^{(i)} = \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)}, \quad (1.1.3)$$

где $\mathbf{A}^i$ – матрица преобразования координат из системы $O_ix_iy_izi$ в систему $O_0x_0y_0z_0$. Дифференцируя выражение (1.1.4), получим

$$\dot{\rho}_{ij}^{(i)} = \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)}. \quad (1.1.4)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Учитывая правило дифференцирования матрицы перехода

$$\dot{\mathbf{A}}_i^{rT} = -\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT},$$

получим выражение скорости:

$$\dot{\rho}_{ij}^{(i)} = -\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)}. \quad (1.1.5)$$

Выражение (1.1.5) представляет собой матричную запись относительной производной вектора $\vec{\rho}_{ij}$, действительно, относительная производная вектора в векторной форме имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{\rho}_{ij}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_{ij}}{dt} - \vec{\omega}_i \times \vec{\rho}_{ij}.$$

Радиус-вектор точки контакта $\vec{\rho}_{ij}$ выражается через радиусы-векторы центров масс двух взаимодействующих тел и радиус-вектор точки контакта $\vec{\rho}_{ji}$ из четырехугольника $O_o O_i K O_j$, (рис. 1.1.1):

$$\vec{\rho}_{ij} = \vec{\rho}_{ji} + \vec{r}_j - \vec{r}_i.$$

В координатной форме это уравнение имеет следующий вид:

$$\rho_{ij}^{(0)} = \mathbf{A}^j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{r}_j^{(0)} - \mathbf{r}_i^{(0)}. \quad (1.1.6)$$

Учитывая выражение (1.1.6) и принятое допущение о том, что вектор $\rho_{ji}^{(j)}$ имеет постоянные координаты в базисе $O_j x_j y_j z_j$, скорость точки контакта определяется следующим образом:

$$\dot{\rho}_{ij}^{(0)} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{A}^j \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{r}_j^{(0)} - \mathbf{r}_i^{(0)} \right) = \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \dot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \dot{\mathbf{r}}_i^{(0)}. \quad (1.1.7)$$



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Продифференцируем выражение (1.1.5) и получим связь между ускорениями точки контакта в разных системах координат:

$$\ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = -\dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ij}^{(0)}. \quad (1.1.8)$$

Подставив выражения для производных матриц преобразования координат, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & -\dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT} \rho_{ij}^{(0)} - \\ & - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^{rT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ij}^{(0)}, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

где с учетом постоянства положения точки контакта в системе координат $O_j x_j y_j z_j$, $\dot{\rho}_{ji}^{(j)} = 0$:

$$\ddot{\rho}_{ij}^{(0)} = \dot{\mathbf{A}}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} = \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)}. \quad (1.1.10)$$

Подставим (1.1.10) в (1.1.9):

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & -\dot{\tilde{\omega}}_i^{(i)} \rho_{ij}^{(i)} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \rho_{ij}^{(i)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \\ & + \mathbf{A}^{iT} (\mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \mathbf{A}^j \dot{\tilde{\omega}}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)}). \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Перепишем последнее выражение, выделив матрицы коэффициентов при линейных и угловых ускорениях:

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ij}^{(i)} = & \tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \dot{\omega}_i^{(i)} - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \dot{\omega}_j^{(j)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} - \mathbf{A}^{iT} \ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \\ & + \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

Поставив (1.1.12) в (1.1.2), получим уравнение связи "точка-плоскость":

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{b}_{ij}, \quad (1.1.13)$$

где $\mathbf{Q}_i$, $\mathbf{Q}_j$ - блочные матрицы:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix},$$

$\ddot{\mathbf{X}}_i$, $\ddot{\mathbf{X}}_j$ - матрицы линейных и угловых ускорений тел:

$$\ddot{\mathbf{X}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_i^{(0)} \\ \dot{\omega}_i^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{X}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_j^{(0)} \\ \dot{\omega}_j^{(j)} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \left(\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \rho_{ij} + \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ij}^{(0)} - \mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^j \tilde{\omega}_j^{(j)} \tilde{\omega}_j^{(j)} \rho_{ji}^{(j)} \right).$$

Уравнение (1.1.13) представляет собой скалярное линейное уравнение, связывающее ускорения двух смежных тел. Это уравнение необходимо добавить к уравнениям движения для совместного решения. В правую часть уравнений движения необходимо добавить силы реакции, определим эти силы. Для идеальной связи «точка-плоскость» сила реакции действует перпендикулярно плоскости, по которой движется точка контакта. Примем за направление действия силы реакции, действующей на тело j , направление вектора $\vec{n}_{ij}$. На тело i будет действовать сила с противоположным направлением:

$$\mathbf{R}_j = -\mathbf{R}_i = \mathbf{A}^i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda, \quad (1.1.14)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

где λ - неизвестный множитель Лагранжа. Сила реакции создает момент относительно центра масс, который будет определяться следующим образом:

$$\mathbf{L}_{R_j}^{(j)} = \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \mathbf{A}^{jT} \mathbf{A}^i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda. \quad (1.1.15)$$

Последнее выражение представляет собой матричную запись векторного произведения $\rho_{ij} \times R_j$. Момент определен в проекциях на оси связанной системы координат. Момент от силы реакции, действующий на тело i , определяется подобным образом:

$$\mathbf{L}_{R_i}^{(i)} = -\tilde{\rho}_{ij}^{(i)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda. \quad (1.1.16)$$

Сравнивая (1.1.14), (1.1.15), (1.1.16) с матрицами коэффициентов $\mathbf{Q}_i$ и $\mathbf{Q}_j$, выражения для сил реакций и моментов можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_j^{(j)} \\ \mathbf{L}_{R_j}^{(j)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_j^T \lambda, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{R}_i^{(i)} \\ \mathbf{L}_{R_i}^{(i)} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_i^T \lambda. \quad (1.1.17)$$

Если одно из двух смежных тел совершает заданное движение, что форма уравнений связи не меняется. В частном случае, когда тело i неподвижно и с этим телом связана неподвижная система координат, матрицы уравнений связи имеют следующий вид (рис. 1.1.2):

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} & \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ij}^{(i)T} & -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \mathbf{A}^j \tilde{\rho}_{ji}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

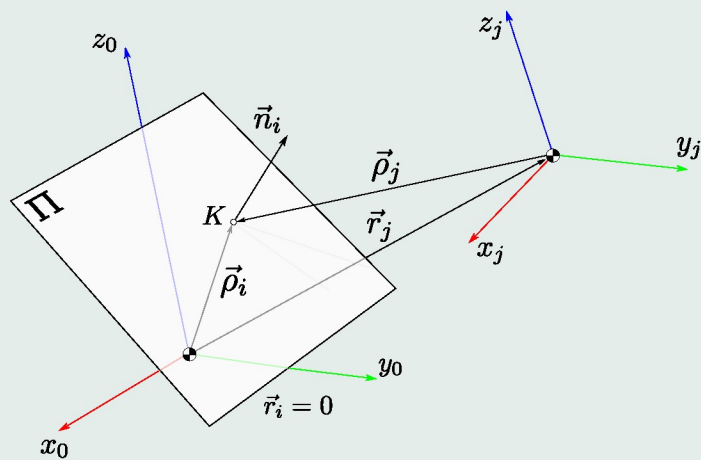


Рис. 1.1.2. Связь «точка-плоскость» для неподвижного тела

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

1.2. Уравнения связи, ограничивающее вращение смежных тел

Перейдем к рассмотрению уравнения связи второго типа, которое ограничивает относительное вращение двух тел так, что угловое ускорение тела j относительно тела i в проекции на направление $\vec{n}_{ij}$ должно быть равно нулю:

$$\left(\varepsilon_{ji}^{(i)}\right)^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0.$$

Относительное ускорение определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{ji}^{(i)} = \dot{\omega}_{ij}^{(i)} = \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} - \omega_i^{(i)}.$$

Подставив последнее выражение в уравнение связи, получим

$$\left(\mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \varepsilon_j^{(j)} - \left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \varepsilon_i^{(i)} - \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0. \quad (1.2.1)$$

Уравнение (1.2.1) можно привести к виду

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = b_{ij}, \quad (1.2.2)$$

где матрицы коэффициентов при ускорениях определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} 0 & \left(\mathbf{A}^j \mathbf{A}^{iT} \mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)}\right)^T \end{pmatrix}, \quad (1.2.3)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

скалярный член b_{ij} определяется так:

$$b_{ij} = \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} \omega_j^{(j)} \mathbf{n}_{ij}^{(i)}.$$

При существовании связи, ограничивающей относительное вращение двух тел, на тела действует реактивный момент. На тело i действует момент

$$\mathbf{L}_i = -\mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda, \quad (1.2.4)$$

на тело j

$$\mathbf{L}_j = \mathbf{A}^{jT} \mathbf{A}^i \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \lambda. \quad (1.2.5)$$

1.2.1. Уравнения связи для плоских механических систем

Запишем полученные уравнения связи для плоских механических систем. Положение тела i - плоской фигуры, задается тремя параметрами - положением центра масс

$$\mathbf{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

и углом поворота ϕ , эти параметры можно объединить в координатный столбец:

$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \phi_i \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что связь, ограничивающая относительное вращение тел i и j , будет иметь простейший вид:

$$\phi_i - \phi_j = 0. \quad (1.2.6)$$

Рассмотрим уравнение «точка-линия», (рис. 1.2.1). Связь «точка-линия»

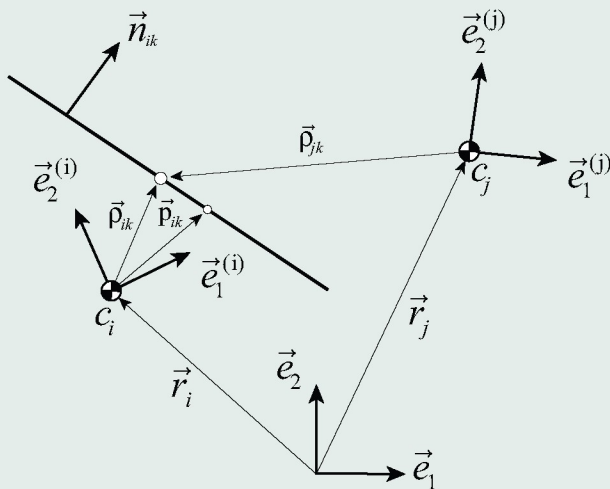


Рис. 1.2.1. К уравнению связи «точка-линия»

предписывает некоторой точке, связанной с телом j , двигаться вдоль прямой, жестко связанной с телом i . Сама прямая в теле i задана при помощи

нормального вектора $\vec{n}_{ik}$ и точки на этой прямой, определяемой $\vec{p}_{ik}$. Положение точки контакта $\vec{p}_{ik}$ в системе координат, связанной с телом i должно удовлетворять уравнению прямой:

$$(\vec{p}_{ik} - \vec{p}_{ik}) \cdot \vec{n}_k = 0. \quad (1.2.7)$$

В матричной координатной форме уравнение связи будет иметь вид

$$\mathbf{n}_k^{(i)T} (\mathbf{p}_{ik}^{(i)} - \rho_{ik}^{(i)}) = 0. \quad (1.2.8)$$

Для понижения индекса ДАУ дважды продифференцируем уравнение (1.2.8), что приведет к следующему матричному уравнению:

$$\mathbf{n}_k^{(i)T} \ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = 0. \quad (1.2.9)$$

Из уравнения (1.2.9) следует, что ускорение точки контакта относительно системы координат, связанной с телом i , должно быть направлено вдоль прямой, заданной вектором $\mathbf{n}_k^{(i)}$. Как было отмечено ранее, полученное уравнение связи никак не ограничивает положение и скорость точки контакта, поэтому для сохранения принадлежности точки контакта заданной прямой и сохранения направления скорости вдоль этой прямой начальные условия системы дифференциальных уравнений должны удовлетворять дополнительным условиям:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_k^{(i)T} (\mathbf{p}_{ik}^{(i)} - \rho_{ik_0}^{(i)}) = 0, \\ \mathbf{n}_k^{(i)T} \dot{\rho}_{ik_0}^{(i)} = 0, \end{cases} \quad (1.2.10)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

где $\rho_{ik_0}^{(i)}$, $\dot{\rho}_{ik_0}^{(i)}$ - положение и скорость точки контакта в начальный момент времени. Определим скорость $\dot{\rho}_{ik}^{(i)}$ и ускорение точки контакта $\ddot{\rho}_{ik}^{(i)}$:

$$\dot{\rho}_{ik}^{(i)} = \dot{\mathbf{A}}^{iT} \rho_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ik}^{(0)}. \quad (1.2.11)$$

Матрицы преобразования координат для плоских систем имеют простой вид:

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix},$$

поэтому производная матрицы преобразования координат записывается следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}}^i = \begin{pmatrix} -\sin \phi_i & -\cos \phi_i \\ \cos \phi_i & -\sin \phi_i \end{pmatrix} \dot{\phi}_i = \dot{\phi}_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A}^i = \dot{\phi}_i \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^i.$$

Производная обратной матрицы:

$$\dot{\mathbf{A}}^{iT} = \dot{\phi}_i (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^i)^T = \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T.$$

Запишем скорость точки контакта:

$$\dot{\rho}_{ik}^{(i)} = \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\rho}_{ik}^{(0)}, \quad (1.2.12)$$

где скорость точки контакта в проекциях на оси инерциальной системы координат

$$\dot{\rho}_{ik} = -\dot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \dot{\mathbf{r}}_j^{(0)} + \dot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}. \quad (1.2.13)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Далее определим ускорение точки контакта:

$$\ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = \ddot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + \dot{\phi}_i \dot{\mathbf{A}}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \dot{\mathbf{A}}^{iT} \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \ddot{\rho}_{ik}^{(0)}.$$

Ускорение точки контакта в проекциях на оси инерциальной системы координат определим, продифференцировав (1.2.13):

$$\ddot{\rho}_{ik}^{(0)} = -\ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} + \ddot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \dot{\mathbf{A}}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \dot{\rho}_{jk}^{(j)}. \quad (1.2.14)$$

Подставив в последнее выражение значение производных матрицы $\mathbf{A}^j$ и с учетом того, что $\rho_{jk}^{(j)} = \text{const}$, получим

$$\ddot{\rho}_{ik}^{(0)} = -\ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} + \ddot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \dot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}. \quad (1.2.15)$$

Подставим (1.2.15) в выражение для $\ddot{\rho}_{ik}^{(i)}$, получим

$$\begin{aligned} \ddot{\rho}_{ik}^{(i)} = & \ddot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + \dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik}^{(0)} + 2\dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \\ & + \mathbf{A}^{iT} (-\ddot{\mathbf{r}}_i^{(0)} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{(0)} + \ddot{\phi}_j \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} + \dot{\phi}_j^2 \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)}). \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Квадрат матрицы $\boldsymbol{\Omega}$ равен единичной матрице со знаком минус. С учетом этого уравнение связи «точка-линия» будет иметь вид

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_j \ddot{\mathbf{X}}_j = b_{ij}, \quad (1.2.17)$$



где матрицы коэффициентов при ускорениях и скаляр b_{ij} определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \rho_{ik} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_j &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} & \mathbf{n}_k^{(i)T} \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \end{pmatrix}, \\ b_{ij} &= \mathbf{n}_k^{(i)T} \left(\dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \rho_{ik}^{(0)} - 2 \dot{\phi}_i \mathbf{A}^{iT} \boldsymbol{\Omega}^T \dot{\rho}_{ik}^{(0)} + \mathbf{A}^{iT} \dot{\phi}_j^2 \mathbf{A}^j \rho_{jk}^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

1.3. Метод Баумгардта

При формировании уравнения связи “точка-плоскость” и связи, ограничивающей относительное вращение двух тел, производилось дифференцирование исходных уравнений связи. Так, например, уравнение связи “точка-плоскость” предписывало точке контакта $\vec{\rho}_i$ находится на плоскости, определяемой некоторой произвольной точкой и нормалью:

$$\vec{n} \cdot (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_p) = 0. \quad (1.3.1)$$

После двойного дифференцирования это уравнение уже ограничивало не координату точки контакта, а только ее ускорение относительно базиса, с которым связана плоскость:

$$\vec{n} \cdot \ddot{\vec{\rho}}_i = 0. \quad (1.3.2)$$

При численном интегрировании системы дифференциально-алгебраических уравнений неизбежны ошибки интегрирования, которые будут вызывать нарушение исходного уравнения связи (1.3.1), что приводит к “дрейфу” шарниров.

Баумгарту принадлежит идея модифицировать уравнение (1.3.2) так, чтобы его решение было асимптотически устойчивым по отношению к отклонениям $\vec{n} \cdot (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_p)$. Для этого к (1.3.2) можно добавить два дополнительных слагаемых:

$$\vec{n} \cdot \ddot{\vec{\rho}}_i + 2\alpha\vec{n} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i + \beta^2\vec{n} \cdot (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_p) = 0. \quad (1.3.3)$$

где $\alpha > 0$. Теперь ошибки интегрирования, которые приводят к нарушению (1.3.1) будут автоматически затухать. Чёткого правила выбора значений параметров α и β нет. Следует помнить о том, что хотя большие значения



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

этих коэффициентов приводят, с одной стороны, к более быстрому затуханию ошибок, с другой, большие значения вносят в систему дополнительные собственные частоты, что может усложнить процедуру численного интегрирования.

Пример использования приведенного здесь метода стабилизации уравнений связи проиллюстрирован на примере интегрирования уравнений движения физического маятника. На рисунке 3.1.3 показаны графики изменения ошибки (нарушения) уравнения связи вида (1.3.1) с использованием без использования метода стабилизации.

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)

Глава 2

Решение системы дифференциально- алгебраических уравнений

2.1. Структура матриц коэффициентов

После того как получена система уравнений движения механической системы, необходимо ее разрешить относительно старших производных и

[Закреть](#)

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

множителей Лагранжа. Эта операция производится на каждом шаге процедуры численного интегрирования системы, и поэтому необходимо, чтобы она выполнялась с наименьшими затратами машинного времени, поскольку практика показывает, что наибольшая часть машинного времени тратится именно на эту операцию. Скорость решения особенно важна при проведении стохастического моделирования механических систем, которое требует многократного проведения расчетов.

Уравнения движения механической системы с уравнениями связи в матричной форме имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{X}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Уравнения (2.1.1) представляют собой систему линейных уравнений вида:

$$\mathbf{H}\xi = \mathbf{B} \quad (2.1.2)$$

с симметрической матрицей $\mathbf{H}$. На каждом шаге процедуры численного интегрирования необходимо решать систему для определения ускорений тел системы и, если необходимо, множителей Лагранжа. Ускорение тел системы может быть определено следующим образом. Перепишем систему (2.1.1):

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{Q}^T \lambda = \mathbf{F}, \\ \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{b}. \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Из первого уравнения системы выразим ускорения $\ddot{\mathbf{X}}$:

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{Q}^T \lambda) \quad (2.1.4)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

и подставим этот результат во второе уравнение системы (2.1.3):

$$\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{Q}^T\lambda) = \mathbf{b}. \quad (2.1.5)$$

Из уравнения (2.1.6) определяется матрица множителей Лагранжа:

$$\lambda = (\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T)^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{b}), \quad (2.1.6)$$

которую необходимо подставить в уравнение (2.1.4) для определения матрицы ускорений $\ddot{\mathbf{X}}$. Размерность матрицы коэффициентов $\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T$, разложение которой необходимо выполнять на каждом шаге интегрирования, равна количеству связей в системе. Заполненность матрицы ненулевыми элементами зависит от структуры системы и скорость решения или количество операций будет зависеть от количества ненулевых элементов.

2.2. Реструктуризация матрицы коэффициентов

Другой подход для систем, состоящих из большого числа тел и имеющих древовидную структуру, предложенный в [1], основан на анализе структуры механической системы. Данный метод непосредственно решает систему (2.1), что в некоторых случаях позволяет значительно сократить количество операций на разрешение системы линейных уравнений. Сокращение количества операций достигается перераспределением элементов матрицы **H**.

Для применения представленного метода необходимо рассмотреть структуру матрицы **H** при помощи соответствующего ей графа. Граф симметричной матрицы $n \times n$ есть неориентированный граф с n вершинами. Если матрица **H** имеет ненулевой элемент H_{ij} , то существует дуга, соединяющая вершины i и j , а диагональные элементы не вносят в граф дополнительных дуг.

На рис. 2.2.1 представлен пример механической системы со структурой дерева и ее граф, где черными кружками обозначены вершины графа, соответствующие телам, белые - вершины, соответствующие связям. Нумерация вершин графа произвольная. На рис. 2.2.2 приведена структура матрицы **H**, где серым цветом обозначены ненулевые блоки.

Рассматривая структуру матрицы **H**, можно заключить, что при выполнении разложения матрицы **H** на множители например, методом Гаусса (LU - разложение), вне диагонали будут появляться дополнительные ненулевые элементы. Обнуление, например, поддиагональных элементов матрицы

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

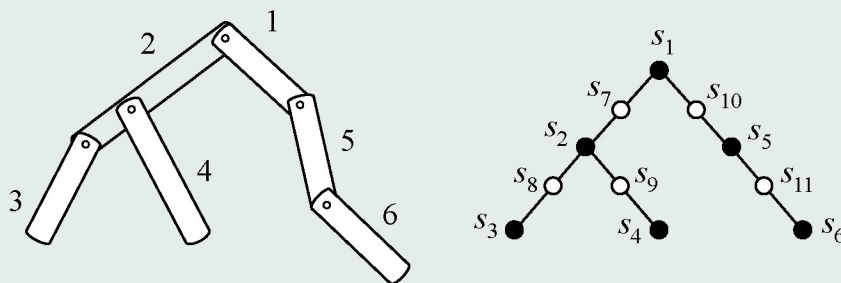


Рис. 2.2.1. Система со структурой дерева и ее граф

H (эти блоки соответствуют коэффициентам при ускорениях в уравнениях связи), будет приводить к тому, что в нижнем углу матрицы будут появляться новые ненулевые элементы, обнуление которых потребует дополнительных вычислительных затрат. Чтобы исключить появление ненулевых элементов, необходимо перераспределить элементы матрицы H следующим образом. Граф матрицы H состоит из $N + l = 11$ вершин - шести тел и пяти связей. Примем одну из вершин, например вершину, соответствующую телу 6, за корень дерева, задавая, таким образом, в графе отношение «потомок-родитель» и, следовательно, рассматривая граф как ориентированное дерево. Присвоим этой вершине индекс $N + l = 11$. Далее пронумеруем все остальные вершины так, чтобы номер любой родительской вершины был больше номера любого потомка этой вершины, то есть произведем «правильную» нумерацию графа, о которой было сказано выше в разделе посвященном описанию структуры механических систем. На рис. 2.2.3 и 2.2.4 представлены

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

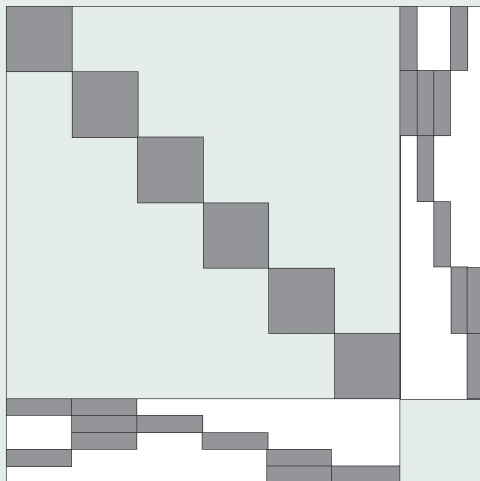


Рис. 2.2.2. Структура матрицы H

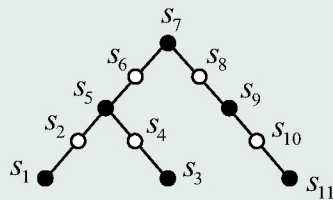


Рис. 2.2.3. Граф системы с правильной нумерацией

Закреть

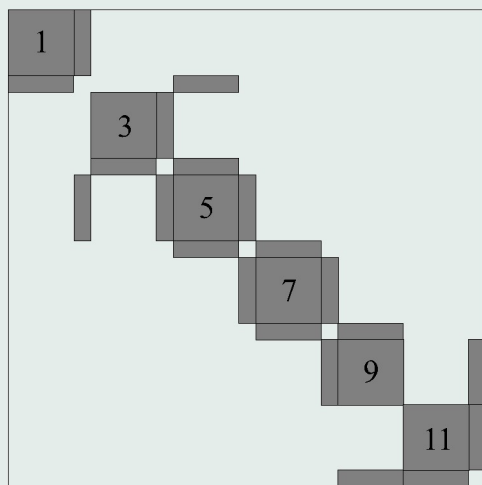


Рис. 2.2.4. Структура новой матрицы H

структура системы и матрицы H после проведения такого упорядочивания индексов вершин. Из рис. 2.2.4 следует, что при разложении преобразованной матрицы на множители для определения ускорений тел механической системы дополнительные ненулевые внедиагональные элементы появляться уже не будут.

При численном анализе задач вообще, и при решении систем линейных уравнений в частности, всегда необходимо учитывать специфику задачи. В данном случае могут быть использованы специальные алгоритмы раз-

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

ложения симметрической матрицей коэффициентов, которые позволяют сократить количество операций, необходимых для решения исходной системы (2.1.1). Для матрицы коэффициентов $\mathbf{H}$ целесообразно использовать $\mathbf{LDL}^T$ разложение, которое позволяет в два раза сократить количество операций для решения системы уравнений в сравнении с известным $\mathbf{LU}$ разложением Гаусса [4]:

$$\mathbf{LDL}^T \xi = \mathbf{b}. \quad (2.2.1)$$

Далее выполняется прямая подстановка:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (2.2.2)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{q} = \mathbf{u}, \quad (2.2.3)$$

и обратная подстановка:

$$\mathbf{L}^T \xi = \mathbf{q}. \quad (2.2.4)$$

При $\mathbf{LDL}$ разложении в унитарной матрице $\mathbf{L}$ ненулевые элементы будут находиться в тех же позициях, что и у матрицы $\mathbf{H}$. Этот факт позволяет задать итеративную процедуру разложения матрицы $\mathbf{H}$ на множители, рассмотрев левые и правые части уравнения

$$\mathbf{H} = \mathbf{LDL}^T, \quad (2.2.5)$$

и приравнять соответствующие элементы

$$\mathbf{D}_{ii} = \mathbf{H}_{ii} - \sum_{k \in \text{child}(i)} \mathbf{H}_{ki} \mathbf{D}_{kk} \mathbf{H}_{ki}^T, \quad (2.2.6)$$

$$\mathbf{L}_{i, \text{par}(i)} = \mathbf{D}_{ii}^{-1} \mathbf{H}_{i, \text{par}(i)}, \quad (2.2.7)$$



где $child(i)$ – множество индексов вершин-потомков вершины i ; $par(i)$ – вершина-родитель для вершины i .

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

2.3. Параметризация матрицы коэффициентов

Далее рассматривается метод разрешения системы линейных уравнений относительно производных и множителей Лагранжа используя дополнительные дифференциальные уравнения для собственных векторов и собственных чисел положительно-определенной матрицы коэффициентов системы. Зная, в результате численного интегрирования, собственные числа и собственные вектора, можно на каждом шаге построить обратную матрицу для вычисления неизвестных ускорений и множителей Лагранжа. Алгоритм эффективен при большой размерности матрицы и может быть реализован на параллельных вычислительных системах.

2.3.1. Алгоритм

Симметрическую положительно-определенную матрицу $\mathbf{M}$, входящую в уравнение (??), можно представить в виде произведения трех матриц [4]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{P}, \quad (2.3.1)$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ - диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы $\mathbf{M}$:

$$\boldsymbol{\lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad (2.3.2)$$

и матрицы $\mathbf{P}$, состоящей из координатных столбцов собственных векторов:

$$\mathbf{P} = (p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n)^T, \quad (2.3.3)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

где p_i - i -ый собственный вектор матрицы $\mathbf{M}$. Поскольку матрица $\mathbf{M}$ симметрична и положительно-определённа, её собственные векторы ортогональны:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{E}, \quad (2.3.4)$$

а все собственные числа положительны. Учитывая условие ортогональности матрицы $\mathbf{P}$, обратную матрицу $\mathbf{M}^{-1}$ можно определить следующим образом:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{P}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}. \quad (2.3.5)$$

Следовательно, зная в каждый момент времени матрицы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{S}$ при помощи выражения (2.3.5) можно определить обратную матрицу масс и вычислить столбец вторых производных $\ddot{\mathbf{q}}$. Алгебраическое определение матриц собственных чисел и векторов, также как и обращение матрицы, является весьма трудоёмкой задачей. В работе [2] предлагается вычислить разложение (2.3.1) матрицы $\mathbf{M}$ только в начальный момент времени, а в дальнейшем для определения $\mathbf{C}$ и λ использоваться простые дифференциальные уравнения.

Определим производную матрицы собственных векторов. Матрица $\mathbf{C}(t)$ ортогональна и зависит от времени, её производная вычисляется аналогично производной матрицы направляющих косинусов [3]:

$$\dot{\mathbf{P}} = -\tilde{\Omega} \mathbf{P}, \quad (2.3.6)$$

где $\tilde{\Omega}$ - кососимметрическая матрица угловых скоростей собственных векторов. Элемент матрицы Ω_{ij} представляет собой угловую скорость вращения пары векторов p_i, p_j вокруг направления, перпендикулярного плоскости

ими образуемой. Кососимметричность матрицы $\tilde{\Omega}$ можно показать продифференцировав соотношение $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{E}$:

$$\frac{d(\mathbf{P}^T \mathbf{P})}{dt} = \dot{\mathbf{P}}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \dot{\mathbf{P}}^T = 0. \quad (2.3.7)$$

Подставив в последнее выражение для $\dot{\mathbf{P}}$ (2.3.6) получим:

$$-\mathbf{C}^T \tilde{\Omega}^T \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \tilde{\Omega} \mathbf{C} = -\tilde{\Omega} \mathbf{C} \mathbf{C}^T - \mathbf{C} \mathbf{C}^T \tilde{\Omega}^T = 0. \quad (2.3.8)$$

Выражение (2.3.6) подобно кинематическому уравнению для матрицы направляющих косинусов, где матрица $\tilde{\Omega}$ составлена из компонент угловых скоростей подвижной системы координат относительно неподвижной.

Продифференцируем выражение (2.3.1):

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{P}^T \lambda \dot{\mathbf{P}} + \dot{\mathbf{P}}^T \lambda \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \dot{\lambda} \mathbf{P}. \quad (2.3.9)$$

Введём матрицу:

$$\xi = \tilde{\Omega} \lambda - \lambda \tilde{\Omega}. \quad (2.3.10)$$

Элемент матрицы ξ определяется следующим образом:

$$\xi_{ij} = \Omega_{ij}(\lambda_j - \lambda_i) \quad (2.3.11)$$

С учётом выражения (2.3.10) производную матрицы масс можно переписать в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{P}^T (\xi + \dot{\lambda}) \mathbf{P}. \quad (2.3.12)$$

Введём матрицу μ :

$$\mu = \mathbf{P} \dot{\mathbf{M}} \mathbf{P}^T. \quad (2.3.13)$$

Учитывая (2.3.11) матрицу μ можно переписать в виде:

$$\mu = \xi + \dot{\lambda}, \quad (2.3.14)$$

компоненты матрицы μ определяются следующим образом:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \Omega_{ij}(\lambda_j - \lambda_i), & i \neq j \\ \dot{\lambda}_i, & i = j \end{cases} \quad (2.3.15)$$

Последнее уравнение позволяет выразить компоненты угловой скорости Ω_{ij} собственных векторов если собственные числа λ_i и λ_j различны:

$$\Omega_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j. \quad (2.3.16)$$

Производная собственного числа $\dot{\lambda}_i$ определяется из выражения (2.3.15):

$$\dot{\lambda}_i = \mu_{ii}, \quad (2.3.17)$$

Производная матрицы собственных векторов определяется при помощи выражений (2.3.6), (2.3.16) и (2.3.13). Полученные дифференциальные уравнения используются для определения матриц $\mathbf{P}$ и $\dot{\lambda}$, и наконец, обратной матрицы:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{P}^T \dot{\lambda}^{-1} \mathbf{P} \quad (2.3.18)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Здесь изложена основная идея определения обратной матрицы масс при помощи дополнительных дифференциальных уравнения, в самой работе [2] помимо этого рассмотрен случай равных пар собственных чисел, что не позволяет использовать выражение (2.3.16) для вычисления угловых скоростей, а также процедура коррекции матрицы $\mathbf{P}$ при нарушении условий ее ортогональности, что неизбежно при использовании приближённых численных методов интегрирования.

Рассмотрим приложение представленного метода обращения симметричной положительно-определённой матрицы для решения системы линейных уравнений, возникающей при моделировании динамики системы многих тел РКТ [?]. Уравнения движения систем твёрдых тел записываются в форме уравнений Ньютона-Эйлера, которые решаются совместно с уравнениями связи. Матричная форма системы уравнений многих тел имеет следующий вид [?]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (2.3.19)$$

где $\mathbf{M}$ - блочно-диагональная матрица, составленная из матриц $\mathbf{M}_i$:

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_i \end{pmatrix} \quad (2.3.20)$$

где m_i - масса тела i ; $\mathbf{J}_i$ - тензор инерции тела i ; $\mathbf{E}$ - единичная матрица; $\ddot{\mathbf{x}}$ - матрица столбец линейных и угловых ускорений тел системы; λ - матрица-столбец множителей Лагранжа; $\mathbf{P}$ - матрица активных сил и моментов, действующих на систему; $\mathbf{Q}$ - матрица связей, вид которой определяется видами

шарниров, присутствующих в системе. Раскроем систему (2.3.19):

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}^T\lambda = \mathbf{P}, \\ \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{V}. \end{cases} \quad (2.3.21)$$

Из первого уравнения системы (2.3.21) выразим ускорения $\ddot{\mathbf{x}}$ и подставим во второе уравнение системы:

$$\mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T\lambda = \mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{V}. \quad (2.3.22)$$

Для систем постоянного состава матрица масс $\mathbf{M}^{-1}$ вычисляется один раз до начала процесса интегрирования. На каждом шаге численного метода интегрирования необходимо решать СЛУ (2.3.22) для определения множителей Лагранжа λ , которые затем подставляются в первое уравнение системы (2.3.21) для определения ускорений:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}^T\lambda). \quad (2.3.23)$$

Матрица масс $\mathbf{M}$ системы является блочно-диагональной и положительно-определённой. Матрица $\mathbf{X}^T\mathbf{M}\mathbf{X}$ также будет положительно-определённой если ранг матрицы $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times k}$ будет равен k . [4]. В соответствии с этим утверждением, для независимой системы уравнений связи матрица коэффициентов СЛУ (2.3.22) $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T$ также будет положительно-определённой, и следовательно можно использовать представленный выше алгоритм параметризации симметричной и положительно-определённой матрицы для решения системы (2.3.22).

Производная матрицы $\mathbf{H}$ для механической системы постоянного состава определяется следующим образом:

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{M}^{-1}\dot{\mathbf{Q}}^T \quad (2.3.24)$$

Определим элементы матрицы $\dot{\mathbf{Q}}$ для рассмотренных в работе [?] двух типов уравнений связи. Для $k^{\text{го}}$ уравнения связи вида «точка-плоскость» $k^{\text{ая}}$ строка матрицы $\mathbf{Q}$ будет содержать два отличных от нуля блока:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ki} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \mathbf{A}_i^T & \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \tilde{\rho}_{ki}^{(i)} \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q}_{kj} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \mathbf{A}_i^T & \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_j \tilde{\rho}_{kj}^{(j)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Производные блоков матрицы связей определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_{ki} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \dot{\mathbf{A}}_i & \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \dot{\tilde{\rho}}_{ki}^{(i)} \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{kj} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \dot{\mathbf{A}}_i & \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_j^{-1} \tilde{\rho}_{kj}^{(j)} + \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \mathbf{A}_i \dot{\mathbf{A}}_j^{-1} \tilde{\rho}_{kj}^{(j)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Подставляя в последнее выражение производные матриц преобразования координат $\mathbf{A}_i$ и $\mathbf{A}_j$, получим окончательные выражения для производных элементов матрицы связи «точка-плоскость»:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_{ki} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \mathbf{A}_i \tilde{\omega}_i^{(i)} & \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \dot{\tilde{\rho}}_{ki}^{(i)} \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{kj} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \mathbf{A}_i \tilde{\omega}_i^{(i)} & \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \mathbf{A}_i \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_j^{-1} \tilde{\rho}_{kj}^{(j)} - \mathbf{n}_{ki}^{(i)T} \mathbf{A}_i \tilde{\omega}_j^{(j)} \mathbf{A}_j^{-1} \tilde{\rho}_{kj}^{(j)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Рассмотрим уравнение связи, ограничивающей относительное вращение двух тел, которое имеет вид [?]:

$$\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \epsilon_{ji}^{(i)} = 0, \quad (2.3.28)$$



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

где координатный столбец углового ускорения тела j относительно тела i определяется следующим образом:

$$\epsilon_{ji}^{(i)} = \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^T \dot{\omega}_j^{(j)} - \dot{\omega}_i^{(i)}. \quad (2.3.29)$$

Блоки матрицы связей $\mathbf{Q}_{ki}$ и $\mathbf{Q}_{kj}$, при помощи которых записывается уравнение связи:

$$\mathbf{Q}_{ki} \ddot{\mathbf{X}}_i + \mathbf{Q}_{kj} \ddot{\mathbf{X}}_j = b_k, \quad (2.3.30)$$

имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ki} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)})^T \end{pmatrix} \\ \mathbf{Q}_{kj} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathbf{n}_{ij}^{(i)T} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

Продифференцировав $\mathbf{Q}_{ki}$ и $\mathbf{Q}_{kj}$ получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_{ki} &= \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{A}_j \dot{\omega}_j^{(j)} \mathbf{A}_i^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} - \mathbf{A}_j \tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)})^T \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{Q}}_{kj} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Таким образом, зная производные элементов $\mathbf{Q}_{ki}$, $\mathbf{Q}_{kj}$, на каждом шаге процедуры численного интегрирования можно определить матрицу связей $\dot{\mathbf{Q}}$, при помощи которой будут вычислены матрицы μ и матрица угловых скоростей $\tilde{\Omega}$. При помощи последних определяются производные собственных чисел и векторов матрицы $\mathbf{H} = \mathbf{Q} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}^T$. Полученные в результате решения дифференциальных уравнений матрицы собственных чисел и собственных векторов используются для определения обратной матрицы $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{P}^T \lambda^{-1} \mathbf{P} \quad (2.3.33)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

и дальнейшего определения ускорений тел механической системы.

2.3.2. Пример

Рассмотрим модель физического маятника с 6 степенями свободы. Система состоит из двух тел: тело 1 при помощи сферического шарнира соединяется с неподвижным телом 0, тела 1 и 2 также соединены при помощи сферического шарнира. Масса каждого стержня 1кг, длина - 1м. Механическая система начинает движение с нулевыми начальными условиями под действием сил веса, направленных вдоль оси $n_z^{(0)}$ «вниз». В начальный момент стержни занимают горизонтальное положение: ось стержней лежит на оси $n_y^{(0)}$. Координаты радиус-вектора шарнирной точки 1 в базисе, связанном с телом 1: $\rho_{10}^{(1)} = (0 \ 0 \ 0,5)^T$, координаты радиус-вектора шарнирной точки 2 в базисе, связанном с телом 2: $\rho_{21}^{(2)} = (0 \ 0 \ 0,5)^T$. Для рассматриваемой системы необходимо записать шесть уравнений связи: по три для каждого сферического шарнира. Матрица связей $Q \in R^{8 \times 12}$ будет иметь вид:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0_{1 \times 6} \\ Q_{21} & 0_{1 \times 6} \\ Q_{31} & 0_{1 \times 6} \\ Q_{41} & Q_{42} \\ Q_{51} & Q_{52} \\ Q_{61} & Q_{62} \end{pmatrix} \quad (2.3.34)$$

Численное интегрирование уравнений движения метод производилось в

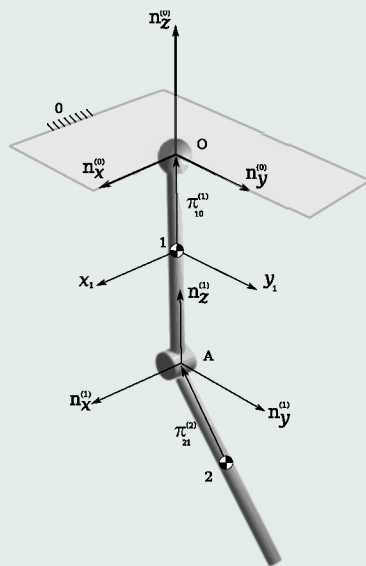


Рис. 2.3.1. Физический маятник с четырьмя степенями свободы

системе MATLAB. На всём интервале интегрирования от 0 до 4 секунд каждую $\frac{1}{10}$ с производилась коррекция матриц $\mathbf{P}$ и λ методом Якоби, для сохранения условия $\mathbf{PMP}^T = \lambda$.

На рисунке ?? изображён график изменения полной энергии рассматриваемой механической системы. Поскольку рассматриваемая механическая система консервативна, при её движении должно выполняться условие посто-

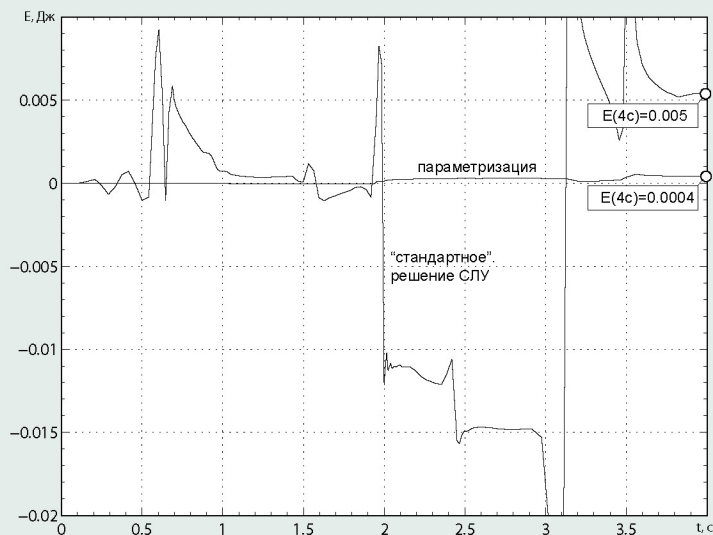


Рис. 2.3.2. Механическая энергия системы.

яинства механической энергии $E = const$. Как показали результаты расчётов, представленный метод решения СЛУ для определения ускорений продемонстрировал высокую точность. Для сравнения, на том же графике показано изменение полной энергии системы при решении СЛУ традиционным алгебраическим методом (для симметричной и положительно-определённой матрицы коэффициентов MATLAB использует разложение Холецкого). Представленный алгоритм, использующий разложение матрицы коэффициентов, требует боль-

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть



ших затрат машинного времени и не может соперничать в производительности со обычным методом решения СЛУ, при прочих равных условиях. Однако, для механических систем, состоящих из большого числа тел и, соответственно, с большими матрицами масс преимущество представленного метода может быть достигнуто за счет более простой процедуры декомпозиции алгоритма для его реализации на многопроцессорных системах.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Глава 3

Примеры формирования уравнений движения

3.1. Трехзвенный маятник

Рассмотрим процесс построения модели системы трех твёрдых тел, представляющих собой систему стержней связанных цилиндрическими и сферическими шарнирами. Схема системы изображена на рисунке 3.1.1. Движение системы происходит под действием силы тяжести, которая действует вдоль оси y в противоположном её направлению y_0 . Стержень 1 присоединён к неподвижной “земле” при помощи сферического шарнира, к стержню 1 прикрепляется стержень 2 при помощи сферического шарнира, а к

стержню 2 присоединяется стержень 3 при помощи цилиндрического шарнира C . Все стержни имеют одинаковую длину $l_1 = l_2 = l_3 = l = 1\text{м}$, массу $m_1 = m_2 = m_3 = m = 1\text{кг}$ и тензоры инерции, относительно своих главных центральных осей:

$$\mathbf{J}_1^{(1)} = \mathbf{J}_2^{(2)} = \mathbf{J}_3^{(3)} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

$J_x = 0.013 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ and $J_y = J_z = 0.083 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

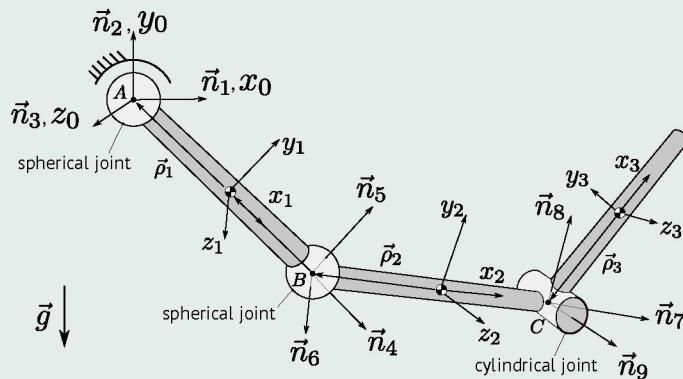


Рис. 3.1.1. Трехзвенный маятник

Поместим в шарнирной точке A три единичных вектора $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, ориентированных вдоль неподвижных осей x_0, y_0, z_0 . Точка A и эти три вектора

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

определяют три плоскости, жестко связанных с неподвижной системой координат. Уравнения связи для шарнира А имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q}_{0k}\mathbf{X}_0 + \mathbf{Q}_{1k}\mathbf{X}_1 = b_k, k = 1 \dots 3 \quad (3.1.1)$$

Поскольку шарнир А соединяет стержень 1 с неподвижной "землёй" - телом 0, то $\ddot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_{3 \times 3}$, тогда последнее уравнение принимает следующий вид:

$$\mathbf{Q}_{1k}\mathbf{X}_1 = b_k, k = 1 \dots 3 \quad (3.1.2)$$

где $\mathbf{Q}_{1k}$ определяется как:

$$\mathbf{Q}_{k1} = \begin{pmatrix} [c|c]\mathbf{n}_k^{(0)T} & -\mathbf{n}_k^{(0)T}\mathbf{A}^1\tilde{\rho}_1^{(1)} \end{pmatrix}, k = 1 \dots 3$$

матрица ускорений:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} [c|c]\ddot{\mathbf{r}}_1^{(0)} & \dot{\omega}_1^{(1)} \end{pmatrix}^T$$

Правая часть уравнения связи (3.1.2) запишется следующим образом:

$$b_k = -\mathbf{A}^1\tilde{\omega}_1^{(1)}\tilde{\omega}_1^{(1)}\rho_1^{(1)}, k = 1, 2, 3. \quad (3.1.3)$$

где

$$\rho_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = const.$$

Координатные столбцы единичных векторов в базисе $x_0y_0z_0$ имеют следующие значения:

$$\mathbf{n}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \mathbf{n}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \mathbf{n}_3^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$



Три уравнения связи для шарнира В записываются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_{1k}\mathbf{X}_1 + \mathbf{Q}_{2k}\mathbf{X}_2 = b_k, k = 4 \dots 6 \quad (3.1.4)$$

здесь матрица-строка коэффициентов при ускорениях тела 1 $\mathbf{Q}_{1k}$ определяется как:

$$\mathbf{Q}_{1k} = \left([c|c] - \mathbf{n}_k^{(1)T} \mathbf{A}^{1T} \quad \mathbf{n}_k^{(1)T} \tilde{\rho}_1^{(1)} \right), k = 4 \dots 6$$

матрица-строка коэффициентов при ускорениях тела 2 $\mathbf{Q}_{2k}$:

$$\mathbf{Q}_{2k} = \left([c|c] \mathbf{n}_k^{(1)T} \mathbf{A}^{1T} \quad -\mathbf{n}_k^{(1)T} \mathbf{A}^{1T} \mathbf{A}^2 \tilde{\rho}_2^{(2)} \right), k = 4 \dots 6$$

Правая часть уравнения связи - скаляр b_k :

$$\begin{aligned} b_k = \mathbf{n}_k^{(1)T} (2\tilde{\omega}_1^{(1)} \mathbf{A}^{1T} \dot{\rho}_1^{(0)} - \tilde{\omega}_1^{(1)} \tilde{\omega}_1^{(1)} \mathbf{A}^{1T} \rho_1^{(0)} \\ - \mathbf{A}^{1T} \mathbf{A}^2 \tilde{\omega}_2^{(2)} \tilde{\omega}_2^{(2)} \rho_2^{(2)}), k = 4, 5, 6. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Единичные векторы, задающие направление плоскостей, жестко связаны со стержнем 1. Координаты этих векторов определяются следующим образом:

$$\mathbf{n}_4^{(1)} = (1 \ 0 \ 0)^T, \mathbf{n}_5^{(1)} = (0 \ 1 \ 0)^T, \mathbf{n}_6^{(1)} = (0 \ 0 \ 1)^T.$$

Для описания цилиндрического шарнира С необходимо записать три уравнения связи типа “точка-плоскость” и два уравнения, которые ограничивают вращение стержня 3 относительно стержня 2 вокруг осей $\vec{n}_{10}$ and $\vec{n}_{11}$.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Первые три уравнения имеют структуру аналогичную уравнениям связи для шарнира В:

$$\mathbf{Q}_{2k}\mathbf{X}_2 + \mathbf{Q}_{3k}\mathbf{X}_3 = b_k, k = 7 \dots 9 \quad (3.1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{2k} &= \begin{pmatrix} [c|c] - \mathbf{n}_k^{(2)T} \mathbf{A}^{2T} & \mathbf{n}_k^{(2)T} \tilde{\rho}_2^{(2)} \end{pmatrix}, \quad k = 7 \dots 9 \\ \mathbf{Q}_{3k} &= \begin{pmatrix} [c|c] \mathbf{n}_k^{(2)T} & -\mathbf{n}_k^{(2)T} \mathbf{A}^3 \tilde{\rho}_3^{(3)} \end{pmatrix}, \quad k = 7 \dots 9 \end{aligned}$$

Единичные векторы, жестко связанные со стержнем 2 имеют следующие координаты:

$$\mathbf{n}_7^{(2)} = (1 \ 0 \ 0)^T, \quad \mathbf{n}_8^{(2)} = (0 \ 1 \ 0)^T, \quad \mathbf{n}_9^{(2)} = (0 \ 0 \ 1)^T.$$

Два уравнения связи, которые ограничивают относительное вращение стержней имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q}_{2k}\mathbf{X}_2 + \mathbf{Q}_{3k}\mathbf{X}_3 = b_k, k = 10, 11 \quad (3.1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{2k} &= \begin{pmatrix} [c|c] \mathbf{0} & -\mathbf{n}_k^{(2)T} \end{pmatrix}, \quad k = 10, 11 \\ \mathbf{Q}_{3k} &= \begin{pmatrix} [c|c] \mathbf{0} & (\mathbf{A}^{3T} \mathbf{A}^{2T} \mathbf{n}_k^{(2)})^T \end{pmatrix}, \quad k = 10, 11 \end{aligned}$$

Координатные столбцы единичных векторов, входящих в последние выражения и вдоль которых запрещено относительное вращение стержней, определяются следующим образом:

$$\mathbf{n}_{10}^{(2)} = \mathbf{n}_7^{(2)}, \quad \mathbf{n}_{11}^{(2)} = \mathbf{n}_8^{(2)}.$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)

Матричная система уравнений, описывающая движение рассматриваемого механизма, будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & 0 & \Psi_{11}^T & \Psi_{12}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 & 0 & 0 & \Psi_{22}^T & \Psi_{23}^T \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_3 & 0 & 0 & \Psi_{33}^T \\ \Psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{12} & \Psi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{23} & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{X}_3 \\ \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{pmatrix} \quad (3.1.8)$$

Блочные матрицы Ψ_{1k} ($k = 1 \dots 3$) включают в себя матрицы коэффициентов Q_{ij} :

$$\Psi_{11} = \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{13} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{12} = \begin{pmatrix} Q_{14} \\ Q_{15} \\ Q_{16} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{22} = \begin{pmatrix} Q_{24} \\ Q_{25} \\ Q_{26} \end{pmatrix},$$

$$\Psi_{23} = \begin{pmatrix} Q_{27} \\ Q_{28} \\ Q_{29} \\ Q_{2,10} \\ Q_{2,11} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{33} = \begin{pmatrix} Q_{37} \\ Q_{38} \\ Q_{39} \\ Q_{3,10} \\ Q_{3,11} \end{pmatrix},$$

Матрица-столбец Λ_k включает в себя множители Лагранжа для уравнения связи k :

$$\Lambda_1 = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3), \quad \Lambda_2 = (\lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6), \quad \Lambda_3 = (\lambda_7 \quad \lambda_8 \quad \lambda_9 \quad \lambda_{10} \quad \lambda_{11})$$

[Закреть](#)

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Внешние силы и моменты собраны в матрице-столбце $\mathbf{P}_i$:

$$\mathbf{P}_k = \left(\mathbf{L}_k^{(k)} + \tilde{\omega}_k^{(k)} \mathbf{J}_k^{(k)} \omega_k^{(k)} \right), \quad \mathbf{F}_k^{(0)} = (0 \quad -mg \quad 0), \quad \mathbf{L}_k^{(k)} = (0 \quad 0 \quad 0).$$

Матрица-столбец $\mathbf{B}_k$ включает в себя правые части уравнений связи:

$$\mathbf{B}_1 = ([c|c|c]b_1 \quad b_2 \quad b_3)^T, \quad \mathbf{B}_2 = ([c|c|c]b_4 \quad b_5 \quad b_6)^T,$$

$$\mathbf{B}_3 = ([c|c|c|c|c]b_7 \quad b_8 \quad b_9 \quad b_{10} \quad b_{11})^T$$

Уравнения (3.1.8) должны быть дополнены кинематическими уравнениями для определения углового положения тел системы, что необходимо для вычисления матриц $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$. Это могут быть кинематические уравнения Эйлера, кинематические уравнения в кватернионах. Кинематические уравнения могут быть записаны непосредственно для матриц поворота:

$$\dot{\mathbf{A}}^i = \mathbf{A}^i \tilde{\omega}_i^{(i)}. \quad (3.1.9)$$

Далее приведены результаты интегрирования системы уравнений (3.1.8) с кинематическими уравнениями (3.1.9). Интегрирование дифференциальных уравнений проводилось в системе MATLAB методом Рунге-Кутты (rkf45). На рисунке 4.2.13 показано движение системы под действием силы тяжести. Для оценки точности интегрирования, построен график полной энергии рассматриваемой консервативной системы, который изображен на рисунке 3.1.2.



График полной энергии системы построен для двух случаев. В первом случае использовались уравнения связи в той форме в которой они были в учебном пособии. Во втором случае уравнения связи были модифицированные путем добавления дополнительных слагаемых в правую часть уравнения, которые бы компенсировали нарушение уравнений связи. Рисунок 3.1.3 демонстрирует накопление ошибки в уравнениях связи (ϵ_r) для этих двух случаев.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

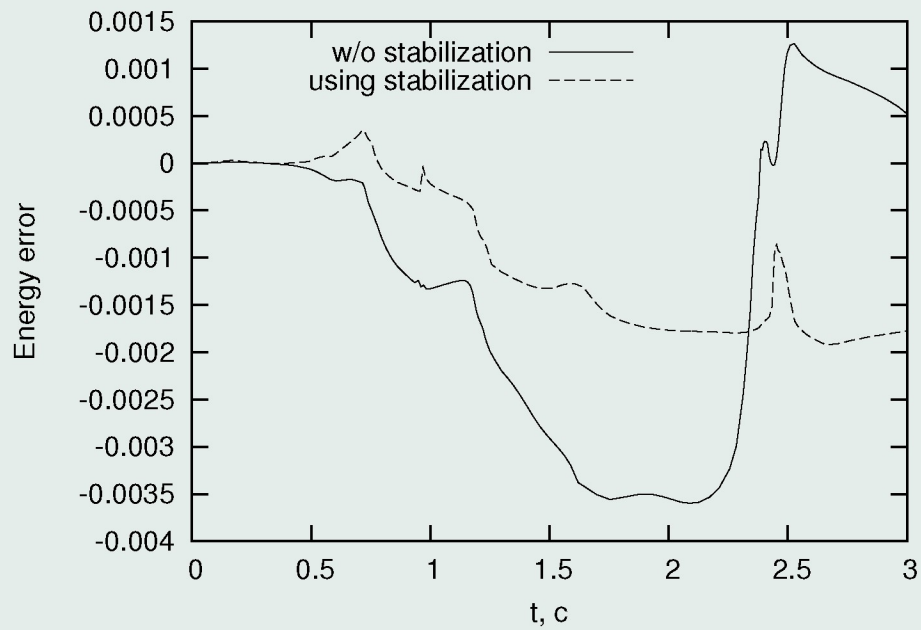
[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)

Рис. 3.1.2. Полная энергия системы

[Закреть](#)

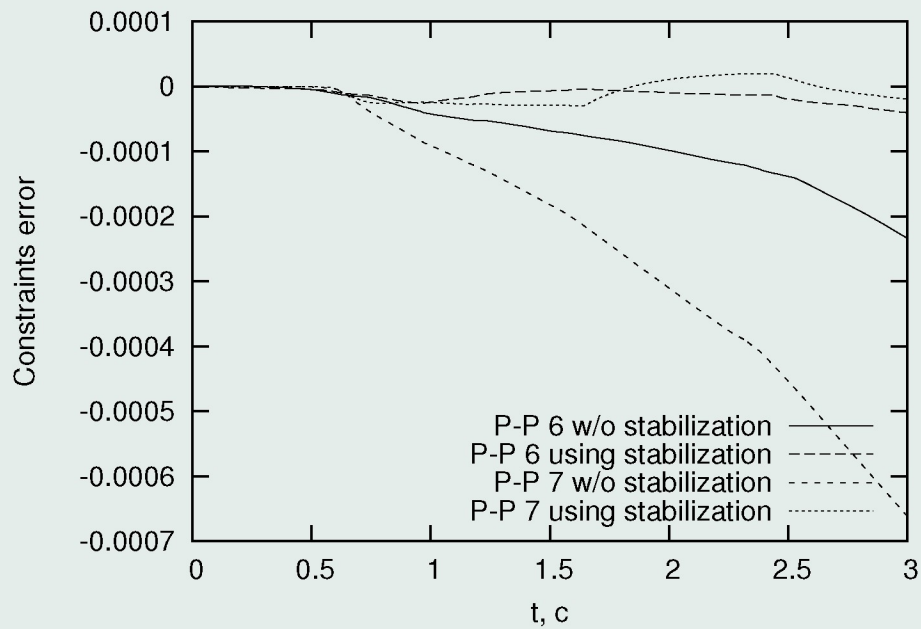


Рис. 3.1.3. Дрейф шарниров - нарушение уравнения связи

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

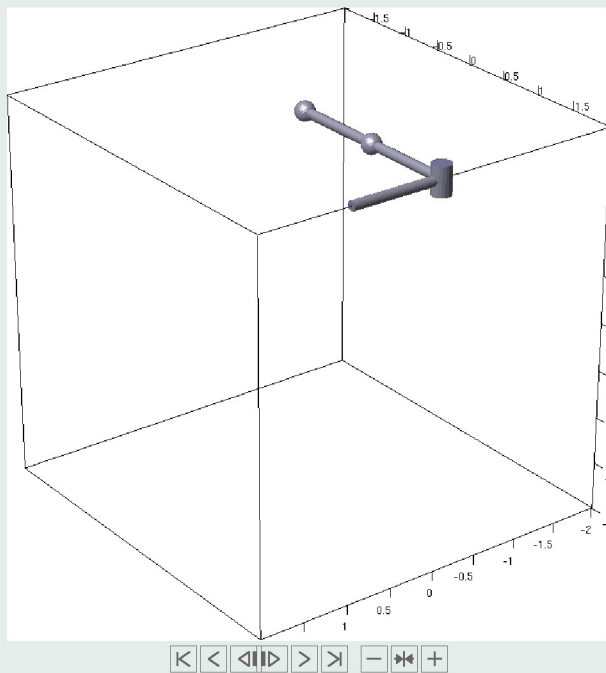


Рис. 3.1.4. Движение физического маятника

Закреть



3.2. Механические системы ракетно-космической техники

Далее рассмотрим примеры, иллюстрирующие построение матричных уравнений связи и уравнений движения механических систем ракетно-космической техники. Рассматривается система раскрытия створок панели солнечных батарей космического аппарата, система отделения боковых блоков РН “Союз” и система отделения створок хвостового отсека РН.

3.2.1. Система раскрытия солнечных батарей

Рассмотрим задачу моделирования процесса раскрытия панелей солнечных батарей космического аппарата. Панель солнечных батарей КА может состоять из нескольких створок, соединенных шарнирами. Построим уравнения движения механической системы в предположении абсолютной жесткости створок.

На рисунке 3.2.1 показана схема рассматриваемой механической системы, на которой изображен космический аппарат и панель батареи, состоящая из двух створок. Для простоты полагаем, что смежные створки соединены одним цилиндрическим шарниром (в действительности между створками устанавливают два шарнира: один цилиндрический и один сферический). Также будем рассматривать только одну панель солнечной батареи, поскольку полученные далее уравнения для второй панели будут иметь аналогичный вид.

Выбор метода формирования уравнений движения створок солнечных

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

батарей зависит от структуры системы. Для системы с незамкнутой структурой может быть использован метод отдельных тел, который был рассмотрен в разделе ???. Использование метода отдельных тел, при корректной реализации алгоритма на ЭВМ, позволить существенно сократить время численного интегрирования в сравнении с матричным методом, использующим уравнения связи, за счет исключения из алгоритма процедуры формирования “большой” матрицы инерции всей механической системы.

Для систем с замкнутой структурой, пример которой был представлен на рисунке ??? можно использовать предлагаемый здесь матричный метод. Поскольку пример реализации алгоритма метода отдельных тел был рассмотрен ранее, запишем уравнения движения системы, изображенной на рисунке 3.2.1 используя матричную форму уравнений с использованием уравнений связи.

Движение системы будет рассматриваться относительно инерциальной системы координат $x_0y_0z_0$. Положение тел: КА и двух створок задается векторами $\vec{r}_c, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ и параметрами, задающими угловое положение тел: это могут быть углы Эйлера, углы Брайнта, кватернионы. Если эти параметры выбраны, то в каждый момент времени можно вычислить необходимые далее матрицы преобразования координат.

Уравнения связи для цилиндрического шарнира, соединяющего КА с первой створкой, состоят из трех уравнений связи “точка-плоскость” (три плоскости задаются тремя векторами $\vec{n}_{1x}^{(c)}, \vec{n}_{1y}^{(c)}, \vec{n}_{1z}^{(c)}$) и двух уравнений связи, ограничивающих вращение створки относительно КА вокруг осей, опреде-

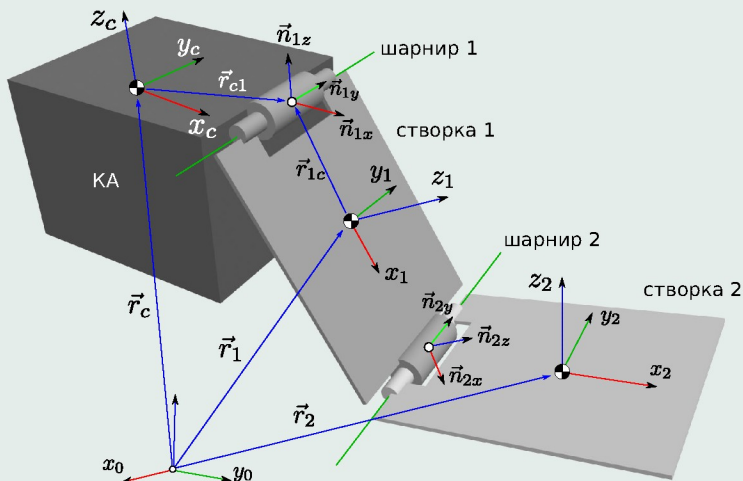


Рис. 3.2.1. Схема панели солнечной батареи

ляемых векторами $\vec{n}_{1x}^{(c)}$ и $\vec{n}_{1z}^{(c)}$. Уравнения связи для шарнира 1:

$$\mathbf{Q}_i \ddot{\mathbf{X}}_c + \mathbf{Q}_{1i} \ddot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{b}_i, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (3.2.1)$$

где $\ddot{\mathbf{X}}_c = (\ddot{\mathbf{r}}_c^{(0)} \quad \varepsilon_c^{(c)T})^T$, $\ddot{\mathbf{X}}_1 = (\ddot{\mathbf{r}}_1^{(0)} \quad \varepsilon_1^{(1)T})^T$. Матрицы коэффициентов $\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{1i}$ для первых трех уравнений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{ci} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_i^{(c)T} \mathbf{A}^c T & \mathbf{n}_i^{(c)T} \tilde{\mathbf{r}}_{c1}^{(c)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{1i} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i^{(c)T} \mathbf{A}^c T & -\mathbf{n}_i^{(c)T} \mathbf{A}^c T \mathbf{A}^1 \tilde{\mathbf{r}}_{1c}^{(1)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

где $\mathbf{A}^c$ - матрица преобразования координат из базиса $x_0y_0z_0$ в базис, связанный с КА; $\mathbf{A}^1$ - матрица преобразования координат из базиса $x_0y_0z_0$ в базис, связанный с первой створкой $x_1y_1z_1$. Правая часть первых трех уравнений связи записывается следующим образом:

$$b_i = \mathbf{n}_i^{(c)T} \left(\tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{A}^{cT} \dot{r}_{c1}^{(0)} - \tilde{\omega}_c^{(c)} \tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{A}^{cT} r_{c1}^{(0)} + \tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{A}^{cT} \dot{\mathbf{r}}_{c1}^{(0)} - \mathbf{A}^{cT} \mathbf{A}^1 \tilde{\omega}_1^{(1)} \tilde{\omega}_1^{(1)} r_{1c}^{(1)} \right) \quad (3.2.3)$$

В выражениях (3.2.2) и (3.2.3) i принимает значения 1, 2 и 3. Координатные столбцы единичных векторов задаются по следующему правилу:

$$n_1^{(c)} = n_{1x}^{(c)}, \quad n_2^{(c)} = n_{1y}^{(c)}, \quad n_3^{(c)} = n_{1z}^{(c)}.$$

Матрицы коэффициентов последних двух уравнений, ограничивающих вращение створки 1 относительно направлений $\vec{n}_{1x}^{(c)}$ и $\vec{n}_{1z}^{(c)}$ запишем, используя результаты раздела ??:

$$\mathbf{Q}_{ci} = \begin{pmatrix} 0 & -(\mathbf{n}_i^{(c)})^T \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{1i} = \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{A}^1 \mathbf{A}^{cT} \mathbf{n}_i^{(c)})^T \end{pmatrix}.$$

Правая часть уравнений связи (3.2.1) для $i = 4, 5$ будет иметь следующий вид:

$$b_i = \tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{A}^c \mathbf{A}^{1T} \omega_1^{(1)} \mathbf{n}_i^{(c)}.$$

где для $i = 4, 5$:

$$n_4^{(c)} = n_{1x}^{(c)}, \quad n_5^{(c)} = n_{1z}^{(c)}.$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Аналогично можно получить уравнения связи для второго цилиндрического шарнира, соединяющего створки 1 и 2. Единичные векторы, входящие в уравнения связи будут жестко связаны с первой створкой:

$$\mathbf{Q}_{1i} + \mathbf{Q}_{2i} = \mathbf{b}_i, \quad i = 6, \dots, 10. \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{1i} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_i^{(1)T} \mathbf{A}^{1T} & \mathbf{n}_i^{(1)T} \tilde{\mathbf{r}}_{12}^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{2i} &= \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i^{(1)T} \mathbf{A}^{1T} & -\mathbf{n}_i^{(1)T} \mathbf{A}^{1T} \mathbf{A}^2 \tilde{\mathbf{r}}_{21}^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$b_i = \mathbf{n}_i^{(1)T} \left(\tilde{\omega}_1^{(1)} \mathbf{A}^{1T} \dot{\mathbf{r}}_{12}^{(0)} - \tilde{\omega}_1^{(1)} \tilde{\omega}_1^{(1)} \mathbf{A}^{1T} r_{12}^{(0)} + \tilde{\omega}_1^{(1)} \mathbf{A}^{1T} \dot{\mathbf{r}}_{12}^{(0)} - \mathbf{A}^{1T} \mathbf{A}^2 \tilde{\omega}_2^{(2)} \tilde{\omega}_2^{(2)} r_{21}^{(2)} \right) \quad (3.2.6)$$

В уравнениях связи для второго шарнира координатные столбцы единичных векторов задаются по следующему правилу:

$$n_6^{(1)} = n_{2x}^{(1)}, \quad n_7^{(1)} = n_{2y}^{(1)}, \quad n_8^{(1)} = n_{2z}^{(c)}.$$

Для уравнений связи $i = 9, 10$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{1i} &= \begin{pmatrix} 0 & -\left(\mathbf{n}_i^{(1)}\right)^T \end{pmatrix}, \\ \mathbf{Q}_{2i} &= \begin{pmatrix} 0 & \left(\mathbf{A}^2 \mathbf{A}^{1T} \mathbf{n}_i^{(1)}\right)^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

и

$$b_i = \tilde{\omega}_1^{(1)} \mathbf{A}^1 \mathbf{A}^{2T} \omega_2^{(2)} \mathbf{n}_i^{(1)}.$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Координатные столбцы единичных векторов задаются по следующему правилу:

$$n_9^{(1)} = n_{2x}^{(1)}, \quad n_{10}^{(1)} = n_{2z}^{(1)}.$$

Полученные десять уравнений связи можно объединить в одно матричное уравнение:

$$\mathbf{Q}\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}, \quad (3.2.7)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{c1} & Q_{11} & 0 \\ Q_{c2} & Q_{12} & 0 \\ Q_{c3} & Q_{13} & 0 \\ Q_{c4} & Q_{14} & 0 \\ Q_{c5} & Q_{15} & 0 \\ 0 & Q_{16} & Q_{26} \\ 0 & Q_{17} & Q_{27} \\ 0 & Q_{18} & Q_{28} \\ 0 & Q_{19} & Q_{29} \\ 0 & Q_{1,10} & Q_{2,10} \end{pmatrix};$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = (\mathbf{a}_c \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3)^T;$$

$$\mathbf{a}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_c^{(0)} & \varepsilon_c^{(c)} \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^{(0)} & \varepsilon_1^{(1)} \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_2^{(0)} & \varepsilon_2^{(2)} \end{pmatrix}^T;$$

$$\mathbf{B} = (b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad b_5 \quad b_6 \quad b_7 \quad b_8 \quad b_9 \quad b_{10})^T$$



Домашняя



Назад

На весь экран

Уравнения движения системы, состоящей из КА и двух створок будут иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_c & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_c^{(0)} \\ \dot{\omega}_c^{(c)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_c^{(0)} \\ \mathbf{L}_c^{(c)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{J}_c \omega_c^{(c)} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^5 \mathbf{Q}_{ck}^T \lambda_k, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_1^{(0)} \\ \dot{\omega}_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^{(0)} \\ \mathbf{L}_1^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_1^{(1)} \mathbf{J}_1 \omega_1^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^5 \mathbf{Q}_{1k}^T \lambda_k, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{M}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_2^{(0)} \\ \dot{\omega}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_2^{(0)} \\ \mathbf{L}_2^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\omega}_2^{(2)} \mathbf{J}_2 \omega_2^{(2)} \end{pmatrix} + \sum_{k=6}^{10} \mathbf{Q}_{2k}^T \lambda_k. \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

Система уравнений движения (3.2.8) и уравнений связи 3.2.7 образуют систему дифференциально-алгебраических уравнений индекса I. На каждом шаге процедуры численного интегрирования необходимо разрешать эту систему линейных уравнений для определения ускорений и реакций связи:

$$\begin{pmatrix} M & Q^T \\ Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

где столбец λ включает в себя неизвестные реакции в шарнирах системы:

$$\lambda = (\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_{10})^T. \quad (3.2.9)$$

Матрица P имеет следующий вид:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}_c \quad \mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2)$$

Закреть

и

$$\mathbf{P}_c = \begin{pmatrix} F_c^{(0)} & \mathbf{L}_c^{(c)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} F_1^{(0)} & \mathbf{L}_1^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} F_2^{(0)} & \mathbf{L}_2^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Створки солнечной батареи раскрываются под действием внутренних сил, создаваемых приводами. Традиционно в качестве привода раскрытия створок используют торсионы или пружины кручения, создающие момент, пропорциональный углу поворота створки:

$$M_T(\phi) = M_{T0} - c\phi,$$

где M_{T0} - начальное значение момента торсиона; c - жесткость торсиона; ϕ - текущее значение угла поворота створки (предполагается, что в исходном положении угол поворота створки был равен нулю). Момент торсиона, установленного в первом шарнире войдет в уравнения движения КА и первой створки:

$$\mathbf{L}_c^{(c)} = M_{T1}\mathbf{n}_{1y}^{(c)}, \mathbf{L}_1^{(1)} = -M_{T1}A^1A^{cT}\mathbf{n}_{1y}^{(c)},$$

3.2.1.1. Моделирование механизма фиксации створок

Процесс раскрытия начинается с одновременного или последовательного освобождения шарниров 1 и 2, после чего створки начинают движение под действием пружин-торсионов. При достижении створками заданного угла срабатывают механизмы фиксации (защелки).

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Моделирование торсионов, установленных в шарнирах, не представляет особой сложности. Более сложной задачей является моделирование процесса фиксации створки по достижении ей заданного угла поворота. Необходимо построить модель механизма фиксации створки, и здесь возможны два подхода. Первый подход заключается в полном моделировании механизма фиксации, что приведёт, конечно, к усложнению модели, что может быть не целесообразно. Второй, более рациональный подход, заключается в моделировании момента, удерживающего створку в зафиксированном положении.

Очевидным решением является интегрирование дифференциальных уравнений движения до момента достижения створками положения при котором в одном из шарниров срабатывает механизм фиксации. С этого момента в правую часть уравнений необходимо добавить дополнительный *удерживающий* момент, создаваемый механизмом фиксации. Этот удерживающий момент можно принять пропорциональным углу поворота створки относительно ее конечного положения. Например при срабатывании механизма фиксации в шарнире 1 на КА и створку 1 будет действовать момент:

$$M_L(\phi_1) = \pm \left(c_L(\phi_1 - \phi_c) + d_L \dot{\phi}_1 \right),$$

где ϕ_c - значение угла при котором сработал механизм фиксации; c_L - жесткость защелки; d_L - коэффициент демпфирования. Момент со знаком плюс действует на первую створку, момент со знаком минус - на КА. Для «включения» удерживающего момента по достижении заданного угла можно воспользоваться следующей непрерывной функцией, которая моделирует сту-

пенчатую функцию:

$$f_s(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi < \phi_0 \\ \Delta^2(3 - 2\Delta), & \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1 \\ 1, & \phi > \phi_k \end{cases}$$

где $\Delta = (\phi - \phi_0)/(\phi_k - \phi_0)$. На интервале ϕ_0 до ϕ_k функция $f_s(\phi)$ увеличивается с 0 до 1. Можно принять равным $\phi_k = \phi_c$ и $\phi_0 = \phi_c - \varepsilon$, где ε - некоторый малый угол поворота створки. При приближении угла поворота створки ϕ_1 к углу срабатывания элемента фиксации ϕ_c ближе чем на ε функция $f_s(\phi)$ начнёт увеличиваться и станет равна 1 при $\phi_1 = \phi_c$. На рисунке 3.2.2 изображен график функции $f_s(\phi)$. Таким образом, в правую часть уравнений движения к моменту торсиона необходимо добавить удерживающий момент, который начнет действовать после достижения створкой заданного конечного угла:

$$\mathbf{L}_c^{(c)} = (M_{T1} - M_L(\phi_1)f_s(\phi_1))\mathbf{n}_{1y}^{(c)}, \mathbf{L}_1^{(1)} = (-M_{T1} + M_L(\phi_1)f_s(\phi_1))A^1A^{cT}\mathbf{n}_{1y}^{(c)}.$$

Несмотря на наличия демпфирования, возможен случай когда створка в своём возвратном движении достигнет таких значений ϕ_1 для которых значение функции $f_s(\phi_1)$ снова станет равно нулю (для $\phi_1 < \phi_0$). Это приведёт к «отключению» удерживающего момента. На рисунке 3.2.2 показан график изменения функции $f_s(\phi)$ от времени, который иллюстрирует такую возможность: колебания створки приводят к периодическому «отключению» функции f_s .

Для того чтобы удерживающий момент после прохождения створкой заданного угла не «отключался», вместо функции $f_s(\phi)$ необходимо использо-

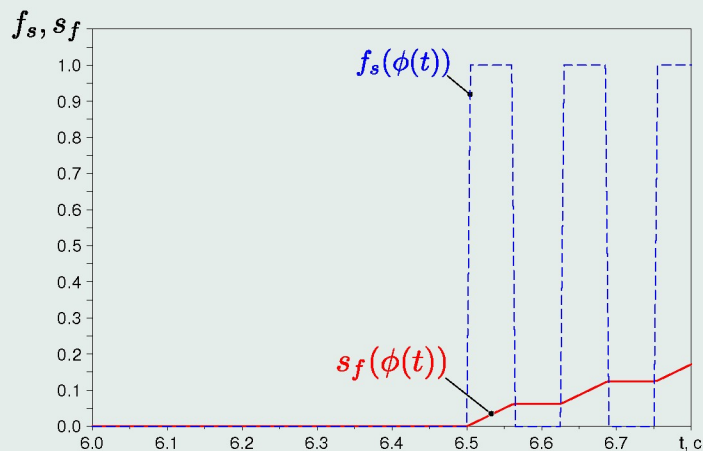


Рис. 3.2.2. Функция переключения и её интеграл

вать значение её интеграла:

$$s_f(\phi) = \int_0^t f_s(\phi) dt,$$

который является неубывающей функцией угла поворота. “Включение” удерживающего момента следует осуществлять при условии $s_f(\phi) \geq \varepsilon_1$, где ε_1 - малая величина. Для реализации этого метода к дифференциальным уравнениям движения механической системы необходимо добавить дополнитель-

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

ное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$s'_f(\phi(t)) = f_s(\phi(t))$$

которое будет интегрироваться вместе с уравнениями движения механической системы. Тогда, определение удерживающего момента может иметь вид:

$$\mathbf{L}_c^{(c)} = (M_{T1} - M_L(\phi_1)F_s(\phi_1))\mathbf{n}_{1y}^{(c)}, \mathbf{L}_1^{(1)} = (-M_{T1} + M_L(\phi_1)F_s(\phi_1))A^1A^{cT}\mathbf{n}_{1y}^{(c)}.$$

где

$$F_s(s_f(\phi_1)) = \begin{cases} 0, & s_f(\phi_1) < 0 \\ \Delta^2(3 - 2\Delta), & 0 \leq s_f(\phi_1) \leq \varepsilon_1 \\ 1, & s_f(\phi_1) > \varepsilon_1 \end{cases}$$

Множитель F_s станет равным 1 при $s_f > \varepsilon_1$ и, поскольку функция $s_f(\phi_1)$ неубывающая, в дальнейшем F_s останется равным 1 для любых значений углов (рисунок 3.2.2). На рисунке 3.2.3 приведен график изменения угловой скорости створки панели солнечной батареи, полученный в результате моделирования механизма фиксации по представленному выше алгоритму.

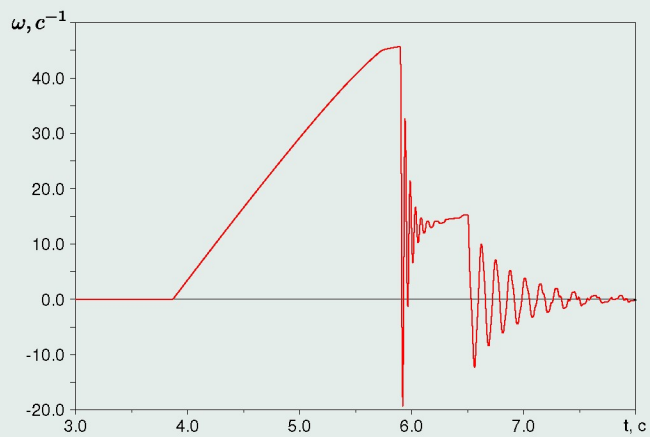
[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)

Рис. 3.2.3. Изменение угловой скорости створки при фиксации

[Закреть](#)



Домашняя



Назад

На весь экран

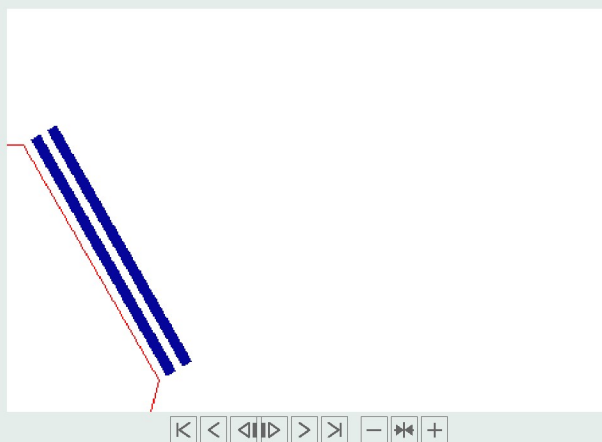


Рис. 3.2.4. Раскрытие панели солнечной батареи

Закреть

3.2.2. Отделение отработавших ступеней РН

Рассмотрим систему отделения отработавших ступеней ракеты-носителя на примере отделения боковых блоков (ББ) РН типа “Союз”. Ракета-носитель “Союз” начинает свою историю с запуска 21 августа 1957 года первой в мире межконтинентальной баллистической ракеты Р-7. С Р-7 появилось целое семейство ракет-носителей: трехступенчатая РН “Восток”, “Молния” и РН “Союз”, которая стала средством для запуска пилотируемых и грузовых кораблей.

Исходными данными для построения математической модели процесса отделения ББ является конструкция и циклограмма работы рассматриваемой системы. В состав системы отделения ББ входят следующие элементы:

- 1) Верхний узел связи каждого ББ с ЦБ, представляющего собой шаровую опору, передающую усилие на центральный блок от ББ. В процессе отделения ББ разворачивается на верхнем узле связи, на начальном этапе движения ББ верхний узел связи, препятствует также вращению ББ вокруг своей продольной оси.
- 2) Датчик начала отрыва шарнира. Датчик вводит обратную связь в систему управления процессом отделения. Датчик расположен на поверхности шаровой опоры. Датчик фиксирует перемещение шаровой опоры на величину 5мм. При перемещении опоры более чем на 5 мм в систему управления и систему измерения подается соответствующий сигнал.
- 3) Реактивное сопло бака окислителя, расположенное в верхней части

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)



бака окислителя ББ. При открытии сопла происходит стравливание газа наддува бака, что приводит к возникновению реактивной силы.

- 4) Реактивное сопло бака горючего, расположенное в верхней части бака горючего ББ. Сопло предназначено для создания реактивной тяги за счет истечения газов наддува бака горючего после его открытия.
- 5) Нижние силовые связи ББ с ЦБ предназначены для соединения ББ и ЦБ в “пакет” и разделения “пакета”. Замок нижних силовых связей по команде от системы управления позволяет разорвать эту связь для отделения отработавших блоков.

Система отделения ББ функционирует следующим образом. При достижении РН заданной скорости (1600...1900м/с), определяемой программой управления, от системы управления подается команда на снижение тяги основного двигателя ББ до 75 процентов от номинального значения, также переводятся в нейтральное положение и выключаются рулевые камеры двигательной установки каждого ББ.

Через время Δt_{kp} после команды на снижение тяги в момент времени t_{kp} (команда на разрыв связи) подается команда на замки нижних силовых связей, которые освобождают хвостовую часть ББ. Из-за наличия плеча тяги P основного двигателя ББ относительно верхнего узла связи создается момент, разворачивающий ББ (рисунок 3.2.5). Через время Δt_p подается команда на отключение основного двигателя, в результате чего прекращается подача окислителя в камеру сгорания двигательной установки ББ. По мере закрытия клапана подачи топлива и выгорания остатков топлива происходит снижение тяги. В некоторый момент времени тяга падает до такого

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

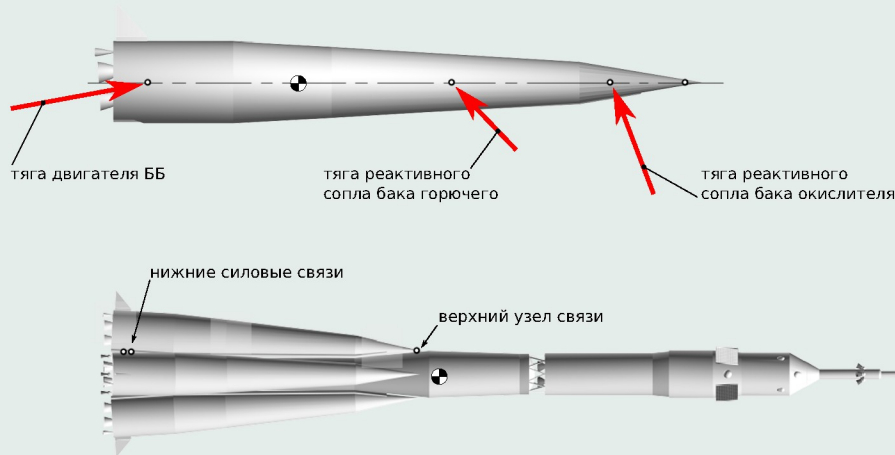


Рис. 3.2.5. Система отделения боковых блоков

уровня, при котором ББ начинает "отставать" от ЦБ и носовая часть ББ выходит из верхнего узла связи скользит по поверхности ЦБ до срабатывания датчика начала отрыва шарнира 3.2.6.

При срабатывании датчика система управления подает команду на открытие реактивного сопла бака окислителя и сила $\vec{F}_o$ создает момент, разворачивающий ББ и отводящий его носовую часть от ЦБ. Через время Δt_g после команды выключения основного двигателя ББ подается команда на открытие сопла бака горючего, которое создает дополнительную силу $\vec{F}_g$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть



Рис. 3.2.6. Этапы движения бокового блока

В процессе отделения на боковой блок действуют аэродинамические силы, сила тяги двигателя, силы тяги реактивных сопел бака окислителя и горючего. Если процесс отделения рассматривается в неинерциальной системе отсчета, жестко связанной с центральным блоком, то к активным силам необходимо добавить переносную силу инерции. Далее характер и законы изменения сил, действующих на тела системы не рассматриваются.



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Для упрощения математической модели рассматривалась система трех твердых тел: центральный блок и два боковых блока, находящихся в плоскости тангажа. Уравнения движения рассматриваемой системы имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{m}_c \ddot{\mathbf{r}}_c^{(0)} = \mathbf{F}_c^{(0)} + (\mathbf{R}_{1c}^{(0)} + \mathbf{R}_{2c}^{(0)}) \\ \mathbf{m}_1 \ddot{\mathbf{r}}_1^{(0)} = \mathbf{F}_1^{(0)} + \mathbf{R}_{c1}^{(0)} \\ \mathbf{m}_2 \ddot{\mathbf{r}}_2^{(0)} = \mathbf{F}_2^{(0)} + \mathbf{R}_{c2}^{(0)} \\ \mathbf{J}_0^{(c)} \dot{\omega}_c^{(c)} = \mathbf{L}^{(c)}(\mathbf{F}_c) + \mathbf{L}_0^{(c)} + \mathbf{L}_{1c}^{(c)} + \mathbf{L}_{2c}^{(c)} - \tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{J}_0^{(c)} \omega_0^{(c)} \\ \mathbf{J}_1^{(1)} \dot{\omega}_1^{(1)} = \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{F}_1) + \mathbf{L}_1^{(1)} + \mathbf{L}_{c1}^{(1)} - \tilde{\omega}_1^{(1)} \mathbf{J}_1^{(1)} \omega_1^{(1)} \\ \mathbf{J}_2^{(2)} \dot{\omega}_2^{(2)} = \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{F}_2) + \mathbf{L}_2^{(2)} + \mathbf{L}_{c2}^{(2)} - \tilde{\omega}_2^{(2)} \mathbf{J}_2^{(2)} \omega_2^{(2)}, \end{array} \right. \quad (3.2.10)$$

где $\ddot{\mathbf{r}}_0^{(0)}, \ddot{\mathbf{r}}_1^{(0)}, \ddot{\mathbf{r}}_2^{(0)}$ - координатные столбцы векторов ускорений центрального блока и боковых блоков, записанные в инерциальной системе координат $x_0y_0z_0$; $\mathbf{F}_c^{(0)}, \mathbf{F}_1^{(0)}, \mathbf{F}_2^{(0)}$ - координатные столбцы главных векторов внешних сил, действующих на центральный и боковые блоки, также записанные в системе координат $x_0y_0z_0$; $\mathbf{R}_{10}^{(0)}, \mathbf{R}_{10}^{(0)}$ - координатные столбцы силы реакции, действующей на центральный блок со стороны блоков 1 и 2; $\mathbf{R}_{01}^{(0)}, \mathbf{R}_{02}^{(0)}$ - координатные столбцы силы реакции, действующей на боковые блоки 1 и 2 со стороны центрального блока (очевидно, что $\mathbf{R}_{01}^{(0)} = -\mathbf{R}_{10}^{(0)}$ и $\mathbf{R}_{02}^{(0)} = -\mathbf{R}_{20}^{(0)}$); $\mathbf{L}_{10}^{(c)}, \mathbf{L}_{20}^{(c)}$ - координатные столбцы моментов сил реакции, действующих на центральный блок, записанные в проекциях на оси связанной с центральным

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

блоком системы координат $x_c y_c z_c$; $\mathbf{L}_{01}^{(1)}, \mathbf{L}_{02}^{(2)}$ - моменты сил реакций, действующие на блоки 1 и 2 в проекциях на их связанные системы координат $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$.

В соответствии с циклограммой работы системы отделения блоков, процесс отделения можно разбить на три этапа: первый этап – разворот бокового блока на верхнем узле связи – боковой блок относительно центрального блока имеет одну степень свободы; второй этап – потеря связи в верхнем узле связи и скольжение по поверхности центрального блока – боковой блок относительно центрального имеет две степени свободы; третий этап – открытие реактивного сопла бака окислителя, потеря связи бокового блока с РН и его дальнейшее свободное движение.

Для получения уравнений связи определим три плоскости, связанные с центральным блоком и проходящие через центр верхнего узла связи, рисунок 3.2.7. Плоскость N проходит через продольные оси бокового и центрального блоков – это плоскость движения бокового блока, плоскость – перпендикулярна N и проходит через прямую, вдоль которой происходит скольжение бокового блока на втором этапе движения, плоскость Π – перпендикулярна плоскостям N и N .

Рассмотрим движение бокового блока 1. На первом этапе верхняя точка бокового блока остается неподвижной относительно центрального блока и, следовательно, она должна принадлежать одновременно всем трем плоскостям, пересечение которых и определяют общую точку блоков. Кроме того, боковой блок может вращаться только относительно направления, определяемого вектором $\vec{n}_{1n}$. Таким образом, относительно центрального блока ББ имеет одну степень свободы. Уравнения связи для этого этапа движения со-

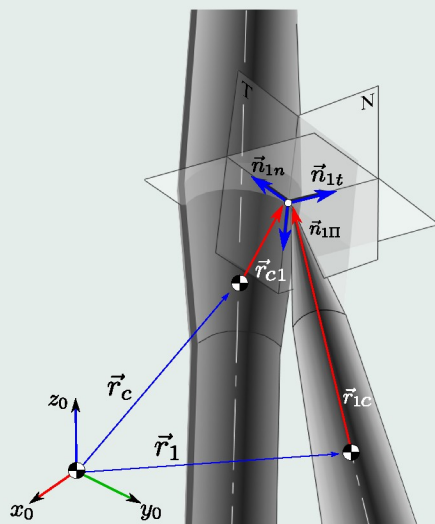


Рис. 3.2.7. К записи уравнений связи

стоят из трех уравнений связи типа (1.1.13) и двух уравнений типа (1.2.2), запрещающих вращение бокового блока относительно центрального вокруг осей, определяемых векторами $\vec{n}_{1t}$ и $\vec{n}_{1п}$.

$$Q_{ci}\ddot{X}_c + Q_{1i}\ddot{X}_1 = b_i, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (3.2.11)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Матрицы Q_{ci} , Q_{1i} для первых трех уравнений имеют следующий вид:

$$Q_{ci} = \begin{pmatrix} -\mathbf{n}_i^{(c)T} \mathbf{A}^{cT} & \mathbf{n}_i^{(c)T} \dot{\mathbf{r}}_{c1}^{(c)} \end{pmatrix}, \quad Q_{1i} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_i^{(c)T} \mathbf{A}^{cT} & -\mathbf{n}_i^{(c)T} \mathbf{A}^{cT} \mathbf{A}^1 \tilde{r}_{1c}^{(c)} \end{pmatrix}. \quad (3.2.12)$$

Правые части первых трех уравнений связи:

$$b_i = \mathbf{n}_i^{(c)T} \left(\tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{A}^{cT} \dot{\mathbf{r}}_{c1}^{(c)} - \tilde{\omega}_c^{(c)} \tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{A}^{cT} r_{c1}^{(0)} + \tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{A}^{cT} \dot{\mathbf{r}}_{c1}^{(0)} - \mathbf{A}^{cT} \mathbf{A}^1 \tilde{\omega}_1^{(1)} \tilde{\omega}_1^{(1)} r_{1c}^{(1)} \right), \quad (3.2.13)$$

где $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{n}_1^{(c)} = \mathbf{n}_{1n}^{(c)}$, $\mathbf{n}_2^{(c)} = \mathbf{n}_{1t}^{(c)}$, $\mathbf{n}_3^{(c)} = \mathbf{n}_{1\pi}^{(c)}$. Матрицы Q_i , Q_j для двух уравнений связи, ограничивающих вращение бокового блока 1, имеют следующий вид:

$$Q_{ci} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -(\mathbf{n}_i^{(c)})^T \end{pmatrix}, \quad Q_{1i} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{A}^1 \mathbf{A}^{cT} \mathbf{n}_i^{(c)})^T \end{pmatrix}. \quad (3.2.14)$$

Правые части первых трех уравнений связи:

$$b_i = \tilde{\omega}_c^{(c)} \mathbf{A}^c \mathbf{A}^{1T} \omega_1^{(1)} \mathbf{n}_i^{(c)}. \quad (3.2.15)$$

где $i = 4, 5$, $\mathbf{n}_4^{(c)} = \mathbf{n}_{1t}^{(c)}$, $\mathbf{n}_5^{(c)} = \mathbf{n}_{1\pi}^{(c)}$. Аналогично записываются уравнения связи для второго бокового блока.

Координаты столбцы сил и моментов реакции, входящих в систему уравнений (3.2.10), определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{1c} \\ \mathbf{L}_{1c} \end{pmatrix} = Q_{c1}^T \lambda_n + Q_{c2}^T \lambda_t + Q_{c3}^T \lambda_\pi, \quad (3.2.16)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{c1} \\ \mathbf{L}_{c1} \end{pmatrix} = Q_{11}^T \lambda_n + Q_{12}^T \lambda_t + Q_{13}^T \lambda_\pi,$$

Переход с первого этапа движения на второй осуществляется в момент, когда реакция в верхнем узле связи меняет знак:

$$\lambda_{\Pi} \leq 0.$$

На втором этапе верхняя точка бокового блока – шаровая опора – может скользить по прямой, определяемой плоскостями T и N , то есть точка контакта может иметь ускорение вдоль направления, определяемого вектором $\vec{n}_{1\Pi}$. Из системы уравнений связи следует исключить уравнение связи, запрещающее движение вдоль этого направления. Переход на третий этап движения осуществляется по условию:

$$\lambda_t \leq 0.$$

На третьем этапе боковой блок двигаются свободно, поэтому уравнения связи отсутствуют. На рисунке 3.2.8 показана картина относительного движения боковых блоков при отделении от центрального блока.



Домашняя



Назад

На весь экран

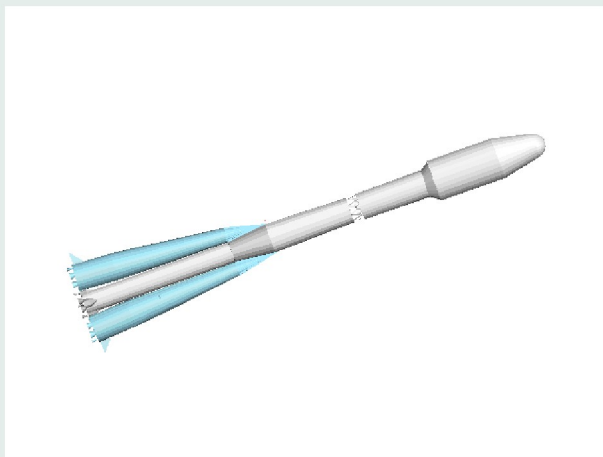


Рис. 3.2.8. Отделение боковых блоков ракеты-носителя “Союз”

Закреть

3.2.3. Отделение створок хвостового отсека

Для иллюстрации использования процедуры получения уравнений движения систем твердых тел рассмотрим схему отделения створок хвостового отсека последней ступени РН, которая рассматривалась при проектировании РН “Аврора” и РН “Полет”, рисунок 3.2.9.

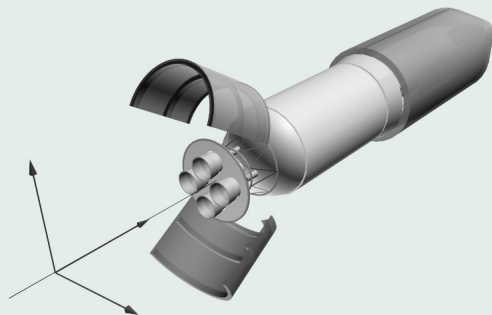


Рис. 3.2.9. Отделение створок хвостового отсека

Механическая система состоит из трех тел: центрального блока и двух створок хвостового отсека. Отделение створок происходит в несколько эта-

пов:

- 1) разворот створок относительно РН на узле связи вокруг поперечной оси под действием толкателей и силы инерции;
- 2) движение по направляющей;
- 3) участок свободного относительного движения створок ХО.

Движение створок рассматривается относительно системы координат, связанной с РН. Положение центра масс каждой створки задано в связанной вспомогательной системе координат каждой створки, в этой же системе координат заданы положения точек крепления толкателей на створке. Инерционные характеристики створок заданы в связанной центральной системе координат, начало которой находится в центре масс створки (рисунок 3.2.10).

Запишем уравнения связи для рассматриваемой механической системы, предполагая, что движение створок плоское. Поскольку масса створок значительно меньше массы всей ракеты, можно пренебречь влияние процесса отделения на движения РН и рассматривать движение створок относительно неинерциальной системы координат, жестко связанной с центральным блоком, движущимся с известным продольным ускорением a_0 . Уравнения движения системы состоящей из двух створок имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1^{(0)} &= \mathbf{F}_1^{(0)} + \mathbf{R}_1^{(0)} + \mathbf{R}_2^{(0)}, \\
 J_{1z} \ddot{\phi}_1 &= L_{1z}^R + L_{1z}^R + L_{2z}^R, \\
 m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2^{(0)} &= \mathbf{F}_2^{(0)} + \mathbf{R}_3^{(0)} + \mathbf{R}_4^{(0)}, \\
 J_{2z} \ddot{\phi}_2 &= L_{2z}^R + L_{3z}^R + L_{4z}^R,
 \end{aligned} \tag{3.2.17}$$



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

где m_1, m_2 - массы створок 1 и 2 соответственно; $\mathbf{r}_1^{(0)}, \mathbf{r}_2^{(0)}$ - координатные столбцы радиус-вектора центра масс створок относительно системы координат, связанной с центральным блоком; $\mathbf{F}_1^{(0)}, \mathbf{F}_1^{(0)}$ - координатные столбцы главных векторов внешних сил, действующих на створки 1 и 2; $\mathbf{R}_1^{(0)}, \mathbf{R}_2^{(0)}$ - силы реакции, действующие на створку 1; $\mathbf{R}_3^{(0)}, \mathbf{R}_4^{(0)}$ - силы реакции, действующие на створку 2; L_{1z}^R, L_{2z}^R - моменты сил реакции, действующие на створку 1; L_{3z}^R, L_{4z}^R - моменты сил реакции, действующие на створку 2.

На первом этапе створка может вращаться относительно центрального блока, поэтому соединение “створка – центральный блок” представляет собой плоский шарнир, имеющий одну степень свободы. Для моделирования плоского шарнира необходимо записать два уравнения связи “точка-линия” вида (1.2.17), рисунок 3.2.11. При записи уравнений следует учесть, что центральный блок считается условно неподвижным, поэтому в уравнениях (1.2.17) принимаем $\mathbf{X}_i = 0, \mathbf{A}^i = \mathbf{E}$. Таким образом, два уравнения связи первого этапа будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{Q}_{11}\ddot{\mathbf{X}}_1 = b_1, \mathbf{Q}_{12}\ddot{\mathbf{X}}_1 = b_2, \mathbf{Q}_{23}\ddot{\mathbf{X}}_2 = b_3, \mathbf{Q}_{24}\ddot{\mathbf{X}}_2 = b_4, \quad (3.2.18)$$

Матрицы коэффициентов определяются следующим образом:

$$\mathbf{Q}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_j^{(0)T} & \mathbf{n}_j^{(0)T} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{A}^i \rho_{i0}^{(i)} \end{pmatrix},$$

Правые части уравнений связи:

$$b_j = \mathbf{n}_j^{(0)T} \left(\dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^{iT} \mathbf{r}_{01}^{(0)} + \dot{\phi}_i^2 \mathbf{A}^i \mathbf{r}_{i0}^{(i)} \right).$$

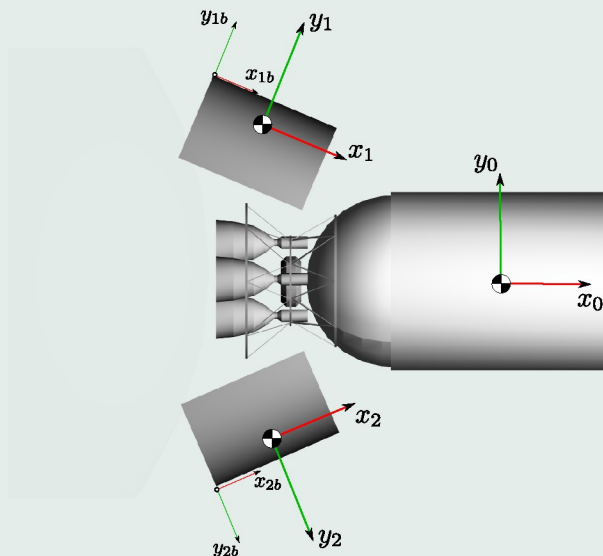


Рис. 3.2.10. Системы координат

где $i = 1, 2$ $j = 1, 2, 3, 4$.

По достижении створки некоторого заданного угла начала скольжения ϕ_{12} шарнир узла вращения освобождает створку, которая получает возможность двигаться по направляющей. На рисунке 3.2.12 показана расчетная схема второго этапа движения. Уравнения движения второго этапа отличаются от уравнений движения первого этапа меньшим числом уравнений

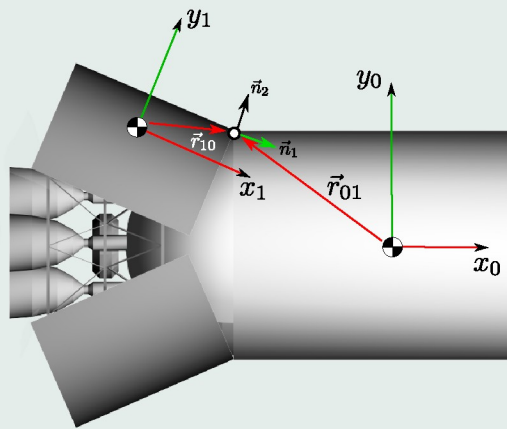


Рис. 3.2.11. Первый этап относительного движения створки

связи. Из системы уравнений связи (3.2.18) необходимо исключить первое уравнение, в случае если первая створка достигла угла начала скольжения.

При движении створки по направляющим необходимо контролировать пройденный точкой контакта путь и после того, как точка контакта достигает конца направляющей, перейти к третьему этапу движения - свободному движению створки. Уравнения движения створок будут иметь вид eq:ho, однако в правой части будут присутствовать только активные силы.

Домашняя



Назад

На весь экран

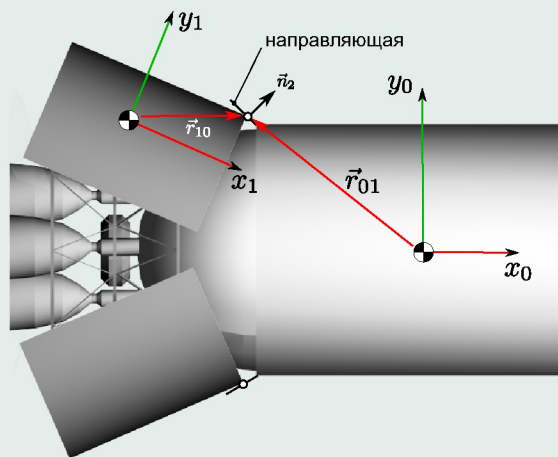


Рис. 3.2.12. Второй этап относительного движения створки

Закреть



Домашняя



Назад

На весь экран

Часть II

Уравнения движения в обобщённых координатах

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Глава 4

Системы с плоскими цилиндрическими шарнирами со структурой дерева

4.1. Уравнения движения

Рассмотрим вопросы связанные с формированием уравнений движения систем тел переменной и постоянной структуры с использованием обобщенных координат. Уравнения движения систем, содержащих цилиндрические, сферические и универсальные шарниры имеют следующий вид: При помощи

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

матриц $\mathbf{K}_{ij}$ уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j = M'_i + M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1.1)$$

Система (4.1.1) представляет собой матричную запись системы $3n$ скалярных дифференциальных уравнений первого порядка. Эту систему необходимо дополнить кинематическими уравнениями, которые связывают производные от обобщенных координат с угловыми скоростями тел.

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} K_i, & i = j, \\ M(b_{j0} \cdot d_{ij} E - b_{j0} d_{ij}), & s_i < s_j, \\ M(d_{ji} \cdot b_{i0} E - d_{ji} b_{i0}), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i \dot{\omega}_i + M \left(\sum_{j: s_i < s_j} d_{ij} \times (\dot{\omega}_j \times b_{j0}) + b_{i0} \times \sum_{j: s_j < s_i} \dot{\omega}_j \times d_{ji} \right) = \\ = M'_i + M_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

где

$$\begin{aligned}
 M'_i = & -\omega_i \times K_i \omega_i - M \left(\sum_{j:s_i < s_j} d_{ij} \times (\omega_j \times (\omega_j \times b_{j0})) + \right. \\
 & \left. + b_{i0} \times (-\ddot{r}_0 + \sum_{j:s_j < s_i} \omega_j \times (\omega_j \times d_{ji})) \right) - \\
 & - \sum_{j:s_i \leq s_j} d_{ij} \times F_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1.4)
 \end{aligned}$$

Для плоских систем, содержащих только цилиндрические шарниры уравнения движения существенно упрощаются. Эти уравнения можно получить из системы уравнений движения для системы тел, соединённых сферическими шарнирами. В правую часть уравнений движения добавим моменты силы реакции, препятствующие вращению тел относительно любой оси перпендикулярной оси цилиндрических шарниров, очевидно, что векторы этих моментов также перпендикулярны осям шарниров. Если полученные уравнения движения умножить на единичный вектор n , параллельный осям шарниров, то новые моменты будут исключены. Новая система будет представлять собой систему n скалярных дифференциальных уравнений, где n - число степеней свободы, равное количеству цилиндрических шарниров в системе. Наоборот, от системы с только цилиндрическими шарнирами можно перейти к исходной системе со сферическими шарнирами, если на осях шарниров выбрать точки, в которые поместить сферические шарниры: полученные для новой системы дифференциальные уравнения не зависят от выбора точек на осях цилиндрических шарниров. На рис. 4.1.1 показана ме-

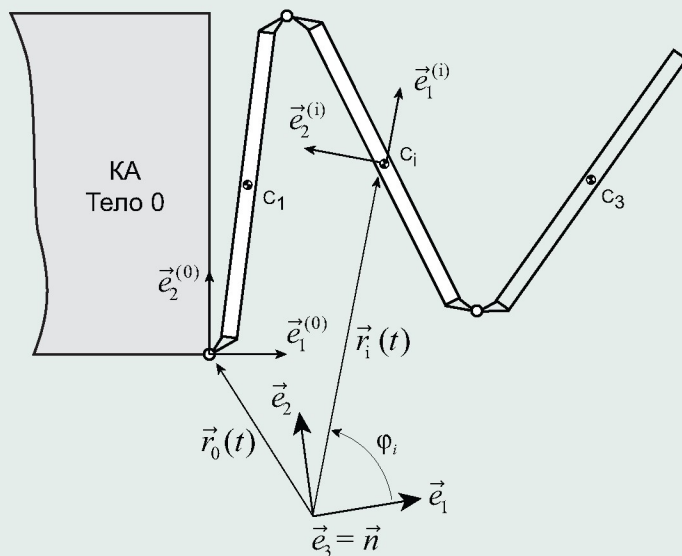


Рис. 4.1.1. Система с цилиндрическими шарнирами

механическая система с цилиндрическими шарнирами. В качестве обобщенных координат выбран угол ϕ_i между e_1 и $e_1^{(i)}$. Преобразование координат задается матрицей A^i :

$$e^{(i)} = A^i e, \quad i = 1, \dots, n,$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

элементы которой определяются следующим образом:

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1.5)$$

Матрица преобразования координат из системы $\mathbf{e}^{(j)}$ в систему $\mathbf{e}^{(i)}$ есть результат двух последовательных преобразований:

$$\mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{A}^{ij} \mathbf{e}^{(j)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где

$$\mathbf{A}^{ij} = \mathbf{A}^i \mathbf{A}^{jT} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_i - \phi_j) & \sin(\phi_i - \phi_j) & 0 \\ -\sin(\phi_i - \phi_j) & \cos(\phi_i - \phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Матрицы координат для K_i , d_{ij} , b_{i0} , $\dot{\omega}_i$, M_i , Y_a ($i, j, a = 1, \dots, n$) в базисе $e^{(i)}$ записываются в виде

$$\mathbf{K}_i = \begin{pmatrix} K_{i1} & -K_{i12} & -K_{i13} \\ -K_{i12} & K_{i2} & -K_{i23} \\ -K_{i13} & -K_{i23} & K_{i3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_{ij} = \begin{pmatrix} d_{ij} \cos a_{ij} \\ d_{ij} \sin a_{ij} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{i0} = \begin{pmatrix} b_{i0} \cos \beta_i \\ b_{i0} \sin \beta_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_i \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\phi}_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_a \end{pmatrix}.$$



Домашняя



Назад

На весь экран

Скаляры d_{ij} и b_{ij} представляют собой абсолютные значения проекций этих векторов на плоскость, перпендикулярную вектору n , положение этих векторов в плоскости задается углами a_{ij} и β_i . Уравнения движения системы с цилиндрическими шарнирами, с учетом того, что

$$\omega_j \times (\omega_j \times b_{j0}) = -\omega_j^2 b_{j0}$$

и

$$\omega_j \times (\omega_j \times d_{ji}) = -\omega_j^2 d_{ji},$$

будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j = & \mathbf{M}_i - \tilde{\omega}_i \mathbf{K}_i \omega_i + M \left(\sum_{j:s_i < s_j} \dot{\phi}_j^2 \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} + \right. \\ & \left. + \tilde{\mathbf{b}}_{i0} (\ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{j:s_j < s_i} \dot{\phi}_j^2 \mathbf{A}^{ij} \mathbf{d}_{ij}) \right) - \\ & - \sum_{j:s_i < s_j} \tilde{\mathbf{d}}_{ij} \mathbf{A}^{ij} \mathbf{F}_j + \sum_{a=1}^n S_{ia} \mathbf{Y}_a, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Подматрицы $\mathbf{K}_{ij}$ имеют вид

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}_i, & i = j, \\ M(\mathbf{b}_{j0}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{E} - \mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T), & s_i < s_j, \\ M(\mathbf{d}_{ji}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{b}_{i0} \mathbf{E} - \mathbf{A}^{ij} \mathbf{d}_{ji} \mathbf{b}_{i0}^T), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (4.1.7)$$

Заккрыть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

где $i, j = 1, \dots, n$. Каждое слагаемое системы (4.1.6) представляет собой матрицу-столбец из трех элементов. Для интегрирования необходим только третий элемент, описывающий движение системы вокруг оси, задаваемой вектором p . Рассмотрим процедуру получения для наиболее сложных слагаемых. Рассмотрим произведение $\mathbf{K}_{ij}\dot{\omega}_j$. Определим K_{ij} для случая $s_i < s_j$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} &= d_{ij} \begin{bmatrix} \cos(\phi_j - \phi_i) \cos a_{ij} + \sin(\phi_j - \phi_i) \sin a_{ij} \\ -\sin(\phi_j - \phi_i) \cos a_{ij} + \cos(\phi_j - \phi_i) \sin a_{ij} \end{bmatrix} = \\ &= d_{ij} \begin{bmatrix} \cos(\phi_j - \phi_i + a_{ij}) \\ \sin(\phi_j - \phi_i + a_{ij}) \end{bmatrix}. \quad (4.1.8) \end{aligned}$$

Умножая далее, получим элемент $\mathbf{b}_{j0}^T \mathbf{A}^{ji} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{E}$ с индексом (3,3):

$$\begin{aligned} b_{j0} d_{ij} (\cos \beta_j \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij}) + \sin \beta_j \sin(\phi_i - \phi_j + a_{ij})) = \\ = b_{j0} d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j). \quad (4.1.9) \end{aligned}$$

Элемент (3,3) второго слагаемого $\mathbf{A}^{ij} \mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T$ обращается в нуль, так как весь третий столбец матрицы $\mathbf{b}_{j0} \mathbf{d}_{ij}^T$ содержит только нули. Следовательно, для $s_i < s_j$:

$$(\mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j)_{(3,3)} = M b_{j0} d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j) \ddot{\phi}_j.$$

Таким образом, выражение для $\mathbf{K}_{ij} \dot{\omega}_j, i \neq j$ определяется следующим

образом:

$$\mathbf{K}_{ij}\dot{\omega}_j = \begin{cases} \mathbf{K}_i, i = j, \\ Mb_{j0}d_{ij} \cos(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j)\ddot{\phi}_j, s_i < s_j, \\ Mb_{i0}d_{ji} \cos(\phi_i - \phi_j - a_{ij} + \beta_j)\ddot{\phi}_j, s_j < s_i, \\ 0, \text{ в других случаях,} \end{cases} \quad (4.1.10)$$

где $i, j = 1, \dots, n$. Раскроем выражение $\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0}$:

$$A^{ij} b_{j0} = b_{j0} [\cos(\phi_i - \phi_j - \beta_j) - \sin(\phi_i - \phi_j - \beta_j)],$$

что позволяет определить третий элемент $\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0}$:

$$(\dot{\phi}_j^2 \tilde{d}_{ij} A^{ij} b_{j0})_{(3,3)} = -d_{ij} b_{j0} \sin(\phi_i - \phi_j + a_{ij} - \beta_j) \dot{\phi}_j^2.$$

Уравнения движения механической системы примут вид

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij} \ddot{\phi}_j + B_{ij} \dot{\phi}_j^2) = R_i + \sum_{a=1}^n S_{ia} Y_a, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1.11)$$

где

$$A_{ij} = \begin{cases} K_{i3}, & i = j, \\ Md_{ij}b_{j0} \cos(\phi_i - \phi_j + \alpha_{ij}\beta_j), & s_i < s_j, \\ Md_{ji}b_{i0} \cos(\phi_i - \phi_j - \alpha_{ji}\beta_i), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$B_{ij} = \begin{cases} Md_{ij}b_{j0} \cos(\phi_i - \phi_j + \alpha_{ij}\beta_j), & s_i < s_j, \\ Md_{ji}b_{i0} \cos(\phi_i - \phi_j - \alpha_{ji}\beta_i), & s_j < s_i, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$R_i = M_i - Mb_{i0}(\ddot{r}_{01} \sin(\phi_i - \beta_i) - \ddot{r}_{02} \cos(\phi_i + \beta_i) + \sum_{j:s_i \leq s_j} d_{ij}(F_{ji} \sin(\phi_i + a_{ij}) - F_{j2} \cos(\phi_i + a_{ij}))).$$

Уравнение можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \dots \\ \ddot{\phi}_{n-1} \\ \ddot{\phi}_n \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1^2 \\ \dot{\phi}_2^2 \\ \dots \\ \dot{\phi}_{n-1}^2 \\ \dot{\phi}_n^2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{Y} + \mathbf{R}. \quad (4.1.12)$$

Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ симметричны. Этот факт позволит сократить время решения системы линейных уравнений (СЛУ) для определения ускорений, при использовании специальных численных методов решения СЛУ, ориентированных на симметрические матрицы коэффициентов.

4.2. Примеры

4.2.1. Определение векторов d_{ij} b_{j0}

Рассмотрим процедуру определения координатных столбцов векторов d_{ij} , b_{j0} на примере системы раскрытия створок солнечных батарей. Определим вектора d_{ij} , положение барицентра, вектора b_{ij} на примере механической системы раскрытия створок панелей солнечных батарей 4.2.1. При построении модели принимаем следующие допущения:

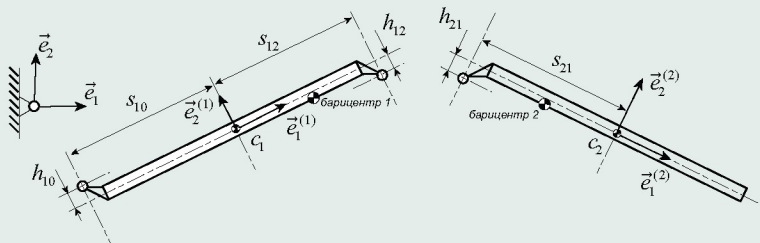
- 1) рассматривается процесс раскрытия одной панели солнечной батареи, состоящей из двух створок;
- 2) КА движется равномерно и прямолинейно;
- 3) движение КА не оказывает влияния на процесс раскрытия створок;
- 4) процесс раскрытия створок не оказывает влияния на движение КА.

Принятые допущения позволяют принять, что $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$. Начало инерциальной системы координат расположим в шарнире, соединяющем КА с первой створкой. В качестве обобщенных координат приняты углы ϕ_1 , ϕ_2 между осями e_1 , $e_1^{(1)}$ и e_1 , $e_1^{(2)}$ соответственно. Вычислим положение барицентра. Для створки 1 дополненное тело состоит из створки 1 и точечной массы m_2 , расположенной в шарнире 2, положение барицентра относительно связанной системы координат c_1 $e_1^{(1)}$ $e_2^{(1)}$ определяется выражением

$$\mathbf{b}_{11}^{(1)} = -\frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot s_{12} \\ m_1 \cdot 0 - m_2 \cdot h_{12} \end{pmatrix},$$

[Домашняя](#)

[Назад](#)
[На весь экран](#)
[Заккрыть](#)



Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Рис. 4.2.1. Схема механической системы раскрытия солнечных батарей

для створки 2 дополненное тело состоит из самой створки 2 и точечной массы m_1 , расположенной в шарнире 2. Положение барицентра створки 2 определяется следующим образом:

$$\mathbf{b}_{22}^{(2)} = -\frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} m_2 \cdot 0 - m_1 \cdot s_{21} \\ m_2 \cdot 0 - m_1 \cdot h_{21} \end{pmatrix}.$$

Определив положение барицентра, можно определить остальные параметры b_{ij} (таб. 4.2.1).

Далее приведен алгоритм определения положения барицентра тел системы на языке системы MATLAB:

```
% Определение положения барицентра
% res=GetBaricenterVectors(S,T,C,m)
% S - матрица инцидентности n*n
% T - матрица структуры n*n (ST=E)
```

Закреть



Таблица 4.2.1. Параметры системы

Параметры, входящие в уравнения движения	Значение
d_{11}	$\sqrt{s_{10}^2 + h_{10}^2}$
d_{12}	$\sqrt{(s_{10} + s_{12})^2 + (h_{10} + h_{12})^2}$
d_{21}	0
d_{22}	$\sqrt{s_{21}^2 + h_{21}^2}$
b_{11}	$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{s_{12}^2 + h_{12}^2}$
b_{10}	$\sqrt{(\frac{m_2 \cdot s_{12}}{m_1 + m_2} + s_{10})^2 + (-\frac{m_2 \cdot h_{12}}{m_1 + m_2} - h_{10})^2}$
b_{12}	$\sqrt{(\frac{m_2 \cdot s_{12}}{m_1 + m_2} - s_{12})^2 + (-\frac{m_2 \cdot h_{12}}{m_1 + m_2} + h_{12})^2}$
b_{22}	$\frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{s_{21}^2 + h_{21}^2}$
b_{20}	$\sqrt{(-\frac{m_1 \cdot s_{21}}{m_1 + m_2} + s_{21})^2 + (-\frac{m_1 \cdot h_{21}}{m_1 + m_2} + h_{21})^2}$
b_{21}	b_{20}
a_{11}	$\pi - \arctan(\frac{h_{10}}{s_{10}})$
a_{12}	$\pi - \arctan(\frac{h_{10} + h_{12}}{s_{10} + s_{12}})$
a_{21}	0
a_{22}	$\pi + \arctan(\frac{h_{21}}{s_{21}})$
β_1	0
β_2	0

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)

```
% C - матрица шарнирных векторов cell(i,a)
% m - вектор масс тел системы [m1 m2 m3 ... mn]
function res=GetBaricenterVectors(S,T,C,m)
Bp=zeros(3,size(S,1));
% массы тел, путь от которых лежит через дугу a
% (номер строки ma)
ma=abs(T*m');
for i=1:size(S,1)
    Bp(:,i)=[0;0;0];
    for a=i+1:size(S,2)
        Bp(:,i)=Bp(:,i)+C{i,a}*ma(a)*abs(S(i,a));
    end
    % учитываем массы тел, предшествующих телу i
    Bp(:,i)=Bp(:,i)+C{i,i}*(sum(m)-ma(i));
end
res=Bp/sum(m);
```

Результатом работы функции *GetBaricenterVectors* является матрица $3 \times n$ каждый столбец которой представляет собой координаты вектора $-b_{i0}$ в системе координат связанной с соответствующим телом i . Зная положение барицентра, можно определить вектора b_{ij} Вектора b_{ij} :

```
% Вычисление векторов b_ij
% res=GetBaricenterVectors(S,T,C,m)
% S - матрица инцедентности n*n
% T - матрица структуры n*n
```

[Заккрыть](#)

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
% C - шарнирные вектора cell(i,a)
% B - матрица, i-ый столбец которой содержит координаты
% барицентра тела i
function res=Get_b(S,T,B,C)
% количество тел
n=size(C,1);
res=cell(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        if(i==j)
            res{i,j}=-B(:,i);
        else
            if (j<i)
                res{i,j}=-B(:,i)+C{i,i};
            else
                a = dot(abs(S(i,(i+1):n).*(T((i+1):n,j))'),(1:(n-i)))+i;
                res{i,j}=-B(:,i)+C{i,a};
            end
        end
    end
end
end
```

4.2.2. Раскрытие створок СБ с механизмом синхронизации

Используя рассмотренный выше алгоритм формирования уравнений движения систем с плоскими цилиндрическими шарнирами, построим модель механической системы, показанную на рисунке 4.2.3. При построении уравнений движения системы использовались следующие допущения:

- космический аппарат (КА) является неподвижным телом;
- створки солнечной батареи являются абсолютно твердыми телами и принимаются как стержни;
- движение створок не оказывает влияния на движение КА.

На рисунках 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4 показаны начальное, промежуточное и конечное положения створок рассматриваемой системы.

Построим упрощенную модель системы, не учитывающую поперечные размеры створок (рисунок 4.2.5). Данная схема технически упрощает процедуру определения шарнирных векторов, а также векторов $\vec{d}_{ij}$, $\vec{b}_{i0}$. Разница между упрощенной таким образом и реальной моделью состоит в отличии начального и конечного положения створок.

Сторки рассматриваемой механической системы раскрываются при помощи механизма синхронизации, представляющего собой систему тросов, связывающую смежные створки. Механизм синхронизации должен обеспечивать синхронное взаимное движение всех створок СБ, одновременное приведение всех створок СБ в положение фиксации. На рисунке 4.2.7 показана

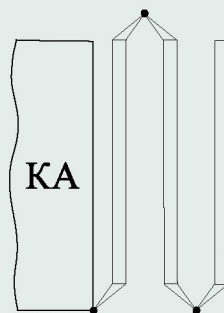


Рис. 4.2.2. Начальное положение створок солнечной батареи

схема СБ, состоящая из двух створок, с механизмом синхронизации, который представляет собой трос, намотанный и закрепленный на шкивах. Первый шкив (на рисунке 4.2.7 показан как диск большего диаметра) жестко закреплен на борту КА, второй шкив жестко закреплен на второй створке СБ. Через оба шкива перекинут трос, причем трос закреплен на каждом шкиве таким образом, что при движении СБ трос не проскальзывает. Трос имеет определенную величину начального натяжения и жесткость. Далее трос будет рассматриваться как линейный упругий элемент. Движение СБ с рассматриваемым механизмом синхронизации будет осуществляется следующим образом: при движении первой створки СБ происходит движение (качение) троса по шкивам. Т.к. первый шкив неподвижен, то движение первой створки вызывает движение вращения второго шкива и, соответственно, вращение второй створки СБ. Разный диаметр шкивов обуславливается раз-

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

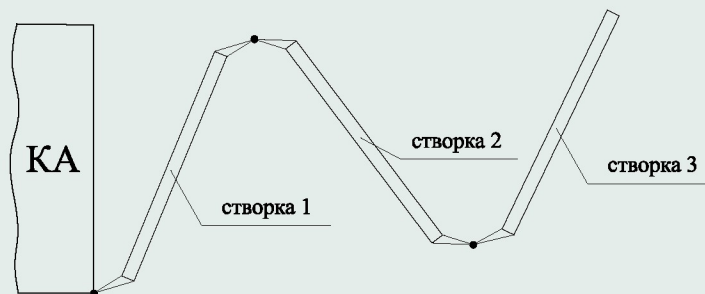


Рис. 4.2.3. Модель солнечной батареи

ными углами, на которые в процессе раскрытия СБ, поворачиваются створки. Т.е. первая створка проходит $\frac{\pi}{2}$, а вторая π из начального в конечное положение, соответственно диаметр первого шкива будет вдвое больше второго.

При движении механической системы необходимым условием синхронного раскрытия створок является выполнение соотношений:

$$\Delta\varphi_{01} = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$$

$$\Delta\varphi_{12} = \pi + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

С помощью этих соотношений определим величину деформации троса:

$$\Delta_{11} = s_{11} + \Delta\varphi_{01}r_1 - \Delta\varphi_{12}r_2 \quad (4.2.1)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

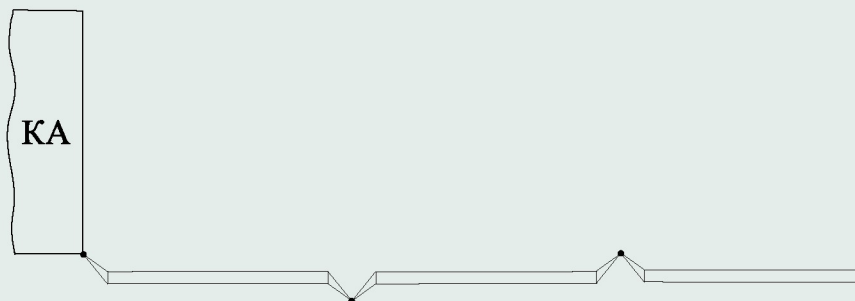


Рис. 4.2.4. Конечное положение створок солнечной батареи

$$\Delta_{12} = s_{12} - \Delta\varphi_{01}r_1 + \Delta\varphi_{12}r_2 \quad (4.2.2)$$

где s_{11} и s_{12} - начальное натяжение троса, свое для каждой ветви. Данные два выражения иллюстрируют наличие в системе двух пружин или тот факт, что по обе стороны от шкива имеет место сжатие и растяжение тросов соответственно. Таким образом, если с одной стороны происходит сжатие троса, то с другой растяжение и наоборот.

Абсолютно аналогичная схема работы механизма синхронизации для СБ с тремя створками, за исключением того, что добавляется еще один трос и два шкива, один закреплен на первой створке, а второй на третьей, причем радиусы шкивов r_3 одинаковые, т.к. смежные (вторая и третья) створки поворачиваются на один и тот же угол π (рисунок 4.2.8).

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

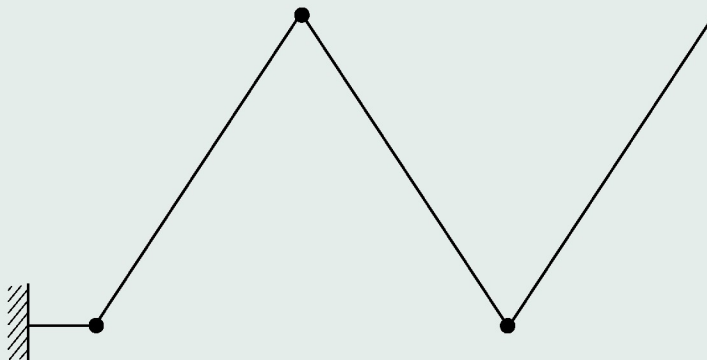


Рис. 4.2.5. Схема солнечной батареи, состоящая из трех створок

Таким образом, условием синхронизации второй и третьей створки будет выполнение соотношения:

$$\Delta\varphi_{23} = \pi + (\varphi_2 - \varphi_3)$$

И, соответственно, определим длину изменения троса, связывающего первую и третью створки:

$$\Delta_{22} = s_0 - \Delta\varphi_{12}r_3 + \Delta\varphi_{23}r_3 \quad (4.2.3)$$

$$\Delta_{23} = s_0 + \Delta\varphi_{12}r_3 - \Delta\varphi_{23}r_3 \quad (4.2.4)$$

Зная удлинения тросов, можно определить величины сил натяжения, используя выражения, представленные на рисунке 4.2.9.

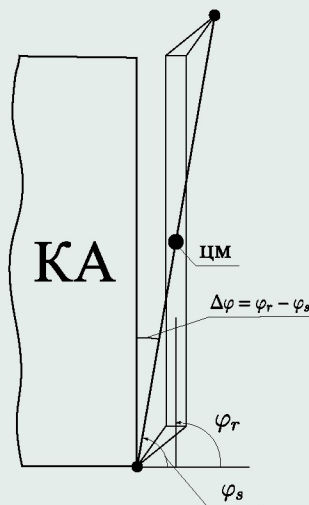


Рис. 4.2.6. Упрощение схемы створки СБ

Рассмотрим рисунки ?? и ?. СБ с двумя и тремя створками, отличаются лишь количеством створок, первые две створки полностью одинаковы для этих двух СБ. Определим массы и длины стержней для этих механических систем: $m_1 = 15 \text{ кг}$, $m_2 = 13 \text{ кг}$, $m_3 = 10 \text{ кг}$, $l_1 = l_2 = l_3 = 1 \text{ м}$. Рассмотрев рисунок 4.2.8, определим значения радиусов шкивов: $r_1 = 0.2 \text{ м}$, $r_2 = r_3 = 0.1 \text{ м}$.

Рассмотрим механическую систему, изображенную на рисунке 4.2.7. Зададим положения центров масс створок и векторы $\vec{d}_{ij}$, $\vec{b}_{i0}$. На рисунке 4.2.10

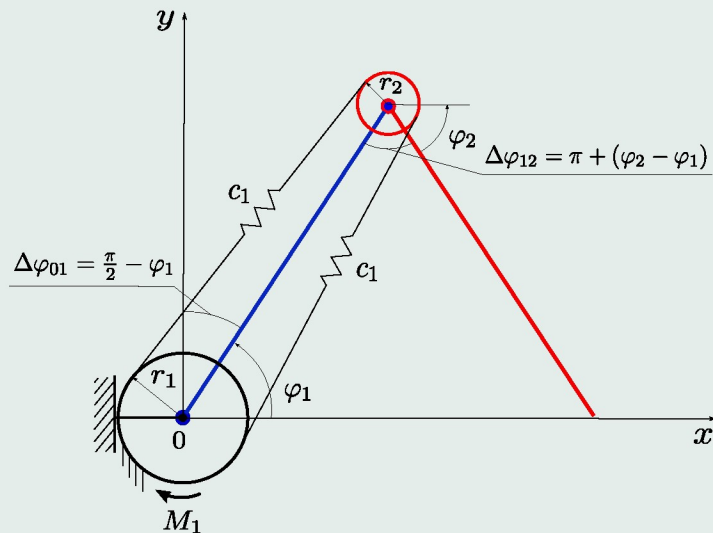


Рис. 4.2.7. Схема солнечной батареи с механизмом синхронизации (2 створки)

показана первая створка СБ. Рассмотрим все обозначенные на рисунке величины в системе координат (x_1, y_1) , которая является связанной с данной створкой.

Координаты центра масс створки:

$$x_{c1} = l_k \cos(\phi) + \frac{l_1}{2}$$

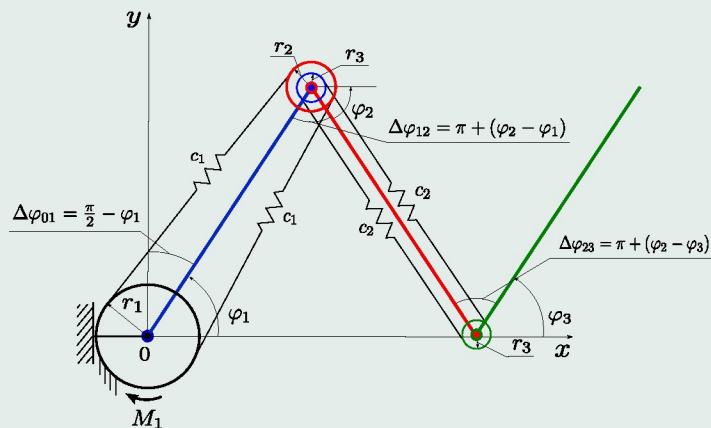


Рис. 4.2.8. Схема солнечной батареи с механизмом синхронизации (3 створки)

$$y_{c_1} = -l_k \sin(\phi)$$

Координаты шарнира h_2 :

$$x_{h_2} = 2l_k \cos(\phi) + l_1$$

$$y_{h_2} = -2l_k \sin(\phi)$$

Координаты барицентра B_1 :

$$x_{B_1} = \frac{m_1 x_{c_1} + m_2 x_{h_2}}{m_1 + m_2}$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

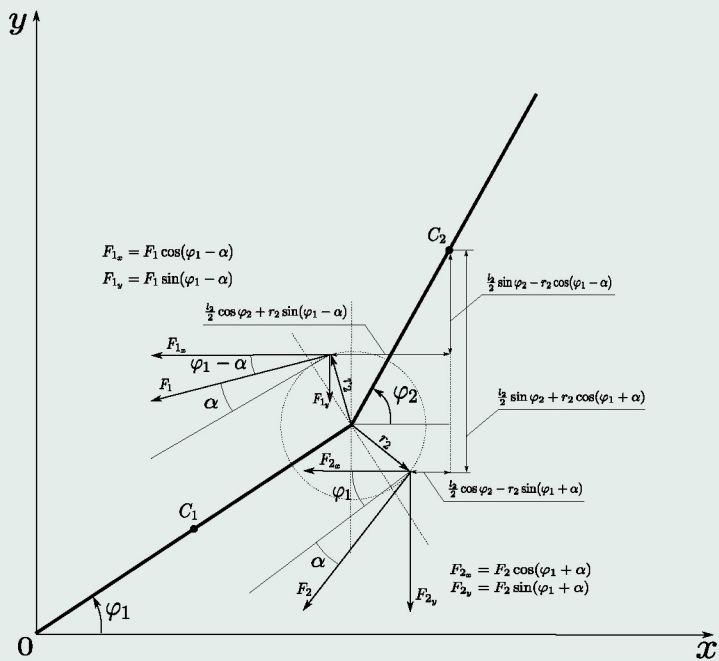


Рис. 4.2.9. Силы, создаваемые механизмом синхронизации

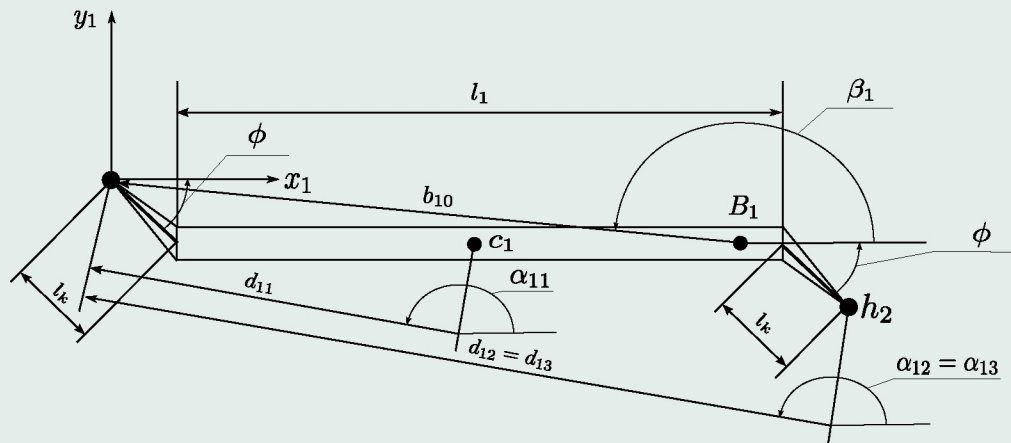


Рис. 4.2.10. Створка 1

$$y_{B_1} = \frac{m_1 y_{c_1} + m_2 y_{h_2}}{m_1 + m_2}$$

Вектор b_{10} :

$$b_{10} = \sqrt{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2}$$

$$\beta_1 = \pi - \arctg\left(\frac{y_{B_1}}{x_{B_1}}\right)$$

$$b_{10} = \begin{pmatrix} b_{10} \cos \beta_1 \\ b_{10} \sin \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

Рассмотрим вектора d_{ij}

$$d_{11} = \sqrt{x_{c_1}^2 + y_{c_1}^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{x_{h_2}^2 + y_{h_2}^2}$$

Углы α_{11} , α_{12} :

$$\alpha_{11} = \pi - \arctg\left(\frac{y_{c_1}}{x_{c_1}}\right)$$

$$\alpha_{12} = \pi - \arctg\left(\frac{y_{h_2}}{x_{h_2}}\right)$$

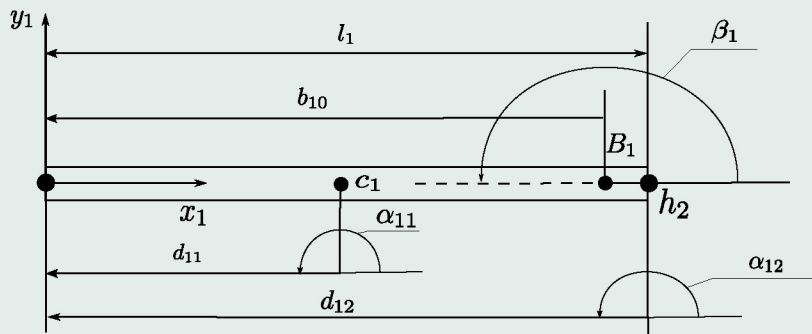
$$d_{11} = \begin{pmatrix} d_{11} \cos \alpha_{11} \\ d_{11} \sin \alpha_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{12} = \begin{pmatrix} d_{12} \cos \alpha_{12} \\ d_{12} \sin \alpha_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для упрощенной, стержневой модели створок, процедура определения этих векторов существенно упрощается. На рисунке 4.2.11 показана первая створка СБ. Как видно, некоторые величины в случае упрощенной модели потеряли актуальность: l_k и ϕ , а также углы α и β стали равными π .

Координаты центра масс створки:

$$x_{c_1} = \frac{l_1}{2}$$



Домашняя



На весь экран

На весь экран

Координаты шарнира h_2 :

$$y_{h_2} = 0$$

$$x_{B_1} = \frac{m_1 x_{c_1} + m_2 x_{h_2}}{m_1 + m_2}$$

$$y_{B_1} = \frac{m_1 y_{c_1} + m_2 y_{h_2}}{m_1 + m_2}$$

$$b_{10} = \sqrt{x_{B_1}^2 + y_{B_1}^2}$$

Закрывать



$$\beta_1 = \pi - \arctg\left(\frac{y_{B_1}}{x_{B_1}}\right) = \pi$$

$$b_{10} = \begin{pmatrix} b_{10} \cos \beta_1 \\ b_{10} \sin \beta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим вектора d_{ij}

$$d_{11} = \sqrt{x_{c_1}^2 + y_{c_1}^2}$$

$$d_{12} = \sqrt{x_{h_2}^2 + y_{h_2}^2}$$

Углы α_{11} , α_{12} :

$$\alpha_{11} = \pi - \arctg\left(\frac{y_{c_1}}{x_{c_1}}\right) = \pi$$

$$\alpha_{12} = \pi - \arctg\left(\frac{y_{h_2}}{x_{h_2}}\right) = \pi$$

$$d_{11} = \begin{pmatrix} d_{11} \cos \alpha_{11} \\ d_{11} \sin \alpha_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d_{12} = \begin{pmatrix} d_{12} \cos \alpha_{12} \\ d_{12} \sin \alpha_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Аналогичным образом определим параметры для второй створки СБ, изображенной на рисунке 4.2.12.

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

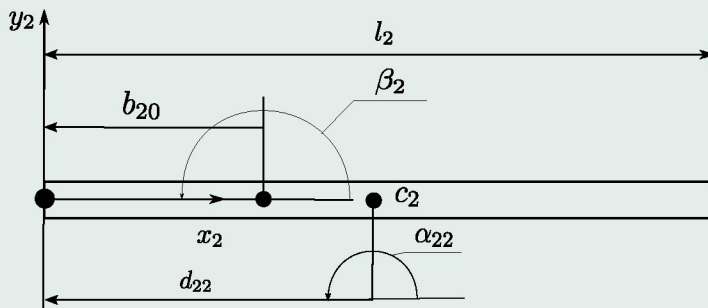


Рис. 4.2.12. Створка 2 для упрощенной модели

Координаты центра масс створки:

$$x_{c_2} = \frac{l_2}{2}$$

$$y_{c_2} = 0$$

Координаты барицентра B_2 :

$$x_{B_2} = \frac{m_1 0 + m_2 x_{c_2}}{m_1 + m_2}$$

$$y_{B_2} = \frac{m_1 0 + m_2 y_{c_2}}{m_1 + m_2}$$

Вектор b_{20} :

$$b_{20} = \sqrt{x_{B_2}^2 + y_{B_2}^2}$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

$$\beta_2 = \pi + \arctg\left(\frac{y_{B_2}}{x_{B_2}}\right) = \pi$$

$$b_{20} = \begin{pmatrix} b_{20} \cos \beta_2 \\ b_{20} \sin \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим вектора d_{ij}

$$d_{22} = \sqrt{x_{c_2}^2 + y_{c_2}^2}$$

$$d_{23} = \sqrt{x_{h_3}^2 + y_{h_3}^2}$$

Углы α_{23} и α_{22} :

$$\alpha_{22} = \pi + \arctg\left(\frac{y_{c_2}}{x_{c_2}}\right) = \pi$$

$$\alpha_{23} = \pi + \arctg\left(\frac{y_{h_3}}{x_{h_3}}\right) = \pi$$

$$d_{22} = \begin{pmatrix} d_{22} \cos \alpha_{22} \\ d_{22} \sin \alpha_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теперь, зная геометрические параметры створок СБ можно записать сформировать уравнения движения. Зная ранее матрицы S и T, а также силы и моменты действующие на систему по средствам механизма синхронизации (рисунок 4.2.9). На рисунке 4.2.9 силы F_1 и F_2 - это силы создаваемые пружинами троса синхронизации, C_1 и C_2 - центры масс стрелки, угол

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

$\alpha = \arcsin(\frac{r_2 - r_1}{l_1})$ - это угол между стержнем и тросом. Используя выражения для пружин троса (4.2.1) и (4.2.2) запишем выражения для сил:

$$F_1 = c_1 \Delta_{11}$$

$$F_2 = c_1 \Delta_{12}$$

Далее приведён текст программы моделирования процесса раскрытия «стержневой» солнечной батареи на языке MATLAB.

```
% Система состоящая из трех стержней, соединенных плоскими  
% цилиндрическими шарнирами
```

```
% Исходные данные и предварительные вычисления величин,  
% не зависящих от состояния системы
```

```
global n Lrod M1 r1 r2 s0 c_;
```

```
Rhist = [];
```

```
Thist = [];
```

```
% Длина стержня 1м (створки)
```

```
Lrod=1;
```

```
% масса стержня 1кг
```

```
Mrod=1;
```

```
% Момент инерции стержня
```



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

```
Jrod=Mrod*Lrod*Lrod/12;  
% Ускорение свободного падения
```

```
M1 = 6;  
r1 = 0.2;  
r2 = 0.1;  
s0 = 0;  
с_ = 6000;
```

```
% количество створок  
n=4;
```

```
% Структура системы
```

```
T=zeros(n);
```

```
for i=1:n
```

```
    for j=i:n
```

```
        T(i,j)=-1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
% матрица инцидентности
```

```
S=inv(T);
```

```
% массы тел m(i)
```

```
global m;
```

```
m = ones(1,n)*Mrod;
```

```
m(n)=m(n)*1;
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

```
% тензоры инерции тел J{i}
global J;
J=cell(n);
% шарнирные векторы рис. 5.11
c=cell(n,n);
for i=1:n
    J{i} = eye(3)*Jrod;
    for j=1:n
        c{i,j}=[0;0;0];
    end
end

for i=1:n
    c{i,i} =[-Lrod*0.5;0;0];
    if i~=n
        c{i,i+1}=[Lrod*0.5;0;0];
    end
end

% сборка матрицы C (матрица шарнирных векторов)
n=max(size(m));
C=cell(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        C{i,j}=S(i,j)*c{i,j};
    end
end
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
end
end

% векторы d матрица dvec{i,j}
% модули векторов d - матрица d(i,j)
global d;
% углы между осью x_i и вектором d_ij - alpha(i,j)
global alpha;
% векторы d_ij (5.15)
dvec=cell(n,n);
d=zeros(n); alpha=d;
for i=1:n
    for j=1:n
        dvec{i,j}=[0;0;0];
        for k=1:n
            dvec{i,j}=dvec{i,j}+C{i,k}*T(k,j);
        end
        d(i,j)=norm(dvec{i,j});
        alpha(i,j)=atan(dvec{i,j}(2)/dvec{i,j}(1));
    end
end

% Тензоры инерции дополненных тел относительно
% предшествующей шарнирной точки (5.24)
global K;
```


[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
for i=1:n
    K{i}=J{i};
    for k=1:n
        K{i}=K{i}+m(k)*(norm(dvec{i,k})^2*eye(3) ...
        -dvec{i,k}*dvec{i,k}');
    end
end
```

```
% Определение координат барицентра относительно П.Ш.Т
global beta;
global b;
bvec=cell(n,1);
for i=1:n
    bvec{i}=[0;0;0];
    for j=1:n
        bvec{i}=bvec{i}+m(j)*dvec{i,j};
    end
    bvec{i}=bvec{i}/sum(m);
    b(i)=norm(bvec{i});
    beta(i)=atan(bvec{i}(2)/bvec{i}(1));
end
```

```
%% -----
% Интегрирование ДУ
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
% -----  
  
tk=8;  
  
q0=[(-(1-mod(1:n,2))+mod(1:n,2))*pi/2 zeros(1,n) zeros(1,n)]';  
options = odeset('RelTol',0.000001,'AbsTol',0.000001, ...  
'OutputFcn',@output,'Stats','on');  
[t,qres] = ode113(@mbs523,[0 tk],q0,options);  
  
%% -----  
% Результаты  
% -----  
figure  
plot(t,qres(:,1:n));  
  
%%  
% Анимация  
%  
figure  
M = moviein(size(t,1));  
axis([0 (n+1)*Lrod -(n*0.5)*Lrod (n*0.5)*Lrod]);  
  
hold on;
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
p=cell(n,1);

maxY=0;
k=0;
for i=0:0.05:tk
    k=k+1;
    q=interp1q(t,qres,i);

    cla;
    p0=[0;0;0];

    p{1}=[cos(q(1));sin(q(1));0]*Lrod;
    rod=[p0';p{1}'];
    line(rod(:,1),rod(:,2),rod(:,3),'LineWidth',2);
    for j=2:n
        p{j}=p{j-1}+[cos(q(j));sin(q(j));0]*Lrod;
        rod=[p{j-1}';p{j}'];
        line(rod(:,1),rod(:,2),rod(:,3),'LineWidth',2);
        if (j>n-2)
            line(rod(:,1),rod(:,2),rod(:,3),'LineWidth',2);
        end
        if (j==n && maxY<p{n}(2))
            maxY=p{n}(2);
        end
    end
end
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

end

Файл-функция правой части системы дифференциальных уравнений.

```
%  
% q - углы и угловые скорости тел  
%  
function dq = mbs523(t,q)  
% массы тел m(i)  
global m;  
% модули векторов d - матрица d(i,j)  
global d;  
% модули векторов b_i0 - матрица b(i)  
global b;  
% углы между осью x_i и вектором d_ij - alpha(i,j)  
global alpha;  
% углы между осью x_i и вектором b_i0 - beta(i)  
global beta;  
% Тензоры инерции дополненных тел  
global K;  
  
n = max(size(m));  
M=sum(m);  
  
% Сборка матриц A и B
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

% Предполагаем, что тела цепи пронумерованы по возрастанию о
% корневого тела к конечному

```
A = zeros(n);
```

```
B = A;
```

```
for i=1:n
```

```
    for j=1:n
```

```
        if (i==j)
```

```
            A(i,j)=K{i}(3,3);
```

```
            B(i,j)=0;
```

```
        end
```

```
        if (i<j)
```

```
            Mdb=M*d(i,j)*b(j);
```

```
            A(i,j)=Mdb*cos(q(i)-q(j)+alpha(i,j)-beta(j));
```

```
            B(i,j)=Mdb*sin(q(i)-q(j)+alpha(i,j)-beta(j));
```

```
        end
```

```
        if (i>j)
```

```
            Mdb=M*d(j,i)*b(i);
```

```
            A(i,j)=Mdb*cos(q(i)-q(j)-alpha(j,i)+beta(i));
```

```
            B(i,j)=Mdb*sin(q(i)-q(j)-alpha(j,i)+beta(i));
```

```
        end
```

```
    end
```

```
end
```

```
Force = GetF(t,q);
```

```
Moment = GetM(t,q);
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

```
%b = ones(n,1);
%k = zeros(n,1);
delta_phi=q(1:n)-[0;q(1:n-1)];
delta_dot_phi=q(n+1:2*n)-[0;q(n+1:2*n-1)];
dy=step(delta_phi,-0.001*ones(n,1), ...
mod(1:n,2)',zeros(n,1),abs(mod(1:n,2)-1)');

% Моменты элементов фиксации
R=Moment;
Rlatch=(-1)*(1000*delta_phi+ ...
15*delta_dot_phi).*step(q(2*n+1:3*n), ...
zeros(n,1),zeros(n,1),ones(n,1)*0.0001,ones(n,1));
R=R+Rlatch;
for i=1:n
    for j=i:n
        R(i)=R(i)-d(i,j)*(Force(j,1)*sin(q(i)+alpha(i,j))- ...
Force(j,2)*cos(q(i)+alpha(i,j)));
    end
end

% Определение ускорений (решение СЛУ)
ind_dq=n+1;
BB=-B*(q(ind_dq:2*n).^2)+R;
x=A\BB;
```



Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

```
% Возвращаем скорости и ускорения  
dq=[q(ind_dq:2*n);x;dy];
```

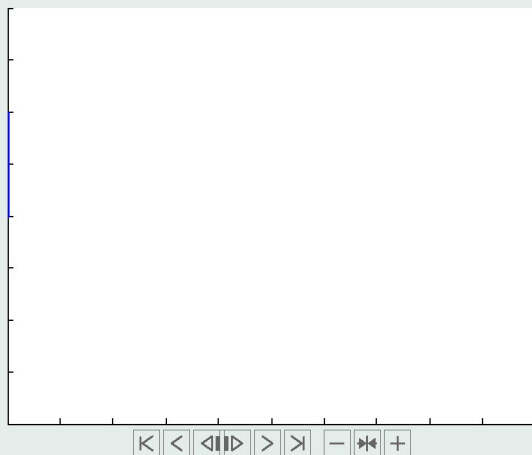


Рис. 4.2.13. Раскрытие створок солнечной батареи с системой синхронизации

4.3. Алгоритм метода отдельных тел

Рассмотренный метод эффективен для решения систем, состоящих из большого числа последовательно соединенных тел. Далее представлен вариант реализации алгоритма метода отдельных тел на языке системы MATLAB на примере модели тройного физического маятника, изображенного на рисунке 4.3.1. На каждое тело системы действует единичная сила тяжести, направленная «вниз» вдоль оси y неподвижной системы координат. Конфигурация системы задается тремя углами - обобщенными координатами: q_1 , q_2 , q_3 . Для запуска процесса интегрирования необходимо вызвать одну из функ-

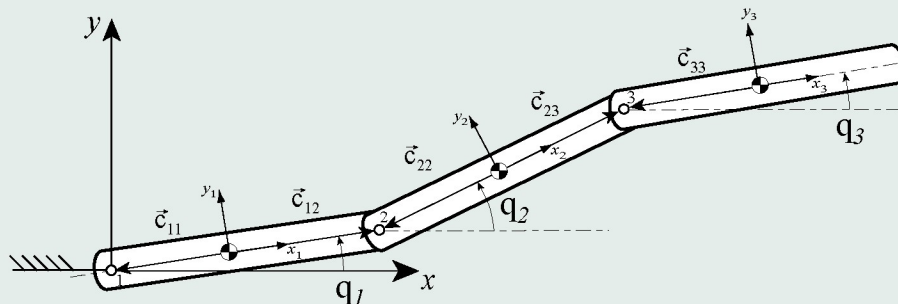


Рис. 4.3.1. Физический маятник

ций интегрирования: ode45, ode113 и др., передав ей в качестве аргумента имя m-файла, формирующего правую часть дифференциальных уравнений движения, например:



```
[t,Y] = ode113('MethodOTODE');
```

Файл-функция MethodOTODE.m формирует правую часть дифференциальных уравнений движения.

```
function [out1,out2,out3] = MethodOTODE(t,y,flag)
global n;
global q;
global dq;
global Mkast;
global Qkast;
if nargin < 3 | isempty(flag)
    % массив y
    q{1}=y(1); % угол поворота тела 1
    q{2}=y(2); % угол поворота тела 2
    q{3}=y(3); % угол поворота тела 3
    dq{1}=y(4);% угл. скорость тела 1
    dq{2}=y(5);% угл. скорость тела 2
    dq{3}=y(6);% угл. скорость тела 3
    % предварительное вычисление
    % матриц Mk* Qk*
    for k=n:-1:1
Mkast{k}=GetMk(k);
        Qkast{k}=GetQk(k);
    end
    e1=Getd2qk(1);
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)

```
e2=Getd2qk(2);
e3=Getd2qk(3);
% заполняем массив производных y'
out1 = [dq{1};dq{2};dq{3};e1;e2;e3];
else
switch(flag)
% начальные условия
case 'init'
% объявляем матрицы, начальные условия, ...
init;
% время интегрирования от 0 до 5 с
out1 = [0 5];
% начальные условия см. файл mot.m
out2 = [q{1};q{2};q{3};dq{1};dq{2};dq{3}];
otherwise
error(['Unknown request ''' flag '''.']);
end
end
```

Файл-скрипт init.m объявляет глобальные переменные программы, задает параметры механической системы и начальные условия интегрирования.

```
% Инициализация системы
% три тела
global n; n=3;
% массивы для хранения вычисленных значений Mk*, Qk*
```

[Закреть](#)

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
global Qkast;Qkast=cell(n,1);
global Mkast;Mkast=cell(n,1);
% матрицы масс
global m; m=cell(n,1);
% [m 0 0; 0 m 0; 0 0 Jz]
m{1}=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
m{2}=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
m{3}=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
% массив обобщенных координат
global q; q=cell(n,1);
% начальные условия - углы
q{1}=0;q{2}=0;q{3}=0;
% массив производных обобщенных координат
global dq; dq=cell(n,1);
% начальные условия - угловые скорости
dq{1}=0;dq{2}=0;dq{3}=0;
% массив шарнирных векторов
global c; c=cell(n,n);
c{1,1}=[-1;0;0];c{1,2}=[1;0;0];
c{2,2}=[-1;0;0];c{2,3}=[1;0;0];
c{3,3}=[-1;0;0];
% массив сил-моментов
% [Fx;Fy,Mz]
global Q; Q=cell(n,1);
Q{1}=[0;-1;0];
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
Q{2}=[0;-1;0];  
Q{3}=[0;-1;0];
```

Файл-функция GetMk.m вычисляет матрицы M_k^* .

```
function res=GetMk(k)  
global n; % количество тел  
global m; % матрицы масс тел  
global Mkast;  
if (k==n)  
    res=m{k};  
else  
    Sn=GetSn(k+1);  
    Cn=GetCn(k+1);  
    Un=GetUn(k+1);  
    Mk=Mkast{k+1};  
    res=m{k}+Cn'*Mk*Cn-Cn'*Mk*Sn*inv(Un)*Sn'*Mk*Cn;  
end
```

Файл-функция GetQk.m вычисляет матрицы Q_k^* .

```
function res=GetQk(k)  
global n;  
global Q;  
global Mkast;  
if (k==n)
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
        res=Q{k};
else
    Sn=GetSn(k+1);
    Cn=GetCn(k+1);
    Un=GetUn(k+1);
    Mk=Mkast{k+1};
    Wprim=GetWprim(k+1);
    Qn=GetQk(k+1);
    res=Q{k}-Cn'*(Mk*(Sn*inv(Un)*Sn'*(Qn-Mk*Wprim)+Wprim)-Qn);
end
```

Файл-функция Getd2qk.m вычисляет матрицы значения $\ddot{q}_k$.

```
function res=Getd2qk(k)
global Qkast;
global Mkast;
w=GetWk(k-1);
Uk=GetUn(k);
Qk=Qkast{k};
Mk=Mkast{k};
Ck=GetCn(k);
Sk=GetSn(k);
res=inv(Uk)*Sk'*(Qk-Mk*(Ck*w+GetWprim(k)));
```

Файл-функция GetCn.m вычисляет матрицу C_n , входящую в выражение (??).

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
function res=GetCn(n)
global q;global c;
if (n==1)
    res=zeros(3,3);
else
    qn=q{n-1};
    cn=c{n-1,n};
    res=zeros(3,3);
    res(1,1)=1;
    res(2,2)=1;
    res(1,3)=-sin(qn)*cn(1)-cos(qn)*cn(2);
    res(2,3)=+cos(qn)*cn(1)-sin(qn)*cn(2);
end
```

Файл-функция GetSn.m вычисляет матрицу S_n , входящую в выражение (??).

```
function res=GetSn(n)
global q;global c;
qn=q{n};
cn=c{n,n};
res=zeros(3,1);
res(1)=+cos(qn)*cn(2)+sin(qn)*cn(1);
res(2)=+sin(qn)*cn(2)-cos(qn)*cn(1);
res(3)=1;
```

Файл-функция GetUn.m вычисляет матрицу U_n , входящую в выражение (??).

```
function res=GetUn(n)
global Mkast;
Sn=GetSn(n);
Mk=Mkast{n};
res=Sn'*Mk*Sn;
```

Файл-функция GetSn.m вычисляет матрицу w'_n , входящую в выражение (??).

```
function res=GetWprim(n)
global q;global dq;global c;
if (n==1)
    q1=0;
    dq1=0;
    c1=[0;0;0];
else
    q1=q{n-1};
    dq1=dq{n-1};
    c1=c{n-1,n};
end
q2=q{n};
dq2=dq{n};
c2=c{n,n};
cq1=cos(q1);cq2=cos(q2);
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
sq1=sin(q1);sq2=sin(q2);
res=zeros(3,1);
dq12=dq1*dq1;
dq22=dq2*dq2;
res(1)=dq12*(-cq1*c1(1)+sq1*c1(2))+dq22*(+cq2*c2(1)-sq2*c2(2));
res(2)=dq12*(-sq1*c1(1)-cq1*c1(2))+dq22*(+sq2*c2(1)+cq2*c2(2));
res(3)=0;
```

Файл-скрипт start.m запускает процесс интегрирования и отображает результаты расчета: конфигурацию системы, графики изменения кинетической, потенциальной и полной энергии (рис. 4.3.2).

```
%% Интегрирование
% результат интегрирования:
% Y(:,1) столбец углов поворота 1 тела
% Y(:,2) столбец углов поворота 2 тела
% Y(:,3) столбец углов поворота 3 тела
% Y(:,4) столбец угл. скорости 1 тела
% Y(:,5) столбец угл. скорости 2 тела
% Y(:,6) столбец угл. скорости 3 тела
[t,Y] = ode113('motODE');
%% рисование конфигурации системы
subplot(1,2,1);
M = moviein(size(Y,1));
axis([-6 6 -6 6]);
hold on;
```


[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
for i=1:size(Y,1) % for each step

    p0=[0;0;0];
    pA=[cos(Y(i,1));sin(Y(i,1));0]*2;
    pB=pA+[cos(Y(i,2));sin(Y(i,2));0]*2;
    pC=pB+[cos(Y(i,3));sin(Y(i,3));0]*2;

    rod1=[p0';pA'];
    rod2=[pA';pB'];
    rod3=[pB';pC'];

    % line(x,y,z,opttions...)
    line(rod1(:,1),rod1(:,2),rod1(:,3), ...
        'LineWidth',4,'Color','Red');
    line(rod2(:,1),rod2(:,2),rod2(:,3), ...
        'LineWidth',4,'Color','Green');
    line(rod3(:,1),rod3(:,2),rod3(:,3), ...
        'LineWidth',4,'Color','Blue');

    M(:,i) = getframe;
    %mo= getframe;
    %mov=addframe(mov,mo);
    cla;
end
%% Вычисление скоростей тел
```

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Закреть](#)

```
v12=Y(:,4).^2;
v22=4*Y(:,4).^2+4*cos(Y(:,1)-Y(:,2)).*Y(:,4).*Y(:,5)+Y(:,5).^2;
v32=(2*cos(Y(:,1)).*Y(:,4)+2*cos(Y(:,2)).*Y(:,5)+ ...
cos(Y(:,3)).*Y(:,6)).^2+(2*sin(Y(:,1)).*Y(:,4)+ ...
2*sin(Y(:,2)).*Y(:,5)+sin(Y(:,3)).*Y(:,6)).^2;
%% кинетическая и потенциальная энергия
Ek=(v12+v22+v32)*0.5+0.5*(Y(:,4).*Y(:,4)+ ...
Y(:,5).*Y(:,5)+Y(:,6).*Y(:,6));
Ep=(sin(Y(:,1))+2*sin(Y(:,1))+sin(Y(:,2))+ ...
2*sin(Y(:,1))+2*sin(Y(:,2))+sin(Y(:,3)));
%% Построение графика кинетической, потенциальной
% и полной энергии системы
subplot(1,2,2);
plot(t,[Ek,Ep,Ek+Ep]);
```

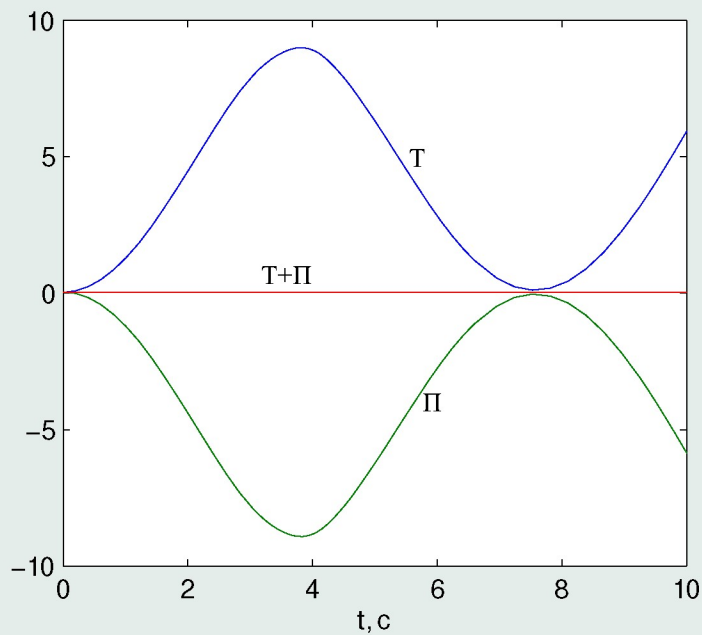


Рис. 4.3.2. Изменение кинетической потенциальной и полной энергии системы



Заключение

Представленные примеры моделирования динамики механических системы ракетно-космической техники основываются на допущении об абсолютной твердости тел системы, поэтому для записи уравнений движения использовался аппарат динамики твердого тела и системы тел.

В некоторых случаях следует учитывать и упругие свойства конструкции. Так например при анализе движения створок солнечных батарей, если необходимо произвести адекватную оценку сил реакций, возникающих в узле крепления батареи к КА, необходимо рассматривать створку как деформируемую систему. Тоже относится и к отделению створок головного обтекателя: при больших габаритах створок следует учитывать влияние упругих свойств конструкции на динамику процесса отделения, что определяет движение створки относительно РН. Как показывают результаты экспериментальной отработки процесса отделения в земных условиях, конструкция створок обтекателя претерпевает существенные деформации, что влияет на зону безопасности полезного груза.

Учет упругих свойств конструкции является сложной задачей, которая выходит далеко за рамки данной работы.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)[Назад](#)[На весь экран](#)

Литература

1. *Baraff, D.* Linear-time dynamics using Lagrange multipliers / D. Baraff. — Carnegie Mellon University, 1996.
2. *Junkins, John L.* Orthogonal Square Root Eigenfactor Parameterization of Mass Matrices / John L. Junkins, Hanspeter Schaub // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. — 1997. — Nov.–Dec. — Vol. 20, no. 6. — Pp. 1118–1124.
3. *Вильке, В. Г.* Теоретическая механика / В. Г. Вильке. — М.: Изд-во МГУ, 1998.
4. *Голуб, Дж.* Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. — Мир, 1999.
5. *Колесников, К. С.* Динамика разделения ступеней летательных аппаратов / К. С. Колесников, В. И. Козлов, В. В. Кокушкин. — Машиностроение, 1977.

[Закреть](#)