МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА

В.Р. КАРГИН

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

САМАРА 2002

УДК 621.771.001 (075.8)

Каргин В.Р. **Прикладная механика сплошных сред:** Учеб. пособие / Под общ.ред. Ф.В.Гречникова. Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Самара, 2002. 223 с.

ISBN 5-7883-0207-2

На современном уровне изложены основные разделы механики сплошных сред: теории напряжений и деформаций, упругости и пластичности, основные законы механики сплошной среды применительно к процессам обработки металлов давлением.Приведены постановка и методы решения краевых задач. Теоретический материал иллюстрирован примерами решения соответствующих задач.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям: 110600 "Обработка металлов давлением", 120400 "Машины и технология обработки металлов давлением". Может быть полезно аспирантам, научным и инженерно-техническим работникам предприятий металлургической и машиностроительной промышленности. Подготовлено на кафедре обработки металлов давлением.

Табл. 8 . Ил.73. Библиогр. 12

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева.

Рецензенты: проф. В.В. Уваров, В.Н. Самонин

ISBN 5-7883-0207-2 © В.Р. Каргин, 2002
© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5
Глава 1. Теория напряжений 11
1.1. Внешние силы 11
1.2. Внутренние силы. Напряжения 13
1.3. Индексные обозначения 17
1.4. Тензор напряжений 19
1.5. Напряжения на наклонной площадке 23
1.6. Главные нормальные напряжения 26
1.7. Октаэдрические напряжения 37
1.8. Разложение тензора напряжений 38
1.9. Главные (максимальные) касательные напряжения 43
1.10. Равновесие сил и моментов 48
1.11. Диаграмма напряжений Мора 55
1.12. Выводы 58
Задания для самоконтроля 60
Задачи и упражнения 61
Глава 2. Теория деформаций 73
2.1. Понятие деформации. Тензор деформаций 73
2.2. Геометрические уравнения 78
2.3. Уравнения совместности деформаций 81
2.4. Главные деформации 85
2.5. Схемы главных деформаций 87
2.6. Разложение тензора деформаций 91
2.7. Однородная, равномерная и монотонная деформации 93
2.8. Большие деформации 95
2.9. Объемная деформация 100
2.10. Переменные Лагранжа и Эйлера 101
2.11. Скорость деформации 103
2.12. Выводы 107
Задания для самоконтроля 109
Задачи и упражнения 111
Глава 3. Теория упругости 118
3.1. Обобщенный закон Гука 118

3.2. Различные формы записи основного закона упругости 125
3.3. Удельная потенциальная энергия 132
3.4. Постановка задач в теории упругости и способы их решения 134
3.5. Частные случаи объемного напряженного состояния 141
3.6. Выводы 156
Задания для самоконтроля 158
Задачи и упражнения 160
Глава 4. Теория пластичности 166
4.1. Условия перехода металла в пластическое состояние 166
4.2. Условие постоянства максимального касательного напряжения 168
4.3. Условие постоянства интенсивности напряжений 171
4.4. Условие пластичности анизотропных сред 178
4.5. Экспериментальная проверка условий пластичности 182
4.6. Условие упрочнения 183
4.7. Простое и сложное нагружение 189
4.8. Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации 191
4.9. Постулат Друкера 198
4.10. Ассоциированный закон течения 200
4.11. Теория малых упругопластических деформаций 201
4.12. Теория пластического течения 205
4.13. Теория Сен-Венана-Леви-Мизеса 208
4.14. Выводы 210
Задания для самоконтроля 213
Задачи и упражнения 216
Рекомендуемый библиографический список 222

ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошных сред является разделом механики. *Механика* - это наука, изучающая простейшую форму движения материи - *механическое движение,* т.е. изменение в пространстве с течением времени взаимного расположения тел или частей тела. В теоретической механике для описания этой формы движения используются абстрактные понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальной точкой называется тело конечной массы, но пренебрежительно малых размеров.

Абсолютно твердым телом называется тело, состоящее из совокупности материальных точек, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга под действием приложенных внешних сил.

Если допустить изменение взаимного расположения материальных частиц, то придем к понятию *сплошной среды.* К сплошным средам относятся газообразные, жидкие и твердые деформируемые тела, например воздух, смазка и металл соответственно.

Механика сплошных сред - это часть механики, посвященная изучению движения газообразных, жидких и твердых деформируемых тел.

В области обработки металлов давлением наибольший интерес представляет изучение движения только твердых деформируемых тел.

Основными формами движения твердых деформируемых металлических тел являются упругость и пластичность (упругая и пластическая деформации).

Упругость- это способность металлических тел после снятия внешних сил полностью восстанавливать свои прежние форму, размеры и объем. Если на металлическое тело действуют внешние растягивающие силы, то расстояния между соседними атомами в кристаллической решетке увеличиваются в направлении действия этих сил. Если на тело действуют внешние сжимающие силы, расстояния между атомами уменьшаются. Если изменение расстояний между атомами много меньше периода кристаллической решетки, после снятия внешних сил восстанавливаются прежние расстояния между атомами и в кристаллической решетке не остается никаких

изменений. Такая деформация называется упругой. При упругой деформации кристаллическая решетка подобно пружине накапливает потенциальную энергию, которая называется энергией упругой деформации.

Пластичность (деформируемость) - это способность металлов под воздействием внешних сил изменять необратимо свою форму и размеры без разрушения. При увеличении внешних сил увеличивается энергия упругой деформации. По достижении определенной ее величины начинается течение металла и в действие вступает новый механизм деформации - скольжение. При этом плоскости, в которых располагаются атомы, смещаются относительно друг друга под действием касательных напряжений на величину много большую, чем период кристаллической решетки. После снятия внешней нагрузки прежняя картина не восстанавливается, как это было при упругой деформации. Такая деформация тела называется пластической.

Состояние, при котором металлы приобретают эту способность (свойство), называется упругим или пластическим. Пластическому состоянию всегда предшествует упругое состояние. Для металлических тел упругие деформации в процессах обработки металлов давлением обычно малы.

Пластичность как ценное свойство металлов широко используется в процессах обработки металлов давлением (горячей и холодной штамповке, прокатке, прессовании, волочении) для придания детали нужной формы.

Изучением действия внешних сил на упругие тела занимается *теория упругости*. Изучением действия внешних сил на пластические тела занимается *теория пластичности*. Теории упругости и пластичности - основные разделы механики сплошных сред. В них рассматривается равновесие и движение деформируемых твердых тел с учетом изменения расстояния между материальными частицами при наложении внешнего воздействия, а также методы расчета напряженно-деформированного состояния металла.

Основные задачи дисциплины "Механика сплошных сред": определение полей напряжений и деформаций в обрабатываемом металле и инструменте, что имеет не только чисто теоретический, но и практический интерес; установление условий перехода металла из упругого состояния в пластическое; выяснение наиболее благоприятных режимов пластического деформирования; изучение связи между пластическими деформациями и изменением физических и механических свойств металла.

При решении поставленных задач обычно выбирается модель твердого деформируемого тела, построенная на гипотезах о сплошности строения, однородности материала, шаровой изотропии и естественном ненапряженном состоянии.

Гипотеза о сплошности строения тела. По этой гипотезе тело до деформации, в процессе деформации и после остается сплошным (без пустот, разрывов, трещин).

В любом существенном для нас объеме очень много атомов, а расстояния между ними малы. Например, 1 $см^3$ железа плотностью 7,87 $г/см^3$ содержит при температуре 20°С $8{,}46 \cdot 10^{22}$ атомов, а расстояние между соседними атомами равно $2{,}86 \cdot 10^{-8}$ см. Поэтому твердое деформируемое металлическое тело можно моделировать сплошной средой, занимающей часть реального пространства. Расстояние между ближайшими точками сплошной среды как угодно мало. Эта гипотеза является основой для математического описания движения твердых деформируемых тел, позволяет использовать математический аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления.

Допущение об однородности материала. Сплошная среда называется однородной, если свойства выделенных из нее одинаковых объемов одинаковы; например, среда имеет одинаковую плотность во всех точках.

В реальных деформируемых телах однородности не существует, хотя бы из-за отсутствия однородности материала. Неоднородными телами являются плакированный лист из дюралюмина, неравномерно нагретое по объему тело. Существенно неоднородны композиционные материалы, содержащие волокна из углерода или бора.

Гипотеза об изотропности среды. Сплошная среда считается изотропной по отношению к какому-либо свойству металла, если это свойство в любой точке будет одинаковым по всем направлениям. Если же свойства зависят от направления в точке, то среда является анизотропной по отношению к этим свойствам.

Отдельно взятый кристалл металла анизотропен, поскольку атомы в кристаллической решетке располагаются совершенно определенным образом. Но если в объеме содержится большое количество хаотично расположенных кристаллов, то материал в целом можно рассматривать как изотропный. С другой стороны, в прокатанном металле зерна деформируются в направлении прокатки, образуется так называемая текстура. Поэтому свойства в направлении прокатки и в поперечном

направлении будут разными. Такая же анизотропия возникает при всех видах обработки металлов давлением.

Особенно резко выражена анизотропия в полуфабрикатах, изготовленных из сплавов авиационного назначения (титановых, бериллиевых, магниевых, алюминиевых), специальных сталей. Одними из самых перспективных материалов являются композиты. Они по своему строению (конструкции) вообще не могут быть изотропными.

Гипотеза о естественном напряженном состоянии тела. Согласно этой гипотезе существующие до приложения нагрузок напряжения в материале принимаются равными нулю. Эта гипотеза также не отвечает реальности, т.к. невозможно получить полуфабрикаты без остаточных напряжений.

Всё перечисленное представляет собой основные допущения механики сплошной среды. Причем, если гипотезы о сплошности строения тела и его естественном ненапряженном состоянии остаются как бы незыблемыми, то применение остальных не всегда является обязательным. Из перечисленного ясно, что принятые гипотезы не отвечают действительности, но они помогают строить физическую модель деформируемой среды.

Принятых допущений недостаточно для построения моделей теорий упругости и пластичности. Здесь приходится проводить дальнейшую идеализацию.

Идеально упругое тело (рис. 1,а). Это понятие лежит в основе теории упругости. Для идеально упругих тел выполняется первый закон термодинамики о сохранении энергии в изолированной среде. Это явление нашло математическое отражение в законе Гука. Поэтому тела, подчиняющиеся этому закону, иногда называют телами Гука.

Нелинейно-упругое тело (рис. 1,б). Тело либо не подчиняется закону Гука, либо деформация перешла за предельно упругое состояние, но разгрузка идет по той же кривой.

Идеально упругопластическое тело или идеально пластическое тело (рис.1,в). При напряжении меньше предела упругости (текучести) тело ведет себя как тело Гука. При достижении предела текучести начинается пластическое течение и деформация здесь является неопределенной. Разгрузка протекает упруго с тем же модулем, что и при нагружении, сжатие подчиняется тем же законам, что и растяжение, т.е. пределы текучести на растяжение $\sigma_т^{р}$ и жатие $\sigma_т^{сж}$ одни и те же по абсолютной величине. Такие тела называют телами Прандтля.

Идеально жесткопластическое тело (рис.1,г). Если пластическая деформация является развитой, то упругой составляющей можно пренебречь и считать, что материал до предела текучести ведет себя как абсолютно твердое тело. И здесь пластическая деформация является неопределенной и может неограниченно возрастать. Такие тела называют телами Сен-Венана. Определенный тип моделей может учитывать упрочнение, т.е. наблюдается повышение предела текучести с ростом деформации. В литературе рассматриваются и другие идеализации: идеально вязкие, упруговязкие и т.д.

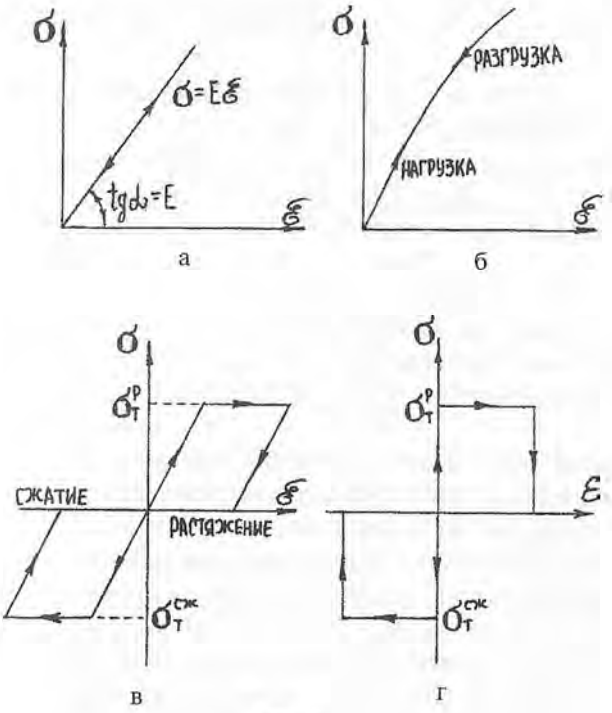


Рис.1

Следует отметить еще два допущения при построении теорий упругости и пластичности:

- обычно пренебрегают временными эффектами;
- считают, что упругие и пластические деформации разделены.

В заключение отметим, что подход, обоснованный на предложенных гипотезах, носит название феноменологического.

При этом рассматривают чисто внешнее взаимодействие, не задаваясь вопросом, за счет чего это достигнуто, не рассматривают внутреннее строение материала и происходящие при нагружении изменения в теле. Другими словами, мы отвлекаемся от физической сущности процессов.

ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

1.1. Внешние силы

В процессе обработки металлов давлением участвуют деформируемый металл и инструмент. Наша задача - определить их взаимодействие.

Взаимодействие обрабатываемого тела и инструмента можно рассматривать с точки зрения его величины, направления, продолжительности. С точки зрения величины и направления взаимодействие удобно выражать силой. Известно, что силы - векторные величины, которые интуитивно можно представить как давление или тягу.

В механике твердого деформируемого тела под внешней силой понимают воздействие окружающей среды на тело, стремящееся изменить состояние его покоя или движения. Здесь под окружающей средой подразумевают другие тела и поля, например, поле тяготения земли, магнитное поле и т. д.

Внешние силы классифицируются по нескольким признакам. Так, в зависимости от места расположения точек приложения силы делятся на поверхностные и объемные (массовые). По продолжительности действия внешние силы подразделяются на постоянные и временные. Например, вес моста - сила постоянная, поезд, движущийся по нему, - сила временная. По характеру изменения величины внешние силы делятся на статические и динамические. Статическими будут такие силы, когда изменение их величины настолько мало, что ускорением точек тела и их инерцией можно пренебречь. Если ускорение велико и им нельзя пренебречь, силы - динамические. Динамические силы могут изменяться большое число раз, их называют циклическими, повторно-переменными, вибрационными. Если же они прикладываются на очень короткий промежуток времени, то силы будут ударными. По способу воздействия силы бывают активными и реактивными. Активные силы возникают от действия машин (прокатных станов, гидравлических прессов,

молотов) и передаются обрабатываемому металлу при помощи инструмента. В процессе деформирования на металл воздействуют не только активные силы, но и сопротивление неподвижных частей инструмента, которые являются связями, ограничивающими движение деформируемого тела. Воздействие связей на твердое деформируемое тело можно представить как воздействие некоторых сил, которые называют реакциями связей (реактивными силами).

Если деформируемое тело соприкасается с поверхностью инструмента, ограничивающей перемещение точек тела, то реакции связей при отсутствии трения будут направлены по нормали к поверхности в сторону тела. На рис.2 показана схема волочения проволоки, где сила N представляет воздействие стенок инструмента на деформируемый металл и является реактивной силой, а сила волочения $P_{вол}$ -активной силой.

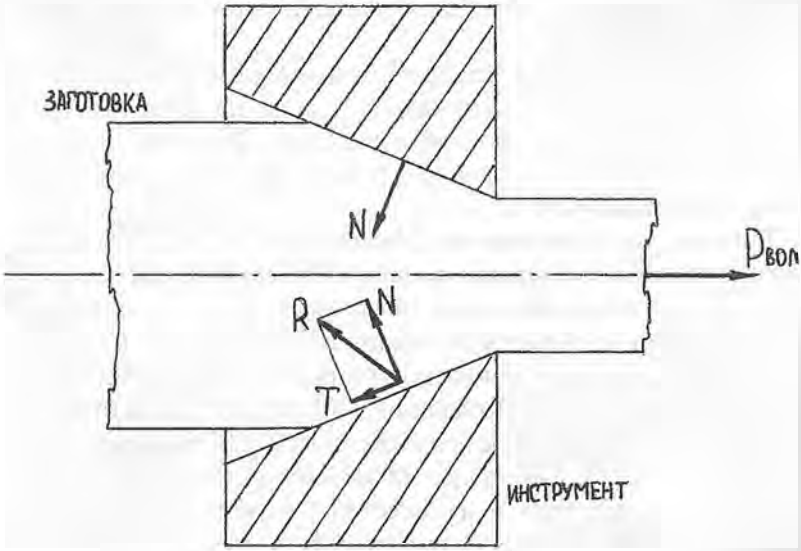


Рис.2

К реакциям связей относятся также силы трения, возникающие в местах соприкосновения деформируемого металла со стенками инструмента. Сила трения T располагается в плоскости, касательной к точкам соприкосновения деформируемого металла со стенками инструмента, и направлена в сторону, противоположную движению (рис.2). В результате сложения с силами трения реакции связей R отклоняются от направления нормали к поверхности инструмента в сторону, противоположную движению металла.

Силы, распределенные по всему объему твердого деформируемого тела V, называются массовыми (объемными) силами. Если F - главный вектор массовых сил, действующих на элемент массы Δm, то плотность массовой силы в данной точке

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\vec{F}}{\Delta m} = \frac{d\vec{F}}{dm}.$$

На малую частицу объемом dV с массой ρdV действует массовая сила $dF = \rho \vec{f}\, dV$, а для всего объема V главный вектор массовых сил равен

$$F = \iiint \rho \vec{f} d V,$$

где ρ-плотность сплошной среды. Примерами массовых сил являются силы тяжести и инерционные силы, силы магнитного притяжения.

В процессах обработки металлов давлением основную роль играют поверхностные силы. Если ΔP_n – усилие, приходящееся на элементарную площадку ΔS с вектором внешней нормали n к поверхности тела, то плотность поверхностных сил (давление) равна

$$\sigma_n = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta S} = \frac{dP_n}{ds}.$$

Главный вектор поверхностных сил, действующих на конечный объем V сплошной среды, который ограничен поверхностью S, равен

$$\vec{P}_n = \iint \sigma_n ds.$$

1.2. Внутренние силы. Напряжения

Под действием внешних сил в твердом деформируемом теле

возникают внутренние силы, которые связаны с тем, что реальное тело сопротивляется изменению расстояния между частицами.

Оценить в расчетах, как изменяются связи в металле под действием внешних сил, практически не удается. Исключительная сложность явлений вынуждает идти на идеализацию общей схемы процесса. Одной из таких идеализаций является понятие о напряжениях, которые статистически отражают внутренние связи между частицами металла. Как известно, напряжение представляет собой плотность внутренних сил или интенсивность внутренних сил, действующих между частицами сплошного тела по воображаемым плоскостям.

Напряжения, возникающие в деформируемом теле под действием внешних сил, определяются с помощью метода сечений. Положим, что в твердом теле, находящемся в равновесии под действием внешних сил, требуется определить напряжение в некоторой произвольной точке А (рис.3). Для этого мысленно сечем тело плоскостью через т. А

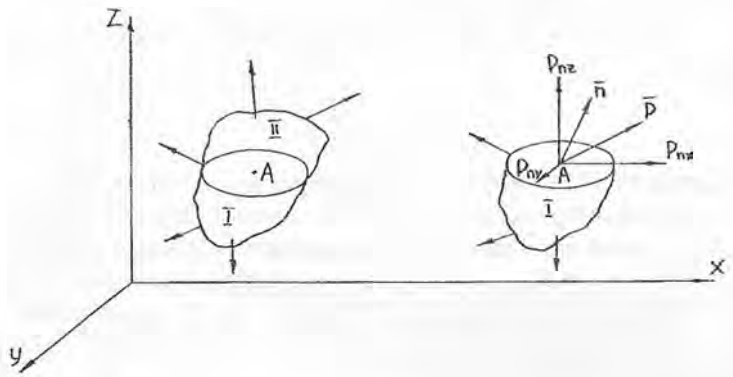


Рис.3

и делим его на части I и II. Отбросив часть II, заменим ее действие на часть I внутренними силами. Положим, что равнодействующая сил, действующая на элементарную площадку ΔS, выделенную в окрестности точки А, равна ΔP. Тогда напряжение в точке А будет

$$\bar{P} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S} = \frac{d\vec{P}}{dS}.$$

Напряжение $\vec{P}$ как векторную величину можно разложить на составляющие, параллельные координатным осям P_{nx}, P_{ny}, P_{nz}. Индекс n указывает на то, что напряжения определены на площадке с нормалью n, а второй индекс указывает ось, параллельна которой проекция напряжения P.

Очевидно, что напряжение $\vec{P}$ зависит от направления сечения, проведенного через точку А. Через точку А можно провести множество сечений, а поэтому и векторов напряжений $\vec{P}$ в точке будет бесчисленное множество. Причем каждое из них будет соответствовать определенному сечению, направление которого принято задавать направлением внешней нормали n (рис.3). Это бесчисленное множество векторов $\vec{P}$ и будет характеризовать напряженное состояние точки тела. В такой постановке вектор $\vec{P}$ оказывается непригодным для описания напряженного состояния сплошной среды в точке. К счастью, для того чтобы полностью описать напряженное состояние в точке тела, нет необходимости рассматривать все векторы. Это можно сделать, задавая векторы напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках около точки, параллельных координатным плоскостям.

Если рассмотреть сечение, параллельное координатной плоскости ZOY, то составляющие напряжения P_x (проекции) будут σ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz} (рис.4, а), где σ_{xx} (или σ_x) - нормальное напряжение, направленное по нормали к площадке, τ_{xy}, τ_{xz} - касательные напряжения, параллельные осям Y и Z. Для сечений, параллельных координатным плоскостям ZOY, XOY, составляющие напряжений соответственно будут σ_y, τ_{yz}, τ_{yx}, σ_z, τ_{zy}, τ_{zx} (рис. 4,б, в).

Таким образом, напряженное состояние в точке А может быть определено тремя векторами напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярных координатным осям. Каждый из этих векторов можно разложить на нормальное и два касательных напряжения (рис. 5).

Для площадок по направлениям, параллельным координатным осям, имеем 9 скалярных величин компонент напряжения: σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{yz}, τ_{zy}, τ_{zx}, τ_{xz}, характеризующих напряженное состояние в точке. Нормальные напряжения принято считать

положительными, если они растягивающие, и отрицательными, если они сжимающие. Касательные напряжения положительны, если они дают положительную проекцию на соответствующую координатную ось.

В системе СИ напряжения выражаются в мегапаскалях (МПа) или Н/мм^2 (1 МПа = 1 Н/мм^2). Наряду с ними по прежнему широко используется размерность напряжений в металлических телах кгс/мм^2 (1 кгс/мм^2 = 9,8 Мпа≈10 МПа ≈10 Н/мм^2).

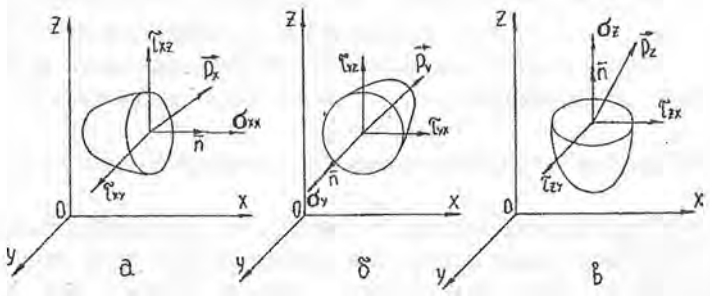


Рис.4

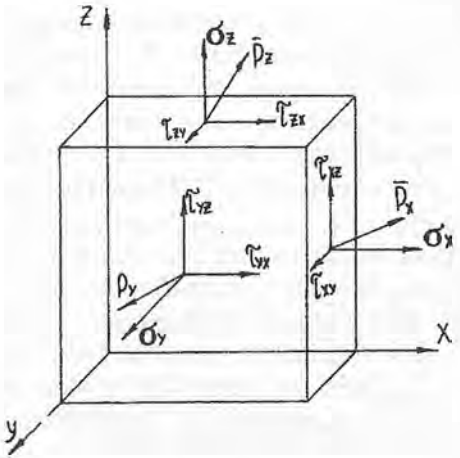


Рис. 5

1.3. Индексные обозначения

Индексные обозначения позволяют наглядно и кратко представить многие величины и выражения. Смысл этих обозначений в том, что к основным буквам (или букве) одночленного выражения добавляются нижние буквенные индексы, например, C_{ij}, $A_{ij}B_j$.

По правилам индексных обозначений один и тот же буквенный индекс может встречаться в каждом члене только один раз или два раза.

Если индекс используется один раз (неповторяющийся индекс), то он пробегает значения 1,2,...,N, где N- заданное положительное целое число.

Неповторяющиеся индексы называются свободными.

Если индекс в обозначении используется дважды, то подразумевается, что по этому индексу производится суммирование от 1 до N (правило суммирования Эйнштейна). При этом знак суммы опускается. Повторяющиеся индексы называются немыми. Сумма не меняет своего значения, если заменить немой индекс другой буквой:

$$a_ib_i=a_kb_k=a_nb_n \ .$$

В тех случаях, когда немых индексов несколько, суммирование производится по каждому немому индексу. В качестве индексов используют латинские буквы i, j, k, l, m, n,...

Обычное физическое пространство является трехмерным, поэтому при использовании в этом случае индексных обозначений размерность индекса равна трем ($N=3$).

Декартовы координаты x, y, z будем обозначать соответственно через x_1 , x_2 , x_3 соответственно и записывать их как x_i, где индекс i принимает значения 1, 2, 3. Вместо индекса i можно взять любую другую латинскую букву, например j, где j=1, 2, 3. В трехмерном пространстве имеем

$$a_{ii} = \Sigma a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \ ,$$

$$a_ib_i = \Sigma a_ib_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \ .$$

В некоторых обозначениях широко используется символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0 \ , i \neq j \end{cases} .$$

Задача 1. Требуется записать в развернутой форме уравнение

$$S_j = \sigma_{ij} n_i \ .$$

Решение. В правом выражении индекс i немой. По нему проводим суммирование по значениям 1, 2, 3. Получим

$$S_j = \sigma_{1j} n_1 + \sigma_{2j} n_2 + \sigma_{3j} n_3 \ .$$

Приняв последовательно $j = 1, 2, 3$, имеем три уравнения:

$$j = 1 \quad S_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \ ,$$
$$j = 2 \quad S_2 = \sigma_{12} n_2 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \ ,$$
$$j = 3 \quad S_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \ .$$

Задача 2. Требуется записать в развернутой форме уравнение

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j \ .$$

Решение. В одночленном выражении два немых индекса i и j, следовательно, проводится двойное суммирование. Вначале проведем суммирование по индексу i ($i = 1, 2, 3$), затем по индексу j ($j = 1, 2, 3$):

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j = \sigma_{1j} n_2 n_j + \sigma_{2j} n_2 n_j + \sigma_{3j} n_3 n_j = \sigma_{11} n_1 n_1 + \sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{13} n_1 n_3 + \sigma_{21} n_2 n_1 + \sigma_{22} n_2 n_2 + \sigma_{23} n_2 n_3 + \sigma_{31} n_3 n_1 + \sigma_{32} n_3 n_2 + \sigma_{33} n_3 n_3 \ .$$

Задача 3. Записать в развернутой форме выражение

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} \ .$$

Решение. Запись S_{ij} обозначает совокупность величин $3^2 = 9$ величин: S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{21}, S_{22}, S_{23}, S_{31}, S_{32}, S_{33}. Соответственно получим девять уравнений:

$$S_{11} = \sigma_{11} - \sigma, \quad S_{21} = \sigma_{21}, \quad S_{31} = \sigma_{31},$$
$$S_{12} = \sigma_{12}, \quad S_{22} = \sigma_{22} - \sigma, \quad S_{32} = \sigma_{32},$$
$$S_{13} = \sigma_{13}, \quad S_{23} = \sigma_{23}, \quad S_{33} = \sigma_{33} - \sigma \ .$$

Задача 4. Даны уравнения в развернутом виде.

$$S_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z,$$
$$S_y = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z,$$
$$S_z = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \ .$$

Записать их в тензорном виде.

Решение. Вначале перейдем от декартовых обозначений координатных осей к тензорным обозначениям. Имеем три уравнения:

$$S_1=\sigma_{11}n_1+\sigma_{12}n_2+\sigma_{13}n_3,$$
$$S_2=\sigma_{21}n_1+\sigma_{22}n_2+\sigma_{23}n_3,$$
$$S_3=\sigma_{31}n_1+\sigma_{32}n_2+\sigma_{33}n_3.$$

Из уравнения видно, что в их состав входит девять чисел: σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{21}, σ_{22}, σ_{23}, σ_{31}, σ_{32}, σ_{33}. Обозначим их как σ_{ij}. Так как второй индекс в обозначении σ_{ij} совпадает с n_j, то

$$S_i=\sigma_{ij}n_j \ .$$

1.4. Тензор напряжений

Тензоры - это инвариантные объекты, не зависимые от выбора системы координат. Компоненты тензора при изменении координатной системы меняются по определенному линейному закону.

Все скалярные и векторные величины можно рассматривать как тензоры.

Тензор характеризуется определенным рангом. Наиболее простым является тензор нулевого ранга. Он представляет собой скалярную величину, и его единственная компонента не меняет своего значения при преобразовании координатной системы. Пример тензора нулевого ранга - это расстояние между двумя точками в пространстве. Эту компоненту называют инвариантом.

Вектор $\vec{a}$ в трехмерном пространстве характеризуется компонентами (числами) a_1, a_2, a_3 и описывается тензором первого ранга. Покажем это: возьмем две координатные системы – старую (x, y,z) и новую (x', y',z') и рассмотрим в них вектор $\vec{a}$ (рис.6).

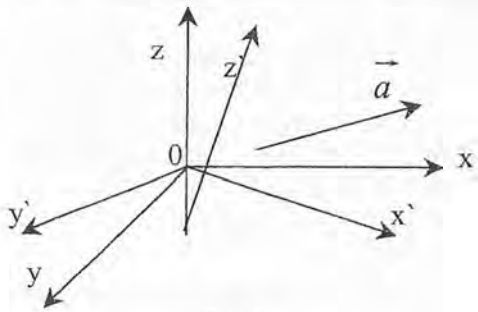


Рис. 6

В старой системе вектор имеет компоненты a_x , a_y, a_z , в новой- a_x', a_y', a_z' . Компоненты вектора связаны следующими соотношениями:

$$a_x' = a_x \cos(x'x) + a_y \cos(x'y) + a_z \cos(x'z),$$
$$a_y' = a_x \cos(y'x) + a_y \cos(y'y) + a_z \cos(y'z),$$
$$a_z' = a_x \cos(z'x) + a_y \cos(z'y) + a_z \cos(z'z).$$

В индексной форме

$$a_i' = \alpha_{i'j}\, a_i \quad \text{или} \quad a_i' = \alpha_{i'j}\, a_j \,, \qquad (1)$$

где $\alpha_{i'j}$ - косинусы углов между старой и новой системами координат;

a_i - компоненты вектора a в старой системе ;

a_i'- компоненты вектора a в новой системе.

Задача 5. В системе координат x, y, z задан вектор $a = 2i + 3j - k$. Определить его компоненты в системе координат x', y', z', направление осей которой задано таблицей направляющих косинусов:

	x	y	z
x'	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
y'	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
z'	0	0	1

Решение. На основании (1) имеем:

$$a_x' = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)0 = \sqrt{3} + \frac{3}{2},$$

$$a_y' = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1,$$

$$a_z' = 2(0) + 3(0) + (-1)1 = -1.$$

В системе координат x', y', z' вектор записывается следующим образом:

$$\vec{a'} = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)\vec{j} - \vec{k} \ .$$

Величина, характеризующаяся тремя числами, линейно преобразующимися по формулам (1), и есть тензор первого ранга.

Аналогично тензором второго ранга называется любая величина, определяющаяся девятью числами a_{ij} в прямоугольной системе координат, преобразующимися по следующему закону:

$$a_{i'j'} = \alpha_{i'i}\alpha_{j'j}a_{ij} \ .$$

Направляющие конусы связаны между собой соотношением

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij} \ .$$

В развернутом виде $\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j3} = \delta_{ij}$,

при $i=j=1$

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \ .$$

Обычно компоненты тензора второго ранга записываются в виде матрицы

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Число компонент тензора подчиняется следующему выражению:

$$N = 3^p \ ,$$

где N - число компонент, а p - ранг тензора.

При $p=0$, $N=1$; $p=1$, $N=3$; $p=2$, $N=9$; $p=4$, $N=81$.

В индексных обозначениях ранг тензора определяется только свободными индексами, например, F_{ikk} - тензор первого ранга, T_{ij} - тензор второго ранга, S_{ijlm} - тензор четвертого ранга.

Как показано выше, напряженное состояние в точке деформируемого твердого тела характеризуется девятью числами и поэтому может быть описано тензором второго ранга - тензором напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

В столбцах тензора напряжений содержатся напряжения, направление которых параллельно соответственно координатным осям x, y и z, а в строках - компоненты напряжения, действующие на площадках, нормаль которых параллельна осям x, y и z соответственно.

Приняв $\sigma_{xx} = \sigma_x = \sigma_{11}, \sigma_{yy} = \sigma_y = \sigma_{22}, \sigma_{zz} = \sigma_z = \sigma_{33}, \tau_{xy} = \sigma_{xy} = \sigma_{12}$ и т.д., получим следующую запись тензора напряжений:

$$T_\sigma = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Если принять, что $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, то тензор напряжений становится симметричным относительно главной диагонали, а напряженное состояние в точке характеризуется только шестью независимыми компонентами σ_{ij}.

Если компоненты тензора описывают свойства деформируемых материалов, то такие тензоры называют *материальными*. Например, с помощью тензоров второго ранга описывают свойства электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости. Если компоненты тензора не отражают свойства материалов, а зависят только от внешних сил и положения площадки в пространстве, то такие тензоры называют *полевыми*. Тензор напряжений - это полевой тензор, описывающий напряженное состояние в точке деформируемого тела как в упругом, так и в пластическом состоянии.

Над тензорами можно проводить ряд операций.

1. Два тензора одинакового ранга равны, если равны их соответствующие компоненты $A_{ij}=B_{ij}$.

2. Умножение тензора на скаляр дает новый тензор того же ранга, но с компонентами, увеличенными на сомножитель λ, $K_i=\lambda M_i$.

3. Тензоры одинакового ранга можно складывать или вычитать покомпонентно $A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij}$.

4. Внешнее произведение двух тензоров произвольного ранга сводится к получению нового тензора, у которого компоненты образованы умножением каждой компоненты одного тензора на каждую компоненту другого тензора. Ранг полученного тензора равен сумме рангов сомножителей: $a_i b_j = c_{ij}$, $D_{ij} T_k = \Phi_{ijk}$.

5. Свертыванием тензора по двум свободным индексам называется операция, когда два индекса обозначают одной и той же буквой, при этом они становятся индексами суммирования. В результате получается тензор, ранг которого на две единицы меньше. Например, имеем тензор третьего ранга T_{ijk}. Заменим обозначение k на индекс j и получим тензор первого ранга T_{ijj}. Сверткой тензора T_{ij} будет $T_{jj} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$.

6. Свертыванием произведения (скалярное внутреннее умножение) называют результат операции свертывания, примененной к внешнему произведению данных тензоров с последующим свертыванием по индексам, относящимся к разным сомножителям: $a_{ij} b_{jl} = c_{jl}$.

1.5. Напряжения на наклонной площадке

При решении задач обработки металлов давлением часто требуется знать связь между внешними силами на поверхности твердого деформируемого тела и напряжениями, действующими внутри, а также между напряжениями на плоской площадке внутри тела и напряжениями на трех взаимно перпендикулярных площадках. Для установления этой связи рассмотрим тело под действием внешних сил в состоянии равновесия. Рассечем его множеством взаимно перпендикулярных сечений, параллельных координатным плоскостям, (рис. 7, а).

Выделенный бесконечно малый элемент на поверхности тела представляет собой тетраэдр (рис. 7,б). Криволинейную поверхность тетраэдра заменим наклонной площадкой (рис. 7в), положение которой в пространстве определяется направляющими конусами:

$\cos(n, x) = n_x$,
$\cos(n, y) = n_y$,
$\cos(n, z) = n_z$,

где $\bar{n}$ - внешняя нормаль к наклонной площадке.

Обозначим площадь наклонной площадки ΔF. Тогда площади

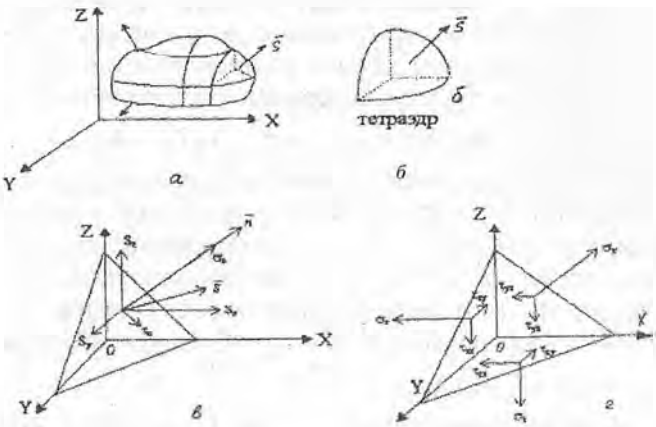


Рис. 7

других граней тетраэдра представляют собой проекции площадки ΔF на координатные плоскости: $\Delta F_X = \Delta F n_X, \Delta F_Y = \Delta F n_Y, \Delta F_Z = \Delta F n_Z$.

Пусть на наклонную площадку действует вектор внешних сил $\vec{S}$. Его проекции на координатные оси: S_x, S_y, S_z. Известны также напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, параллельных координатным плоскостям, внутри тела. Выделенный тетраэдр находится в равновесии. Из условия равновесия следует, что суммы всех действующих по его граням сил на оси координат равны 0. Перейдем от напряжений к силам, умножая каждое напряжение на площадь соответствующей грани. Получим:

$$\sum X = 0 \qquad S_X \Delta F - \sigma_X \Delta F_X - \tau_{XY} \Delta F_Y - \tau_{XZ} \Delta F_Z = 0 \ ,$$

$$\sum y = 0 \qquad S_y \Delta F - \tau_{yX} \Delta F_X - \sigma_y \Delta F_Y - \tau_{yZ} \Delta F_Z = 0 \ ,$$

$$\sum z = 0 \quad S_y \Delta F - \tau_{ZX} \Delta F_X - \tau_{ZY} \Delta F_Y - \sigma_Z \Delta F_Z = 0 \ .$$

Откуда
$$\left.\begin{aligned} S_X &= \sigma_X n_X + \tau_{XY} n_Y + \tau_{XZ} n_Z \ , \\ S_y &= \tau_{yX} n_X + \sigma_y n_y + \tau_{yZ} n_Z \ , \\ S_Z &= \tau_{ZX} n_X + \tau_{ZY} n_y + \sigma_Z n_Z \ . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эти уравнения впервые получены Коши. Они связывают проекции на оси координат полного напряжения $\vec{S}$ с напряжениями, действующими на трех взаимно перпендикулярных площадках. Суммируя компоненты S_x, S_y, S_z по правилу параллелепипеда, получим полное напряжение S:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \ .$$

Нормальное напряжение на наклонной площадке σ_n определяется как сумма проекций S_x, S_y, S_z на нормаль к площадке:

$$\sigma_n = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z \ .$$

Полное касательное напряжение τ на наклонной площадке находится по правилу параллелограмма:

$$\tau_n^2 = s^2 - \sigma_n^2 \ .$$

По полученным формулам можно найти напряжения на любой наклонной площадке, проходящей через заданную точку внутри деформируемого тела, если известны в этой точке напряжения по трем взаимно перпендикулярным площадкам, параллельным координатным плоскостям.

Задача 6. Напряженное состояние в исследуемой точке тела задано тензором напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 90 & -30 & 0 \\ -30 & 30 & 120 \\ 0 & 120 & -180 \end{pmatrix}.$$

Размерность компонент тензора приведена в МПа. Для площадки, нормаль к которой определяется направляющими косинусами $n_x = 2/3$, $n_y = 2/3$, найти полное S, нормальное σ_n и касательное τ напряжения.

Решение. Известно, что $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, откуда

$$n_z = \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9} - \frac{4}{9}} = \frac{1}{3}.$$

По формулам Коши (2)

$$S_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 90\frac{2}{3} - 30\frac{2}{3} + 0\frac{1}{3} = 40\text{МПа},$$

$$S_x = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz}\ n_z = -30\frac{2}{3} + 30\frac{2}{3} + 120\frac{1}{3} = 40\text{МПа},$$

$$S_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = 0\frac{2}{3} + 120\frac{2}{3} - 180\frac{1}{3} = 20\text{МПа}.$$

Полное напряжение

$$S = \sqrt{S_x{}^2 + S_y^2 + S_z^2} = \sqrt{40^2 + 40^2 + 20^2} = 60\text{МПа}.$$

Нормальное напряжение

$$\sigma_n = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z = 40\frac{2}{3} + 40\frac{2}{3} + 20\frac{1}{3} = 60\text{МПа}.$$

Касательное напряжение

$$\tau = \sqrt{S^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{60^2 - 60^2} = 0.$$

1.6. Главные нормальные напряжения

Среди трех взаимно перпендикулярных площадок, проходящих через любую точку нагруженного тела, найдутся такие, на которых касательные напряжения отсутствуют. Такие площадки называются главными, а соответствующие им нормальные напряжения - главными нормальными напряжениями. Существование главных площадок доказывается следующим образом.

Рассмотрим выражение для расчета σ_n на наклонной площадке:

$$\sigma_n = S_x n_x + S_x n_x + S_y n_y.$$

После подстановки в него (2) получим

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_z n_x. \quad (3)$$

Отложим от начала координат к наклонной площадке, проходящей через заданную точку А, радиус-вектор $\vec{r}$ по направлению нормали (рис. 8.)

Величину радиуса-вектора возьмем обратно пропорциональной величине нормального напряжения:

$$r = \frac{c}{\sqrt{\sigma_n}} \text{ или } \sigma_n = \frac{r}{c^2},$$

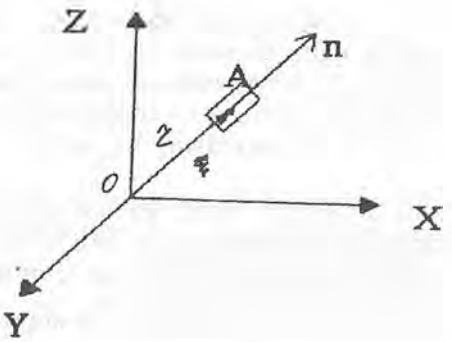


Рис. 8

где c - произвольная постоянная, определяющая масштаб.

Координаты вектора $\vec{r}$:

$$x = rn_x \quad , \quad y = rn_y \quad , \quad z = rn_z.$$

Отсюда значения направляющих косинусов:

$$n_x = \frac{x}{r}, \; n_y = \frac{y}{r}, \; n_z = \frac{z}{r}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (3), получим алгебраическое уравнение второй степени:

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy} xy + 2\tau_{yz} yz + 2\tau_{zx} zx = c.$$

Полученное уравнение представляет собой поверхность второго порядка, отнесенную к центру координат - *эллипсоид*. В уравнении отсутствуют члены с x, y, z, определяющие смещение эллипсоида относительно начала координат. Концы радиуса-вектора $\vec{r}$ будут лежать на этой поверхности. Найденная поверхность называется *поверхностью напряжений* (эллипсоидом напряжений).

Изменяя направление осей координат, можно преобразовать уравнение поверхности таким образом, что в нем обратятся в нули коэффициенты при членах, содержащих парные произведения координат, т.е. $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

Оси координат, при которых члены, содержащие произведение

координат, обращаются в нуль, называются *главными осями*, а нормальные напряжения, направленные по этим осям, - *главными нормальными напряжениями*. Следовательно, когда за координатную систему взята система главных осей, то на координатных плоскостях, являющихся главными площадками, не будет касательных напряжений.

По напряжениям в данной точке можно отыскать главные напряжения и их направления. Допустим, что для данной точки наклонная площадка является главной. Тогда $\tau_n=0$ и полное напряжение S на этой площадке будет направлено по нормали $\vec{n}$ (рис.9).

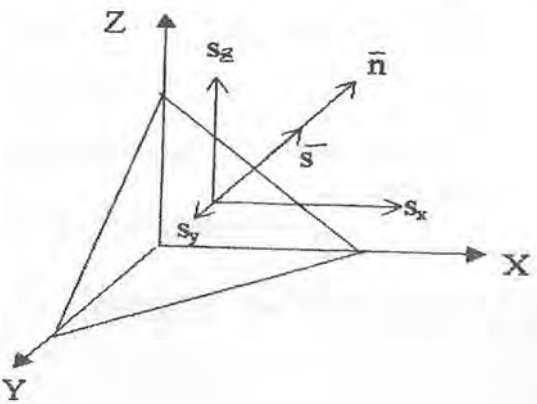


Рис.9

Обозначив искомое главное нормальное напряжение, действующее на наклонной площадке, положение которой определяется n_x, n_y, n_z, через σ и проектируя его на координатные оси, находим составляющие главного напряжения, параллельные координатным осям:

$$S_X = \sigma n_X \,,\; S_Y = \sigma n_Y \,,\; S_Z = \sigma n_Z \,.$$

Приравнивая полученные соотношения условиям Коши, получим:

$$S_X = \sigma n_X = \sigma_X n_X + \tau_{XY} n_Y + \tau_{XZ} n_Z \,,$$

$$S_Y = \sigma n_Y = \tau_{YX} n_X + \sigma_Y n_Y + \tau_{YZ} n_Z \,,$$

$$S_Z = \sigma n_Z = \tau_{ZX} n_X + \tau_{ZY} n_Y + \sigma_Z n_Z \,,$$

или

$$
\begin{aligned}
(\sigma_x - \sigma)n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0, \\
\tau_{yx} n_x + (\sigma_y - \sigma)n_y + \tau_{yz} n_z &= 0, \\
\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_z - \sigma)n_z &= 0.
\end{aligned} \qquad (4)
$$

Полученная система может быть решена как система из трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными n_x, n_y, n_z. С учетом тензорных обозначений запись будет выглядеть $(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_j = 0$. Полученная система не допускает тривиального решения $n_x = n_y = n_z = 0$, так как сумма квадратов направляющих косинусов $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Следовательно, система (4) будет иметь решение, отличное от нуля при условии, что определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю:

$$
\begin{vmatrix}
\sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\
\tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Раскрываем определитель:

$$
(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + 2\tau_{yx}\tau_{zy}\tau_{xz} - (\sigma_x - \sigma)\tau_{zy}^2 - (\sigma_y - \sigma)\tau_{zx}^2 -
$$

$$
-(\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 = 0.
$$

Первое слагаемое этого уравнения равно

$$
(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) = -\sigma^3 + (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 -
$$

$$
-(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)\sigma + \sigma_x\sigma_y\sigma_z .
$$

После его подстановки и преобразований получаем уравнение третьей степени относительно σ:

$$
\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}{}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma -
$$

$$
-(\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}{}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 .
$$

Или $\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 + I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0,$

где $I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)$ - коэффициенты кубического уравнения,

не изменяющие своих значений при изменении положения координатных осей. Их называют инвариантами тензора напряжений.

Линейный инвариант

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}.$$

Квадратичный инвариант

$$I_2(T_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{33} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{11} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right).$$

Кубический инвариант

$$I_3(T_\sigma) = \left|\sigma_{ij}\right| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Решая кубическое уравнение, получаем три главных напряжения σ_1, σ_2, σ_3, которые располагаются следующем образом: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Каждому главному напряжению будет соответствовать главная ось, для которой направляющие косинусы находятся из решения системы уравнений. Для 1-го главного напряжения уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)n'_x + \tau_{xy}n'_y + \tau_{xz}n'_z &= 0, \\ \tau_{yx}n'_x + (\sigma_y - \sigma_1)n'_y + \tau_{yz}n'_z &= 0, \\ \tau_{zx}n'_x + \tau_{zy}n'_y + (\sigma_z - \sigma_1)n'_z &= 0. \end{aligned}$$

Сюда же добавляется условие

$$\left(n'_x\right)^2 + \left(n'_y\right)^2 + \left(n'_z\right) = 1.$$

Вообще, достаточно найти положение одной главной площадки, так как две другие взаимно перпендикулярны.

Тензор напряжений в главных осях имеет вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Если в обычных осях напряженное состояние в точке задается шестью числами: σ_x, σ_y, σ_z, σ_{xz}, σ_{yz}, σ_{xy}, то в главных осях тремя значениями главных напряжений и тремя направляющими косинусами, определяющими положение одной из главных площадок. Если напряженное состояние задано главными напряжениями, то выражения напряжений, действующих на наклонной площадке, значительно упрощаются.

Составляющие полного напряжения $\bar{S}$ в каждой точке тела:

$$S_1 = \sigma_1 n_1, \quad S_2 = \sigma_2 n_2, \quad S_3 = \sigma_3 n_3, \qquad (5)$$

где n_1, n_2, n_3 - направляющие косинусы главных площадок 1, 2 и 3 соответственно.

Полное напряжение

$$S^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2.$$

Нормальное напряжение

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_2^2 .$$

Касательное напряжение

$$\tau_n^2 = S^2 - \sigma_n^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2 - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right)^2 .$$

Значения инвариантов тензора напряжений в системе главных осей:

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$
$$I_2(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1,$$
$$I_3(T_\sigma) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Из уравнения (5) следует, что

$$n_1 = \frac{S_1}{\sigma_1}, \quad n_2 = \frac{S_2}{\sigma_2}, \quad n_3 = \frac{S_3}{\sigma_3}.$$

Учитывая, что

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

получаем уравнение эллипсоида напряжений, отнесенное к центру и главным осям (рис.10):

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{S_3^2}{\sigma_3^2} = 1. \qquad (6)$$

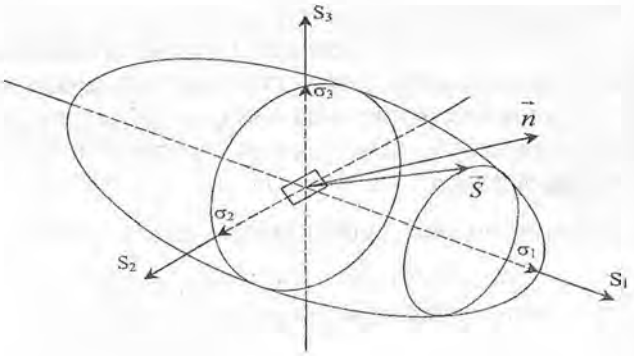


Рис. 10

Полуоси эллипсоида напряжений равны главным нормальным напряжениям. Любой отрезок от центра до пересечения с поверхностью эллипсоида представляет собой величину полного напряжения S на наклонной площадке, перпендикулярной к отрезку, а проекции отрезка на оси координат равны составляющим полного напряжения по осям S_x, S_y, S_z. Эллипсоид напряжения является пространственным геометрическим образом напряженного состояния в исследуемой точке деформируемого тела.

Исходя из количества действующих напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках, возможны девять схем главных нормальных напряжений: линейные, плоские и объемные (рис. 11). Схемы представлены графически в виде кубиков, грани которых ориентированы в направлении действия главных напряжений. Наличие напряжения и его направление обозначаются стрелкой.

Если одно из главных нормальных напряжений равно нулю, то эллипсоид (6) превращается в эллипс и объемное напряженное состояние преобразуется в плоское. Если два главных нормальных напряжения равны нулю, то эллипсоид (6) превращается в отрезок прямой линии, что соответствует линейному напряженному состоянию. Схемы, имеющие напряжения одного знака, называют *одноименными*, а разных знаков - *разноименными*. Схемы дают графическое представление о наличии и знаке главных нормальных напряжений. Они являются по предложению С.И. Губкина классификатором всех видов напряженного состояния деформируемого тела.

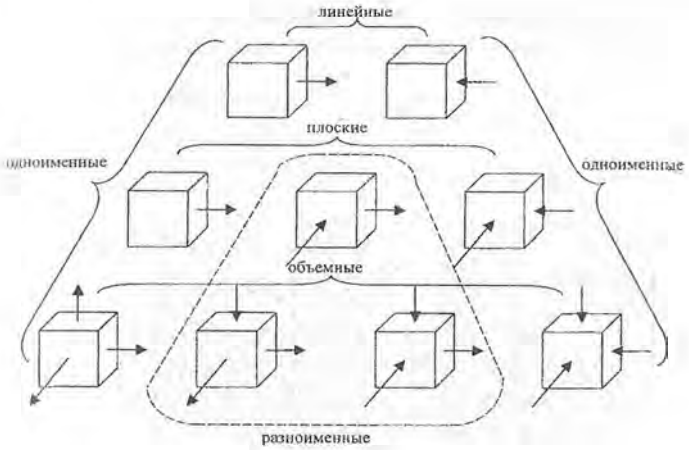


Рис. 11

От схем главных нормальных напряжений зависит пластичность деформируемого тела и его сопротивление деформированию (усилие деформирования). Пластичность металла всегда больше в схемах со сжимающими напряжениями, чем в схемах с растягивающими напряжениями. Наибольшим сопротивлением деформированию отличаются металлы в условиях деформирования при одноименных схемах. В условиях разноименных схем, а также линейной, сопротивление деформации снижается (рис. 12).

Схемы линейного напряженного состояния встречаются на практике редко. Схема линейного растяжения реализуется, например, при растяжении тела, длина которого значительно больше размеров в остальных двух измерениях (растяжение струны, канатов и т.п.). Плоская схема напряженного состояния с известным приближением может быть создана при растяжении тонкой пластины по контуру. Объемное напряженное состояние возникает почти при всех процессах обработки металлов давлением (прокатка, прессование, горячая штамповка, волочение).

Задача 7. Напряженное состояние в точке деформируемого тела, заданного тензором:

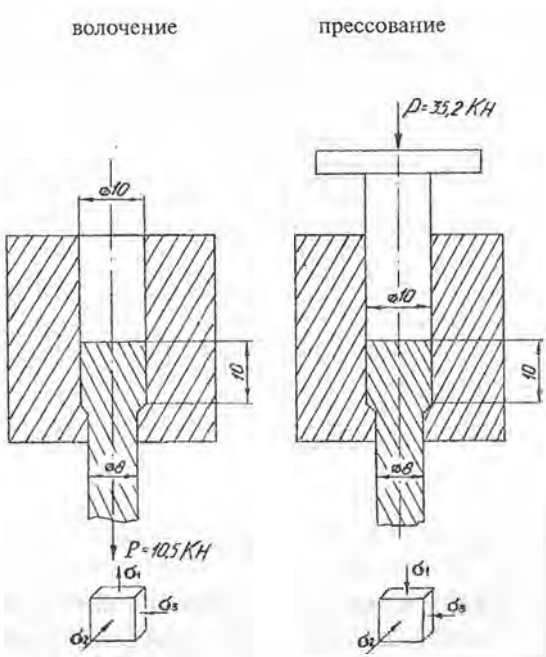


Рис. 12

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix}.$$

Определить главные нормальные напряжения и направления главных осей.

Решение. Для нахождения главных нормальных напряжений составим определитель:

$$\begin{vmatrix} (\tau-\sigma) & \tau & \tau \\ \tau & (\tau-\sigma) & \tau \\ \tau & \tau & (\tau-\sigma) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем его по первой строке, т. е. возьмем в виде произведения элементов первой строки на алгебраическое дополнение:

$$(\tau-\sigma)\begin{vmatrix}\tau-\sigma & \tau\\ \tau & \tau-\sigma\end{vmatrix}-\tau\begin{vmatrix}\tau & \tau\\ \tau & \tau-\sigma\end{vmatrix}+\tau\begin{vmatrix}\tau & \tau-\sigma\\ \tau & \tau\end{vmatrix}=0\ ,$$

$$(\tau-\sigma)[(\tau-\sigma)^2-\tau^2]-\tau[\tau(\tau-\sigma)-\tau^2]+\tau[\tau^2-\tau(\tau-\sigma)]=0.$$

Получим кубическое уравнение

$$(\tau-\sigma)[((\tau-\sigma)+\tau)((\tau-\sigma)-\tau)]-2\tau^2[(\tau-\sigma)-\tau]=0.$$

Тогда

$$(\tau-\sigma-\tau)[(\tau-\sigma)(\tau-\sigma+\tau)-2\tau^2]=0,$$

$$\tau-\sigma-\tau=0,\ \sigma=0\ ,$$

$$(\tau-\sigma)(2\tau-\sigma)-2\tau^2=0,$$

$\sigma^2-3\tau\sigma=0$ или $\sigma(\sigma-3\tau)=0$, отсюда получим корни этого уравнения:

$$\sigma_1=3\tau,\ \sigma_2=0,\ \sigma_3=0.$$

Полученный тензор в главных осях соответствует линейному напряженному состоянию: $T_\sigma=\begin{pmatrix}3\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Найдем направляющие косинусы для первой главной оси. При подстановке $\sigma_1=3\tau$ в уравнения (4) получим следующую систему уравнений:

$$-2n_x+n_y+n_z=0,$$
$$n_x-2n_y+n_z=0,$$
$$n_x+n_y-2n_z=0,$$
$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=1,$$

отсюда

$$n_x=n_y=n_z=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично находятся n_x, n_y и n_z, описывающие положение главных осей 2 и 3 в пространстве.

Задача 8. Напряженное состояние в точке, отнесенное к системе прямоугольных декартовых координат, записано в виде тензора

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ -5 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

Величина составляющих тензора дана в кг/мм^2. Нужно вычислить величину и направление главных напряжений.

Решение. Одну составляющую главных напряжений можно определить сразу же из данного тензора, а именно, σ_1=30 кг/мм^2. Нормальные составляющие напряжения можно получить из первых двух уравнений (4), когда $\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$.

Тогда, определяя коэффициенты направляющих косинусов и задавая определитель равным нулю, получим

$$\begin{bmatrix} 10-\sigma_p & -5 \\ -5 & 20-\sigma_p \end{bmatrix} = 0,$$

$$(10-\sigma_p)(20-\sigma_p)-25=0,$$

$$\sigma_p^2-30\sigma_p+175=0,$$

$$\sigma_p = 15 \pm 7{,}08.$$

Отсюда

$$\sigma_2=22{,}08 \text{ кг/мм}^2,$$
$$\sigma_3=7{,}92 \text{ кг/мм}^2.$$

Направляющие косинусы можно определить, так как из уравнений (4), а также записи тензора напряжений в данной задаче видно, что

$$n_3'=1,\ n_1'=n_2'=0\ ,$$
$$n_3''=0,\ (n_1'')^2+(n_2'')^2=1$$

и

$$(\sigma_x-\sigma_2)n_1''+\sigma_{yz}n_2''=0\ .$$

Возведя в квадрат последнее уравнение и определив одновременно направляющие косинусы, получим

$$n_1'' = \sqrt{\frac{\tau_{xy}^2}{(\sigma_x-\sigma_2)^2+\tau_{xy}^2}} = \sqrt{\frac{5}{34}} = 0{,}384,\ \cos(x,2) = 67°35',$$

$$n_2'' = \sqrt{\frac{29}{34}} = 0{,}925,\ \cos(y,2) = 22°25'.$$

Таким же образом находим

$$n_3''' = 0\ ,$$

$$n_1''' = \sqrt{\frac{29}{34}} = 0{,}925,\quad \cos(x,3) = 22°25'\ ,$$

$$n_2''' = \sqrt{\frac{5}{34}} = 0{,}384,\quad \cos(y,3) = 67°35'.$$

1.7. Октаэдрические напряжения

В теории пластичности большое значение имеют площадки, одинаково наклоненные к главным осям. В этом случае

$$n_1{}^2 = n_2{}^2 = n_3{}^3 = \frac{1}{3}.$$

Таких площадок четыре. С четырьмя им параллельными они образуют фигуру октаэдра (рис. 13), поэтому их называют октаэдрическими и также называют напряжения $\sigma_{окт}$ и $\tau_{окт}$, которые действуют на этих площадках.

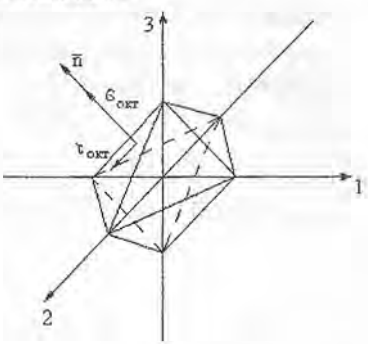


Рис. 13

Нормальное октаэдрическое напряжение $\sigma_{окт}$ равно среднему нормальному напряжению:

$$\sigma_{окт} = S_1 n_1 + S_2 n_2 + S_3 n_3 = \sigma_1 n_1{}^2 + \sigma_2 n_2{}^2 + \sigma_3 n_3{}^2 =$$

$$= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{ср}\ ,$$

так как

$S_1 = \sigma_1 n_1$, $S_2 = \sigma_2 n_2$, $S_3 = \sigma_3 n_3$.

Полное напряжение на октаэдрической площадке

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}\ .$$

Касательное октаэдрическое напряжение в главных осях

$$\tau_{окт} = \sqrt{S^2 - \sigma_{окт}^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}\ .$$

В декартовой системе координат x, y, z

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

1.8. Разложение тензора напряжений

Напряженное состояние в любой точке деформированного тела можно представить в виде суммы двух напряженных состояний: равномерного всестороннего растяжения (сжатия) и второго напряженного состояния, равного разности между полным и приведенным выше (рис. 14).

В тензорной записи оно заключается в разложении тензора напряжений T_σ (рис. 14, а) на шаровой тензор T_{σ° (рис. 14, б) и девиатор (рис. 14, в):

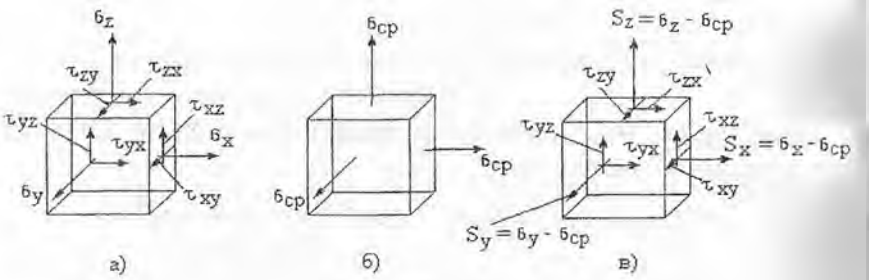


Рис. 14

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{ср} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ср} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ср} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{ср} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{ср} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{ср} \end{pmatrix}.$$

Шаровой тензор напряжений

$$T_{\sigma^\circ} = \begin{pmatrix} \sigma_{ср} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ср} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ср} \end{pmatrix},$$

где $\sigma_{ср}$- среднее нормальное напряжение (гидростатическое давление);

$$\sigma_{ср} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_{кк}}{3}$$

не зависит от направления координатных осей x, y, z, т. е. $\sigma_{ср}$ является инвариантом. Причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Если напряженное состояние характеризуется шаровым тензором напряжений, то тело в процессе деформации испытывает только упругое изменение объема, а изменение формы не происходит. Схем шарового тензора может быть только две: схема равностороннего сжатия и схема равностороннего растяжения (рис.15).

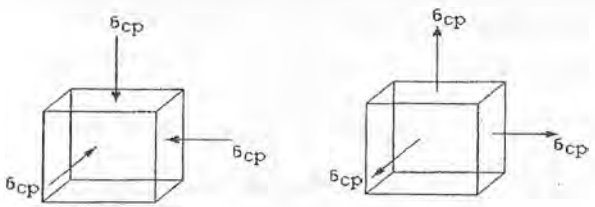


Рис. 15

Так как три главных напряжения равны по знаку и по величине, то эллипсоид напряжений обращается в шар. Отсюда и произошло название шарового тензора напряжений.

Девиатор напряжений

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{ср} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_{ср} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{ср} \end{pmatrix}$$

характеризует только напряжения, вызывающие изменение формы тела. Иногда компоненты девиатора обозначают следующим образом:

$$S_x = \sigma_x - \sigma_{ср}, \quad S_{xy} = \tau_{xy},$$

$$S_y = \sigma_y - \sigma_{ср}, \quad S_{yz} = \tau_{yz},$$

$$S_z = \sigma_z - \sigma_{ср}, \quad S_{zx} = \tau_{zx},$$

или

$$D_\sigma = S_{ij} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_y & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_z \end{pmatrix}.$$

Составляющие девиатора в направлении оси:

1- всегда будет положительной, $\sigma_1 - \sigma_{ср} > 0$;

2- всегда будет отрицательной, $\sigma_3 - \sigma_{ср} > 0$;

3- может быть больше, меньше или равна нулю. Отсюда следуют три возможных схемы девиатора напряжений (рис.16).

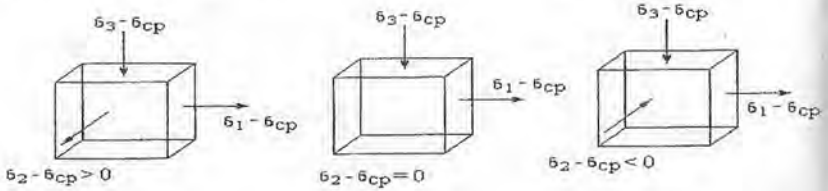


Рис. 16

Главные оси девиатора совпадают с главными осями тензора напряжений.

Кубическое уравнение для нахождения главных осей девиатора напряжений имеет вид

$$S^3 - I_1(D_\sigma)S^2 + I_2(D_\sigma)S - I_3(D_\sigma) = 0, \qquad (7)$$

где $I_1(D_\sigma)$, $I_2(D_\sigma)$, $I_3(D_\sigma)$- инварианты девиатора напряжений соответственно.

Так как первый инвариант девиатора напряжений

$$I_1(D_\sigma) = \sigma_x - \sigma_{cp} + \sigma_y - \sigma_{cp} + \sigma_z - \sigma_{cp} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\sigma_{cp} = 0,$$

то уравнение (7) имеет вид

$$S^3 + I_2(D_\sigma)S - I_3(D_\sigma) = 0.$$

Особую роль в теории пластичности играет второй инвариант девиатора напряжений

$$I_2(D_\sigma) = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right].$$

Он используется для подсчета работы и мощности пластической деформации в виде интенсивности напряжений: величин, пропорциональных квадратному корню из второго инварианта девиатора напряжений. В зависимости от принятого коэффициента пропорциональности различают понятия интенсивности касательных напряжений

$$T = \sqrt{I_2(D\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \cdots}$$

$$\cdots\sqrt{+(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$$

и интенсивности (нормальных) напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \cdots}$$

$$\cdots\sqrt{+(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}.$$

В сокращенной тензорной записи

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}}, \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}.$$

В системе главных осей

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \qquad (8)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}. \qquad (9)$$

Коэффициенты пропорциональности в формулах (8), (9) выбраны так, чтобы в случае одноосного растяжения ($\sigma_1=\sigma_1$, $\sigma_2=\sigma_3=0$) интенсивность напряжений совпадала с величиной наибольшего главного напряжения, $\sigma_i=\sigma_1$, а в случае чистого сдвига ($\sigma_1=\tau$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-\tau$) интенсивность касательных напряжений совпадала с величиной наибольшего касательного напряжения τ.

Третий инвариант девиатора напряжений

$$I_3(D_\sigma)=\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma_{ср} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_{ср} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_x-\sigma_{ср}\end{vmatrix}.$$

Задача 9. Представить тензор напряжений в виде шарового тензора и девиатора

$$T_\sigma=\begin{pmatrix}10 & 50 & 60\\ 50 & 20 & 40\\ 60 & 40 & 30\end{pmatrix}.$$

Решение. Среднее нормальное напряжение

$$\sigma_{ср}=\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}=\frac{10+20+30}{3}=20 \text{ МПа},$$

$$\begin{pmatrix}10 & 50 & 60\\ 50 & 20 & 40\\ 60 & 40 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 0 & 0\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & 50 & 60\\ 50 & 0 & 40\\ 60 & 40 & 10\end{pmatrix}.$$

Если разделить все компоненты девиатора напряжений на $\tau_{окт}$, то получим направляющий тензор напряжений $\overline{D}_\sigma$.

$$T_\sigma = T_\sigma^\circ + \tau_{окт}\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_1 - \sigma_{ср}}{\tau_{окт}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma_y - \sigma_{ср}}{\tau_{окт}} & \tau_{yz} \\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma_z - \sigma_{ср}}{\tau_{окт}} \end{pmatrix} = T_\sigma^\circ + \tau_{окт}\overline{D}_\sigma.$$

В результате деления компонент девиатора напряжений на $\tau_{окт}$ мы получаем безразмерные величины, поэтому новый тензор определяет только направление главных напряжений и их соотношение. Если главные оси известны, то направляющий тензор напряжений характеризуется только одним числом υ_σ - показателем вида напряженного состояния:

$$\upsilon_\sigma = \frac{\sigma_2 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}. \qquad (10)$$

Согласно формуле (10) для одноосного растяжения ($\sigma_1>0$, $\sigma_2=\sigma_3=0$) $\upsilon_\sigma=-1$, для одноосного сжатия ($\sigma_1=\sigma_2=0$, $\sigma_3<0$) $\upsilon_\sigma=1$ для чистого сдвига ($\sigma_1=-\sigma_3$, $\sigma_2=0$) $\upsilon_\sigma=0$.

1.9. Главные (максимальные) касательные напряжения

Главные касательные напряжения имеют большое значение в теории обработки металлов давлением (ТОМД). Ранее было определено, что в любой точке деформируемого тела можно найти три взаимно перпендикулярных площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют. Во всех других направлениях касательные напряжения существуют и в зависимости от положения площадки будут различными по величине. Найдем положение площадок, где касательные напряжения принимают экстремальные значения.

Примем для заданной точки главные направления тензора напряжений σ_{ij} за направления координатных осей. Тогда на наклонной площадке в главных осях касательное напряжение равно

$$\tau_n^2 = S^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2\right)^2 .$$

После преобразований получим

$$\tau_n^2 = n_1^2 n_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + n_2^2 n_3^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + n_3^2 n_1^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 .$$

Рассмотрим частный случай, когда n_3=0. Тогда

$$\tau_n^2 = n_1^2 n_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 .$$

Из условия связи направляющих косинусов

$$n_1^2 + n_2^2 = 1$$

имеем

$$n_2^2 = 1 - n_1^2 . \qquad (11)$$

Тогда

$$\tau_n^2 = n_1^2\left(1 - n_1^2\right)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 .$$

Для отыскания площадки с наибольшими касательными напряжениями исследуем данное уравнение на экстремум. Для этого найдем первую частную производную по n_1 и приравняем ее к нулю:

$$2\tau\frac{\partial\tau}{\partial n_1} = 2n_1\left(1 - 2n_1^2\right)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 0 .$$

Откуда следует, что

$$n_1\left(1 - 2n_1^2\right) = 0,$$

так как

$$\sigma_1 \neq \sigma_2.$$

Одно из решений этого уравнения n_1=0. Тогда из (11) имеем $n_2 = \pm 1$. Это координатная плоскость, на которой касательное напряжение равно нулю.

Для получения решений, отличных от нуля, необходимо принять

$$1 - 2n_1^2 = 0$$

или

$$n_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = n_2 .$$

Таким образом, плоскости максимальных касательных напряжений расположены под углом 45° к главным осям 1 и 2 и параллельны оси 3 (рис. 17).

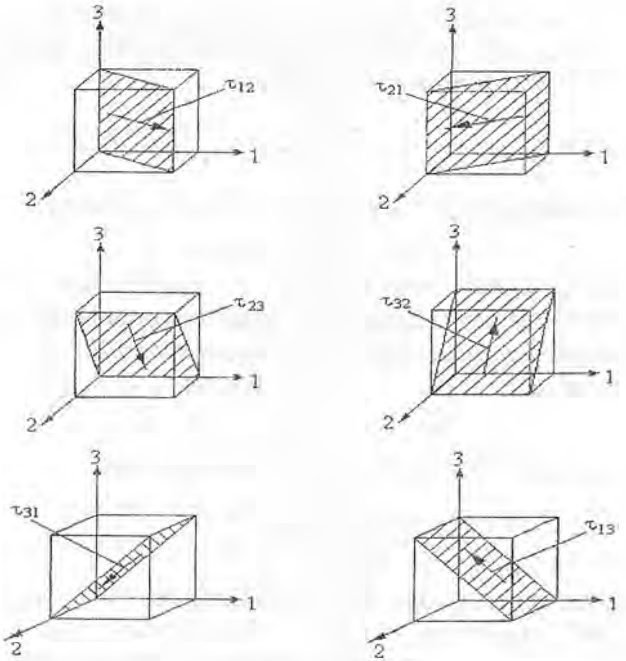


Рис. 17

Таких площадок две и они взаимно перпендикулярны. Касательные напряжения, действующие на этих площадках, называются главными касательными напряжениями:

$$\tau_{12}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \quad \text{или}$$

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{21} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_{12} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Аналогично можно рассмотреть и другие частные случаи, когда n_1=0 и n_2=0. Повторяя полученные выше рассуждения, получим

$$\tau_{23} = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \pm\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}.$$

При объемном напряженном состоянии на шести площадках, расположенных под углом 45° к главным осям, действует шесть максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{12} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},\quad \tau_{23} = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},\quad \tau_{31} = \pm\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \qquad (12)$$

связанных между собой тождеством

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0. \qquad (13)$$

Так как принято, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то наибольшее касательное напряжение τ_{13} равно алгебраической полуразности максимального и минимального главных нормальных напряжений:

$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Интенсивность T и τ_{max} связаны соотношением

$$1 \leq \frac{T}{\tau_{max}} \leq 1{,}15.$$

С погрешностью около 7% можно принять $T \approx 1{,}08\tau_{max}$.

Следует отметить, что на площадках, где действуют максимальные касательные напряжения, нормальные напряжения отличны от нуля:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2.$$

Если $n_1 = n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n_3 = 0$, то $\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$.

Таким образом, главные касательные напряжения равны полуразностям главных нормальных напряжений. Нормальные напряжения, действующие в площадках главных касательных, равны полусуммам главных нормальных напряжений.

Задача 10. Напряженное состояние в точке тела задано тензором напряжений в главных осях

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Определить главные касательные напряжения.

Решение. Используя формулы (12), получим

$$\tau_{12} = \frac{40-30}{2} = 5 \text{ МПа}, \quad \tau_{23} = \frac{30-10}{2} = 10 \text{ МПа},$$

$$\tau_{31} = \frac{10-40}{2} = -15 \text{ МПа}.$$

На основании формулы (13) имеем

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 5 + 10 - 15 = 0.$$

Задача11. Для напряженного состояния, представляющего собой положение трех чистых сдвигов во взаимно перпендикулярных плоскостях, определить максимальные касательные напряжения, если

$$\frac{1}{2}\tau_{xy} = \frac{1}{2}\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau = 40 \text{ МПа}.$$

Решение. Вначале определим главные нормальные напряжения, воспользовавшись кубическим уравнением

$$\sigma^3 - I_1(T\sigma)\sigma^2 + I_2(T\sigma)\sigma - I_3(T\sigma) = 0,$$

где

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}.$$

После подстановки компонент напряжений, получаем следующее кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - 9\tau^2\sigma - 8\tau^3 = 0,$$

где

$$I_1(T_\sigma)=0,\ I_2(T_\sigma)=-9\tau^2,\ I_3(T_\sigma)=8\tau^3.$$

По условию τ=40 МПа, тогда

$$\sigma^3-14400\sigma-512000=0.$$

Левую часть последнего уравнения можно разложить на множители:

$$(\sigma+40)(\sigma^2-40\sigma-12800)=0.$$

Приравнивая к нулю первый сомножитель, находим один из корней уравнения:

$$\sigma=-40 \text{ МПа}.$$

Решив квадратное уравнение

$$\sigma^2-40\sigma-12800=0,$$

найдем остальные два корня:

$$\sigma = 20 \pm \sqrt{400+12800} = (20 \pm 115) \text{ МПа},$$

или $\sigma=135$, $\sigma= -95$.

С учетом правила индексов для главных напряжений

$\sigma_1=135$ МПа, $\sigma_2= -40$ МПа, $\sigma_3= -95$ МПа.

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{135-(-95)}{2} = 115 \text{ МПа}.$$

1.10. Равновесие сил и моментов

Для определения условия равновесия деформированного тела произвольной формы, нагруженного внешними поверхностными силами, мысленно выделим в нем бесконечно малый элемент в форме параллелепипеда с длинами ребер *dx*, *dy*, *dz*, параллельными осям координат (рис. 18). Найдем условия, обеспечивающие его равновесие.

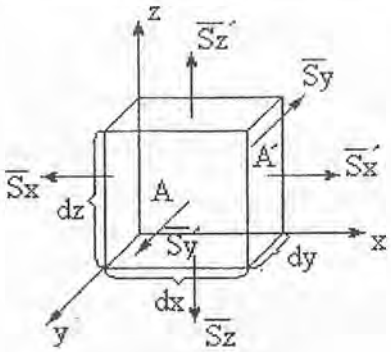


Рис. 18

Рассмотрим окрестность точки А с координатами *x*, *y*, *z*. Через точку А проходят три взаимно перпендикулярных площадки, напряженное состояние на которых описывается тензором напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Точка A′ отстоит от точки A на бесконечно малом расстоянии. Ее координаты $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Через точку A′ проходят три взаимно перпендикулярные площадки. Согласно принятой гипотезе о сплошности среды, напряжения являются непрерывными функциями координат. В точке A $\sigma_x = f(x,y,z)$, в точке A′ $\sigma'_x = f(x+dx, y, z)$. Последнее выражение разложим в ряд Маклорена:

$$f(x+dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} dx^2 + \dots .$$

Ограничимся двумя членами ряда. Тогда в точке A′ $\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.$

Таким образом, одноименные напряжения на противоположных гранях отличаются друг от друга на величину приращения по соответствующей координате. Тензор напряжений для точки A′ имеет вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx & \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx & \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \\ \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy & \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy & \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \\ \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz & \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz & \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \end{pmatrix}.$$

На рис. 19 показаны элементарный параллелепипед и напряжения, приложенные к его граням. Так как по условию элементарный параллелепипед находится в равновесии, то суммы всех сил, действующих на этот объем в направлении координатных осей, должны быть равны нулю:

$$\sum X = 0, \ \sum Y = 0, \ \sum Z = 0.$$

Усилия, действующие на грани параллелепипеда, равны напряжениям, умноженным на площадь соответствующей грани. Составим уравнение равновесия на ось x (рис.20).

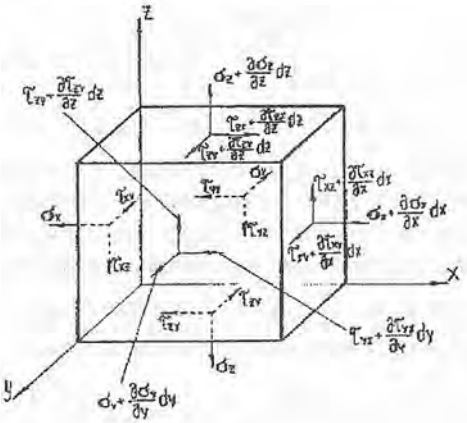


Рис. 19

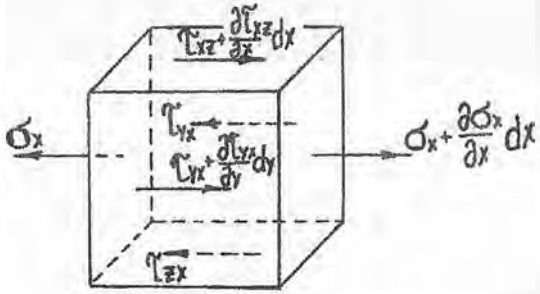


Рис. 20

Из рисунка видно, что силы $\sigma_x dydz$, $\tau_{xy} dxdz$, $\tau_{zx} dxdy$ на параллельных гранях взаимно уравновешены, следовательно,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dxdydz = 0 .$$

Сокращая на объем, получим

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 .$$

Проецируя силы на ось Y и Z, получим еще два уравнения. Окончательно имеем три дифференциальных уравнения равновесия, описывающих объемное напряженное состояние в рассматриваемой точке:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

В тензорных обозначениях $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$.

Уравнение (14) содержит шесть неизвестных величин: три нормальных и три касательных напряжения. Число уравнений три, поэтому для нахождения компонент напряжений необходимы дополнительные условия.

Кроме поверхностных сил, действующих по граням параллелепипеда, к нему могут быть приложены объемные (массовые) силы. Обозначим проекции объемной силы, приходящейся на единицу массы, через F_x, F_y, F_z. Тогда проекции объемной силы на весь объем выделенного параллелепипеда будут

$$F_x \rho dV, F_y \rho dV, \quad F_z \rho dV.$$

Уравнения равновесия с учетом массовых сил имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho F_x = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho F_y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho F_z = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0.$$

Если объемной силой является лишь сила тяжести, а ось z направлена вертикально вверх, то $F_x=F_y=0$, $F_z=-g$ (ускорение силы тяжести), $g\rho$ (вес единицы объема тела).

Задача 20. Определить компоненты массовых сил F_i, если в любой точке сплошной среды выполняются уравнения равновесия (15), когда тензор напряжений задан в виде

$$\sigma_{ij} = \rho \begin{pmatrix} 5x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Подставим в (15) значение $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, вычисленные по заданному тензору.

$$5x_2+2x_2+0+x_1=0;$$
$$0+0+2+x_2=0;$$
$$0+0+0+x_3=0.$$

Эти уравнения удовлетворяются при $F_x= -7x_2$, $F_y= -2$, $F_z=0$.

Если деформируемое тело находится в состоянии движения, то к действующим силам нужно добавить силы инерции, взятые с обратным знаком произведениям из массы параллелепипеда на проекции ускорения:

$$-\rho dV\frac{d^2U_x}{dt^2},\ -\rho dV\frac{d^2U_y}{dt^2},\ -\rho dV\frac{d^2U_z}{dt^2},$$

где U_x, U_y, U_z- проекции вектора перемещения на оси x, y, z. Получим уравнения движения сплошной среды:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho F_x = \rho dV\frac{d^2U_x}{dt^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\rho F_y=\rho dV\frac{d^2U_y}{dt^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\rho F_z=\rho dV\frac{d^2U_z}{dt^2},$$

или

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+\rho F_i=\rho dV\frac{d^2U_i}{dt^2}.$$

Элементарный параллелепипед $dV=dxdydz$ находится в равновесии, если выполняются еще три уравнения:

$$\sum Mx=0;\ \sum My=0;\ \sum Mz=0.$$

Составим уравнение равновесия, например $\sum My=0$ (рис. 21).

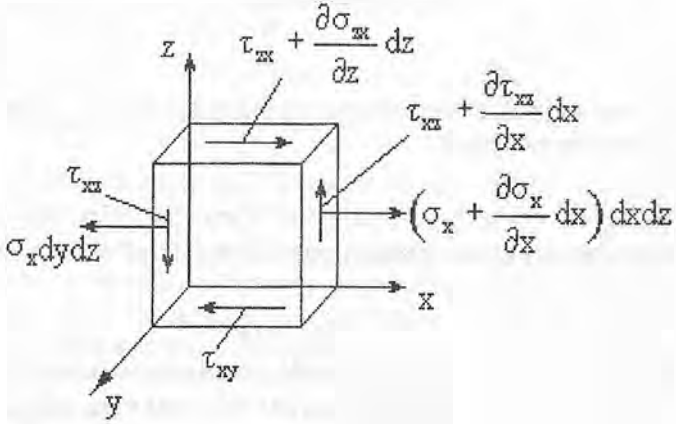


Рис. 21

Силы, параллельные оси *Y*, а также силы, пересекающие ось *Y*, не войдут в малые третьего порядка. Например, нормальная сила на

левой грани равна $\sigma_x dydz$, а на правой $\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz$. Момент дает лишь их разность

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dxdydz \frac{dz}{z},$$

получаем момент четвертого порядка малости и его из уравнения будем исключать.

Момент третьего порядка дадут только две силы:

$$\left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\right) dydz \quad и \quad \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdy .$$

Уравнение моментов относительно оси *y* имеет вид

$$\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz\right) dxdydz - \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx\right) dxdydz = 0 .$$

Теперь отбросим бесконечно малые четвертого порядка, получим

$$\tau_{zx} dxdydz = \tau_{xz} dxdydz .$$

Сокращая на объем элементарного параллелепипеда $dV = dxdydz$, имеем

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} .$$

Составив уравнения моментов относительно двух других осей, окончательно получим

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} .$$

Эти уравнения определяют закон парности касательных напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} .$$

В соответствии с этим законом напряженное состояние в точке деформируемого тела описывается шестью неизвестными компонентами. Тензор напряжений является симметричным. В каждых двух взаимно перпендикулярных площадках компоненты касательных напряжений, направленные перпендикулярно к линии пересечения этих площадок, равны между собой и направлены оба к линии пересечения или оба от линии пересечения.

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) обозначим

компоненты напряжений через σ_r, σ_j, σ_z, τ_{rj}, τ_{jz}, τ_{zr}. Уравнения статического равновесия имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_z-\sigma_\varphi}{r}=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z}+2\frac{\tau_{z\varphi}}{r}=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0.$$

В сферической системе координат (r, φ, θ) дифференциальные уравнения равновесия записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\left[2\sigma_r-(\sigma_\varphi-\sigma_\theta)+\tau_{r_\varphi}\operatorname{ctg}\varphi\right]=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{2\sin\varphi}\frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\left[3\tau_{r\varphi}+(\sigma_\varphi-\sigma_\theta)\operatorname{ctg}\varphi\right]=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{1}{2\sin\varphi}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\left[3\tau_{r\theta}+2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta\right]=0.$$

1.11. Диаграмма напряжений Мора

Диаграммы напряжений Мора дают наглядное графическое представление о совокупности векторов нормальных и касательных напряжений на наклонных площадках, построенных в системе главных осей. При построении диаграммы нормальные напряжения будем откладывать на оси абсцисс, а касательные по оси ординат. Нормальные напряжения в главных осях:

$$\sigma_n=\sigma_1 n_1^2+\sigma_2 n_2^2+\sigma_3 n_3^2 \quad . \qquad (16)$$

Полное напряжение

$$S^2=\sigma_1^2 n_1^2+\sigma_2^2 n_2^2+\sigma_3^2 n_3^2=\sigma_n^2+\tau_n^2 \quad . \qquad (17)$$

Направляющие косинусы связаны соотношением:

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1. \qquad (18)$$

Получаем линейную относительно n_i^2 систему трех уравнений (16)–(18). Умножим обе части уравнения (16) на $\sigma_2+\sigma_3$:

$$(\sigma_2+\sigma_3)\,\sigma_n=(\sigma_1 n_1^2+\sigma_2 n_2^2+\sigma_3 n_3^2)\,(\sigma_2+\sigma_3), \qquad (19)$$

а уравнение (17) умножим на $\sigma_2\sigma_3$:

$$\sigma_2\sigma_3\,(n_1^2+n_2^2+n_3^2)=\sigma_2\sigma_3. \qquad (20)$$

Из уравнения (17) почленно вычтем уравнение (19) и, прибавив почленно уравнение (20), получим:

$$\sigma_n^2+\tau_n^2-(\sigma_2+\sigma_3)\,\sigma_n+\sigma_2\sigma_3=\sigma_1^2n_1^2+\sigma_2^2n_2^2+\sigma_3^2n_3^2-$$
$$-(\sigma_1n_1^2+\sigma_2n_2^2+\sigma_3n_3^2)\,(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3\,(n_1^2+n_2^2+n_3^2)\,.$$

Прибавляя к обеим частям полученного уравнения $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2$, после преобразования получим:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right]^2+\tau_n^2&=\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2+n_1^2(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2),\\
\left[\sigma_n-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right]^2+\tau_n^2&=\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2+n_2^2(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3),\\
\left[\sigma_n-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right]^2+\tau_n^2&=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+n_3^2(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1).
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Записанное уравнение (21) определяет окружности вида $(x-x_0)^2+y^2=R^2$. Их центры расположены на оси абсцисс и отстоят от начала координат на расстоянии $\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}$, $\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}$, $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ (рис. 22). В правой части уравнения (21) n_1, n_2, n_3- это изменяемые параметры, поэтому каждое из уравнений (21) - это уравнение концентрических окружностей с радиусами

$$R_1=\sqrt{\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2+n_1^2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)},$$

$$R_2=\sqrt{\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2+n_2^2(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)},$$

$$R_3=\sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+n_3^2(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}.$$

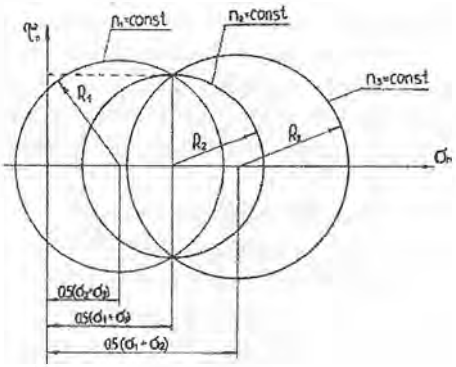


Рис. 22

Первое уравнение системы (21) определяет в виде окружностей геометрическое место точек σ_n и τ_n для заданного значения n_1. То же самое справедливо и для двух других уравнений системы. Для заданных значений направляющих косинусов n_1, n_2, n_3 и главных нормальных напряжений σ_1, σ_2, σ_3 величины σ_n и τ_n определяются точкой К на пересечении трех окружностей радиусами R_1, R_2, R_3, при $n_1=n_2=n_3=0$ радиусы окружностей равны:

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Как видно из первого и третьего уравнения системы (21), при увеличении n_1 и n_2 радиусы соответствующих окружностей увеличиваются. Это означает, что возможные пары значений σ_n и τ_n находятся или на окружностях радиуса R_1 или R_3, или вне их, но не могут располагаться внутри. Если увеличивать n_2 (второе уравнение системы (20)), то R_2 уменьшается и пары σ_n и τ_n находятся внутри окружности R_2. Таким образом, заштрихованная область- это область значений σ_n и τ_n на произвольных наклонных площадках (рис. 23).

Из формулы (21) видно, что максимальные касательные напряжения численно равны радиусам кругов. При наложении на тело всестороннего равномерного давления радиусы окружностей не меняются, и все построения смещаются относительно горизонтальной оси σ_n.

Шаровой тензор напряжений отображается на диаграмме Мора окружностью нулевого радиуса (т. е. точкой), расположенной на расстоянии $\sigma_{ср}$ от начала координат.

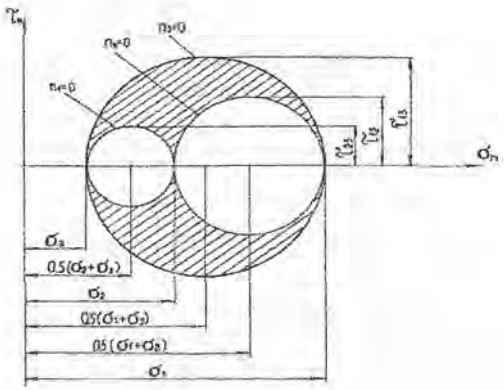


Рис. 23

1.12. Выводы

В этой главе рассмотрены вопросы теории напряжений. Напряженное состояние в исследуемой точке твердого деформируемого тела характеризуется девятью компонентами напряжений σ_{ij}, заданными в произвольной системе координат, которые образуют тензор напряжений T_σ. Из девяти компонентов напряжений независимых только шесть, так как по закону парности составляющие касательных напряжений попарно между собою равны, т. е. тензор напряжений является симметричным тензором. Имея компоненты тензора напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках по соотношениям Коши, можно вычислить составляющие напряжений по любым наклонным площадкам. Одновременно соотношения Коши можно рассматривать как условия на поверхности тела, если наклонная площадка совмещена с поверхностью тела.

Разложение тензора напряжений на девиатор и шаровой тензор обусловлено тем обстоятельством, что материалы имеют различные механические свойства по отношению к равномерному всестороннему растяжению (или сжатию) и к касательным напряжениям. Шаровой тензор напряжений характеризует объемную деформацию в точке, а девиатор напряжений – формоизменение в окрестности точки.

При анализе напряженного состояния точки используются следующие характерные площадки, проходящие через нее:

- три главные площадки, на которых действуют главные нормальные напряжения, а касательные отсутствуют;
- шесть площадок, по которым действуют главные касательные напряжения; площадки, в которых возникают главные касательные напряжения, делят пополам прямые углы между главными площадками;
- четыре площадки, равнонаклонные к главным осям, на которых действуют одинаковые по величине октаэдрические напряжения.

Геометрическим образом объемного напряженного состояния в точке деформируемого тела служит эллипсоид напряжений. Полуосями его являются главные нормальные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3. Поверхность эллипсоида напряжений представляет собой геометрическое место концов векторов полных напряжений в различных площадках, проходящих через рассматриваемую точку. Из эллипсоида напряжений следует экстремальность главных напряжений, т. е. одно из главных напряжений является наибольшим, а другое наименьшим из всех нормальных напряжений в площадках, проходящих через рассматриваемую точку.

Диаграмма напряжений Мора представляет собой плоский геометрический образ напряженного состояния. Она состоит из трех полуокружностей, диаметрами которых являются разности главных напряжений. Координаты точек, лежащих в заштрихованной области между полуокружностями, представляют собой нормальные и касательные напряжения в произвольно ориентированных площадках.

Показатель вида напряженного состояния Лоде-Надаи характеризует с точностью до равноосного растяжения (сжатия) вид напряженного состояния.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Как делятся внешние силы, действующие на тело?
2. Какие силы называются активными?
3. Какие силы называются реактивными?
4. Сформулируйте понятие напряжения в точке.
5. Каким образом напряжение как векторную величину можно разложить на составляющие по координатным осям?
6. Какие напряжения действуют на площадке, перпендикулярной оси x, y, z?
7. Почему касательные напряжения иногда называют напряжениями сдвига?
8. Как выбирают знак нормальных и касательных напряжений?
9. Сформулируйте понятие тензора напряжений. Каков физический смысл его компонент?
10. Чем полевые тензоры отличаются от материальных?
11. Основные действия над тензорами.
12. Тензорные обозначения.
13. Что такое тензор второго ранга?
14. Чем определяется ранг тензора?
15. Как вы понимаете операцию свертывания тензора?
16. Что такое свободные и немые индексы?
17. В чем состоит правило суммирования по А. Энштейну?
18. Чему равен символ Кронекера?
19. Дайте физическое толкование главных нормальных напряжений.
20. Как определить главные нормальные напряжения?
21. Укажите порядок нахождения главных осей.
22. Покажите схемы главных нормальных напряжений для основных процессов обработки металлов давлением – волочения, прокатки, прессования.
23. Что такое эллипсоид напряжений? Какой вид имеет эллипсоид напряжений для плоского и линейного напряженных состояний?
24. Для чего вводят в рассмотрение интенсивность напряжений σ_i и интенсивность касательных напряжений?
25. Как найти инварианты тензора напряжений?
26. Дать геометрическую интерпретацию напряженного состояния в точке деформируемого тела.
27. Схемы главных нормальных напряжений.

28. При каких схемах главных нормальных напряжений пластичность наибольшая, а сопротивление деформированию – наименьшее?
29. Какие напряжения называют октаэдрическими?
30. Как разложить тензор напряжений?
31. Что характеризует шаровой тензор напряжений, девиатор напряжений?
32. Сформулируйте роль второго инварианта девиатора напряжений.
33. Чему равны главные касательные напряжения?
34. Как записываются уравнения равновесия?
35. Можно ли по уравнениям равновесия найти напряженное состояние тела?
36. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
37. Что называют диаграммой Мора? Чему равны радиусы главных окружностей?
38. Если известна ориентация площадки, проходящей через точку, то каким образом найти σ_n и τ_n на диаграмме Мора?
39. Дайте определение направляющего тензора напряжений.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Даны два симметричных тензора второго ранга:

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & a & б \\ a & 2^x & в \\ б & в & 3x-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & x & 2x \\ x & 4 & 3x \\ 2x & 3x & 4 \end{pmatrix}.$$

При каком значении x тензоры A и B равны между собой? Чему при этом равны *а, б, в?*

2. Записать в развернутой форме статические уравнения равновесия сил

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j} = 0.$$

3. В трехмерном пространстве расшифровать уравнение $A = B_{ij} n_i n_j$.

4. Записать в развернутой форме следующие тензорные символы:

$$A = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad I = \sigma_{ik}, \quad K_i = A_{ij}B_j, \quad K_{ij} = A_{ijl}B_l.$$

5. Найти значения выражений, содержащих символ Кронекера:

$$\delta_{ii}, \varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \delta_{ij}\delta_{jk}, A_j\delta_{ij}, \delta_{ij}C_{jj}, \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}.$$

6. Записать в развернутом виде

$$T = \left(0{,}5 s_{ij} s_{ij}\right)^{0{,}5}, \Gamma = \left(2 e_{ij} e_{ij}\right)^{0{,}5}.$$

7. Нормальное напряжение на наклонной площадке записывается в виде $\sigma_N = S_X n_X + S_Y n_Y + S_Z n_Z$ или

$$\sigma_N = \sigma_X n_X^2 + \sigma_Y n_Y^2 + \sigma_Z n_Z^2 + 2\tau_{XY} n_X n_Y + 2\tau_{YZ} n_Y n_Z + 2\tau_{ZX} n_Z n_X$$

Дать тензорную запись этих уравнений, приняв $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

8. Первый и второй инварианты тензора напряжений имеют вид

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z,$$

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y\sigma_Z + \sigma_Z\sigma_X - \tau_{XY}^2 - \tau_{YZ}^2 - \tau_{ZX}^2.$$

Представить их в тензорном обозначении.

9. Приращение работы в единице объема находят из следующего выражения:

$$dA = \sigma_X d\varepsilon_X + \sigma_Y d\varepsilon_Y + \sigma_Z d\varepsilon_Z + \tau_{XY} d\gamma_{XY} + \tau_{YZ} d\gamma_{YZ} + \tau_{ZX} d\gamma_{ZX}.$$

Представить формулу в тензорном обозначении.

10. Представить следующие формулы в тензорном обозначении:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_X - \sigma)n_X + \tau_{XY} n_Y + \tau_{XZ} n_Z &= 0, \\ \tau_{YX} n_X + (\sigma_Y - \sigma)n_Y + \tau_{YZ} n_Z &= 0, \\ \tau_{ZX} n_Z + \tau_{ZY} n_Y + (\sigma_Z - \sigma)n_Z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

11. Определить ранг тензорных величин:

$$a_{ij}b_j,\ F_{ikk},\ A_{ijip},\ \sigma_{ij}u_k v_k.$$

12. Цилиндрический образец диаметром 10 мм подвергнут равномерному растяжению силой 10 кН. Определить напряжения, действующие внутри образца.

13. Напряженное состояние в точке задано следующими составляющими, кг/мм^2:

$\sigma_X = 50$, $\sigma_Y = -30$, $\sigma_Z = -100$, $\tau_{XY} = 50$, $\tau_{YZ} = 30$, $\tau_{ZX} = -40$

Записать тензор напряжений в системе СИ.

14. На рис.24 показаны напряжения в декартовой и цилиндрической системах координат. Провести индексацию напряжений и записать их в форме тензора напряжений.

15. На рис.25 показаны различные случаи напряженного состояния в телах. Провести обозначение компонент напряжений, записать их в форме тензора напряжений, указать возможные нагружения тел внешними силами.

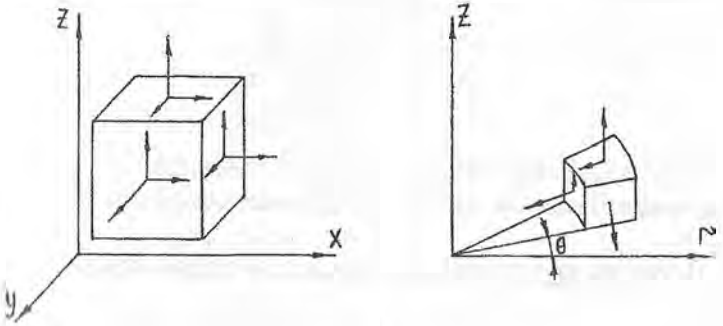


Рис. 24

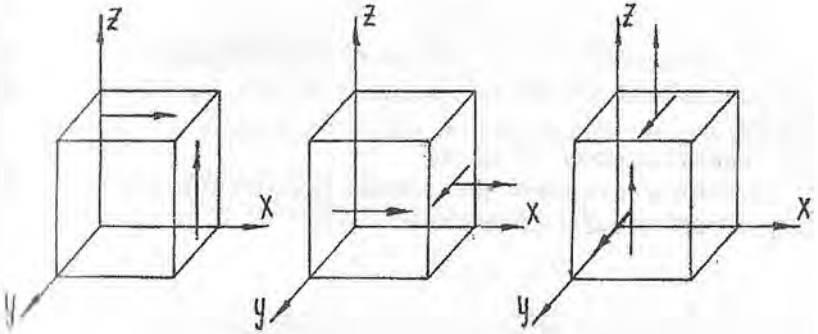


Рис. 25

16. Найти ошибки в записи тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 60 \\ -20 & 40 & 20 \\ 60 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

17. Напряженное состояние в некоторой точке тела задано тензором напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} b\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\sigma \\ 0 & b\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить значения полного S, нормального σ_n, касательного τ_n напряжений на площадке с направляющими косинусами n_x, n_y, n_z.

18. Напряженное состояние в точке тела задано в виде тензора

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma & -\frac{2}{3}\sigma \\ \sigma & -\frac{5}{4}\sigma & \frac{3}{4}\sigma \\ -\frac{2}{3}\sigma & \frac{3}{4}\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить значения полного, нормального и касательного напряжений на площадках, если: а) n_x=1/3, n_y=1/3; б) n_x=2/3, n_y=1/3.

Сделать вывод по задаче.

19. Определить значения полного, нормального и касательного напряжений по данным таблицы:

Вариант	σ_x, МПа	σ_y, МПа	σ_z, МПа	τ_{xy}, МПа	τ_{yz}, МПа	τ_{zx}, МПа	n_x	n_y
I	50	10	-10	-10	20	0	1/2	1/2
II	-70	20	130	0	-40	20	2/3	2/3
III	60	-30	-10	20	-20	10	1/3	1/3
IV	-10	0	10	70	-40	0	1/6	1/6
V	20	80	50	-40	-100	50	2/5	1/5
VI	80	-10	40/9	0	5	10/3	2/7	3/7
VII	40	-80	-320	80	160	-160	1/4	3/4
VIII	50	50	-80	0	-20	40	4/5	3/5

20. В точке тела на его границе (направляющие косинусы n_x, n_y, n_z заданы) известны компоненты внешнего нагружения $S_x=a$, $S_y = S_z = 0$. Кроме того, известно, что возле заданной точки внутри тела $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0$.

Вычислить остальные компоненты напряжений.

21. Напряженное состояние в точке тела задано тензором:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} a\sigma & b\sigma & \sigma \\ b\sigma & 0 & \sigma \\ c\sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix},$$

где a, b, c - константы.

Определить их значения из условий, когда на площадке с направляющими косинусами $n_x = 2/3$, $n_y = 1/3$, вектор полного напряжения S равен нулю.

22. Напряженное состояние в точке тела задано тензором

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & k\sigma & k\sigma \\ k\sigma & \sigma & k\sigma \\ k\sigma & k\sigma & \sigma \end{pmatrix}.$$

Определить значение k из условия, при котором на равнонаклонной площадке нормальное напряжение $\sigma_n = 0$.

23. В задаче 22 изменить условия для определения k, считая, что полное напряжение $S = 2\sigma$, а $\sigma_n = 0$.

24. В задаче 22 изменить условия для определения k, считая, что нормальное напряжение $\sigma_n = \sigma$.

25. Задано напряженное состояние в точке тела:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -3xy & 0 \\ -3xy & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить, удовлетворяются ли условия равновесия?

26. Определить компоненты массовых сил x, y, z, если в любой точке сплошной среды выполняются уравнения равновесия, когда тензор напряжений задан в виде

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 5x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

27. Записать тензор напряжений через его главные значения для следующих случаев:

а) линейное напряженное состояние;

б) плоское напряженное состояние (рассмотреть возможные случаи);

в) объемное напряженное состояние (рассмотреть возможные случаи).

28. Напряженное состояние в точке тела задано одним из следующих тензоров:

$$T_{1\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{pmatrix}, T_{2\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \\ \tau & \tau & \tau \end{pmatrix}, T_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}, T_{4\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Определить напряжения и направления главных осей. Затем в тензорах изменить "+" на " - " и сделать вывод.

29. На рис.26 показаны три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через рассматриваемую точку, с действующими на них напряжениями. Вычислите главные напряжения.

30.Для заданного напряженного состояния (рис.27), представляющего собой положение трех чистых сдвигов во взаимно перпендикулярных плоскостях, определить главные нормальные напряжения и максимальные касательные напряжения, если $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 2\tau$ и $\tau_{yz} = 80\text{МПа}$.

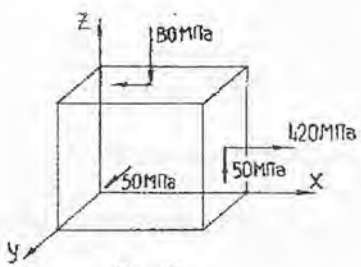


Рис. 26

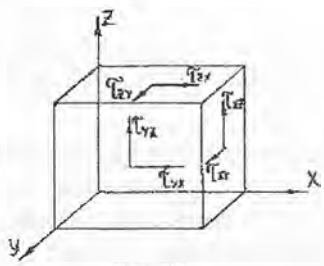


Рис. 27

31. На рис.28 приведены различные напряженные состояния в главных осях. Дать обозначения главных нормальных напряжений; указать вид напряженного состояния; показать площадки, на которых действуют максимальные касательные напряжения, обозначить их.

32. Напряженное состояние в точке тела задано одним из следующих тензоров:

$$T_{1\sigma} = \begin{pmatrix} 30 & -10 & 0 \\ -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad T_{2\sigma} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 80 \\ 0 & 80 & 60 \end{pmatrix}, \quad T_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 70 \\ 0 & 60 & 0 \\ 70 & 0 & 60 \end{pmatrix},$$

$$T_{4\sigma} = \begin{pmatrix} 60 & -30 & 0 \\ -30 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix}, \quad T_{5\sigma} = \begin{pmatrix} -10 & -60 & 0 \\ -60 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix},$$

$$T_{6\sigma} = \begin{pmatrix} 50 & 5 & -40 \\ 5 & -30 & 30 \\ -40 & 30 & -100 \end{pmatrix}.$$

Определить главные напряжения и направления главных осей.

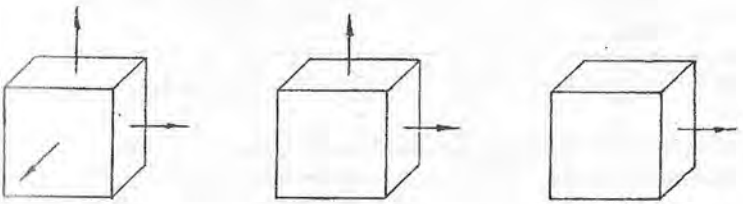


Рис.28

33. Для плоского напряженного состояния $\left(\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0\right)$ вывести формулы для определения главных напряжений. Для этого случая записать также формулы максимальных касательных напряжений.

34. Вычислить величины максимальных и октаэдрических касательных напряжений, если напряженное состояние задано одним из следующих тензоров:

$$T_{1\sigma} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 10 \\ -10 & 40 & 10 \\ 10 & 10 & 40 \end{pmatrix}, \; T_{2\sigma} = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \; T_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

35. Найти выражения для расчета линейного, квадратного и кубического инвариантов тензора напряжений в главных осях для следующих случаев:

а) линейное напряженное состояние;

б) плоское напряженное состояние;

в) объемное напряженное состояние.

36. Вычислить главные значения и инварианты симметричного тензора напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

37. Главные нормальные напряжения в данной точке тела приведены в таблице:

Вариант	Напряжения		
I	20	-15	-6
II	-8	40	12
III	7	0	-5
IV	30	-20	12

Присвоить численным значениям обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и вычислить максимальные касательные напряжения $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$.

38. Показать запись второго инварианта девиатора напряжений через его главные значения.

39. Определить величину первого инварианта девиатора напряжений $I_1(D_\sigma)$.

40. Разложить тензор напряжений для линейного напряженного состояния:

а) растяжение;

б) сжатие.

Дать схемы главных напряжений для тензора напряжений, шарового тензора и девиатора.

41. Записать тензор напряжений, когда тело в процессе деформирования испытывает только упругое изменение объема, а изменения формы не происходит.

42. Записать тензор напряжений, когда тело в процессе деформирования испытывает только изменение формы, упругого изменения объема не происходит.

43. Объяснить, почему составляющая девиатора напряжений в направлении главной оси 1 будет положительной, а в направлении главной оси 3 – отрицательной.

44. Разложить тензоры напряжений (МПа):

$$T_{1\sigma} = \begin{pmatrix} -30 & -60 & 0 \\ -60 & 30 & 60 \\ 0 & 60 & -30 \end{pmatrix}, \; T_{2\sigma} = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 20 & 50 & 20 \\ 20 & 20 & 50 \end{pmatrix},$$

$$T_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 40 \\ 40 & 30 & 40 \\ 40 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \; T_{4\sigma} = \begin{pmatrix} 100 & -60 & 0 \\ -60 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

на шаровые и девиаторы; определить значения второго инварианта девиатора.

45. Два тела из одинакового материала испытывают однородное напряженное состояние. Известен тензор напряжений для однородного тела. Составить тензор T_2 для второго тела, если известно, что относительное изменение объема обоих тел одинаково, а девиатор для второго тела

$$D_{2\sigma} = \begin{pmatrix} -80 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 20 \\ 0 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

Определить также главные значения полученного тензора.

46. Для точки тела известны девиатор напряжений

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} 140 & 30 & 50 \\ 30 & -60 & 20 \\ 50 & 20 & -80 \end{pmatrix}$$

и одно из нормальных напряжений, например $\sigma_y = 80$ МПа. Определить тензор напряжений.

47. Для точки тела известен первый инвариант тензора напряжений $I_1(T_\sigma) = 60$ МПа и девиатор напряжений

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} -40 & 0 & 30 \\ 0 & -40 & 60 \\ 30 & 60 & 80 \end{pmatrix}.$$

Определить главные значения девиатора напряжений, а через них и главные нормальные напряжения. Записать тензор напряжений.

48. Напряженные состояния записываются в виде тензоров:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 1 \\ 0 & \sigma_{11} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложить их на шаровые тензоры и девиаторы, определить их значение из условия равенства нулю одного из главных значений девиатора напряжений.

49. В теории пластичности широко используется показатель вида напряженного состояния

$$V_\sigma = \frac{\sigma_2 - 0{,}5(\sigma_1 + \sigma_3)}{0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3)}, \text{ где } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 .$$

Рассмотреть его значения для следующих частных случаев:

а) линейное растяжение;

б) линейное сжатие;

в) двустороннее растяжение при $\sigma_1 = \sigma_2$;

г) двустороннее сжатие при $\sigma_2 = \sigma_3$;

д) чистый сдвиг, когда $\sigma_2 = -\sigma_3$.

Достаточно ли этого показателя, чтобы полностью охарактеризовать напряженное состояние?

50. Показать различные варианты записи V_σ через отношения напряжений.

51. Главные компоненты тензора напряжений могут быть представлены следующим образом:

$$\sigma_1^0 = \sigma^0 + \frac{3 - V_\sigma}{\sqrt{2\left(3 + V_\sigma^2\right)}},\ \sigma_2^0 = \sigma^0 + \frac{2V_\sigma}{\sqrt{2\left(3 + V_\sigma^2\right)}},$$

$$\sigma_3^0 = \sigma^0 - \frac{3 + V_\sigma}{\sqrt{2\left(3 - V_\sigma^2\right)}},\ \text{где}\ \sigma^0 = \frac{\sigma_{cp}}{\tau_i},\ \sigma_1^0 = \frac{\sigma_i}{\tau_i}\ \text{и т.д.}$$

Какие значения принимают $\sigma^0, \sigma_1^0, \sigma_2^0$ и σ_3^0 для случаев, указанных в задаче 49?

52. В каких случаях напряженное состояние может быть полностью охарактеризовано отношением двух напряжений σ_1/σ_2 ?

53. Задан тензор напряжений σ_{ij} в точке P в системе координат $x_1 x_2 x_3$:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить компоненты в системе координат $x_1\ x_2\ x_3$ заданной таблицей направляющих косинусов:

	x_1	x_2	x_3
x_1'	0	0	1
x_2'	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
x_3'	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

54. Найти компоненты тензора

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

при переходе к новой системе координат, полученной поворотом вокруг оси Z на угол П/6 . Таблица направляющих косинусов имеет вид

	x_1	x_2	x_3
x_1'	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_2'	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
x_3'	0	0	1

55. Задан тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определить главные напряжения и главные оси.

56. Вычислить главные значения, главные направления, линейный, квадратный и кубический инварианты тензора напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

57. Построить круги Мора для всех схем главных нормальных напряжений.

58. Тензор напряжений в исследуемой точке имеет вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Найти величину трех главных напряжений и максимальное значение главных касательных напряжений. Построить диаграмму Мора.

59. Тензор напряжений записан так:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 50 & 100 & 100 \\ 100 & 150 & 0 \\ 100 & 0 & 200 \end{pmatrix}.$$

Найти составляющие главных напряжений. Построить диаграмму Мора и по ней определить главные касательные напряжения.

60. Начертить круг Мора для напряженного состояния, когда $\sigma_x = 50$, $\sigma_y = 40$ и $\tau_{xy} = -40$ МПа.

61. Для напряженного состояния, описываемого тензором напряжений (МПа)

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 500 & 300 & 0 \\ 300 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{pmatrix},$$

определить: а) среднее давление;

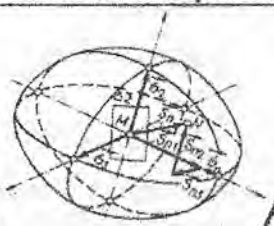
б) интенсивность касательных напряжений в главных осях;

в) максимальное касательное напряжение;

г) сравнить между собой T и τ_{max}.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА

Эллипсоид напряжений



Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Напряжение

Тензор напряжений

$$T_\sigma = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

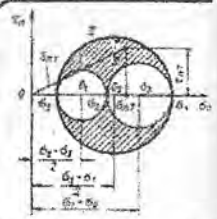
Шаровой тензор напряжений

$$T\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_\Phi & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\Phi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\Phi \end{pmatrix}$$

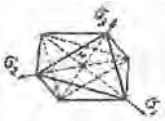
Девиатор напряжений

$$D\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_\Phi & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_\Phi & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_\Phi \end{pmatrix}$$

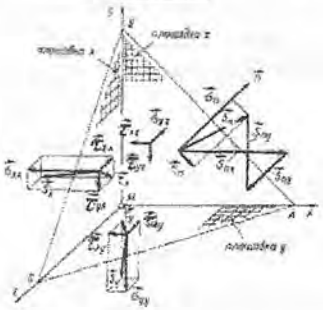
Диаграмма Мора



Октаэдрические напряжения



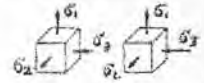
Напряжения на наклонной площадке



Главные касательные напряжения

$$\tau_{12} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},\ \tau_{23} = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},\ \tau_{31} = \pm\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

Главные нормальные напряжения



Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

ГЛАВА 2. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИИ

2.1. Понятие деформации. Тензор деформаций

Термин деформация произошел от латинского слова "deformation", что означает искажение размеров и формы тела за счет относительного изменения положения его материальных частиц.

Под действием внешних нагрузок все материальные точки деформируемого тела перемещаются в пространстве и меняется их взаимное положение. Например, некоторая точка M в исходном недеформированном состоянии имела координаты *x,y,z*. После пластической деформации точка заняла положение M' с координатами $(x' = x + u_x;\ y' = y + u_y;\ z' = z + u_z)$, где u_x, u_y, u_z - проекции вектора перемещения $\vec{u}$ точки M на оси *x,y,z* (рис.29).

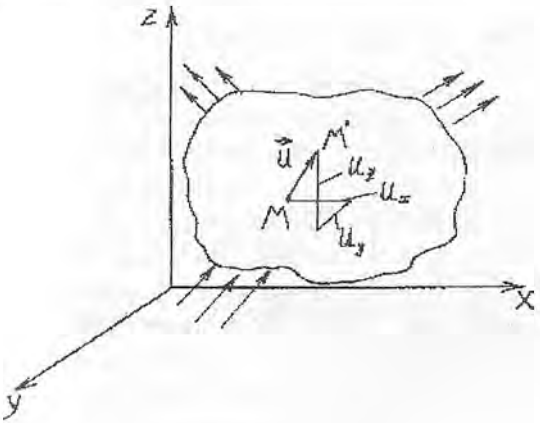


Рис.29

Перемещения $u_x = x' - x,\ u_y = y' - y,\ u_z = z' - z$ являются функциями координат и определяют поле перемещений деформируемого тела:

$$u_x = f_x(x, y, z),$$
$$u_y = f_y(x, y, z),$$
$$u_z = f_z(x, y, z).$$

В силу сплошности тела будем предполагать, что эти функции и их частные производные требуемого порядка по x, y, z непрерывны, а компоненты перемещения малы по сравнению с основными размерами тела.

Рассмотрим поведение элементарного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz, параллельными осям координат, вырезанного в недеформированном состоянии в окрестности точки М. В результате деформации в общем случае этот параллелепипед в окрестности точки M' изменит свою форму (рис.30).

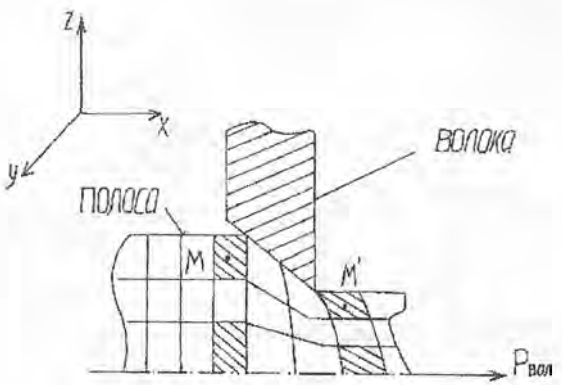


Рис. 30

В процессе деформации ребра поменяли свою длину, но остались прямыми. Изменились также углы между ребрами и положение самого элемента. Предполагая деформацию в точке М малой, ее можно представить в виде суммы шести простейших деформаций (рис.31).

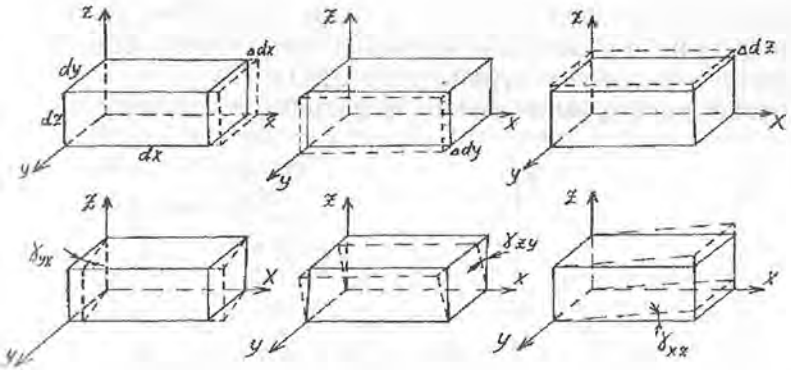


Рис. 31

Первые три деформации называют *линейными*. Они определяются отношением приращения длины ребра к исходной длине и обозначаются через ε:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}; \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}; \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

Индекс в обозначении деформации указывает ось, в направлении которой происходит удлинение (укорочение) длины ребра. Деформации считаются положительными, если они соответствуют удлинению ребра, отрицательными - укорочению. Эти деформации вызывают нормальные напряжения растяжения (сжатия). Линейные деформации приводят к изменению объема и формы. Три других деформации являются угловыми деформациями (см. рис. 31). Они приводят к изменению формы тела.

Угловые деформации обозначаются через $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Первый индекс указывает направление оси, параллельно которой ребро находилось в исходном состоянии, а второй - ось, по направлению к которой повернулось ребро. Величина деформаций определяется углом между направлением ребер в исходном положении и после деформации. Угловые деформации называют иногда деформациями сдвига. Индексы указывают, в какой плоскости появляется угол сдвига. Угловые деформации считаются положительными, если они отвечают уменьшению угла между соответствующими гранями

параллелепипеда. В противном случае они отрицательные. Рассмотренные выше деформации являются относительными, безразмерными и малыми по сравнению с единицей.

Угловые деформации можно представить по-разному (рис. 32).

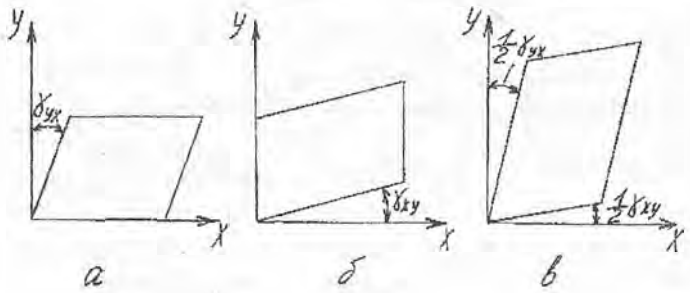


Рис. 32

На рис. 32,а деформированное состояние характеризуется жестким поворотом параллелепипеда на угол γ_{yx} по часовой стрелке. На рис. 32,б - на угол γ_{xy} против часовой стрелки. Для всех трех случаев характерно одно и то же напряженное состояние, так как поворот элементарного объема как жесткого целого не приводит к появлению в нем дополнительных усилий. В искажении формы при деформации сдвига имеет значение сумма углов, а не величина каждого из них. Поэтому можно приравнять углы γ_{yx} и γ_{xy}, а сдвиговую деформацию обозначить относительно оси x через $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$, относительно оси y - $\frac{1}{2}\gamma_{yx}$, рис. 32,в. Тогда

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx},$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz} = \frac{1}{2}\gamma_{zy},$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{zx} = \frac{1}{2}\gamma_{xz}.$$

При этом индексация сдвиговых деформаций будет совпадать с индексацией касательных напряжений. Стягивая параллелепипед в точку, можно принять, что рассмотренные шесть компонентов деформации описывают деформированное состояние в исследуемой точке, которое можно описать полевым тензором бесконечно малых деформаций второго ранга:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

За счет случая на рис. 32,в тензор деформаций сделан искусственно симметричным. При использовании тензорных обозначений общий компонент тензора деформаций имеет вид ε_{ij}, причем $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$, $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\gamma_{yz}$, $\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\gamma_{zx}$. Тензор деформаций полностью определяет деформированное состояние в исследуемой точке тела.

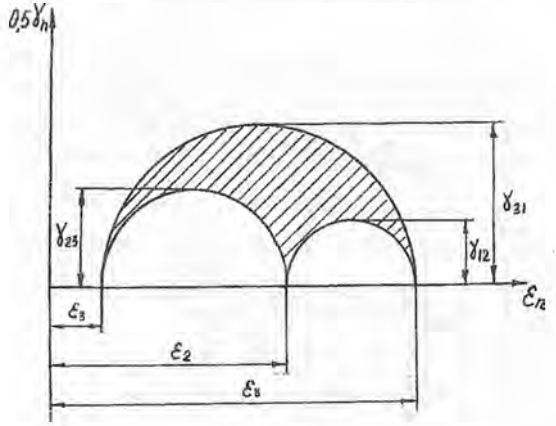


Рис. 33

По аналогии с теорией напряжений геометрической интерпретацией деформированного состояния в точке тела в пространстве является эллипсоид деформации, а на плоскости - диаграмма деформаций в координатах: линейные деформации, угловые деформации. Любая точка, лежащая внутри области, ограниченной тремя окружностями диаграммы, своими координатами определяет линейную и половину угловой деформации (рис. 33).

2.2. Геометрические уравнения

Так как в основе деформации лежат перемещения, то найдем зависимости между компонентами перемещений u_x, u_y, u_z и компонентами деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Для их вывода будем считать, что поле перемещений задано. Выделим для этого в деформируемом теле бесконечно малый параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, параллельными координатным осям x, y, z. Рассмотрим проекцию этого параллелепипеда на координатную плоскость xoy (рис. 34). Пусть $abcd$ - проекция этого параллелепипеда до деформации имеет форму прямоугольника с длинами ребер $ad = dx$, $ab = dy$; $a_1b_1c_1d_1$ - после деформации имеет форму параллелограмма.

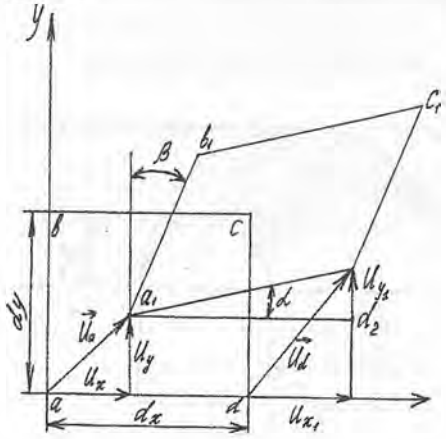


Рис. 34

Для определения линейной деформации ε_x рассмотрим ребро ad. Перемещение точки a в направлении оси x обозначим через $u_x = u_x(x, y, z)$; точки d, расположенной от точки a на бесконечно малом расстоянии dx, через $u_{x_1} = u_x(x + dx, y, z)$. Можно считать, что перемещение точки d отличается от перемещения точки a на величину приращения функции u_x на длине dx по координате x. Тогда

$$u_{x_1} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx .$$

Отсюда относительное удлинение ребра ad относительно оси x равно

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{u_{x1} - u_x}{dx} = \frac{u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx - u_x}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} .$$

Аналогично для относительного удлинения ребра вдоль оси y получим

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} .$$

После деформации длины ребер станут равными $a_1d_1 = dx(1 + \varepsilon_x)$, $a_1b_1 = dy(1 + \varepsilon_y)$.

Ребра параллелепипеда, параллельные осям координат в исходном состоянии, после деформации не будут им параллельны, так как произойдет поворот их в результате деформаций сдвига. Согласно определению деформация сдвига в плоскости xy равна сумме углов α и β поворота ребер ad и ab, т.е. $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$.

Так как изменения углов бесконечно малые, то $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, поэтому из прямоугольного треугольника $a_1d_1d_2$:

$$\alpha = \frac{d_1d_2}{a_1d_2} = \frac{u_{y1} - u_y}{u_{x1} + dx - u_x}$$

или

$$\alpha = \frac{u_y + \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - u_y}{u_x + \dfrac{\partial u_x}{\partial x} dx + dx - u_x} = \frac{\dfrac{\partial u_y}{\partial x}}{dx(1 + \varepsilon_x)}.$$

Так как $\varepsilon_x << 1$, то

$$\alpha = \frac{\partial u_y}{\partial x} .$$

Аналогично определяем угол β:

$$\beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} .$$

Тогда

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} .$$

Проектируя рассматриваемый параллелепипед на координатные плоскости *yoz*, *zox*, найдем выражения других компонентов деформации от компонентов перемещения.

Окончательно получим шесть геометрических уравнений:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

В тензорных обозначениях зависимости компонентов деформации от компонентов перемещения имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

2.3. Уравнения совместности деформаций

Так как принят принцип, что тело до деформации и после деформации должно оставаться сплошным, то все компоненты деформаций произвольными быть не могут. Они должны быть определенным образом связаны между собой.

Если известны три компоненты непрерывного поля перемещений u_x, u_y, u_z , то по ним однозначно определяются простым дефференцированием компоненты деформаций по формулам Коши. Сложнее обстоит дело с обратной постановкой задачи. Если заданы шесть компонент деформаций, то заранее нельзя утверждать, что им отвечает какое-либо непрерывное поле перемещений. Деформации, которым отвечает непрерывное поле перемещений, называются *совместными деформациями*. В противном случае деформации называются *несовместными*.

Для того чтобы деформации были совместными, они должны быть взаимосвязаны некоторыми соотношениями, которые называются *уравнениями совместности деформаций*. Покажем это.

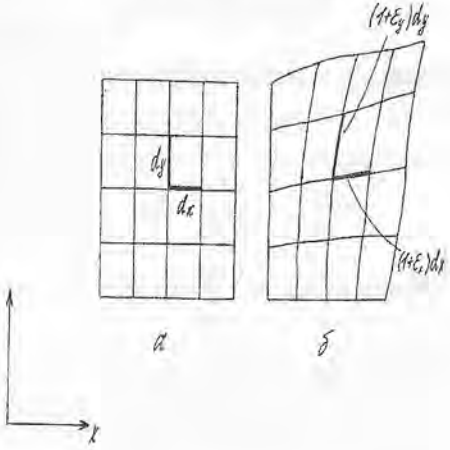


Рис. 35

На рис. 35,а показан разрез тела, разбитого на элементарные параллелепипеды системой взаимно перпендикулярных плоскостей, до деформации. Зададим в теле поле деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y$. В

результате ребра dx, dy получат некоторые удлинения , $(1+\varepsilon_x)dx$ $(1+\varepsilon_y)dy$ соответственно. Тело деформируется, как это показано на рис. 35,б. При этом возникают углы сдвига как изменения прямых углов, зависящие от компонент $\varepsilon_x, \varepsilon_y$. Очевидно, наоборот, задавая $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ в непрерывно деформируемом теле, будем иметь зависящие от них линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y$. В случае произвольного и независимого задания удлинения ребер и углов сдвига деформируемые элементы не удается сложить в сплошное тело.

Для вывода первой группы уравнений совместности деформаций исключим из геометрических уравнений компоненты перемещения u_x, u_y, u_z. Возьмем два первых уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \; \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

Продифференцируем первое уравнение два раза по y, а второе по x, получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2}, \; \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial y \partial x^2}.$$

Складывая левые и правые части почленно, имеем

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

В скобках получили выражение, представляющее собой γ_{xy}.

Произведя такие же операции с первым и третьим, а затем со вторым и третьим геометрическими уравнениями, получим еще две аналогичные зависимости. Их можно легко записать, используя круговую подстановку индексов x,y,z:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}.$$

Вторая группа зависимостей получается из трех последних геометрических уравнений:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y},$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Из этих уравнений также исключим компоненты перемещения u_x, u_y, u_z. Для этого продифференцируем каждое из них по координате, отсутствующей в обозначении угловой деформации:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y}.$$

В правых частях полученных уравнений имеется по два одинаковых члена, содержащих производные от *x,y,z*. Их необходимо исключить. Для этого изменим знаки, например у первого уравнения, и все их сложим. Тогда четыре члена сократятся, и получим

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}.$$

Полученное уравнение продифференцируем по z:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y \partial z} =$$

$$= 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}.$$

Меняя знак у второго, а затем у третьего уравнения, получаем еще две аналогичные зависимости:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial y}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}.$$

Эти уравнения впервые получены французским ученым Сен-Венаном. Они показывают, что в каждой точке деформированного тела составляющие деформации взаимосвязаны между собой.

2.4. Главные деформации

По аналогии с теорией напряженного состояния можно показать, что в любой точке тела существуют три взаимно перпендикулярные направления, по которым тело испытывает только деформации удлинения или укорочения, а угловые деформации равны нулю. Эти линейные деформации называются главными деформациями и обозначаются через ε_1, ε_2, ε_3. Определим их. Возьмем разность $\varepsilon_n - \varepsilon$, где ε - постоянная:

$$\varepsilon_n - \varepsilon = \varepsilon_{ij} n_i n_j - \varepsilon = \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y +$$

$$+ \gamma_{yz} n_y n_z + \gamma_{zx} n_z n_x - \varepsilon\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right).$$

Если нормаль $\overline{n}$ является главным направлением, то разность должна принимать экстремальное значение, и тогда частные производные от нее по n_x, n_y, n_z должны равняться нулю:

$$\frac{\partial(\varepsilon_n - \varepsilon)}{\partial n_x} = 0,$$
$$\frac{\partial(\varepsilon_n - \varepsilon)}{\partial n_y} = 0,$$
$$\frac{\partial(\varepsilon_n - \varepsilon)}{\partial n_z} = 0.$$

Составив частные производные, получим систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} 2(\varepsilon_x - \varepsilon)n_x + \gamma_{xy} n_y + \gamma_{xz} n_z &= 0, \\ \gamma_{yx} n_x + 2(\varepsilon_y - \varepsilon)n_y + \gamma_{yz} n_z &= 0, \\ \gamma_{zx} n_x + \gamma_{zy} n_y + 2(\varepsilon_z - \varepsilon)n_z &= 0. \end{aligned} \qquad (21)$$

Записанная система является однородной относительно неизвестных косинусов углов n_x, n_y, n_z, а следовательно, она имеет нулевое решение. Но n_x, n_y, n_z одновременно нулю равняться не могут, так как $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Следовательно, для поиска нулевого решения системы определитель из коэффициентов уравнений (21) должен равняться нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

В этом уравнении неизвестным является ε.

Раскрыв определитель, получим кубическое уравнение:

$$\varepsilon^3 - J_1(T_\varepsilon)\varepsilon^2 + J_2(T_\varepsilon)\varepsilon - J_3(T_\varepsilon) = 0\ , \qquad (22)$$

где $J_1(T_\varepsilon), J_2(T_\varepsilon), J_3(T_\varepsilon)$ - инварианты тензора деформаций. В произвольной системе координат они имеют следующие значения:

$$J_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

$$J_2(T_\varepsilon) = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right),$$

$$J_3(T_\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Из решения кубического уравнения (22) находятся вещественные значения главных деформаций ε_1, ε_2, ε_3. Имея главные деформации, можно из системы (21) и условия $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ определить направления главных осей деформаций. Этим доказано, что в каждой точке существуют три взаимно перпендикулярные направления, для которых

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

В главных осях тензоры деформаций и инварианты имеют вид

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

$$J_1(T_\varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

$$J_2(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1,$$

$$J_3(T_\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Из анализа деформаций в главных осях следует, что всякая деформация может быть осуществлена простыми растяжениями в трех главных направлениях.

Подобно главным напряжениям сдвига главные деформации сдвига имеют место по взаимно перпендикулярным площадкам, наклоненным под углом 45° к двум плоскостям координат ε_1, ε_2, ε_3 и проходящим через одну из осей.

Главные деформации сдвига связаны с главными деформациями удлинения соотношениями:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$
$$\gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$
$$\gamma_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1.$$

Между собой главные деформации сдвига связаны соотношением

$$\gamma_{12} + \gamma_{23} + \gamma_{31} = 0 .$$

2.5. Схемы главных деформаций

При обработке металлов давлением различают три схемы главных деформаций, предложенные С.И. Губкиным (рис. 36).

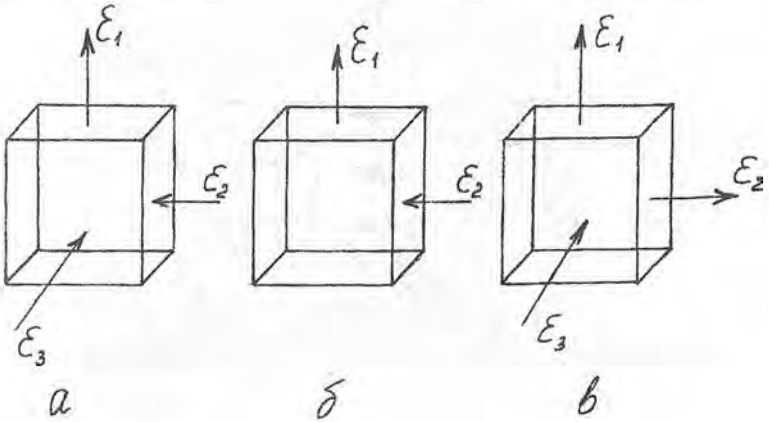


Рис. 36

Из условия постоянства объема (несжимаемости), широко используемого в процессах обработки металлов давлением, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ следует, что три главные деформации не могут быть одного знака, а схемы деформаций могут быть только разноименные. Поэтому не может быть линейных схем деформации. Реально осуществимы только одна плоская (рис. 36,б) и две объемных (рис. 36, а, в) схемы.

Схема на рис. 36, а встречается в таких процессах обработки металлов давлением, как прессование и выдавливание (рис. 37, в), волочение (рис. 37,г). В процессе деформирования происходит

уменьшение поперечного сечения заготовки и течение металла в длину. Если течение металла происходит в одной плоскости, то такая деформация называется плоской. Примером плоской деформации является прокатка тонкого широкого листа, при которой деформация по ширине листа равна нулю.

Схема на рис. 36,в встречается в таких процессах как осадка без контактного трения (рис. 37,а) и с трением (рис. 37,б), толстолистовая прокатка (рис. 37,д), поперечно-винтовая прокатка (рис. 37,е).

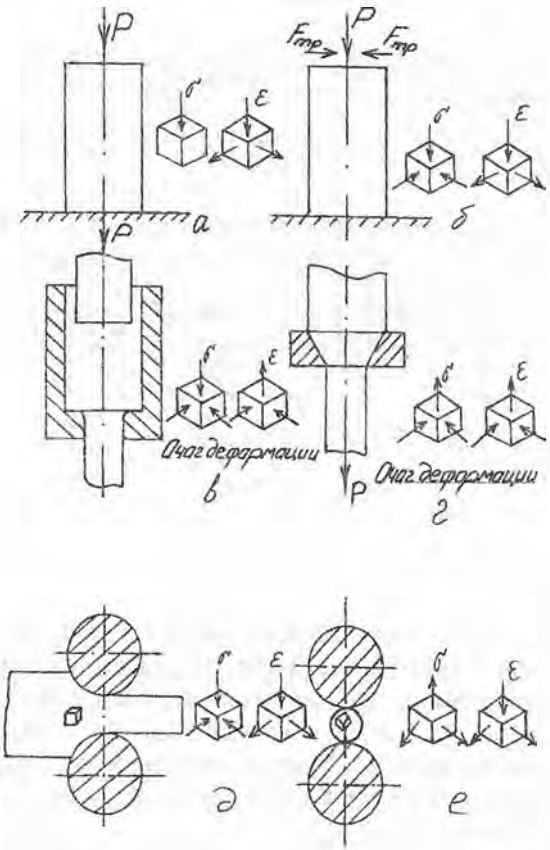


Рис. 37

Главные линейные деформации связаны между собой следующими соотношениями:

для плоского деформированного состояния

$$\varepsilon_3 = -\varepsilon_1, \text{ и } \varepsilon_2 = 0;$$

для линейного растяжения и сжатия

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0{,}5\varepsilon_1,$$

где ε_1 - наибольшая по абсолютной величине главная деформация.

Задача 12. В исследуемой точке тела известен тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2}.$$

Необходимо найти главные деформации и направления главных осей.

Решение

Для определения главных деформаций составим определитель и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} 4-\varepsilon & 6 & 0 \\ 0 & 5-\varepsilon & -6 \\ 0 & -6 & 4-\varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель третьего порядка по первой строке, получим

$$(4-\varepsilon)\begin{vmatrix} 5-\varepsilon & -6 \\ -6 & 4-\varepsilon \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 4-\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(4-\varepsilon)\left[(5-\varepsilon)(4-\varepsilon)-36\right] - 36(4-\varepsilon) = 0.$$

Тогда

$$4-\varepsilon = 0,$$

$$\varepsilon^2 - 9\varepsilon - 52 = 0.$$

Отсюда

$$\varepsilon_1 = 13 \cdot 10^{-2},\ \varepsilon_2 = 4 \cdot 10^{-2},\ \varepsilon_3 = -4 \cdot 10^{-2}.$$

Имея значения главных деформаций, можно определить

направления осей главных деформаций. Например, для первого направления имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&(4-13)n'_x + 6n'_y = 0,\\
&6n'_x + (5-13)n'_y - 6n'_z = 0,\\
&-6n_y + (4-13)n'_z = 0,\\
&(n'_x)^2 + (n'_y)^2 + (n'_z) = 1.
\end{aligned}$$

Из первого уравнения системы

$$n'_x = \frac{2}{3} n'_y.$$

Из третьего уравнения системы

$$n'_z = -\frac{2}{3} n'_y.$$

После их подстановки в четвертое уравнение

$$\frac{4}{9}(n'_y)^2 + (n'_y)^2 + \frac{4}{9}(n'_y)^2 = 1,$$

откуда

$$n'_y = \frac{3}{\sqrt{17}},\ n'_x = \frac{2}{\sqrt{17}},\ n'_z = -\frac{2}{\sqrt{17}}.$$

2.6. Разложение тензора деформаций

Тензор деформаций, характеризующий общий случай деформированного состояния в рассматриваемой точке тела, можно представить в виде суммы двух деформированных состояний.

Первое деформированное состояние характеризуется шаровым тензором деформаций

$$T_\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{cp} \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_{cp} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$,

а второе - девиатором деформаций

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$T_\varepsilon = T_\varepsilon^0 + D_\varepsilon .$$

Шаровой тензор деформаций описывает деформацию изменения объема, а девиатор деформаций - деформацию изменения формы в точке тела. При развитой пластической деформации компоненты шарового тензора деформаций $\varepsilon_{cp} = 0$. Тогда $T_\varepsilon = D_\varepsilon$, так как возникновение пластических деформаций в теле связано с образованием сдвигов и, следовательно, с изменением формы элементарного объема. При всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают.

Инварианты девиатора деформации в главных осях равны:

$$J_1(D_\varepsilon) = 0,$$
$$J_2(D_\varepsilon) = \frac{1}{6}\left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2\right],$$
$$J_3(D_\varepsilon) = (\varepsilon_1 - \varepsilon_{cp})(\varepsilon_2 - \varepsilon_{cp})(\varepsilon_3 - \varepsilon_{cp}).$$

В теории пластичности важное значение играет второй инвариант $J_2(D_\varepsilon)$, который можно рассматривать как суммарную характеристику искажения формы элемента сплошной среды.

Неотрицательная величина

$$\Gamma = +2\sqrt{J_2(D_\varepsilon)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + \ldots}$$
$$\ldots \sqrt{+ (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)}$$

называется *интенсивностью деформаций сдвига.*

Коэффициент перед корнем выбран так, чтобы при чистом сдвиге

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\,,\ \gamma_{xy} = \gamma$$

интенсивность Γ равнялась величине сдвига γ.

Неотрицательная величина

$$\varepsilon_i = \Gamma/\sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + \ldots}$$

$$\ldots \overline{+ (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)}$$

называется *интенсивностью деформаций*. Коэффициент пропорциональности выбран так, чтобы при линейном растяжении

$$\varepsilon_1 = \varepsilon,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0{,}5\varepsilon,\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

интенсивность ε_i равнялась главной линейной деформации.

Октаэдрическая деформация сдвига определяется формулой

$$\gamma_{\text{окт}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}J_2(D_\varepsilon)} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2}\,.$$

Девиатор деформаций в виде

$$\frac{\gamma_{\text{окт}}}{2}\begin{pmatrix} \dfrac{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_{\text{ср}})}{\gamma_{\text{окт}}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_{\text{ср}})}{\gamma_{\text{окт}}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2(\varepsilon_3 - \varepsilon_{\text{ср}})}{\gamma_{\text{окт}}} \end{pmatrix}$$

называется *направляющим тензором деформаций* и обозначается как $\overline{D_\varepsilon}$. Его главные оси совпадают с главными осями тензора деформаций. Если главные оси деформаций известны, то для описания деформированного состояния можно использовать показатель вида деформированного состояния Лоде - Надаи

$$\upsilon_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}}\,.$$

Для одноосного растяжения υ_ε=-1, одноосного сжатия υ_ε=1, чистого сдвига υ_ε=0 .

2.7. Однородная, равномерная и монотонная деформации

Однородной называется деформация тела, при которой главные оси имеют одинаковые направления во всех точках тела и остаются неизменными в течение всего процесса деформирования. Это означает, что при однородной деформации отсутствуют сдвиги, а различные участки тела получают одинаковые линейные деформации как по величине, так и по направлению.

Пример однородной деформации при осадке тела между параллельными плитами без трения показан на рис. 38.

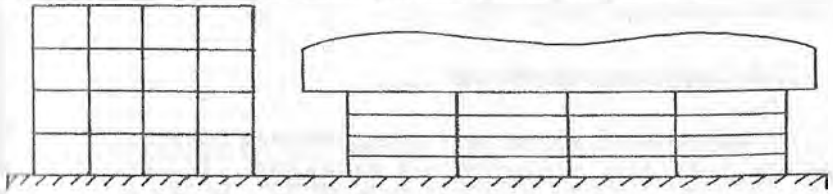


Рис. 38

При однородной деформации компоненты перемещений линейно зависят от координат

$$u_X = \varepsilon_1 x,\ u_Y = \varepsilon_2 y,\ u_Z = \varepsilon_Z z\ .$$

Отсюда следует, что при однородной деформации любая плоскость деформируемого тела остается плоскостью и после деформации. На этом положении основана *гипотеза плоских сечений*, широко применяемая в теории обработки металлов давлением.

На практике однородная деформация встречается очень редко. Обычно имеет место *неоднородность* деформации, это является результатом действия сил трения и формы инструмента.

Пример неоднородной деформации при осадке между параллельными плитами с учетом действия сил трения T приведен на рис. 39.

Равномерной называется такая деформация, тензор которой в любой точке тела постоянен и не зависит от координат. Равномерная деформация представляет собой частный случай однородной. Она возможна в условиях линейного напряженного состояния.

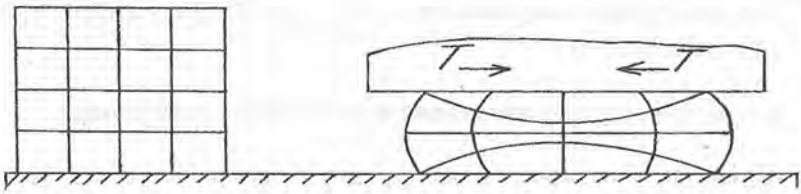


Рис. 39

Условие *монотонности* деформации заключается в том, что на всем протяжении деформации от начального до конечного состояния наибольшие и наименьшие удлинения или укорочения испытывают одни и те же материальные волокна, проходящие через рассматриваемую точку тела.

2.8. Большие деформации

В процессах обработки металлов давлением полная деформация может достигать значительной величины. Для ее описания рассмотрим параллелепипед с ребрами, параллельными главным осям деформаций, и с исходными размерами до пластической деформации X_0, Y_0 и Z_0 (рис. 40, а).

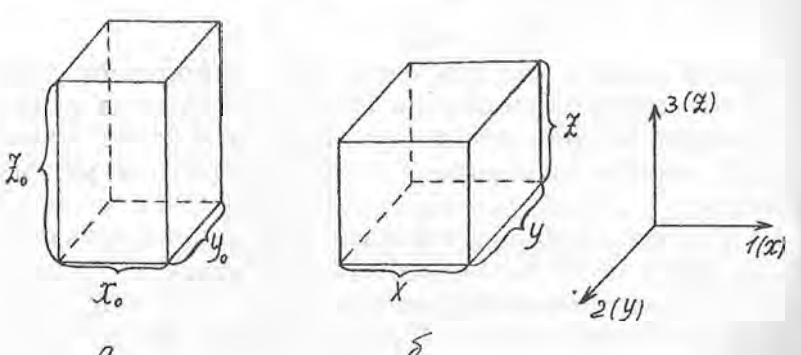


Рис. 40

Пусть этот параллелепипед после однородной деформации (рис. 40,б) останется также параллелепипедом и конечные размеры его будут: X, Y, Z. Тогда по условию постоянства объема

$$V = X_0 Y_0 Z_0 = XYZ,$$

откуда

$$\frac{X}{X_0}\frac{Y}{Y_0}\frac{Z}{Z_0} = 1.$$

После логарифмирования

$$\ln\frac{X}{X_0} + \ln\frac{Y}{Y_0} + \ln\frac{Z}{Z_0} = 0,$$

или сумма трех главных деформаций равна нулю:

$$e_x + e_y + e_z = 0,$$

где $$e_x = \ln\frac{X}{X_0};\ e_y = \ln\frac{Y}{Y_0};\ e_z = \frac{\ln Z}{Z_0}. \qquad (23)$$

Величины e_x, e_y и e_z носят название *логарифмических деформаций.*

Логарифмическая деформация представляет собой интеграл бесконечно малого приращения данного размера тела или его элемента, отнесенного к его величине в каждый данный момент деформации. Например, в направлении ребра Z суммарная относительная деформация при осадке от Z_0 до Z составит:

$$e_z = \int_{Z_0}^{Z}\frac{dZ}{Z} = ln\frac{Z}{Z_0}.$$

Аналогичные деформации в направлении ширины и длины соответственно равны:

$$e_y = \int_{Y_0}^{Y}\frac{dY}{Y} = \ln\frac{Y}{Y_0},\ e_x = \int_{X_0}^{X}\frac{dX}{X} = \ln\frac{X}{X_0}.$$

В случае однородной деформации логарифмические деформации представляют собой результат суммирования бесконечно малых деформаций, поэтому их часто называют *истинными деформациями.*

Логарифмические деформации обладают свойством аддитивности: их можно складывать при определении суммарной деформации, осуществленной за несколько операций.

Допустим, что растяжение образца длиной 100мм произведено в два этапа. Вначале образец был растянут на длину 120мм, а после до 150мм.

Суммарная деформация за два этапа нагружения

$$e_{x\Sigma} = \ln\frac{150}{100} = \ln\frac{150}{120}\cdot\frac{120}{100} = \ln\frac{150}{120} + \ln\frac{120}{100} = e_{x1} + e_{x2}\ .$$

Таким образом,

$$e_{x\Sigma} = e_{x1} + e_{x2}\ .$$

Степень деформации тел можно выразить иначе, а именно, как отношение приращения размера к начальному размеру тела:

$$\varepsilon_x = \frac{X - X_0}{X_0} = \frac{\Delta X}{X_0},\ \varepsilon_y = \frac{Y - Y_0}{Y_0} = \frac{\Delta Y}{Y_0},$$
$$\varepsilon_z = \frac{Z - Z_0}{Z_0} = \frac{\Delta Z}{Z_0}\ . \qquad (24)$$

Величины e и ε связаны между собой:

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \ln\frac{X}{X_0} = \ln\frac{X_o + \Delta X}{X_0} = \ln(1+\varepsilon_x),\\ e_y &= \ln\frac{Y}{Y_0} = \ln\frac{Y_0 + \Delta Y}{Y_0} = \ln(1+\varepsilon_y),\\ e_z &= \ln\frac{Z}{Z_0} = \ln\frac{Z_0 + \Delta Z}{Z_0} = \ln(1+\varepsilon_z). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Формулы (24) часто используют в процессах обработки металлов давлением для расчета относительного обжатия, уширения, вытяжки. Например, величина относительного обжатия при осадке

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h_1}{h_0}.$$

Граница между деформациями, рассчитываемыми по формулам (23) и (24), зависит от той точности, с которой рассчитывается процесс. Истинные и относительные деформации вначале близки между собой, а затем расходятся (рис. 41).

Если необходима большая точность, то нужно использовать логарифмические деформации. В пределах 0 - 10% можно

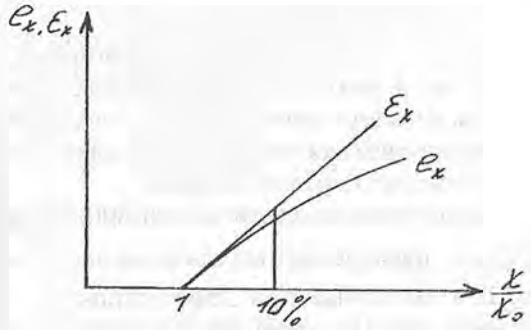


Рис. 41

пользоваться любыми формулами. При степенях деформации до 10% проще использовать формулы (24), не обладающие свойством аддитивности.

Задача 13. Плита длиной 1200мм, шириной 360мм и толщиной 5мм растягивается равномерно при растяжении в продольном направлении до тех пор, пока ее длина не увеличится до 1440мм без изменения ширины. Найти: а) конечные главные деформации, б) конечные размеры плиты.

Решение

Выбрав следующие направления осей: длина x, ширина y, толщина z, получаем:

$$e_x = \ln\frac{x}{x_0} = \ln\frac{1440}{1200} = 0{,}182,$$

$$e_y = \ln\frac{y}{y_0} = \ln\frac{360}{360} = 0,$$

$$e_z = \ln\frac{z}{z_0} = \ln\frac{t}{t_0} = -0{,}182,$$

так как

$$e_x + e_y + e_z = 0\ .$$

Из уравнения $e_z = \ln\frac{t}{t_0}$ получаем

$$t = t_0 e^{e_z} = 5e^{-0{,}182} = 4{,}16\ \text{мм}\ .$$

Следовательно, размеры плиты после деформации будут следующими: длина 1440 мм, ширина 360 мм и толщина 4,16 мм.

2.9. Объемная деформация

При деформации тела под действием внешних сил изменяется не только форма, но и объем. Изменение объема, отнесенное к начальному объему, называется *относительной объемной деформацией.* Изменение объема происходит в основном вследствие изменения длин ребер элементарного параллелепипеда.

Выделим в рассматриваемом теле элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz, параллельными главным направлениям 1,2,3 в данной точке. В этом случае при деформировании углы параллелепипеда остаются прямыми, изменятся лишь длины ребер и станут равными

$$(1+\varepsilon_1)dx, \quad (1+\varepsilon_2)dy, \quad (1+\varepsilon_3)dz.$$

Объем параллелепипеда до деформации

$$dV = dxdydz,$$

после деформации

$$dV_1 = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)dxdydz.$$

Относительная объемная деформация

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)dxdydz - dxdydz}{dxdydz} =$$

$$= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3.$$

Отбрасывая произведения деформаций как малые второго и третьего порядков, получим

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Таким образом, объемная деформация выражается суммой линейных деформаций.

Задача 14. При малой деформации кубика с ребром a каждая его точка испытывает смещение, заданное следующими уравнениями:

$$u_x = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$u_y = a_2x - b_2y - c_2z,$$
$$u_z = a_3x - b_3y - c_3z.$$

Найти относительное изменение объема кубика и его линейные размеры после деформации.

Решение: Линейные деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = a_1, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -b_2, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -c_3.$$

Относительная объемная деформация

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = a_1 - b_2 - c_3.$$

Линейные размеры кубика после деформации:

$$x = a(1+\varepsilon_x) = a(1+a_1),$$
$$y = a(1+\varepsilon_y) = a(1-b_2),$$
$$z = a(1+\varepsilon_z) = a(1-c_3).$$

2.10. Переменные Лагранжа и Эйлера

При изучении движения сплошной среды существуют два подхода. В первом, связанным с именем Лагранжа, объектом изучения являются сами материальные частицы. Для каждой частицы исследуются во времени такие величины как скорость, плотность, температура и т.д. Пусть частица в начальный момент времени $t = 0$ имеет декартовые координаты $X_1, X_2, X_3(X_i)$. Тогда ее текущие координаты: $x_1, x_2, x_3(x_i)$ в той же системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \\ x_2 &= \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \\ x_3 &= \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t). \end{aligned} \tag{26}$$

Фиксируя начальные координаты X_i и считая время переменным, получим закон движения одной фиксированной материальной частицы. Полагая переменную X_i и фиксируя t, по формулам (26) можно найти распределение материальных частиц в пространстве в данный момент времени. Если считать X_i и t переменными, то

формулы (26) представляют собой закон движения сплошной среды. Переменные X_i и t называются переменными Лагранжа. Компоненты вектора скорости частиц по Лагранжу определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{dx_1}{dt}, \\ v_2 &= \frac{dx_2}{dt}, \\ v_3 &= \frac{dx_3}{dt}. \end{aligned} \tag{27}$$

Второй подход, развитый Эйлером, в качестве объекта изучения принимает неподвижное пространство наблюдателя или его фиксированную часть, заполненную движущейся средой. Например, скорость в данной точке пространства считается функцией координат точки и времени:

$$\bar{v} = \bar{v}(x_1, x_2, x_3, t)$$

или в проекциях:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1(x_1, x_2, x_3, t), \\ v_2 &= v_2(x_1, x_2, x_3, t), \\ v_3 &= v_3(x_1, x_2, x_3, t), \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t), \\ v_y &= v_y(x, y, z, t), \\ v_z &= v_z(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Вектор скорости $\bar{v}$ для заданной точки меняется в пространстве по величине и по направлению в зависимости только от времени. Если скорость не зависит от времени, то такое поле называется стационарным.

Таким образом, с точки зрения Эйлера в данной точке пространства исследуются изменения скорости, давления, температуры, а с точки зрения Лагранжа - изменения этих величин

для данной индивидуальной частицы. Если известны компоненты вектора скорости (28), то, приравняв их к уравнению (27), получим

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1(x_1, x_2, x_3, t),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = v_2(x_1, x_2, x_3, t),$$
$$\frac{dx_3}{dt} = v_3(x_1, x_2, x_3, t).$$

То есть имеем систему трех дифференциальных уравнений. Интегрируя эту систему из начальных условий $t = 0, x_1 = X_1, x_2 = X_2, x_3 = X_3$, получим зависимость (26).

2.11. Скорость деформации

Рассмотрим процесс деформирования тела во времени. В процессе деформирования отдельные материальные частицы движутся со скоростью $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t)$. Составляющие скорости по координатным осям x, y, z:

$$v_x = v_x(x, y, z, t),$$
$$v_y = v_y(x, y, z, t),$$
$$v_z = v_z(x, y, z, t).$$

Так как скорость частицы определяется величиной перемещения в единицу времени, то

$$v_x = \frac{du_x}{dt}, \quad v_y = \frac{du_y}{dt}, \quad v_z = \frac{du_z}{dt}$$

или

$$du_x = v_x dt, \quad du_y = v_y dt, \quad du_z = v_z dt.$$

В течение бесконечно малого промежутка времени dt деформируемый элемент тела испытывает бесконечно малые деформации, определяемые перемещением du. В направлении координатной оси x имеем

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial du_x}{\partial x} = \frac{\partial(v_x dt)}{\partial x}$$

или

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \xi_x,$$

где ξ_x - линейная скорость деформации.

Аналогично могут быть получены и другие скорости линейных и угловых деформаций:

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad \eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x},$$

$$\xi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \qquad \eta_{yz} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y},$$

$$\xi_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \eta_{zx} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

В сокращенном виде

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Скоростью деформации называется изменение степени деформации в единицу времени. Это понятие широко используется в теории пластического течения металла. Скорость деформации, по аналогии с тензором деформаций, можно также представить в виде тензора скоростей деформации

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} \xi_x & \frac{1}{2}\eta_{xy} & \frac{1}{2}\eta_{xz} \\ \frac{1}{2}\eta_{yx} & \xi_y & \frac{1}{2}\eta_{yz} \\ \frac{1}{2}\eta_{zx} & \frac{1}{2}\eta_{zy} & \xi_z \end{pmatrix}.$$

Его по аналогии можно представить в виде шарового тензора T_{ξ}^{0} и девиатора скоростей деформаций D_{ξ}, т.е. $T_{\xi} = T_{\xi}^{0} + D_{\xi}$. Шаровой тензор имеет вид

$$T_{\xi}^{0} = \begin{pmatrix} \xi_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{cp} \end{pmatrix}.$$

При развитых пластических деформациях средняя скорость деформации

$$\xi_{cp} = \frac{\xi_x + \xi_y + \xi_z}{3} = 0$$

или

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Девиатор скоростей деформаций записывается аналогично девиатору деформаций:

$$D_{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_x - \xi_{cp} & \frac{1}{2}\xi_{xy} & \frac{1}{2}\xi_{xz} \\ \frac{1}{2}\xi_{yx} & \xi_y - \xi_{cp} & \frac{1}{2}\xi_{yz} \\ \frac{1}{2}\xi_{zx} & \frac{1}{2}\xi_{zy} & \xi_z - \xi_{cp} \end{pmatrix}.$$

Шаровой тензор T_{ξ}^{0} характеризует скорость изменения объема, а девиатор характеризует скорость изменения формы.

Аналогично вводится понятие интенсивности скоростей деформации сдвига

$$\text{II} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{2}{3}(\xi_{xy}^2 + \xi_{yz}^2 + \xi_{zx}^2)}.$$

Главные оси скоростей деформаций, главные скорости линейных деформаций определяются аналогично, как для тензора деформаций.

Размерность скорости деформаций – c^{-1}. Скорость деформации следует отличать от скорости деформирования (хода инструмента). Скорости деформаций для больших деформаций тела определяют аналогично, как и для малых.

Например, скорость деформации при осадке тела между двумя параллельными плитами

$$\xi_h = \frac{\varepsilon_h}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta h}{h}}{\Delta t} = \frac{v_h}{h}.$$

Задача 15. Дано стационарное поле скоростей материальных частиц тела:

$$v_x = 2z, \quad v_y = 2y, \quad v_z = 0.$$

Найти максимальную скорость деформации сдвига.

Решение. Определим тензор скоростей деформаций

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Его главные значения находим из определителя

$$\begin{vmatrix} -\xi & 0 & 1 \\ 0 & -\xi & 1 \\ 1 & 1 & -\xi \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\xi\left(\xi^2 - 2\right) = 0.$$

Откуда

$$\xi_1 = +\sqrt{2}, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = -\sqrt{2}.$$

По аналогии с определением главных сдвигов имеем

$$\xi_{\max} = \xi_{31} = -\frac{1}{2}\left(\xi_3 - \xi_1\right) = \sqrt{2}.$$

2.12. Выводы

В этой главе рассмотрены вопросы теории деформаций. По природе деформация тела может быть упругой и пластической, по величине – бесконечно малой и большой, по характеру – линейной и угловой. Рассмотренная теория носит чисто геометрический характер. Деформированное состояние в исследуемой точке тела характеризуется шестью компонентами деформаций: тремя линейными и тремя угловыми деформациями. Величина линейных деформаций определяется отношением приращения длины ребра к исходной длине. Величина угловой деформации определяется углом между направлением ребер в исходном состоянии и после деформации. Имея компоненты перемещений исследуемой точки, по геометрическим уравнениям Коши нетрудно простым дифференцированием найти компоненты деформаций. Так как компонент деформаций шесть, то их можно описать тензором второго ранга – тензором деформаций, причем полевым. Деформированное состояние в точке вполне определено, если для нее задан тензор деформаций, а компоненты деформаций отвечают условиям совместности.

В каждой точке тела существуют три взаимно перпендикулярные направления, которые называют главными осями деформации. Они обладают тем свойством, что волокна в теле, параллельные им, проходящие через данную точку, испытывают только линейные деформации удлинения или укорочения. Из условия постоянства объема при пластической деформации главные деформации не могут быть одного знака. Поэтому имеются только одна плоская и две объемные схемы деформаций.

Деформированное состояние в точке можно представить в виде суммы двух деформированных состояний. Первое деформированное состояние характеризуется шаровым тензором, когда изменяется объем тела. Второе деформированное состояние описывается девиатором деформаций, когда изменяется форма (изменение объема не происходит).

Геометрическим образом деформированного состояния в точке тела является эллипсоид деформации, построенный в главных осях, а также круговая диаграмма деформаций.

Важные частные случаи деформированного состояния – однородная и равномерная деформации. При однородной деформации

главные оси имеют одинаковые направления во всех точках тела и остаются неизменными в течение всего процесса деформирования. Равномерная деформация – это частный случай однородной, она реализуется в условиях линейного напряженного состояния.

Когда деформации тела имеют значительные величины, то для их расчета применяют логарифмические (истинные) деформации, обладающие свойством аддитивности. Эти деформации находятся через логарифмы отношений текущих линейных размеров к исходным.

Деформационные изменения в теле во времени в каждой его точке описываются тензором скоростей деформации, компоненты которого определяются путем дифференцирования компонент вектора скорости в декартовой системе координат.

Задания для самоконтроля

1. Поясните геометрический смысл компонент тензора бесконечно малых деформаций.
2. Что такое интенсивность деформаций и интенсивность деформаций сдвига?
3. Как получают уравнения совместности бесконечно малых деформаций?
4. Запишите условие несжимаемости для бесконечно малой деформации.
5. Как найти главные линейные деформации и главные оси?
6. Чем характеризуется скорость деформации в рассматриваемой точке тела?
7. Что такое скорость относительного удлинения (укорочения)? Как она выражается через компоненты тензора скоростей деформаций?
8. Всякие ли перемещения вызывают деформации?
9. Как устанавливают связь деформаций с перемещениями?
10. Что такое уравнения совместности деформаций и почему они существуют?
11. Как изменится геометрическая картина деформации тела, если уравнения совместности не выполняются?
12. Почему уравнений совместности деформаций шесть?
13. Как Вы понимаете однородную деформацию?
14. Приведите основные схемы главных деформаций, иллюстрируя их примерами технологических процессов обработки металлов давлением.
15. Меняется ли объем в процессах обработки металлов давлением?
16. Каким образом тензор деформаций получают симметричным?
17. Что понимают под деформацией тела?
18. Как подсчитать относительное изменение объема?
19. Пусть в начальном состоянии материальная частица имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Какова его форма в конечном состоянии?
20. Каков геометрический смысл главных осей тензоров деформаций?
21. В чем состоит различие между монотонной и немонотонной деформацией? Приведите примеры.

22. Как найти главные оси и главные компоненты тензора скоростей деформаций?

23. Разъясните смысл шарового тензора и девиатора деформаций.

24. Что такое логарифмические деформации? Как Вы понимаете их геометрический смысл?

25. Что такое интенсивность скоростей деформаций и интенсивность скоростей деформаций сдвига? Как выбираются постоянные коэффициенты в формулах для их расчета?

26. Когда применяют малые деформации, большие деформации?

27. В каком случае компоненты деформаций положительны?

28. Как деформируется элементарный параллелепипед с ребрами, параллельными главным осям тензора деформаций?

29. Каков физический смысл линейного инварианта тензора малых деформаций?

30. Какую деформацию элементарного параллелепипеда описывают диагональные компоненты тензора деформаций? Его боковые компоненты?

31. В каком случае $T_\varepsilon = D_\varepsilon$?

32. Что представляет собой геометрический образ деформированного состояния в точке тела?

Задачи и упражнения

1. Определить линейные и угловые деформации согласно рис. 42.

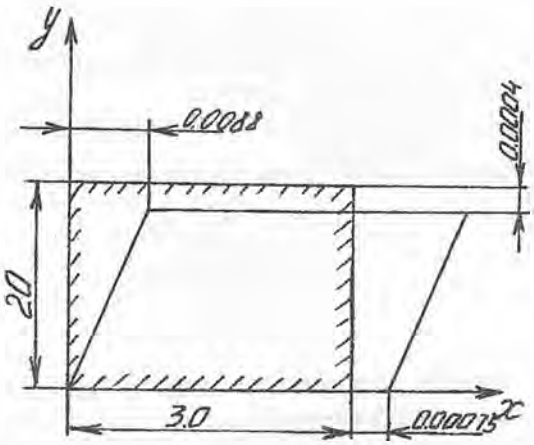


Рис. 42

2. Какая запись верно отражает запись тензора бесконечно малых деформаций?

$$T_{1\varepsilon}=\begin{pmatrix}0{,}01 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}02 & 0\\ 0 & 0 & -0{,}04\end{pmatrix},\quad T_{2\varepsilon}=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 20\end{pmatrix},$$

$$T_{3\varepsilon}=\begin{pmatrix}0{,}003 & 0{,}0075 & 0\\ 0{,}009 & 0{,}002 & 0\\ 0{,}01 & 0{,}0003 & 0{,}005\end{pmatrix},\quad T_{4\varepsilon}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 6 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}10^{-4}.$$

3. В точке тела имеются следующие компоненты деформаций: $\varepsilon_x=0{,}001$, $\varepsilon_y=0{,}0005$, $\varepsilon_z=-0{,}0001$, $\gamma_{xy}=0{,}0002$, $\gamma_{yz}=-0{,}0001$, $\gamma_{zx}=0{,}0003$. Вычислить главные деформации и их ориентировку по отношению к осям x, y, z.

4. Деформированное состояние тела описывается следующим тензором:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix} 10^{-4}.$$

Найти три взаимно перпендикулярных направления, которые остаются таковыми и после деформации.

5. При малой деформации тела каждая его точка испытывает смещения, заданные следующими уравнениями (в 10^{-4} мм):

$$U_x = 5x + 3y - 2z;$$
$$U_y = -3x + 4y + 8z;$$
$$U_z = 6x - 10y + 5z.$$

Записать тензор деформаций и составить уравнение для определения главных деформаций.

6. При малой деформации кубика с ребром a каждая его точка испытывает смещения, заданные следующими уравнениями:

$$U_x = 3x + 2y + 7z;$$
$$U_y = 4x - 3y - 3z;$$
$$U_z = 6x + 9y - 3z.$$

Найти относительное изменение объема кубика и линейные размеры после деформации.

7. Известен тензор деформации

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} 10^{-3}.$$

Определить направления, в которых происходит лишь растяжение или сжатие.

8. Привести к диагональному виду (в записи тензора имеют место лишь линейные деформации в направлении осей координат) следующие тензоры деформаций:

$$T_{1\varepsilon} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \quad T_{2\varepsilon} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Для плоского деформированного состояния ($\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$) вывести формулы для определения главных деформаций.

10. Деформированное состояние задано в виде следующего тензора:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}02 & 0 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}02 \end{pmatrix}.$$

Определить:

а) главные деформации;

б) девиатор деформаций и второй инвариант;

в) конечные размеры деформируемого тела, если начальные размеры составляли $15 \times 50 \times 30$ мм.

11. На стальной лист была нанесена сетка со стороной квадрата 50 мм. После растяжения в одном из направлений она стала прямоугольной с размерами 40×60 мм. Определить величину конечных деформаций. Изменится ли результат задачи, если рассматривать круглую сетку с $d_o = 50$ мм, которая превратилась бы в эллипс с главными осями $2a = 60$ мм и $2b = 40$ мм?

12. Полоса длиной 250 мм была растянута до 300 мм. Считая напряженное состояние линейным, а материал изотропным, найти деформацию по ширине и толщине полосы.

13. Пруток из изотропного материала был растянут таким образом, что его длина увеличилась в 1,2 раза. Каков стал конечный диаметр прутка, если начальный диаметр $d_o = 30$ мм? Каковы величины деформаций?

14. Плита длиной 2000 мм, шириной 400 мм и толщиной 10 мм деформировалась до тех пор, пока ее длина стала равна 2800 мм. Считая деформацию плоской, определить:

а) конечные деформации;

б) конечные размеры плиты;

в) интенсивность деформации.

15. Лист толщиной 6 мм, длиной 400 мм и шириной 300 мм растягивался до получения продольной деформации $\varepsilon_x = 0{,}15$. Считая толщину неизменной, определить конечные размеры листа и интенсивность деформаций.

16. Труба с наружным диаметром $d = 80$ мм, толщиной стенки $S = 4$ мм и длиной $\ell = 800$ мм подверглась растяжению до $\ell_1 = 1000$ мм.

Считая материал изотропным, найти компоненты деформации, интенсивность деформации и конечные размеры.

17. Тензор скоростей деформации в декартовой ортогональной системе координат записан следующим образом:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти его главные значения и главные оси.

18. Заданы перемещения:

а) $U_x = 5xyz;\ U_y = 2xy^2;\ U_z = 3yz^2;$

б) $U_x = 3x^2z;\ U_y = 3y^2x;\ U_z = 3z^2xy.$

Записать тензор деформаций и проверить, удовлетворяются ли условия совместности деформаций.

19. Показатель деформированного состояния

$$\nu_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}}.$$

Используя условие постоянства объема при пластических деформациях, записать его через две деформации, а также через их отношения.

20. Считая деформацию пластической, рассмотреть значение ν_ε для следующих случаев:

а) чистый сдвиг;

б) объемная схема деформаций, когда $\varepsilon_z = \varepsilon_3$.

21. Используя условие постоянства объема, записать второй инвариант девиатора деформаций через две его деформации.

22. Даны значения показателя вида деформированного состояния ν_ε: $0; +1; -1$. Показать возможные случаи деформированных состояний, соответствующих указанным величинам.

23. На рис. 43 приведена схема изменения координатной сетки при волочении круглого сплошного профиля через коническую волоку. Дать анализ изменения линейных и угловых деформаций.

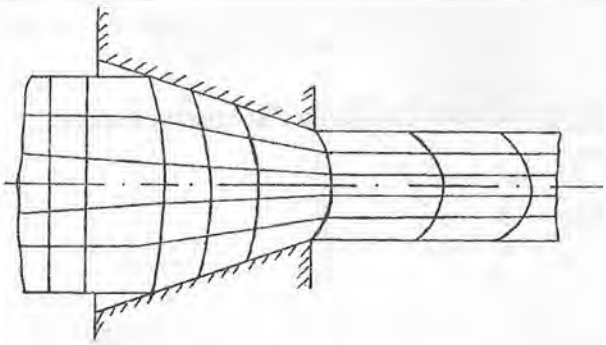


Рис. 43

24. Деформированное состояние в точке тела задано тензором бесконечно малых деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 6x_1^2 & x_2^2 & x_1x_3 \\ x_2^2 & 4x_3 & x_3^2 \\ x_1x_3 & x_3^2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определить, удовлетворяются ли уравнения совместности деформаций.

25. Конечный диаметр прутка равен 40 мм, а длина 2400 мм. Этот пруток был подвергнут равномерной пластической деформации растяжением от начального диаметра 60 мм. Определить:

а) первоначальные размеры прутка;

б) конечные деформации.

26. В процессе деформации первоначально квадратная сетка линий исказилась так, что расстояние между деформированными квадратами в долевом направлении увеличилось в 4 раза по сравнению с первоначальным расстоянием. Найти:

а) конечные деформации, если процесс деформации является линейным растяжением;

б) конечные деформации, если ширина детали остается постоянной.

27. Записать тензор деформаций для следующих случаев:

а) простое растяжение (среда несжимаема);

б) простое сжатие (среда несжимаема);

в) жесткий сдвиг.

28. Тензор деформации задан в следующем виде:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5\gamma & 0 \\ 0{,}5\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $\gamma \succ 0$, записать тензор в главных осях.

Деформации:
упругие,
пластические,
разрушения,
бесконечно малые,
большие,
линейные,
угловые,
логарифмические,
однородные,
равномерные,
монотонные

Тензор деформаций T_ε.

Шаровой тензор деформаций T_ε^0.

Девиатор деформаций D_ε.

Интенсивность деформаций ε_i.

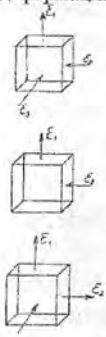
Интенсивность деформаций сдвига Γ.

Октаэдрическая деформация $\gamma_{окт}$.

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Схемы главных деформаций:



Деформированное состояние тела

Уравнения совместности деформаций:

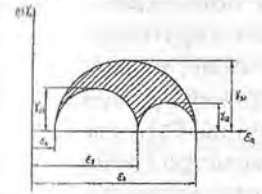
$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Скорость деформаций T_ξ

Интенсивность скоростей деформаций сдвига H

$$\Gamma = \int_0^t H dt$$

Геометрический образ:
эллипсоид деформаций,
диаграмма деформаций



Условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

В основе теории упругости используются следующие гипотезы:

1) перемещения и деформации в каждой точке тела малы; компоненты деформаций выражаются через перемещения и связаны формулами

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right);$$

2) в каждой точке тела главные направления тензора напряжения совпадают с главными направлениями тензора деформации;

3) соответствующие компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны линейными зависимостями:

$$T_\sigma = \varphi(T_\varepsilon)$$

$$\sigma_{ср} = \psi(\varepsilon_{ср}),$$

$$D_\sigma = \varphi(D_\varepsilon).$$

3.1. Обобщенный закон Гука

Вы изучили отдельно напряженное и деформированное состояние. Это было возможно только потому, что они выражены с помощью полевых тензоров. Это изучение несет довольно большую информацию, но не дает полной законченности в решении упругой задачи. Дело в том, что основной целью процесса деформирования является установление связи между силами и напряжениями, с одной стороны, и смещениями, деформациями – с другой. Только такая связь позволяет выяснить физическую картину процесса. Первая формулировка закона, связывающего напряжения с деформацией, принадлежит выдающемуся английскому естествоиспытателю, члену Лондонского Королевского общества (прототип – наша Академия наук) Роберту Гуку (1635-1703). Он изучал поведение стальной струны, нагруженной грузами, и свой закон упругости вначале представил в следующем виде: "Каково удлинение, такова и сила".

Гук усовершенствовал микроскоп, барометр, зеркальный телескоп, сконструировал ряд других приборов. Он совместно с Гюйгенсом установил постоянные точки термометра (точку таяния льда и точку кипения воды). Гук выступал против теории флогистона

("огненной материи"), исследовал с помощью микроскопа строение растений. Также широко известен в технике шарнир Гука. Из краткого перечня открытий видна широта и глубина его научных интересов. Кстати, свой закон упругости он открыл при создании пружины для часов, которая используется до настоящего времени.

Закон, названный его именем, был открыт в 1660 г. и опубликован в явном виде в 1678 г. В переводе на современный технический язык содержание, которое вкладывал в свой закон Гук, можно выразить следующим образом: "Деформация упругого тела пропорциональна действующему на него усилию".

Мы же рассматриваем пропорциональность напряжений и деформаций. Ясно, что это более правильное (обобщенное) понятие. Экспериментальные исследования подтвердили, что закон Гука хорошо согласуется с действительностью только при достаточно малых деформациях, где пропорциональность величин не дает больших погрешностей. Дело в том, что в природе не существует обратимых процессов, поэтому физически никакой пропорциональности быть не может.

Но даже при малых деформациях закон Гука в простой форме типа $\sigma = E\varepsilon$ не может дать полной картины того, что происходит в деформируемом теле. Дело в том, что здесь σ и ε определяются в направлении действия силы. Другие компоненты деформации в записи не присутствуют. Таким образом, такое выражение является приближенным и применимым для линейного напряженного состояния. В общем случае объемного напряженного состояния мы имеем шесть компонентов тензоров напряжений и деформаций, которые необходимо связать между собой. Другими словами, требуется обобщенный закон Гука. Такой закон создан. В его основе лежит пропорциональность (основная идея Гука), но только не двух, а нескольких величин. И хотя форма записи обобщенного закона упругости и его формулировка изменились, но из-за центральной идеи пропорциональности его называют законом Гука.

Он формулируется следующим образом: компоненты тензора деформации в данной точке являются линейными и однородными функциями компонент тензора напряжений или наоборот.

Математически в тензорной форме его можно записать в виде

$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$ - прямая форма записи,

$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ - обратная форма записи.

Здесь S_{ijkl} - тензор модулей податливости, а C_{ijkl} - тензор модулей упругости.

Как видим, полевые тензоры напряжений и деформаций связаны материальными тензорами четвертого ранга, которые отражают свойства материала, его строение и симметрию. И если не принимать гипотезы однородности материала, мы должны находить компоненту в каждой точке тела. Но и при принятии однородности имеем практически неразрешимую задачу, так как нужно 81 испытание по определению упругих свойств. Поэтому приходится привлекать дополнительную информацию.

Так, из-за симметрии тензоров напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и деформаций $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ возникает симметрия и материального тензора по двум первым и двум последним индексам, т.е.

$$S_{ijkl} = S_{jikl}, \quad S_{ijkl} = S_{ijlk}.$$

В результате этого остаются 36 независимых компонент материального тензора, характеризующих анизатропное упругое тело:

$$\begin{array}{cccccc}
S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\
S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & S_{2223} & S_{2231} \\
S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3312} & S_{3323} & S_{3331} \\
S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1212} & S_{1223} & S_{1231} \\
S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2312} & S_{2323} & S_{2331} \\
S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3112} & S_{3123} & S_{3131}
\end{array}$$

Далее пропорциональность связана с обратимостью процесса упругости, из-за чего возникает еще один тип симметрии – перестановка пар индексов, т.е.

$$S_{ijkl} = S_{klij}.$$

Тогда число независимых компонентов тензора модулей податливости уменьшится до 21, т.к. коэффициенты, симметрично расположенные относительно главной диагонали, равны между собой. Например, наблюдается следующая связь:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33} + 2S_{1112}\sigma_{12} + 2S_{1123}\sigma_{23} + 2S_{1131}\sigma_{31}$$

Здесь линейная деформация зависит как от нормальных, так и от касательных напряжений.

Классический подход в теории упругости не позволяет далее уменьшить число независимых компонентов материального тензора. Правда, академик В. Новожилов, исходя из теории инвариантов, показал, что число неизвестных можно свести к 18. Наши исследования установили, что для металлов количество независимых компонент можно свести к 15. В любом случае такое число констант определить не удается. В связи с этим отходят от классического подхода и смотрят на особенности поведения реальных тел. Так, замечено, что изготавливаемые методами обработки металлов давлением металлические полуфабрикаты – листы, прутки, трубы и т.д. – имеют определенную симметрию механических характеристик, что приводит к дальнейшему уменьшению числа коэффициентов. Рассмотрим основные из них.

1. Три плоскости симметрии (ортотропное тело, ортогональная анизотропия). Такая симметрия характерна для листовых полуфабрикатов и композиционных материалов, когда армирующие волокна расположены в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В этом случае через каждую точку тела проходят три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии свойств. Образно говоря, эта симметрия "спичечного коробка".

Какие упрощения вносит такая симметрия? Оказывается, что при преобразовании компонент материального тензора остаются такие, у которых либо все индексы одинаковы, либо попарно равны. Другими словами, при такой симметрии не может быть компонент типа S_{1112}, S_{2111}, S_{3331} и т.д.

Обобщенный закон Гука запишется следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = 2S_{1212}\sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = S_{2211}\sigma_{11} + S_{2222}\sigma_{22} + S_{2233}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = 2S_{2323}\sigma_{23};$$

$$\varepsilon_{33} = S_{3311}\sigma_{11} + S_{3322}\sigma_{22} + S_{3333}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{31} = 2S_{3131}\sigma_{31}.$$

Таким образом, не только уменьшилось число независимых компонент материального тензора до 9, но и удалось отделить линейные величины от сдвиговых.

Для того чтобы использовать уравнения Гука, в расчетах необходимо компоненты материального тензора выразить через технические показатели. В качестве технических показателей здесь

используются коэффициенты Пуассона ν_{ij} и модули упругости E_i разных направлений. Напомним, что коэффициент Пуассона представляет собой отношение поперечной деформации к деформации вдоль действия сил. Напряженное состояние при испытании образцов для его нахождения – линейное. Например,

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{S_{2211}}{S_{1111}}.$$

Если $\nu_{ij} = 0$, то поперечная деформация отсутствует (древесная пробка). Если $\nu_{ij} = 0{,}5$, то поперечная деформация в упругом теле максимальная (резина). Для стали $\nu_{ij} = 0{,}25 - 0{,}33$, свинца $\nu_{ij} = 0{,}45$, бетона $\nu_{ij} = 0{,}08 - 0{,}18$.

Закон Гука через технические показатели запишется так:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G_{12}};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_{33}; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G_{23}};$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E_3} - \frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_{22}; \quad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G_{31}},$$

где G_{ij} - модули сдвига или модули упругости второго рода.

Напомним, что $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{12}$ и т.д.

Между отдельными показателями при ортотропном теле имеются взаимосвязи:

$$\varepsilon_2\nu_{21} = \nu_{12}\varepsilon_1; \quad \varepsilon_3\nu_{31} = \nu_{13}\varepsilon_1; \quad \varepsilon_3\nu_{32} = \nu_{23}\varepsilon_2;$$

$$\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} = \nu_{32}\nu_{13}\nu_{21}.$$

Для металлов, как показали наши исследования, число определяемых констант можно снизить до 7, так как для них имеются дополнительные соотношения типа

$$\frac{\nu_{21}}{\nu_{12}} = \frac{1-\nu_{31}}{1-\nu_{32}}.$$

2. Плоскость изотропии – трансверсально-изотропное тело. Здесь через каждую точку тела проходит плоскость, в которой все свойства эквивалентны (равнозначны).

Примером трансверсально-изотропного тела является круглый профиль, полученный при прессовании. Механические свойства в поперечном сечении одинаковы, но отличаются в продольном направлении.

Если в качестве плоской изотропии выбрать плоскость 1 – 2, то наблюдается равенство следующих компонент: $S_{1111} = S_{2222}$, так как растяжение в 1-м и 2-м направлениях дает одинаковый результат; $S_{1133} = S_{2233}$ – при растяжении образца, вырезанного в направлении 3, поперечное его сужение в 1-м и 2-м направлениях приводит к одному и тому же результату; $S_{2323} = S_{3131}$ – поворот вокруг оси 3 равнозначен повороту в направлениях 1 и 2.

Кроме того, из-за наличия плоскости изотропии 1 – 2 коэффициент, связанный со сдвигом, может быть заменен и через линейные коэффициенты, т.е.

$$2S_{1212} = S_{1111} - S_{2222}.$$

Уравнения по закону Гука для трансверсально-изотропного тела запишутся следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33}; \qquad \varepsilon_{12} = (S_{1111} - S_{1122})\sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = S_{2211}\sigma_{11} + S_{1111}\sigma_{22} + S_{1133}\sigma_{33}; \qquad \varepsilon_{23} = 2S_{2323}\sigma_{23};$$

$$\varepsilon_{33} = S_{3311}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + S_{3333}\sigma_{33}; \qquad \varepsilon_{31} = 2S_{2323}\sigma_{31}$$

или

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_{33}; \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{E_2}(1-\nu_{12})\sigma_{12};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1}\sigma_{22} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{11} - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_{33}; \qquad \varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G_{23}};$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E_1}[\sigma_{33} - \nu_{13}(\sigma_{22} + \sigma_{11})]; \qquad \varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G_{23}}.$$

Таким образом, число независимых компонент материального тензора уменьшается до пяти. Отметим, что для металлов можно их сократить до трех.

3. Полная симметрия — изотропное тело

Здесь

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333};$$
$$S_{1122} = S_{2233} = S_{3311};$$
$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{1}{2}(S_{1111} - S_{1122}).$$

Тогда

$$\varepsilon_{11} = S_{1111}\sigma_{11} + S_{1122}(\sigma_{22} + \sigma_{33}); \qquad \varepsilon_{12} = (S_{1111} - S_{1122})\sigma_{12};$$
$$\varepsilon_{22} = S_{1111}\sigma_{22} + S_{1122}(\sigma_{33} + \sigma_{11}); \qquad \varepsilon_{23} = (S_{1111} - S_{1122})\sigma_{23}.$$
$$\varepsilon_{33} = S_{1111}\sigma_{33} + S_{1122}(\sigma_{11} + \sigma_{22}); \qquad \varepsilon_{31} = (S_{1111} - S_{1122})\sigma_{31}.$$

Таким образом, независимых компонент только две.

Выпишем закон Гука для изотропной среды, переходя к системе декартовых координат и выражая коэффициенты через технические константы:

$$S_{1111} = \frac{1}{E}; \qquad S_{1122} = -\frac{\mu}{E};$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y - \sigma_z)\right]; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]; \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G};$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]; \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Здесь запись проведена через три показателя — μ, E, G.

Однако независимых, как уже показано, два показателя. Поэтому имеется связь модуля сдвига с модулем упругости:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Полученные уравнения называют физическими уравнениями теории упругости. Интересно отметить, что происходил спор между двумя группами ученых, которые возглавили Коши и Пуассон.

Группа Коши утверждала, что независимых показателей только два. В правильности их суждений вы убедились сами. Группа Пуассона говорила об одной независимой константе. Но тогда коэффициент Пуассона у всех материалов был бы равен 0,25, а это не соответствует действительности.

3.2. Различные формы записи основного закона упругости

Подобно разложению тензоров напряжений и деформаций на шаровой тензор и девиатор, описывающих изменение объема и формы тела, обобщенный закон Гука можно представить в виде двух законов: закона изменения объема и закона изменения формы тела.

Относительное изменение объема тела характеризуется объемной деформацией

$$Q = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_{cp}.$$

Сложим левые и правые части уравнений, отражающие линейные деформации, получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$+$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]$$

$$+$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right)$$

или

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_{cp}.$$

Откуда

$$\sigma_{cp} = \frac{E}{3(1-2\mu)}Q.$$

Введем новую упругую постоянную, описывающую объемный модуль

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}.$$

Тогда

$$\sigma_{cp} = KQ. \qquad (29)$$

Это и есть запись закона упругого изменения объема: среднее напряжение прямо пропорционально объемной деформации в окрестности точки. Опыт показывает, что зависимость (29) справедлива и при высоких значениях σ_{cp}. Поэтому считается, что объемная деформация исчезает при разгрузке.

Для того чтобы вывести закон упругого изменения формы, нужно получить зависимость девиатора деформаций от девиатора напряжений:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_h & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} \end{pmatrix} = f\left\{\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp}\tau_{xy}\tau_{xz} \\ \tau_{yx}\sigma_y - \sigma_{cp}\tau_{yz} \\ \tau_{zx}\tau_{zy}\sigma_z - \sigma_{cp} \end{pmatrix}\right\}.$$

Рассмотрим вначале преобразования с первым компонентом девиатора деформаций:

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{cp} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_z + \frac{2\mu-1}{E}\sigma_{cp}.$$

Добавим и вычтем из этого уравнения выражение $\frac{\mu}{E}\sigma_{cp}$.

Тогда

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{cp} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_x + \frac{2\mu-1}{E}\sigma_{cp} - 3\frac{\mu}{E}\sigma_{cp}$$

или

$$\varepsilon_x - \varepsilon_{cp} = \frac{1+\mu}{E}\left(\sigma_x - \sigma_{cp}\right) = \frac{1}{2G}\left(\sigma_x - \sigma_{cp}\right).$$

Откуда

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2G\left(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}\right).$$

Аналогично можно получить и другие уравнения:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2G(\varepsilon_ч - \varepsilon_{cp}), \qquad \tau_{xy} - 2G\frac{1}{2}\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = 2G(\varepsilon_н - \varepsilon_{cp}), \qquad \tau_{yz} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{yz},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = 2G(\varepsilon_я - \varepsilon_{cp}), \qquad \tau_{zx} = 2G\frac{1}{2}\gamma_{zx}.$$

Окончательно имеем следующую связь девиаторов напряжений и деформаций:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{pmatrix} = 2G\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} \end{pmatrix}.$$

В сокращенном виде

$$D_\sigma = 2GD_\varepsilon.$$

Это и есть запись закона упругого изменения формы тела: девиатор напряжений прямо пропорционален девиатору деформаций в окрестности точки.

Рассмотрим физический смысл модулей упругости.

Если объемный модуль K определяет сопротивление конкретного материала при изменении объема, то модуль сдвига G определяет сопротивление материала при изменении его формы, а модуль упругости E – сопротивление материала при растяжении (сжатии).

Используя закон упругого изменения формы путем вычитания, можно получить следующие уравнения в главных осях:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_2 &= 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ \sigma_2 - \sigma_3 &= 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= 2G(\varepsilon_3 - \varepsilon_1). \end{aligned} \tag{30}$$

Из уравнений (30) следует, что

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}, \quad \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}, \quad \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Запишем интенсивность напряжений в главных осях:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

В этой записи заменим разность напряжений по формулам (30), получим

$$\sigma_i = \frac{2G}{\sqrt{2}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Так как $2G = E/(1+\mu)$, а для изотропного тела $\mu = 0{,}5$, то

$$\sigma_i = E \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.$$

Окончательно

$$\sigma_i = E\varepsilon_i.$$

При упругой деформации интенсивность напряжений прямо пропорциональна интенсивности деформаций.

Аналогично можно получить зависимости интенсивности касательных напряжений T от интенсивности деформаций сдвига:

$$T = G\Gamma,$$

октаэдрических касательных напряжений от октаэдрической угловой деформации:

$$\tau_{окт} = G\gamma_{окт}.$$

Установим связь между направляющими тензорами напряжений и деформаций в главных осях:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma_1 - \sigma_{ср}}{\tau_{окт}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma_2 - \sigma_{окт}}{\tau_{окт}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sigma_3 - \sigma_{ср}}{\tau_{окт}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_{ср})}{G\gamma_{окт}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_{ср})}{G\gamma_{окт}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2G(\varepsilon_3 - \varepsilon_{ср})}{G\gamma_{окт}} \end{pmatrix}.$$

Откуда направляющий тензор напряжений равен направляющему тензору деформаций, т.е.

$$\overline{D}_\sigma = \overline{D}_\varepsilon.$$

Найдем уравнения обобщенного закона Гука в обратной форме, когда напряжения выражены через деформации. Возьмем первое уравнение закона Гука в прямой форме и опять вычтем и прибавим выражение $\mu\sigma_x / E$. Получим

$$\varepsilon_x = \frac{1+\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right).$$

Так как

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{E}{1-2\mu}Q,$$

то $$\varepsilon_x = \frac{1+\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{1-2\mu}Q.$$

Полученное уравнение решим относительно напряжения σ_x:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x + \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}Q.$$

Полученные коэффициенты при ε_x и Q принимаем за новые упругие постоянные – коэффициенты Ляме:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)}, \quad 2\lambda = 2G = \frac{E}{1+\mu}.$$

Аналогично можно получить зависимости и для других составляющих напряжения. Окончательно шесть уравнений закона Гука в обратной форме можно записать так:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda Q + 2G\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda Q + 2G\varepsilon_y, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda Q + 2G\varepsilon_z, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned} \tag{31}$$

В тензорной записи

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, обобщенный закон Гука может быть представлен в различных формах записи: в виде прямого и обратного выражения, в виде законов изменения объема и формы тела.

Задача 16. Определить относительные линейные и угловые деформации, если в исследуемой точке задан тензор напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 40 & 0 & -16 \\ 0 & -40 & 12 \\ -16 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

и другие константы: $E = 2\cdot 10^5$ МПа, $G = 7{,}7\cdot 10^4$ МПа.

Решение. Для нахождения компонент деформаций используем уравнения закона Гука в прямой форме. Коэффициент Пуассона найдем из формулы

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

откуда

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot 7{,}7 \cdot 10^5} - 1 = 0{,}3.$$

Линейная деформация

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5}[40 - 0{,}3(-40 + 20)] = 2{,}3 \cdot 10^{-4}.$$

Аналогично находятся и другие компоненты деформаций.

Задача 17. Стальная деталь нагружена и замерены следующие упругие деформации:

$$\varepsilon_x = 0{,}001, \varepsilon_y = 0{,}002,\ \varepsilon_z = 0{,}003,\ \gamma_{xy} = 0{,}0015,\ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Найти напряженное состояние детали, если $E = 2{,}1\,\text{МПа}$, $\mu = 0{,}33$.

Решение. Для нахождения компонент тензора напряжений используем запись закона Гука в обратной форме (31). Вначале находим коэффициенты Ляме:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} = \frac{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 0{,}33}{(1 - 2 \cdot 0{,}33)(1 + 0{,}33)} = 1{,}53 \cdot 10^5,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2{,}\cdot 10^5}{2(1+0{,}33)} = 7{,}9 \cdot 10^4.$$

Объемная деформация

$$Q = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0{,}001 + 0{,}002 + 0{,}003 = 0{,}006.$$

Компоненты напряжения

$$\sigma_x = \lambda Q + 2G\varepsilon_x = 1{,}53 \cdot 10^5 0{,}006 + 2 \cdot 7{,}9 \cdot 10^4 \cdot 0{,}001 = 1080\,\text{МПа},$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 7{,}9 \cdot 10^4 \cdot 0{,}0015 = 120\,\text{МПа}.$$

Аналогично находятся и другие компоненты тензора напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 1080 & 120 & 0 \\ 120 & 1250 & 0 \\ 0 & 0 & 1400 \end{pmatrix}.$$

3.3. Удельная потенциальная энергия

В процессе упругой деформации тела внешние силы совершают работу, которая накапливается в деформированном объеме в виде потенциальной энергии. После прекращения действия внешних сил потенциальная энергия полностью расходуется на упругое восстановление первоначального объема и формы тела. Следовательно, при упругой деформации работа внешних сил равна работе внутренних сил, или потенциальной энергии.

При одноосном растяжении удельная работа упругой деформации, отнесенная к единице объема, определяется площадью, заштрихованной на рис. 44, а.

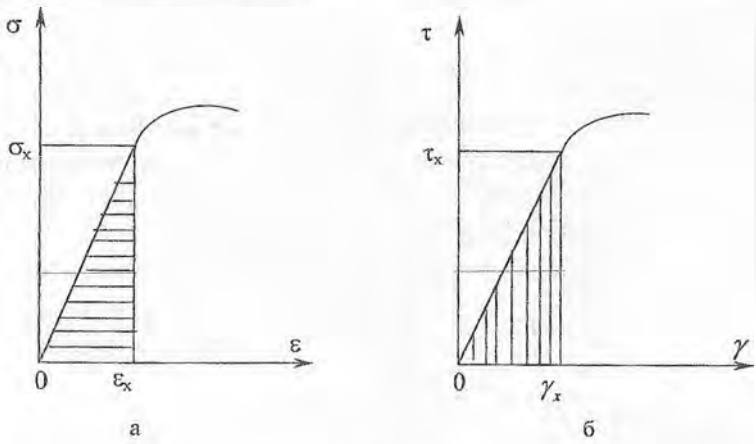


Рис. 44

Откуда

$$A = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x .$$

Аналогично удельная работа при чистом сдвиге (рис. 44, б).

$$A = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} .$$

Используя принцип независимости действия сил при упругой деформации (принцип суперпозиции сил), полная удельная работа для элементарного параллелепипеда, расположенного в окрестности

исследуемой точки, равна половине скалярного произведения составляющих компонент тензоров напряжений и деформаций:

$$A = W = 0{,}5(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}).$$

В сокращенной форме записи

$$W = \frac{1}{2} T_\sigma T_\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

или, если развернуть, то

$$W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Подобно разложению тензора второго ранга на шаровой тензор и девиатор потенциальную энергию W упругой деформации тела можно представить в виде суммы потенциальной энергии изменения объема W_0 и изменения формы W_ϕ, т.е.

$$W = W_0 + W_\phi .$$

Эти составляющие можно записать так:

$$W_0 = \frac{1}{2} T_\sigma^0 T_\varepsilon^0,$$

$$W_\phi = \frac{1}{2} D_\sigma D_\varepsilon .$$

Эти равенства могут быть записаны тоже в развернутой форме. Энергию, соответствующую изменению формы, находим вычитанием:

$$W_\phi = W - W_0 . \qquad (32)$$

Удельная потенциальная энергия в главных осях

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \qquad (33)$$

Подставим в (33) вместо деформаций их значения из обобщенного закона Гука в прямой форме. Получим

$$W = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right].$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема в главных осях

$$W_0 = \frac{1}{2}\sigma_\phi Q = \frac{1}{6}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

В этом уравнении также деформации заменим их значениями из обобщенного закона Гука в прямой форме. Имеем

$$W_0 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Подставим найденные значения W_ϕ, W_0 в (32). Получим

$$W_\phi = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right].$$

3.4. Постановка задач в теории упругости и способы их решения

При постановке статистических задач для упругой изотропной среды имеем следующую замкнутую систему 15 уравнений, полученных ранее. Их можно свести в отдельные группы.

Три статистических уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0. \tag{34}$$

Шесть кинематических (геометрических) уравнений связи деформаций с перемещениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right). \tag{35}$$

Сюда относят и шесть уравнений совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{in}}{\partial x_j \partial x_m} + \frac{\partial_2 \varepsilon_{jm}}{\partial x_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jn}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial x_j \partial x_n} = 0. \tag{36}$$

Шесть физических уравнений

$$\sigma_{ij} = \lambda Q \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}. \qquad (37)$$

Граничные условия на поверхности тела

$$S_i = \sigma_{ij} n_j. \qquad (38)$$

Эти уравнения содержат 15 переменных, характеризующих напряженно-деформированное состояние упругого изотропного тела и перемещения его точек: шесть напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, шесть деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ и, наконец, три перемещения U_x, U_y, U_z.

Решения указанной выше системы уравнений должны выполняться всюду внутри объема тела. Кроме того, на поверхности, ограничивающей тело, должны быть удовлетворены и граничные условия. Они могут быть либо статическими (поверхностные напряжения в каждой точке поверхности тела (рис. 45, а), либо кинематическими (перемещения каждой точки поверхности тела (рис. 45, б), либо смешанными (на части поверхности тела задаются перемещения, а на остальной части поверхности – напряжения (рис. 45, в).

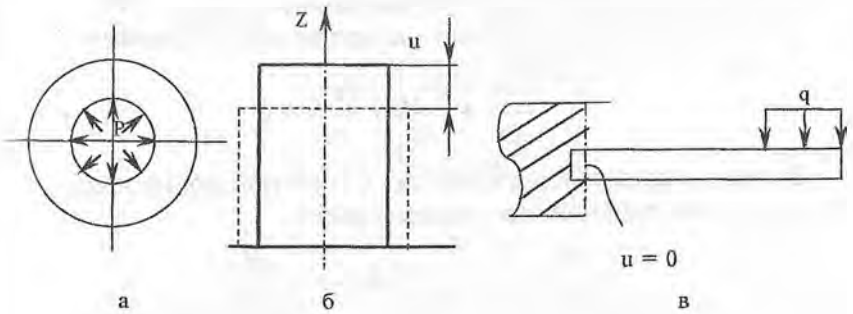


Рис. 45

Условия на поверхности тела могут быть сведены к трем случаям:

1) на поверхности тела заданы нагрузки и не наложено ограничений на перемещения; этот случай называется первой основной задачей теории упругости;

2) на поверхности тела заданы перемещения всех точек поверхности; этот случай называется второй основной задачей теории упругости;

3) на одной части поверхности тела заданы нагрузки, а на другой – перемещения; это – смешанная задача упругости.

При решении статических задач также задаются упругие константы материала: E, μ, G.

Различают прямую, обратную и полуобратную задачи теории упругости. В прямой задаче граничные условия заданы, а требуется определить поле напряжений, деформаций и перемещений во всем объеме деформируемого тела. В обратной задаче в объеме тела заданы перемещения (деформации) или напряжения и требуется определить все остальные перемещения, входящие в систему основных уравнений теории упругости, в том числе и граничные условия. В полуобратной задаче, предложенной Сен-Венаном, частично заданы одновременно перемещения и напряжения, а требуется определить все остальные перемещения. На практике чаще всего встречаются с прямой задачей теории упругости. Известны два основных пути ее решения: в перемещениях и в напряжениях.

При решении задач теории упругости в перемещениях в качестве основных неизвестных переменных принимаются три перемещения: U_x, U_y, U_z. Для их нахождения используются три уравнения равновесия, записанные через перемещения.

Рассмотрим первое выражение из уравнений равновесия (34):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0. \qquad (39)$$

Вначале в уравнения закона Гука в обратной форме подставим выражения деформаций через перемещения:

$$\sigma_x = \lambda Q + 2G\varepsilon_x = \lambda Q + 2G\frac{\partial U_x}{\partial x},$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}\right).$$

После подстановки полученных выражений компонент напряжений в уравнение (39) получим

$$\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}+2G\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+G\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_y}{\partial x\partial y}\right)+G\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U_z}{\partial x\partial z}\right)=0$$

или

$$\lambda\frac{\partial Q}{\partial x}+G\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}\right)+G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}+\frac{\partial U_z}{\partial z}\right)=0.$$

Выражение в первой скобке обозначим через $\Delta^2 U_x$:

$$\nabla^2 U_x=\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2},$$

где ∇^2 - оператор Лапласа. Сумма во второй скобке является объемной деформацией. Тогда

$$(\lambda+G)\frac{\partial Q}{\partial x}+G\nabla^2 U_x=0.$$

Аналогично преобразовав и два других уравнения равновесия (34) и сделав указанные замены, окончательно получим систему, называемую уравнениями Ляме:

$$(\lambda+G)\frac{\partial Q}{\partial x}+G\nabla^2 U_x=0,$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial Q}{\partial z}+G\nabla^2 U_y=0,$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial Q}{\partial z}+G\nabla^2 U_z=0.$$

Эти уравнения можно рассматривать как синтез уравнений статического равновесия (34), геометрических (35) и физических (37) уравнений.

При решении задач теории упругости в перемещениях интегрируется система уравнений Ляме, причем появляющиеся при этом произвольные функции определяются легче всего из кинематических граничных условий на поверхности тела. Далее по

геометрическим уравнениям связи деформаций с перемещениями находятся компоненты тензора деформаций, а с помощью уравнений обобщенного закона Гука, заданного в обратной форме, и компоненты тензора напряжений. В этом методе решения уравнения совместимости деформаций использовать нет необходимости, так как они выполняются автоматически.

При решении задач теории упругости в напряжениях в качестве основных неизвестных переменных принимают шесть напряжений: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \sigma_{zx}$. Для их нахождения прежде всего устанавливим некоторые положения. Продифференцируем уравнения Ляме по соответствующей координате и сложим их между собой:

$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + G\nabla^2 \frac{\partial U_x}{\partial x} = 0,$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + G\nabla^2 \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0,$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + G\nabla^2 \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0,$$

$$(\lambda + G)\nabla^2 Q + G\nabla^2 Q = 0$$

или

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 Q = 0.$$

Так как первый множитель не равен нулю, то, следовательно

$$\nabla^2 Q = 0.$$

Так как по закону Гука величины Q и σ_{cp} пропорциональны, то

$$\nabla^2 \sigma_{cp} = 0$$

или

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0.$$

Для отыскания шести напряжений σ_{ij} трех уравнений равновесия недостаточно. Поэтому к ним добавляют шесть уравнений совместимости деформаций Сен-Венана (36), выраженные через напряжения.

Рассмотрим первое уравнение из (36):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Подставим в него выражения деформаций из уравнений закона Гука в прямой форме

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}.$$

Получим

$$\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z\right) + \frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu\sigma_z - \mu\sigma_x\right) = \frac{2(1+\mu)}{E}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

или

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x_2} - \mu\left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2}\right) - 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (40)$$

Теперь исключим из полученного равенства касательное напряжение τ_{xy}.

С этой целью возьмем уравнения равновесия (34) и продифференцируем их соответственно по координатам x, y, z:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{xz}}{\partial x\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{yx}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{yz}}{\partial y\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\tau_{zy}}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}=0.$$

Складывая 2 первых равенства и вычитая из суммы третье, решаем полученное уравнение относительно $\partial^2\tau_{xy}/(\partial x\partial y)$:

$$-2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}.$$

Подставим это выражение в уравнение (40). После преобразования получим

$$\nabla^2\sigma_x+\nabla^2\sigma_y-\mu\nabla^2\sigma_z-\frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial z^2}=0.$$

Прибавим и вычтем $\nabla^2\sigma_z$:

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)-(1+\mu)\nabla^2\sigma_z-\frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial z^2}=0.$$

Уже доказано, что

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=\nabla^2\sigma_{cp}=0.$$

Окончательно получаем

$$(1+\mu)\nabla^2\sigma_z+\frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial z^2}=0.$$

Остальные пять уравнений, содержащих только напряжения, выводят аналогично:

$$(1+\mu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial x^2} = 0, \quad (1+\mu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial x\partial y} = 0,$$

$$(1+\mu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial y^2} = 0, \quad (1+\mu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial y\partial z} = 0,$$

$$(1+\mu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial z^2} = 0, \quad (1+\mu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2\sigma_{cp}}{\partial z\partial x} = 0.$$

Эти соотношения называются уравнениями Бельтрами-Митчела.

При решении задач теории упругости в напряжениях интегрируются три уравнения равновесия и шесть уравнений Бельтрами–Митчела. Произвольные функции определяются из граничных условий. В результате решения получают искомые функции компонент напряжений. Далее по формулам закона Гука в прямой форме находят компоненты деформаций, а по формулам Коши - перемещения.

3.5. Частные случаи объемного напряженного состояния

При объемном напряженном состоянии определение поля напряжений или деформаций часто оказывается сложным. Это вынуждает вводить во многих практических задачах ряд допущений относительно распределения напряжений или деформаций, т. е. переходить от объемного напряженного состояния к частным случаям.

Частными случаями объемного напряженного состояния, весьма часто встречающимися при обработке металлов давлением, являются плоское напряженное, плоское деформированное и осесимметричное напряженное состояния.

Плоское напряженное состояние реализуется приближенно для тонкой пластины, у которой один основной размер значительно меньше, чем другие (рис. 46). По контуру пластины действуют силы, распределенные равномерно по ее толщине и параллельные плоскости пластины. В этом случае компоненты напряжений, содержащие индексы $y, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}$, равны нулю на обеих плоских поверхностях пластины и можно предположить, что они отсутствуют по всей толщине пластины. Изменение толщины пластины не имеет значения, и толщина ее может быть принята за единицу. Три другие компоненты

напряжений $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ будут постоянными по всей толщине пластины.

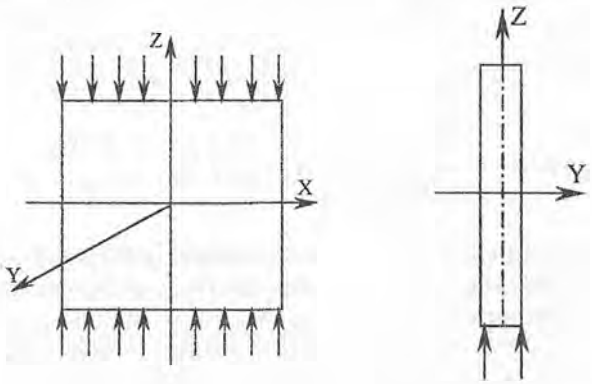


Рис. 46. Схема плоского напряженного состояния

Тензор напряжений имеет вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Деформации происходят в пластине по всем трем осям и описываются тензором деформации

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Из записи тензоров следует, что ось у является главной: напряжение $\sigma_y = 0$ - одним из главных напряжений; ε_y - главная деформация.

Величину других главных напряжений можно найти из решения определителя

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\sigma + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 = 0.$$

Откуда при $\sigma_2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия упрощаются:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.$$

Зависимости деформаций от перемещений следующие:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x};\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z};\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}.$$

Из шести условий неразрывности деформаций остается только одно, первое:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}.$$

Остальные обращаются тождественно в нуль.

Физические уравнения при упругой деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_z);\quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x);$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_x);\quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}.$$

Условия на поверхности контура пластины:

$$S_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y;$$

$$S_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y.$$

Эти уравнения содержат восемь переменных

$$\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}, \varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}, U_x, n_z.$$

Плоское напряженное состояние в процессах обработки металлов давлением может быть, например, во фланце при вытяжке цилиндрической заготовки из листового материала, при волочении и обжиме тонкостенных труб.

Плоское деформированное состояние приближенно реализуется для тела, у которого один основной размер значительно больше, чем другие (рис. 47). В этом случае деформация в направлении оси, параллельной большему размеру, будет мала и ею можно пренебречь. В процессах обработки металлов давлением примерами плоского деформированного состояния являются прокатка широких тонких листов, когда ширина листа остается постоянной (прокатка без уширения), брус, подвергающийся осадке в направлении толщины. В этих примерах перемещения всех точек тела параллельны одной и той же плоскости.

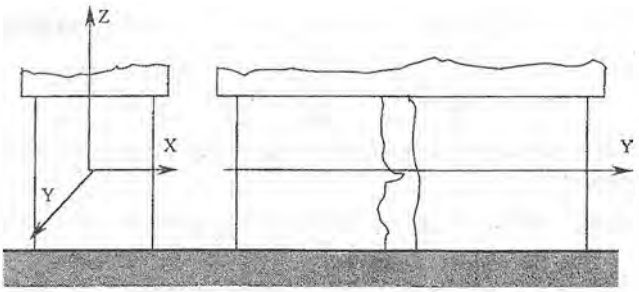


Рис. 47. Схема плоского деформированного состояния

Из определения плоской деформации $\varepsilon_y = \gamma_{yz} = \gamma_x = 0$. Тогда тензор деформаций имеет вид

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Напряженное состояние описывается тензором напряжений, состоящим из четырех компонентов:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Уравнения равновесия и геометрические уравнения записываются, как при плоском напряженном состоянии.

Физические уравнения при плоской упругой деформации описываются законом Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]; \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right];$$

$$0 = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right].$$

Из последнего уравнения при $\mu = 0{,}5$; $\sigma_z = 0{,}5(\sigma_x + \sigma_y)$.

Таким образом, плоское напряженное и плоское деформированное состояния характеризуются следующими особенностями:

- все компоненты напряжений не зависят от одной из координат, общей для всех компонентов, и остаются постоянными при ее изменении;
- в плоскостях, нормальных к оси этой координаты, компоненты касательных напряжений равны нулю, а нормальное напряжение равно нулю при плоском напряженном состоянии или равно полусумме двух других нормальных напряжений при плоском деформированном состоянии.

Из рассмотрения плоского напряженного и плоского деформированного состояний видно, что несмотря на ряд общих формул для описания обоих состояний, они значительно отличаются друг от друга. При плоском напряженном состоянии в направлении главной оси нормальное напряжение равно нулю, но обязательно есть главная деформация. При плоском деформированном состоянии,

наоборот, деформация равна нулю, а обязательно существует нормальное напряжение, перпендикулярное к плоскости деформации.

Осесимметричное напряженное состояние реализуется для тела вращения, к поверхности которого приложены распределенные нагрузки, расположенные симметрично относительно его оси и одинаковые во всех меридиональных сечениях (рис. 48).

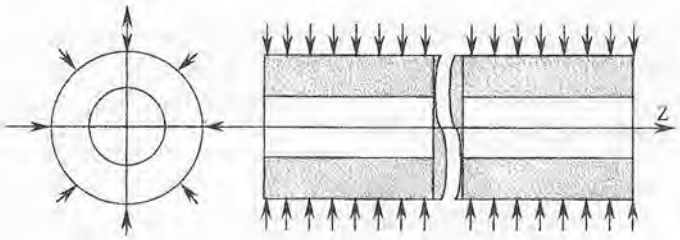


Рис. 48. Схема осесимметричного напряженного состояния

При рассмотрении процессов обработки металлов давлением, таких как осадка цилиндрической заготовки, прессование и волочение прутков и труб, а также деформация круглой толстостенной трубы, находящейся под равномерным наружным или внутренним давлением, от объемного напряженного состояния можно перейти к осесимметричному.

При анализе осесимметричного напряженного состояния удобнее пользоваться цилиндрическими координатами вместо декартовых.

Вследствие симметрии тела и симметрии внешних сил направления всех радиусов равноправны. Следовательно, составляющие напряжений не зависят от угла Q, а касательные напряжения и угловые деформации, содержащие индекс Q, будут равны нулю. Напряжение σ_Q - главное напряжение, ε_Q - главная деформация.

Тензоры напряжений и деформаций имеют вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_Q & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\rho & \tau_{pz} \\ 0 & \tau_{\rho z} & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_Q & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\rho & \frac{1}{2}\gamma_{\rho z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\rho z} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Из трех уравнений равновесия в цилиндрических координатах остаются только два:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial \rho}+\frac{\partial \tau_{pz}}{\partial z}+\frac{\sigma_p-\sigma_Q}{\rho}=0; \quad \frac{\partial \tau_{zp}}{\partial \rho}+\frac{\partial \sigma_z}{\rho}=0.$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_p=\frac{\partial U_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_z=\frac{\partial U_z}{\partial z}; \quad \varepsilon_Q=\frac{U_\rho}{\rho}; \quad \gamma_{\rho z}=\frac{\partial U_\rho}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial \rho}.$$

Физические уравнения:

$$\varepsilon_p=\frac{1}{E}\left[\sigma_\rho-\mu\left(\sigma_Q+\sigma_z\right)\right]; \quad \varepsilon_Q=\frac{1}{E}\left[\sigma_Q-\mu\left(\sigma_\rho+\sigma_z\right)\right];$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu\left(\sigma_\rho+\sigma_Q\right)\right]; \quad \gamma_{\rho z}=\frac{1}{G}\tau_{\rho z}.$$

При решении плоской задачи в напряжениях вместо определения трех функций $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ достаточно определить одну так называемую функцию напряжений $\varphi(x,z)$, посредством которой дифференцированием определяют все искомые функции.

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad \sigma_z=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xz}=-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}. \qquad (41)$$

Функция $\varphi(x,z)$ называется функцией напряжений Эри, а распределение напряжений (41) удовлетворяет уравнениям равновесия (34), обращая их в тождества. Условие совместимости (36) превращается в бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial z^2}+\frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4}=0$$

или

$$\nabla^4 \varphi=0,$$

к решению которого и сводится плоская задача теории упругости в напряжениях.

В случае решения задачи в полярных координатах компоненты напряжений и условие совместимости можно представить в виде выражений

$$\sigma_p = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \varphi}{\partial Q^2}, \quad \sigma_Q = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{pQ} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial Q}\right),$$

$$\Delta^2\left(\Delta^2 \varphi\right) = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial Q}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Если напряжения распределены симметрично относительно оси, то $\varphi = \varphi(p)$ имеет вид полинома

$$\varphi = A \ln \rho + B p^2 \ln \rho + C p^2 + D,$$

где A, B, C, D – постоянные, определяемые из заданных граничных условий на контуре.

Исходя из этого, можно найти напряжения в толстостенных цилиндрах с радиусами r_1 и r_2 при наличии внутреннего p_1 и внешнего p_2 давлений:

$$\left.\begin{matrix} \sigma_Q \\ \sigma_\rho \end{matrix}\right\} = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \pm \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{\left(r_2^2 - r_1^2\right) p^2}.$$

Задача 18. Толстостенная достаточно длинная труба из однородного материала находится одновременно под действием равномерного внутреннего и наружного давлений в упругом состоянии. Определить напряженно-деформированное состояние трубы.

Решение. Используем цилиндрическую систему координат. Направим координатные линии ρ, Q, z, соответственно по радиусу трубы, в окружном направлении и вдоль оси трубы (рис. 49).

Так как напряженно-деформированное состояние трубы является осесимметричным, то $\tau_{pQ} = \tau_{Qz} = 0$, $\gamma_{pQ} = \gamma Qz = 0$. Так как труба достаточно длинная, то можно принять схему плоского де-

формированного состояния, т. е. $\varepsilon_z = 0$. Тогда $\tau_{zp} = 0$, $\gamma_{zp} = 0$. Из трех компонент вектора перемещения U_p, U_Q, U_z две $U_Q = U_z = 0$, а U_p зависит только от координаты p, т. е. материальные точки трубы перемещаются в радиальных направлениях.

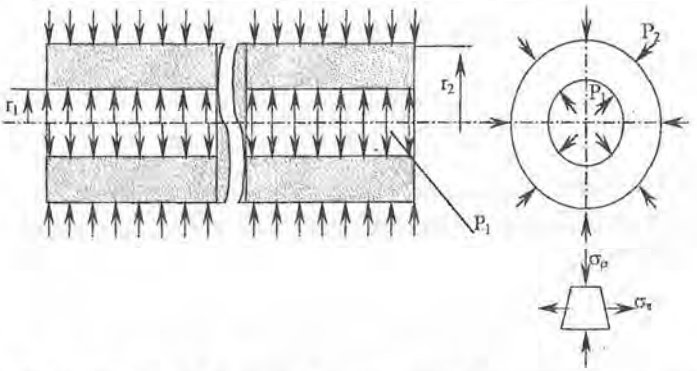


Рис. 49. Труба под действием внутреннего и наружного давлений

Система уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние толстостенной трубы, состоит из одного уравнения статического равновесия

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial \rho} + \frac{\sigma_p - \sigma_Q}{\rho} = 0, \tag{42}$$

соотношений между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_p = \frac{\partial U_p}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_Q = \frac{U_p}{\rho}, \tag{43}$$

физических уравнений, связывающих напряжения с деформациями:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \lambda Q + 2G\varepsilon_p, \\ \sigma_Q &= \lambda Q + 2G\varepsilon_Q, \\ \sigma_z &= \lambda Q, \end{aligned} \tag{44}$$

где Q - объемная относительная деформация, $Q = \varepsilon_\rho + \varepsilon_Q$.

Таким образом, имеем пять уравнений (42)-(44) с пятью независимыми переменными U_p, ε_p, ε_Q, σ_p, σ_Q. Поставленная задача статически определима.

Решим задачу в перемещениях. Подставим в физические уравнения (44) вместо деформаций перемещения по формулам (43):

$$\sigma_\rho = (\lambda + 2G)\frac{\partial U_p}{\partial p} + \lambda\frac{U_p}{p},$$

$$\sigma_Q = (\lambda + 2G)\frac{U_\rho}{\rho} + \lambda\frac{\partial U_p}{\partial p}.$$

Полученные выражения напряжений подставим в уравнение равновесия (42). Получим дифференциальное уравнение Ляме в перемещениях:

$$\frac{\partial^2 U_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_\rho}{\rho} - \frac{U_\rho}{\rho^2} = 0,$$

решение которого имеет вид

$$U_\rho = C_1 p + \frac{C_2}{\rho}.$$

Тогда

$$\varepsilon_p = C_1 - \frac{C_2}{\rho^2},$$

$$\varepsilon_Q = C_1 + \frac{C_2}{\rho^2},$$

$$\sigma_p = 2G\left(C_1 - \frac{C_2}{\rho^2}\right) + 2\lambda C_1, \qquad (45)$$

$$\sigma_Q = 2G\left(C_1 + \frac{C_2}{\rho^2}\right) + 2\lambda C_1.$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из граничных условий.

На внутренней поверхности трубы $(\rho = r_1)$ $\sigma_p = -P_1$.

На наружной поверхности $(\rho = r_2)$ $\sigma_p = -P_2$. Подставим эти значения P и σ_p в третью формулу (45):

$$-P_1 = 2G\left(C_1 - \frac{C_2}{r_1^2}\right) + 2\lambda C_1,$$

$$-P_2 = 2G\left(C_1 - \frac{C_2}{r_2^2}\right) + 2\lambda C_1.$$

Решая эту систему двух уравнений относительно C_1 и C_2, найдем

$$C_1 = \frac{1}{2(G+\lambda)} \frac{P_1 r_1 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

$$C_2 = \frac{1}{2G} \frac{r_1^2 r_2^2 (P_1 - P_2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Подставим эти выражения в (45). Получим окончательно

$$\sigma_p = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{P_1 - P_2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{r_1^2 r_2^2}{p^2},$$

$$\sigma_Q = \frac{P_1 r_1^2 - P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{P_1 - P_2}{r_2^2 - r_1^2} \frac{r_1^2 r_2^2}{p^2}. \qquad (46)$$

Зная C_1 и C_2, можно найти и перемещение $U_p = C_1\rho + \frac{C_2}{\rho}$ и осевое напряжение $\sigma_z = \lambda Q = \lambda(\varepsilon_p + \varepsilon_Q)2C_1\lambda$, которое постоянно во всех точках трубы.

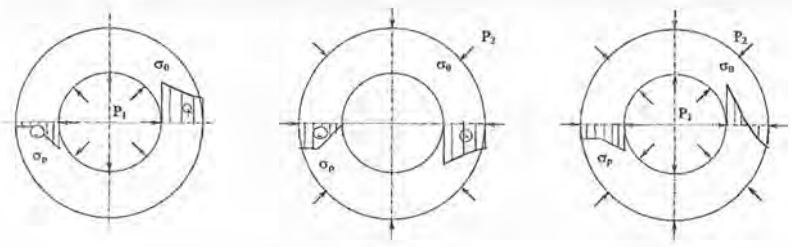
Теперь рассмотрим три случая.

1. Труба нагружена внутренним давлением. В этом случае $P_2 = 0$. Формулы (46) принимают вид

$$\sigma_p = \frac{P_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{\rho^2}\right),$$

$$\sigma_Q = \frac{P_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{\rho^2}\right).$$

На рис. 50, а показаны эпюры распределения радиального и окружного напряжений по толщине стенки трубы при нагружении внутренним давлением.



а б в

Рис. 50. Распределение радиальных σ_p и окружных σ_Q напряжений по сечению трубы

Окружное напряжение является растягивающим, а радиальное - сжимающим. У внутренней поверхности σ_Q достигает наибольшего значения

$$\sigma_{Q(\rho=r_1)} = P_1 \frac{r_2^2 + r_1 2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Радиальное напряжение при этом равно - P_1.

2. Труба нагружена только наружным давлением. В этом случае $P_1 = 0$. Выражения (46) принимают такой вид:

$$\sigma_p = -\frac{P_2 r_2^2}{r_2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_1^2}{\rho^2}\right),$$

$$\sigma_Q = -\frac{P_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{\rho^2}\right).$$

Эпюры напряжений по толщине стенки трубы для этого случая нагружения представлены на рис. 50, б. Окружное и радиальное напряжения – сжимающие напряжения.

3. Труба нагружена одновременно наружным и внутренним давлением. Соотношение между внутренним и наружным давлениями полагаем таким, что внутренний и наружный радиусы трубы увеличиваются. Эпюры напряжений для этого случая нагружения приведены на рис. 50, в. Окружные напряжения около внутренней поверхности – растягивающие, около наружной поверхности – сжимающие.

Рассмотренную выше задачу называют задачей Ляме - по имени французского ученого, работавшего в 20-х годах 19 века в Петербургской академии наук. Эта задача широко используется также при расчете толстостенных сосудов для удержания высокого давления, контейнеров для прессования профилей.

Задача 19. Игла для прессования труб представляет собой цилиндрическое тело с диаметром, равным внутреннему диаметру готовой трубы. При эксплуатации она подвергается одновременному действию двух внешних нагрузок: сжимающего радиального давления σ металла заготовки на ее поверхность и сил трения τ. Найти напряженно – деформированное состояние цилиндрической иглы в упругой области.

Решение. Как и в предыдущей задаче, используем цилиндрическую систему координат. Так как игла является телом вращения, то распределение компонент напряжений в любой точке иглы не зависит от координаты Q. Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial p} + \frac{\partial \tau_{pz}}{\partial z} + \frac{\sigma_p - \sigma_Q}{\rho} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zp}}{\partial p} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{pz}}{\rho} = 0.$$

Решим задачу в напряжениях, используя функцию напряжений Эри, разложение граничных условий на поверхности иглы в ряды Фурье и принцип суперпозиции.

Компоненты напряжений, выраженные через функцию напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_p &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}\right),\\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],\\
\sigma_Q &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right),\\
\tau_{\rho z} &= \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\mu)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right].
\end{aligned} \qquad (47)$$

Функция напряжений должна удовлетворять уравнениям (34) и условию совместимости деформаций

$$\nabla^2\left(\nabla^2\varphi\right) = 0,$$

где оператор Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z}.$$

Таким образом, задача осесимметричной деформации цилиндрической иглы сводится к нахождению бигармонического уравнения, удовлетворяющего граничным условиям.

Функцию напряжений $\varphi_{(p,z)}$ возьмем в виде

$$\varphi_{(p,z)} = \sin(kz)\left[a_0 I_0(ikp) + a_1 ikp I_1(ikp)\right], \qquad (48)$$

где $k = \pi n / l$, l – длина иглы, n – число членов ряда.

Подставляя (48) в (47), получим выражение для компонент напряжений

$$\sigma_p = -\cos(kz)[a_0 F_1(p) + a_1 F_2(\rho)],$$
$$\sigma_Q = -\cos(kz)[a_0 F_3(p) + a_1 F_4(\rho)],$$
$$\sigma_z = -\cos(kz)[a_0 F_5(p) + a_1 F_6(\rho)], \qquad (49)$$
$$\tau_{pz} = -\sin(kz)[a_0 F_7(p) + a_1 F_8(\rho)],$$

где $F_1(\rho),...,F_8(\rho)$ – вполне определяемые функции от радиуса p, выраженные через функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядка:

$$F_1(\rho) = k^3\left(I_0 - \frac{I_1}{kp}\right); \quad F_2(\rho) = -k^3[I_0(1-2\mu) + kp];$$
$$F_3(\rho) = k^3\frac{I_1}{kp}; \qquad F_4(\rho) = -k^3 I_0(1-2\mu);$$
$$F_5(\rho) = -k^3 I_1; \qquad F_6(\rho) = k^3[k\rho I_1 + p(2-\mu)I_0];$$
$$F_7(\rho) = -k^3 I_1; \qquad F_8(\rho) = k^3[k\rho I_0 + 2(1-\mu)I_1].$$

Путем соответствующего подбора постоянных a_0, a_1, n можно исследовать различные симметричные относительно оси цилиндрической иглы нагрузки, действующие на боковой поверхности $(p = R_0)$, где R_0 - наружный радиус иглы. Например, если касательное напряжение на поверхности иглы от действия сил трения постоянно по длине иглы, а радиальное давление σ отсутствует, то раскладывая граничные условия в ряд Фурье по синусам, получим два уравнения для определения постоянных a_0 и a_1:

$$a_0 F_1(R_0) + a_1 F_2(R_0) = 0,$$

$$a_0 F_7(R_0)\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right) + a_1 F_8(R_0)\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right) = -\frac{4\tau}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{l}z\right)}{n},$$

где $n = 1,3,5,...,2m+1$.

Аналогично можно получить упругое решение при действии на иглу и радиальных давлений σ.

Таким образом, комбинируя решения и используя принцип суперпозиции, мы можем получить любое симметричное относительно оси иглы распределение компонент напряжений:

$$\sigma_p^{\Sigma} = \sum^{n} \sigma_p^{\tau} + \sum^{n} \sigma_p^{\sigma}, \quad \sigma_Q^{\Sigma} = \sum^{n} \sigma_Q^{\tau} + \sum^{n} \sigma_Q^{\sigma},$$

$$\sigma_z^{\Sigma} = \sum^{n} \sigma_z^{\tau} + \sum^{n} \sigma_z^{\sigma}, \quad \tau_{pz}^{\Sigma} = \sum^{n} \tau_{pz}^{\tau} + \sum^{n} \tau_{pz}^{\sigma}.$$

3.6. Выводы

Цель теории упругости – определить поле перемещений, деформаций и напряжений при любых нагрузках на границе тела любой формы. Для решения поставленной задачи теория упругости располагает тремя статическими уравнениями равновесия, шестью геометрическими уравнениями, связывающими деформации с перемещениями и шестью физическими уравнениями, определяющими зависимость между напряжениями и деформациями, справедливыми для каждой точки внутри упругого тела. Приведённые уравнения составляют замкнутую систему 15 уравнений с 15 переменными, полностью описывающими напряжённо – деформированное состояние тела. Решение приведённой системы уравнений должно выполняться для любой точки внутри тела и соответствовать конкретным заданным граничным условиям.

Основным законом теории упругости является обобщённый закон Гука, связывающий деформации с напряжениями $\varepsilon_{ij} = S_{ijlm}\sigma_{lm}$ и, наоборот, напряжения с деформациями $\sigma_{ij} = C_{ijlm}\varepsilon_{lm}$. Закон может быть представлен в виде прямого и обратного выражений и в виде законов упругого изменения объёма и формы.

В теории упругости различают прямую и обратную задачи. В прямой задаче заданы размеры и форма тела, материал, граничные условия. Искомыми являются 15 переменных, описывающих процесс упругой деформации. В обратной задаче, кроме размеров, формы тела и

материала, задана часть переменных, например, компоненты деформаций. Искомыми являются все остальные переменные, в том числе и граничные условия. Для инженера наибольший интерес представляет прямая задача, несмотря на то что она сложнее обратной.

Известны два основных пути решения прямой задачи. Первый путь состоит в использовании системы уравнений, выраженных через напряжения. В эту систему входят три уравнения равновесия и шесть уравнений совместности деформаций, выраженных через напряжения. Такой путь решения, поскольку в нём в первую очередь находятся напряжения, называется решением задачи теории упругости в напряжениях. Второй путь решения прямой задачи состоит в том, что в качестве неизвестных функций принимаются проекции векторов перемещений. Для их нахождения применяют уравнения равновесия, выраженные через перемещения. Отсюда произошло название пути решения – решение задачи теории упругости в перемещениях.

При решении задач теории упругости для трёхмерных тел встречаются большие математические трудности. Это обстоятельство заставляет переходить от объёмного напряжённого состояния к частным случаям: плоскому напряжённому состоянию, плоскому деформированному состоянию и осесимметричному напряжённому состоянию.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Запишите закон Гука для упругой изотропной среды в прямой форме.
2. Что такое ортотропное упругое тело? Каким числом независимых упругих постоянных характеризуется это тело?
3. Что такое трансверсально – изотропное тело? Каким числом независимых упругих постоянных характеризуется это тело?
4. Дайте определение коэффициента Пуассона.
5. Какой физический смысл имеют объёмный модуль упругости K, модуль упругости E, модуль сдвига G?
6. Охарактеризуйте идеально упругое твёрдое тело.
7. Запишите системы уравнений теории упругости для изотропного тела.
8. Что такое граничные условия?
9. Какие виды граничных условий вы знаете?
10. Дайте вывод уравнений Ляме.
11. В чём сущность метода решения задач теории упругости в перемещениях?
12. Дайте вывод уравнений Бельтрами.
13. В чём сущность метода решения задач теории упругости в напряжениях?
14. Опишите прямую и обратную задачи теории упругости.
15. Сформулируйте постановку задач в теории упругости.
16. Перечислите все переменные, подлежащие определению при решении задач теории упругости.
17. Запишите тензоры напряжений и деформаций для плоского напряжённого и плоского деформированного состояний.
18. Запишите уравнения обобщённого закона Гука для плоского напряжённого и плоского деформированного состояний изотропного тела.
19. Что такое функция напряжений Эри? Решением какого уравнения она является?
20. Дайте определение удельной потенциальной энергии при упругой деформации.
21. Чему равна удельная работа упругой деформации при одноосном растяжении и чистом сдвиге?

22. Как рассчитать удельную работу упругой деформации для элементарного параллелепипеда, расположенного в окрестности исследуемой точки?
23. Запишите уравнения для расчёта удельной потенциальной энергии изменения объёма в главных осях.
24. Как найти удельную потенциальную энергию изменения формы для упругого тела?
25. Как найти по заданной функции напряжений Эри компоненты тензора напряжений?
26. Что представляет собой осесимметричное напряжённое состояние?
27. Как записываются тензоры напряжений и деформаций для осесимметричного напряжённого состояния?
28. В каких процессах обработки металлов давлением реализуются схемы плоского напряжённого и плоского деформированного состояний?
29. Какие основные задачи теории упругости вы знаете?
30. Закон упругого изменения объёма.
31. Закон упругого изменения формы.
32. Как связаны между собой при упругой деформации интенсивность напряжений и деформаций, интенсивность касательных напряжений и степень деформации сдвига, октаэдрические касательные напряжения с октаэдрическими угловыми деформациями?
33. Как получить уравнения закона Гука в обратной форме, используя уравнения закона Гука в прямой форме?
34. Показать, что при упругой деформации выполняется условие $\overline{D}_\sigma = \overline{D}_\varepsilon$.
35. Перечислить величины, характеризующие свойства упругих тел.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить относительные линейные, угловые и объёмные деформации в изотропном теле по данным, приведённым в таблице:

Напряжения, МПа						Модули упругости, МПа	
σ_x	σ_y	σ_Z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}	$E \cdot 10^4$	$G \cdot 10^4$
40	-40	20	0	12	-16	20	7,7
0	60	80	-24	46	0	6,9	2,4
46	26	-10	16	24	8	11	4
68	42	36	25	13	-18	9	3,5
20	25	0	12	0	0	11,4	4,2
55	32	-14	21	14	6	14,1	5
-50	-20	30	18	-4	12	17,5	6,3

2. Из уравнения, выражающего обобщённый закон упругости для изотропного материала, получить выражение закона Гука для следующих случаев:

1) одноосное растяжение;
2) одноосное сжатие;
3) двухосное растяжение;
4) $\varepsilon_z = 0$.

3. Для неметаллических ортотропных материалов определены следующие упругие постоянные:

Модули упругости, МПа						Коэффициент поперечной деформации		
ε_x	ε_y	ε_z	G_{xy}	G_{yz}	G_{zx}	μ_{xy}	μ_{yz}	μ_{zx}
E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	μ_{12}	μ_{23}	μ_{31}
10,3	0,77	0,395	0,524	0,354	0,421	0,031	0,248	0,441
32,7	7,1	4,6	1,21	1,98	2,52	0,07	0,30	0,36
46	16	11,2	5,65	3,30	4,35	0,093	0,36	0,30
26	26	7,8	4,51	3,0	3,0	0,13	0,24	0,24
17,6	13,1	5,3	2,82	2,38	2,34	0,10	0,17	0,229

Для напряжённого состояния, заданного тензором

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 40 \\ 0 & 140 & 60 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix},$$

определить линейные, угловые и объёмную деформации.

4. Компоненты материального тензора, входящего в уравнения упругости $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, при изотропном теле можно представить следующим образом:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G\left(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{il}\delta_{jk}\right).$$

Для данного случая записать закон Гука через постоянные λ и G.

5. Показать, что $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ можно разбить на две группы:

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2G)\varepsilon_{ii} \quad \text{и} \quad S_{ij} = 2G\bar{\varepsilon}_{ij}.$$

Здесь S_{ij} и $\bar{\varepsilon}_{ij}$ - компоненты девиаторов напряжений и деформаций.

6. Замерены следующие деформации:

Деформации • 10^{-3}					
ε_x	ε_y	ε_z	γ_{xy}	γ_{yz}	γ_{zx}
1	2	3	1,5	0	0
3	2	1	0,5	1	0,3
2	4	6	1	0	2
3	5	8	2	1	0

Используя данные по упругим постоянным, приведённые в задачах 1 и 2, определить напряжённые состояния материала. Используя данные таблицы, представить закон Гука в виде законов изменения объёма и формы тела. Показать также зависимости $\tau_i = G\gamma_i$.

7. Стержень длиной l равномерно растянут в пределах упругой деформации на величину Δl. Определить перемещения точек тела u_x, u_y, u_z и возникающие напряжения для следующих случаев:

а) стержень имеет круглое сечение;

б) стержень имеет квадратное сечение.

8. Определить, под действием каких сил находится круглый цилиндрический стержень, если его перемещения выражаются функциями

$$u_x = -\frac{\mu\gamma}{E} xz,\ u_y = -\mu\frac{\gamma}{E} yz,$$

$$u_z = \frac{\gamma}{2E}\left[z^2 - l^2 + \mu\left(x^2 + y^2\right)\right].$$

9. Вывести следующие зависимости:

$$\frac{\mu}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9k};$$

$$\frac{\mu}{E} = \frac{1}{6G} - \frac{1}{9k}.$$

10. Образец упруго растянут с относительной деформацией $\varepsilon = 0{,}005$. Модуль нормальной упругости 196 ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$. Определить относительное изменение объёма образца Q.

11. Куб размерами $h \times l \times b = 1 \times 1 \times 1$ м подвергнут осадке на величину Δh в пределах упругости. Коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$. Определить объёмную деформацию.

12. Стальная деталь нагружена и замерены следующие упругие деформации:

$\varepsilon_x = 0{,}001, \varepsilon_y = 0{,}002, \varepsilon_z = 0{,}003, \gamma_{xy} = 0{,}0015, \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$.

Найти напряжённое состояние детали, если

$$E = 2{,}1 \times 10^5 \text{ МПа}, \mu = 0{,}33.$$

13. Даны величины напряжений

$$\sigma_x = 100 \text{ МПа}, \sigma_y = 150 \text{ МПа}, \tau_{xy} = 75 \text{ МПа}.$$

Определить деформации, если деталь изготовлена из стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}3$. Определить изменение объёма.

14. В плите из алюминиевого сплава ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0{,}32$) при её деформации толщина остаётся неизменной, а деформации составят:

$$\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-4}, \varepsilon_y = -2 \cdot 10^{-4}, \gamma_{xy} = -1 \cdot 10^{-4}.$$

Определить возникающие напряжения.

15. Найти связь между константами A и B, при которой функция $\varphi = y\left(Ax^4 + x^2y^2 + By^4\right)$ будет функцией Эри. Определить компоненты напряжений.

16. Проверить, могут ли при осесимметричной деформации тела функциями напряжений служить:

$$\varphi = C\left(\rho^2 + z^2\right), \quad \varphi = Cz^n \ln\rho \quad (n = 0,1,2,3);$$
$$\varphi = C\left(\rho^2 + z^2\right)z, \quad \varphi = Cz^n \quad (n = 1,2,3),$$

где C – постоянная.

17. Доказать, что функция напряжения Эри

$$\varphi = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + xy + 3$$

удовлетворяет бигармоническому уравнению $\nabla^4 \varphi = 0$. Найти компоненты напряжения, считая деформацию плоской. Записать уравнения для определения деформаций.

18. Кольцо единичной толщины окручивается двумя парами сил, приложенных соответственно к внутренней и наружной боковым поверхностям. Убедиться в том, что в каждой точке кольца напряжения равны

$$\sigma_\rho = \sigma_q = 0, \tau_{pq} = \frac{M}{2\pi\rho^2}.$$

19. Стальной цилиндр, внешний диаметр которого 300 мм и толщина стенки 60 мм, подвергнут внутреннему давлению $p_1 = 300$ МПа. Определить величину наибольших растягивающих, сжимающих и касательных напряжений. Построить эпюры σ_q, σ_p и τ_{max}.

20. В задаче 19 поменять условие, т.е. считать, что действует не внутреннее, а внешнее давление. Определить те же величины.

21. Принять, что стальной цилиндр (задача 19) подвергнут не только внутреннему $p_1 = 300\,\text{МПа}$, но и внешнему давлению $p_2 = 100\,\text{МПа}$. Определить те же величины.

22. Определить напряжение в стальном контейнере, состоящем из втулки $(r_1 = 80\,\text{мм},\ r_2 = 180\,\text{мм})$ и корпуса $(r_3 = 270\,\text{мм})$. Натяг по диаметру при посадке втулки $2\delta_1 = 0{,}3\,\text{мм}$, а внутреннее давление $p = 500\,\text{МПа}$. Построить эпюры напряжений.

23. Дана система, состоящая из корпуса и двух втулок с размерами: $r_1 = 60\,\text{мм}$, $r_2 = 80\,\text{мм}$, $r_3 = 120\,\text{мм}$ и $r_4 = 220\,\text{мм}$. Натяг между первой и второй втулками $2\delta_1 = 0{,}2\,\text{мм}$, а между втулкой и корпусом $2\delta_2 = 0{,}3\,\text{мм}$. Внутреннее давление $p_1 = 600\,\text{МПа}$. Корпус и втулка стальные. Определить напряжения и построить их эпюры.

24. Разложить тензоры напряжения и деформации на шаровые и девиаторы. Представить удельную потенциальную энергию в виде суммы энергий изменения объёма и формы тела.

25. Представить полную удельную потенциальную энергию, энергию изменения объёма и формы изотропного тела в виде функции инвариантов тензора деформаций.

26. Записать выражения удельной потенциальной энергии через технические константы для трансверсально-изотропных и ортотропных сред.

27. Записать выражения удельной потенциальной энергии для частных случаев напряжённо-деформированного состояния:

а) линейное растяжение;

б) чистый сдвиг;

в) плоская деформация;

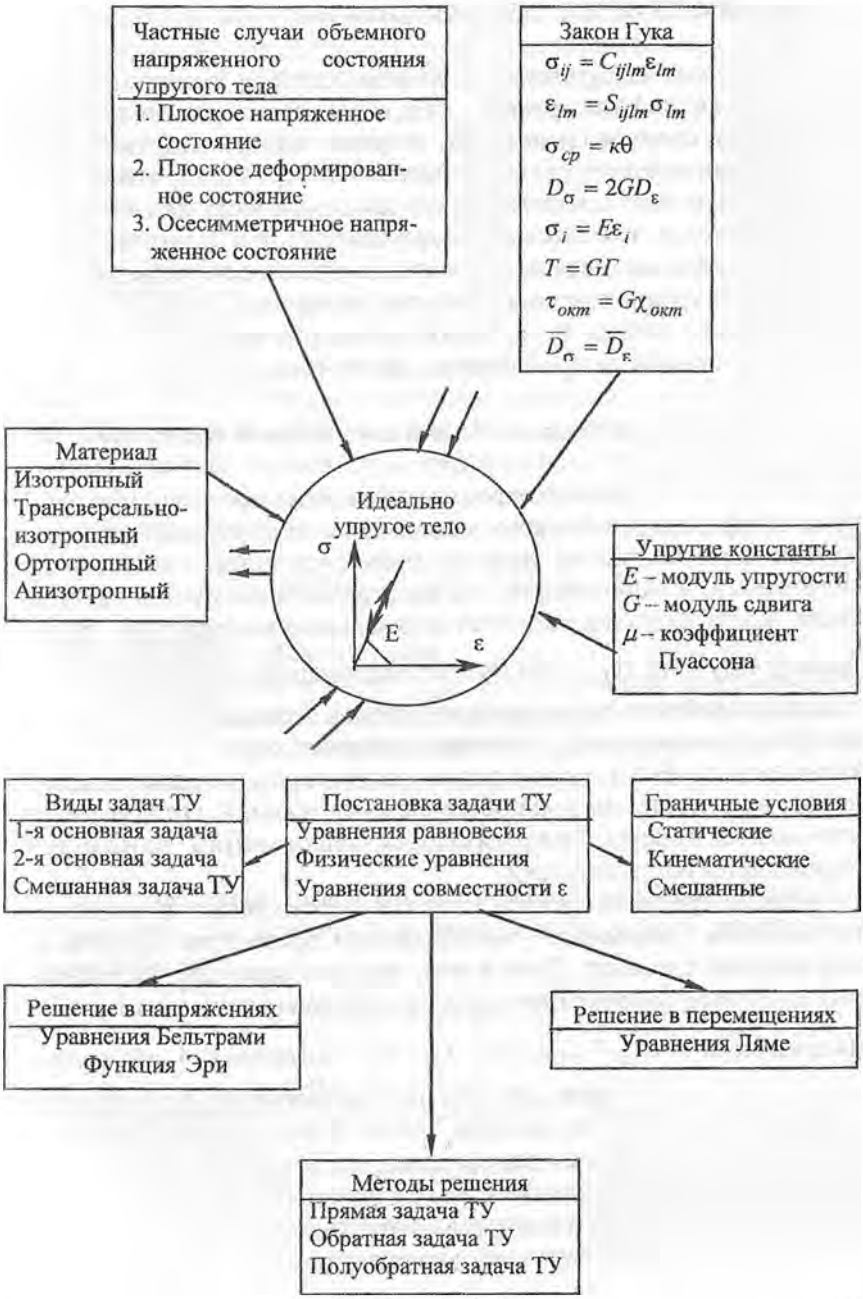
г) двухосное растяжение с отношением напряжений $\sigma_2 / \sigma_1 = 0{,}5$.

Тело принять изотропным.

28. В точке стального тела заданы тензоры напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 120 & 50 & -50 \\ 50 & -60 & 50 \\ -50 & 50 & -60 \end{pmatrix}, \quad T_\sigma = \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -130 \end{pmatrix}.$$

Считая размерность компонент напряжений в МПа, вычислить удельную потенциальную энергию.


Частные случаи объемного напряженного состояния упругого тела
1. Плоское напряженное состояние
2. Плоское деформированное состояние
3. Осесимметричное напряженное состояние
Закон Гука
$\sigma_{ij} = C_{ijlm}\varepsilon_{lm}$
$\varepsilon_{lm} = S_{ijlm}\sigma_{lm}$
$\sigma_{cp} = \kappa\theta$
$D_\sigma = 2GD_\varepsilon$
$\sigma_i = E\varepsilon_i$
$T = G\Gamma$
$\tau_{окт} = G\chi_{окт}$
$\overline{D}_\sigma = \overline{D}_\varepsilon$
Материал
Изотропный
Трансверсально-изотропный
Ортотропный
Анизотропный
Идеально упругое тело
σ
E
ε
Упругие константы
E – модуль упругости
G – модуль сдвига
μ – коэффициент Пуассона
Виды задач ТУ
1-я основная задача
2-я основная задача
Смешанная задача ТУ
Постановка задачи ТУ
Уравнения равновесия
Физические уравнения
Уравнения совместности ε
Граничные условия
Статические
Кинематические
Смешанные
Решение в напряжениях
Уравнения Бельтрами
Функция Эри
Решение в перемещениях
Уравнения Ляме
Методы решения
Прямая задача ТУ
Обратная задача ТУ
Полуобратная задача ТУ

ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Изучению напряжений, деформаций и перемещений в пластически деформируемых телах посвящен раздел механики сплошных сред, называемый теорией пластичности. Теория пластичности решает главным образом те же задачи, что и теория упругости, но для материалов с другими физическими свойствами. Поэтому между указанными теориями имеется много общего. В частности, общими являются уравнения равновесия, геометрические уравнения, уравнения совместности деформаций. Только вместо обобщенного закона Гука, используемого в теории упругости, в теории пластичности применяются другие физические соотношения.

4.1. Условие перехода металла в пластическое состояние

Начало пластических деформаций является следствием перехода от одной формы устойчивого равновесия в атомной решетке зерна к другой. При линейном напряженном состоянии, например при растяжении, можно считать, что пластическое состояние наступает тогда, когда нагрузка вызывает нормальные напряжения, равные пределу текучести σ_T. Если по мере деформации металл упрочняется, то для дальнейшего развития пластической деформации необходимо увеличить напряжение, величина которого определяется кривой упрочнения. Если упрочнение отсутствует, то пластическая деформация протекает при постоянном напряжении. Отсюда следует, что возникновение пластических деформаций однозначно определяется напряжениями.

Теперь требуется перенести эти рассуждения и на случай трехмерного (объемного) напряженного состояния. Сделать это значительно сложнее. Дело в том, что напряженное состояние в рассматриваемой точке описывается шестью компонентами тензора напряжений - $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Количество возможных комбинаций напряжений, при которых тело переходит в пластическое состояние, является бесконечным. Точная форма поверхности раздела упругих и пластических деформаций неизвестна. В связи с этим приходится прибегать к гипотезам по переходу тела в пластическое состояние, а поверхность раздела строить на основе гипотез. Эти гипотезы и соответствующие уравнения, которые являются их

математической формулировкой, называют критериями (условиями) пластичности. К ним предъявляются следующие требования:

1. Критерий пластичности должен иметь форму инварианта, так как характеризуется уравнением состояния тела, которое выражает некоторый физический закон. А это значит, что в это уравнение в качестве независимых переменных должны входить инварианты.

2. В уравнение критерия пластичности, помимо компонент тензора напряжений, должны входить компоненты материального тензора, характеризующие механические свойства металла и определяющие возникновение пластических деформаций при простейших напряженных состояниях.

3. Критерий пластичности должен быть действительным для любых элементарных объемов металла, находящихся в произвольном объемном напряженном состоянии.

Исходя из вышеприведенных требований для изотропного металла, критерий пластичности не должен зависеть от направлений и может быть представлен в виде функции инвариантов тензора напряжений:

$$F[I_1(T_\sigma), I_2(T_\sigma), I_3(T_\sigma)] = K,$$

где K - постоянная пластичности.

Как показывают опыты, при всестороннем равномерном растяжении или сжатии пластические деформации не возникают. Поэтому критерий пластичности можно представить как функцию только второго и третьего инвариантов девиатора напряжений:

$$F[I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = K.$$

Если известны главные нормальные и максимальные касательные напряжения, то критерий пластичности можно записать в упрощенном виде:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = K$$

или

$$F(\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}) = K.$$

Из многочисленных предложенных в разное время критериев пластичности наибольшее применение в обработке металлов давлением получили условия Треска и Мизеса. Рассмотрим их более подробно в той исторической последовательности, как они появились.

4.2. Условие постоянства максимального касательного напряжения

Французский инженер Треска в 1868 г., основываясь на собственных опытах по истечению металла через отверстия, впервые высказал предположение (гипотезу) о том, что в момент начала пластической деформации во всех точках деформируемой среды максимальные касательные напряжения имеют одно и то же значение для данного металла, т.е.

$$|\tau_{max}| = K.$$

Несколько позднее французский ученый Сен-Венан в 1871 г. дал математическую формулировку этого условия для плоской деформации.

Если $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то

$$\tau_{max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = K.$$

При линейном напряженном состоянии $\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Откуда постоянная текучести $K = 0{,}5\sigma_T$.

В объемном случае условие Треска можно записать:

$$\begin{aligned} 2|\tau_{12}| &= |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_T, \\ 2|\tau_{23}| &= |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_T, \\ 2|\tau_{31}| &= |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_T. \end{aligned} \qquad (50)$$

Если все три условия выполняются со знаком неравенства, то металл находится в упругом состоянии. Чтобы металл находился в состоянии текучести, в одном или двух из этих уравнений должен быть знак равенства.

Окончательно условие Треска можно сформулировать следующим образом. *Переход тела из упругого состояния в пластическое не зависит от вида напряженного состояния и происходит тогда, когда по крайней мере одно или два из касательных напряжений достигают максимального значения, определяемого только механическими свойствами металла.*

Из уравнений (50) вытекает следующее соотношение между пределом текучести при сдвиге τ_T:

$$2\tau_T = \sigma_T.$$

В трехмерном пространстве главных нормальных напряжений условие Треска интерпретируется поверхностью пластичности, представляющей собой правильную шестигранную призму бесконечной длины, ось которой равнонаклонена к трем главным осям (рис. 51), т.е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

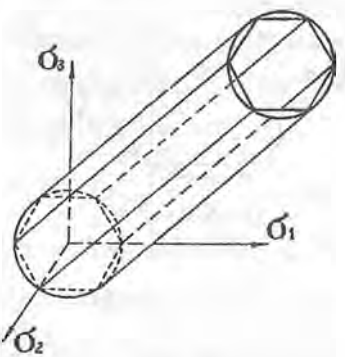


Рис. 51

Так как поверхность пластичности описывается тремя уравнениями, то она ограничена шестью попарно параллельными плоскостями. Поскольку возникновение пластических деформаций определяется не величиной главных нормальных напряжений, а их разностью, длина призмы не ограничена. Если точка, изображающая напряженное состояние в главных осях, находится внутри призмы, то материальная частица металла деформируется упруго. Когда изображающая точка попадает на поверхность призмы, в частице металла возникает пластическая деформация.

При плоском напряженном состоянии $(\sigma_2 = 0)$ уравнения (50) принимают вид

$$\begin{aligned} &|\sigma_1| \le \sigma_T, \\ &|\sigma_3| \le \sigma_T, \\ &|\sigma_3 - \sigma_1| \le \sigma_T. \end{aligned} \qquad (51)$$

На плоскости $\sigma_1 o \sigma_3$ эти уравнения определяют шестиугольник (рис. 52).

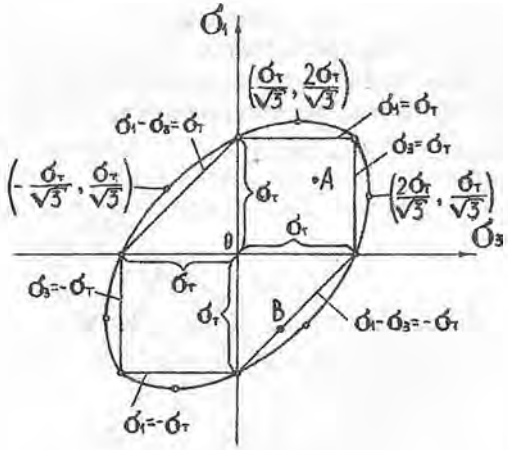


Рис. 52

Если точка А, изображающая напряженное состояние, находится внутри шестиугольника, частица металла деформируется упруго. Если точка В лежит на контуре шестиугольника, в частице возникает пластическая деформация. В соответствии с условиями при линейном напряженном состоянии шестиугольник отсекает на осях координат отрезки, равные σ_T.

При плоском деформированном состоянии σ_2 всегда является средним главным нормальным напряжением $\sigma_2 = 0{,}5(\sigma_1 + \sigma_3)$ и из трех уравнений (50) остается одно:

$$|\sigma_3 - \sigma_1| = \sigma_T . \qquad (52)$$

В произвольных осях, если ось z совпадает с главной осью, условие пластичности имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \sigma_T^2 . \qquad (53)$$

Условие пластичности Треска-Сен-Венана в общем удовлетворительно характеризует наступление пластического состояния металла и согласуется с наблюдениями по линиям Людерса-Чернова.

4.3. Условие постоянства интенсивности напряжений

В объемных задачах использование условия Треска в виде трех уравнений (50) наталкивается на большие математические трудности. Часто нелегко установить заранее, какое из трех касательных напряжений достигает максимального значения, а также учесть влияние среднего главного напряжения. Эти обстоятельства привели немецкого ученого Мизеса в 1913 г. к гипотезе об описании вокруг шестигранной призмы в координатах $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ кругового цилиндра (рис. 51), уравнение которого имеет вид

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] = \sigma_T^2. \qquad (54)$$

Это условие пластичности читается так: *пластическая деформация наступит тогда, когда интенсивность σ_i достигнет некоторого предельного значения, определяемого только механическими свойствами металла независимо от вида напряженного состояния.*

В произвольных осях условие пластичности записывается так:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T. \qquad (55)$$

Уравнение (54) отличается от второго инварианта девиатора напряжений $I_2(D_\sigma)$, интенсивности касательных напряжений T, октаэдрического касательного напряжения только постоянным множителем. Поэтому условие пластичности Мизеса носит в литературе несколько наименований: "условие постоянства интенсивности напряжений", "условие постоянства интенсивности касательных напряжений", "условие постоянства октаэдрического касательного напряжения".

Условие пластичности Мизеса инвариантно к преобразованию координат. Оно учитывает влияние среднего главного напряжения на условие перехода упругой деформации в пластическую. Третий инвариант девиатора напряжений не оказывает влияния на наступление пластического состояния.

Если главные напряжения в каком-либо элементе тела таковы, что они определяют точку, лежащую на поверхности цилиндра (рис. 51), то элемент металла будет находиться в пластическом

состоянии. Если главные нормальные напряжения в элементе таковы, что они определяют точку, лежащую внутри цилиндра, то элемент будет находиться в упругом состоянии. Так как количество точек на поверхности цилиндра бесконечно большое, то существует неограниченное количество комбинаций величин главных напряжений, удовлетворяющих условию (54).

В дальнейшем выяснилось, что раньше Мизеса это условие как условие прочности было предложено польским ученым Губером в 1904 г. Позднее Генки в 1924 г. заметил, что левая часть условия (54) имеет простой физический смысл, соответствуя с точностью до постоянного множителя удельной энергии упругого изменения формы тела:

$$W_{\Phi} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right].$$

В случае линейного напряженного состояния ($\sigma_1 = \sigma_T$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) имеем

$$W_{\Phi} = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_T^2.$$

Учитывая, что удельная энергия упругого изменения формы не зависит от вида напряженного состояния, величину W_{Φ} для объемного напряженного состояния приравняем к величине W_{Φ} для одноосного растяжения:

$$\frac{1+M}{3E}\sigma_T^2 = \frac{1+M}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right].$$

Откуда получаем условие пластичности Мизеса (54). Таким образом, пластическая деформация тела начинается тогда, когда запас удельной энергии упругого изменения формы достигает определенной для данных условий величины независимо от схемы напряженного состояния. Поэтому условие Мизеса в отличие от вышеприведенных часто называют энергетическим условием пластичности или уравнением Губера-Мизеса-Генки.

Приняв при плоском напряженном состоянии в произвольных осях $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, уравнение (55) примет вид

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_T^2 \ . \qquad (56)$$

В главных осях выражение (56) запишется так:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2 = \sigma_T^2 .$$

Приняв при плоском деформированном состоянии в произвольных осях $\sigma_z = 0{,}5(\sigma_x + \sigma_y)$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, уравнение (56) примет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_T^2 . \qquad (57)$$

В главных осях при $\sigma_2 = \sigma_{cp}$ выражение (57) запишется так:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T = \pm 2\tau_T = 2\kappa . \qquad (58)$$

Откуда $\tau_T = \sigma_T / \sqrt{3}$.

Сравнивая (53) и (57), видим, что для плоского деформированного состояния рассмотренные условия пластичности совпадают, но по Треска $\tau_T = 0{,}5\sigma_T$, а по Мизесу $\tau_T = \sigma_T / \sqrt{3}$.

Рассмотрим графики условий начала пластических деформаций по критериям Мизеса и Треска для плоского напряженного состояния.

Уравнение (56) описывает эллипс с центром в начале координат и осями координат σ_1 и σ_3 (рис. 52). Условия пластичности Треска описывают шестиугольник. В точках с координатами $(0,\sigma_T),(\sigma_T,0),(0,-\sigma_T),(-\sigma_T,0)$ критерии пластичности Мизеса и Треска совпадают. Эти точки соответствуют линейному напряженному состоянию растяжения или сжатия. Другие четыре точки на эллипсе

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T,\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\right),\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right),$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T,\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right)$$

соответствуют плоскому напряженному и плоскому деформированному состояниям. В этих точках критерии Треска и Мизеса отличаются друг от друга на 15%. В точках

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_T\right),$$

соответствующих чистому сдвигу, критерии отличаются друг от друга примерно на 8%.

Таким образом, рассматриваемые критерии пластичности Треска и Мизеса близки друг к другу. Мизес считал условие Треска точным, а свое – приближенным. Однако многочисленные эксперименты показали, что условие Мизеса выполняется в состоянии текучести для поликристаллических металлов лучше, чем условие Треска.

Задача 20. Напряженное состояние в исследуемой точке изотропного тела задано в виде тензора напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 100 & 300 & 200 \\ 0 & 200 & 200 \end{pmatrix}.$$

Принимая $\sigma_T = 800$ МПа, по критерию пластичности Мизеса выяснить, в каком состоянии находится исследуемая частица металла.

Решение

По формуле (54) находим

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(100-300)^2+(300-200)^2+(200-100)^2+6\left(100^2+200^2\right)} =$$

$= 600$ МПа < 800 МПа.

Исследуемая частица тела находится в упругом состоянии.

Задача 21. Найти внутреннее давление, при котором в толстостенной трубе зарождается пластическая деформация.

Решение

Согласно условию постоянства максимального касательного напряжения для плоского деформированного состояния

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \sigma_T;$$

у внутренней поверхности σ_θ достигает наибольшего значения

$$\sigma_{\theta(\rho=r_1)} = P_1\frac{r_2^2+r_1^2}{r_2^2-r_1^2}.$$

Радиальное напряжение при этом равно - P_1. Тогда

$$P_1 \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + P_1 = \sigma_T .$$

Откуда

$$P_1 = \frac{\sigma_T}{1 + \dfrac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}} .$$

Использование энергетического условия пластичности в полной форме (54) приводит к большим математическим трудностям, связанным с его нелинейностью. Например, при плоской по напряжениям осесимметричной задаче уравнение статического равновесия имеет вид

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0 .$$

Чтобы решать его совместно с условием пластичности, желательно, чтобы условие пластичности (54) было выражено в виде разности $\sigma_\rho - \sigma_\theta$. Однако условие пластичности имеет вид

$$(\sigma_\theta - \sigma_\rho)^2 + \sigma_\rho^2 + \sigma_\theta^2 = 2\sigma_T^2$$

или

$$\sigma_\theta^2 + \sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta = \sigma_T^2 .$$

Для облегчения решения задач используют запись условия пластичности через разность главных напряжений. Покажем это.

Запишем показатель вида напряженного состояния Лоде-Надаи

$$\nu_\sigma = \frac{\sigma_2 - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} .$$

Разрешим его относительно среднего напряжения

$$\sigma_2 = \nu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \qquad (59)$$

Энергетическое условие пластичности в главных осях напряжений имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2.$$

Подставим в него выражение (59). Получим

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 (3 + \nu_T^2) = 4\sigma_T^2.$$

Откуда

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}.$$

Это уравнение запишем в виде

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta\sigma_T, \qquad (60)$$

где β - коэффициент Лоде,

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}}.$$

Если среднее главное нормальное напряжение равно одному из крайних, т.е. $\sigma_2 = \sigma_1$ или $\sigma_2 = \sigma_3$, то $\beta = 1$, а условие (60) принимает вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T,$$

т.е. совпадает с условием пластичности Треска-Сен-Венана. Максимальную величину коэффициент β имеет при плоском деформированном состоянии, когда $\sigma_2 = 0{,}5(\sigma_1 + \sigma_3)$, $\nu_\sigma = 0$, $\beta = 2/\sqrt{3} = 1{,}155$ (рис. 53).

В этом случае

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T = 1{,}155\sigma_T$$

и разница между обоими условиями пластичности наибольшая. Как видно, эта наибольшая разница невелика, т.е. влияние σ_2 на переход из упругого состояния в пластическое несущественно.

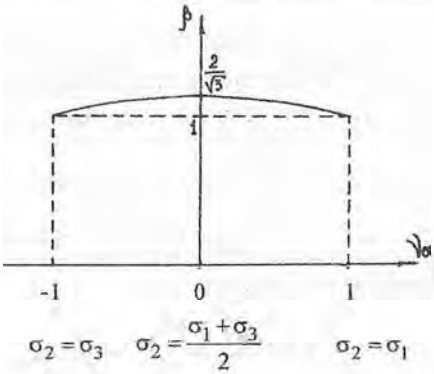


Рис. 53

Энергетическое условие пластичности часто используют при расчетах процесса обработки металлов давлением в виде (60), где $\frac{2}{\sqrt{3}} \geq \beta \geq 1$. Если принять максимальное значение β, то (60) можно рассматривать как приближенную запись энергетического условия пластичности.

Использование условия пластичности в упрощенной линейной форме записи (60) не дает однозначного решения, так как не всегда неизвестно точное значение β.

Однако отдельные задачи, в частности осесимметричное деформирование тонкостенных оболочек, удается решить, если использовать параметрическое представление условия пластичности Мизеса.

Рассмотрим вначале случай изотропного тела. Как показал А. Надаи, энергетическое условие пластичности изотропного тела

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$$

геометрически интерпретируется эллипсом с углом наклона осей 45° и может быть записано, как всякое уравнение эллипса, в параметрической форме:

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_S \cos\psi,$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_S \cos\left(\psi - \frac{\pi}{3}\right),$$

здесь ψ - функция, через которую выражены напряжения σ_1 и σ_2.

Пределы изменения этой функции устанавливаются исходя из знаков действующих напряжений или, другими словами, от условий конкретной задачи.

Так при

$$\sigma_1 > 0 \quad \text{и} \quad \sigma_2 < 0 \qquad \frac{3}{2}\pi \le \psi \le \frac{11}{6}\pi.$$

Аналогично можно установить, что

при $\sigma_1 < 0$ и $\sigma_2 < 0$ $\qquad \frac{5}{6}\pi \le \psi \le \frac{3}{2}\pi,$

при $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ $\qquad -\frac{\pi}{6} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$

и, наконец, при

$$\sigma_1 < 0 \text{ и } \sigma_2 > 0 \qquad \frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{5}{6}\pi.$$

4.4. Условие пластичности анизотропных сред

Как уже отмечалось, поликристаллические металлы на макроскопическом уровне изотропны. Однако в результате обработки давлением поликристаллические металлы становятся анизотропными материалами, у которых свойства зависят от направления. Это так называемая деформационная анизотропия в отличие от начальной анизотропии кристалла. Одной из причин деформационной анизотропии является появление текстуры, т.е. системы закономерно ориентированных кристаллографических элементов большинства кристаллов (зерен), составляющих деформируемое тело.

В общем случае для анизотропного материала Мизесом в 1928 году было предложено следующее энергетическое условие начала пластичности:

$$K_{ijlm}\sigma_{ij}\sigma_{lm} = 1,$$

где K_{ijlm} - симметричный материальный тензор, отражающий анизотропию свойств.

Для ортотропного материала в главных осях анизотропии оно записывается следующим образом:

$$\frac{1}{2}\left[K_{1122}(\sigma_x-\sigma_y)^2+K_{2233}(\sigma_y-\sigma_z)^2+K_{3311}(\sigma_z-\sigma_x)^2+\right.$$
$$\left.+K_{2323}\tau_{yz}^2+K_{1313}\tau_{1313}^2+K_{1212}\tau_{xy}^2\right]=1.$$

Мизес не сделал никаких предположений относительно коэффициентов K_{ij} и не выразил их через технические константы.

В 1948 г. Хилл сделал следующую расшифровку условия Мизеса

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{Y^2}+\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{X^2}\right)(\sigma_y-\sigma_z)^2+\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{X^2}-\frac{1}{Y^2}\right)(\sigma_z-\sigma_x)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{X^2}+\frac{1}{Y^2}-\frac{1}{Z^2}\right)(\sigma_x-\sigma_y)^2+\frac{\tau_{xy}^2}{T^2}+\frac{\tau_{yz}^2}{R^2}+\frac{\tau_{zx}^2}{S^2}\right]=1.$$

Здесь X,Y,Z - пределы текучести при растяжении металла в главных направлениях анизотропии;

R,S,T - пределы текучести при сдвиге по отношению к главным осям.

Этим уравнением трудно пользоваться. Например, для листового проката практически не удается определить Z,R,S.

Арышенским Ю.М. в 1964 г. условие пластичности Мизеса предложено выразить в традиционной тензорной форме следующим образом:

$$\sigma_i^2=K_{ijlm}\sigma_{ij}\sigma_{lm};$$

это условие, выраженное через деформационные показатели для ортотропного тела, имеет вид:

$$\sigma_i=\sqrt{3}\sqrt{\mu_{12}\frac{1-\mu_3}{1+\mu_3}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\mu_{23}\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}(\sigma_y-\sigma_z)^2+}\ldots$$
$$\ldots\sqrt{+\mu_{31}\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}(\sigma_z-\sigma_x)^2+\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2}\,.$$

Здесь μ_{lk} - коэффициенты поперечной деформации, аналогичные коэффициентам Пуассона, но только в пластической области. Первый индекс указывает направление поперечной деформации, а второй – направление действия силы. Их определяют при линейном напряженном состоянии (рис. 54).

Рис. 54

При растяжении образцов в направлении 1

$$\mu_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \mu_{31} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

Из условия постоянства объема

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

следует, что

$$\frac{\varepsilon_2}{-\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_3}{-\varepsilon_1} = 1$$

или

$$\mu_{21} + \mu_{31} = 1.$$

Аналогично при одноосных испытаниях в направлениях 2 и 3 получаем

$$\mu_{12} + \mu_{32} = 1,$$
$$\mu_{23} + \mu_{13} = 1.$$

Коэффициент μ_1 получают при растяжении вырезанного образца под углом 45° к осям 1 и 2, μ_2 - между осями 2 и 3, μ_3 - между осями 3 и 1.

В расчетах начала пластичности металла интенсивность напряжений удобно относить к главным осям анизотропии. Например, для первого направления σ_i имеет вид

$$\sigma_{i1} = \sqrt{\mu_{21}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}}-1\right)(\sigma_2-\sigma_3)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}}-1\right)(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \sigma_{T1},$$

где σ_{T1} - предел текучести металла в направлении 1.

По другим направлениям существуют следующие связи:

$$\sigma_{i2} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}}\sigma_{i1}\ , \quad \sigma_{i3} = \sqrt{\frac{\mu_{13}}{\mu_{31}}}\sigma_{i1}.$$

Для ортотропной среды условие Мизеса интерпретируется эллиптическим равнонаклоненным к осям цилиндром. Для плоского напряженного состояния $(\sigma_2 = 0)$ контур текучести имеет вид, показанный на рис. 55.

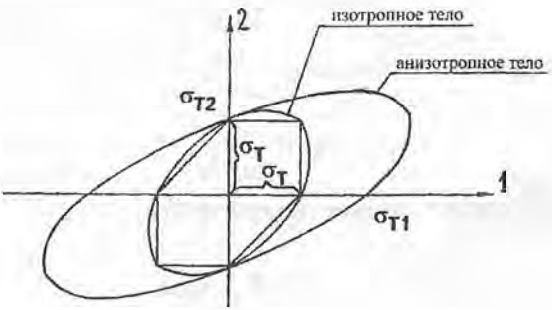


Рис. 55

В случае изотропного тела все $\mu_{ij} = 0{,}5$ и σ_i принимает выражение (55).

4.5. Экспериментальная проверка условий пластичности

Проверка обычно проводится в опытах по совместному растяжению продольной силой P и кручению моментом M тонкостенных труб ($P+M$ – опыт) (рис. 56).

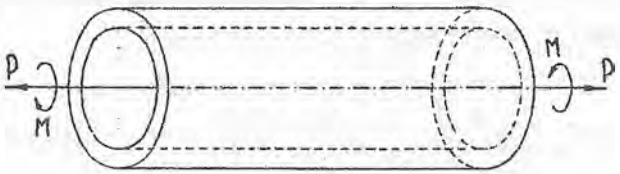


Рис. 56

Тогда напряженное состояние является плоским и осесимметричным и описывается тензором напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\theta z} \\ 0 & \tau_{z\theta} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

где σ_z - осевое нормальное напряжение

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi R t},$$

$\tau_{\theta z}$ - касательное напряжение,

$$\tau_{\theta z} = \frac{M}{2\pi R^2 t},$$

R - средний радиус тонкостенной трубы,

t - толщина ее стенки.

Инварианты тензора напряжений равны

$$J_1(T_\sigma) = \sigma_z, \quad J_2(T_\sigma) = \tau_{\theta z}^2, \quad J_3(T_\sigma) = 0.$$

Тогда кубическое уравнение для определения главных нормальных напряжений имеет вид

$$\sigma^3 - \sigma_z \sigma^2 - \tau_{\theta z}^2 \sigma = 0.$$

Его корни равны

$$\sigma_1 = \left(\sigma_z + \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\theta z}^2}\right)\Big/2,$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = \left(\sigma_z - \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{\theta z}^2}\right)\Big/2.$$

Условие пластичности Треска - Сен-Венана $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$ примет вид

$$\sigma_z^2 + 4\tau_{\theta z}^2 = \sigma_T^2$$

или

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_T}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau_{\theta z}}{\sigma_T}\right)^2 = 1.$$

В координатах $(\sigma_z/\sigma_T), (\tau_{\theta z}/\sigma_T)$ это уравнения эллипсов с полуосями соответственно 1;0,5 и $1;\sqrt{3}$ (рис. 57).

Рис. 57

4.6. Условие упрочнения

Пластическая деформация приводит к упрочнению металла, предел его текучести повышается (рис. 58). Если образец растягивать из начального состояния, то при $\sigma_1 = \sigma_T$, в образце возникнет

пластическая деформация $\varepsilon_A^{П}$. Произведем нагружение образца до точки A, а затем полную его разгрузку до точки N. Если теперь вновь растягивать образец из упрочненного состояния, то нагружение будет совпадать с прямой NA. Пластическая деформация возникает в образце в точке A, когда соблюдается условие $\sigma_1 = \sigma_A$. В связи с этим σ_T называют начальным, а σ_A - текущим пределом текучести при линейном напряженном состоянии.

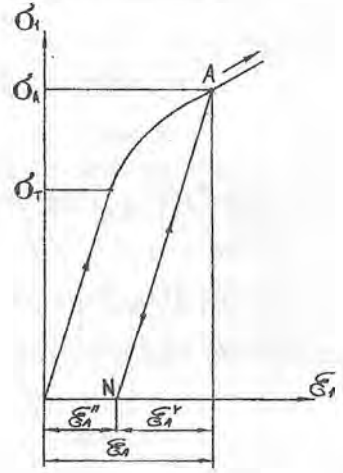


Рис. 58

Текущий предел текучести зависит от предыдущей пластической деформации и позволяет легко различать при одноосном растяжении *нагружение*, сопровождающееся дальнейшей пластической деформацией, и *разгрузку*, происходящую чисто упруго.

Если по достижении точки A приращение напряжения $d\sigma_1$ таково, что $\sigma_1 > \sigma_A$, произойдет нагружение, а если $\sigma_1 < \sigma_A$, то произойдет разгрузка.

При переходе к сложному напряженному состоянию рассматривают *поверхность нагружения* (рис. 59). В шестимерном пространстве напряжений σ_{ij} уравнение поверхности текучести Σ_T является границей упругой области.

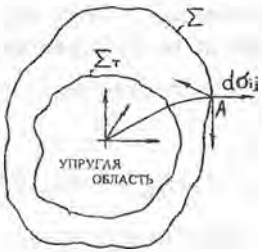


Рис. 59

Если точка, изображающая напряженное состояние, лежит внутри области, ограниченной Σ_T, частица ведет себя как упругое тело. Если точка находится на поверхности текучести Σ_T, в частице возникают пластические деформации. Граница Σ_T представляет собой выпуклую поверхность совокупности пределов текучести для всевозможных напряженных состояний. Начало координат соответствует нулевым напряжениям.

С увеличением пластической деформации по мере развития упрочнения поверхность нагружения Σ, совпадающая в начальном (неупрочненном) состоянии с поверхностью текучести Σ_T, расширяется и смещается.

Допустим, что в точке A пластически деформируемого упрочняемого тела напряжения σ_{ij} получили приращения $d\sigma_{ij}$. Если вектор $d\sigma_{ij}$ направлен наружу к поверхности нагружения Σ, происходит нагружение частицы. Если же вектор $d\sigma_{ij}$ направлен внутрь поверхности нагружения Σ, то происходит разгрузка. Если вектор $d\sigma_{ij}$ лежит в касательной плоскости к поверхности нагружения Σ, в частице произойдут нейтральные изменения, сопровождающиеся упругими деформациями.

Рассмотрим некоторые простые формы поверхности нагружения.

Изотропное упрочнение. В этом случае упрочнение материала происходит одинаково во всех направлениях и не зависит от среднего напряжения $\sigma_{ср}$. Тогда поверхность нагружения можно задать в виде

$$F[J_2(D_\sigma), J_3(D_\sigma)] = \varphi(q), \qquad (61)$$

где $\varphi(q)$ - возрастающая положительная функция,

q - параметр упрочнения, характеризующий предыдущую деформацию.

Если предположить, что условие (61) содержит только второй инвариант девиатора напряжений, то условие (61) запишем в виде

$$\sigma_i = \varphi(q).$$

Оно представляет собой круговую цилиндрическую поверхность, равнонаклоненную к главным осям. В процессе пластической деформации радиус поверхности увеличивается и в зависимости от выбора параметра q можно получить различные текущие поверхности нагружения.

Особый интерес представляет случай, когда в качестве меры упрочнения принимается величина достигнутой интенсивности деформаций ε_i (*деформационная гипотеза упрочнения*).

$$\sigma_i = E'(\varepsilon_i)\varepsilon_i, \qquad (62)$$

где $E'(\varepsilon_i)$ - некоторая характерная для данного металла функция, иногда называемая *модулем пластичности.*

Если в координатах σ_i, ε_i построить кривую (62), то для упругого и пластического состояний получим одну и ту же зависимость для различных напряженных состояний, называемую *единой кривой* (рис. 60).

Здесь E' - модуль пластичности,

$\sigma_i = E\varepsilon_i$ - упругая область,

$\sigma_i = E'\varepsilon_i$ - пластическая область.

Разница между E и E' состоит в том, что E - величина постоянная (константа материала), а E' - величина переменная, зависящая от упрочнения, температуры, скорости деформации и т.п.

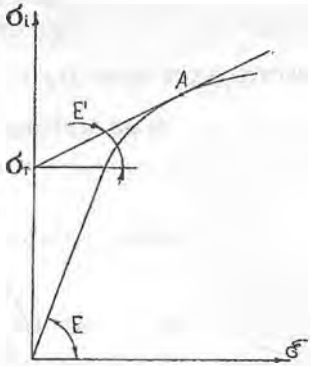


Рис. 60

За меру упрочнения q иногда берут накопленную пластическую деформацию или так называемый параметр Удквиста:

$$q = \int d\varepsilon_i^n ,$$

где $d\varepsilon_i^n$ - интенсивность приращения пластических деформаций.

В главных осях $d\varepsilon_i^n$ имеет вид

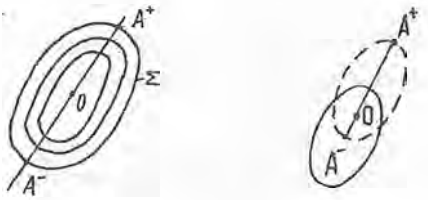
$$d\varepsilon_i^n = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(d\varepsilon_1^n - d\varepsilon_2^n\right)^2 + \left(d\varepsilon_2^n - d\varepsilon_3^n\right)^2 + \left(d\varepsilon_3^n - d\varepsilon_1^n\right)^2} .$$

За меру упрочнения q может быть принята и удельная работа пластической деформации частицы (энергетическая гипотеза упрочнения) на всем пути пластического деформирования:

$$q = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^n .$$

Энергетическое условие упрочнения является более общим, чем предыдущее условие, и подтверждается опытами для более широкого класса нагружения. Однако оно не учитывает деформационной анизотропии и может быть использовано лишь для сравнительно несложных путей нагружения.

При изотропном упрочнении поверхность нагружения равномерно расширяется, оставаясь подобной самой себе. Эффект Баушингера при этом не описывается, поскольку σ_T в прямом OA^+ и обратном OA^- направлениях нагружения одинаковы по величине (рис. 61, а).



а б

Рис. 61

Трансляционное упрочнение. Поверхность нагружения испытывает жесткое смещение в направлении деформирования (рис. 61, б). Сплошная линия – начальное положение, пунктирная – положение после деформации. Если теперь вновь нагрузить металл, то σ_T в направлении предыдущей деформации (OA^+) возрастает – произошло упрочнение. В обратном направлении (OA^-) σ_T падает (произошло разупрочнение). Эта схема качественно описывает эффект Баушингера.

Уравнение поверхности нагружения имеет вид

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = K,$$

где a_{ij} - координаты центра поверхности нагружения.

Наиболее простой вариант выбора a_{ij}: линейное упрочнение

$$a_{ij} = c\varepsilon_{ij}^n,$$

где c - положительная константа, характерная для данного материала,

ε_{ij}^n - компоненты пластической деформации.

Перенос и расширение. Комбинация двух предыдущих случаев приводит к более полной схеме нагружения, т.е.

$$f(s_{ij} - a_{ij}) = \varphi(q).$$

Это уравнение удовлетворительно описывает упрочнение металла в довольно широких границах изменения пути нагружения.

4.7. Простое и сложное нагружение

Нагружение частицы называется простым, если все компоненты тензора напряжений σ_{ij} или внешние силы возрастают от начального состояния пропорционально одному параметру, т.е.

$$\sigma_{ij} = \lambda \sigma_{ij}^{o},$$

где σ_{ij}^{o} - постоянный тензор, а λ - переменный скалярный параметр.

В противном случае нагружение называется сложным. Примерами простого нагружения в $P+M$ - опытах являются лучи OA и OB, примерами сложного нагружения-траектории OC, OM_1N, OP_1D (рис 62).

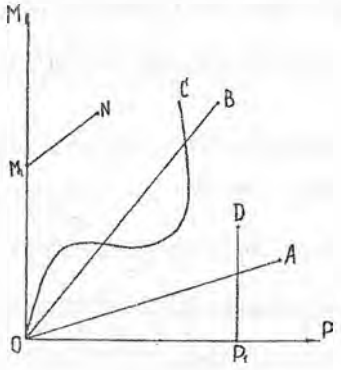


Рис. 62

При простом нагружении коэффициент Лоде–Надаи ν_σ, положение главных осей T_σ не меняется в процессе нагружения.

А. А. Ильюшин разработал теорему о простом нагружении. Для того чтобы во всех точках несжимаемого тела, нагруженного внешними силами, возрастающими пропорционально некоторому параметру, нагружение было простым, достаточно, чтобы зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций была степенной функцией вида

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m,$$

где A и m - характеристики металла.

При простом нагружении в каждой точке тела

$$\nu_\sigma = \nu_\varepsilon = \text{const}.$$

Это справедливо для тела любой формы, при любом количестве и любых направлениях внешних сил.

Для упругого тела последовательность его нагружения внешними силами какой-либо роли не играет, так как имеет место однозначное соответствие между напряженным и деформированным состояниями независимо от того, каким образом они созданы. В упругопластических телах ситуация оказывается принципиально отличной. Для упругопластического тела существен не только характер напряженного состояния в его точке, но и путь, по которому оно было создано. В зависимости от этого может значительно меняться деформированное состояние в одних и тех же точках тела. Это наглядно видно при простом растяжении (рис. 63). Одному и тому же напряжению σ_T^* могут соответствовать деформации $00_1, 00_2, 00_3$ и т.д.

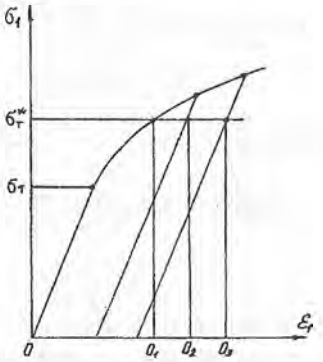


Рис. 63

4.8. Разгрузка. Остаточные напряжения и деформации

При определении технологических параметров обработки металлов давлением, связанных с точностью получения формы, необходимо знать, как поведет себя материал после снятия всех внешних сил, т.е. знать характер его разгрузки. Теоретический анализ точностных параметров проводится на основе теоремы о разгрузке А.А. Ильюшина.

Рассмотрим одноосное растяжение образца и его разгрузку (рис. 64).

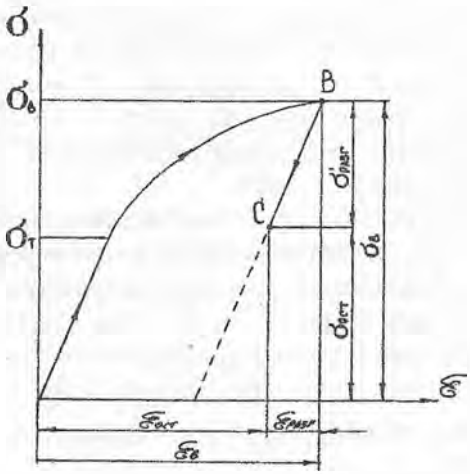


Рис. 64

Предположим, что в растянутом образце в точке B возникло напряжение σ_B. Причем $\sigma_B > \sigma_T$. Этому напряжению соответствует деформация ε_B. Если теперь частично разгрузить образец на $\sigma_{разг}$, то в образце останутся остаточные напряжения $\sigma_{ост} = \sigma_B - \sigma_{разгр}$. Напряжению $\sigma_{ост}$ соответствует деформация $\varepsilon_{ост} = \varepsilon_B - \varepsilon_{разг}$.

Как показывает опыт, если при разгрузке тело подчиняется закону Гука, то $\varepsilon_{разг}$ можно определить по формуле

$$\varepsilon_{разг} = \sigma_{разг} / E .$$

Таким образом, при вычислении остаточных деформаций необходимо из полной деформации, соответствующей наибольшему напряжению, вычесть упругую деформацию, соответствующую значению напряжения, на величину которого уменьшилось наибольшее напряжение.

А. А. Ильюшин распространил эту закономерность и на случай сложного напряженного состояния для определения остаточных деформаций, напряжений или перемещений частиц тела. Теорема о разгрузке звучит так.

Перемещения точек тела, а также деформации и напряжения в определенный момент разгрузки равны разностям между их значениями в момент начала разгрузки и упругими перемещениями, деформациями, напряжениями, которые возникли бы в ненагруженном теле под действием внешних сил, равных разностям нагрузок до и после разгрузки.

Для технологических расчетов наиболее важно следствие из теоремы. При полном снятии внешних сил для определения остаточных перемещений, деформаций, напряжений нужно решить пластическую задачу для данных внешних сил, а также для этих же сил решить упругую задачу. Затем взять разность этих решений.

Допустим, что при нагружении тела были достигнуты напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij}. Тогда после полной разгрузки, когда все внешние силы уменьшаются до нуля, в теле будут остаточные напряжения $\sigma_{ij}^{ост}$ и остаточные деформации $\varepsilon_{ij}^{ост}$, равные

$$\sigma_{ij}^{ост} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{*},$$
$$\varepsilon_{ij}^{ост} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{*},$$

где σ_{ij}^{*} и ε_{ij}^{*} - напряжения и деформации, которые являются решением задачи теории упругости для тела, нагруженного внешними силами, соответствующими моменту начала разгрузки.

Задача 22. Найти остаточные напряжения и закрутку после упругопластического кручения прутка круглого поперечного сечения радиусом R из идеально упругопластического материала на угол α.

Решение

Операция кручения используется для того, чтобы повернуть одну часть тела относительно другой, например, при изготовлении коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания, витых сверл и т.п.

Будем считать, что при кручении моментом M плоские поперечные сечения прутка остаются плоскими и за пределом упругости материала. При этом смежные поперечные сечения, отстоящие друг от друга на расстоянии l, поворачиваются относительно друг друга на относительный угол

$$\theta = \frac{\alpha}{\ell},$$

где α - угол кручения.

Согласно теореме о разгрузке А.А. Ильюшина (рис. 65):

$$\theta = \beta + \psi,$$

где β - относительный остаточный угол кручения;

ψ - относительный угол упругой раскрутки.

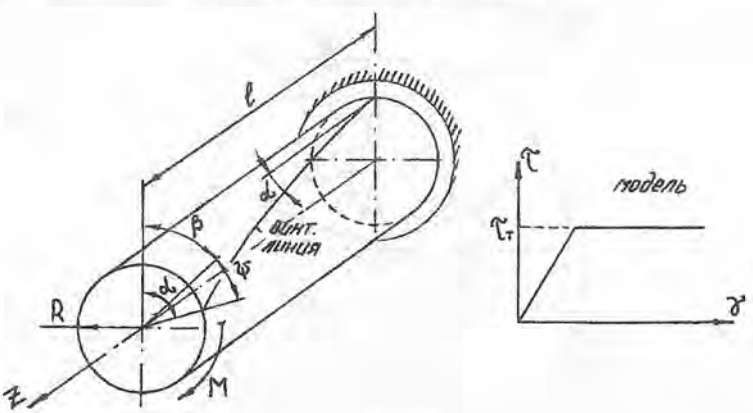


Рис. 65.

Величина угловой деформации $\gamma_{z\theta}$ равна углу, заключенному между образующей круглого прутка и разверткой винтовой линии:

$$\mathrm{tg}\gamma_{z\theta} \approx \gamma_{z\theta} = \gamma = \frac{\alpha\rho}{\ell} = \theta\rho,$$

где ρ - текущий радиус.

Напряженное состояние является плоским и осесимметричным, а матрицы тензоров напряжений и деформаций имеют вид

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\theta z} \\ 0 & \tau_{z\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{\vartheta z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{z\theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

При кручении моментом цилиндрического прутка в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения

$$\tau_{\theta z} = \tau = G\gamma = G\theta\rho .$$

В случае упругого кручения касательные напряжения максимальны на периферии при $\rho = R$ $\tau = \tau_R$ и по линейному закону уменьшаются, обращаясь в нуль в центре сечения (рис. 66):

$$\tau = \frac{\rho}{R}\tau_R.$$

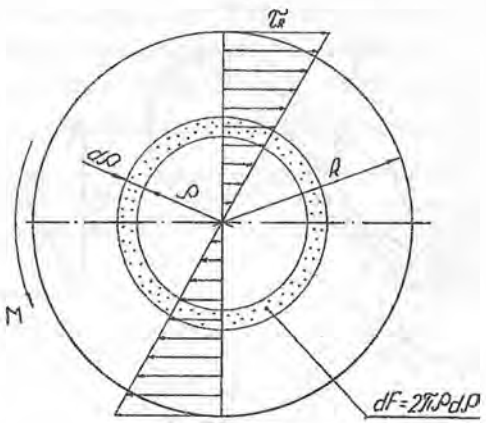


Рис. 66

Действуя на кольцевую площадку $dF = 2\pi\rho d\rho$, они создают элементарный момент относительно оси, равный $dM = 2\pi\rho^2 d\rho \cdot \tau$. Тогда крутящий момент в упругой области равен

$$M_y = 2\pi \int_0^R \tau \rho^2 d\rho = 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{R} \tau_R \rho^2 d\rho = \tau_R \frac{\pi R^3}{2} = C\theta J_\rho , \qquad (63)$$

где J_ρ - полярный момент инерции для круглого поперечного сечения:

$$J_\rho = 0{,}5\pi R^4 .$$

При увеличении момента кручения касательное напряжение τ_R достигает по условию пластичности Треска - Сен-Венана предельного значения

$$\tau_R = \tau_T = 0{,}5\sigma_T ,$$

и в поверхностном слое прутка возникает пластическая деформация (рис. 67). При дальнейшем увеличении M пластическая деформация распространяется вглубь. Величину радиуса C, определяющего границу между упругой и пластической зонами, легко найти по формуле

$$\tau_T = G\tau C ,$$

откуда

$$C = \frac{\tau_T}{G\theta} .$$

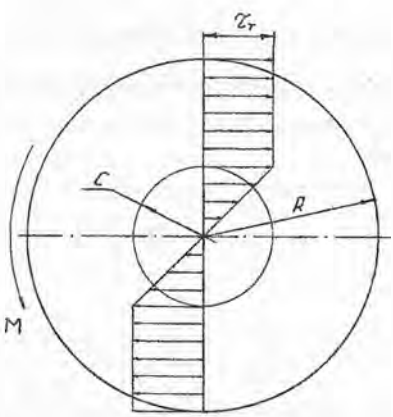


Рис. 67

Как видно из рис. 67, периферийные слои находятся в пластическом, а центральные – в упругом состоянии. Касательные напряжения распределены в поперечном сечении следующим образом:

$$\tau = \begin{cases} \tau_T, R \geq \rho \geq C, \\ \dfrac{\rho}{C}\tau_T, \rho \leq C. \end{cases}$$

Крутящий момент складывается из крутящего момента в упругой области M_y и крутящего момента в пластической области M_n:

$$M = M_y + M_n = 2\pi \int_0^C \frac{\rho}{C}\tau_T \rho^2 d\rho + 2\pi \int_C^R \tau_T \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi\tau_T\left(R^3 - \frac{C^3}{4}\right). \tag{64}$$

После снятия внешнего момента M (разгрузки) в прутке возникнут остаточные касательные напряжения

$$\tau_{ост} = \tau - \tau_{разг}, \tag{65}$$

вызывающие раскручивание прутка на угол ψ (рис. 68). Момент при упругой разгрузке равен

$$M_{разг} = 2\pi \int_0^R \tau_{разг} \frac{\rho}{R}\rho^2 d\rho = \tau_{разг}\frac{\pi R^3}{2}.$$

Из условия равенства суммы моментов нагрузки и разгрузки нулю ($M_{разг} + M = 0$) находим максимальное касательное напряжение $\tau_{разг}$:

$$\tau_{разг}\frac{\pi R^3}{2} + \frac{2}{3}\pi\tau_T\left(R^3 - \frac{C^3}{4}\right) = 0,$$

откуда

$$\tau_{разг} = -\frac{4}{3}\tau_T\left(1 - \frac{1}{4}\frac{C^3}{R^3}\right).$$

Согласно формуле (65) распределение остаточных касательных напряжений имеет вид

$$\tau_{ост} = \tau_T \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\rho}{R} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{C^3}{R^3} \right) \right] \text{ при } C \le \rho \le R,$$

$$\tau_{ост} = \tau_T \frac{\rho}{C} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\rho}{R} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{C^3}{R^3} \right) \right] \text{ при } 0 \le \rho < C.$$

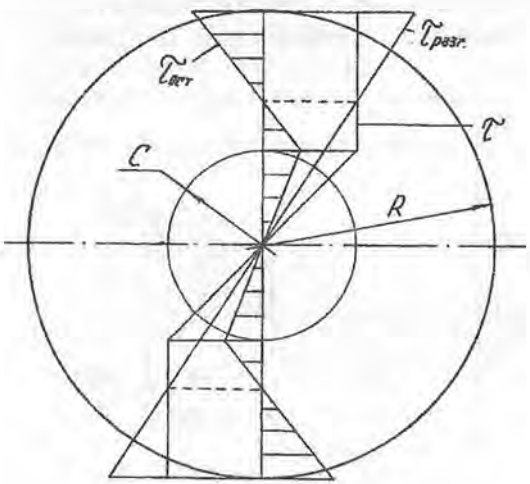


Рис. 68

Из рис. 68 видно, что остаточные касательные напряжения отрицательны на внешней части поперечного сечения прутка и положительны во внутренней.

Угол упругой раскрутки найдем из уравнения

$$\psi = \frac{M}{GJ_\rho}. \tag{66}$$

После подстановки (66) в (64) имеем

$$\psi = \frac{4\tau_T}{3GR^4} \left(R^3 - \frac{1}{4} C^3 \right) = \frac{4}{3} \theta \frac{C}{R} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{C^3}{R^3} \right).$$

Остаточный угол кручения

$$\beta = \theta - \psi = \theta\left[1 - \frac{4}{3}\frac{C}{R}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{C^3}{R^3}\right)\right].$$

4.9. Постулат Друкера

Согласно постулату Друкера в цикле нагружения – разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации. Покажем это.

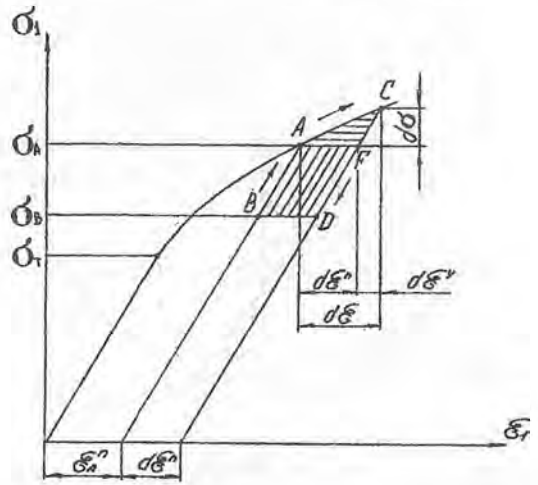


Рис. 69

Произведем простое нагружение образца до точки A ($\sigma_A > \sigma_T$), затем разгрузку его до точки B (рис. 69). Это состояние примем за начальное. Далее произведем нагружение по линии BA. Точка A лежит на кривой упрочнения, так что ей соответствует начало пластического состояния. Из точки A произведем бесконечно малое догружение на величину $d\sigma$ до точки C, вызывающее приращение пластической деформации $d\varepsilon^n$. Наконец, произведем разгрузку до начального напряжения σ_B в точке D. Удельная работа пластической

деформации в цикле нагружения – разгрузки $BACD$ равна сумме площадей параллелограмма и криволинейного треугольника ACF, следовательно

$$\begin{aligned} (\sigma_A - \sigma_B) d\varepsilon^n > 0, \\ d\sigma d\varepsilon^n > 0. \end{aligned} \qquad (67)$$

Таким образом, за цикл нагружения и разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу на вызванных ими деформациях. В (67) входят только приращения пластической деформации, так как работа добавочных напряжений на приращениях упругой деформации в замкнутом по нагружению цикле равна нулю.

В случае объемного напряженного состояния напряжения в начальном состоянии в точке B обозначим через σ_{ij}^o (рис. 70).

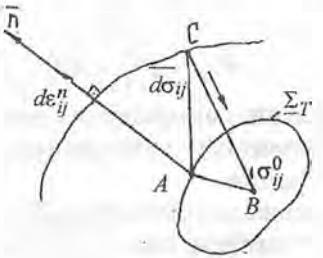


Рис. 70

Произведем нагружение в упругой области по линии BA. Точка A лежит на поверхности Σ_T, соответствующей началу пластического течения. Из точки A произведем бесконечно малое догружение $d\sigma_{ij}$ до точки C (вектор $\overline{AC}$), что вызовет пластическую деформацию $d\varepsilon_{ij}^n$. Вернемся теперь в точку B. Согласно постулату Друкера за весь цикл нагружения и разгрузки $BACB$ добавочные напряжения $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^o$ и $d\sigma_{ij}$ выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации

$$\left(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{o}\right)d\varepsilon_{ij}^{n}>0,$$

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{n}>0.$$

Из постулата Друкера следует, что поверхность нагружения является выпуклой, а вектор, изображающий приращения пластических деформаций, $d\varepsilon_{ij}^{n}$ направлен по нормали к ней.

4.10. Ассоциированный закон течения

Как только возникают пластические деформации, определяющие уравнения теории упругости перестают быть верными. В силу того что пластическая деформация зависит от истории нагружения материала, в теории пластичности соотношения между напряжениями и деформациями очень часто формулируются через приращения деформаций

$$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{y}+d\varepsilon_{ij}^{n}.$$

Для вывода уравнений, связывающих приращения компонент деформации с компонентами напряжений, применяется ассоциированный закон течения.

Компоненты приращения пластической деформации являются функциями компонент напряжений. Поэтому приращение работы пластической деформации $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{n}$ также является функцией компонент напряжений. Однако они не являются независимыми, так как удовлетворяют условию пластичности $F\left(\sigma_{ij}\right)=K$. Поэтому условие максимума функции приращения работы пластической деформации $\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{n}$ по способу множителя Лагранжа запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_{ij}}\left(\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^{n}-d\lambda F\right)=0,$$

где $d\lambda$ - множитель Лагранжа. Отсюда следует:

$$d\varepsilon_{ij}^{n}=d\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}. \qquad (68)$$

Это соотношение является математическим выражением ассоциированного (с условием пластичности) закона течения.

Поясним полученный результат геометрически. Из соотношения (67) следует, что скалярное произведение двух векторов $\left(\overline{\sigma}_{ij} - \overline{\sigma}^{o}_{ij}\right)$ и $d\varepsilon^{n}_{ij}$ положительно, т.е. угол между ними острый (рис. 71).

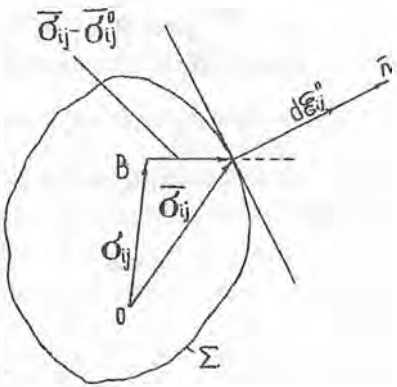


Рис. 71

Так как точка B может быть взята по обе стороны от вектора $\overline{\sigma}_{ij}$, то поверхность нагружения Σ выпукла, а вектор приращения пластической деформации $d\overline{\varepsilon}^{n}_{ij}$ направлен по нормали к поверхности нагружения. Только при выполнении этих двух условий угол между векторами $\overline{\sigma}_{ij} - \overline{\sigma}^{o}_{ij}$ $d\varepsilon^{n}_{ij}$ будет острым.

Поскольку направляющие косинусы нормали к поверхности пропорциональны частным производным от уравнения поверхности по координатам, приходим к соотношению (68).

4.11. Теория малых упругопластических деформаций

Эта теория разработана А.А. Ильюшиным. Она устанавливает связь между напряжениями и деформациями и применима при условии простого нагружения. Деформации являются достаточно малыми,

так что квадратами и произведениями их можно пренебречь. Кроме того, деформации являются упругопластическими, когда в одних частях тела возникают только упругие, в других – пластические деформации.

В основе теории лежат следующие гипотезы:

1. Объемная деформация элемента тела всегда является упругой и связана со средним напряжением такой же зависимостью, как и при упругой деформации:

$$\sigma_{cp} = K\theta \text{ или } \sigma_{cp} = 3K\varepsilon_{cp}.$$

Часто твердое тело полагают несжимаемым, тогда

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_{cp} = 0.$$

2. Девиаторы напряжений и деформаций совпадают с точностью до постоянного множителя (подобны между собой) ψ:

$$D_\sigma = \psi D_\varepsilon.$$

В развернутом виде:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{xy} = \psi\frac{1}{2}\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{yz} = \psi\frac{1}{2}\gamma_{yz},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = \psi(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}), \quad \tau_{zx} = \psi\frac{1}{2}\gamma_{zx}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, выразим параметр ψ через интенсивности напряжений и деформаций σ_i и ε_i:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} =$$

$$= \frac{\psi}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} = \psi\frac{3}{2}\varepsilon_i.$$

Откуда

$$\psi = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}.$$

После подстановки связь между напряжениями и деформациями имеет вид

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}\right), \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y - \sigma_{cp} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}\right), \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{yz},$$

$$\sigma_z - \sigma_{cp} = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}\right), \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{zx}.$$

Это и есть физические уравнения теории малых упруго-пластических деформаций. Они играют такую же роль, как уравнения обобщенного закона Гука. Но в отличие от последних, они являются нелинейными.

Когда пластически деформированное тело предполагается несжимаемым, то уравнения примут вид

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_x - \sigma_{cp}\right), \quad \gamma_{xy} = 3\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy},$$

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_x - \sigma_{cp}\right), \quad \gamma_{yz} = 3\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz},$$

$$\varepsilon_x = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_x - \sigma_{cp}\right), \quad \gamma_{zx} = 3\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx}.$$

3. Интенсивность напряжений σ_i является для заданного материала вполне определенной функцией от интенсивности деформаций ε; $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$.

Вид этой функции определяется механическими свойствами материала и не зависит от характера напряженного состояния. Функция $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$ действительна как для упругой, так и пластической области (гипотеза единой одной кривой). Кривую $\sigma_i = \mathrm{E}(\varepsilon_i)$ строят на основании опытных данных при простом растяжении.

Теория располагает тремя дифференциальными уравнениями статического равновесия, являющимися едиными для упругой и пластической области:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

Шестью геометрическими уравнениями Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right).$$

Шестью физическими уравнениями:

$$D_\sigma = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} D_\varepsilon .$$

Уравнением для расчета ε_i и зависимостью $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$.

Всего имеем 17 уравнений с 17 неизвестными ($U_i, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \sigma_i, \varepsilon_i$). Решение задачи будет такое, когда для каждой точки деформированного тела удовлетворяются все уравнения. Кроме того, на границе тела должны быть выполнены контурные условия:

$$S_k = \sigma_{jk} n_j .$$

Экспериментальные исследования подтверждают корректность теории (рис. 72).

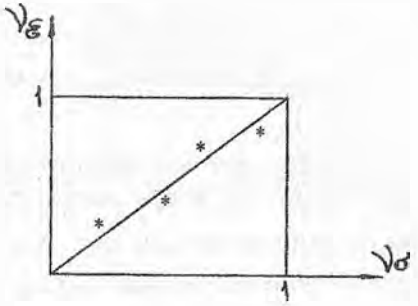


Рис. 72

Решение задач пластичности по теории малых упругопластических деформаций, как и задач упругости, можно получить двумя основными методами: в перемещениях или в напряжениях.

В плоских и осесимметричных задачах число уравнений уменьшается. Например, при плоском напряженном состоянии их будет восемь:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\sigma_x-\sigma_{cp}=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_x,$$

$$\sigma_y-\sigma_{cp}=\frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_y,$$

$$\tau_{xy}=\frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}\gamma_{xy},$$

$$\varepsilon_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}\gamma_{xy}^2},$$

$$\sigma_i=\Phi(\varepsilon_i).$$

4.12. Теория пластического течения

Теория пластического течения устанавливает связь между бесконечно малыми приращениями пластической деформации и напряжениями.

Она основывается на следующих гипотезах:

1. Соблюдается объемный закон Гука:

$$\varepsilon_{cp}=\frac{1}{3K}\sigma_{cp}=\frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_{cp}.$$

2. Полные приращения компонент деформации равны сумме приращений упругих и пластических деформаций, т.е.

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^y + d\varepsilon_x^n \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^y + d\gamma_{xy}^n .$$

Индексы y и n означают соответственно упругую и пластическую деформации.

В соответствии с первой гипотезой отсюда следует равенство:

$$d\varepsilon_{cp}^n = d\varepsilon_x^n + d\varepsilon_y^n + d\varepsilon_z^n = 0 .$$

Это условие можно интерпретировать как несжимаемость материала в пластическом состоянии.

Девиатор приращений пластических деформаций имеет вид

$$D_{d\varepsilon^n} = \begin{pmatrix} d\varepsilon_x^n & \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^n & \frac{1}{2}d\gamma_{xz}^n \\ \frac{1}{2}d\gamma_{yx}^n & d\varepsilon_y^n & \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^n \\ \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^n & \frac{1}{2}d\gamma_{zy}^n & d\varepsilon_z^n \end{pmatrix}.$$

3. Компоненты девиатора приращений пластических деформаций и девиатора напряжений равны с точностью до бесконечно малого скалярного множителя $d\lambda$:

$$D_{d\varepsilon^n} = d\lambda D_\sigma .$$

В развернутом виде это равенство записывается так:

$$d\varepsilon_x^n = d\lambda\left(\sigma_x - \sigma_{cp}\right), \quad \frac{1}{2}d\gamma_{xy}^n = d\lambda\tau_{xy},$$

$$d\varepsilon_y^n = d\lambda\left(\sigma_y - \sigma_{cp}\right), \quad \frac{1}{2}d\gamma_{yz}^n = d\lambda\tau_{yz},$$

$$d\varepsilon_z^n = d\lambda\left(\sigma_z - \sigma_{cp}\right), \quad \frac{1}{2}d\gamma_{zx}^n = d\lambda\tau_{zx}.$$

Воспользовавшись этими соотношениями, выразим параметр $d\lambda$ через интенсивности σ_i и $d\varepsilon_i^n$ (интенсивности приращений пластической деформации):

$$\sigma_i = \frac{3}{2}\frac{1}{d\lambda} d\varepsilon_i^n .$$

Отсюда следует:

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i^n}{\sigma_i} .$$

4. Соотношение между параметром упрочнения и интенсивностью σ_i не зависит от конкретного вида напряженного состояния.

Возьмем в качестве параметра упрочнения параметр Удквиста

$$q = \int d\varepsilon_i^n .$$

Тогда

$$\sigma_i = \Phi(q) = \Phi\left(\int d\varepsilon_i^n\right).$$

Интенсивность напряжений σ_i является функцией параметра Удквиста, не зависящей от вида напряженного состояния. Найдем эту зависимость, воспользовавшись диаграммой растяжения материала.

При одноосном растяжении имеем

$$\sigma_i = \sigma_1,$$
$$d\varepsilon_1^n = d\varepsilon^n .$$

По отношению к чисто пластическим деформациям материал несжимаем, поэтому

$$d\varepsilon_2^n = d\varepsilon_3^n = -\frac{d\varepsilon_1^n}{2} .$$

Тогда

$$q = \int d\varepsilon_i^n = \varepsilon^n,$$
$$\sigma = \Phi\left(\int d\varepsilon_i^n\right) = \Phi\left(\varepsilon^n\right),$$
$$d\varepsilon_i^n = d\varepsilon^n .$$

Теперь график зависимости $\Phi(\varepsilon^n)$ нетрудно построить по диаграмме растяжения, для чего в любой точке ее нужно найти величину упругой деформации ε^y (рис. 73).

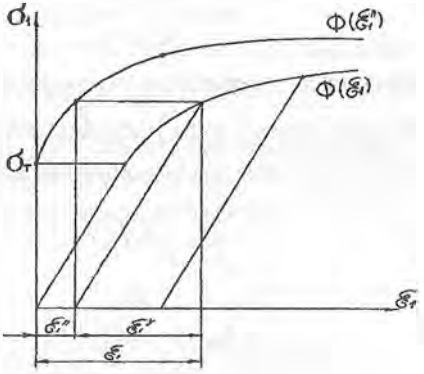


Рис. 73

Построенная таким образом кривая и является графиком функции $\Phi\left(\int d\varepsilon_i^n\right)$.

Уравнения теории пластического течения оказываются значительно сложнее уравнений теории малых упругопластических деформаций. При простом нагружении эти теории дают одинаковые решения. В случае сложного нагружения результаты, полученные с помощью теории пластического течения, лучше согласуются с экспериментальными данными, и поэтому эта теория находит применение при решении задач в случаях сложных нагружений.

4.13. Теория Сен-Венана - Леви - Мизеса

Теория Сен-Венана - Леви - Мизеса относится к группе теорий течения и устанавливает зависимость между компонентами напряжений и компонентами тензора скоростей деформаций. Для плоской задачи основные уравнения получены Сен-Венаном (1871), для пространственного случая - Леви, а затем Мизесом.

Основные гипотезы теории:

1. Главные оси напряжений совпадают с главными осями скоростей деформаций (в законе Гука $D_\sigma = 2GD_\xi$ G заменили на λ):

$$D_\sigma = 2\lambda D_\xi,$$

где A - модуль пластичности, величина переменная и неизвестная.

В развернутом виде

$$\begin{aligned}
\sigma_x - \sigma_{cp} &= 2\lambda\left(\xi_x - \xi_{cp}\right), \quad & \tau_{xy} &= \lambda\eta_{xy},\\
\sigma_y - \sigma_{cp} &= 2\lambda\left(\xi_y - \xi_{cp}\right), \quad & \tau_{yz} &= \lambda\eta_{yz},\\
\sigma_z - \sigma_{cp} &= 2\lambda\left(\xi_z - \xi_{cp}\right), \quad & \tau_{zx} &= \lambda\eta_{zx}.
\end{aligned}$$

2. В пластической области выполняется условие несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

или

$$\xi_x + \xi_y + \xi_z = 3\xi_{cp} = 0.$$

Тогда физические уравнения примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_x - \sigma_{cp} &= 2\lambda\xi_x, \quad & \tau_{xy} &= \lambda\eta_{xy},\\
\sigma_y - \sigma_{cp} &= 2\lambda\xi_y, \quad & \tau_{yz} &= \lambda\eta_{yz},\\
\sigma_z - \sigma_{cp} &= 2\lambda\xi_z, \quad & \tau_{zx} &= \lambda\eta_{zx},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x - \sigma_{cp} &= 2\lambda\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad & \tau_{xy} &= \lambda\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right),\\
\sigma_y - \sigma_{cp} &= 2\lambda\frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad & \tau_{yz} &= \lambda\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right),\\
\sigma_z - \sigma_{cp} &= 2\lambda\frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad & \tau_{zx} &= \lambda\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

3. Интенсивность нормальных (или касательных) напряжений постоянна в состоянии текучести:

$$\sigma_i = \sigma_T = \text{const},$$

или

$$\tau_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_S = \text{const},$$

или есть определенная для каждого материала функция интенсивности скоростей деформаций (или интенсивности скоростей деформации сдвига):

$$\sigma_i = \Phi(\xi_i)$$

или

$$\tau_i = f(\dot{\gamma}_i),$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_T.$$

Модуль λ получается следующим образом. Подставим в выражение σ_i значения физических уравнений:

$$\sigma_i = \frac{2\lambda}{\sqrt{2}}\sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + 6(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)}.$$

Откуда

$$\lambda = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\xi_i}.$$

Напряжения должны удовлетворять уравнениям движения сложной среды:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + x_i = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

4.14. Выводы

В процессах обработки металлов давлением при расчетах напряженно – деформированного состояния важно знать внешние нагрузки, при которых в деформируемом теле впервые появляются

пластические деформации. Условие, которому должны удовлетворять напряжения в заданной точке тела, чтобы в ней появились пластические деформации, называется условием (критерием) пластичности.

При линейном напряженном состоянии условие пластичности имеет вид $\sigma_1 = \sigma_T$. При сложном напряженном состоянии по предложению французских ученых Треска и Сен-Венана металл переходит в пластическое состояние, когда в нем наибольшее касательное напряжение достигает некоторого предельного значения $\tau_{max} = \tau_T$. Мизес и Генки в качестве условия пластичности предложили условие постоянства интенсивности напряжений $\sigma_i = \sigma_T$. Практика показала, что оба условия пластичности близки между собой и довольно правильно определяют начало пластической деформации, причем условие пластичности Мизеса оказывается более точным. Оба условия пластичности Треска - Сен-Венана и Мизеса (часто называемое энергетическим) принимают, что наступление пластичности не зависит от среднего напряжения и схемы напряженного состояния, а определяется свойствами деформируемого металла.

При исследовании пластической деформации тела огромное значение имеет характер нагружения тела. При простом нагружении в каждой точке тела внешние силы и напряжения возрастают пропорционально одному и тому же параметру. В противном случае нагружение будет сложным. Согласно теореме А.А. Ильюшина о простом нагружении для несжимаемого материала интенсивности напряжений и деформации связаны между собой степенной зависимостью вида $\sigma_i = A\varepsilon_i^n$.

При объемном напряженном состоянии поверхность нагружения является границей между упругими и пластическими деформациями. С увеличением пластической деформации по мере развития упрочнения поверхность нагружения расширяется и смещается. Расширение поверхности нагружения есть следствие упрочнения металла при пластической деформации. Смещение поверхности нагружения относительно начала координат есть следствие эффекта

Баушингера. Поверхность нагружения является выпуклой, а вектор, изображающий приращение пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^{n}$, направлен по нормали к ней. Согласно постулату Друкера в цикле нагружения – разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу.

При разгрузке тела (снятие внешних сил) деформация частицы происходит благодаря накопленной ею упругой потенциальной энергии. После полной разгрузки, когда внешние силы уменьшаются до нуля, в теле будут остаточные напряжения σ_{ij}^{ocm} и остаточные деформации ε_{ij}^{ocm}, определяемые по теореме о разгрузке, предложенной А.А. Ильюшиным.

Теории пластичности могут быть условно отнесены к двум типам: деформационным теориям и теориям пластического течения. В теориях первого типа при построении физических уравнений устанавливается связь между напряжениями и деформациями, в теориях пластического течения – связь между бесконечно малыми приращениями компонент пластической деформации и напряжениями. Отсюда видна принципиальная разница между указанными теориями. В деформационных теориях физические уравнения являются конечными нелинейными соотношениями, в теориях пластического течения – дифференциальными. Одной из теорий деформационного типа является теория малых упругопластических деформаций.

Задания для самоконтроля

1. Что такое условие пластичности?
2. Запишите условие пластичности для одноосного растяжения, чистого сдвига.
3. Перечислите требования, предъявляемые к критериям пластичности.
4. Какие пределы текучести Вы знаете? Какова между ними связь по условию пластичности Треска, Мизеса?
5. Сформулируйте условие пластичности Треска – Сен-Венана для объемного напряженного состояния.
6. Что собой представляет геометрическая интерпретация условия пластичности Треска – Сен-Венана?
7. Запишите условие пластичности Треска – Сен-Венана для плоского напряженного и плоского деформированного состояний.
8. Опишите кривую текучести для плоского напряженного состояния в главных осях по условию пластичности Треска – Сен-Венана.
9. Запишите условие Мизеса для объемного напряженного состояния в произвольных осях.
10. Почему условие пластичности Мизеса часто называют энергетическим?
11. Запишите энергетическое условие пластичности для плоского напряженного и плоского деформированного состояний.
12. При каких напряженных состояниях энергетическое условие пластичности и условие пластичности Треска – Сен-Венана совпадают? Когда между ними наибольшая разница?
13. Дайте геометрическую интерпретацию условия пластичности Мизеса в главных осях для объемного напряженного и плоского напряженного состояний.
14. Какая связь между σ_T и τ_T по энергетическому условию пластичности?
15. Насколько значительно влияние среднего главного нормального напряжения σ_2 на наступление пластического состояния?
16. Как проверяют условия пластичности?

17. Как получить линейную форму записи энергетического условия пластичности?

18. Как выглядит график изменения коэффициента Лоде в зависимости от показателя вида напряженного состояния?

19. Что представляют собой Р+М-опыты?

20. Почему в результате обработки давлением поликристаллические металлы становятся анизотропными материалами?

21. Опишите природу деформационной анизотропии.

22. Запишите энергетическое условие начала пластичности для анизотропных материалов, предложенное Мизесом.

23. Какую расшифровку условия Мизеса для анизотропных тел сделал Хилл?

24. Как выглядит условие пластичности для анизотропных сред, предложенное Ю.М. Арышенским?

25. Что представляют собой коэффициенты μ_{ij} в пластической области. Как они взаимосвязаны между собой для несжимаемых тел?

26. Дайте геометрическую интерпретацию энергетического условия пластичности для анизотропных сред при плоском напряженном состоянии.

27. Что такое начальный и текущий пределы текучести? Укажите критерий нагружения и разгрузки при одноосном растяжении.

28. Что такое поверхность нагружения? Что она представляет собой для случая изотропного упрочнения, если следовать условиям пластичности Треска – Сен-Венана и Мизеса?

29. Какие берут параметры в качестве меры упрочнения?

30. Опишите трансляционное упрочнение.

31. Чем объясняется расширение и смещение поверхности нагружения в процессе деформаций?

32. Сформулируйте теорему А.А. Ильюшина о простом нагружении.

33. При какой схеме упрочнения металла качественно описывается эффект Баушингера?

34. В чем состоит гипотеза "единой кривой"?

35. Сформулируйте теорему А.А. Ильюшина о разгрузке для случаев полной и частичной разгрузки (когда внешние силы уменьшаются не до нуля).

36. При кручении круглого прутка все поперечное сечение перешло в идеально пластическое состояние. Привести эпюры действующих и остаточных касательных напряжений.

37. Почему отсутствует однозначная связь между пластическими деформациями и напряжениями?

38. Дайте определение постулата Друкера для упрочняющейся и не упрочняющейся пластической среды в случае линейного и объемного напряженных состояний.

39. Сформулируйте ассоциированный закон течения.

40. Как направлен вектор $d\varepsilon_{ij}^{n}$ к поверхности нагружения?

41. Докажите выпуклость поверхностей текучести и нагружения.

42. Назовите основные гипотезы теории течения.

43. Как получить связь между напряженным и деформированным состояниями в теории течения?

44. Запишите физические уравнения теории Сен-Венана – Леви – Мизеса.

45. Какие теории целесообразно использовать при простом нагружении, сложном нагружении?

46. Основные предпосылки теории малых упругопластических деформаций.

47. В каких случаях расчеты напряженно-деформированного состояния по различным теориям пластичности совпадают?

48. Как производят проверку теорий пластичности?

49. Перечислите основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций, теории пластического течения.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Записать условие пластичности ортотропной среды для случая плоского напряженного и плоского деформированного состояний, используя выражение σ_{i1}.

2. Произвести те же действия, что и в задаче 1, для трансверсального изотропного тела.

3. Энергетическое условие пластичности изотропного тела, записанное в главных осях, разрешить относительно σ_3. Затем, используя данные таблицы и принимая условно у всех сплавов $\mu_{12} = \mu_{21} = 0{,}5$, определить, какие сжимающие или растягивающие напряжения σ_3 необходимо приложить, чтобы материал перешел в пластическое состояние.

Материал	σ_1, МПа	σ_2, МПа	σ_3, МПа	μ_{12}	μ_{21}
МА-8	150	50	190	0,66	0,58
ВТ 1-2	350	-150	480	0,72	0,65
ОТ4 - 1	300	-100	560	0,8	0,72
ОХ18Н9Т	220	-40	250	0,43	0,43
08КП	200	50	240	0,68	0,57
Л62	90	-60	110	0,45	0,47

4. Аналогично 3 рассмотреть трансверсально-изотропное тело, считая плоскостью изотропии плоскость 1-2. В данных таблицы значение μ_{21} условно принять равным μ_{12}.

По результатам решения 2, 3 и 4 оценить влияние анизотропии.

5. В некоторой точке тела материал испытывает напряженное состояние, при котором $\sigma_3 = -\sigma_1$ $(\sigma_2 = 0)$. Исходя из энергетического условия пластичности определить, при каких числовых значениях тело перейдет в пластическое состояние.

Рассмотреть три случая:

а) среда изотропная $\sigma_S = 300$ МПа;

б) сплав трансверсально-изотропный (например, ОХ18Н9Т);

в) сплав ортотропный (например, МА-8).

6. Стальной изотропный тонкостенный цилиндр находится под действием внутреннего давления p_1. Найти его величину из условия, что в металле впервые появилось пластическое состояние.

Используя выведенную формулу, определить значение p_1, если $r_1 = 50$ мм, $r_2 = 150$ мм, а $\sigma_S = 700$ МПа.

7. В случае цилиндрической анизотропии напряжения в тонкостенных цилиндрах рассчитываются по формулам

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 C^{k+1} - p_2}{1 - C^{2k}} \left(\frac{\rho}{r_2}\right)^{k-1} + \frac{p_1 - p_2 C^{k+1}}{1 - C^{2k}} C^{k+1} \left(\frac{r_2}{\rho}\right)^{k+1},$$

$$\sigma_\rho = \frac{p_1 C^{k+1} - p_2}{1 - C^{2k}} \left(\frac{\rho}{r_2}\right)^{k-1} - \frac{p_1 - p_2 C^{k+1}}{1 - C^{2k}} C^{k+1} \left(\frac{r_2}{\rho}\right)^{k+1},$$

где

$$C = \frac{r_1}{r_2}, \quad k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_\rho}}.$$

Принимая для стали $k \approx 1{,}1$ и используя условие пластичности в виде

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \frac{\sigma_{S1}}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \quad (\mu_{12} = 0{,}62; \mu_{21} = 0{,}5),$$

получить величины, заданные в 7.

8. В 6 принять, что действует не только внутреннее, но и наружное давление:

а) $p_2 = 0{,}5p_1$; б) $p_2 = p_1$.

Что произойдет с цилиндром, если $p_2 = p_1$?

9. Напряженное состояние в точке тела задано в виде тензора

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 100 & 300 & 200 \\ 0 & 200 & 200 \end{pmatrix}.$$

Принимая $\sigma_S = 800$ МПа, выяснить, в упругом или пластическом состоянии находится точка изотропной среды.

10. Напряжения в некоторой точке изотропного тела: $\sigma_1 = 88$ МПа, $\sigma_2 = 80$ МПа, $\sigma_3 = -157$ МПа. Может ли металл с пределом текучести $\sigma_S = 196$ МПа находиться в упругом состоянии?

11. Напряжения в данной точке изотропного тела: $\sigma_1 = 30$ МПа, $\sigma_2 = -20$ МПа, $\sigma_3 = -10$ МПа. Каким пределом текучести должен обладать металл, чтобы при заданных напряжениях находиться в упругом состоянии?

12. Под действием напряжений $\sigma_1 = 50$ МПа, $\sigma_2 = -10$ МПа, $\sigma_3 = -20$ МПа изотропный металл, согласно условию максимальных касательных напряжений, оказался на пределе текучести. Какова величина предела текучести?

13. Записать условие пластичности максимальных касательных напряжений для плоского напряженного состояния $(\sigma_z = 0)$ и дать его геометрическую интерпретацию.

14. Записать энергетическое условие пластичности для случая плоского напряженного состояния $(\sigma_z = 0)$ и дать его геометрическую интерпретацию.

15. Стальной толстостенный цилиндр находится под действием внутреннего давления p_1. Определить предел пластического сопротивления, т.е. то наименьшее давление p_1, при котором весь металл перейдет в пластическое состояние (тело принять изотропным). Для численного решения использовать данные задачи 7.

16. Определить предел текучести пластического сопротивления стального цилиндра в случае цилиндрической анизотропии. Для численного решения использовать данные, приведенные в задаче 8.

17. В задаче 15 изменить условие, считая, что действует и наружное давление p_2. Рассмотреть два случая: $p_2 = 0{,}5p_1$ и $p_2 = -p_1$.

18. На поверхность листа из сплава ОТ4-1 (см. табл. к задаче3) была нанесена координатная сетка в виде кругов $d = 10$ мм. После деформации листа круги сетки превратились в эллипсы с размерами главных осей $2a = 11$ мм и $2b = 9{,}6$ мм. Кривая истинных напряжений аппроксимируется степенной функцией $\sigma_i = ke_i^n$, где k и n - константы материала. В данном случае $n = 0{,}116$, а $k = 940$ МПа. Считая, что главные оси деформации совпадают с осями эллипса, определить значение компонент напряжений и деформаций (σ_3 принять равным нулю). Как изменяются полученные результаты, если не учитывать анизотропию материала?

19. Известно, что при гидростатическом выпучивании листовых материалов в виде лунки $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Провести сравнение интенсивности деформаций и напряжений изотропного материала, трансверсально-изотропного сплава (например, ОХ18Н9Т) и одного из ортотропных листов. Данные по коэффициенту поперечной деформации взять из таблицы (задача 3).

20. Определить значение коэффициента Лоде β для материалов, указанных в таблице (задача 3).

Рассмотреть случаи, когда $\nu_\sigma = 0$, $\nu_\sigma = 1$, $\nu_\sigma = -1$.

21. Тонкостенная труба ($S = 1$ мм) из алюминиевого сплава с внешним диаметром $d = 50$ мм подверглась растяжению и внутреннему давлению так, что все время сохранялось следующее равенство между напряжениями: $\sigma_\theta = 2\sigma_z$. Деформация проводилась вплоть до конечного осевого напряжения $\sigma_z = 200$ МПа. Принимая материал трансверсально-изотропным $(\mu_{12} = 0{,}36)$ и коэффициенты степенной аппроксимации $n = 0{,}25$, $k = 500$ МПа, определить конечные размеры трубы.

22. Найти связь между напряжениями и деформациями в пластической области, когда $\varepsilon_z = 0$. Рассмотреть три случая:

а) материал принять изотропным;

б) тело является трансверсально-изотропным;

в) среда – ортотропная.

Упрочнение материала аппроксимировано степенной функцией $\sigma_i = k\varepsilon_i^n$.

23. Длинная толстостенная труба находится под давлением. Определить напряженно-деформированное состояние и размеры трубы после деформации, если известно:

а) внутреннее давление p_1 $(p_2 = 0)$;

б) внешнее давление p_2 $(p_1 = 0)$.

Материал трубы (несжимаемый) последовательно принять изотропным, трансверсально-изотропным и ортотропным. Упрочнение принять по степенному закону.

24. Определить напряженно-деформированное состояние в длинной толстостенной трубе, а также внутреннее давление p_1, если известно изменение радиуса Δr.

Рассмотреть два случая:

а) $p_2 = 0$;

б) $p_2 \neq 0$.

Материал трубы принять согласно 23. Задачу решить при условии степенного закона упрочнения.

25. Определить напряженно-деформированное состояние в длинной толстостенной трубе, а также внешнее давление p_2, если известно, что $\Delta r_2 = r_2 - r_{20}$.

Рассмотреть два случая:

а) $p_1 = 0$;

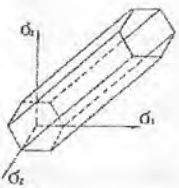
б) $p_1 \neq 0$.

Материал трубы принять по условию задачи 23.

УСЛОВИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

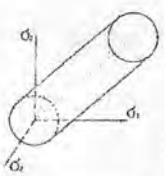
Треска-Сен-Венан

$\tau_{max} = K$



Мизес

$\sigma_i = \sigma_T$



НАГРУЖЕНИЕ ТЕЛА ВНЕШНИМИ СИЛАМИ

- Поверхность нагружения
- Простое нагружение
- Сложное нагружение

УСЛОВИЕ УПРОЧНЕНИЯ

- Гипотеза единой кривой
- Энергетическая гипотеза
- Параметр Удквиста
- Постулат Друкера

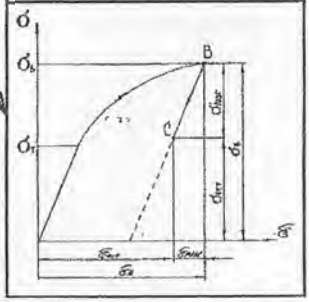
- *Пластическое состояние тела*
- *Упругопластическое состояние тела*

$U_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$

ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

- Теория малых упругопластических деформаций
- Теория пластического течения
- Теория Сен-Венана-Леви-Мизеса

ТЕОРЕМА О РАЗГРУЗКЕ



РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. М.:Машиностроение, 1971. 424 с.

2. Джонсон У., Меллор П.Б. Теория пластичности для инженеров. М.:Машиностроение, 1979. 567 с.

3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

4. Безухов Е.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.:Высш. шк. 1968. 512 с.

5. Элементы теории упругости и пластичности в авиастроении: Метод. указания / Куйбышев. авиац. ин-т; Сост. Ю.М. Арышенский, В.Р.Каргин. Куйбышев, 1990. 32 с.

6. Арышенский Ю.М. Гречников Ф.В. Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов. М.:Металлургия, 1992. 304 с.

7. Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш. Механика пластических деформаций при обработке металлов. М.: Машиностроение, 1969. 504 с.

8. Гун Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением М.:Металлургия, 1980. 456 с.

9. Арышенский Ю.М., Гречников Ф.В., Каргин В.Р. Избранные разделы по теории пластичности: Учебное пособие / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 1995. 64 с.

10. Ильюкович Б.М. Введение в теорию пластичности. Киев: Выща шк. 1983. 160 с.

11. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. Теория пластичности. М.: Металлургия, 1987. 352 с.

12. Шевченко К.Н. Основы математических методов в теории обработки металлов давлением. М.: Высш. шк. 1970. 351 с.

Каргин Владимир Родионович

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Учебное пособие

Редактор Л. Я. Чегодаева
Корректор Н. С. Куприянова

Компьютерная верстка О. А. Ананьев
Т. Е. Половнева

Подписано в печать 26.08.2002 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13,2. Усл. кр.-отт. 13,7. Уч.-изд.л. 14,0.
Тираж 500 экз. Заказ 52 . Арт. С-16/2002.

Самарский государственный аэрокосмический
университет им. академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

РИО Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.