

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

Содержание

Б.А.Горлач ^{gg}

МАТЕМАТИКА

Учебник
для студентов заочного обучения

Часть 2

Самарский Государственный
аэрокосмический университет
БИБЛИОТЕКА
Учебный фонд

Самара 2000

МАТЕМАТИКА: Учебник для студентов заочного обучения. Часть 2.
/Б.А.Горлач. Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2000. 254 с.

ISBN 5-7883-0074-6

Излагаются сопровождаемые примерами решения задач основы интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, математической статистики и линейной алгебры в объеме минимально необходимых знаний для специалистов с высшим техническим и экономическим образованием. Даны условия задач для самостоятельного решения и задание для выполнения расчетных работ. Приводятся вопросы для самоконтроля усвоения материала.

Учебник предназначен для студентов заочного обучения. Он будет полезен также студентам других форм обучения для самостоятельного овладения материалом.

Табл. 39. Ил. 33. Библиогр.: 13 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета.

Рецензент Л.В.Коломиец.

ISBN 5-7883-0074-6

© Б. А. Горлач
© Самарский аэрокосмический
университет, Самара, 2000

Содержание

Предисловие

7

1 Неопределенный интеграл	11
1.1 Первообразная и неопределенный интеграл	11
1.2 Свойства неопределенного интеграла	12
1.3 Таблица основных интегралов	13
1.4 Метод замены переменной	14
1.5 Метод интегрирования по частям	15
1.6 Приведение неправильной дроби	17
1.7 Представление правильных дробей	18
1.8 Интегрирование рациональных дробей	19
1.9 Представление правильных дробей	20
1.10 Интегрирование рациональных дробей	21
1.11 Интегрирование тригонометрических функций	23
1.12 Вопросы	25
1.13 Упражнения	26
2 Определенный интеграл	29
2.1 Понятие определенного интеграла	29
2.2 Свойства определенного интеграла	30
2.3 Вычисление интегралов	32
2.4 Несобственные интегралы	33
2.5 Геометрический смысл интеграла	34
2.6 *Приложение интеграла в экономике	38
2.7 Приближенное вычисление интегралов	42
2.8 Формула Симпсона	44
2.9 Вопросы	47

2.10 Упражнения	49
3 Дифференциальные уравнения	51
3.1 Дифференциальные уравнения	51
3.2 Неполные дифференциальные уравнения	54
3.3 Дифф. ур. с разделяющимися переменными	55
3.4 Линейные дифференциальные уравнения	57
3.5 ОЛДУ второго порядка	59
3.6 ОЛДУ 2-го порядка с пост. коэфф.	62
3.6.1 Корни характеристического уравнения	63
3.6.2 Корни характеристического уравнения мнимых	64
3.7 Неоднородные дифференциальные уравнения	66
3.7.1 Правая часть – полином	66
3.7.2 Правая часть – экспоненциальная функция	69
3.7.3 Правая часть – тригонометрические функции	72
3.8 Численные методы решения задачи Коши	75
3.9 Вопросы	78
3.10 Упражнения	81
3.11 Расчетная работа 3	82
4 Теория вероятностей	83
4.1 Основные понятия и определения	84
4.2 Вероятность события	86
4.3 Элементы комбинаторики	88
4.4 Вероятность произведения событий	92
4.5 Вероятность суммы событий	94
4.6 Полная вероятность. Формула Байеса	97
4.7 Формула Бернулли	99
4.8 Формулы Муавра-Лапласа и Пуассона	101
4.9 Вопросы	103
4.10 Упражнения	105
5 Случайные величины	109
5.1 Закон распределения дискретной величины	109
5.2 Действия над случайными величинами	111
5.3 Функция распределения случайной величины	111
5.4 Непрерывные случайные величины	111
5.5 Плотность вероятностей	111

5.6 Математическое ожидание и его свойства	118
5.7 Дисперсия	121
5.8 Законы распределения случайных величин	124
5.8.1 Равномерное распределение	124
5.8.2 Нормальное распределение (закон Гаусса)	126
5.9 Вопросы	129
5.10 Упражнения	131
6 Математическая статистика	135
6.1 Генеральная совокупность и выборка	136
6.2 Статистические ряды	137
6.3 Эмпирическая функция распределения	139
6.4 Гистограмма и полигон частот	141
6.5 Оценка математического ожидания	144
6.6 Оценка дисперсии случайной величины	147
6.7 Проверка статистических гипотез	149
6.8 Критерий согласия Пирсона χ^2	151
6.9 Обработка статистического материала (пример)	152
6.10 Вопросы	161
6.11 Упражнения	163
6.12 Задание на расчетную работу 4, часть 1	165
7 Теория корреляции	167
7.1 Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости	167
7.2 Пример корреляционной зависимости	168
7.3 Корреляционная таблица	171
7.4 Метод наименьших квадратов	174
7.4.1 Линейная аппроксимация	175
7.4.2 Квадратичная аппроксимация	177
7.5 Уравнения линейной регрессии	180
7.6 Коэффициент корреляции	183
7.7 Множественная корреляция	185
7.8 Построение корреляционных соотношений	188
7.9 Вопросы	193
7.10 Задание на расчетную работу 4, часть 2	195

8	Определители. Матрицы	197
8.1	Матрицы. Определения. Основные виды матриц	199
8.2	Определители	200
8.3	Свойства определителей	202
8.4	Разложение определителя	205
8.5	Линейные операции над матрицами	206
8.6	Произведение матриц	208
8.7	Обратная матрица	212
8.8	Матричный метод решения СЛАУ	215
8.9	Ранг матрицы	219
8.10	Вопросы	221
8.11	Упражнения	225
9	Системы уравнений и неравенств	225
9.1	Основные положения	226
9.2	Метод Гаусса решения СЛАУ	229
9.3	Теорема Кронекера-Капелли	233
9.4	Однородные системы уравнений	234
9.5	Выпуклые множества точек	236
9.6	Интерпретация решений СЛАУ	237
9.7	Неравенство с двумя переменными	240
9.8	Системы неравенств на плоскости	243
9.9	Вопросы	244
9.10	Упражнения	245
9.11	Задание на расчетную работу 5	246
	Приложения	249

Библиографический список

Предисловие

Пособие является второй частью общего курса математики, предназначенного для студентов заочного обучения по техническим и экономическим специальностям. Оно включает в себя девять глав.

1. Неопределенный интеграл.

Даны основные понятия. Приведена таблица интегралов. Рассмотрены основные приемы интегрирования.

2. Определенный интеграл.

Приведена формула Ньютона-Лейбница. Описаны основные свойства определенного интеграла. Рассмотрен геометрический смысл. Рассмотрены численные методы.

3. Дифференциальные уравнения. Изложение ограничено основными понятиями и рассмотрением уравнений первого порядка и линейных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка.

4. Теория вероятностей.

В главе даны основные понятия и определения теории вероятностей. Приведены способы вычисления вероятностей различных событий, в том числе сумм и произведений событий. Рассмотрены элементы комбинаторики.

5. Случайные величины.

Изложены основные способы и приемы построения законов распределения дискретных и непрерывных случайных величин. Рассмотрены методы вычисления вероятностей для сумм и произведений случайных величин. Даны определения и методы вычисления основных числовых характеристик случайных величин. Приведены основные законы распределения.

6. Математическая статистика.

Раскрыт смысл теории больших чисел, генеральной совокупности и выборки, вариационного ряда и гистограммы. Описаны методы оценки параметров случайных величин по их выборочным средним и выборочным дисперсиям. Рассмотрены способы построения теоретических рядов для опи-

сания полученных из опыта случайных величин. Дано понятие о критериях согласия.

7. Теория корреляций.

Изложены основы метода наименьших квадратов и его применения при построении линейных и нелинейных уравнений регрессии. Описаны методы корреляционного анализа, в том числе для двумерных случайных величин.

8. Определители. Матрицы.

Даны понятия определителей и матриц. Рассмотрены методы вычисления определителей различных порядков. Описаны основные действия над матрицами и их свойства, а также способы решения систем уравнений матричным методом и методом определителей. Сформулировано и проиллюстрировано на примере правило вычисления ранга матриц.

9. Системы уравнений и неравенств.

Описан метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Сформулирована и доказана теорема Кронекера-Капелли, в том числе для однородных СЛАУ. Описана схема получения множеств решений систем неравенств. Рассмотрен пример построения множества решений для систем неравенств с двумя переменными.

Изложение теоретического материала значительно упрощено по сравнению с традиционным материалом учебников по математике для технических вузов. В нем практически отсутствуют строгие доказательства теорем. Тем не менее, большое количество разобранных примеров и подробное пояснение смысла вводимых математических понятий и соотношений даст возможность читателям получить достаточно емкие знания по математике, необходимые для изучения специальных дисциплин.

Предлагаемые в конце каждой из глав вопросы для самостоятельного контроля усвоения материала необходимы и для самопроверки глубины усвоения материала и для подготовки к экзаменам.

В конце каждой главы приведены условия задач для обязательного самостоятельного их решения студентами и помогут приобрести навыки построения, решения и исследования математических моделей.

В четырех главах приводятся задания на расчетную работу, которые предназначены для освоения численных методов решения задач.

Читателям рекомендуется тщательно изучать материал по разделам. Важно усвоенный материал воспроизвести самостоятельно на бумаге, после чего выполнить упражнения, рекомендуемые к разделу и помещенные в конце главы.

После изучения материала главы следует ответить на "вопросы для самоконтроля усвоения материала" и при возникновении трудностей в от-

ветах на вопросы повторить соответствующий материал пособия.

Решения всех примеров записываются в отдельную тетрадь и представляются экзаменатору до экзамена.

Приобретению навыков численного решения задач будут способствовать обязательные для исполнения расчетные работы, задания на которые помещены в конце некоторых глав.

Примечание. Расчетная работа оформляется на стандартных листах бумаги размером А-4 с титульным листом, на котором указываются следующие параметры (в порядке следования)

1. Наименование учебного заведения (верхняя часть листа).
2. Номер расчетной работы.
3. Название работы.
4. Номер выполняемого варианта работы (пункты 2-3 располагаются немного выше середины листа).
5. Фамилия, номер группы и домашний адрес (только для студентов заочного обучения) исполнителя (информация располагается в правой половине листа примерно на треть от его нижней кромки).

В тексте отчета о выполненной работе проставляются пункты и записываются условия задания. Приводимые преобразования должны сопровождаться достаточно подробными для понимания непосвященного читателя описаниями.

Глава 1

Неопределенный интеграл

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Интегрирование является операцией, обратной по отношению к дифференцированию. Целью интегрирования является определение такой функции $F(x)$, производная от которой равна $f(x)$. Например, для $f(x) = x^3$ функция $F(x) = x^4/4$ удовлетворяет таким требованиям, так как $(x^4/4)' = x^3$.

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Если в первообразную входит в качестве слагаемого постоянная C , то есть $F(x) \Rightarrow F(x) + C$, то такая функция также будет первообразной той же функции $f(x)$, так как

$$(F(x) + C)' = f(x) \quad (1.1)$$

Таким образом, первообразную можно определить только с точностью до постоянного слагаемого. Отсюда следует, что если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные одной и той же функции $f(x)$, то эти первообразные отличаются друг от друга только на постоянное слагаемое ($F_1(x) - F_2(x) = C$). Конечно, в частном случае постоянная C может быть равна нулю.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных $F(x) + C$.

Это определение имеет символическую запись

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1.2)$$

где $\int$ —знак интеграла, $f(x)$ —подынтегральная функция, $f(x)dx$ —подынтегральное выражение.

Процесс нахождения интеграла называется *интегрированием*.

1.2 Свойства неопределенного интеграла

Сформулируем некоторые основные свойства неопределенного интеграла в виде теорем.

Теорема 1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал — подынтегральному выражению.

Действительно,

$$\left(\int f(x)dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x),$$

$$d \left(\int f(x)dx \right) = d(F(x) + C) = (F(x) + C)'dx = f(x)dx.$$

Теорема 2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

Покажем, что это так.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (1.3)$$

Так как $dF(x) = F'(x)dx$ и $F(x)$ —первообразная, то из определения (1.2) следует (1.3).

Теорема 3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

Убедимся в этом.

Согласно теореме 1 для левой части равенства запишем

$$\left(\int kf(x)dx \right)' = kf(x).$$

Дифференцирование правой части равенства приводит, очевидно, к тому же результату, так как постоянный множитель выносится за знак производной.

Теорема 4. Интеграл от алгебраической суммы двух подынтегральных функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.3, то есть дифференцированием обеих частей равенства и сравнением полученных результатов.

1.3 Таблица основных интегралов

Знание таблицы производных дает возможность определить первообразные многих функций, а корректность их определения проверить обратным действием — дифференцированием. Нижеследующие интегралы называются *табличными*.

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C; \quad (n \neq -1);$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
2. $\int \frac{dx}{x} = \lg |x| + C;$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
3. $\int e^x dx = e^x + C;$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

Проверим, например, две из приведенных формул

$$2. (\lg |x| + C)' = (\lg x + C)' = \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x > 0,$$

$$(\ln |x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x < 0.$$

$$8. (\operatorname{tg} x + C)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + C \right)' = \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Искусство интегрирования функций сводится, как правило, к преобразованию интегралов к табличным. Существуют несколько известных приемов осуществления этих операций. Рассмотрим некоторые из них. В нижеследующих преобразованиях не будут даваться пояснения очевидных приемов, основанных на использовании сформулированных в разделе 1.2 теорем, например, разложение на сумму интегралов, вынесение за знак интеграла постоянного множителя и т.д.

1.4 Метод замены переменной

Метод замены переменной в неопределенных интегралах опирается на правило дифференцирования сложной функции $f'_x(u) = f'_u u'_x$ и сводится к следующему преобразованию интеграла

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (1.4)$$

Отметим попутно, что обозначение переменного аргумента под знаком интеграла может, конечно, быть любым: $x, t, u, \dots$

Общего правила замены переменной под интегралом не существует. Однако, приобретаемый в процессе решения задач навык интегрирования вырабатывает интуицию в выборе функций, приводящих подынтегральное выражение к табличному путем замены переменной.

Приведем некоторые примеры решения задач интегрирования указанным методом. При преобразованиях интегралов в фигурных скобках приводятся обозначения, проводятся промежуточные преобразования, даются пояснения.

Примеры.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int x \sqrt[3]{x+1} dx = \\ &= \{ \text{введем переменную } t = \sqrt[3]{x+1}, \text{ тогда } x = t^3 - 1; dx = 3t^2 dt \} = \\ &= \int (t^3 - 1)t3t^2 dt = 3 \left(\int t^6 dt - \int t^3 dt \right) = \{ \text{табличные интегралы} \} = \\ &= 3 \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{4} t^4 \right) + C = \frac{3}{28} t^4 (4t^3 - 7) + C = \\ &= \{ \text{возвращаемся к исходной переменной} \} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{28} (4x - 3)(x + 1)^{4/3} + C.$$

$$J_2 = \int x e^{-x^2} dx = \{ t = -x^2; dt = -2x dx \} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

$$J_3 = \int \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \left\{ t = \ln x; dt = \frac{dx}{x} \right\} = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \{ t = \cos x; dt = -\sin x dx \} = - \int \frac{dt}{t} = \\ &= -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

При замене переменной справедливо соотношение

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать обе части приведенного соотношения

$$f(ax + b) = \frac{a}{a} F'(ax + b) + C' = F'(ax + b).$$

Поэтому формулы табличных интегралов легко обобщаются. Например,

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C.$$

1.5 Метод интегрирования по частям

Из полученной в разделе дифференцирования функций формулы дифференциала произведения

$$d(uv) = u dv + v du$$

следует

$$u dv = d(uv) - v du.$$

Интегрируя последнее равенство почленно, получим

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Эта формула представляет метод *интегрирования по частям* и во многих случаях облегчает задачу сведения интеграла к табличному. Постоянную интегрирования при этом писать не следует, так как она появится при взятии интеграла от второго слагаемого.

Рассмотрим типичные примеры использования процедуры взятия интегралов по частям.

$$\begin{aligned} J_1 = \int x e^{2x} dx &= \{u = x; dv = e^{2x} dx \Rightarrow du = dx; v = \frac{1}{2} e^{2x}\} = \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

$$J_2 = \int x^3 \ln x dx = \left\{ u = \ln x; dv = x^3 dx \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx; v = \frac{1}{4} x^4 \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^4 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C = \frac{1}{16} (4 \ln x - 1) + C.$$

Иногда интегрирование по частям приходится применять неоднократно. Например

$$\begin{aligned} J_3 = \int (x^2 + 1) e^{-x} dx &= \{u = x^2 + 1; dv = e^{-x} dx \Rightarrow du = 2x dx; v = -e^{-x}\} = \\ &= -(x^2 + 1) + 2 \int x e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Проведенные преобразования не дали возможности избавиться от интеграла в полученном результате. Рассмотрим этот интеграл и применим к нему метод интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= \{u = x; dv = e^{-x} dx \Rightarrow du = dx; v = -e^{-x}\} = \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C. \end{aligned}$$

Тогда

$$J_3 = -e^{-x}(x^2 + 1 + x + 1) + C = -(x^2 + x + 2)e^{-x} + C.$$

Интегрирование по частям рационально применять в случаях, когда подынтегральные функции содержат произведения полиномов n -ной степени

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

на другие функции:

$$\begin{aligned} \int P(x) e^{ax} dx; \quad \int P(x) \sin mx dx; \quad \int P(x) \cos mx dx; \\ \int P(x) \ln x dx; \quad \int P(x) \arcsin x dx. \end{aligned}$$

Отметим очевидные рекомендации для вычисления приведенных типов интегралов. Для интегралов первой строки в качестве переменной u следует выбирать полином ($u = P(x)$), так как взятие дифференциала от u в этом случае понижает порядок полинома на единицу. В интегралах второй группы новые переменные следует вводить так, чтобы $dv = P(x) dx$. Тогда дифференцирование второй функции произведения переведет ее в степенную функцию.

Рассмотренные методы замены переменной и интегрирования по частям требуют интуиции исполнителя и определенных навыков решения задач. Существуют приемы интегрирования (конечно для определенного вида подынтегральных функций), которые однозначно приводят к упрощению задачи взятия интегралов. В следующих разделах рассмотрены именно такие методы.

1.6 Приведение неправильной дроби к правильной

Прежде, чем приступить к изложению правил интегрирования дробных функций, рассмотрим некоторые понятия и положения, связанные с дробями.

Рациональной дробью называется выражение $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены (полиномы) в общем случае различных степеней. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе,

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \left\{ \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) \right\} = \\
 &= \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \\
 &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \{x = at; dx = a dt\} = \int \frac{adt}{a^2 t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\
 &= \{\text{табличный интеграл}\} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_4 &= \int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = \{x \pm a = t; dx = dt\} = \\
 &= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x \pm a} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_5 &= \int \frac{xdx}{(x \pm a)^2} = \left\{ \frac{x}{(x \pm a)^2} = \frac{1}{(x \pm a)} \mp \frac{a}{(x \pm a)^2} \right\} = \\
 &= \int \frac{dx}{x \pm a} \mp a \int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = \ln|x \pm a| \pm \frac{a}{x \pm a} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_6 &= \int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \{t = x^2 \pm a^2; dt = 2xdx\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \lg|t| + C = \\
 &= \frac{1}{2} \lg|x^2 \pm a^2| + C.
 \end{aligned}$$

1.9 Представление правильных дробей в виде суммы

Если знаменатель правильной дроби содержит полином, степень которого выше второй, то этот полином, как известно из алгебры, можно раз-

ложить на множители, равные разностям переменных в первой степени и корней полинома. Разложение полинома знаменателя дроби дает возможность представить эту дробь в виде суммы слагаемых.

Продemonстрируем сказанное на примере правильной дроби, которую представим в виде суммы двух слагаемых с неизвестными коэффициентами разложения A и B

$$\frac{x+a}{(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-b} + \frac{B}{x-c}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю

$$\frac{x+a}{(x-b)(x-c)} = \frac{(A+B)x - (Ac+Bb)}{(x-b)(x-c)}.$$

Для того, чтобы представленные дроби с равными знаменателями были равны, достаточно приравнять в их числителях множители, стоящие при x , и свободные члены. В результате приходим к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными A и B

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ cA + bB = -a \end{cases}$$

Решением этой системы уравнений являются выражения

$$A = \frac{b+a}{b-c}, \quad B = \frac{a+c}{b-c}.$$

Аналогичные разложения можно осуществить при любом числе множителей в знаменателе.

1.10 Интегрирование рациональных дробей

В результате осуществления действий над дробями, описанными в предыдущих двух разделах, интегрирование выражений, содержащих рациональные дроби, можно свести к следующим шести видам интегралов:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int \frac{dx}{x \pm a}; & J_2 &= \int \frac{dx}{x^2 - a^2}; & J_3 &= \int \frac{dx}{x^2 + a^2}; \\
 J_4 &= \int \frac{dx}{(x \pm a)^2}; & J_5 &= \int \frac{xdx}{(x \pm a)^2}; & J_6 &= \int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим последовательно каждый из шести представленных интегралов.

$$J_1 = \int \frac{dx}{x \pm a} = \{\text{табличный интеграл}\} = \ln |x \pm a| + C;$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \left\{ \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x+a} = \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \{x = at; dx = a dt\} = \int \frac{adt}{a^2 t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \{\text{табличный интеграл}\} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_4 &= \int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = \{x \pm a = t; dx = dt\} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x \pm a} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_5 &= \int \frac{x dx}{(x \pm a)^2} = \left\{ \frac{x}{(x \pm a)^2} = \frac{1}{(x \pm a)} \mp \frac{a}{(x \pm a)^2} \right\} = \\ &= \int \frac{dx}{x \pm a} \mp a \int \frac{dx}{(x \pm a)^2} = \ln |x \pm a| \pm \frac{a}{x \pm a} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_6 &= \int \frac{x dx}{x^2 \pm a^2} = \{t = x^2 \pm a^2; dt = 2x dx\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \lg |t| + C = \\ &= \frac{1}{2} \lg |x^2 \pm a^2| + C. \end{aligned}$$

1.11 Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим два типа интегралов от тригонометрических функций

$$1. \int \sin mx \sin nx dx; \quad \int \sin mx \cos nx dx; \quad \int \cos mx \cos nx dx; \quad (1.5)$$

$$2. \int \sin^m x \cos^n x dx, \quad (1.6)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$.

Использование известных из курса тригонометрии соотношений

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} \{ \cos [(m-n)x] - \cos [(m+n)x] \};$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} \{ \sin [(m-n)x] + \sin [(m+n)x] \};$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} \{ \cos [(m-n)x] + \cos [(m+n)x] \}$$

позволяет представить первую группу приведенных интегралов в виде табличных интегралов. Продемонстрируем сказанное на примере.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int \sin 3x \cos 6x dx = \{m=3, n=6\} = \frac{1}{2} \int \sin [(3-6)x] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int \sin [(3+6)x] dx = -\frac{1}{2} \int \sin 3x dx + \frac{1}{2} \int \sin 9x dx = \\ &= \frac{1}{6} \cos 3x - \frac{1}{18} \cos 9x + C. \end{aligned}$$

При преобразованиях интегралов второго типа используется замена четной степени одной из тригонометрических функций (синуса или косинуса) на другую с использованием соотношения $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и равенств $\cos x dx = d \sin x$ или $\sin x dx = -d \cos x$. Преобразование подынтегральных выражений и значение интеграла зависят от четности степеней m и n .

Пусть $n = 2k + 1$, то есть n — нечетный показатель степени. Тогда

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k d \sin x.$$

Для дальнейшего преобразования интеграла достаточно ввести новую переменную $t = \sin x$, которая сведет подынтегральную функцию к степенной.

Если оба показателя степени m и n во второй группе интегралов ?? — четные числа, то для преобразования подынтегрального выражения используются формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x); \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad (1.7)$$

Понижение степеней тригонометрических функций осуществляется до тех пор, пока показатель степени хотя бы одной из них не станет нечетным. Тогда интегрирование сводится к описанной выше схеме.

Приведем два примера вычисления интегралов

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \sin^6 x \cos^3 x dx = \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x) d \sin x = \{t = \sin x\} = \\ &= \int t^6 dt - \int t^8 dt = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C; \\ J_3 &= \int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \\ &= \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

В заключение главы отметим, что не всегда удается взять интегралы, то есть получить первообразную в виде комбинации элементарных функций. Такие интегралы принято называть *неберущимися*. К неберущимся интегралам относится, например, широко используемый в теории вероятностей интеграл $\int e^{-x^2} dx$. Для вычисления таких интегралов можно использовать численные методы.

1.12 Вопросы

1. Что такое первообразная? Обладают ли первообразные одной функции свойством единственности?
2. Дайте определение, в том числе в виде математического выражения, неопределенного интеграла.
3. Что такое подынтегральная функция? Подынтегральное выражение?
4. Перечислите четыре основных свойства неопределенного интеграла. Запишите эти свойства в виде математических выражений.
5. Воспроизведите таблицу основных интегралов. Докажите справедливость записанных выражений дифференцированием.
6. В чем заключается метод замены переменной в определенном интеграле? Воспроизведите формулу, соответствующую этому методу.
7. В чем заключается метод интегрирования по частям? Воспроизведите соответствующую формулу.
8. Какая формула дифференцирования служит базой для получения формулы дифференцирования по частям?
9. Какие функции в подынтегральном выражении рекомендуется выбирать в качестве u и dv при интегрировании по частям и в каких случаях?
10. Что называется рациональной дробью?
11. Как выделить из неправильной дроби полином и правильную дробь?
12. Как осуществить представление правильной дроби с полиномом произвольной степени в знаменателе в виде суммы правильных дробей со знаменателями, содержащими полиномы степени не выше второй?
13. Воспроизведите последовательности взятия интегралов от всех типов простейших рациональных дробей.
14. Как осуществляется интегрирование функций, содержащих произведения тригонометрических функций?
15. Что такое неберущиеся интегралы?

1.13 Упражнения

К разделу 4.1

Найти первообразные функций.

1.1. $3x^5$. 1.2. $x^3 - 3x + 2$. 1.3. $\frac{1}{x} + \frac{3}{x^4}$. 1.4. $3\sqrt[3]{x}$.

1.5. $1 - \sin^2 \frac{x}{2}$. 1.6. $\frac{1}{\sqrt{a+bx}}$. 1.7. e^{2-3x} . 1.8. $\frac{1}{\sqrt[3]{5x}}$.

1.9. $\frac{1}{\cos^2 3x}$. 1.10. $\frac{x^3 + 1}{x - 1}$.

К разделу 4.3

Найти интегралы, используя таблицу основных интегралов.

3.1. $\int \sqrt{mx} dx$. 3.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 3.3. $\int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}} dx$.

3.4. $\int \frac{x^4 - 16}{x} dx$. 3.5. $\int 2^x e^x dx$. 3.6. $\int (2x + 3 \cos x) dx$.

3.7. $\int \frac{2 - \sin x}{\sin^2 x} dx$. 3.8. $\int \frac{dx}{x^2 + 4}$. 3.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}$. 3.10. $\int \frac{(1 + x^2)^2}{x(1 + x^2)} dx$.

К разделу 4.4

Используя метод замены переменной, найти интегралы.

4.1. $\int \sqrt{3 + x} dx$. 4.2. $\int \frac{dx}{a + bx}$. 4.3. $\int x(2x + 5)^8 dx$.

4.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x}}$. 4.5. $\int \frac{x dx}{1 + x^2}$. 4.6. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2}$. 4.7. $\int \frac{e^x dx}{2 + e^x}$.

4.8. $\int x^2 e^{2x^3 + 1} dx$. 4.9. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$. 4.10. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

К разделу 4.5

Используя метод интегрирования по частям, найти интегралы.

5.1. $\int x \ln x dx$. 5.2. $\int x^3 e^{-x^2} dx$. 5.3. $\int x 2^{-x} dx$. 5.4. $\int x^2 e^{3x} dx$.

5.5. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$. 5.6. $\int \ln^2 x dx$. 5.7. $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx$.

5.8. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$. 5.9. $\int x \cos x dx$. 5.10. $\int x^2 \sin x dx$.

К разделу 1.10

Найти интегралы от рациональных дробей.

8.1. $\int \frac{dx}{(x-3)(x-4)}$. 8.2. $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

8.3. $\int \frac{dx}{5x^2 - 7}$. 8.4. $\int \frac{1-x}{x(x+1)} dx$.

8.5. $\int \frac{2x-3}{x^2-4} dx$. 8.6. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$. 8.7. $\int \frac{2x+3}{x^2 + 3x - 10} dx$.

8.8. $\int \frac{x dx}{x^2 + 3x + 2}$. 8.9. $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$. 8.10. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$.

Глава 2

Определенный интеграл

2.1 Понятие определенного интеграла

Определенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на конечном отрезке $[a, b]$ называется приращение ее первообразной на указанном отрезке.

В математических символах данное определение записывается в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad (2.1)$$

Числа a и b называются верхним и нижним пределами интегрирования. Равенство 2.1 называется формулой Ньютона-Лейбница.

Конечно, в качестве $F(x)$ может быть выбрана любая из первообразных функции $f(x)$. Действительно, так как первообразные отличаются друг от друга постоянными слагаемыми, то

$$(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Последнее соотношение указывает на то, что в качестве первообразной можно выбирать простейшую из них. В большинстве задач это первообразная, у которой постоянная интегрирования равна нулю.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ достаточно определить значение ее первообразной на концах интервала интегрирования $F(b)$ и $F(a)$ и затем найти разность полученных значений.

Примеры.

$$J_1 = \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_0^8 = \frac{3}{4} (8^{4/3} - 0^{4/3}) = 12;$$

$$J_2 = \int_1^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} e^2 (e^2 - 1).$$

Подставим в формулу Ньютона-Лейбница вместо верхнего предела b переменную $x \in [a, b]$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

При изменении переменной x меняется и определенный интеграл. Такой интеграл называется *интегралом с переменным верхним пределом*. В отличие от определенного интеграла, который является числом, интеграл с переменным верхним пределом является функцией переменной x

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Покажем, что $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) = f(x).$$

Функция $\Phi(x)$ — это такая первообразная функции $f(x)$, которая обращается в нуль при $x = a$.

2.2 Свойства определенного интеграла

Перечислим некоторые основные свойства определенного интеграла.

Во-первых, отметим, что все свойства неопределенных интегралов остаются справедливыми для определенных интегралов. Кроме того, определенные интегралы обладают некоторыми специфическими свойствами.

1. Определенный интеграл с равными пределами интегрирования равен нулю. Действительно,

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0.$$

2.2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2. Если отрезок интегрирования разбит на части, то определенный интеграл по всему отрезку равен сумме определенных интегралов, взятых по частям отрезка

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

В справедливости свойства можно убедиться, подставляя значения первообразных в левые и правые части записанного равенства

$$F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c).$$

Заметим, что точка со значением $x = c$ может лежать и за пределами отрезка интегрирования.

3. При перестановке пределов интегрирования знак интегрирования меняется на противоположный

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Покажем, что это так.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx.$$

4. (*Теорема о среднем*) Определенный интеграл равен произведению длины отрезка интегрирования $(b-a)$ на значение подынтегральной функции в некоторой конкретной точке $\xi \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi).$$

Действительно, применим теорему Лагранжа к первообразной $F(x)$ функции $f(x)$

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(\xi). \quad (2.2)$$

Так как $F'(\xi) = F'(x)|_{x=\xi} = f(x)|_{x=\xi} = f(\xi)$, то из (2.2) с учетом формулы Ньютона-Лейбница получим

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = (b-a)f(\xi).$$

Использование перечисленных свойств позволяет во многом облегчить процедуру вычисления определенного интеграла.

2.3 Вычисление определенных интегралов методами интегрирования по частям и замены переменной

Подставляя пределы интегрирования в формулу интегрирования неопределенного интеграла по частям

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

получим

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример.

$$J_1 = \int_e^{e^2} \ln x dx = \left[u = \ln x; dv = dx; \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; v = x \right] =$$

$$= x \ln x|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx = 2e^2 - e - x|_e^{e^2} = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Метод замены переменной выражается зависимостью ($x = \varphi(t)$)

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Если $x \in [a, b]$ и $f(x)$ — непрерывная функция, то $\varphi(t)$ так же должна быть непрерывной функцией, но на интервале, определяемом по $[a, b]$ функциональной зависимостью $x = \varphi(t)$.

Пусть

$$a = \varphi(\alpha) \quad \text{и} \quad b = \varphi(\beta),$$

тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) d\varphi(t).$$

Действительно,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) d\varphi(t) = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Примеры.

$$J_2 = \int_4^5 x \sqrt{x^2 - 16} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 - 16; \quad x = 4 \rightarrow t = 0 \\ dt = 2x dx; \quad x = 5 \rightarrow t = 9 \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^9 \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} t^{3/2} \Big|_0^9 = \frac{1}{3} (9^{3/2} - 0^{3/2}) = 9;$$

$$J_3 = \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1 + 3x; \quad x = \frac{1}{3}(t-1); \quad x = 1 \rightarrow t = 4 \\ dt = 3 dx; \quad x = 5 \rightarrow t = 16 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_4^{16} t^{-1/2} (t-1) \frac{1}{3} \frac{1}{3} dt = \frac{1}{9} \int_4^{16} (t^{1/2} - t^{-1/2}) dt =$$

$$= \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3} t^{3/2} - 2 t^{1/2} \right) \Big|_4^{16} = 3 \frac{19}{27};$$

$$J_4 = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos x; \quad x = 0 \rightarrow t = 1 \\ dt = -\sin x dx \quad x = \pi/2 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} =$$

$$= - \int_1^0 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

2.4 Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются интегралы с неограниченными одним или двумя пределами интегрирования или интегралы, подынтегральная функция которых терпит разрыв на интервале интегрирования.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в приложениях, в частности в теории вероятностей, несобственные интегралы с одним бесконечным пределом. Для определенности пусть бесконечным будет верхний предел. Под интегралами такого типа понимают интегралы, вычисляемые по схеме

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (2.3)$$

Если интеграл (5.3) существует и конечен, то он называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Примеры.

$$J_1 = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1;$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\infty} = -\lim_{b \rightarrow \infty} \cos b + 1.$$

Интеграл J_1 сходящийся, так как он имеет конечное значение. Что касается J_2 , то он на бесконечности неопределен, то есть интеграл расходящийся.

Для несобственных интегралов с бесконечным нижним пределом приведенная схема вычисления сохраняется с той лишь разницей, что к бесконечности следует устремлять нижний предел интегрирования.

Для интегралов с бесконечными нижним и верхним пределами (конечно, знаки бесконечностей различны) непосредственный переход к вычислению пределов может привести к некорректному результату. В частности, широко используемый в теории вероятностей интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

сходящийся, хотя его предельные значения при $t \rightarrow \pm\infty$ равны нулю и следовательно разность пределов при формальном подходе получилась бы равной нулю.

Подобные интегралы во избежание указанной некорректности рекомендуется вычислять, представляя в виде суммы двух интегралов с промежуточным конечным пределом интегрирования

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt.$$

2.5 Геометрический смысл определенного интеграла

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис.2.1) и определим *площадь криволинейной трапеции* – фигуры, заключенной между осью x , кривой $y = f(x)$ и прямыми, параллельными оси y : $x = a$ и $x = b$. Для этого разобьем

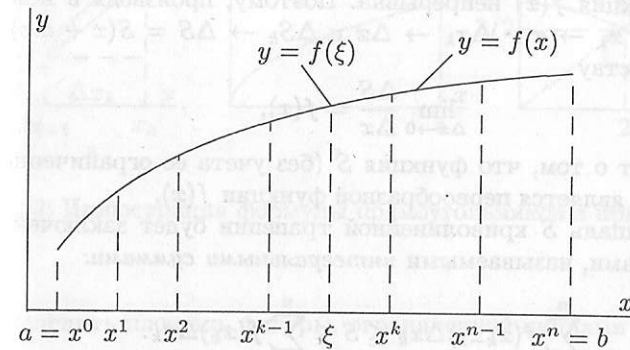


Рис. 2.1: Интегральная сумма

интервал $[a, b]$ на n в общем неравных отрезков $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = \overline{1, n}$) и определим значения

$$y_k = f(x_k)$$

на границах отрезков.

Считая функцию монотонно возрастающей (если это не так, то общий интервал $[a, b]$ можно разбить на подынтервалы только с возрастанием или только с убыванием функции), найдем минимальное и максимальное значения элементарных площадей, для каждого подынтервала (рис.2.2.a)

$$\Delta S_k^{\min} = f(x_{k-1})\Delta x_k; \quad \Delta S_k^{\max} = f(x_k)\Delta x_k. \quad (2.4)$$

Площадь элементарной криволинейной трапеции ΔS_k будет, очевидно, находиться в промежутке

$$\Delta S_k^{\min} \leq \Delta S_k \leq \Delta S_k^{\max}.$$

Разделим все части последнего неравенства на Δx_k и найдем предел полученного выражения при $\Delta x_k \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} f(x_{k-1}) \leq \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta S_k}{\Delta x_k} \leq \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} f(x_k). \quad (2.5)$$

Так как при $\Delta x_k \rightarrow 0$ $x_{k-1} \rightarrow x_k$, правая и левая части неравенства (2.5) равны $f(x_k)$. Тогда

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta S_k}{\Delta x_k} = f(x_k).$$

Последнее неравенство будет очевидно справедливо для любого $x \in [a, b]$, если функция $f(x)$ непрерывна. Поэтому, производя в нем естественные замены $x_k \rightarrow x$, $\Delta x_k \rightarrow \Delta x$ и $\Delta S_k \rightarrow \Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, придем к равенству

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x),$$

которое говорит о том, что функция S (без учета ее ограниченности интервалом $[a, b]$) является первообразной функции $f(x)$.

Полная площадь S криволинейной трапеции будет заключена между двумя величинами, называемыми *интегральными суммами*:

$$\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})\Delta x_k \leq S \leq \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k.$$

Для возрастающей функции левая часть последнего неравенства представляет собой минимальное значение интегральной суммы, правая – максимальное.

Из сказанного выше следуют очевидные соотношения:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx. \quad (2.6)$$

Замечание. Если функция $f(x)$ принимает отрицательные значения на некотором отрезке $[a, b]$, то для вычисления площади криволинейной трапеции, образованной функцией на этом отрезке, необходимо перед интегралами (2.6) поставить отрицательный знак

$$S = - \int_a^b f(x)dx.$$

При вычислении площадей криволинейных трапеций, образованных и меняющимися знаками функциями, необходимо разбить график функции на участки интегрирования с границами, соответствующими точкам обращения в нуль функции, и затем просуммировать соответствующие интегралы, взяв их по модулю.

Примеры.

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sqrt{x}$, координатной осью x и прямой $x = 4$ (рис.2.2.b).

Решение.

$$S = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}.$$

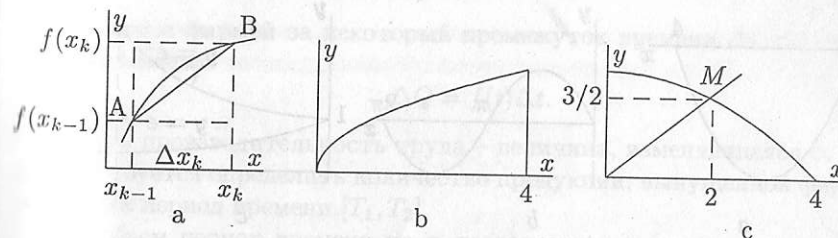


Рис. 2.2: Иллюстрация формулы прямоугольников и примеров 1 и 2

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2 - \frac{x^2}{8}, \quad y = \frac{3}{4}x, \quad y = 0$$

и находящейся в первой координатной четверти (рис.2.2.c).

Решение.

Предварительно найдем точку пересечения кривой с заданной наклонной прямой

$$\begin{cases} y = 2 - \frac{x^2}{8} \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = \frac{3}{2} \Rightarrow M(2; \frac{3}{2}).$$

Подстановка значения $y = 0$ (уравнение координатной оси x) в уравнение кривой дает значение $x = 4$ верхнего предела интегрирования.

Таким образом, искомая площадь состоит из двух характерных участков и для ее вычисления следует рассмотреть сумму двух интегралов

$$S = \int_0^2 \frac{3}{4}x dx + \int_2^4 \left(2 - \frac{1}{8}x^2\right) dx = \frac{3}{8}x^2 \Big|_0^2 + \left(2x - \frac{1}{24}x^3\right) \Big|_2^4 = 5\frac{1}{8}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y = x^2 - 4,5x + 2$$

осью x (рис.2.3.a).

Решение.

Найдем точки пересечения параболы и оси x

$$x^2 - 4,5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,5; \quad x_2 = 4.$$

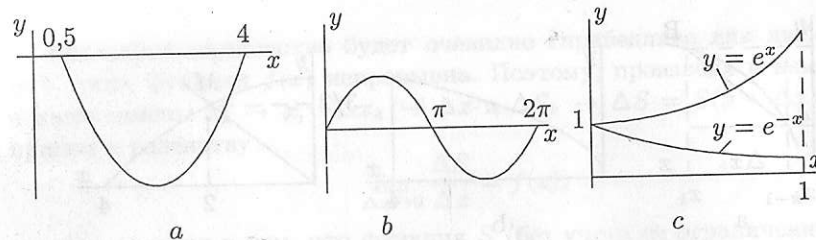


Рис. 2.3: Иллюстрации к примерам 3, 4 и 5

На интервале интегрирования $x \in (0, 5; 4)$ $y < 0$, поэтому перед интегралом ставим знак минус

$$S = - \int_{0,5}^4 (x^2 - 4,5x + 2) dx = - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4,5}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_{0,5}^4 = 8\frac{7}{12}.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ на участке $x \in [0, 2\pi]$ (рис. 2.3.b).

Решение.

Кривая меняет знак, поэтому разбиваем ось x на два участка $x \in [0, \pi]$ и $x \in [\pi, 2\pi]$, соответствующих положительному и отрицательному значениям функции. При вычислении площади знак у второго интеграла меняется на отрицательный.

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

5. Найти площадь фигуры, заключенной между двумя кривыми: $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ и парой прямых $x = 0$ и $x = 1$ (рис. 2.3.c).

Решение.

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^1 = e - 2 + 1/e.$$

2.6 *Приложение определенного интеграла к задачам экономики

Пусть функция $f(t)$ определяет производительность некоторой фирмы в момент времени t (количество продукции в единицу времени). Если производительность не изменяется со временем, то количество продукции ΔQ

выпускаемое фирмой за некоторый промежуток времени Δt , определится произведением

$$\Delta Q = f(t)\Delta t.$$

Пусть производительность труда – величина, изменяющаяся со временем. Требуется определить количество продукции, выпущенной фирмой за заданный период времени $[T_1, T_2]$.

Разобьем период времени на n достаточно малых интервалов $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ ($k = \overline{1, n}$) таких, в течение которых производительность не изменяется и определяется величиной $f(t_k)$.

Ясно, что общее количество продукции Q , выпущенной фирмой за период времени $[T_1, T_2]$, определится суммой

$$Q = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta t_k.$$

С точки зрения интегрального исчисления последнее выражение представляет собой интегральную сумму. Поэтому для подсчета количества выпускаемой продукции без предположения о неизменности $f(t)$ на подынтервалах изменения времени (при стремлении Δt_k к нулю) получим формулу:

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} f(t) dt. \quad (2.7)$$

Таким образом, если $f(t)$ – функция производительности в момент времени t , то выражение (2.7) определяет количество продукции, выпущенной за период времени $[T_1, T_2]$.

Примеры.

1. Для анализа экономической эффективности работы производственного предприятия Кобб и Дуглас предложили представлять функцию производительности в виде произведения двух функций, одна из которых определяет производственные затраты, вторая – объем производственных фондов.

Если предположить, что затраты труда увеличиваются по линейному закону $at + b$, а затраты капитала – по экспоненциальному e^{kt} , (a, b, c – постоянные), то функция производительности

$$f(t) = (at + b)e^{kt}.$$

Пусть для некоторого предприятия производительность характеризуется функцией Кобба-Дугласа с коэффициентами $a = b = 1$, $k = 3$. Требуется определить объем продукции, произведенной предприятием за 4 года.

Используя формулу (2.7) и конкретизируя $f(x)$, составим математическую модель задачи и вычислим интеграл, используя метод интегрирования по частям:

$$Q = \int_0^4 (t+1)e^{3t} dt = \left\{ u = t+1, dv = e^{3t} dt \Rightarrow du = dt, v = \frac{1}{3}e^{3t} \right\} = \\ = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t} dt = \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}e^{3t} \Big|_0^4 = \frac{2}{9}(7e^{12} - 1).$$

2. В планировании народного хозяйства важную роль играет степень неравенства распределения доходов населения. Оценку степени неравенства можно сделать по поведению функции, отражающей зависимость количества доходов от количества населения. Введем две безразмерные величины: x , равную отношению доходов рассматриваемой группы населения к доходам всего населения и y , равную отношению рассматриваемой группы населения ко всему населению. Обе эти величины будут, очевидно, изменяться в пределах от нуля до единицы.

Если доходы населения распределены равномерно, то функция $y = f(x)$, называемая в экономике кривой Лоренца, будет линейной

$$y = f_1(x) = x.$$

На рис. 2.4 эта функция изображена прямой OA . Реальное, в общем, неравномерное распределение доходов будет представляться некоторой кривой OBA , описываемой функцией $y = f_2(x)$.

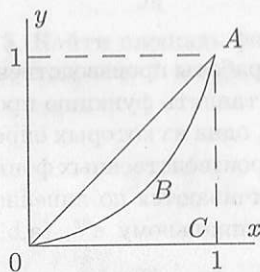


Рис. 2.4: Кривая Лоренца

Найдем коэффициент Джини для конкретно заданной функции

$$f_2(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2},$$

Степень неравенства в распределении доходов всего населения может быть оценена величиной площади, заключенной между изображенными на рисунке кривыми, отнесенной к площади S_0 треугольника OAC (коэффициент Джини). Вспоминая геометрический смысл определенного интеграла, для вычисления коэффициента Джини запишем выражение

$$K = \frac{1}{S_0} \int_0^1 [f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

полученной в результате аппроксимации статистических данных реально-го распределения доходов некоторой группы населения.

$$K = \frac{1}{S_0} \int_0^1 [x - (1 - \sqrt{1 - x^2})] dx.$$

Вычислим интеграл, воспользовавшись для преобразования его третьего слагаемого методом замены переменной (площадь S_0 треугольника OAC равна очевидно $1/2$):

$$K = 2 \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \\ = \left\{ \begin{array}{l} \sin t = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow x^2 = \cos^2 t \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \cos t, dx = -\sin t dt; \\ x = 0 \Rightarrow t = \pi/2; \quad x = 1 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right\} = \\ = -1 - 2 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = -1 - 2 \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos 2t) dt = \\ = -1 + \pi/2 + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_{\pi/2}^0 = \pi/2 - 1 \approx 0,57.$$

Если коэффициент $K \in [0, 1]$, причем для равномерного распределения ресурсов $K = 0$, то полученное распределение доходов с $K = 0,57$ следует оценить как в большой степени неравномерное.

3. Определение начальной суммы S_0 капиталовложений по ее конечной (полученной через время T) величине при годовой процентной ставке $p\% = 100r$ называется *дисконтированием*. Задачи такого рода встречаются при определении экономической эффективности капиталовложений.

В случае сложных процентов для определения величины S_0 в экономике используется зависимость

$$S_0 = \int_0^T f(t)e^{-pt} dt,$$

где $f(t)$ — функция, описывающая изменяемый во времени доход при постоянно начисляемом показателе p .

Определим дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке $p\% = 8\%$, если первоначальные капиталовложения составили 10 млрд. руб. и намечается увеличивать капиталовложения на 1 млрд. руб. ежегодно.

Исходя из условий задачи запишем выражение для функции капиталовложений $f(t) = 10 + 1 \cdot t$. В этом случае

$$S_0 = \int_0^T (10 + t)e^{-0,08t} dt.$$

Интегрируя по аналогии с примером 1, получим $S_0 = 30,5$ млрд. руб. Это означает, что ежегодные капиталовложения, равные $10 + t$ (в первом году – 10, ... в третьем – 13), равносильны одновременным первоначальным вложениям 30,5 млрд. руб. И в первом и во втором случаях получается одинаковая наращенная сумма при одинаковой, начисляемой непрерывно процентной ставке.

2.7 Приближенное вычисление интегралов. Формулы прямоугольников и трапеций

Использование понятия интегральной суммы позволяет получить формулы для приближенного вычисления определенных интегралов.

Пусть требуется вычислить приближенно интеграл от функции $y = f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ (рис. 2.1).

Разобьем $[a, b]$ на n в общем неравных подынтервалов и в произвольных точках $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, принадлежащих каждому из n подынтервалов, определим значения функции $y_k = f(\xi_k)$.

Заменяя интеграл интегральной суммой, приходим к приближенному равенству

$$S = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n S_k = S_{\text{пр}},$$

называемому *формулой прямоугольников* приближенного вычисления определенных интегралов.

В случае равенства всех интервалов $\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ и $f(\xi_k) = y_k$ формула прямоугольников представляется в виде

$$S_{\text{пр}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_k.$$

Если

$$f(\xi_k) = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad (k = \overline{1, n}), \quad \text{то} \quad S_{\text{пр}} = S_{\min},$$

$$f(\xi_k) = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad (k = \overline{1, n}), \quad \text{то} \quad S_{\text{пр}} = S_{\max}.$$

При этом справедливо неравенство

$$S_{\min} \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_{\max}.$$

Можно показать, что максимальная ошибка, которая может отличать точное значение интеграла от его приближенного значения, найденного с использованием формулы прямоугольников, не превышает

$$\Delta = \frac{(b-a)^2}{2} \max_{[a,b]} |f'(x)|.$$

Если заменить криволинейные участки графика функции на подынтервалах стягивающими их хордами (прямая AB на рис. 2.2.а), то криволинейные трапеции на участках $[x_{k-1}, x_k]$ заменяются на прямолинейные и их площади определяются по формуле

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k) \Delta x_k.$$

Суммарная площадь элементарных трапеций

$$S_{\text{тр}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \Delta x_1 + \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \Delta x_2 + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n) \Delta x_n.$$

При равенстве подынтервалов формула трапеций определит приближенное значение интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_{\text{тр}} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right).$$

Наибольшая ошибка отличия точного значения интеграла от значения, полученного по формуле трапеций, не превышает величины

$$\Delta = \frac{(b-a)^3}{12} \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

2.8 Формула Симпсона приближенного вычисления определенного интеграла

Формулы прямоугольников и трапеций не всегда дают достаточную точность расчетов при ограниченном количестве подынтервалов. В случае нелинейности подынтегральной функции большую точность дает замена участков кривых не прямыми линиями, как в прямоугольниках (горизонтальные прямые) или трапециях (наклонные прямые), а параболami $y = ax^2 + bx + c$.

Для получения формулы, основанной на параболической аппроксимации участка кривой, докажем справедливость соотношения

$$\int_{x_0}^{x_2} (ax^2 + bx + c)dx = \frac{x_2 - x_0}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (2.8)$$

в котором y_0 и y_2 — значения функции на концах интервала интегрирования $[x_0, x_2]$, y_1 — на его середине. С целью упрощения доказательства в качестве отрезка $[x_0, x_2]$ рассмотрим отрезок $[-h, h]$, симметричный относительно начала координат. В этом случае $x_0 = -h$, $x_1 = 0$, $x_2 = h$, $y_0 = ah^2 - bh + c$, $y_1 = c$, $y_2 = ah^2 + bh + c$, и правая часть (2.8) преобразуется к виду

$$\frac{x_2 - x_0}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{h + h}{6} (ah^2 - bh + c + 4c + ah^2 + bh + c) = \frac{2h}{3} (ah^2 + 3c).$$

Вычислим теперь левую часть (2.8), используя формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_{-h}^h (ax^2 + bx + c)dx = \left(\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{2h}{3} (ah^2 + 3c).$$

Совпадение последних двух результатов говорит о справедливости соотношения (2.8).

Перейдем к непосредственному выводу формулы приближенного вычисления определенных интегралов путем параболической аппроксимации подынтегральной функции.

Разобьем $[a, b]$ на $2n$ равных (для простоты и обозримости формулы) подынтервалов. Пусть в граничных точках подынтервалов для координат $x_0, x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}$ найдены значения подынтегральной функции $y_0, y_1, \dots, y_{2n-1}, y_{2n}$.

Заменяем кривые, описываемые подынтегральной функцией $y = f(x)$, на каждом подынтервале, содержащем по три точки (x_0, x_1, x_2) , (x_2, x_3, x_4) ,

2.8. ФОРМУЛА СИМПСОНА

$\dots, (x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n})$ параболami, имеющими в перечисленных точках ординаты (y_0, y_1, y_2) , (y_2, y_3, y_4) , $\dots$, $(y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n})$.

Найдем площади соответствующих параболических трапеций, используя формулу (2.8),

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + y_2) \\ S_2 &= \frac{b-a}{6n} (y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &\vdots \\ S_n &= \frac{b-a}{6n} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \end{aligned}$$

Суммируя записанные площади и приводя в получаемой сумме подобные члены, приходим к формуле Симпсона приближенного вычисления определенных интегралов

$$S_{\text{сим}} = \frac{b-a}{6n} [y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})].$$

Подчеркнем, что формула Симпсона предполагает разбижку интервала интегрирования на четное число подынтервалов. В ней n — половина общего числа подынтервалов.

Погрешность формулы Симпсона не превышает величины

$$\Delta = \frac{(b-a)^5}{90} \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{10} x^3 dx$ приближенными методами: а) прямоугольников, б) трапеций, в) Симпсона. Найти его точное решение. Составим таблицу разбиения интервала интегрирования на $n = 10$ равных участков с длинами подынтервалов $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{10} = 1$. Во второй строке таблицы представлены значения $y_k = f(x_k) = x_k^3$ ($k = 0, 10$).

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_k	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

а) Используя формулу прямоугольников с высотами, представляющими собой левые значения функции на концах подынтервалов, найдем

$$S_{\text{пр}}^{\text{прав}} = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x = (0 + 1 + 8 + 27 + \dots + 729) \cdot 1 = 1925.$$

Та же формула прямоугольников но с подстановкой в нее высот, равных правым значениям функции на концах подынтервалов, даст значение

интеграла

$$S_{\text{пр}}^{\text{лев}} = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = (1 + 8 + 27 + 64 \dots + 729 + 1000) \cdot 1 = 2925.$$

б) По формуле трапеций получим

$$S_{\text{тр}} = \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) \Delta x =$$

$$= \left(\frac{0 + 1000}{2} + 1 + 8 + 27 + \dots + 729 \right) \cdot 1 = 2425.$$

Следует обратить внимание на очевидное равенство

$$S_{\text{тр}} = \frac{1}{2} (S_{\text{пр}}^{\text{прав}} + S_{\text{пр}}^{\text{лев}}).$$

в) По формуле Симпсона (напоминаем, что здесь $n = 5$ — количество спаренных подынтервалов)

$$S_{\text{сим}} = \frac{b-a}{6n} \left[y_0 + y_{2n} + 4 \sum_{k=1}^n y_{2k-1} + 2 \sum_{k=2}^n y_{2k-2} \right] =$$

$$= \frac{10-0}{6 \cdot 5} [0 + 1000 + 4(1 + 27 + 125 + 343 + 729) + 2(8 + 64 + 216 + 512)] = 2500.$$

Найдем точное значение интеграла, являющегося табличным,

$$\int_0^{10} x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^{10} = \frac{1}{4} 10^4 = 2500.$$

Как видно из полученных результатов, точное значение интеграла совпадает со значением, найденным по формуле Симпсона. Этого следовало ожидать, так как в точностную характеристику метода Симпсона входит четвертая производная от подынтегральной функции. Эта производная от кубической функции равна нулю.

2.9 Вопросы

1. Что называется определенным интегралом? Запишите формулу Ньютона-Лейбница и дайте пояснение входящих в нее величин.
2. Как задается постоянная интегрирования при вычислении определенного интеграла?
3. Перечислите и сформулируйте в виде математических соотношений основные свойства определенного интеграла.
4. Будут ли свойства неопределенного интеграла справедливы для определенного интеграла?
5. Сформулируйте словесно и в виде математического соотношения теорему о среднем. Поясните на рисунке ее смысл.
6. Что собой представляет интеграл с переменным верхним пределом, число или функцию?
7. Чему равна производная от интеграла с переменным верхним пределом? А производная от определенного интеграла?
8. Каковы характерные особенности применения методов замены переменной и интегрирования по частям к вычислению определенного интеграла по сравнению с неопределенным интегралом?
9. Что такое несобственный интеграл? Как организовать процедуру его вычисления?
10. Что такое сходящиеся и расходящиеся интегралы?
11. Как вычисляются интегралы с бесконечными верхним и нижним пределами?
12. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
13. Что такое интегральная сумма и как она связана с определенным интегралом?
14. Как определить максимальное и минимальное значения интегральной суммы? Ответ поясните на графике функции.
15. Как найти площадь криволинейной трапеции при отрицательных значениях функции?

16. Как определяются пределы интегрирования при определении площади криволинейных трапеций под пересекающимися кривыми?
17. В чем суть применения метода прямоугольников при вычислении определенных интегралов?
18. Можно ли с использованием формулы прямоугольников получить точное значение интеграла? Если да, то в каких случаях?
19. В чем суть метода трапеций? Объяснение сопроводите графическим построением.
20. Поясните, почему совпали результаты приближенного вычисления интеграла по формуле трапеций с полусуммой наименьшей и наибольшей площадей, вычисленных по формуле прямоугольников в последнем примере раздела 5.7? Будут ли такие совпадения иметь место для произвольных подынтегральных функций?
21. Какая аппроксимация подынтегральной функции осуществляется при выводе формулы Симпсона. Изобразите рисунок, поясняющий разбиение интервала интегрирования на подынтервалы соответствующее формуле Симпсона.
22. Могут ли результаты вычисления определенных интегралов по формулам трапеций или прямоугольников быть точнее результатов, полученных по формуле Симпсона? Если да, то в каких случаях?

2.10 Упражнения

К разделу 5.1

Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы.

$$\begin{aligned}
 1.1. \int_{-1}^2 x^3 dx. \quad 1.2. \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. \quad 1.3. \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx. \\
 1.4. \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx. \quad 1.5. \int_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx. \quad 1.6. \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x} \cdot [2.5ex] \\
 1.7. \int_1^2 e^x dx. \quad 1.8. \int_0^3 2^x dx. \quad 1.9. \int_2^5 \frac{dx}{x}. \quad 1.10. \int_1^2 \frac{dx}{2x-1}.
 \end{aligned}$$

К разделу 5.4

Вычислить интегралы с помощью замены переменной (3.1 – 3.5) и методом интегрирования по частям (3.6 – 3.10).

$$\begin{aligned}
 3.1. \int_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \quad 3.2. \int_{-2}^0 dx \sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}. \quad 3.3. \int_{-2}^2 \frac{dx}{(4+x^2)^2}. \\
 3.4. \int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x-2}}{e^x+2} dx. \quad 3.5. \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx. \\
 3.6. \int_0^1 x e^x dx. \quad 3.7. \int_1^e \ln^2 x dx. \quad 3.8. \int_0^{\pi/4} e^{2x} \sin 4x dx. \\
 3.9. \int_1^e x \ln x dx. \quad 3.10. \int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx.
 \end{aligned}$$

К разделу 5.7

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функций.

$$\begin{aligned}
 5.1. y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y + 0. \quad 5.2. y = 1/x, y = x, x + 2. \\
 5.3. y = y + x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1. \quad 5.4. y = x^2, y = 1 + 3x^2/4. \\
 5.5. y = 2/x, y = -x/2 - 5/2. \quad 5.6. y = x^2 + 2, y = 1 - x^2, x = 0, x = 1. \\
 5.7. y = y = -x^2, y = 2e^x, x = 0, x = 1. \quad 5.8. y = 4/x^2, y = x - 1, x = 1.
 \end{aligned}$$

5.9. $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{4-3x}$. 5.10. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Глава 3

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения – большой раздел математики, в котором рассматриваются различные виды уравнений, аналитические и численные методы их решения. К дифференциальным уравнениям сводятся математические модели, описывающие разнообразные непрерывно протекающие процессы и явления. Дифференциальные уравнения находят, правда ограниченное, применение в экономических задачах и в задачах управления общественными процессами. В рассматриваемом пособии даны лишь общие понятия о дифференциальных уравнениях и их решениях, приведены два простейших метода их численного решения.

3.1 Понятие о дифференциальных уравнениях и методах их решения

Обыкновенным дифференциальным уравнением n -ного порядка называется уравнение, связывающее одну независимую переменную, функцию от нее и производные от этой функции различных порядков до n включительно

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3.1)$$

Дифференциальным уравнением в частных производных называется дифференциальное уравнение, содержащее частные производные различных степеней от функций нескольких переменных.

В курсе дифференциальных уравнений доказывается, что линейные дифференциальные уравнения различных порядков в частных производных можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x_1} = f_1(y, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} = f_2(y, x_1, x_2, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_m} = f_m(y, x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases} \quad (3.2)$$

Решением дифференциальных уравнений называется всякая функция, обращающая дифференциальные уравнения в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциальных уравнений называется их *интегрированием*; а графики, соответствующие решению – *интегральными кривыми*.

В простейшем случае нахождение решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка сводится к простому интегрированию.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $y' - 2x = 0$.

Решение.

Перепишем уравнение, оставляя в его левой части только производную функции:

$$y' = 2x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = 2x, \quad \text{или} \quad dy = 2x dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим его решение

$$y = \int 2x dx + C = x^2 + C. \quad (3.3)$$

Таким образом, решением дифференциального уравнения является семейство парабол, отличающихся значениями постоянной C .

На рис. 3.1 изображены интегральные кривые, соответствующие найденному решению.

Пример 2. Убедиться в том, что функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ (C_1, C_2 – произвольные постоянные) является решением дифференциального уравнения $y''y - (y')^2 = 0$.

Решение.

Найдем последовательно функции, входящие в дифференциальное уравнение:

$$y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}; \quad (y')^2 = C_1^2 C_2^2 e^{2C_2 x}; \quad y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}; \quad y''y = C_1^2 C_2^2 e^{2C_2 x}.$$

Подставляя найденные функции в дифференциальное уравнение, убеждаемся в том, что оно превращается в тождество.

В обоих рассмотренных примерах решения уравнений содержат произвольные постоянные. Решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну такую постоянную, второго порядка – две. Можно показать, что решение дифференциального уравнения n -го порядка содержит n независимых постоянных. Столько же постоянных содержится в решении системы n линейных дифференциальных уравнений первого порядка для функции n переменных.

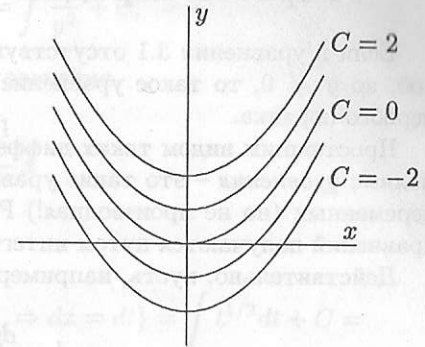


Рис. 3.1: Интегральные кривые

Так, для уравнения 3.1

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

а для уравнения 3.2

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Два последних соотношения называются *общими решениями* дифференциальных уравнений в отличие от *частных решений* дифференциальных уравнений, которые получаются при конкретных значениях постоянных C_k ($k = \overline{1, n}$).

Конкретизируются постоянные интегрирования путем задания *граничных условий* – соотношений, определяющих значения функции и возможно ее производных в некоторых точках рассматриваемого пространства. Так, для задачи примера 1 частное решение, соответствующее кривой рис. 3.1 с постоянной интегрирования $C = 0$, может быть получено из общего решения (3.3) путем задания условия, что кривая проходит через начало координат

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Математическая модель, описываемая дифференциальными уравнениями с заданными граничными условиями называется *краевой задачей*. В курсе дифференциальных уравнений показано, что любая краевая задача может быть сведена к задаче Коши – задаче решения краевой задачи с граничными условиями, заданными только в одной точке рассматриваемого пространства – начальной точке интегрирования.

3.2 Неполные дифференциальные уравнения первого порядка

Если в уравнении 3.1 отсутствуют производные функции y выше первой, но $y' \neq 0$, то такое уравнение называется, естественно, уравнением первого порядка.

Простейшим видом таких дифференциальных уравнений являются *неполные уравнения* – это такие уравнения, в которых отсутствует одна из переменных (но не производная!) Решения неполных дифференциальных уравнений получаются путем интегрирования входящих в них функций.

Действительно, пусть, например, уравнение не зависит от переменной y

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x).$$

В этом случае его можно переписать в виде

$$dy = f(x)dx$$

и отсюда непосредственным интегрированием получить решение

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Если неполное уравнение не содержит переменную y , то есть

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

то после деления на $f(y)$ (при условии, что $f(y) \neq 0$) и интегрирования обеих частей полученного равенства приходим к решению

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$$

Если же $f(y) = 0$, то из уравнения $y' = 0$ тут же следует

$$y = C.$$

Примеры. Найти решения дифференциальных уравнений.

Пр. 1. $y' = y^2$.

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \Rightarrow dx = \frac{dy}{y^2}, \Rightarrow x = \int \frac{dy}{y^2} + C, \Rightarrow x = -\frac{1}{y} + C.$$

Отсюда получаем общее решение уравнения

$$y = \frac{1}{C - x}.$$

Пр. 2. $y' = \sqrt{x-1}$.

$$\begin{aligned} y &= \int \sqrt{x-1} dx + C = \{t = x-1, \Rightarrow dx = dt\} = \int t^{1/2} dt + C = \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + C. \end{aligned}$$

3.3 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Упомянутые в заглавии уравнения имеют вид

$$f_1(x)g_2(y)dx = f_2(x)g_1(y)dy.$$

Поделив обе части записанного уравнения на произведение функций $f_2(x)g_2(y) \neq 0(!)$, приходим к *дифференциальному уравнению с разделенными переменными*

$$F(x)dx = G(y)dy, \quad (3.4)$$

где

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \quad G(y) = \frac{g_1(y)}{g_2(y)}.$$

Интегрирование обеих частей дифференциального уравнения (3.4) приводит к его решению, записанному в неявном виде,

$$\int F(x)dx = \int G(y)dy + C.$$

Конечно, постоянная интегрирования может находиться и в правой и в левой частях записанного решения.

Примеры. Найти решения дифференциальных уравнений.

Пр. 1. $x\sqrt{1-y^2}dx + (1-x^2)dy = 0.$

Данное уравнение – типичный представитель уравнений с разделяющимися переменными, так как в его двух слагаемых множители содержатся переменными, так как в его двух слагаемых множители содержатся функциями, зависящие только от одной переменной. Разделим (не в смысле деления!) эти переменные, поделив уравнение на $(1-x^2)\sqrt{1-y^2}$.

После этого возьмем интеграл от обеих частей уравнения. С учетом того, что интеграл от суммы функций равен сумме соответствующих интегралов, получим

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int \frac{x}{x^2-1} + C.$$

Произведем в первом и во втором интегралах замены соответственно: $\left\{ u = \sqrt{1-y^2} \Rightarrow du = -\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} \right\}$ и $\{v = x^2-1 \Rightarrow dv = 2xdx\}$. После этого уравнение примет вид

$$-\int du = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v} + C.$$

Интегралы обеих частей полученного уравнения табличные, поэтому

$$-u = -\frac{1}{2} \ln v + C.$$

Подставляя вместо переменных u и v их выражения соответствующие проведенным выше заменам, приходим к записанному в неявном виде решению дифференциального уравнения:

$$\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + C = 0.$$

Пр. 2. $y' = \frac{y^2}{x}.$

Умножим обе части уравнения на $\frac{dx}{y^2}$:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, придем к его решению

$$\frac{1}{y} = \ln x + C.$$

3.4 Линейные дифференциальные уравнения, ЛДУ первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) n -ного порядка называется дифференциальное уравнение, в которое функция y и все ее производные до n -ного порядка входят только в первой степени

$$\varphi_n(x)y^n + \varphi_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + \varphi_i(x)y^i + \dots + \varphi_0(x)y = \varphi(x). \quad (3.5)$$

Коэффициенты $\varphi_i(x)$ $i = \overline{0, n}$ в общем случае произвольные функции от x .

Уравнение n -ного порядка предполагает, что коэффициент $\varphi_n(x)$, стоящий при старшей производной, отличен от нуля и поэтому на него можно поделить все уравнение (3.5), сделав коэффициент при старшей производной равным единице.

Рассмотрим ЛДУ первого порядка

$$y' + p(x)y = f(x). \quad (3.6)$$

Покажем, что это уравнение можно свести к уравнению с разделяющимися переменными, рассмотренному в предыдущем разделе.

Представим y в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x). \quad (3.7)$$

Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u$$

и (3.6) преобразуется:

$$\frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u + p(x)uv = f(x)$$

или

$$v \frac{du}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + p(x)v \right] = f(x). \quad (3.8)$$

В представлении (3.7) одна из функций (u или v) может быть задана произвольно, а вторая определится через y и эту заданную функцию.

Выберем функцию v так, чтобы выражение в квадратных скобках (3.8) обращалось в нуль:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0. \quad (3.9)$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим в нем переменные и найдем решение:

$$\frac{dv}{v} = -p(x), dx \implies \lg |v| = - \int p(x), dx \implies v = \exp \left(- \int h(x), dx \right). \quad (3.10)$$

Отметим, что произвольная постоянная при интегрировании уравнения (3.9) принята равной нулю. Конкретизация этой постоянной допускается, так как единственная постоянная, с точностью до которой определится решение исходного ЛДУ (3.6) определится при интегрировании уравнения для определения u .

При найденной функции v (3.10), обращающей в нуль выражение в квадратных скобках (3.8), из оставшейся части уравнения (3.8) после разделения переменных получим:

$$du = \frac{f(x)}{v(x)}, dx \implies u = \int \frac{f(x)}{v(x)}, dx + C. \quad (3.11)$$

Определив u (3.11) и v (3.10) из выражения (3.7) можно найти искомую функцию y .

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = x\sqrt{x^2 + 1}.$$

Решение.

Имеем линейное дифференциальное уравнение (y' и y входят в уравнение в первой степени) с коэффициентом $p(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1}$ и свободным членом $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$.

Представим искомую функцию в виде произведения $y = uv$ и подставим в исходное уравнение:

$$\frac{du}{dx}v + u \frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2 + 1}y = x\sqrt{x^2 + 1}$$

или

$$\frac{du}{dx}v + u \left[\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2 + 1}v \right] = x\sqrt{x^2 + 1}. \quad (3.12)$$

Приравнявая нулю выражение в квадратных скобках, придем к дифференциальному уравнению, которое после разделения переменных представим в виде

$$\frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2 + 1}, dx.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим его решение:

$$\lg |v| = \int \frac{2x}{x^2 + 1}, dx = \lg |x^2 + 1|$$

или

$$v = x^2 + 1. \quad (3.13)$$

Отметим, что для функции v достаточно выбрать, как это сделано выше, одно произвольное решение, которое обращает в нуль выражение в квадратных скобках преобразованного к двум переменным дифференциального уравнения (3.12).

Уравнение (3.12) с учетом (3.13) приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}(x^2 + 1) = x\sqrt{x^2 + 1}.$$

Разделим в этом уравнении переменные и интегрируем полученное уравнение:

$$u = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, dx = \sqrt{x^2 + 1} + C.$$

Подставляя это выражение и (3.13) в представление $y = uv$, получим искомое решение дифференциального уравнения:

$$y = \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C(x^2 + 1).$$

3.5 Однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейное дифференциальное уравнение называется *однородным* (ОЛДУ) относительно искомой функции y , если его свободный член (слабое, не зависящее от функции и ее производных) равен нулю. В противном случае уравнение называется *неоднородным* – НЛДУ. То есть, однородность дифференциальных уравнений определяется только по отношению к функции, но не к аргументу.

В общем случае НЛДУ второго порядка можно записать в виде

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (3.14)$$

В дальнейшем предполагаем, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ — известные непрерывные функции переменной x .

Однородное уравнение, соответствующее (3.14), получается из последнего при $f(x) = 0$:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (3.15)$$

В теории дифференциальных уравнений важную роль играют понятия *линейная зависимость* и *линейная независимость* системы функций. Поясним эти понятия на двух функциях.

Пусть две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ связаны соотношением $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0. \quad (3.16)$$

Относительно этого уравнения говорят, что *линейная комбинация* функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ равна нулю.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми*, если равенство (3.16) выполняется только при условии: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В противном случае $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно зависимыми*.

Примеры. Установить линейную независимость или линейную зависимость функций.

Пр.1. $\exp(k_1 x)$ и $\exp(k_2 x)$.

Предположим, что заданные функции линейно зависимы. То есть для них справедливо соотношение $\lambda_1 e^{k_1 x} + \lambda_2 e^{k_2 x} = 0$, например, при $\lambda_1 \neq 0$.

Тогда равенство нулю линейной комбинации рассматриваемых функций можно преобразовать к виду

$$e^{(k_1 - k_2)x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{const.}$$

Но экспонента в степени $(k_1 - k_2)x$ является функцией переменной x и не может быть постоянной величиной, если $k_1 \neq k_2$.

Поэтому предположение о линейной зависимости функций неверно. Функции $\exp(k_1 x)$ и $\exp(k_2 x)$ линейно независимы.

Пр.2. $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$.

Пусть $\lambda_1 \sin \alpha x + \lambda_2 \cos \alpha x = 0$ при $\lambda_1 \neq 0$.

Предположение приводит к соотношению

$$\operatorname{tg} \alpha x = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \text{const.}$$

Как и в первом примере, равенство невозможно при произвольных x . Следовательно, рассматриваемые функции линейно независимы.

Пр.3. y и 0 .

Равенство нулю линейной комбинации заданных функций $\lambda_1 y + \lambda_2 \cdot 0 = 0$ возможно при $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, то есть при условии, что одна постоянная в линейной комбинации функций не равна нулю. Следовательно рассматриваемые функции линейно зависимы.

Последний пример говорит о том, что функция $y \equiv 0$ линейно зависима от любой функции.

Вернемся к ОЛДУ (3.15).

Теорема. Если y_1 и y_2 какие либо два линейно независимые частные решения ОЛДУ второго порядка (3.15), то его общим решением будет линейная комбинация этих функций:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (3.17)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Убедиться в справедливости теоремы можно непосредственной подстановкой (3.17) в (3.15). Действительно:

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0$$

или

$$C_1 (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2 (y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Множители при C_1 и C_2 равны нулю, так как они представляют собой левые части уравнения (3.15) для которого y_1 и y_2 являются решениями.

Сформулированная теорема позволяет сделать заключение о том, что для нахождения общего решения ОЛДУ достаточно найти два любых частных линейно независимых решения и составить их линейную комбинацию, в качестве множителей которой выбрать произвольные постоянные.

Подчеркнем, что упомянутые частные решения ОЛДУ обязательно должны быть линейно независимыми. В частности, не могут составить полное решение два частных решения ОЛДУ, отличающиеся друг от друга только постоянной величиной.

Покажем, что два частных решения y_1 и y_2 ОЛДУ при условии, что $y_2 = C y_1$, не могут образовать общего решения. Действительно, общее решение в этом случае

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C C_2) y_1$$

зависит только от одной произвольной постоянной $A = (C_1 + CC_2)$ и только от одной функции y_1 , следовательно не может считаться полным общим решением ОЛДУ.

3.6 ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть требуется найти решение ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами p и q :

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (3.18)$$

Для отыскания решения этого уравнения достаточно найти два его частных линейно независимых решения и составить их линейную комбинацию.

Будем искать решение (3.18) в виде

$$y = e^{kx}, \quad (3.19)$$

где k – некоторая пока неизвестная постоянная.

Найдем первую и вторую производные (3.19)

$$y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}$$

и подставим полученные выражения в (3.18). Вынося за скобки общий множитель, получим:

$$(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то дифференциальное уравнение будет удовлетворено, если множитель в скобках последнего уравнения обратится в нуль:

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3.20)$$

Это уравнение, называемое *характеристическим уравнением*, позволяет найти два значения коэффициента k , при которых функция (3.19) будет решением дифференциального уравнения (3.18).

Значения коэффициента k зависят от значения дискриминанта D квадратного уравнения (характеристического уравнения (3.20)):

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Возможны три варианта.

1. При $D > 0$ корни k_1 и k_2 действительные и различные:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

2. При $D = 0$ корни равны:

$$k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}.$$

3. При $D < 0$ корни комплексно сопряженные:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Рассмотрим решения ОЛДУ, соответствующие каждому из этих случаев.

3.6.1 Корни характеристического уравнения действительные

В случае действительных различных корней k_1 и k_2 получаем два частных линейно независимых (см. Пр.1 раздела 3.5) решения

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Общее решение y_0 уравнения (3.18) запишем в виде линейной комбинации этих решений:

$$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \quad (3.21)$$

Убедимся в том, что (3.21) является решением ОЛДУ (3.18) подстановкой в это уравнение y_0 .

$$(k_1^2 + pk_1 + q)e^{k_1 x} + (k_2^2 + pk_2 + q)e^{k_2 x} = 0.$$

Выражения в скобках обоих слагаемых равны нулю, так как k_1 и k_2 являются решениями характеристического уравнения. То есть, (3.21) действительно представляет собой общее решение ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если корни характеристического уравнения действительные и равные ($k_1 = k_2 = k = -p/2$), то образуемая по ним функция $y_1 = e^{-px/2}$ представляет собой только одно частное решение ОЛДУ и не может служить его общим решением.

Покажем, что в этом случае еще одна функция, а именно $y_2 = xe^{-px/2}$, линейно независима от y_1 , также будет частным решением ОЛДУ. Определив первую и вторую производные от y_2 :

$$y_2' = \left(1 - \frac{p}{2}x\right)e^{-px/2}; \quad y_2'' = \left(-p + \frac{p^2}{4}x\right)e^{-px/2},$$

подставим их в уравнение (3.18). После преобразования приходим к уравнению

$$\left(-\frac{p^2}{4} + q\right)xe^{-px/2} = 0.$$

Равенство обеспечивается тем, что дискриминант характеристического уравнения, стоящий в скобках, обращается в нуль для рассматриваемого случая равенства корней уравнения.

Таким образом, общее решение ОЛДУ (3.18) в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$y_0 = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \quad (3.22)$$

3.6.2 Корни характеристического уравнения мнимые

Представим корни характеристического уравнения (3.20) для отрицательных значений его дискриминанта (случай 3 раздела 3.6) в виде

$$k_1 = \alpha + \beta i; \quad k_2 = \alpha - \beta i, \quad (3.23)$$

где

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Покажем, что в этом случае частными решениями ОЛДУ (3.18) будут две линейно независимые функции

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x; \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x. \quad (3.24)$$

Найдем первую и вторую производные функции y_1

$$y_1' = e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x);$$

$y_1'' = e^{\alpha x}(\alpha^2 \sin \beta x + 2\alpha\beta \cos \beta x - \beta^2 \sin \beta x)$ и подставим их вместе со значением y_1 в ОЛДУ (3.18):

$$e^{\alpha x}[\alpha^2 \sin \beta x + 2\alpha\beta \cos \beta x - \beta^2 \sin \beta x + p\beta \cos \beta x + p\alpha \sin \beta x + q \sin \beta x] = e^{\alpha x}[(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) \sin \beta x + (2\alpha + p)\beta \cos \beta x] = 0.$$

Преобразуем слагаемое, стоящее в первой, а затем второй круглых скобках последнего равенства с учетом обозначений к формулам (3.23):

$$(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q) = \frac{p^2}{4} - q + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q \equiv 0;$$

$$(2\alpha + p) = -p + p \equiv 0.$$

То есть, решение (3.24) для y_1 обращает ОЛДУ (3.18) в тождество. Аналогично доказывается, что выражение (3.24) для y_2 также удовлетворяет ОЛДУ (3.18).

Составляя линейную комбинацию решений (3.24), запишем общее решение ОЛДУ (3.18) в виде

$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \quad (3.25)$$

Примеры. Найти общие решения ОЛДУ.

Пр.1. $y'' + 7y' - 8y = 0$.

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 7k - 8 = 0$$

и найдем его корни:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = -8.$$

Так как корни уравнения действительные и различные, представляем общее решение ОЛДУ в виде (3.21):

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-8x}.$$

$$\text{Пр.2 } y'' - 9y' = 0. \Rightarrow k^2 - 9k = 0; \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 9; \Rightarrow$$

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{9x}.$$

$$\text{Пр.3 } y'' - 8y' + 16y = 0. \Rightarrow$$

$$k^2 - 8k + 16 = 0; \Rightarrow (k - 4)^2 = 0; \Rightarrow k_1 = k_2 = 4; \Rightarrow$$

$$y_0 = e^{4x}(C_1 + C_2 x).$$

$$\text{Пр.4 } y'' - 2y' + 10y = 0. \Rightarrow k^2 - 2k + 10 = 0; \Rightarrow$$

$$k^2 - 2k + 10 = -3^2 < 0; \Rightarrow k_1 = 1 + 3i, k_2 = 1 - 3i; \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 3. \Rightarrow$$

$$y_0 = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x).$$

3.7 Неоднородные дифференциальные уравнения

Интегрирование неоднородных линейных дифференциальных уравнений (НЛДУ) тесно связано с интегрированием соответствующих им однородных уравнений.

Теорема. Общее решение y неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения y_0 соответствующего ему ОЛДУ и какого-либо частного решения y_* НЛДУ:

$$y = y_0 + y_*. \quad (3.26)$$

Доказательство теоремы рассмотрим на примере НЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (3.14):

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (3.27)$$

Если y_0 — решение однородного уравнения, то для него справедливо равенство

$$y_0'' + py_0' + qy_0 = 0,$$

а для y_* :

$$y_*'' + py_*' + qy_* = f(x).$$

Складывая почленно эти равенства с учетом свойства суммы производных, получим

$$(y_0 + y_*)'' + p(y_0 + y_*)' + q(y_0 + y_*) = f(x).$$

Выражения в круглых скобках — это общее решение НЛДУ (3.14).

Частное решение НЛДУ напрямую зависит от вида его правой части, то есть от функции $f(x)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи задания этой функции для уравнений второго порядка.

3.7.1 Правая часть — полином

Пусть в (3.27)

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (3.28)$$

то есть, правая часть НЛДУ второго порядка представляет собой полином второй степени.

Будем искать частное решение НЛДУ в виде полинома той же степени, что и (3.28). То есть

$$y_* = P_2 = Ax^2 + Bx + C.$$

Найдем производные от y_*

$$y_*' = 2Ax + B; \quad y_*'' = 2A$$

и подставим их вместе с y_* в (3.27). После группировки слагаемых получим:

$$Ax^2 + (2Ap + Bq)x + (2A + Bp + Cq) = ax^2 + bx + c. \quad (3.29)$$

Приравнивая множители при одинаковых степенях x последнего уравнения, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов A , B и C :

$$\begin{cases} Aq = a; \\ 2Ap + Bq = b; \\ 2A + Bp + Cq = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{a}{q}; \\ B = \frac{1}{q} \left(b - \frac{2ap}{q} \right); \\ C = \frac{1}{q} \left(c - \frac{2a + pb}{q} + 2ap^2q^2 \right). \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты A , B и C , входящие в частное решение НЛДУ (3.27) с правой частью, заданной в виде полинома, полностью определяются заданными в НЛДУ параметрами p , q и a , b , c .

Представляет интерес случай, когда в НЛДУ (3.27) $q = 0$. В этом случае в левой части соотношения (3.29) множитель x^2 равен нулю, а в правой части отличен от нуля. То есть, решение некорректно.

В таких случаях частное решение НЛДУ представляется в виде

$$y_* = xP_2.$$

Если же $p = q = 0$, то

$$y_* = x^2P_2.$$

Читателю путем непосредственной подстановки предлагается убедиться в том, что последние два решения удовлетворяют НЛДУ при соответствующих ограничениях.

В частном случае, если правая часть НЛДУ – постоянная величина (полином нулевой степени)

$$y'' + py' + qy = a,$$

то частное решение также представляется постоянной

$$y_* = C.$$

Подставим это частное решение в НЛДУ:

$$0 + 0 + qC = a. \implies C = \frac{a}{q}.$$

Примеры. Найти общие решения НЛДУ.

Пр.1. $y'' + 2y' - 8y = x^2$.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 2y' - 8y = 0. \implies k^2 + 2k - 8 = 0; \implies k_1 = -4, k_2 = 2; \implies$$

$$y_o = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}.$$

Так как заданное уравнение имеет второй порядок и для него $p = 2 \neq 0$ и $q = -8 \neq 0$, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде полинома второй степени:

$$y_* = Ax^2 + Bx + C. \implies y'_* = 2Ax + B; y''_* = 2A.$$

Подставим эти выражения в заданное уравнение и сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями переменной x в его левой части:

$$-8Ax^2 + (4A - 8B)x + (2A + 2B - 8C) = x^2.$$

Приравняв множитель при одинаковых степенях x , приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -8A = 1; \\ 4(A - 2B) = 0; \\ 2(A + B - 4C) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений получим:

$$A = -\frac{1}{8}; B = -\frac{1}{16}; C = -\frac{3}{64}.$$

С учетом значений найденных коэффициентов и полученного ранее выражения для y_o запишем общее решение заданного дифференциального уравнения:

$$y = y_o + y_* = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{8} \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} \right).$$

Пр.2. $y'' - 2y' = x + 3$. ($q = 0!$).

Однородное уравнение:

$$y'' - 2y' = 0. \implies k^2 - 2k = 0; \implies k_1 = 0, k_2 = 2; \implies$$

$$y_o = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$y_* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx; y'_* = 2Ax + B; y''_* = 2A. \implies$$

$$-4Ax + 2(A - B) = x + 3; \implies A = -\frac{1}{4}; B = -\frac{7}{4}. \implies$$

$$y = y_o + y_* = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x + 7).$$

3.7.2 Правая часть – экспоненциальная функция

Пусть правая часть НЛДУ представляет собой экспоненциальную функцию:

$$y'' + py' + qy = ae^{bx}. \quad (3.30)$$

1. Частное решение такого уравнения будем искать в виде функции, отличающейся от заданной экспоненты постоянным множителем:

$$y_* = Ae^{bx}. \quad (3.31)$$

Найдем производные:

$$y'_* = Abe^{bx}; y''_* = Ab^2 e^{bx}$$

и подставим найденные выражения вместе с (3.31) в дифференциальное уравнение (3.30):

$$Ae^{bx}(b^2 + pb + q) = ae^{bx}.$$

Если b не является корнем характеристического уравнения

$$b^2 + pb + q = 0, \quad (3.32)$$

то из последнего соотношения определяем

$$A = a(b^2 + pb + q)^{-1}.$$

Читатель может убедиться в том, что решение (3.31) при найденном значении A удовлетворяет дифференциальному уравнению (3.30), то есть является частным решением НЛДУ.

Предлагаем читателю убедиться в справедливости следующих решений для двух частных случаев.

2. Если b является корнем характеристического уравнения (3.32) и $b \neq -p/2$, то частное решение (3.30) следует искать в виде

$$y_* = Axe^{bx}, \quad \text{где } A = \frac{a}{2b + p}.$$

3. Если b является корнем характеристического уравнения (3.32) и $b = -p/2$, то частное решение (3.30) следует искать в виде

$$y_* = Ax^2 e^{bx}, \quad \text{где } A = \frac{a}{2}.$$

Как и для любого НЛДУ, его общее решение, как и ранее, представляется в виде суммы:

$$y = y_o + y_*.$$

Примеры. Найти частные решения НЛДУ.

Пр.1. $y'' + 3y' - 10y = 9e^{4x}$.

Общее решение однородного уравнения:

$$y'' + 3y' - 10y = 0. \implies k^2 + 3k - 10 = 0; \implies k_1 = -5, \quad k_2 = 2.$$

Так как $a = 9 \neq k_1$ и $\neq k_2$; $b = 4$ также не равно ни одному из корней характеристического уравнения (случай 1), то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде (3.31):

$$y_* = Ae^{4x}. \implies y'_* = 4Ae^{4x}, \implies y''_* = 16Ae^{4x}.$$

Подставим эти значения в заданное НЛДУ. Приравнявая множители при e^{4x} , получим:

$$A(16 + 3 \cdot 4 - 10) = 9. \implies A = \frac{1}{2}. \implies y_* = \frac{1}{2}e^{4x}.$$

Запишем общее решение заданного НЛДУ в виде суммы общего решения однородного уравнения и полученного решения:

$$y = y_o + y_* = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{4x}.$$

Пр.2. $y'' + 3y' - 10y = 14e^{2x}$.

Левая часть этого уравнения совпадает с левой частью уравнения, рассмотренного в **Пр.1**. Поэтому общие решения однородных уравнений двух примеров совпадают.

Что касается частного решения неоднородного уравнения, то его из-за равенства показателя степени экспоненты одному из корней характеристического уравнения ($b = k_2 = 2$), будем искать в виде, соответствующем случаю 2:

$$y_* = Axe^{2x}. \implies y'_* = Ae^{2x}(1 + 2x), \implies y''_* = 4Ae^{2x}(1 + x).$$

Подставляя эти значения в заданное уравнение и приравнявая коэффициенты при экспонентах, найдем: $A = 2$. Тогда решение заданного НЛДУ представим в виде

$$y_* = 2xe^{2x}.$$

Общее решение ОЛДУ совпадает с решением **Пр.1**.

Пр.3. $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$.

Характеристическое уравнение соответствующего ОЛДУ:

$$k^2 - 4k + 4 = 0. \implies k_1 = k_2 = 2.$$

Корни равны между собой и равны коэффициенту $b = 2$ показателя экспоненты. Поэтому частное решение НЛДУ ищем в виде, соответствующем случаю 3:

$$y_* = Ax^2 e^{2x}. \implies y'_* = A(2x + 2x^2)e^{2x}, \implies y''_* = A(2 + 8x + 4x^2)e^{2x}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное НЛДУ, приводя подобные и приравнявая множители при экспонентах, найдем: $A = 3$.

Общее решение заданного НЛДУ запишем, как и в предыдущих примерах, в виде суммы двух решений. После преобразования получим:

$$y = (C_1 + C_2 x + 3x^2)e^{2x}.$$

3.7.3 Правая часть — тригонометрические функции

Пусть правая часть НЛДУ (3.27) задана в виде суммы двух тригонометрических функций:

$$f(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x. \quad (3.33)$$

Частное решение НЛДУ (3.27) будем искать в виде

$$y_* = A \sin \omega x + B \cos \omega x. \quad (3.34)$$

Найдем производные от y_* :

$$y'_* = A\omega \cos \omega x - B\omega \sin \omega x; \quad y''_* = -A\omega^2 \sin \omega x - B\omega^2 \cos \omega x.$$

Подставим полученные производные и y_* в НЛДУ (3.27) с учетом (3.33) и сгруппируем слагаемые с одинаковыми тригонометрическими функциями:

$$(-A\omega^2 - pB\omega + qA) \sin \omega x + (-B\omega^2 + pA\omega + qB) \cos \omega x = a \sin \omega x + b \cos \omega x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, приходим к системе алгебраических уравнений относительно двух неизвестных A и B :

$$\begin{cases} (q - \omega^2)A - p\omega B = a; \\ p\omega A + (q - \omega^2)B = b. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, найдем

$$A = \frac{a(q - \omega^2) + b p \omega}{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}; \quad B = \frac{b(q - \omega^2) + a p \omega}{(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2}.$$

Коэффициенты A и B имеют конечные значения, если знаменатель в формулах для их определения не равен нулю:

$$(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2 \neq 0.$$

Рассмотрим случай, когда последнее условие не выполняется. То есть случай, когда

$$(q - \omega^2)^2 + p^2 \omega^2 = 0.$$

В силу того, что в левой части последнего равенства стоит сумма квадратов, оно может иметь место только если оба входящих в сумму слагаемых равны нулю. Исключая случай, когда $\omega = 0$ — этот случай соответствовал бы постоянному значению правой части НЛДУ — получим

$$p = 0; \quad q = \omega^2.$$

То есть исходное НЛДУ (3.27) не содержит в этом случае первую производную y' и имеет вид

$$y'' + \omega^2 y = a \sin \omega x + b \cos \omega x. \quad (3.35)$$

Как нетрудно убедиться, этому уравнению удовлетворяет частное решение, представляемое в виде

$$y_* = x(A \sin \omega x + B \cos \omega x),$$

где

$$A = \frac{b}{2\omega}; \quad B = \frac{a}{2\omega}.$$

То есть

$$y_* = \frac{x}{2\omega} (b \sin \omega x - a \cos \omega x).$$

Примеры. Найти решения НЛДУ.

Пр.1. $y'' + 12y' + 20y = \sin 2x$.

Общее решение однородного уравнения:

$$k^2 + 12k + 20 = 0. \Rightarrow k_1 = -2, \quad k_2 = -10; \Rightarrow$$

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-10x}.$$

Частное решение НЛДУ:

$$y_* = A \sin 2x + B \cos 2x. \Rightarrow$$

$$y'_* = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x; \Rightarrow y''_* = -4 \sin 2x - 4B \cos 2x.$$

Подставим решение y_* и его производные в исходное уравнение:

$$(16A - 24B) \sin 2x + (24A + 16B) \cos 2x = \sin 2x.$$

Приравнявая множители при одинаковых тригонометрических функциях, приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 16A - 24B = 1; \\ 24A + 16B = 0. \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{52}; \quad B = -\frac{3}{104}.$$

Записываем общее решение НЛДУ:

$$y = y_0 + y_* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-10x} + \frac{1}{52} \sin 2x - \frac{3}{104} \cos 2x.$$

Пр.2. $y'' + y = \cos x$. ($p = 0$; $q = \omega^2 = 1$).

Общее решение однородного уравнения:

$$k^2 + 1 = 0. \implies k = \pm i. \implies y_o = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$y_* = x(A \sin x + B \cos x). \implies$$

$$y_*' = (A - Bx) \sin x + (B + Ax) \cos x; \implies y_*'' = (-2B - Ax) \sin x + (2A - Bx) \cos x.$$

Подставим эти выражения в заданное НЛДУ:

$$-2B \sin x + 2A \cos x = \cos x. \implies B = 0; A = \frac{1}{2}.$$

Общее решение НЛДУ:

$$y = \left(C_1 + \frac{1}{2}x\right) \sin x + C_2 \cos x.$$

Замечание. Если правая часть НЛДУ представляет собой сумму полинома, экспоненциальных и тригонометрических функций, то частное решение таких уравнений будет представляться в виде суммы соответствующих решений.

Решения НЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами легко обобщаются на уравнения произвольного n -го порядка. В последнем случае для определения общего решения однородного уравнения квадратное характеристическое уравнение заменяется на соответствующее характеристическое уравнение n -ного порядка.

Представление о решениях произвольных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений читатель может найти в соответствующей литературе.

Отметим, что далеко не для каждого даже линейного дифференциального уравнения удастся записать решение в аналитическом виде. Решения таких уравнений можно получить приближенно, используя многочисленные численные методы. Два из них, применимые для получения решений ЛДУ первого порядка, рассмотрены в следующем разделе.

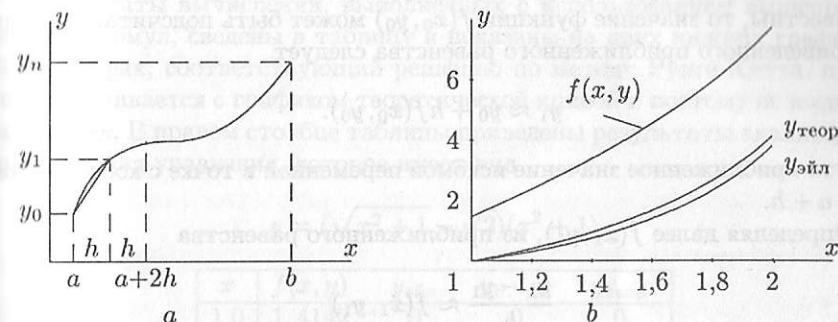


Рис. 3.2: Иллюстрация метода Эйлера и пример

3.8 Численные методы решения задачи Коши

Как и в случае интегралов, не для всех дифференциальных уравнений можно найти аналитическое решение. К настоящему времени разработано несколько достаточно эффективных методов численного решения дифференциальных уравнений. Остановимся на двух из них – методах, основанных на замене операций дифференцирования конечными приращениями функций и аргументов.

Простейшим из методов численного интегрирования дифференциальных уравнений является метод Эйлера. Суть этого метода заключается в следующем.

Пусть задано дифференциальное уравнение в виде

$$y' = f(x, y).$$

Требуется найти решение этого уравнения на интервале $x \in [a, b]$ при заданном граничном условии $y(a) = y_0$ (рис.3.2,а.)

Разобьем интервал $[a, b]$ на n равных (для простоты) подынтервалов с шагом $h = (b - a)/n$.

На участке $[a, a+h]$ дифференциальное уравнение можно заменить приближенным равенством

$$\frac{y_1 - y_0}{h} \approx f(x_0, y_0).$$

Здесь $x_0 = a$, $y_0 = y(a)$ — параметры граничного условия. Если x_0 и y_0 известны, то значение функции $f(x_0, y_0)$ может быть подсчитано. Тогда из приведенного приближенного равенства следует

$$y_1 \approx y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Это приближенное значение искомой переменной в точке с координатой $x_1 = a + h$.

Определяя далее $f(x_1, y_1)$, из приближенного равенства

$$\frac{y_2 - y_1}{h} \approx f(x_1, y_1)$$

находим

$$y_2 \approx y_1 + hf(x_1, y_1).$$

И так далее. Для произвольного $(k+1)$ -го шага

$$y_{k+1} \approx y_k + hf(x_k, y_k).$$

Метод Эйлера выгодно отличается от других методов численного интегрирования дифференциальных уравнений своей простотой, но не большой точностью. Поэтому на практике большее распространение получил другой метод решения дифференциальных уравнений — *метод Рунге-Кутты*, который имеет несколько разновидностей.

В методе Рунге-Кутты третьего порядка вычисление искомой переменной на $(k+1)$ -м шаге интегрирования осуществляется с использованием формулы

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(p_1 + 4p_2 + p_3),$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= hf(x_k, y_k), \\ p_2 &= hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}p_1\right), \\ p_3 &= hf(x_k + h, y_k - p_1 + 2p_2). \end{aligned}$$

Пример. Решить численно методами Эйлера и Рунге-Кутты дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 1}y + x\sqrt{x^2 + 1}$$

на отрезке $x \in [1, 2]$ с шагом $h = 0,2$; если $y(1) = 0$.

Результаты вычислений, выполненных с использованием вышеприведенных формул, сведены в таблицу и показаны на двух нижних графиках (3.2). График, соответствующий решению по методу Рунге-Кутты, практически сливается с графиком теоретической кривой и поэтому не выделен на рисунке. В правом столбце таблицы приведены результаты аналитического решения уравнения, которое имеет вид

$$y = (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2})(x^2 + 1)$$

x	$f(x, y)$	$y_{\text{Эйл}}$	$y_{\text{Р.-К.}}$	$y_{\text{теор}}$
1.0	1,4142	0	0	0
1.2	2,2294	0,2828	0,368	0,3608
1.4	3,2655	0,7286	0,910	0,9065
1.6	4,5312	1,3817	1,60	1,6824
1.8	6,0281	2,2879	2,64	2,7345
2.0	7,7595	3,8388	4,00	4,1093

3.9 Вопросы

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение? Уравнение в частных производных?
2. Что определяет порядок дифференциального уравнения?
3. Что называется решением дифференциальных уравнений?
4. Что такое интегральная кривая? Семейство интегральных кривых?
5. Как определить количество независимых постоянных интегрирования в решении дифференциального уравнения?
6. Что такое общее и частное решения дифференциального уравнения?
7. Что представляют собой начальные (граничные) условия? Для чего они необходимы при нахождении решений дифференциальных уравнений?
8. Что такое неполное дифференциальное уравнение первого порядка?
9. В чем отличие и сходство переменных x и y в неполном дифференциальном уравнении?
10. Имеются ли ограничения на вид функции в неполном дифференциальном уравнении?
11. Чем отличаются дифференциальные уравнения с разделяющимися и разделенными переменными?
12. Запишите в общем виде НЛДУ второго порядка. Почему такое уравнение называется линейным?
13. Запишите в общем виде ОЛДУ второго порядка, соответствующего уравнению вопроса 12. Почему такое уравнение называется однородным?
14. Какие функции называются линейно независимыми? Линейно зависимыми?
15. Приведите примеры линейно зависимых и линейно независимых функций.
16. Почему функция $y \equiv 0$ линейно зависима от любой функции?

17. Каким образом определяется частное и общее решения ОЛДУ второго порядка? n -ного порядка?
18. Что такое характеристическое уравнение для ОЛДУ?
19. Как зависит общее решение ОЛДУ второго порядка от значения дискриминанта характеристического уравнения? Запишите эти решения для каждого значения дискриминанта.
20. Что такое частное решение НЛДУ?
21. Как строится общее решение НЛДУ?
22. Как выглядит в общем случае частное решение НЛДУ второго порядка с полиномом в правой его части?
23. Как выглядит частное решение НЛДУ второго порядка с полиномом в правой его части в случае $q = 0$? В случае $p = 0$ и $q = 0$?
24. Запишите частное решение НЛДУ второго порядка с экспоненциальной функцией в его правой части.
25. Как выглядит частное решение НЛДУ второго порядка с экспоненциальной функцией в правой его части в случае, когда в показателе экспоненты стоит коэффициент, равный корню характеристического уравнения?
26. Запишите частное решение НЛДУ второго порядка с тригонометрической функцией в его правой части.
27. Как выглядит частное решение НЛДУ второго порядка с тригонометрической функцией в правой его части в случае $p = 0$ и $q = \omega^2$?
28. Как определяется частное решение НЛДУ второго порядка в случае, если его правая часть представляет собой сумму различных функций?
29. Что представляет собой задача Коши? Как в ней определяются постоянные интегрирования?
30. В чем суть метода Эйлера численного интегрирования дифференциальных уравнений? Пояснения сопроводите графическим построением.

31. В чем суть метода Рунге-Кутты решения дифференциальных уравнений? В чем состоят его достоинства и недостатки по сравнению с методом Эйлера?
32. Можно ли с помощью метода Эйлера получить более точный результат решения дифференциальных уравнений, чем по методу Рунге-Кутты? Если да, то в каких случаях?

3.10 Упражнения

К разделу 3.5

1. Покажите, что функции Ax^m и Bx^n линейно независимы при $m \neq n$ и линейно зависимы при $m = n$.

К разделу 3.6

Найти общее решение ОЛДУ.

1. $y'' - 3y' - 4y = 0$.
2. $y'' + 6y' + 9y = 0$.
3. $y'' - 8y' + 25y = 0$.

К разделу 3.7

Найти общее решение НЛДУ.

1. $y'' + 5y' + 4y = 2 - 4x^2$.
2. $y'' - 4y = 2x$.
3. $y'' + 3y' - 4y = 4e^{2x}$.
4. $y'' + y' - 2y = e^x$.
5. $y'' + 2y' = 1 - e^{-2x}$.
6. $y'' + 4y - 5y = \sin x$.
7. $y'' + 4y = 2 - 4 \cos 2x$.
8. $y'' + 2y - 3y = 1 - \sin x + e^x$.

3.11 Расчетная работа 3

Численные методы интегрирования и решения дифференциальных уравнений

Задана функция $f(x) = N + (x + n)^2$, где n – порядковый номер студента в учебной группе, и два параметра: a – последняя цифра учебной группы, в которой числится студент, и $b = a + 5$. Количество подынтервалов на интервале $[a, b]$ при численном решении задач равно 10.

1. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$:

- 1.1. используя метод замены переменной (при получении первообразной) и формулу Ньютона-Лейбница (аналитическое решение);
 - 1.2. методом прямоугольников, определяя площади по левым значениям функции на подынтервалах $S_{\text{пр}}^{\text{лев}}$ и по правым – $S_{\text{пр}}^{\text{прав}}$;
 - 1.3. методом трапеций;
 - 1.4. методом Симпсона ($2n = 10$);
 - 1.5. изобразить график функции, ее первообразной и пояснить смысл полученных интегралов.
2. Получить решение дифференциального уравнения $y' = yf(x)$ на интервале $[a, b]$ при условии $y(a) = 0$:
- 2.1. аналитическим методом разделения переменных;
 - 2.2. методом Эйлера;
 - 2.3. методом Рунге-Кутты;
 - 2.4. представить полученные результаты в виде таблиц и графиков.

Глава 4

Теория вероятностей
(основные положения)

В реальной жизни все явления, процессы и события подчинены определенным закономерностям. Рассмотрим, например, фантастическую, но в принципе непротиворечивую, цепь связанных последовательных событий.

Некоторому работнику попала в глаз песчинка. Возникшая помеха привела к опозданию работника на предприятие. Опоздание повлекло за собой нарушение технологической последовательности изготовления деталей. В результате в продукции предприятия оказался брак. Бракованная деталь ставится на самолет, который из-за этого терпит катастрофу. С самолетом погибает важная зарубежная персона. Страна, гражданином которой является погибший, заподозрив злой умысел, объявляет войну стране-виновнице...

Рассуждения можно продолжить до мировой катастрофы.

Читатель скажет, что описанная последовательность событий маловероятна и, в общем, будет прав. Но тут же возникает вопрос: что такое малая вероятность, с которой можно не считаться, что такое большая вероятность, с которой необходимо считаться, и что такое вероятность вообще?

На описанную выше последовательность событий можно посмотреть с двух точек зрения.

1. Конкретные объекты и действия (конкретная песчинка → конкретный работник → конкретная деталь → конкретный самолет ...).
2. Какие-либо из совокупности случайно выбранные объекты и действия

(какая-либо песчинка $\rightarrow$ какой-либо работник $\rightarrow$ какая-либо деталь $\rightarrow$ какой-либо самолет ...).

В первом случае ситуация носит определенный (*детерминированный*) характер, во втором неопределенный (*случайный*).

Описанием ситуаций второго типа занимается раздел математики, называемый *теорией вероятностей*, а подход с позиций теории вероятностей к анализу процессов называется *вероятностным*.

Обращаясь к первой фразе этой главы, отметим, что случайный характер, которым мы наделяем некоторые явления, не является их реальной сущностью, а лишь предписывается нами этим явлениям или в силу отсутствия у нас знаний о существующих закономерностях, или в силу непомерной сложности детерминированного описания явлений.

4.1 Основные понятия и определения

Для того, чтобы построить любую математическую модель, необходимо сформулировать и описать ее основные положения и определения.

Случайным опытом называют любой эксперимент, результат которого нельзя предсказать до его осуществления.

Событием называется всякий результат случайного опыта.

Например, выпадение осадков в некоторой конкретной местности 1 октября через три года; покупка каким-либо посетителем магазина обуви 43 размера до 10 часов утра в определенный день; выпадение на верхней грани игральной кости при первом бросании одного, двух, ... шести очков; ...

Появление разных событий в последнем примере (выпадение одного, двух, ... шести очков) *равновозможно*.

События в математике принято обозначать первыми буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д.

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает возможность появления других. В противном случае события называются *совместными*. Примером несовместных событий является одновременное выпадение трех и пяти очков на игральной кости за одно бросание. Совместными являются события, заключающиеся в выпадении трех очков при первом и трех очков при втором бросаниях.

Событие называется *достоверным*, если оно не может не произойти; *невозможным*, если оно не может произойти.

Если из двух событий, одно из которых должно обязательно произойти, появление одного события исключает возможность появления второго, то

такие события называются *противоположными*. Событие, противоположное событию A , обозначается $\bar{A}$.

В некотором явлении (испытании) события $A, B, \dots, K$ называются *единственно возможными*, если какое-либо одно из них обязательно произойдет.

Предположим, что стрелок производит один выстрел по мишени, показанной на рис. 4.1. При этом возможны три события:

A – попадание в круг;

B – попадание в треугольник;

C – промах (попадание не в круг и не в треугольник).

События A, B и C являются, очевидно, единственно возможными.

События $A, B, \dots, K$ образуют *полную группу*, если они являются единственно возможными и несовместными.

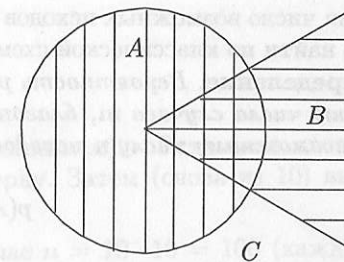


Рис. 4.1: Пересечение событий

События A, B и C (рис. 4.1)

в совокупности не могут считаться полной системой, так как A и B – совместные события (могут произойти одновременно). События A – попал в круг и $\bar{A}$ – не попал в круг образуют полную систему.

События A и B называются *эквивалентными*, если наступление события A влечет за собой наступление события B , а наступление события B влечет за собой наступление события A .

Полной группой событий называется совокупность таких событий, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Определения некоторых терминов теории вероятностей интуитивно понятны без строгих определений. Поэтому при дальнейшем изложении материала новые, не требующие пояснения термины, иногда будут вводиться без их определения.

Математическая модель случайного опыта включает в себя:

- 1) описание возможных исходов;
- 2) описание событий;
- 3) определение вероятности наступления этих событий.

4.2 Вероятность события

Пусть в магазин завезено 200 пар обуви, среди которых 8 бракованных. Покупатель берет наудачу одну пару обуви. Событие A , состоящее в том, что выбранная пара обуви небракованная, и B , состоящее в выборе бракованной пары, не равновозможные. Не зная строгого определения вероятности, а опираясь только на интуитивные ощущения, читатель может с уверенностью сказать, что событие A более вероятно, чем событие B .

Задача состоит в том, чтобы дать численную оценку вероятности события. Этой цели служит классическое определение вероятности.

Если число возможных исходов опыта конечно, то вероятность события можно найти по классической схеме:

Определение. Вероятность $p(A)$ появления события A — равна отношению числа случаев m , благоприятствующих этому событию, к общему возможному числу n исходов опыта:

$$p(A) = \frac{m}{n}. \quad (4.1)$$

Пример 1. Для ситуации, описанной в начале раздела, найти вероятность того, что покупатель выбрал небракованную пару обуви.

Решение.

Всего возможно $n=200$ случаев выбора пар обуви. Это единственно возможные случаи, которые являются к тому же равновозможными и несовместными. Количество случаев, благоприятствующих появлению события A , состоящего в выборе небракованной пары обуви, $m = 200 - 8 = 192$. Поэтому вероятность появления события A : $p = 192/200 = 0,96$.

Пример 2. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятность события A , состоящего в том, что сумма очков на обеих костях будет равна 10.

Решение.

Для подсчета чисел n и m общего числа случаев и благоприятных случаев составим таблицу сочетаний двух цифр (в табл. следующей страницы первая цифра — очки на одной кости, вторая — на другой).

Приведенные в таблице случаи являются единственно возможными, равновозможными и несовместными. Общее количество исходов $n = 6 \times 6 = 36$. Жирным шрифтом выделены цифры, сумма которых равна 10, — это благоприятные случаи, число которых $m = 3$.

Найдем вероятность события A : $p(A) = m/n = 3/36 = 1/12$.

Пример 3. Среди 10 шаров, находящихся в урне, 7 белых и 3 красных. Наудачу вынимаются два из них. Определить вероятность того, что оба

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

они красные (событие A).

С л у ч а й 1 (Выборка с возвращением). Установив цвет первого вынутого шара, его возвращают в урну. Затем (снова из 10) вынимают второй шар.

Общее число исходов в этом случае $n = 10 \cdot 10 = 100$ (каждый из 10 шаров второй попытки может сочетаться с каждым из 10 шаров первой попытки). Аналогичные рассуждения по отношению к благоприятным исходам дает возможность определить их число: $m = 3 \cdot 3 = 9$. Следовательно, $P(A) = m/n = 9/100 = 0,09$.

С л у ч а й 2 (Выборка без возвращения). Вынутый первым шар в урну не возвращается. В этом случае, очевидно, $n = 10 \cdot 9 = 90$, $m = 3 \cdot 2 = 6$ и $P(A) = m/n = 6/90 = 1/15 \approx 0,0667 \neq 0,09$.

Последний пример показывает, что условия испытания влияют на вероятность.

Теорема. Вероятность $p(A)$ любого события A заключена в пределы от нуля до единицы

$$p(A) \in [0; 1].$$

При этом:

- 1) если A — достоверное событие, то $p(A) = 1$;
- 2) если A — невозможное событие, то $p(A) = 0$.

Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно вспомнить, что число благоприятных исходов m в определении вероятности $P(A) = m/n$ может принимать значения от 0 до n .

4.3 Элементы комбинаторики

Число исходов в конкретных опытах определяется с использованием соотношений комбинаторики.

Комбинаторика – раздел математики, в котором рассматриваются различные сочетания элементов.

Рассмотрим, например, m элементов группы $a : a_1, a_2, \dots, a_m$ и n элементов группы $b : b_1, b_2, \dots, b_n$. Определим, сколько пар элементов можно составить из элементов этих групп, выбирая их по одному из группы и считая порядок следования элементов в паре существенным. Для определения количества пар составим таблицу

$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$\dots$	$a_1 b_n$
$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$\dots$	$a_2 b_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_m b_1$	$a_m b_2$	$\dots$	$a_m b_n$

каждая строка которой содержит по n элементов; а количество строк равно m . Ясно, что количество элементов в таблице

$$k = mn.$$

Будем называть общее, исчерпывающее количество рассматриваемых элементов (например n элементов группы b) *генеральной совокупностью*. Любую часть из r элементов, принадлежащих генеральной совокупности ($r \leq n$), будем называть *выборкой* из генеральной совокупности.

Размещениями A_n^r называются выборки из генеральной совокупности n элементов, по r в каждой ($r \leq n$), которые отличаются друг от друга элементами и порядком их следования.

По определению из n элементов можно образовать n размещений по одному.

Чтобы определить количество элементов в размещениях из n элементов по два, необходимо к каждому из n элементов присоединить $(n-1)$ не совпадающих с ним элементов. Образовавшиеся таким образом размещения расположим в виде таблицы. Прочерки стоят на местах таблицы, где по

логике должны стоять пары одинаковых элементов.

$a_1 a_1$	$a_1 a_2$	$a_1 a_3$	$\dots$	$a_1 a_{n-1}$	$a_1 a_n$
$a_2 a_1$	$a_2 a_2$	$a_2 a_3$	$\dots$	$a_2 a_{n-1}$	$a_2 a_n$
$a_3 a_1$	$a_3 a_2$	$a_3 a_3$	$\dots$	$a_3 a_{n-1}$	$a_3 a_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_n a_1$	$a_n a_2$	$a_n a_3$	$\dots$	$a_n a_{n-1}$	$a_n a_n$

Приведенная таблица содержит n строк и в каждой строке по $(n-1)$ элементов. То есть всего в таблице $A_n^2 = n(n-1)$ элементов.

Для определения числа размещений из n элементов по три необходимо к каждой из $n(n-1)$ пар элементов присоединить по одному из оставшихся (т.е. не вошедших в пару элементов). Представим получающиеся таким образом выборки элементов в виде таблицы

$(a_1 a_2) a_3$	$(a_1 a_2) a_4$	$\dots$	$(a_1 a_2) a_n$
$(a_1 a_3) a_2$	$(a_1 a_3) a_4$	$\dots$	$(a_1 a_3) a_n$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(a_n a_{n-1}) a_1$	$(a_n a_{n-1}) a_2$	$\dots$	$(a_n a_{n-1}) a_{n-2}$

Матрица содержит $n(n-1)$ строк, в каждой из которых по $(n-2)$ элемента. Поэтому $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$.

Обобщим полученный результат на размещение из n элементов по r :

$$A_n^r = n(n-1)(n-2) \dots [n-(r-1)].$$

Перестановками P_n называются выборки из генеральной совокупности n элементов по n различным элементам в каждой.

Очевидно, число перестановок равно числу размещений из n элементов по n :

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2) \dots [n-(n-2)] \cdot 1 = n!.$$

Последняя запись $(n!)$ читается “эн факториал” – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n .

Сочетаниями C_n^r называются выборки r различных элементов из генеральной совокупности n элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Порядок элементов при этом не имеет значения.

Составим таблицу сочетаний из n элементов по два:

$a_1 a_2$	$a_1 a_3$	$a_1 a_4$	$\dots$	$a_1 a_n$
	$a_2 a_3$	$a_2 a_4$	$\dots$	$a_2 a_n$
		$a_3 a_4$	$\dots$	$a_3 a_n$
			$\dots$	$\dots$
				$a_{n-1} a_n$

Формулу для подсчета числа сочетаний, представленных в таблице, получим путем следующих рассуждений. В каждом сочетании осуществим перестановки элементов. Так как они содержат по два элемента, то в результате описанного действия число элементов в таблице удвоится (каждое сочетание из двух элементов имеет по две перестановки). При этом таблица превратится в таблицу, записанную для вывода числа размещений с количеством элементов A_n^2 . Сказанное позволяет записать соотношение

$$C_n^2 P_2 = A_n^2 \quad \text{или} \quad C_n^2 = \frac{A_n^2}{P_2} = \frac{n(n-1)}{2!}.$$

Обобщением записанного выражения будет формула

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n-1) \dots [n-(r-1)]}{r!}.$$

Умножая числитель и знаменатель последнего выражения на $(n-r)!$, получим широко используемую в теории вероятностей формулу

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Анализ полученного выражения приводит к полезному при вычислениях свойству сочетаний

$$C_n^r = C_n^{n-r}.$$

В заключение раздела приведем табл. 4.1, полезную для использования в практических задачах подсчета числа исходов опыта выборки r элементов из N .

Пример 1. Из 10 первых букв алфавита составляется слово из четырех букв. Какова вероятность того, что слово будет оканчиваться на букву "а" (событие A), если буквы: а) могут повторяться; б) не могут повторяться.

	С повтором элементов	Без повтора элементов
Порядок элементов важен	N^r	A_N^r
Порядок элементов не важен	C_{N+r-1}^r	C_N^r

Табл. 4.1: Подсчет числа исходов

Решение.

а. Общее число исходов n зависит от порядка расположения букв, и буквы могут повторяться. Поэтому, следуя таб. ??, при $N = 10$ и $r = 4$ найдем $n = N^r = 10^4$.

Число благоприятных исходов при $N = 10$ и $r = 4 - 1 = 3$ (последняя буква слова занята под "а") $m = 10^3$.

Искомая вероятность

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{10^3}{10^4} = 0,1.$$

б. Общее число исходов n зависит от порядка расположения букв, но буквы не могут повторяться. Поэтому, следуя таб. ??, при $N = 10$ и $r = 4$ найдем общее число исходов $n = A_N^r = A_{10}^4$; число благоприятных исходов $m = A_{N-1}^{r-1} = A_{10-1}^{4-1} = A_9^3$ (буква "а" уже стоит на последнем месте. Осталось 9 букв и 3 места).

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{A_9^3}{A_{10}^4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 9 \cdot 8} = 0,1.$$

Пример 2. В лотерее разыгрываются N билетов, из которых M — выигрышные. Куплено K билетов. Найти вероятность того, что среди них L — выигрышные.

Решение.

Общее число исходов опыта выбора K билетов из N без повтора и без учета порядка на основании табл. 4.1 определим по формуле:

$$n = C_N^K.$$

Найдем число благоприятных исходов.

Выигрышные L билетов можно выбрать из общего числа M C_M^L числом способов. Остальные $K - L$ невыигрышных билетов можно выбрать из $N - M$ билетов C_{N-M}^{K-L} числом способов. Поэтому число благоприятных случаев $m = C_M^L C_{N-M}^{K-L}$.

Искомая вероятность определится из выражения

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_M^L C_{N-M}^{K-L}}{C_N^K}.$$

4.4 Вероятность произведения событий

Произведением конечного числа событий называется событие, состоящее в одновременном наступлении всех этих событий. По отношению к событиям A и B , показанным на рис. 4.1, произведением (обозначается AB) является только та область, которая заштрихована одновременно горизонтальными и вертикальными линиями, то есть область, которая принадлежит и кругу, и треугольнику. На языке теории множеств произведение — это пересечение множеств $A \cap B$.

Прежде чем сформулировать теорему о вероятности произведения событий, введем определение.

Условной вероятностью $P_B(A)$ называется вероятность события A , найденная в предположении, что событие B наступило.

Пример 1. Разыгрывается два комплекта перемешанных лотерейных билетов. В первом комплекте 100 билетов, из которых 25 выигрышных. Во втором — 150 билетов, из которых 60 выигрышных. Из общей пачки билетов наудачу вытаскивается один билет. Найти вероятность того, что он выигрышный (событие A) и условные вероятности событий B и $\bar{B}$, если B — это событие, состоящее в том, что выигравший билет принадлежит первому комплекту.

Решение.

Вероятность события A равна отношению всех выигрышных билетов к общему количеству билетов первого и второго комплектов $P(A) = (25 + 60)/(100 + 150) = 0,34$. Условная вероятность события A относительно события B (вероятность того, что вытянутый наудачу билет выигрышный, если известно, что он из первого комплекта) $P_B(A) = 25/100 = 0,25$. Условная вероятность события A относительно события $\bar{B}$ (вероятность того, что вытянутый билет принадлежит не B , то есть принадлежит второму комплекту): $P_{\bar{B}}(A) = 60/150 = 0,4$.

Теорема 1. Вероятность произведения двух событий A и B равна

4.4. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Убедимся в справедливости теоремы.

Пусть из общего числа n единственно возможных, равновероятных и несовместных случаев событию A благоприятствуют m случаев, из которых k благоприятствуют случаю B . Тогда $P(A) = m/n$; $P_A(B) = k/m$.

Произведению событий A и B благоприятствуют только те случаи из m , благоприятствующих A , которые благоприятствуют и событию B , то есть k случаев из n . Поэтому $P(AB) = k/n$. Умножая числитель и знаменатель этой дроби на m , получим

$$P(AB) = \frac{m \cdot k}{n \cdot m} = P(A)P_A(B).$$

Теорема доказана. Второе ее равенство получается аналогично.

Пример 2. Имеются 70 лотерейных билетов, из которых 50 выигрышные. Найти вероятность того, что два взятые одновременно билета окажутся выигрышными.

Решение.

Чтобы искомое событие состоялось, необходимо, чтобы выиграл и первый билет (событие A), и второй билет (событие B). Очевидно, $P(A) = 50/70 = 5/7$; $P_A(B) = (50 - 1)/(70 - 1) = 49/69$. Используя формулу вероятности произведения, найдем

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = \frac{5}{7} \cdot \frac{49}{69} = \frac{35}{69}.$$

Теорема 2. Вероятность произведения конечного числа событий равна произведению их условных вероятностей относительно произведения предшествующих каждому из них событий:

$$P(ABC \dots KL) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) \dots P_{ABC \dots K}(L).$$

Доказательство теоремы основано на методе математической индукции.

Если все события, входящие в произведение, независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB \dots L) = P(A)P(B) \dots P(L).$$

Пример 3. На 10 карточках напечатаны цифры от нуля до девяти. Найти вероятность того, что три наудачу выбранные и поставленные в ряд карточки составят число 125.

Решение.

Искомое событие D произойдет, если первой будет взята карточка с цифрой 1, второй – с цифрой 2 и третьей – с цифрой 5. События зависимы (вероятность события B , например, зависит от того, вытянута ли первой карточка с номером 1). Поэтому

$$P(D) = P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = (1/10) \cdot (1/9) \cdot (1/8) = 1/720.$$

Пример 4. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что любой станок потребует внимания рабочего в течение смены, равна 0,6. Предполагая, что неполадки на станках независимы, найти вероятность того, что в течение смены потребуют внимания рабочего: а) все четыре станка; б) ни один из станков; в) по крайней мере один станок.

Решение.

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 события, состоящие в том, что в течение смены внимания рабочего потребуют станки с соответствующими номерами.

а). Для того, чтобы все станки потребовали внимания рабочего, в течение смены должны произойти все четыре события, а это – произведение событий. Так как события считаются независимыми, то $P_1 = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = 0,6^4 = 0,1296$.

б). Вероятность того, что в течение смены каждый станок не потребует внимания рабочего – это вероятность события, противоположного рассмотренному в пункте а), то есть $P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = P(\bar{A}_3) = P(\bar{A}_4) = 1 - 0,6 = 0,4$. Поэтому для искомого события B определим $P(B) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) = 0,4^4 = 0,0256$.

в). Событие B и событие, состоящее в том, что в течение смены хотя бы один станок из четырех потребует внимания рабочего, – противоположные. Поэтому $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,0256 = 0,9744$.

4.5 Вероятность суммы событий

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. По отношению к событиям A и B , показанным на рис. 4.1, суммой (обозначается $A + B$) является вся заштрихованная область, в которую входят точки, принадлежащие хотя бы одному

из событий, в том числе, конечно, одновременно и кругу, и треугольнику. На языке теории множеств сумма – это объединение множеств $A \cup B$.

После введения понятия и определения суммы событий сформулируем две теоремы о вероятности сумм этих событий.

Теорема 1. Вероятность суммы конечного числа несовместимых событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A + B + \dots + K) = P(A) + P(B) + \dots + P(K).$$

Покажем, что теорема справедлива для случая двух событий A и B .

Пусть m_A и m_B – количество случаев, благоприятных для этих событий, и n – общее количество случаев, благоприятных, в общем, не только этим двум событиям. Так как A и B – независимые события, то ни один из случаев m_A не благоприятствует событию B , а m_B – событию A . Поэтому сумме событий $(A + B)$ благоприятствует $(m_A + m_B)$ случаев. Следовательно

$$P(A + B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Обобщение доказательства на случай более, чем двух событий, очевидно.

Пример 1. Вероятность того, что первым к остановке транспорта подойдет автобус маршрута A : $P(A) = 0,18$; маршрута B : $P(B) = 0,32$. Определить вероятность того, что первыми (среди всех транспортных средств) к остановке подойдут автобусы маршрутов A или B .

Решение.

Указанное событие произойдет, если произойдет хотя бы одно из событий A или B , что по определению равно сумме событий. Так как события независимы, то $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,18 + 0,32 = 0,5$.

Следствие 1. Сумма вероятностей событий, образующих полную систему, равна единице.

Следствие 2. Вероятность события $\bar{A}$, противоположного событию A , равна разности между единицей и вероятностью события A :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

Теорема 2. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий за вычетом вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

В справедливости теоремы можно убедиться, используя геометрический смысл вероятности (рис.4.1).

В геометрической сумме двух площадей: A , ограниченной окружностью, и B , ограниченной треугольником, дважды фигурирует площадь, находящаяся одновременно внутри и окружности, и треугольника. По определению, данному в предыдущем разделе, произведение событий – это пересечение двух областей. Поэтому при объединении площадей из их “чистой” суммы необходимо один раз вычесть их совместную площадь. Этим подтверждается справедливость теоремы.

Пример 2. Стрелок производит выстрел по мишени, представляющей собой пересечение областей, ограниченных окружностью радиуса R и равнобедренным треугольником, вершина которого лежит в центре круга, а сторона равна R . Определить вероятность попадания стрелка в область, ограниченную одновременно окружностью и треугольником, если вероятность попадания в окружность $P(A) = 0,66$. Считать вероятности попадания пропорциональными площадям фигур.

Решение.

Из геометрических зависимостей найдем площади фигур, ограниченных:

- окружностью: $S_0 = \pi R^2$;
- треугольником: $S_{\triangle} = \sqrt{3}R^2$;
- одновременно окружностью и треугольником: $S_{0,\triangle} = \pi R^2/3$.

Пусть A – событие, заключающееся в попадании в круг; B – в треугольник. Тогда

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{S_0}{S_{\triangle}} \rightarrow P(B) = \frac{P(A)S_{\triangle}}{S_0} = \frac{0,66\sqrt{3}R^2}{\pi R^2} = 0,3639.$$

Аналогично найдем вероятность попадания в область, ограниченную одновременно окружностью и треугольником:

$$P(AB) = \frac{0,66 \pi R^2}{\pi R^2 \cdot 3} = 0,22.$$

Определим искомую вероятность

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,66 + 0,3639 - 0,22 = 0,8039.$$

Отметим, что пренебрежение условием совместности событий при их суммировании приводит не только к ошибочным, но порой и абсурдным результатам. Так, сумма двух вероятностей $P(A)$ и $P(B)$ в последнем примере превышает единицу.

4.6 Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие F может наступить только при условии наступления одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, то вероятность того, что F произойдет, может быть подсчитана по полученной ниже формуле полной вероятности.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются гипотезами по отношению к вероятности наступления события F , если они:

- 1) независимы;
- 2) образуют полную группу, то есть

$$\sum_{i=1}^n p(A_i) = 1.$$

Рассмотрим пример, который приведет к формуле полной вероятности.

Пример 1. Пусть на трех предприятиях изготавливают одну и ту же продукцию. При этом в торговую сеть поступает: 50% продукции с предприятия 1, среди которой 10% брака; 30% продукции с предприятия 2, среди которой 5% брака; 20% продукции с предприятия 3, среди которой 15% брака. Найти вероятность приобретения потребителем небракованной продукции (событие F).

Решение.

Обозначим через A_1, A_2, A_3 события (гипотезы), состоящие в том (предполагающие то), что приобретенная продукция изготовлена соответственно на предприятиях 1, 2, 3. Вероятности этих событий определяются из условия задачи как доли продукции, поступившие на реализацию от предприятий: $P(A_1)=0,5$; $P(A_2)=0,3$; $P(A_3)=0,2$. Условные вероятности события F относительно каждого из них – как доли небракованной продукции при условии, что продукция изготовлена на соответствующих предприятиях: $P_{A_1}(F)=0,9$; $P_{A_2}(F)=0,95$; $P_{A_3}(F)=0,85$.

Событие F наступит, если произойдут или событие B_1 – продукция произведена на предприятии 1 и годна (то есть и A_1 и F); или событие B_2 (A_2 и F); или событие B_3 – (A_3 и F). То есть F является суммой трех событий, которые, очевидно, несовместны и потому к вычислению вероятности наступления F следует применить теорему сложения вероятностей

$$P(F) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = P(A_1F) + P(A_2F) + P(A_3F).$$

Используя теорему умножения, для вероятности получим

$$P(F) = P(A_1)P_{A_1}(F) + P(A_2)P_{A_2}(F) + P(A_3)P_{A_3}(F).$$

Подставим исходные данные

$$P(F) = 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,85 = 0,905.$$

Обобщая полученную при решении примера формулу на конечное число n возможностей осуществления события F с каждым из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, запишем *формулу полной вероятности*

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A_1)P_{A_1}(F) + P(A_2)P_{A_2}(F) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(F) = \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(F). \end{aligned}$$

Пример 2. Изменим условия Примера 1. Пусть купленное наудачу в магазине изделие (продукция) оказалось небракованным. Требуется указать возможные варианты (гипотезы) места изготовления изделия и определить их вероятности.

Решение.

Купленное небракованное изделие могло быть произведено на любом из трех предприятий. Обозначим вероятности того, что оно изготовлено на одном из предприятий, соответственно $P_F(A_1), P_F(A_2), P_F(A_3)$.

Примем условие, что небракованное изделие изготовлено на первом предприятии. Для этого необходимо пересечение двух событий: события F , заключающегося в том, что изделие годное, и события A_1 — что оно произведено на предприятии 1. А это — произведение двух событий.

Согласно формуле вероятности произведения событий запишем

$$P(A_1F) = P(A_1)P_{A_1}(F) = P(F)P_F(A_1).$$

Из последнего равенства найдем

$$P_F(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(F)}{P(F)}.$$

Или с учетом формулы полной вероятности

$$P_F(A_1) = \frac{P(A_1)P_{A_1}(F)}{P(A_1)P_{A_1}(F) + P(A_2)P_{A_2}(F) + P(A_3)P_{A_3}(F)}.$$

Аналогичные формулы справедливы, очевидно, для событий A_2 и A_3 .

Используя эти зависимости и данные условия задачи, найдем

$$P_F(A_1) = \frac{0,5 \cdot 0,9}{0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,85} = \frac{0,45}{0,905} \approx 0,497.$$

Аналогично

$$P_F(A_2) = \frac{0,3 \cdot 0,95}{0,905} \approx 0,315; \quad P_F(A_3) = \frac{0,2 \cdot 0,85}{0,905} \approx 0,188.$$

Подсчитанные вероятности характеризуют полную группу событий, поэтому их сумма должна равняться единице. Действительно,

$$P_F(A_1) + P_F(A_2) + P_F(A_3) = 0,497 + 0,315 + 0,188 = 1.$$

Формулы, полученные при решении примера 2, являются частным случаем общей *формулы вероятностей гипотез* или *формулы Байеса*:

$$P_F(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(F)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(F)},$$

где n — число событий, образующих полную группу ($i, k = \overline{1, n}$).

Эта формула служит для переоценки вероятностей гипотез $A_1, A_2, \dots, A_n$ после того, как событие F произошло.

4.7 Формула Бернулли

Если в серии испытаний (опытов, ситуаций) какое-либо событие наступает в каждом отдельном опыте с одинаковой вероятностью, то такие испытания называют *испытаниями Бернулли*.

Теорема. Если вероятность p наступления некоторого события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{m,n}$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, находится по формуле Бернулли

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (q = 1 - p).$$

Докажем справедливость сформулированной теоремы. Пусть B — ис-
ходное событие, то есть событие, при котором в n испытаниях ровно m
таких, в которых событие A наступит, занимая при этом любые номера от
1 до n , а в $(n - m)$ — не наступит. Общее число различных возможностей

осуществления события B определится числом различных возможностей размещения на n местах m одинаковых исходов – наступлений события A . Это число равно C_n^m – числу сочетаний из n элементов по m .

Вероятность каждой такой возможности находится по теореме умножения вероятностей независимых событий. Среди множителей этих произведений вероятность p наступления события A встречается m раз, а вероятность $q = 1 - p$ того, что событие A не наступит (будет иметь место событие $\bar{A}$), встретится $(n - m)$ раз.

Упомянутые возможности образуют несовместные события. Поэтому по теореме сложения вероятность $P_{m,n}$ искомого события B равна сумме одинаковых слагаемых $p^m q^{n-m}$, число которых равно C_n^m . То есть приходим к формуле Бернулли.

Пример 1. Автомат выпускает детали, из которых 30% бракованные. Определить вероятность того, что из пяти взятых наудачу деталей три окажутся годными.

Решение.

Предполагая, что автомат работает стабильно, устанавливаем, что вероятность выпуска им небракованной детали $p = 0,7$; бракованной $q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3$. Количество “испытаний” $n = 5$; количество благоприятных исходов $m = 3$.

По формуле Бернулли находим

$$P_{3,5} = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} (0,7)^3 (1-0,3)^2 = 0,3034.$$

Пример 2. Вероятность того, что станок в течение часа потребует внимания рабочего, равна 0,6. Полагая, что поломки на станках независимы, найти вероятность того, что в течение часа внимание рабочего потребует какой-либо один станок из четырех обслуживаемых рабочим.

Решение.

Задача решается с использованием формулы Бернулли при $n = 4$; $m = 1$; $p = 0,6$; $q = 0,4$.

$$P_{1,4} = C_4^1 (0,6)^1 (0,4)^{4-1} = 0,1536.$$

Пример 3. Для нормальной работы автобазы на линию должны выходить в день не менее 8 автомашин из 10, имеющихся на автобазе. Вероятность невыхода каждой автомашины равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на один день.

Решение.

Автобаза будет работать нормально (событие F), если на линию выйдут 8 (событие A), 9 (событие B) или 10 (событие C) автомашин. По теореме сложения вероятностей

$$P(F) = P(A + B + C) = P_{8,10} + P_{9,10} + P_{10,10}.$$

Каждое из слагаемых находим по формуле Бернулли, в которой $n=10$; $m = 8, 9, 10$; $p = 1 - 0,1 = 0,9$; $q = 0,1$. Тогда

$$P(F) = C_{10}^8 \cdot 0,9^8 \cdot 0,1^2 + C_{10}^9 \cdot 0,9^9 \cdot 0,1^1 + C_{10}^{10} \cdot 0,9^{10} \cdot 0,1^0 = 0,9298.$$

4.8 Формулы Муавра-Лапласа и Пуассона

Если число независимых испытаний, о которых шла речь в предыдущем разделе, достаточно велико, то использование формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям.

Пример 1. Вероятность поражения мишени при одном выстреле $p = 0,4$. Определить вероятность того, что при 600 выстрелах мишень будет поражена 250 раз.

При использовании формулы Бернулли необходимо определить значение искомой вероятности из выражения

$$P_{250,600} = \frac{600!}{250!(600-250)!} \cdot 0,4^{250} \cdot (1-0,4)^{600-250},$$

что, очевидно, сделать непросто.

Благодаря стараниям перечисленных в заголовке раздела математиков 17 и 18 веков, процедуру нахождения такого рода вероятностей удалось существенно упростить.

Рассмотрим локальную (существует в теории вероятностей еще и интегральная) теорему Муавра-Лапласа.

Теорема 1. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, а число испытаний велико, то вероятность $P_{m,n}$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, находится по формуле Муавра-Лапласа

$$P_{m,n} \approx f(x) / \sqrt{npq},$$

$$x = \frac{(m - np)}{\sqrt{npq}}; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2).$$

Здесь оператор $\exp$ (читается “экспонента”) обозначает число e – основание натурального логарифма – в степени.

Доказательство теоремы выходит за рамки предлагаемого курса математики.

При использовании формулы для вычисления $f(x)$ приходится иметь дело с вычислением экспоненты – задача не из легких. Но во многих справочниках по математике приводятся таблицы значений экспоненциальных функций. В литературе по теории вероятностей приводятся таблицы для $f(x)$ (Приложение 1).

Теперь с использованием формулы Муавра-Лапласа найдем значения вероятности по условиям примера 1, для которого $n = 600; p = 0,4; q = 1 - 0,4 = 0,6$: $x = (m - np) / \sqrt{npq} = (250 - 600 \cdot 0,4) / \sqrt{600 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 10/12 \approx 0,833$.

Для найденного значения x по таблице определяем $f(0,833) \approx 0,282$ и затем по формуле Муавра-Лапласа находим $P_{250,600} = 0,282/12 \approx 0,0235$.

Если вероятность p наступления события в некотором испытании мало отличается от нуля, то формула Муавра-Лапласа дает неверные результаты. В этом случае используют другую зависимость, к которой приводит

Теорема 2. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и мала, число испытаний достаточно велико, а произведение $np = \lambda$ ограничено (не более 10), то вероятность $P_{m,n}$ того, что в этих n испытаниях событие A наступит m раз, находится по формуле Пуассона

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Пример 2. Пусть вероятность изготовления бракованной детали $p = 0,004$. Найти вероятность того, что среди $n = 1000$ деталей будет $m = 5$ бракованных.

Решение.

Исходя из условия находим $\lambda = np = 1000 \cdot 0,004 = 4 < 10$. По формуле Пуассона находим

$$P_{5,1000} \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0,1563.$$

Заметим, что искомая вероятность, найденная для этой задачи по формуле Бернулли и которую можно считать точным значением, равна 0,1552. Подсчет вероятности по формуле Муавра-Лапласа приводит к более грубому результату, а именно, 0,1763.

4.9 Вопросы

1. Что понимается под детерминированным и статистическим подходами к описанию процессов и явлений?
2. Что изучает теория вероятностей?
3. Что такое событие? Что понимать под событиями совместными и несовместными? Единственно возможными, равновероятными, невозможными и достоверными? Противоположными, эквивалентными? Зависимыми и независимыми? Приведите примеры перечисленных событий.
4. Какие события образуют полную группу?
5. Что понимается под вероятностью события в ее классическом определении?
6. В каких пределах может изменяться вероятность событий?
7. Чему равны вероятности событий: достоверного? невозможного?
8. Чему равна вероятность произведения событий? В чем разница в вычислении вероятности произведения зависимых и независимых событий?
9. Что такое условная вероятность?
10. Что понимать под суммой событий? Произведением событий?
11. Дайте геометрическую интерпретацию суммы и произведения событий.
12. Чему равна вероятность суммы событий? В чем разница в вычислении вероятности суммы совместных и несовместных событий?
13. Что понимается под полной вероятностью? Как ее можно определить?
14. Поясните смысл всех величин, входящих в формулу полной вероятности.
15. Что такое вероятность гипотез?
16. Поясните смысл всех величин, входящих в формулу Байеса. Для чего используется эта формула?

17. Для определения вероятности в каких опытах используется формула Бернулли? Поясните ее смысл и смысл входящих в нее величин.
18. Выпишите формулы Муавра-Лапласа и Пуассона. Поясните их смысл и смысл входящих в них величин.
19. В чем отличие в использовании формул Бернулли, Муавра-Лапласа и Пуассона для решения задач теории вероятностей и в чем сходство?

4.10 Упражнения

К разделам 4.2 – 4.4

1. Подлежит контролю 250 деталей, из которых 5 нестандартных. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется: а) нестандартной; б) стандартной.
2. Из 60 вопросов, входящих в билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что взятый наудачу студентом билет, содержащий два вопроса, будет содержать подготовленный студентом материал?
3. Среди 20 студентов группы, в которой 12 девушек, разыгрывается 8 выигрышей. Одному студенту может достаться только один выигрыш. Какова вероятность того, что среди обладателей выигрыша окажутся 5 девушек?
4. Какова вероятность того, что наудачу поставленная в круге точка окажется во вписанном в круг квадрате?
5. Лифт в пятиэтажном доме отправляется с тремя пассажирами. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на разных этажах.
6. На предприятии брак составляет в среднем 2% общего выпуска изделий. Среди годных изделия первого сорта составляют 95%. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется первого сорта, если оно: а) выбрано из общей партии; б) выбрано из партии небракованных изделий?
7. Вероятность продажи в магазине обуви 42 размера равна 20%. Какова вероятность того, что три первых покупателя приобретут обувь 42 размера?
8. Вероятность сдачи студентами экзамена на *отл* – 20%; на *хор* – 40%; на *удовл* – 30%. Найти вероятность того, что студент не сдаст экзамен.
9. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены его внимания потребует первый станок, равна 0,7; второй – 0,75; третий – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены его внимания потребуют какие-либо два станка.

10. Среди выпускаемых предприятием изделий 4% брака. Найти вероятность того, что среди взятых на контроль пяти деталей не окажется брака.
11. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2; второй – 0,3; третий – 0,4. Считая события независимыми, найти вероятность того, что корреспондент услышит радиста.
12. Два стрелка производят по одному выстрелу в цель. Вероятности попадания для них известны и составляют: первого – 0,7; второго – 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель: а) оба; б) один; в) ни один.
13. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Какова вероятность того, что обладатель 5 лотерейных билетов выиграет: а) по всем пяти билетам; б) хотя бы по одному; в) ни по одному.
14. Деталь проходит три операции обработки. Вероятность брака после первой операции равна 0,02; после второй – 0,03; после третьей – 0,02. Считая события независимыми, найти вероятность того, что деталь окажется забракованной после трех операций.
15. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятности того, что студент ответит на первый и второй вопросы, равны 0,9; на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого достаточно ответить хотя бы на два вопроса билета.

К разделам 4.6 – 4.8

1. Предприятием направлена машина за различными материалами на три базы с равной вероятностью попадания ее на каждую из баз. Вероятность наличия материала на первой базе равна 0,9; на второй – 0,95; на третьей – 0,8. Найти вероятность того, что только на одной из баз не окажется нужного материала.
2. С первого станка на сборку поступает 50%, со второго – 30% и с третьего – 20% всех деталей. Среди деталей первого станка 0,15% бракованных; второго – 0,3 и третьего – 0,2. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь – бракованная.

3. Для участия в соревнованиях из первой, второй и третьей студенческих групп выделено 4, 6 и 5 студентов. Вероятности того, что студенты из перечисленных групп будут зачислены в сборную института соответственно равны 0,5; 0,4 и 0,3. Наудачу выбранный участник соревнований попал в сборную. К какой из групп он вероятнее всего принадлежит?
4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле постоянна и равна 0,05. Сколько необходимо сделать выстрелов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,75, иметь хотя бы одно попадание?
5. Сколько раз необходимо провести испытание, чтобы с вероятностью, не меньшей P , утверждать, что по меньшей мере однажды произойдет событие, вероятность которого равна p .
6. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,25. Какова вероятность того, что лицо, имеющее 5 билетов, выиграет: а) по двум билетам; б) по одному билету; в) ни по одному из билетов; г) по всем билетам?
7. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Какова вероятность того, что из 10 семян взойдут: а) семь; б) по меньшей мере семь; в) не более семи?
8. Вероятность изготовления забракованной детали равна 0,96. Какова вероятность того, что среди 15 выбранных произвольно деталей окажется не более одной забракованной?
9. Событие B произойдет, если событие A наступит не менее трех раз. Найти вероятность наступления события B в результате проведения пяти независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна 0,8.
10. В партии большого объема 95% забракованных изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу пяти изделий окажется бракованных: а) менее двух; б) более двух.
11. Вероятность прибытия поезда без опоздания равна 0,9. Найти вероятность того, что из пяти поездов опоздает не более одного.
12. Вероятность того, что набранная на компьютере строка программы верна, равна 0,8. Найти вероятность того, что в набранных 900 строках программы 700 правильных.

13. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдет 200, если всхожесть семян равна 50%.
14. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Какова вероятность того, что среди 1000 новорожденных девочек окажется: а) 480; б) не более 480?
15. Вероятность разгерметизации консервной банки равна 0,0005. Найти вероятность того, что среди 2000 банок две окажутся разгерметизированными.

Глава 5

Случайные величины

Случайной величиной называют числовую величину, которая в результате эксперимента принимает некоторое, заранее неизвестное значение.

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами конца латинского алфавита: $X, Y, Z, \dots$

Случайные величины делятся на *дискретные*, если множество их значений конечно или счетно, и *непрерывные*.

5.1 Дискретная случайная величина и закон ее распределения

Пусть дискретная случайная величина X принимает конечное (может и бесконечное) число значений $n: x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$. Для характеристики X как случайной величины необходимо задать (определить) для каждого ее значения соответствующие вероятности: $p_1, p_2, \dots, p_n$ или $p_k = P(X = x_k)$ ($k = \overline{1, n}$).

Законом распределения дискретной случайной величины называется правило, устанавливающее связь между значениями случайной величины и соответствующими им значениями вероятностей.

Закон распределения может быть задан:

- 1) в аналитическом виде (функцией)

$$P = P(X);$$

- 2) в виде графика (рис. 5.1);
- 3) в виде табл. 5.1, называемой рядом распределения:

Значения X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Вероятность P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Табл. 5.1: Ряд распределения

События $X = x_k$ ($k = \overline{1, n}$) являются несовместными и единственно возможными. Поэтому они образуют полную группу событий и сумма их вероятностей равна единице

$$\sum_{k=1}^n p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

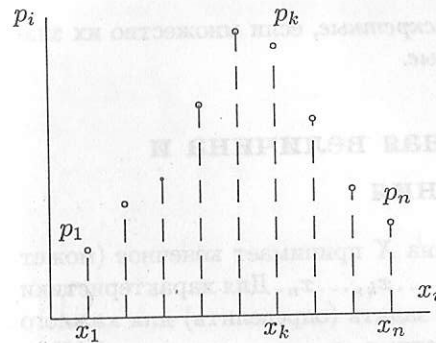


Рис. 5.1: Закон распределения

Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,1.

Решение.

Искомая случайная величина $X = m$ (число попаданий) может принимать пять различных значений: $m = 0, 1, 2, 3$ и 4 . Соответствующие им вероятности найдем по формуле Бернулли для $n = 4$, $p = 0,1$, $q = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9$:

$$P_{0,4} = C_4^0 p^0 q^{(4-0)} = \frac{4!}{0!(4-0)!} 0,1^0 0,9^{(4-0)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)} \cdot 1 \cdot 0,9^4 = 0,9^4$$

$$= 0,6561; \quad P_{1,4} = C_4^1 p^1 q^{(4-1)} = \frac{4!}{1!(4-1)!} 0,1^1 0,9^{(4-1)} = 0,2916;$$

Аналогично

$$P_{2,4} = 6 \cdot 0,1^2 0,9^2 = 0,0486; \quad P_{3,4} = 4 \cdot 0,1^3 0,9^1 = 0,0036;$$

$$P_{4,4} = 0,1^4 = 0,0001.$$

Сумма найденных вероятностей, как нетрудно проверить, равна единице. Это подтверждает правильность вычислений. Полученные данные представим в виде таблицы (ряда распределения):

Число попаданий m_k	0	1	2	3	4
Вероятность p_k	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Табл. 5.2: Ряд распределения примера 1.

5.2 Действия над случайными величинами

Пусть случайная величина X принимает значения x_k с вероятностями $P(X=x_k) = p_k$ ($k = \overline{1, n}$), а случайная величина Y — значения y_r с вероятностями $P(Y=y_r) = p'_r$ ($r = \overline{1, m}$).

Произведением случайной величины X на постоянную величину c называется новая случайная величина cX , которая с теми же вероятностями, что и X , принимает значения, равные произведениям на c значений x_k случайной величины X .

Если ряд распределения случайной величины X задан табл. 5.1, то ряд распределения cX будет представляться табл. 5.3.

Значения cX	cx_1	cx_2	$\dots$	cx_n
Вероятность P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Табл. 5.3: Ряд распределения cX

Квадратом случайной величины X называется новая случайная величина X^2 , которая с теми же вероятностями, что и X , принимает значения, равные квадратам величин x_k . При этом, если среди x_k имеются равные по модулю, но противоположные по знаку величины, то их вероятности складываются, как вероятности сумм событий.

Примером сказанного являются два ряда распределения (табл. 5.4):

Значения X	-1	0	1
Вероятность P	0,3	0,6	0,1

Значения X^2	0	1
Вероятность P	0,6	0,4

Табл. 5.4: Ряды распределения для X и X^2

Суммой случайных величин X и Y называется новая случайная величина $Z = X + Y$, которая принимает все возможные значения $z_{kr} = x_k + y_r$ ($k = \overline{1, n}$; $r = \overline{1, m}$) с вероятностями p_{kr} событий, заключающихся в том, что величина X примет значение x_k , а $Y = y_r$.

Воспользовавшись формулой вероятности произведения событий (в данном случае случайных величин), запишем

$$p_{kr} = P(X = x_k; Y = y_r) = P(X = x_k) \cdot P_{X=x_k}(Y = y_r). \quad (5.1)$$

Если случайные величины независимы, то

$$P_{X=x_k}(Y = y_r) = P(Y = y_r)$$

и

$$p_{kr} = P(X = x_k; Y = y_r) = P(X = x_k) \cdot P(Y = y_r).$$

Для разности $(X - Y)$ и произведения (XY) случайных величин вероятность определяется по такой же формуле, как и для суммы, то есть по (5.1). Что касается самих случайных величин, то $(X - Y)$ принимает все возможные значения типа $(x_k - y_r)$, причем k , в общем, не равно r , а (XY) — типа $(x_k \cdot y_r)$.

Пример. Заданы ряды распределения двух независимых случайных величин:

Определить ряды распределения случайных величин, равных: а) их сумме; б) их разности; в) их произведению.

Значения X	-1	1	2
Вероятность P	0,25	0,4	0,35

Значения Y	3	1
Вероятность P	0,6	0,4

Табл. 5.5: Заданные ряды распределения

Решение.

Сведем в одну таблицу результаты решения задачи для всех трех пунктов.

N	X	Y	$X + Y$	$X - Y$	XY	P
1	-1	3	2	-4	-3	$0,25 \cdot 0,6 = 0,15$
2	-1	1	0	-2	-1	$0,25 \cdot 0,4 = 0,10$
3	1	3	4	-2	3	$0,4 \cdot 0,6 = 0,24$
4	1	1	2	0	1	$0,4 \cdot 0,4 = 0,16$
5	2	3	5	-1	6	$0,35 \cdot 0,6 = 0,21$
6	2	1	3	1	2	$0,35 \cdot 0,4 = 0,14$

Табл. 5.6: События и их вероятности

В табл. 5.6 подчеркнуты повторяющиеся для рассматриваемых задач значения случайных величин. Для таких значений вероятности в окончательных рядах распределения должны суммироваться. Это, в частности, касается суммы случайных величин $X + Y$, где дважды повторяется значение "2". Поэтому $P(2) = P(X = x_1, Y = y_1) + P(X = x_2, Y = y_2) = 0,15 + 0,16 = 0,31$.

$X + Y$	0	2	3	4	5	Σ
$P(X + Y)$	0,1	0,31	0,14	0,24	0,21	1,00

Табл. 5.7: Ряд распределения суммы случайных величин

Аналогично, для разности $X - Y$, где дважды повторяется значение “-2”. Поэтому $P(-2) = P(X = x_1, Y = y_2) + P(X = x_2, Y = y_1) = 0,10 + 0,24 = 0,34$.

$X - Y$	-4	-2	-1	0	1	Σ
$P(X - Y)$	0,15	0,34	0,21	0,16	0,14	1,00

Табл. 5.8: Ряд распределения разности случайных величин

Получающиеся ряды распределения для трех задач представлены в таблицах 5.7, 5.8 и 5.9.

$X \cdot Y$	-3	-1	1	2	3	6	Σ
$P(X \cdot Y)$	0,15	0,10	0,16	0,14	0,24	0,21	1,00

Табл. 5.9: Ряд распределения произведения случайных величин

Законы распределения для сумм (произведений) более, чем двух случайных величин, находятся аналогично. Например, для трех величин достаточно к сумме двух величин прибавить (произведение двух величин умножить на) третью случайную величину.

5.3 Функция распределения случайной величины

Рассмотрим событие, состоящее в том, что случайная величина X примет значение, меньшее произвольного числа x ($X < x$). Это событие имеет определенную вероятность.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого x вероятность того, что величина X принимает некоторое значение, меньшее, чем x .

$$F(x) = P(X < x).$$

Пример 1. Пусть закон распределения некоторой дискретной случайной величины задан в виде ряда:

Случ. величина X	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность $P(X)$	0,1	0,12	0,23	0,25	0,14	0,1	0,06

Случайная величина X не принимает значений меньше нуля. Поэтому, если $X < 0$, то событие невозможно, и его вероятность равна нулю. При $x = 0$ $F(x) = P(X < 0) = 0$. Значение $F(x) = 0,1$ функция распределения будет иметь при $0 < x \leq 1$. При $1 < x \leq 2$ $F(x) = P(X < 2) = P(0 + 1) = P(0) + P(1) = 0,1 + 0,12 = 0,22$. То есть, условию $X < 2$ удовлетворяют два значения случайной величины $X = 0$ и $X = 1$, вероятность суммы которых равна сумме вероятностей. И так далее. При $X > 6$ значения функции распределения изменяться не будут, так как случайная величина не превышает значения $X = 6$. Очевидно, для этого интервала $F(x) = P(X \geq 6) = 1$.

Представим функцию распределения в виде таблицы:

$x \in$	$(-\infty, 0]$	$(0, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 3]$	$(3, 4]$	$(4, 5]$	$(5, 6]$	$(6, +\infty)$
$F(x)$	0	0,1	0,22	0,45	0,70	0,84	0,94	1,00

На рис. 5.2 показаны закон распределения $P(X)$ (о) и функция распределения $F(x)$ (—) для рассмотренного примера.

Характерный признак графика функции распределения дискретных случайных величин состоит в том, что:

- 1) значение функции не изменяется на интервалах, где значения X не заданы и меняются скачкообразно в точках с заданными значениями X ;
- 2) при значениях x , превышающих максимальное заданное значение X , функция распределения равна единице;
- 3) функция распределения представляет собой неубывающую, непрерывную слева функцию, изменяющуюся от нуля до единицы.

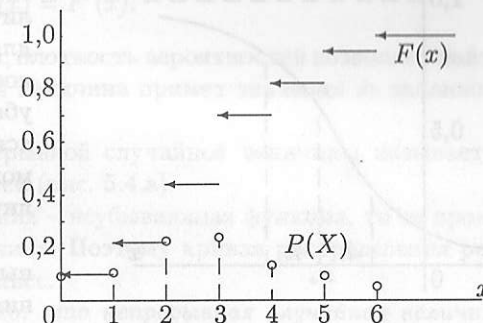


Рис. 5.2: Функция и закон распределения

Непрерывной слева функцией называют функцию, которая имеет конечный предел при приближении независимой переменной (x) слева к любой ее точке (направление, противоположное стрелкам на рис. 5.2).

Используя представление о функции распределения, определим вероятность того, что случайная величина X принимает значение из интервала $x_{k-1} \leq X < x_k$. Используя теорему о сложении вероятностей, запишем

$$P(X < x_k) = P(X < x_{k-1}) + P(x_{k-1} \leq X < x_k).$$

Отсюда найдем

$$P(x_{k-1} \leq X < x_k) = P(X < x_k) - P(X < x_{k-1}).$$

Используя для записи вероятности функцию распределения $F(x)$, получим

$$P(x_{k-1} \leq X < x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}). \quad (5.2)$$

5.4 Непрерывные случайные величины

Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ всюду непрерывна.

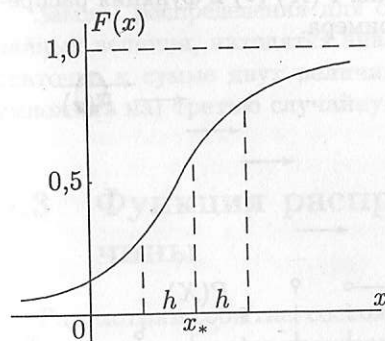


Рис. 5.3: Функция распределения

В отличие от монотонно возрастающей функции распределения непрерывной случайной величины, функция распределения дискретной случайной величины остается постоянной на некоторых интервалах изменения x , а там, где X задано ($X = x_i$), меняется скачкообразно.

Все свойства функции распределения дискретных случайных величин остаются справедливыми и для непрерывных величин. В частности, функция распределения — неубывающая функция, изменяющаяся от нуля до единицы при возможном изменении случайной величины X от $-\infty$ до $+\infty$.

На рис. 5.3 показан характерный график функции распределения непрерывной случайной величины.

В отличие от монотонно возрастающей

5.5 ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Скачкообразное изменение $F(x)$ непрерывных величин недопустимо по определению. Мало того, вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение $X = x_*$, равна нулю.

Действительно, рассмотрим на графике функции распределения $F(x)$ (и ис. 5.3) некоторую фиксированную точку $X = x_*$ и две точки, отстоящие от x_* на одинаковых расстояниях h вправо и влево от нее. Применяя формулу (5.2), запишем

$$P(x_* - h \leq X < x_* + h) = F(x_* + h) - F(x_* - h).$$

Устремляя h к нулю, получим в правой части последнего равенства нуль:

$$P(x = x_*).$$

Что и требовалось доказать.

Сказанное позволяет опустить знаки строгих равенств в соотношении (5.2), если оно применяется к непрерывным случайным величинам:

$$P(x_{k-1} < X < x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1}).$$

5.5 Плотность вероятностей

Плотностью вероятностей $\varphi(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная от ее функции распределения $F(x)$:

$$\varphi(x) = F'(x).$$

Как и функция распределения, плотность вероятностей позволяет найти вероятность того, что случайная величина примет значения из заданного интервала.

Кривой распределения непрерывной случайной величины называется график ее плотности вероятностей (рис. 5.4,а).

Так как функция распределения — неубывающая функция, то ее производная — неотрицательная величина. Поэтому кривая распределения располагается всегда выше оси абсцисс.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет какое-либо значение из интервала (a, b) , равна определенному интегралу от ее плотности вероятностей в пределах, определяемых границами интервала

$$P(a < X < b) = \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Действительно, на основании формулы Ньютона-Лейбница и определения плотности вероятностей

$$\int_a^b \varphi(x) dx = F(b) - F(a).$$

Эта формула совпадает по смыслу с формулой (5.2) определения вероятности попадания случайной величины в заданный интервал.

Так как попадание случайной величины в интервал $(-\infty, +\infty)$ является достоверным событием, то вероятность этого события равна единице. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1. \quad (5.3)$$

По заданной (известной) функции плотности вероятностей всегда можно определить функцию распределения, которая, очевидно, будет равна интегралу с переменным пределом от плотности вероятностей:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt. \quad (5.4)$$

Геометрически функция распределения представляет собой площадь криволинейной трапеции, заключенной между кривой распределения, осью x и значениями x , заключенными между $-\infty$ и ее текущим значением. На (рис. 5.4, б) $F(x_*)$ — площадь заштрихованной области.

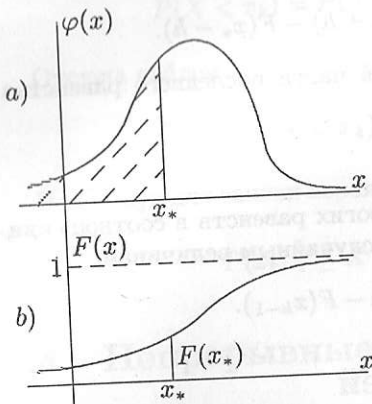


Рис. 5.4: Плотность вероятностей и функция распределения

5.6 Математическое ожидание и его свойства

Ряды распределения дискретных случайных величин дают достаточно полное представление об этих величинах как о математических объектах. Однако использовать их для оценки случайного явления, как правило,

весьма затруднительно из-за большого количества исходных данных. Существуют несколько обобщенных числовых характеристик рядов распределения, которые позволяют дать оценку случайного процесса без анализа ряда его распределения. Одной из таких характеристик является математическое ожидание.

Математическим ожиданием (средним взвешенным) $M(X) = \mu$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ на соответствующие вероятности $p_1, p_2, \dots, p_n$

$$M(X) = \mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (5.5)$$

Установим смысл математического ожидания. Для этого вероятности, с которыми наступают величины x_i ($i = \overline{1, n}$) в выражении (5.5), представим, согласно классическому определению вероятности, в виде отношения количества n_i повторений значений x_i (i — фиксировано) к общему суммарному количеству повторений n всех значений x_i ($i = \overline{1, n}$):

$$M(X) = \frac{1}{n} (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_n n_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i n_i.$$

Представленное в таком виде математическое ожидание является средним взвешенным значением дискретной случайной величины X .

Пример 1. В беспроигрышной лотерее разыгрываются $n=100$ выигрышей. Из них $n_1=40$ по $x_1=15$ руб, $n_2=30$ по $x_2=20$ руб, $n_3=20$ по $x_3=25$ руб и $n_4=10$ — по $x_4=30$ руб. Каков средний выигрыш для участника лотереи?

Решение.

Средний выигрыш равен средней арифметической стоимости одного выигрыша

$$M(X) = \frac{1}{100} (40 \cdot 15 + 30 \cdot 20 + 20 \cdot 25 + 10 \cdot 30) = 20.$$

Величины n_i ($i = \overline{1, 4}$; или $\overline{1, n}$ в общем случае) называются частотами повторения случайной величины x_i , а $\bar{n}_i = n_i/n$ — относительными частотами или частотами этой величины.

По смыслу частоты $\bar{n}_i$ перекликаются с вероятностями p_i случайной величины x_i . В курсе математической статистики показано, что при достаточно больших выборках $\bar{n}_i = p_i$.

Для непрерывных случайных величин выражение (5.5) можно рассматривать как интегральную сумму от плотности вероятностей $\varphi(x)$ на интервале $[a, b]$, совпадающем с пределами изменения случайной величины (в

общем случае $(-\infty, \infty)$)

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx. \quad (5.6)$$

Приведем без доказательства некоторые свойства математических ожиданий. В их справедливости можно убедиться непосредственно на примерах.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной

$$M(C) = C.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX) = CM(X).$$

Свойство 3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Свойство 4. Математическое ожидание произведения независимых(!) случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

Для зависимых случайных величин формула неверна.

Пример 2. Проверить справедливость свойств 3 и 4 по данным таблиц 5.5 раздела 5.2.

Решение.

Найдем математические ожидания случайных величин X, Y , их сумму и произведение:

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0,25 \cdot (-1) + 0,4 \cdot 1 + 0,35 \cdot 2 = 0,85;$$

$$M(Y) = p_1y_1 + p_2y_2 = 0,6 \cdot 3 + 0,4 \cdot 1 = 2,2;$$

$$M(X) + M(Y) = 0,85 + 2,2 = 3,05; \quad M(X)M(Y) = 0,85 \cdot 2,2 = 1,87.$$

По данным табл. 5.7 определим математическое ожидание суммы случайных величин $(X + Y)$:

$$M(X + Y) = 0,10 \cdot 0 + 0,31 \cdot 2 + 0,14 \cdot 3 + 0,24 \cdot 4 + 0,21 \cdot 5 = 3,05.$$

Найдем математическое ожидание произведения случайных величин X и Y по данным табл. 5.9:

$$M(XY) = 0,15 \cdot (-3) + 0,10 \cdot (-1) + 0,16 \cdot 1 + 0,14 \cdot 2 + 0,24 \cdot 3 + 0,21 \cdot 6 = 1,87.$$

Сравнение результатов подтверждает справедливость свойств 3 и 4.

5.7 Дисперсия

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X - \mu)^2,$$

Для дискретной случайной величины:

$$D(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p_i.$$

Для непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \varphi(x) dx.$$

Наряду с математическим ожиданием дисперсия является одной из важнейших характеристик случайных величин.

Пример 1. Определить и сравнить математические ожидания и дисперсии двух случайных величин X и Y , заданных их рядами распределения:

X	-0,1	-0,01	0	0,01	0,1
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Y	-20	-10	0	10	20
P	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

Решение.

Найдем математические ожидания:

$$M(X) = -0,1 \cdot 0,1 - 0,01 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 0,01 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 = 0;$$

$$M(Y) = -20 \cdot 0,3 - 10 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,1 + 20 \cdot 0,3 = 0.$$

Математические ожидания двух случайных величин X и Y оказались равными, хотя, как видно из таблиц, эти величины на первый взгляд не имеют ничего общего.

Подсчитаем их дисперсии:

$$D(X) = (-0,1 - 0)^2 \cdot 0,1 + (-0,01 - 0)^2 \cdot 0,2 + (0 - 0)^2 \cdot 0,4 +$$

$$+ (0,01 - 0)^2 \cdot 0,2 + (0,1 - 0)^2 \cdot 0,1 = 0,00204;$$

$$D(Y) = (-20 - 0)^2 \cdot 0,3 + (-10 - 0)^2 \cdot 0,1 + (0 - 0)^2 \cdot 0,2 +$$

$$+(10-0)^2 \cdot 0,1 + (20-0)^2 \cdot 0,3 = 260.$$

Дисперсии рассмотренных случайных величин, имеющих одинаковые математические ожидания, существенно разнятся.

Как нетрудно понять, дисперсия характеризует степень отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Чем больше дисперсия, тем больше разброс случайных значений у рассматриваемой случайной величины.

Размерность дисперсии равна квадрату случайной величины и это порой вызывает неудобство в оценке случайных величин. Поэтому на практике вместо дисперсии зачастую используют связанную с ней характеристику — *среднее квадратическое отклонение* случайной величины от ее математического ожидания

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}.$$

Так, для рассмотренного примера $\sigma(x) = \sqrt{0,00204} \approx 0,04517$; $\sigma(y) = \sqrt{260} \approx 16,12$. Среднее квадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и математическое ожидание.

Рассмотрим некоторые свойства дисперсии.

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Свойство 3. Дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию ее квадрата за вычетом квадрата ее же математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = M(X^2) - \mu^2.$$

Свойство 4. Дисперсия суммы конечного числа независимых (!) случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

Следствием этого свойства является утверждение: среднее квадратическое отклонение конечного числа (n) независимых случайных величин определяется выражением

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}.$$

Свойство 5. Дисперсия разности независимых случайных величин равна сумме (!) их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Свойство 6 (правило “трех сигм”). Произвольная случайная величина отклоняется от своего математического ожидания на $\pm 3\sigma$ с вероятностью не менее 0,8889:

$$P(|X - M(X)| < 3\sigma) \geq 0,8889.$$

Не утруждая внимание читателей строгими доказательствами перечисленных свойств, рекомендуем проверить их на примерах (возможно этого раздела).

Пример 2. Убедиться в справедливости свойства 3 для случайной величины X , заданной законом распределения

X	-2	0	1	2	3
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение.

Находим математические ожидания случайной величины X и ее квадрата:

$$M(X) = -2 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 0,9;$$

$$M(X^2) = (-2)^2 \cdot 0,1 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,1 = 2,5.$$

Вычислим дисперсию двумя способами.

1. По определению:

$$D(X) = (-2 - 0,9)^2 \cdot 0,1 + (0 - 0,9)^2 \cdot 0,2 + (1 - 0,9)^2 \cdot 0,4 + (2 - 0,9)^2 \cdot 0,2 + (3 - 0,9)^2 \cdot 0,1 = 1,69;$$

2. По формуле свойства 3:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2,5 - 0,9^2 = 1,69.$$

Результаты совпадают.

Пример 3. Случайная величина X распределена равномерно, то есть так, что ее плотность вероятности $\varphi(x) = C$ при $x \in [0, 10]$ и $\varphi(x) = 0$ при остальных значениях x . Найти дисперсию $D(X)$.

Решение.

Определим предварительно постоянную C из условия, что интеграл от плотности вероятности равен единице (5.3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{10} \varphi(x) dx + \int_{10}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1,$$

или

$$\int_0^{10} C dx = Cx \Big|_0^{10} = 10C = 1, \rightarrow C = 0,1.$$

Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx = \int_0^{10} x \cdot 0,1 dx = \frac{1}{2} \cdot 0,1 x^2 \Big|_0^{10} = 5.$$

Определим дисперсию:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \varphi(x) dx = \int_0^{10} 0,1(x-5)^2 dx = \frac{1}{3} \cdot 0,1(x-5)^3 \Big|_0^{10} = \frac{25}{3}.$$

5.8 Законы распределения случайных величин

При обработке случайных величин немаловажно определить, каким законам они подчиняются. Существует ряд законов, описывающих поведение различного рода случайных величин и являющихся как бы эталоном для оценки подобных им величин. Каждому "эталонному" закону можно поставить в соответствие определенные функции, характеризующие плотности вероятностей. Приведем примеры двух наиболее распространенных, в том числе часто используемых в задачах экономики и менеджмента, законов и соответствующих им плотностей вероятностей, функций распределения и других характеристик.

5.8.1 Равномерное распределение

Равномерное распределение вероятностей является простейшим случаем распределения непрерывных случайных величин. Хотя этот закон, предполагающий равную вероятность возникновения переменных значений, имеет ограниченное применение, он привлекает простотой вычисления его характеристик.

Так, плотность вероятностей для этого закона постоянна (рис.5.5,а) и равна C ($C \neq 0$) на некотором интервале (a, b) , а при других значениях x она обращается в нуль.

Из условия равенства единице интеграла от плотности вероятностей, взятого по пределам интегрирования от a до b :

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) dx &= \int_a^b C dx = Cx \Big|_a^b = \\ &= C(b-a) = 1, \end{aligned}$$

найдем:

$$C = 1/(b-a).$$

Тогда

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a, x > b. \end{cases}$$

Функция распределения, определяемая по формуле (5.4), для участка, где $\varphi(x) = C$, имеет вид (рис.5.5,б)

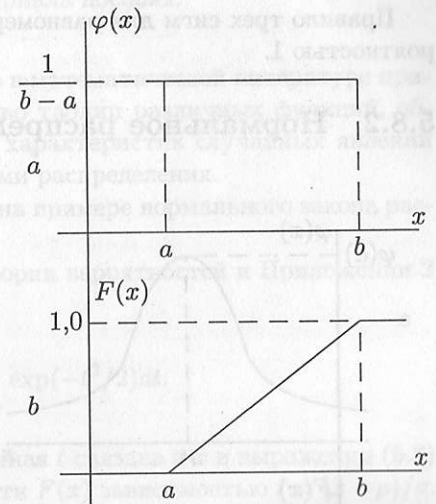


Рис. 5.5: Равномерное распределение

$$F(x) = \int_a^x \varphi(t) dt = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Обобщим эту зависимость на всю числовую ось:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Для равномерного распределения случайной величины определим математическое ожидание:

$$M(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x) dx = \int_a^b \frac{xdx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b-a}{2}$$

и дисперсию:

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \varphi(x) dx = \dots = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Правило трех сигм для равномерного распределения выполняется с вероятностью 1.

5.8.2 Нормальное распределение (закон Гаусса)

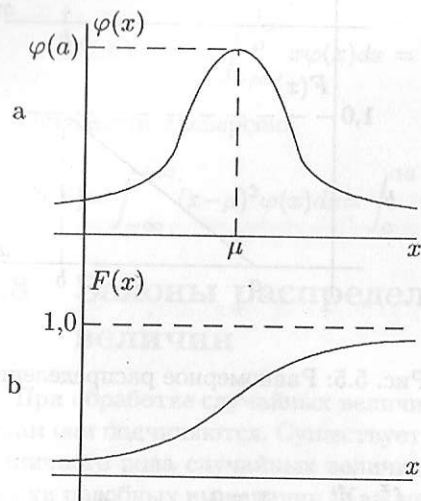


Рис. 5.6: Нормальное распределение

На рис. 5.6,а изображена *нормальная кривая* – так называется график плотности вероятностей нормального закона распределения.

Интеграл от выражения (5.7) при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице, а до текущего значения x приводит к функции распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(\tilde{x} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] d\tilde{x}, \quad (5.8)$$

график которой изображен на рис. 5.6,б.

Нормальное распределение непрерывной случайной величины – это наиболее широко используемое распределение, присущее многим явлениям и процессам реального мира, в том числе явлениям экономической жизни. Нормальное распределение имеют, например, рост человека, точность попадания в мишень, доходы семей в обществе и т.д.

Для нормального закона распределения плотность вероятностей определяется выражением

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5.7)$$

Здесь μ и σ – параметры, имеющие смысл математического ожидания и дисперсии нормального закона распределения.

В комментариях к формуле (5.7) было отмечено, что μ и σ^2 являются соответственно математическим ожиданием и дисперсией нормального закона.

В литературе по теории вероятностей дается строгое доказательство этого факта, выходящее за рамки материала пособия.

В заключение раздела отметим, что в математической литературе приводится достаточно большое количество таблиц различных функций, облегчающих практическое определение характеристик случайных явлений с наиболее распространенными законами распределения.

Рассмотрим использование таблиц на примере нормального закона распределения.

В большинстве справочников по теории вероятностей и Приложении 2 приводятся таблицы функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt.$$

Входящая в это выражение переменная t связана с $\tilde{x}$ в выражении (5.8) для функции распределения вероятности $F(x)$ зависимостью $t = (\tilde{x} - \mu)/\sigma$. Отметим четыре свойства функции $\Phi(x)$, часто используемые при вычислениях:

$$1. \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi(x) = 1.$$

В практических задачах уже при $x > 3$ можно считать, что функция равна 1.

$$3. F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

4. Вероятность попадания случайной величины в интервал ее изменения от x_1 до x_2 определяется формулой

$$P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right). \quad (5.9)$$

5. Правило трех сигм для нормального закона выполняется с вероятностью 0,997.

Пример. Пусть масса доставленной для продажи рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $\mu=375$ г, $\sigma=25$ г. Найти вероятность того, что масса одной наудачу извлеченной для продажи рыбы составит: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

Решение.

а) По формуле (??) и затем по таблице Приложения 2 для $x_1 = 300$, $x_2 = 425$, $\mu = 375$, $\sigma = 25$ найдем:

$$P(300 < X < 425) = \Phi\left(\frac{425 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) - 1 + \Phi(3) = 0,977 - 1 + 0,999 = 0,976.$$

$$б) P(X < 450) = P(0 < X < 450) = \Phi\left(\frac{450 - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-15) = 0,999 - 1 + 1 = 0,999.$$

$$в) P(300 < X) = P(300 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(-3) = 1 - 1 + 0,999 = 0,999.$$

5.9 Вопросы

1. Что такое случайная величина?
2. Какие случайные величины называют дискретными? непрерывными?
3. Могут ли значения дискретных случайных величины составлять бесконечное множество?
4. Что такое закон распределения случайной величины? В каком виде он может быть задан?
5. Приведите примеры: ряда распределения, аналитического задания и графического изображения закона распределения дискретной случайной величины.
6. Что собой представляет биномиальный закон распределения? Для каких задач он может быть применен?
7. Поясните, что понимается под сложением, вычитанием и умножением случайных величин?
8. Как подсчитываются вероятности величин, представляющих собой суммы и произведения случайных величин?
9. Как определяется и что представляет собой функция распределения случайной величины?
10. Чем отличаются функции распределения для дискретных и непрерывных случайных величин?
11. Как с помощью функции распределения найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
12. Укажите возможные пределы изменения функции распределения.
13. Что называется плотностью вероятностей случайной величины? Запишите формулу для ее определения.
14. Как найти функцию распределения по заданной плотности вероятностей?
15. Поясните на графиках связь между функцией распределения и плотностью вероятностей.

16. Чему равен интеграл с бесконечными пределами от плотности вероятности?
17. Что представляет собой математическое ожидание? В чем разница в определении этой характеристики для дискретных и непрерывных случайных величин?
18. Перечислите основные свойства математического ожидания и подтвердите их примерами.
19. Что такое дисперсия? Как дисперсия связана со средним квадратичным отклонением?
20. Изобразите два графика для плотностей вероятностей с одинаковыми математическими ожиданиями и различными дисперсиями.
21. Перечислите основные свойства дисперсии и убедитесь в их справедливости на конкретных примерах.
22. Запишите выражения для функций распределения и плотности вероятностей для случайных величин: а) с нормальным распределением; б) с равномерным распределением. Изобразите графики соответствующих кривых.
23. Покажите на графике плотности вероятностей, как можно определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.
24. Поясните, как с помощью таблицы функции $\Phi(x)$ можно определить вероятность попадания нормально распределенной случайной функции в заданный интервал.

5.10 Упражнения

К разделу 5.1

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,5; второго – 0,4. Составить закон распределения числа попаданий в цель.
2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Производится пять выстрелов. Составить закон распределения числа: а) попаданий; б) непопаданий.
3. Вероятность того, что читатель может взять в библиотеке необходимую ему книгу, равна 0,3. В поселке 4 библиотеки. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит читатель в поисках книги.
4. Вероятность того, что автомат при опускании монеты работает правильно, равна 0,95. Составить закон распределения числа опусканий монет в автомат до его первого правильного срабатывания.
5. Имеются 5 различных ключей, из которых только одним можно открыть замок. Составить закон распределения числа проб при открывании замка, если опробованный ключ в последующих попытках: а) не участвует; б) участвует.

К разделу 5.2

6. По заданному закону распределения случайной величины X :

X	-2	0	2	3
$P(X)$	0,1	0,5	0,3	0,1

Составить законы распределения случайных величин X^2 и $-3X$.

7. На двух станках производятся одинаковые детали. Известны законы распределения бракованных деталей, производимых в течение смены на первом X и втором Y станках:

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,1	0,6	0,2	0,1

Y	0	1	2
$P(Y)$	0,5	0,3	0,2

Составить закон распределения числа бракованных деталей, произведенных в смену двумя станками вместе. Убедиться в справедливости формул $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$; $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

8. Даны законы распределения двух случайных величин:

X	2	4	6	8
$P(X)$	0,4	0,2	0,1	0,3

Y	0	1	2
$P(Y)$	0,5	0,25	0,25

Составить закон распределения их разности. Проверить справедливость свойств: $M(X-Y) = M(X) - M(Y)$; $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

9. Даны законы распределения двух случайных величин:

X	-1	0	1
$P(X)$	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	3
$P(Y)$	0,1	0,3	0,6

Составить закон распределения их произведения. Проверить выполнение свойства $M(XY) = M(X)M(Y)$.

10. Составить закон распределения случайной величины, выражающей число попаданий в цель при четырех выстрелах, если вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,3. Вычислить ее математическое ожидание и дисперсию.

К разделам 5.3 – 5.5

11. Найти функцию распределения числа попаданий в цель при шести выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2. Используя полученную функцию, вычислить вероятность того, что цель будет поражена не менее одного и не более пяти раз.
12. Функция $\varphi(x) = 2C/(e^x + e^{-x})$, где $x \in \mathbb{R}$, является плотностью вероятности случайной величины X . Найти C . Определить вероятность того, что случайная величина X : а) примет какое-либо значение из $(0,2)$; б) меньше единицы; в) примет значения меньше нуля в двух наблюдениях.
13. Случайная величина X распределена равномерно. Ее плотность вероятностей равна C при $x \in (a,b)$ и нулю при всех других значениях X . Найти C .

14. Дана функция: $\varphi(x) = 0$ при $|x| < 1$ и $\varphi(x) = C/x^2$ при $|x| \geq 1$. Найти: а) C , при котором функция $\varphi(x)$ является плотностью вероятностей; б) вероятность того, что случайная величина примет значение больше двух.

15. Функция $\varphi(x) = (2a-x)/(2a^2)$ при $0 \leq x \leq 2a$ и $\varphi(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > 2a$ является плотностью вероятностей случайной величины X . Найти ее функцию распределения $F(x)$, построить графики $\varphi(x)$ и $F(x)$.

К разделам 5.6 – 5.8 (при необходимости воспользоваться данными таблицы Приложения 2)

16. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , если ее плотность вероятностей $\varphi(x) = A(x^2 - 1)$ при $|x| < 2$ и $\varphi(x) = 0$ при всех других значениях X .
17. Случайная величина X распределена равномерно. Ее плотность вероятностей $\varphi(x) = C$ при $1 \leq x \leq 10$ и $\varphi(x) = 0$ при всех других значениях X . Определить ее математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.
18. Результаты измерения расстояния между двумя поселками подчинены нормальному закону с параметрами $x_m = 16$ км, $\sigma = 0,1$ км. Найти вероятность того, что расстояние между поселками: а) не менее 15,8 км; б) от 15,75 до 16,3 км; в) не более 16,75 км.
19. Рост человека – случайная величина, распределенная по нормальному закону. Пусть ее математическое ожидание равно 170 см, а среднее квадратическое отклонение – 6 см. Вычислить вероятность того, что один из наудачу выбранных четырех прохожих имеет рост от 168 до 172 см.
20. Диаметр детали – нормально распределенная величина с математическим ожиданием $\mu = 25$ мм и дисперсией $\sigma^2 = 0,01$ мм². Найти границы, в которые с вероятностью 0,995 заключен диаметр наудачу взятой детали.

Пояснение: принять интервалы изменения диаметра $b = \mu + \delta$; $a = \mu - \delta$ и воспользоваться формулой 5.9.

Глава 6

Математическая статистика

Основным элементом экономического исследования является анализ взаимосвязей экономических переменных. Эти взаимосвязи в большинстве своем не являются строгими функциональными зависимостями из-за:

- а) трудностей выявления основных факторов, влияющих на переменные;
- б) наличия случайных составляющих в переменных;
- в) ограниченного набора данных наблюдений;
- г) присутствия объективных и субъективных ошибок в обрабатываемых данных.

Аналогичные особенности имеют многие физические, химические, биологические и другие явления.

Для описания связей между такими величинами необходимо предварительно собрать *статистический материал*; обработать его; представить в виде случайных переменных; установить зависимости между этими переменными, построив математическую модель задачи; составить алгоритм решения; осуществить решение задачи и проанализировать его; разработать рекомендации по реализации решения. Перечисленными задачами занимается раздел математики, называемый *математической статистикой*.

Математическая статистика является разделом математики, непосредственно примыкающим к теории вероятностей. В ней рассматриваются приближенные методы нахождения закономерностей поведения и числовых

характеристик случайных величин по результатам экспериментов и наблюдений. Приложениями математической статистики в экономике занимается наука, получившая название *эконометрики*.

Применяемый в эконометрике аппарат исследования позволяет строить экономико-математические модели, оценивать их параметры, проверять гипотезы о свойствах экономических показателей и их связей, осуществлять экономический анализ, делать прогнозы на будущее и т.д.

6.1 Генеральная совокупность и выборка

В разделе "Комбинаторика" предыдущей главы были введены понятия, указанные в заголовке раздела. Тем не менее сформулируем и рассмотрим их заново применительно к статистическим данным.

Генеральной совокупностью называют всю совокупность реализаций случайной величины, все возможные наблюдения некоторого показателя, все возможные исходы некоторого испытания.

Выборкой называют часть генеральной совокупности, то есть конечное подмножество значений случайной величины из множества элементов генеральной совокупности.

Объемом выборки называют количество содержащихся в ней случайных величин. *Размахом выборки* называют разность между наибольшим и наименьшим значениями случайной величины:

$$w = x_{\max} - x_{\min}.$$

Примерами выборок являются данные: о доходах жителей какого-либо региона (предприятия), о референдуме, о погоде в конкретное время в конкретной местности в течение многих лет и т.д.

К выборкам из генеральных совокупностей предъявляется требование *репрезентативности*, то есть достаточно полного представления в них признаков и параметров генеральной совокупности случайных величин.

Существуют несколько способов, обеспечивающих случайность отбора: простой отбор (последовательно отбираются случайно попавшие элементы); типический отбор (по некоторому признаку); случайный отбор (возможно с использованием датчиков случайных чисел, имеющихся в ЭВМ).

Репрезентативность выборки улучшается при увеличении ее объема. Теоретически считается, что выборки объема 1000 являются достаточно репрезентативными. Однако на практике зачастую ограничиваются выборками гораздо меньшего объема.

6.2 СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Задача математической статистики состоит в исследовании свойств выборок и обобщении этих свойств на всю генеральную совокупность. Выявленные при этом закономерности поведения случайной величины называются *статистическими*.

6.2 Статистические ряды

Значения случайной величины в исходной выборке, полученной в результате эксперимента или наблюдения, расположены, как правило, в порядке их появления. Например, в магазине мужской обуви регистрация точной продажи представлена в виде выборки объемом $n = 79$ пар обуви, расположенных в порядке их продажи (табл. 6.1). Таблицы такого вида

39	40	38	43	41	42	40	38	41	42	41	40	42	39	41
36	43	41	42	38	41	40	42	41	42	42	42	40	41	41
42	40	40	39	41	39	38	40	41	41	40	40	39	42	42
37	40	42	43	42	38	40	40	41	41	41	40	43	42	41
43	41	40	41	42	42	39	43	41	42	41	42	40	43	41
39	43	39	40											

Табл. 6.1: Исходные статистические данные

называются *статистическими рядами* несгруппированных данных. Для удобства обработки этих данных записывают *вариационный ряд* – это статистический ряд, в котором значения случайной величины упорядочены, то есть расположены в порядке их возрастания или убывания и, возможно, сгруппированы по некоторому признаку.

Так, выборку для случайной величины X – размер обуви из рассмотренного примера – можно записать в виде табл. 6.1, представляющей собой вариационный ряд.

i	Размер x_i	Число пар n_i	Частость $\bar{n}_i$
1	36	1	0,013
2	37	1	0,013
3	38	5	0,063
4	39	8	0,101
5	40	17	0,215
6	41	21	0,266
7	42	18	0,228
8	43	8	0,101
Итого		79	1,000

Табл. 6.2: Вариационный ряд примера

Варианты x_i	Частоты n_i	Веса $\bar{n}_i$
x_1	n_1	$\bar{n}_1$
x_2	n_2	$\bar{n}_2$
...	...	...
x_i	n_i	$\bar{n}_i$
...	...	...
x_k	n_k	$\bar{n}_k$
Итого	n	1

Табл. 6.3: Вариационные ряды

Во втором столбце этой таблицы расположены $k = 8$ различных значений x_i , которые принимает случайная величина X из примера.

Вариантой x_i ($i = \overline{1, k}$) называется любое конкретное наблюдаемое значение случайной величины X (например, $x_3 = 38$ — пара обуви размера 38, стоящая в третьей строке табл. 6.2).

Число n_i повторений варианты называется частотой варианты (третий столбец таблицы), а его отношение к объему выборки $\bar{n}_i = n_i/n$ называется частотой или весом варианты.

Для произвольной случайной величины $X = \{x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_k\}$ вариационный ряд может быть представлен в виде левой табл. 6.3.

Интервалы $[x_{i-1}; x_i]$	Частоты n_i	Веса $\bar{n}_i$
$[x_0; x_1]$	n_1	$\bar{n}_1$
$[x_1; x_2]$	n_2	$\bar{n}_2$
...	...	...
$[x_{i-1}; x_i]$	n_i	$\bar{n}_i$
...	...	...
$[x_{k-1}; x_k]$	n_k	$\bar{n}_k$
Итого	n	1

При большом объеме выборки ее элементы объединяют в группы (ряды) и представляют результаты опытов в виде группированного вариационного ряда (правая табл. 6.3).

Для построения этого ряда интервал изменения случайной величины $[x_{\min}; x_{\max}]$ разбивают на k непересекающихся интервалов $[x_{\min}; x_1]$, $[x_1; x_2], \dots, [x_{i-1}; x_i], \dots, [x_{k-1}; x_k = x_{\max}]$, называемых частичными интервалами.

Для упрощения дальнейшей обработки статистических данных частичные интервалы $[x_{i-1}; x_i]$ желательно делать одинаковой длины:

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}.$$

Частотами n_i ($i = \overline{1, k}$) интервалов являются количества вариантов, попавших в i -тый частичный интервал; частотами или весами интервалов относительные частоты $\bar{n}_i = n_i/n$.

При обработке статистических данных следует иметь в виду, что группировка выборки вносит погрешность, которая имеет тенденцию к увеличению с уменьшением числа интервалов k .

6.3 Эмпирическая функция распределения

Пусть $X_n = \{x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_k\}$ — выборка объема n , содержащая k вариантов, из генеральной совокупности случайной величины X , имеющей функцию распределения $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Эмпирической функцией распределения выборки X_n называется функция $F_n(x)$, определяющая для любого $x \in \mathbb{R}$ относительную частоту события $(X < x)$, то есть

$$F_n(x) = \sum_{x_i < x} \bar{n}_i, \quad (6.1)$$

то есть частоты тех вариантов, которые меньше x .

По определению $F_n(x)$ зависит от выборки и обладает свойствами функции распределения $F(x)$ случайной величины. В частности $F_n(x)$:

- 1) неубывающая функция;
- 2) непрерывная слева;
- 3) имеет значения, принадлежащие отрезку $[0; 1]$.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема (Гливенко). При неограниченном росте объема n выборки случайной величины X функция $F_n(x)$ распределения выборки стремится к функции $F(x)$ распределения генеральной совокупности.

Таким образом, функция $F_n(x)$ может служить *приближением (оценкой)* неизвестной функции $F(x)$ распределения генеральной совокупности случайной величины.

Пример 1. По данным табл. 6.2 найти эмпирическую функцию распределения для проданных магазином 79 пар обуви.

Решение.

Эмпирическая функция $F_n(x) = F_{79}(36) = 0$, так как обувь, размера $x < 36$ магазином не продавалась и $n_0 = n(x \in (-\infty; 36]) = 0$.

Если $x \in (36; 37]$, то $n_1 = n(x \in (36; 37]) = 1$, так как обуви размера, строго меньшего 37, продана одна пара, которая, согласно табл. 1.2, была 36 размера. Для этого интервала изменения x : $F_n(x) = \frac{n_0 + n_1}{n} = \frac{0 + 1}{79} = 0,013$.

Рассуждая аналогично, получим $F_n(x) = \frac{1 + 1}{79} = 0,025$, если $x < 38$ (проданы по одной пары 36 и 37 размеров); $F_n(x) = \frac{1 + 1 + 5}{79} = 0,089$ для $x < 39$ (продана пара 36 размера – 1, 37 размера – 1 и 38 – 5) и так далее. Функция распределения представлена таблицей 6.4 и на графике (рис. 6.1, а).

$x \in$	$(-\infty, 36]$	$(36, 37]$	$(37, 38]$	$(38, 39]$	$(39, 40]$	$(40, 41]$	$(41, 42]$	$(42, 43]$	$(43, \infty)$
$F_n(x)$	0,000	0,013	0,025	0,089	0,190	0,405	0,671	0,899	1,000

Табл. 6.4: Эмпирическая функция распределения примера 1

Пример 2. Недельный заработок каждого из 1000 работников предприятия колеблется от 143 до 188 рублей. Группированный вариационный ряд распределения случайной величины – заработная плата одного наудачу выбранного работника – представлен в виде табл. 6.5. Определить эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

Решение. Эмпирическая функция распределения равна нулю, если $x < 143$, так как заработка меньшего, чем 143 рубля, у обследуемых работников нет. Для заполнения следующих столбцов табл. 6.5 отметим, что данные по зарплате имеются только для интервальных разностей $x_i - x_{i-1}$ и по ним невозможно построить гладкую и непрерывную функцию распределения. Нельзя, например, сказать, что зарплату 145 (а почему бы не 144,68?) рублей получает тот единственный работник предприятия, зарплата которого попала в интервал (143-149) руб.

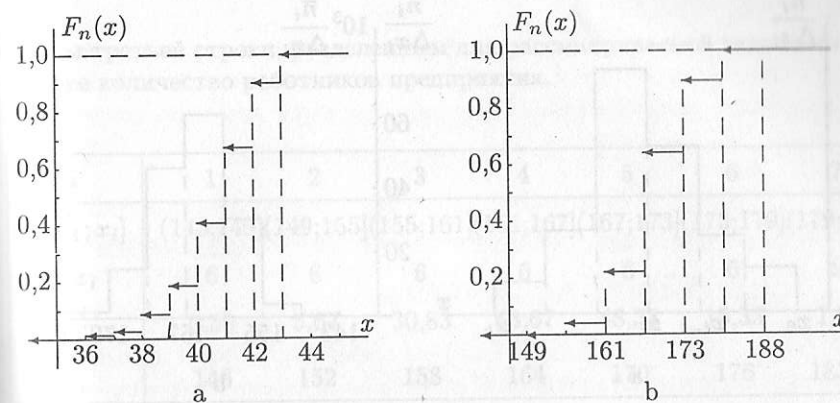


Рис. 6.1: Функции распределения примеров 1 и 2

i	1	2	3	4	5	6	7
$(x_{i-1}; x_i]$	(143;149]	(149;155]	(155;161]	(161;167]	(167;173]	(173;179]	(179;188]
n_i	3	34	185	382	290	92	14
$\sum_{j=1}^i n_j$	3	37	222	604	894	986	1000
$F_n(x)$	0,003	0,037	0,222	0,604	0,894	0,986	1,000

Табл. 6.5: Исходные и расчетные данные примера 2

Принцип построения эмпирического ряда распределения, представленного таблицей 6.5, аналогичен описанному в примере 1.

На рис. 6.1, б представлено графическое изображение закона распределения искомой случайной величины примера 2.

6.4 Гистограмма и полигон частот

Пусть $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k\}$ – выборка объема n , содержащая k вариантов, из генеральной совокупности случайной величины X с плотностью вероятностей $f(x)$. Приближением (оценкой) неизвестной плотности вероятностей могут служить гистограмма или полигон частот. Гистограмма представляется в виде примыкающих друг к другу прямоугольников с

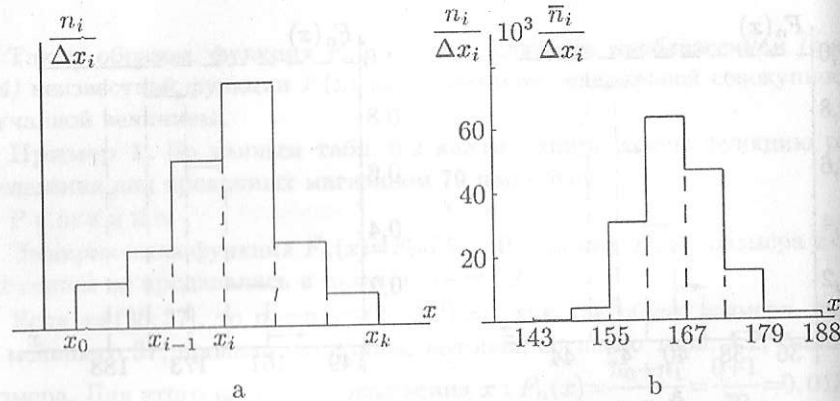


Рис. 6.2: Гистограмма а) общий вид; б) к примеру

основаниями Δx_i , равными ширине (размаху) интервалов группировки, и высотами $\frac{n_i}{\Delta x_i}$.

Типичная гистограмма частот представлена на рис. 6.2,а. Площадь такой многоступенчатой фигуры равна объему выборки n .

Площадь i -того прямоугольника $\Delta s_i = \Delta x_i \frac{n_i}{\Delta x_i}$ равна частоте n_i повторений значений случайной величины на i -том интервале выборки.

Аналогично определяется гистограмма относительных частот, где высота каждого прямоугольника равна весу, разделенному на соответствующий размах интервала $\frac{\bar{n}_i}{\Delta x_i}$. Для такой гистограммы площадь ступенчатой фигуры соответствует сумме вероятностей и равна 1. Площадь любого прямоугольника гистограммы равна вероятности попадания рассматриваемой случайной величины в интервал, соответствующий основанию прямоугольника.

При увеличении объема выборки и уменьшении длины интервалов гистограмма приближается к графику функции $f(x)$ – плотности вероятностей генеральной совокупности.

Пример. Построить гистограмму для условия примера 2 раздела 6.3.
Решение.

По данным табл. 6.5 составляем новую таблицу (6.6).

Во второй строке этой таблицы стоят значения интервальных разностей Δx_i ; в третьей – частоты (количество работников, получающих зарплату, укладываемую в рассматриваемый интервал), поделенные на Δx_i .

Относительные частоты (частости) будут равны соответствующим зна

чениям третьей строки, разделенным для рассматриваемой задачи на 1000 – общее количество работников предприятия.

i	1	2	3	4	5	6	7
$(x_{i-1}; x_i]$	(143;149]	(149;155]	(155;161]	(161;167]	(167;173]	(173;179]	(179;188]
Δx_i	6	6	6	6	6	6	9
$\frac{n_i}{\Delta x_i}$	0,50	5,67	30,83	63,67	48,33	15,33	1,56
z_i	146	152	158	164	170	176	183,5

Табл. 6.6: Расчетные данные примера

По данным табл. 6.6 построена гистограмма, изображенная на рис. 6.2.б.

Значения ординат гистограммы относительных частот, проставленные на рисунке, должны быть уменьшены в 1000 раз по сравнению с изображенными.

Вероятность попадания зарплаты в конкретный интервал равна площади гистограммы, опирающейся на этот интервал и имеющей высоту, определенную в масштабе частостей (правая шкала оси ординат). Так, вероятность попадания величины зарплаты в интервал [161;173] определится площадью двух прямоугольников с основаниями $\Delta x_4 = \Delta x_5 = 6$ и высотами $63,67 \cdot 10^{-3}$ и $48,33 \cdot 10^{-3}$, соответственно. То есть

$$P(161 \leq x < 173) = 6,367 \cdot 10^{-2} + 4,633 \cdot 10^{-2} = 0,112.$$

Полигоном частот называется ломаная, соединяющая точки $(z_1; \frac{n_1}{\Delta x_1})$, $(z_2; \frac{n_2}{\Delta x_2})$, ..., $(z_i; \frac{n_i}{\Delta x_i})$, ..., $(z_k; \frac{n_k}{\Delta x_k})$, где $z_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ – середины интервалов группировки, n_i – частоты.

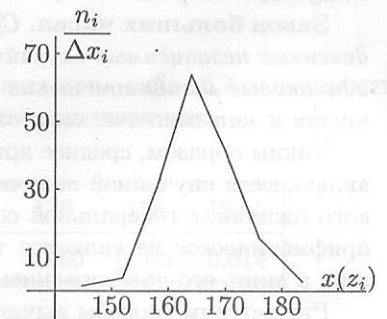


Рис. 6.3: Полигон частот примера

Полигон частот для рассмотренного в этом разделе примера, построенный по данным строк 3 и 4 табл. 6.6, приведен на рис. 6.3.

Полигоном относительных частот является ломаная, соединяющая точки $(z_i; \frac{\bar{n}_i}{\Delta x_i})$ ($i = \overline{1, k}$), k – количество интервалов.

6.5 Оценка математического ожидания случайной величины.

Пусть $X_n = \{x_1; x_2; \dots; x_j; \dots; x_n\}$ – выборка объема n из генеральной совокупности значений случайной величины X с математическим ожиданием $M[X]$. Формально выборка объема n есть набор реализаций независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n$. Нахождение оценки математического ожидания по выборке основано на следующей теореме.

Закон больших чисел. Среднее арифметическое n одинаково распределенных независимых случайных величин $X_1; X_2; \dots; X_j; \dots; X_n$, имеющих одинаковые математические ожидания, при $n \rightarrow \infty$ сходится по вероятности к математическому ожиданию $M[X]$.

Таким образом, среднее арифметическое, зависящее от выборки и само являющееся случайной величиной, может служить оценкой математического ожидания генеральной совокупности. Следует помнить, что среднее арифметическое не является точным значением математического ожидания, а лишь его приближением (оценкой).

Рассмотрим способы вычисления оценок математического ожидания.

1. Выборочное среднее, подсчитываемое по всем вариантам выборки объема n :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j. \quad (6.2)$$

2. Для дискретных случайных величин, значения x_i которых ($i = \overline{1, k}$) повторяются с частотами n_i , можно использовать формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i = \sum_{i=1}^k x_i \bar{n}_i, \quad (6.3)$$

где k – число различных вариантов.

Пример 1. По данным табл. 6.2 найти выборочное среднее размеров обуви.

6.5. ОЦЕНКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Решение.

$$\bar{x} = \frac{1}{79} \sum_{i=1}^8 x_i n_i = \frac{1}{79} (36 \cdot 1 + 37 \cdot 1 + 38 \cdot 5 + 39 \cdot 8 + 40 \cdot 17 + 41 \cdot 21 + 42 \cdot 18 + 43 \cdot 8) = 40,7.$$

3. Для выборки большого объема, разбитой на k интервалов, приближенной оценкой математического ожидания может служить выборочное среднее группированной выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k z_i n_i = \sum_{i=1}^k z_i \bar{n}_i, \quad (6.4)$$

где, как и в предыдущем разделе, $z_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ – середина i -того интервала.

Пример 2. Найти выборочное среднее заработной платы работников предприятия по данным табл. 6.5.

Решение.

Используя данные таблиц 6.5 и 6.6, составим табл. 6.7 зависимости среднего значения функции на интервалах от их частоты.

z_i	146	152	158	164	170	176	183,5
$\bar{n}_i$	0,003	0,034	0,185	0,382	0,290	0,092	0,014

Табл. 6.7: Таблица примера 2

Найдем искомую величину выборочной средней заработной платы, используя формулу (6.4):

$$\bar{x} = 146 \cdot 0,003 + 152 \cdot 0,034 + 158 \cdot 0,185 + 164 \cdot 0,382 + 170 \cdot 0,290 + 176 \cdot 0,092 + 183,5 \cdot 0,014 = 165,545. \quad (6.5)$$

4. Если в результате наблюдений получено несколько групп значений случайной величины или исходная выборка настолько велика, что ее удобно разбить на группы, то для вычисления выборочного среднего можно не объединять все группы в одну, а использовать свойство, обсуждавшееся в предыдущей главе:

Общее выборочное среднее равно среднему арифметическому выборочных средних групп, взвешенных по объемам групп (k – количество групп):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_i. \quad (6.6)$$

Замечание. При замене математического ожидания группы на среднее значение z_i не должна вноситься ошибка больше ошибки от замены математического ожидания $M[X]$ случайной величины на ее выборочное среднее $\bar{x}$.

Пример 3. Убедиться в справедливости свойства 4 на рассмотренном примере 2.

Решение.

Разобьем всю выборку на три группы, которые с учетом данных табл. 6.7 представим тремя таблицами

$x_i^{(1)}$	146	152
$n_i^{(1)}$	3	34

$x_i^{(2)}$	158	164
$n_i^{(2)}$	185	382

$x_i^{(3)}$	170	176	183,5
$n_i^{(3)}$	290	92	14

Табл. 6.8: Три группы ряда распределения

Подсчитаем средние арифметические по каждой из трех групп:

$$\bar{x}^{(1)} = \frac{146 \cdot 3 + 152 \cdot 34}{3 + 34} = 151,51; \quad \bar{x}^{(2)} = \frac{158 \cdot 185 + 164 \cdot 382}{185 + 382} = 162,04;$$

$$\bar{x}^{(3)} = \frac{170 \cdot 290 + 176 \cdot 92 + 183,5 \cdot 14}{290 + 92 + 14} = 171,87.$$

Итак, средняя зарплата по группам найдена. Выпишем суммарное число работников в каждой группе (знаменатели предыдущих выражений): $n^{(1)} = 37$; $n^{(2)} = 567$; $n^{(3)} = 396$ и найдем среднее арифметическое от средних заработных плат групп:

$$\bar{x} = \frac{151,51 \cdot 37 + 162,04 \cdot 567 + 171,87 \cdot 396}{37 + 567 + 396} = 165,545.$$

Совпадение результата с полученным в (6.5) значением подтверждает справедливость сформулированного выше свойства выборочного среднего.

6.6 Оценка дисперсии случайной величины

Пусть $X_n = \{x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_k\}$ – выборка объема n , содержащая k вариант, из генеральной совокупности значений случайной величины X с дисперсией $D[X]$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = \sqrt{D[X]}$. Аналогично разделу 6.5 по выборке можно получить приближение (оценку) σ^2 дисперсии.

1. Выборочная дисперсия, подсчитываемая по выборке объема n с k вариантами x_i , повторяющимися с частотой n_i :

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \bar{n}_i = \sum_{i=1}^k x_i^2 \bar{n}_i - \bar{x}^2. \quad (6.7)$$

Здесь $\bar{x}$ – выборочное среднее всей выборки.

Пример 1. Из табл. 6.2 выборочная дисперсия размеров обуви

$$\sigma^2 = \frac{1}{79} \sum_{i=1}^8 x_i^2 n_i - \bar{x}^2 = \frac{1}{79} (36^2 \cdot 1 + 37^2 \cdot 1 + 38^2 \cdot 5 + 39^2 \cdot 8 + 40^2 \cdot 17 + 41^2 \cdot 21 + 42^2 \cdot 18 + 43^2 \cdot 8) - 40,7^2 = 2,98.$$

2. Если в результате наблюдений получено несколько групп значений случайной величины или выборка разбита на подгруппы, можно использовать свойство, рассмотренное в предыдущей главе:

Выборочная дисперсия вариационного ряда, разбитого на непересекающиеся группы, равна сумме внутригрупповой σ^2 и межгрупповой δ^2 дисперсий:

$$\sigma^2 = \overline{\sigma^2} + \delta^2. \quad (6.8)$$

Здесь

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sigma_i^2 n_i; \quad \delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (6.9)$$

Пример 2. Найти выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение заработной платы работников предприятия по данным Примера 2 раздела ?? и полученным там же значениям выборочной средней и групповых средних.

Решение.

Используя данные табл. 6.7 и вычисленное в разделе 6.5 значение выборочной средней $\bar{x} \approx 165,54$, по первому равенству формулы (6.7) найдем $\sigma^2 = (146 - 165,54)^2 \cdot 0,004 + (152 - 165,54)^2 \cdot 0,033 + (158 - 165,54)^2 \cdot 0,185 +$

$$+ (164 - 165,54)^2 \cdot 0,382 + (170 - 165,54)^2 \cdot 0,290 + (176 - 165,54)^2 \cdot 0,092 + \\ + (183,5 - 165,54)^2 \cdot 0,014 = 39,35.$$

Этому значению выборочной дисперсии соответствует выборочное среднее квадратическое отклонение $\bar{\sigma} = 6,27$.

Теперь, как в примере 1 предыдущего раздела, разобьем всю выборку на три группы (табл. 6.8) и найдем дисперсии для каждой из групп:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1^2 &= (146 - 151,35)^2 \frac{4}{4 + 33} + (152 - 151,35)^2 \frac{33}{4 + 33} = 3,47; \\ \bar{\sigma}_2^2 &= (158 - 162,04)^2 \frac{185}{185 + 382} + (164 - 162,04)^2 \frac{382}{185 + 382} = 7,91; \\ \bar{\sigma}_3^2 &= (170 - 171,87)^2 \frac{290}{290 + 92 + 14} + (176 - 171,87)^2 \frac{92}{290 + 92 + 14} + \\ &+ (183,5 - 171,87)^2 \frac{14}{290 + 92 + 14} = 11,31. \end{aligned}$$

По найденным значениям дисперсий групп определяем внутригрупповую дисперсию (количество элементов в группах ($k = 3$): $n_1 = 37$; $n_2 = 567$; $n_3 = 396$; общее количество элементов $n = 1000$) по первой формуле (6.9):

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{1000} (3,47 \cdot 37 + 7,91 \cdot 567 + 11,31 \cdot 396) = 9,09.$$

Межгрупповая дисперсия (вторая формула (6.9)) определится как сумма квадратов разностей между средними значениями случайной величины в группах $\bar{x}_1 = 151,35$; $\bar{x}_2 = 162,04$; $\bar{x}_3 = 171,87$ и выборочной средней $\bar{x} = 165,54$, умноженных на частоты групп:

$$\bar{n}_1 = \frac{37}{1000} = 0,037; \quad \bar{n}_2 = \frac{567}{1000} = 0,567; \quad \bar{n}_3 = \frac{396}{1000} = 0,396;$$

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (151,51 - 165,54)^2 \cdot 0,037 + (162,04 - 165,54)^2 \cdot 0,567 + \\ &+ (171,87 - 165,54)^2 \cdot 0,396 = 30,26. \end{aligned}$$

Сложим это значение с $\bar{\sigma}^2 = 9,09$:

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2 + \delta^2 = 9,09 + 30,26 = 39,35.$$

Получили то же значение выборочной дисперсии, что и найденное в результате ее прямого вычисления.

Выборочная дисперсия является одной из оценок неизвестной дисперсии $D[X]$ генеральной совокупности, причем не всегда наилучшей. Более того, при выборке малого объема выборочное среднее и выборочная дисперсия могут значительно отличаться от оцениваемого параметра. Такие оценки называются *точечными*. Надежность точечных оценок может определять интервал $(Q_1; Q_2)$, внутри которого с вероятностью p находится точное значение оцениваемого параметра. Нахождение таких интервалов называется *интервальным оцениванием*, а сами интервалы называются *доверительными*. Правило определения доверительных интервалов приведено в любых справочниках по математической статистике.

6.7 Проверка статистических гипотез

Для получения обоснованных выводов о параметрах, видах распределения и других свойствах случайных величин необходимо проверить гипотезу о соответствии эмпирической функции распределения одному из известных теоретических законов.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения, или о параметрах известного распределения. Например, статистическими являются гипотезы:

- а) генеральная совокупность распределена по нормальному или любому другому конкретно заданному закону (гипотеза о виде распределения);
- б) если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону, то параметры нормального закона равны параметрам генеральной совокупности: $a = \bar{x}$, $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$ (параметрическая гипотеза).

Гипотезу о виде распределения выдвигают на основе схожести гистограммы или полигона частот с соответствующей кривой одного из теоретических законов (нормального, равномерного, Пуассона и т.п.).

Когда предположение о виде распределения случайной величины принято, следует проверить гипотезу о параметрах этого распределения.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0 .

Альтернативной называют гипотезу H_1 , которая противоречит нулевой. При проверке статистических гипотез могут быть допущены ошибки двух родов с вероятностями:

- 1) α - вероятность отклонить верную гипотезу H_0 (ошибка первого рода);
- 2) β - вероятность принять неверную гипотезу H_0 (ошибка второго рода).

При контроле качества продукции вероятность α забраковать годную партию изделий называют "риском производителя", а вероятность β принять негодную партию – "риском потребителя".

Ясно, что чем меньше будут ошибки первого и второго рода, тем точнее статистический вывод. Однако при заданном объеме выборки уменьшить одновременно α и β невозможно. Целесообразность выбора ошибок зависит от "тяжести последствий" ошибок для каждой конкретной задачи. Единственный способ одновременного уменьшения α и β состоит в увеличении объема выборки.

Статистическая проверка гипотезы основывается на том принципе, что маловероятные события считаются невозможными, а события с большой вероятностью – достоверными. Этот принцип реализуется следующим образом.

Перед анализом выборки задается *уровень значимости* α – вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы. Обычно полагают $\alpha = 0,05; 0,01; 0,001$.

Прежде чем привести схему статистической проверки гипотез, дадим используемые ниже определения новых понятий.

Статистикой критерия называется случайная величина K , которая служит для проверки гипотезы H_0 .

Критической областью называют совокупность значений статистики, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Обычно критическую область выбирают из условия $P(K > K_{кр}) = \alpha$.

Критическую точку критерия $K_{кр}$ находят по соответствующим таблицам (например, таблица Приложения 1).

Схема статистической проверки гипотезы:

- 1) формулировка нулевой H_0 и альтернативной H_1 гипотез;
- 2) выбор уровня значимости α ;
- 3) выбор статистики K и соответствующего критерия;
- 4) определение критической области и области принятия гипотезы;
- 5) вычисление выборочной статистики $K_{выб}$ и проверка гипотезы;
- 6) принятие статистического решения.

Параметрические гипотезы проверяются на основе построения доверительных интервалов. Рассмотрим далее один из критериев согласованности выборочных данных с гипотезой о конкретном виде распределения генеральной совокупности. Такие критерии называются критериями согласия.

6.8 Критерий согласия Пирсона χ^2

Критерием Пирсона χ^2 ("хи" квадрат) называют критерий, опирающийся на следующие предположения о согласованности характеристик выборочных статистических данных и характеристик генеральной совокупности.

1) Гипотеза H_0 : генеральная совокупность имеет нормальное распределение:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

с параметрами $\mu = \bar{x}$, $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$. То есть выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочная дисперсия $\bar{\sigma}^2$ принимаются соответственно за математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 нормально распределенной случайной величины.

Гипотеза H_1 : гипотеза H_0 неверна.

2) Уровень значимости $\alpha = 0,01$.

3) Статистикой критерия χ^2 служит случайная величина

$$K = \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \quad (6.10)$$

где k – число интервалов разбиения выборки; n – объем выборки; n_i – частота i -того интервала; p_i – теоретическая вероятность попадания значений случайной величины X в i -тый интервал.

Для принятого нормального закона

$$p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \mu}{\sigma}\right). \quad (6.11)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ – стандартная функция Лапласа, значения которой находят по таблицам (например, табл. Приложения 1 или справочники по теории вероятностей).

4) Критическая точка критерия Пирсона определяется по таблице Приложения 1 по выбранному уровню значимости α и числу степеней свободы $q = k - s - 1$, где k – число интервалов разбиения, s – число оцениваемых параметров выбранного закона распределения. Для нормального закона $s = 2$ (параметры μ и σ). Поэтому $q = k - 3$. Например, для $k = 10$ ($q = 7$) и $\alpha = 0,01$ $K_{кр} = 18,5$ и область принятия критерия имеет вид, показанный на рис. 6.4.

Следует обратить внимание на то, что в статистике критерия χ^2 суммируются разности $(n_i - np_i)$. Следовательно, чем ближе веса $\bar{n}_i$ к теоретическому значению вероятности p_i , тем меньшее значение имеет статистика. Этим объясняется выбор области принятия гипотезы $\chi^2_{\text{выб}} \in (0; K_{kp})$.

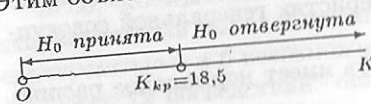


Рис. 6.4: Области принятия критерия

5) По количеству элементов n в выборке; n_i — в каждой из i групп и по найденным значениям вероятностей p_i вычисляется значение статистики $K = \chi^2_{\text{выб}}$ по формуле (6.10). Следует иметь в виду, что критерий χ^2 использует тот факт, что случайная величина $\frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ имеет распределение, близкое к нормальному. Чтобы это утверждение было достаточно точным, необходимо выполнение условия $np_i \geq 5$ для всех интервалов. Интервалы, для которых это условие не выполняется, следует объединить с соседними.

Если вычисленная выборочная статистика $\chi^2_{\text{выб}} \in (0; K_{kp})$, то гипотеза H_0 принимается. Если $\chi^2_{\text{выб}} \geq K_{kp}$, то H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза.

6) Статистический вывод неверно формулировать в виде: генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения. Можно лишь утверждать, что данная выборка согласуется с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности с параметрами $\mu = \bar{x}$, $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$ на уровне значимости α (ошибка первого рода).

6.9 Обработка статистического материала (пример)

Рассмотрим пример выравнивания статистического ряда с помощью нормального закона распределения.

Исходные данные для расчета.

Серия испытаний представлена таблицей значений случайной величины X (табл. 6.9).

Требуется.

1. Найти оценку математического ожидания случайной величины X .
2. Найти оценки дисперсии случайной величины X и ее среднего квадратического отклонения.
3. Составить группированный вариационный ряд, разбив выборку на 10 равных интервалов.

5,93	5,27	9,92	6,35	4,86	5,79	4,42	7,60	5,12	0,48
3,94	4,61	6,09	1,88	5,37	2,62	7,97	4,29	3,73	6,39
6,85	7,75	6,57	1,07	7,04	4,06	7,56	8,89	6,14	1,30
5,39	7,38	7,79	3,89	5,09	5,64	9,89	8,94	3,52	5,82
6,81	3,97	3,95	6,19	6,76	3,13	8,16	5,32	7,36	2,89
5,01	6,58	6,94	6,42	7,18	1,74	2,00	4,02	4,68	4,73

Табл. 6.9: Исходные статистические данные случайной величины X

4. Построить гистограмму и полигон относительных частот. На их основе выдвинуть нулевую гипотезу о виде распределения (нормальное распределение с параметрами $\mu = \bar{x}$, $\sigma = \bar{\sigma}$).
5. На одном чертеже с гистограммой построить график теоретической плотности вероятностей. Сделать вывод об их визуальном совпадении.
6. Построить таблицу и график эмпирической функции распределения $F_n(x)$.
7. На том же чертеже построить график теоретической функции распределения (функции Лапласа с параметрами $\mu = \bar{x}$, $\sigma = \bar{\sigma}$).
8. С помощью критерия согласия χ^2 Пирсона проверить нулевую гипотезу H_0 о виде распределения генеральной совокупности.
9. Сделать статистический вывод.

Обозначения (Дополнительные к принятым в пособии).

$i = \overline{1, k}$ — номер столбца табл. 6.10;

$j = \overline{1, n_i}$ — номер строки табл. 6.10;

x_{ji} — элемент случайной величины X , расположенный на пересечении j -й строки и i -го столбца;

k — количество подынтервалов (число столбцов), на которые разбивается интервал изменения случайной величины;

n — общее количество элементов в таблице исходных данных;

n_i — количество элементов в i -том столбце строки с номером 3 табл. 6.9.

Решение.

Определяем интервал изменения случайной величины X . Для этого в табл. 6.9 находим максимальный $x_{\max}^0 = 9,92$ и минимальный $x_{\min}^0 = 0,48$

1	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10=k	
2	$(x_{i-1}; x_i]$	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]	(6,7]	(7,8]	(8,9]	(9,10]	Σ
3	x_{1i}	0,48	1,07	2,62	3,13	4,02	5,01	6,09	7,04	8,16	9,89	
	x_{2i}		1,30	2,89	3,52	4,06	5,09	6,14	7,18	8,89	9,91	
	x_{3i}		1,74		3,73	4,29	5,12	6,19	7,36	8,95		
	x_{4i}		1,88		3,89	4,42	5,27	6,35	7,38			
	x_{5i}		2,00		3,94	4,62	5,32	6,39	7,56			
	x_{6i}				3,95	4,68	5,37	6,42	7,59			
	x_{7i}				3,97	4,72	5,39	6,54	7,75			
	x_{8i}					4,86	5,64	6,57	7,79			
	x_{9i}						5,79	6,76	7,97			
	x_{10i}						5,82	6,81				
	x_{11i}						5,95	6,85				
	x_{12i}							6,94				
4	n_i	1	5	2	7	8	11	12	9	3	2	60
5	$\sum_{j=1}^m x_{ji}$	0,48	7,99	5,51	26,13	35,67	59,77	78,07	67,62	26,00	19,80	327,02
6	$\sum_{j=1}^m x_{ji}^2$	0,2	13,4	15,2	98,1	159,7	325,8	508,6	508,8	225,7	196,0	2051,6
7	$h_i = \bar{n}_i / \Delta x$	0,02	0,08	0,03	0,12	0,13	0,19	0,20	0,15	0,05	0,03	1,00
8	z_i	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	
9	t_i	-2,33	-1,86	-1,39	-0,92	-0,45	0,02	0,50	0,97	1,44	1,91	
10	$10\tilde{f}(t_i)$	0,26	0,71	1,52	2,61	3,61	3,99	3,52	2,49	1,42	0,64	
11	$10f(x_i)$	0,12	0,33	0,72	1,23	1,70	1,88	1,66	1,17	0,67	0,30	
12	$F_n(x)$	0,02	0,10	0,13	0,25	0,38	0,57	0,77	0,92	0,97	1,00	
13	$\Phi(x)$	0,01	0,03	0,08	0,18	0,33	0,51	0,69	0,83	0,93	0,97	

Табл. 6.10: Обработка статистических данных случайной величины X

элементы (в таблице подчеркнуты). Разность значений этих элементов даст размах изменения случайной величины: $w_0 = x_{max}^0 - x_{min}^0 = 9,92 - 0,48 = 9,54$.

Для удобства дальнейшей обработки статистических данных округляем минимаксные значения случайной величины до ближайшего большего целого числа (для x_{max}^0) и до ближайшего меньшего целого числа (для x_{min}^0). Таким образом принимаем $x_{max} = x_k = 10$, $x_{min} = x_0 = 0$.

Принятый размах изменения случайной величины $w = x_k - x_0 = 10 - 0 = 10$. Разбиваем размах на $k = 10$ равных (для удобства) интервалов. Разность Δx крайних интервальных значений x_i и x_{i-1} ($i = \overline{1, 10}$) при таком разбиении будет равна

$$\Delta x = \frac{x_k - x_0}{k} = \frac{10 - 0}{10} = 1.$$

Результаты дальнейших вычислений заносим в табл. 6.10.

С.1 (Строка 1). Номера интервалов.

С.2. Интервалы $(x_{i-1}; x_i]$.

С.3. Выписываем в порядке возрастания значения случайной величины, попавшие в каждый интервал.

С.4. Частоты интервалов n_i – количество вариантов, попавших в интервал. Сумма $\sum_{i=1}^k n_i = 60$.

П.1 (Пункт 1 задания). Так как группировка выборки вносит существенную погрешность в оценки параметров и объем выборки не очень велик ($n = 60$), оценкой математического ожидания можно считать выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{60} \cdot 327,02 = 5,45.$$

Для удобства вычисления суммы находим сначала суммы по интервалам, а затем общую сумму.

С.5. Суммы вариантов.

П.2. Оценкой дисперсии является выборочная дисперсия

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{60} \cdot 2051,5766 - (5,45)^2 = 4,49;$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}^2} = 2,12.$$

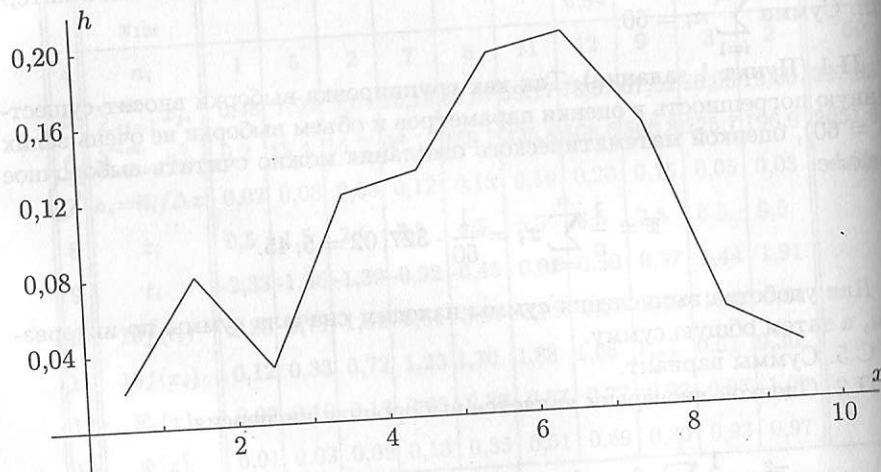
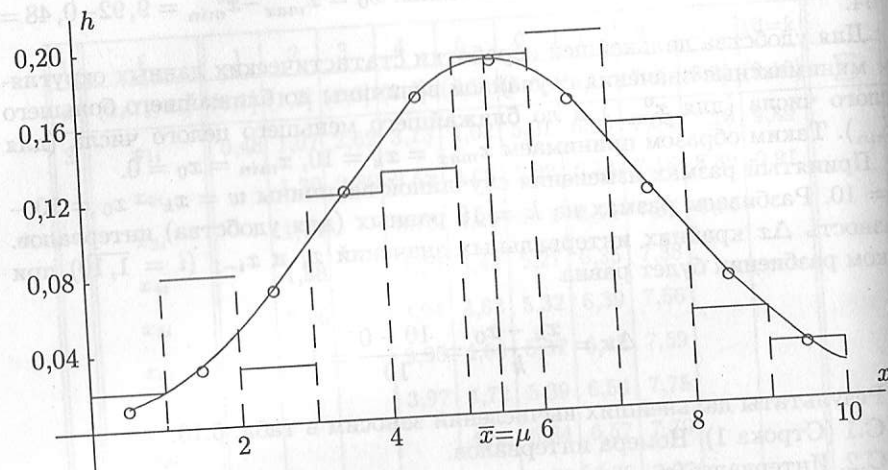


Рис. 6.5: Гистограмма и полигон частот примера

Для удобства вычислений сумму квадратов вариант вычисляем по интервалам, а потом объединяем в общую сумму.

$$\text{С.6. } \sum x_{ji}^2.$$

П.3. Строки 2 и 4 представляют собой группированный вариационный ряд. Присоединим к ним строку с весами интервалов $\bar{n}_i = n_i/n$.

$$\text{С.7. } h = \bar{n}_i / \Delta x.$$

П.4. По строкам 2 и 7 строим гистограмму относительных частот (верхний рис. 6.5).

Для построения полигона частот найдем середины интервалов.

$$\text{С.8. Середины интервалов } z_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

По строкам 7 и 8 строим полигон частот (нижний рис. 6.5).

Полигон частот и гистограмма являются статистическими аналогами плотности вероятностей.

Выдвигаем нулевую гипотезу H_0 : генеральная совокупность, из которой взята выборка, имеет нормальный закон распределения с плотностью вероятностей

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Параметрами нормального закона распределения считаем $\mu = \bar{x} = 5,45$; $\sigma = \bar{\sigma} = 2,12$.

П.5. Для построения графика теоретической плотности вероятностей проведем вычисления:

$$t_i = \frac{z_i - \mu}{\sigma} = \frac{z_i - 5,45}{2,12}.$$

С.10. Значения

$$\tilde{f}(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t_i^2}{2}\right)$$

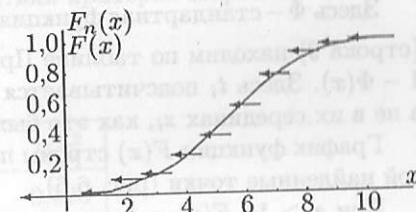


Рис. 6.6: Эмпирическая и теоретическая функции распределения

находим по таблице Приложения 1 с учетом четности:

$$\tilde{f}(-t_i) = \tilde{f}(t_i).$$

С.11. Значения теоретической плотности вероятностей (строку 10 делим на $\bar{\sigma} = 2,12$) $f(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{t_i^2}{2}\right)$.

График строим по строкам 8 и 11 таблицы на одном рисунке с гистограммой. Вычисленные точки соединяем плавной кривой.

П.6. Для построения таблицы эмпирической функции распределения $F_n(x)$ находим по строке 7 накопленные относительные частоты на каждом интервале разбиения (в каждом последующем i -м интервале к значению $\sum \bar{n}_i$ прибавляется следующее значение $\bar{n}_i$ из этого интервала).

С.12. Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$ (накопленные относительные частоты).

Вынесем данные строк 1 и 12 для удобства в табл. 6.11 и построим график эмпирической функции распределения (рис. 6.6).

$(x_{i-1}; x_i]$	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]	(6,7]	(7,8]	(8,9]	(9,10]
$\sum \bar{n}_i$	0,02	0,10	0,13	0,25	0,38	0,57	0,77	0,92	0,97	1,00

Табл. 6.11: Ряд распределения

П.7. Функция распределения для нормального закона с параметрами $\mu = \bar{x}$, $\sigma = \bar{\sigma}$:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(\tau - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\tau = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Здесь Φ – стандартная функция Лапласа. Ее значение в точках $t_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ (строка 9) находим по таблице Приложения 2 с учетом формулы $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Здесь t_i подсчитывается по значениям x_i на концах интервалов, а не в их серединах z_i , как это было в П.5.

График функции $F(x)$ строим по строкам 8 и 13, соединяя плавной кривой найденные точки (рис. 6.6).

При $x > 10$ $F(x) = 1$, при $x < 0$ $F(x) = 0$. Сравнивая строки 12 и 13 можно сделать вывод, что $F_n(x)$ является статистическим аналогом $F(x)$.

Если количество элементов в выборке увеличить, то согласно теореме Гливленко (раздел 6.3) кусочно-постоянная функция распределения будет приближаться к построенной теоретической кривой распределения.

П.8. Для вычисления статистики критерия Пирсона построим табл. 6.12.

Так как в 1,2,3 и 9,10 интервалах не выполняется условие $np_i \geq 5$, то эти интервалы объединяем. Для объединяемых интервалов значения np_i суммируются.

После укрупнения интервалов приходим к табл. 6.13.

$$\text{В этой таблице } \Delta\chi_i^2 = \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

$i = x_i$	t_i	$\Phi(t_i)$	p_i	np_i	n_i
0	-2,57	0,005	—	—	—
1	-2,10	0,018	0,013	0,78	1
2	-1,63	0,052	0,034	2,04	5
3	-1,16	0,123	0,071	4,26	2
4	-0,68	0,248	0,125	7,50	7
5	-0,21	0,417	0,169	10,14	8
6	0,26	0,603	0,186	11,16	11
7	0,73	0,767	0,165	9,90	12
8	1,20	0,885	0,118	7,08	9
9	1,67	0,953	0,068	4,08	3
10	2,15	0,984	0,032	1,92	2

Табл. 6.12: Вычисление статистики критерия Пирсона

i	np_i	n_i	$\Delta\chi_i^2$
1	7,08	8	0,120
2	7,50	7	0,033
3	10,14	8	0,452
4	11,16	11	0,002
5	9,90	12	0,445
6	7,08	9	0,521
7	6,00	5	0,167

Табл. 6.13: Укрупненная табл. 6.12

Суммируя элементы последнего столбца табл. 6.13, получим значение $\chi^2 = 1,758$.

Число степеней свободы $q = k - 3 = 7 - 3 = 4$.

Уровень значимости $\alpha = 0,01$.

По таблице значений критических точек распределения χ^2 (Приложение 3) находим $K_{kp}(q = 4, \alpha = 0,01) = 13,3$.

Найденное значение выборочной статистики $0 < \chi^2 = 1,758 < 13,3$. Следовательно, гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α .

П.9. Статистический вывод: данная выборка согласуется с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности с параметрами $\mu = 5,45$, $\sigma = 2,12$ на уровне значимости 0,01 (ошибка первого рода).

Итак, вероятность отклонить верную гипотезу α составляет 1%. Однако возможна также ошибка второго рода β , в особенности если совпадение теоретических и эмпирических частот "слишком хорошее", и эта ошибка (вероятность принять неверную гипотезу) может быть достаточно велика. Поэтому на практике при слишком хорошем совпадении (слишком малом χ^2) нужно проявить осторожность в статистическом выводе и повторить опыт, увеличив объем выборки.

6.10 Вопросы

1. Перечислите основные задачи математической статистики.
2. Что такое генеральная совокупность?
3. Что такое выборка из генеральной совокупности? Какие требования к ней предъявляются?
4. Что такое объем выборки? Размах выборки?
5. Что собой представляет вариационный ряд? Группированный вариационный ряд?
6. Что собой представляет частота варианты? Частость (вес) варианты?
7. Что такое эмпирическая функция распределения? Каково ее значение для статистики?
8. Что представляет собой гистограмма? Полигон частот? Статистическими аналогами какой функции они являются?
9. Что такое выборочное среднее?
10. Что является оценкой математического ожидания генеральной совокупности?
11. Что такое выборочная дисперсия? Оценкой какого параметра она является?
12. Какие соотношения и в каких случаях можно использовать для оценки дисперсии?
13. В каких случаях необходимо учитывать долю межгрупповой дисперсии в выборочной дисперсии?
13. Что такое статистическая гипотеза? Параметрическая гипотеза? Гипотеза о виде распределения?
14. Что такое нулевая и альтернативная гипотезы?
15. Какую гипотезу проверяют статистические критерии?
16. В чем смысл ошибок первого и второго рода при проверке статистических гипотез?

17. Что такое критическая область критерия согласия? Критическая точка?
18. Что такое критерий согласия Пирсона?
19. Как определить выборочную статистику χ^2 ("хи квадрат")?
20. Как определяется число степеней свободы в критерии Пирсона?
21. Как определяется уровень значимости критерия согласия?
22. Как выглядит критическая область критерия Пирсона?
23. Что такое статистический вывод и как он формулируется?

6.11 Упражнения

1. Считая элементы первых трех строк таблицы Приложения 2 значениями случайной величины X , составить для нее ряд распределения. Интервал изменения X разбить на 7 подынтервалов с размахом $\Delta x = x_i - x_{i-1} = 1$.

2. Построить графики эмпирических функций распределения по следующим данным.

2.1. По распределению находящегося в магазине количества вариантов n_i пар мужской обуви в зависимости от их размеров x_i

x_i	38	39	40	41	42	43	44
n_i	3	10	15	26	30	15	1

Табл. 6.14: Ряд распределения примера 2.1

2.2. По ряду распределения, составленному в упражнении 1 к разделу 6.2.

2.3. По таблице распределения квартир в 20-квартирном жилом доме по суточному потреблению электроэнергии N в кВт·ч по дням недели (1 – понедельник, 2 – вторник, ..., 7 – воскресенье)

N	1	2	3	4	5	6	7
(0-1]	1	-	-	2	1	-	1
(1-2]	2	3	2	3	5	1	3
(2-3]	4	5	4	5	7	3	4
(3-4]	8	8	9	6	5	9	5
(4-5]	3	2	4	3	2	6	7
(5-6]	2	2	1	1	-	1	-

Табл. 6.15: Ряд распределения примера 2.3

3. Для задач 2.1, 2.2 и 2.3 построить гистограммы.
4. Для рядов распределения задач 2.1, 2.2 и 2.3 вычислить выборочные средние. Для задачи 3 сравнить найденное значение выборочного среднего со средним групповым всех групп.
5. Для рядов распределения задач 2.1, 2.2 и 2.3 вычислить выборочные дисперсии и средние квадратические отклонения. Для задачи 2.3 сравнить найденное значение выборочной дисперсии со значением, вычисленным по правилу сложения внутригрупповой и межгрупповой дисперсий.

38	30	40	42	45	48	50	52	55	58	60	62	65	68	70	72	75	78	80	82	85	88	90	92	95	98	100																							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Табл. 6.14: Ряд распределения признака 2.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Табл. 6.15: Ряд распределения признака 2.2

6.12 Задание на расчетную работу 4, часть 1

Таблица случайных чисел x_{ji}^0 (j – номер строки, i – номер столбца) представлена таблицей Приложения 4.

Требуется.

Составить на основе приведенной таблицы новую таблицу, элементы которой определить из соотношения

$$x_{ji} = (1 + k)x_{ji}^0 + k,$$

где $k = N/n$ (N – последняя цифра номера учебной группы студента, n – порядковый номер студента в списке группы).

Полученную таблицу считать таблицей исходных статистических данных для случайной величины X и использовать их в нижеследующих пунктах 1-9.

1. Найти оценку математического ожидания случайной величины X .
2. Найти оценки дисперсии случайной величины X и ее среднего квадратического отклонения.
3. Составить группированный вариационный ряд, разбив выборку на 10 равных интервалов.
4. Построить гистограмму и полигон относительных частот. На их основе выдвинуть нулевую гипотезу о виде распределения (нормальное распределение с параметрами $\mu = \bar{x}$, $\sigma = \bar{\sigma}$).
5. На одном чертеже с гистограммой построить график теоретической плотности вероятностей. Сделать вывод об их визуальном совпадении.
6. Построить таблицу и график эмпирической функции распределения $F_n(x)$.
7. На том же чертеже построить график теоретической функции распределения (функции Лапласа) с параметрами $\mu = \bar{x}$, $\sigma = \bar{\sigma}$.
8. С помощью критерия согласия χ^2 Пирсона проверить нулевую гипотезу H_0 о виде распределения генеральной совокупности.
9. Сделать статистический вывод.

Глава 7

Теория корреляции

Методы математической статистики широко используются в экономическом анализе. Без них нельзя обойтись в тех случаях, когда изменение показателей не носит детерминированного характера, а может быть представлено как случайный процесс.

При анализе одномерных статистических совокупностей используются вариационные ряды, выборочные законы распределения, выборочные характеристики (статистики). Для исследования многомерных статистических совокупностей привлекают более сложные соотношения, в том числе корреляционные зависимости и уравнения регрессии — понятия, о которых идет речь в данной главе.

Задача математической статистики заключается не только в сборе статистических данных, но и в изучении наличия, широты и интенсивности связей между показателями различных видов экономической деятельности, в создании математических моделей, описывающих эти связи, с целью их анализа и выработки рекомендаций по оптимизации управления ими.

7.1 Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости

Рассмотрим зависимость случайной величины Y от одной случайной (в общем, или детерминированной) величины X .

Если каждому возможному значению X соответствует единственное возможное значение Y , то Y называют *функцией* аргумента X .

Строгая функциональная зависимость между двумя случайными величинами реализуется редко, так как обе величины могут быть подвержены воздействию случайных факторов. Пусть, например, Y зависит от случайных факторов U, V, W , а X — от случайных факторов P, Q, V . Так как среди влияющих факторов имеется общее (V), то говорят, что X и Y связаны *статистической зависимостью*.

Статистической называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение *закона распределения* другой.

Если статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной величины изменяется среднее значение (математическое ожидание) другой, то зависимость называется *корреляционной*.

Пример корреляционной зависимости.

Пусть Y — урожай зерна; X — количество внесенных удобрений. С одинаковых по площади участков земли при одинаковом количестве внесенных удобрений собирают различный урожай. В этом случае зависимость Y от X не является функциональной, так как на нее влияют различные факторы (условия): осадки, температура, квалификация комбайнера и т.д. Вместе с тем *средняя урожайность* является функцией от количества внесенных удобрений. Поэтому между Y и X существует корреляционная зависимость.

Между функциональной и корреляционной зависимостями случайных величин существует связь.

1. Если случайные величины X и Y функционально зависимы, то они коррелированы. Обратное утверждение в общем не верно.

2. Если X и Y независимы, то они некоррелированы. Обратное утверждение в общем случае не верно. Однако в частном случае, когда X и Y распределены по нормальному закону, из их некоррелированности следует независимость.

Таким образом, корреляционная зависимость занимает промежуточное положение между функциональной зависимостью и независимостью. Поэтому корреляционную зависимость считают «слабой» зависимостью между случайными величинами.

7.2 Пример корреляционной зависимости

Пусть известны результаты экзаменов и время в часах, затраченное на подготовку к нему, среди опрошенных 100 студентов. После перехода к осредненным дискретным распределениям (за значения переменных приняты середины интервалов времени подготовки и оценок, проставляемых преподавателем с точностью до десятых долей единицы) получено распре-

7.2. ПРИМЕР КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЗАВИСИМОСТИ

деление в виде зависимости полученной оценки $X = (2, 3, 4, 5)$ от затраты времени (в часах) на подготовку к экзамену $Y = (25, 30, 35, 40, 45, 50)$. Результаты сведены в табл. 7.1.

y_j	25	30	35	40	45	50		
x_i							$\sum$	$\bar{y}_{xi}$
2	9	4	1	—	—	—	14	27,2
3	1	10	9	3	—	—	23	33,1
4	—	2	8	18	9	1	38	39,9
5	—	—	1	9	8	7	25	44,2
$\sum$	10	16	19	30	17	8	100	
$\bar{x}_{yj}$	2,1	2,87	3,48	4,34	4,47	4,88		

Табл. 7.1: Корреляционная таблица примера

Таблицы такого типа со статистическим характером переменных называются *корреляционными*.

Сосредоточение показателей около диагонали таблицы говорит о том, что в данном испытании наблюдается тенденция увеличения оценки при росте времени, затрачиваемого студентами на подготовку к экзамену.

К построению аналитической зависимости между случайными переменными X и Y (построению математической модели задачи) можно подойти с разных позиций. Можно, например, каждому значению величины $x_i \in X$ ($i = \overline{2, 5}$) поставить в соответствие среднее арифметическое $\bar{y}_{xi}$ времени, затраченного среднестатистическим студентом, получившим на экзамене оценку x_i .

Так, оценку $x_2 = 2$ получили 9 студентов, затративших на подготовку к экзамену в среднем 25 часов, 4 студента — 30 часов и 1 студент — 35 часов, поэтому при суммарном количестве студентов, получивших на экзамене оценку 2, равном 14, получим

$$\bar{y}_{x2} = (25 \cdot 9 + 30 \cdot 4 + 35 \cdot 1) / 14 \approx 27,2.$$

Аналогично определяются средние арифметические затрат времени на подготовку к экзамену для получения оценок 3, 4 и 5:

$$\bar{y}_{x3} = (25 \cdot 1 + 30 \cdot 10 + 35 \cdot 9 + 40 \cdot 3) / 23 \approx 33,1.$$

$$\bar{y}_{x4} = (30 \cdot 2 + 35 \cdot 8 + 40 \cdot 18 + 45 \cdot 9 + 50 \cdot 1) / 38 \approx 39,9.$$

$$\bar{y}_{x5} = (35 \cdot 1 + 40 \cdot 9 + 45 \cdot 8 + 50 \cdot 7) / 25 \approx 44,2.$$

Полученные данные занесены в последний столбец табл. 7.1 и в виде точек, обозначенных значком $\circ$ на рис. 7.1.

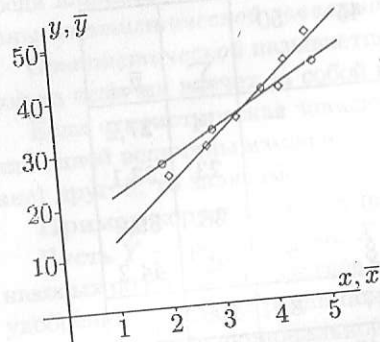


Рис. 7.1: К примеру 1

Из рисунка и таблицы видно, что с увеличением X усредненные по группам значения Y увеличиваются. При этом зависимость X от Y похожа на линейную и поэтому может быть описана уравнением прямой

$$\bar{y} = ax + b. \quad (7.1)$$

Рассмотрим еще один подход к формированию математической модели, описывающей закономерность зависимости оценки от затрат времени на подготовку к экзамену.

По числу различных значений переменной y имеем шесть групп показателей y_j ($j = \overline{1,6}$) затрат времени на подготовку к экзамену. Для каждой из этих групп подсчитаем среднее арифметическое оценки $\bar{x}_{yj}$, полученной на экзамене при затратах на подготовку соответственно $y_1 = 25$ час, $y_2 = 30$ час, ..., $y_6 = 50$ час.

$$\bar{x}_{y1} = (2 \cdot 9 + 3 \cdot 1) / 10 \approx 2,10.$$

$$\bar{x}_{y2} = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 2) / 16 \approx 2,87.$$

$$\bar{x}_{y3} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 1) / 19 \approx 3,47.$$

$$\bar{x}_{y4} = (3 \cdot 3 + 4 \cdot 18 + 5 \cdot 9) / 30 \approx 4,20.$$

$$\bar{x}_{y5} = (4 \cdot 9 + 5 \cdot 8) / 17 \approx 4,47.$$

$$\bar{x}_{y6} = (4 \cdot 1 + 5 \cdot 7) / 8 \approx 4,88.$$

Полученные данные занесены в последнюю строку табл. 7.1 и отмечены значками $\circ$ на рис. 7.1. Расположение точек подтверждает отмеченную ранее близкую к линейной зависимость переменных Y от X .

Точки на графике функции, полученные в первом варианте обработки исходных данных, не совпадают с точками второго варианта. Поэтому будем считать, что во втором варианте линейная зависимость описывается

$$\bar{x} = cy + d. \quad (7.2)$$

Рассмотренный пример является иллюстрацией задачи обработки исходного статистического материала для установления вида зависимости между статистическими переменными. Оставляя пока открытым вопрос

об определении коэффициентов в уравнениях прямых (7.1) и (7.2) (которые изображены на рис. 7.1), перейдем к изложению задачи в общем виде.

7.3 Корреляционная таблица

Пусть имеются n наблюдений случайных величин $(X; Y)$ — случайного вектора. При этом $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m\}$. Пусть каждая пара элементов $(x_i; y_j)$ встречается среди n таких пар с частотой n_{ij} .

Результаты наблюдений представлены в виде корреляционной таблицы

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$\sum_{i=1}^m n_{ij}$	$\bar{y}_{xi}$
X								
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1j}	$\dots$	n_{1m}	n_{x1}	$\bar{y}_{x1}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2j}	$\dots$	n_{2m}	n_{x2}	$\bar{y}_{x2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	n_{i1}	n_{i2}	$\dots$	n_{ij}	$\dots$	n_{im}	n_{xi}	$\bar{y}_{xi}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	n_{k1}	n_{k2}	$\dots$	n_{kj}	$\dots$	n_{km}	n_{xk}	$\bar{y}_{xk}$
$\sum_{i=1}^k n_{ij}$	n_{y1}	n_{y2}	$\dots$	n_{yj}	$\dots$	n_{ym}	n	$\bar{y}$
$\bar{x}_{yj}$	$\bar{x}_{y1}$	$\bar{x}_{y2}$	$\dots$	$\bar{x}_{yj}$	$\dots$	$\bar{x}_{ym}$	$\bar{x}$	

Табл. 7.2: Корреляционная таблица

Смысл элементов, входящих в таблицу, следующий.

Значения частот n_{ij} ($i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, m}$) показывают, сколько элементов совокупности n общего числа испытаний соответствует случаям, когда переменная X принимает значения x_i , а переменная Y — значения y_j . Сумма

всех таких частот, занесенных в таблицу, равна n :

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_{ij} = n.$$

Переменная X принимает k различных (в общем случае) значений $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k$ с частотами соответственно $n_{x1}, n_{x2}, \dots, n_{xi}, \dots, n_{xk}$. Переменная Y — m различных значений $y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m$ с частотами $n_{y1}, n_{y2}, \dots, n_{yj}, \dots, n_{ym}$. При этом

$$n_{xi} = \sum_{j=1}^m n_{ij}; \quad n_{yj} = \sum_{i=1}^k n_{ij}.$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^k n_{xi} = \sum_{j=1}^m n_{yj} = n.$$

Любая из частот n_{ij} может в частных случаях равняться нулю, но все частоты любой строки (столбца) одновременно равняться нулю не должны. Если последнее имеет место, следует соответствующую строку (столбец) вычеркнуть из таблицы, как не несущую никакой информации.

Совокупности пары чисел $(x_i; n_{xi})$ или пары чисел $(y_j; n_{yj})$ представляют собой эмпирические распределения одномерных случайных величин X и Y соответственно.

В последнем столбце таблицы приводятся условные средние $\bar{y}_{xi}$ случайной величины Y , соответствующие значению x_i случайной величины X :

$$\bar{y}_{xi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j n_{ij}.$$

В последней строке таблицы приводятся условные средние $\bar{x}_{yj}$ случайной величины X , соответствующие величине переменной Y , равной y_j :

$$\bar{x}_{yj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_{ij}.$$

По данным таблицы можно определить выборочные средние значения

переменных X и Y :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m \bar{x}_{yj} n_{yj}}{\sum_{j=1}^m n_{yj}} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \bar{x}_{yj} n_{yj}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{y}_{xi} n_{xi}}{\sum_{i=1}^k n_{xi}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \bar{y}_{xi} n_{xi}.$$

Если между переменной X , значения которой $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ приведены в первом столбце табл. 7.2, и переменной Y , представленной осредненными значениями $\{\bar{y}_{x1}, \bar{y}_{x2}, \dots, \bar{y}_{xk}\}$ последнего столбца таблицы, просматривается функциональная (определенная) зависимость, то ее можно представить в виде функции

$$\bar{y} = f(x). \quad (7.3)$$

График этой функции представляет собой кривую, вблизи которой располагаются точки $(x_i, \bar{y}_{xi})$.

В корреляционной таблице 7.2 переменные X и Y равноправны. Поэтому можно смоделировать функциональную зависимость

$$\bar{x} = g(y). \quad (7.4)$$

График этой функции представляет собой кривую, вблизи которой располагаются точки $(\bar{x}_{yj}, y_j)$, значения координат которых расположены в последней и первой строках таблицы.

Двухмерную выборку большого объема представляют в виде группированной корреляционной таблицы, в которой реализации случайных величин X и Y группируют по интервалам аналогично одномерному случаю. Пример такого случая представлен табл. 7.3

Корреляционной зависимостью между двумя переменными называют функциональную зависимость (7.3) или (7.4) между одной из них и соответствующими им средними арифметическими другой.

Зависимость, определяемую уравнением (7.3), называют корреляционной зависимостью Y на X ; (7.4) — корреляционной зависимостью X на Y . Соответствующие этим зависимостям уравнения (7.3) и (7.4) называются уравнениями регрессии соответственно Y на X и X на Y . Кривые этих функций называют кривыми регрессии.

Основными задачами корреляционного анализа являются:

- 1) определение функциональной связи между случайными переменными, в том числе определение постоянных, входящих в эту связь (например, коэффициентов a, b, c, d уравнений (7.1), (7.2));

Y	(5;15]	(15;25]	(25;35]	n_{xi}
X				
(10;20]	5	7	0	12
(20;30]	8	17	23	48
n_{yj}	13	24	23	60

Табл. 7.3: Корреляционная таблица

2) установление тесноты связи между одной случайной переменной, входящей в зависимость, и осредненными статистическими значениями другой случайной переменной.

7.4 Метод наименьших квадратов

В практике математической обработки результатов экспериментов независимо от того, какие процессы они описывают (детерминированные или случайные), широкое распространение получил *метод наименьших квадратов*. Опишем суть этого метода.

Пусть имеется таблица исходных данных, представляющих собой k пар элементов (декартовых произведений) независимых величин $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_k)$, например, совокупности величин, приведенных в табл. ???. Эти величины можно нанести на координатную плоскость декартовой ортогональной системы координат, как это было сделано на рис. 7.1.

Требуется построить такую функцию $y = f(x)$, которая с наибольшей точностью описывает представленную в виде опытных данных зависимость координат y_i от x_i ($i = \overline{1, k}$).

В методе наименьших квадратов точность описания экспериментальных данных аналитической зависимостью определяется минимальным значением суммы квадратов отклонений ординат (или абсцисс) точек, построенных по опытным данным, от графика аналитически заданной функции.

Наиболее распространенными на практике аналитическими функциями для описания опытных данных являются линейная и квадратичная функции. Рассмотрим каждую из них.

7.4.1 Линейная аппроксимация

Пусть по характеру расположения заданных точек (x_i, y_i) ($i = \overline{1, k}$) для их аппроксимации исследователем выбрана линейная функция (прямая) $y = ax + b$. Конечно, точки с координатами (x_i, y_i) в общем не лежат на прямой и не будут обращать в тождество ее уравнение.

При подстановке абсцисс x_i в уравнение прямой получим ординаты $\tilde{y}_i = ax_i + b$, не совпадающие в общем с y_i . Найдем сумму квадратов разностей отклонений значений функции $\tilde{y}_i$ от значений ординат y_i заданных точек:

$$S = \sum_{i=1}^k (\tilde{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^k (ax_i + b - y_i)^2. \quad (7.5)$$

Отметим, что x_i и y_i в записи 7.5 зафиксированы (постоянны) для точек, а коэффициенты a и b варьируются (считаются изменяемыми). Именно от различных вариантов выбора этих коэффициентов зависит положение прямой на плоскости, и они определяют минимальность суммарного отклонения прямой от экспериментальных точек.

Для определения минимума функции двух переменных $S(a, b)$ найдем и приравняем нулю производные от S по этим переменным:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^k 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^k 2(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Коэффициенты a и b внутри сумм не меняются и их можно вынести за знак сумм. Учитывая, кроме того, равенство $\sum_{i=1}^k 1 = k$, получим систему уравнений для определения коэффициентов a и b :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^k x_i^2 + b \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^k x_i + bk = \sum_{i=1}^k y_i. \end{cases} \quad (7.6)$$

Пример 1. Аппроксимировать зависимость между переменными y_i и x_i , приведенными в табл. 7.1, линейной функцией $y = ax + b$.

Решение.

Полагая в формуле (7.6) $y_i = \bar{y}_{xi}$ (значения ординат берутся из последнего столбца табл. 7.1), для вычисления a и b заполним левую табл. 7.4.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	2	27,2	4	54,4
2	3	33,1	9	99,3
3	4	39,9	16	159,6
4	5	44,2	25	221,0
Σ	14	144,4	54	534,3

j	y_j	x_j	y_j^2	$x_j y_j$
1	25	2,10	625	52,5
2	30	2,87	900	86,1
3	35	3,48	1225	121,8
4	40	4,34	1600	179,6
5	45	4,47	2025	201,1
6	50	4,88	2500	244,0
Σ	225	22,14	8875	879,1

Табл. 7.4: Линейная регрессия Y на X (слева) и X на Y (справа)

Используя данные таблицы, запишем систему уравнений (7.6)

$$\begin{cases} 54a + 14b = 534,3 \\ 14a + 4b = 144,4 \end{cases}$$

Решая систему, найдем $a = 5,72$; $b = 16,08$. Тогда уравнение искомой прямой

$$y = 5,72x + 16,08.$$

На рис. 7.1 этой прямой соответствует линия с большим углом наклона к оси абсцисс.

В терминах предыдущего раздела полученная прямая является прямой регрессии Y на X . Для получения прямой регрессии X на Y необходимо минимизировать отклонения опытных данных от выбранной прямой $x = cy + d$ по абсциссам соответствующих точек. Такая минимизация, как нетрудно

проверить, приведет к системе уравнений

$$\begin{cases} c \sum_{j=1}^m y_j^2 + d \sum_{j=1}^m y_j = \sum_{j=1}^m x_j y_j, \\ c \sum_{j=1}^m y_j + dm = \sum_{j=1}^m x_j. \end{cases} \quad (7.7)$$

Принимая за x_j величины $\bar{x}_j$ последней строки табл. 7.1, заполним правую табл. 7.4. После определения элементов последней строки таблицы и подстановки их в систему уравнений (7.7) получим

$$\begin{cases} 8875c + 225d = 879,1 \\ 225c + 6d = 22,14. \end{cases}$$

Решениями этой системы уравнений являются значения $c = 0,111$; и $d = -0,472$, которые позволяют записать уравнения прямой регрессии X на Y в виде

$$x = 0,111y - 0,472.$$

Полученная прямая изображена на рис. 7.1. Эта прямая имеет меньший по сравнению с первой прямой угол наклона к оси абсцисс.

7.4.2 Квадратичная аппроксимация

Далеко не всегда уравнения линейной аппроксимации достаточно корректно описывают экспериментальные данные. Рассмотрим еще один широко используемый на практике метод наименьших квадратов — метод квадратичной аппроксимации.

Пусть, как и в предыдущем разделе, экспериментальные данные зависимости между величинами $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_k\}$ представлены в виде таблицы и нанесены на график декартовой ортогональной системы координат xy .

Пусть по виду расположения точек на графике можно предположить, что проводимая в окрестности расположения точек кривая может представлять собой параболу $y = ax^2 + bx + c$, имеющую три варьируемые переменные: a , b и c . Следуя схеме метода наименьших квадратов, изложенного в предыдущем разделе, составим разности ординат точек параболы $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$ и опытных данных y_i ($i = 1, k$).

Составим сумму квадратов полученных отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^k (\tilde{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^k (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Для определения минимального значения этой суммы приравняем нулю производные от S по варьируемым переменным a, b и c :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^k 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^k 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial c} = \sum_{i=1}^k 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем три уравнения с тремя неизвестными — коэффициентами a, b и c :

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^k x_i^4 + b \sum_{i=1}^k x_i^3 + c \sum_{i=1}^k x_i^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^k x_i^3 + b \sum_{i=1}^k x_i^2 + c \sum_{i=1}^k x_i = \sum_{i=1}^k x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^k x_i^2 + b \sum_{i=1}^k x_i + ck = \sum_{i=1}^k y_i. \end{cases} \quad (7.8)$$

Сравнение последней системы уравнений с (7.6) говорит о существенном усложнении задачи и увеличении количества вычислений для определения параметров кривой второго порядка по сравнению с линейной аппроксимацией. Нетрудно убедиться в том, что аппроксимация опытных данных функциями, содержащими полиномы порядка, большего двух, а тем более аппроксимация произвольными функциями может привести к неразрешимым трудностям. Этим объясняется тот факт, что на практике редко встречаются основанные на использовании метода наименьших квадратов аппроксимации, отличные от линейной и параболической.

При невозможности описания опытных данных простейшими функциями можно использовать прием разбиения всего интервала аппроксимации на подынтервалы, на которых поведение функции можно считать подчиняющимся, например, линейной аппроксимации.

Пример.

Данные некоторого опыта представлены в виде табл. 7.5 пар значений $(x_i; y_i)$ переменных X и Y . Требуется подобрать аппроксимирующую функцию представленной зависимости.

x_i	0,5	1	1,5	2	2,5
y_i	0,8	1,9	4,9	8,8	13,9

Табл. 7.5. Исходные данные

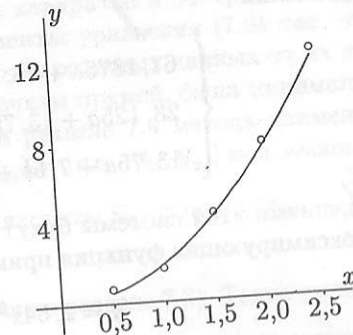


Рис. 7.2. Квадратичная аппроксимация

Решение.

Нанесем исходные данные на координатную плоскость декартовой ортогональной системы координат xy (точки $\circ$ на рис. 7.2).

Данные для определения коэффициентов системы уравнений (7.8) и сами коэффициенты занесем в табл. 7.6.

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,8	0,4	0,2
2	1	1	1	1	1,9	1,9	1,9
3	1,5	2,25	3,375	5,0625	4,9	7,35	11,025
4	2	4	8	16	8,8	17,6	35,2
5	2,5	6,25	15,625	39,0625	13,9	34,75	86,875
$\sum_{i=1}^5$	7,5	13,75	28,125	61,1875	30,3	62,0	135,2

Табл. 7.6: Подсчет коэффициентов уравнений (7.7)

Подставляя значения последней строки табл. 7.6 вместо соответствующих коэффициентов уравнений (7.8), получим систему трех алгебраических

ких уравнений

$$\begin{cases} 61,1875a + 28,125b + 13,75c = 135,2 \\ 28,125a + 13,75b + 5,7c = 62 \\ 13,75a + 7,5b + 5c = 30,3. \end{cases}$$

Решениями этой системы будут значения: $a = 2,54$; $b = -1$; $c = 0,575$, а аппроксимирующая функция примет вид

$$y = 2,54x^2 - x + 0,575.$$

График функции показан на рис. 7.2.

Метод наименьших квадратов, описанный в двух последних разделах, может быть применен к аналитическому описанию экспериментальных данных независимо от того, какой характер (случайный или детерминированный) они носят.

Рассмотрим особенности применения этого метода к описанию корреляционных зависимостей.

7.5 Уравнения линейной регрессии

Пусть имеются данные некоторых испытаний двух зависимых случайных величин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m\}$ (табл. 7.2) и пусть в результате обработки результатов этих испытаний получены условные средние арифметические значения $\bar{Y} = \{\bar{y}_{x1}, \bar{y}_{x2}, \dots, \bar{y}_{xi}, \dots, \bar{y}_{xk}\}$ случайной величины Y . Величины $\bar{y}_{xi}$ представлены в последнем столбце (табл. 7.2).

Пусть по данным указанной таблицы определены k точек $A_1(x_1, \bar{y}_{x1})$, $A_2(x_2, \bar{y}_{x2})$, ..., $A_i(x_i, \bar{y}_{xi})$, ..., $A_k(x_k, \bar{y}_{xk})$. По расположению этих точек предполагаем, что между случайными величинами существует линейная зависимость (рис. 7.3), которую опишем уравнением линейной регрессии (прямой регрессии):

$$\bar{y} = ax + b. \quad (7.9)$$

Коэффициенты a и b найдем, используя метод наименьших квадратов. Для этого определим разности ординат точек $A_i(x_i, \bar{y}_{xi})$ и соответствующих им точек A'_i прямой (7.9), имеющих абсциссы, равные x_i :

$$y_i = ax_i + b.$$

7.5. УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Используя идеи методов наименьших квадратов и построения прямой регрессии Y на X , определим коэффициенты уравнения (7.9) так, чтобы сумма квадратов отклонений ординат точек опытных данных от их теоретических значений, соответствующих точкам прямой, была минимальной. При этом, в отличие от изложенного в разделе 7.4 метода наименьших квадратов, квадраты отклонений $(y_i - \bar{y}_{xi}) = (ax_i + b - \bar{y}_{xi})$ под знаком суммы будем умножать на относительные частоты $\bar{n}_{xi} = n_{xi}/n$ ($n_{xi} = \sum_{j=1}^m n_{ij}$;

$\sum_{i=1}^k n_{xi} = n$, $m \cdot k = n$, о чем было сказано в разделе 7.3). Такое умножение не изменит сути отыскания минимума суммы, так как сумма относительных частот равна единице.

Итак, указанную сумму представим в виде

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (ax_i + b - \bar{y}_{xi})^2 n_{xi}. \quad (7.10)$$

Найдем и приравняем нулю производные от S по a и b :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 2(ax_i + b - \bar{y}_{xi})x_i n_{xi} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k 2(ax_i + b - \bar{y}_{xi})n_{xi} = 0. \end{cases}$$

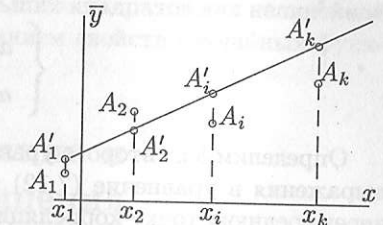


Рис. 7.3: Линейная регрессия Y на X

Сокращая оба уравнения на 2 и группируя слагаемые, придем к системе уравнений для определения a и b :

$$\begin{cases} a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_{xi} + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_{xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \bar{y}_{xi} n_{xi}, \\ a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_{xi} + b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \bar{y}_{xi} n_{xi}. \end{cases} \quad (7.11)$$

Коэффициент при b в последнем уравнении равен единице в силу справедливости отмеченного ранее равенства $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_{xi} = 1$. Проанализируем другие коэффициенты уравнений (7.11).

Коэффициент при a в первом уравнении представляет собой выборочное среднее квадратов случайной величины X :

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_{xi}.$$

Аналогично запишем выражения для выборочных средних. Другие величины, входящие в уравнения (7.11), определяют рассмотренные в предыдущей главе выборочные средние:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_{xi}, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \bar{y}_{xi} n_{xi}, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \bar{y}_{xi} n_{xi}.$$

С учетом последних соотношений перепишем систему уравнений (7.11):

$$\begin{cases} a\overline{x^2} + b\bar{x} = \overline{xy}, \\ a\bar{x} + b = \bar{y}. \end{cases} \quad (7.12)$$

Определим b из второго уравнения: $b = \bar{y} - a\bar{x}$. После подстановки этого выражения в уравнение (7.12) приходим к уравнению прямой, проходящей через среднюю точку корреляционного графика $\bar{x}, \bar{y}$:

$$y - \bar{y} = a(x - \bar{x}).$$

Коэффициент $a = \rho_{Y/X}$, называемый коэффициентом регрессии Y на X , находится при определенном выше выражении для b из первого уравнения (7.12):

$$\rho_{Y/X} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}.$$

Числитель дроби $\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ называется выборочной ковариацией. Знаменатель представляет собой выборочную дисперсию $\overline{\sigma_x^2}$ случайной величины X . Действительно ($\bar{n}_{xi} = n_{xi}/n$),

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_x^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \bar{n}_{xi} = \sum_{i=1}^k x_i^2 \bar{n}_{xi} - 2\bar{x} \sum_{i=1}^k x_i \bar{n}_{xi} + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^k \bar{n}_{xi} = \\ &= \overline{x^2} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\rho_{Y/X} = \frac{\overline{\sigma_{xy}}}{\overline{\sigma_x^2}}. \quad (7.13)$$

Итак, уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид

$$y - \bar{y} = \rho_{Y/X} (x - \bar{x}). \quad (7.14)$$

Аналогичное уравнение линейной регрессии X на Y можно получить, строя зависимость между значениями $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m\}$ первой строки табл. 7.2 и значениями $\bar{X} = \{\bar{x}_{y1}, \bar{x}_{y2}, \dots, \bar{x}_{yj}, \dots, \bar{x}_{ym}\}$ последней строки этой таблицы:

$$x - \bar{x} = \rho_{X/Y} (y - \bar{y}). \quad (7.15)$$

Здесь

$$\rho_{X/Y} = \frac{\overline{\sigma_{xy}}}{\overline{\sigma_y^2}}. \quad (7.16)$$

коэффициент регрессии X на Y .

Построение нелинейных корреляционных зависимостей осуществляется по аналогии с применением метода наименьших квадратов для нелинейной аппроксимации (раздел 7.4.2) с использованием свойств случайных функций.

7.6 Коэффициент корреляции и корреляционные отношения

Выбором корреляционной зависимости не заканчивается задача описания связи двух случайных величин. Необходимо еще оценить корректность этой связи, то есть провести оценку рассеяния относительно аппроксимирующей кривой (в частном случае прямой) регрессии одной из переменных для различных значений другой. Рассмотрим новые характеристики случайных явлений, зависящих от двух переменных.

Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется число r_{XY} , равное среднему геометрическому их коэффициентов регрессии и имеющее их знак. То есть

$$r_{XY} = \pm \sqrt{\rho_{X/Y} \rho_{Y/X}}. \quad (7.17)$$

Поясим, что знаки у коэффициентов регрессии всегда одинаковы и зависят от знака числителя в формуле (7.13) (знаменатель всегда положительный).

С учетом упомянутой формулы и аналогичной ей формулы (7.16) для $\rho_{X/Y}$ (числители обоих выражений равны) получим:

$$r_{XY} = \frac{\overline{\sigma_{xy}}}{\overline{\sigma_x} \overline{\sigma_y}}. \quad (7.18)$$

Легко убедиться в справедливости формул, выражающих связь между коэффициентами регрессии и коэффициентом корреляции:

$$\rho_{X/Y} = r_{XY} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}, \quad \rho_{Y/X} = r_{YX} \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}. \quad (7.19)$$

В разделе 6.6 введено понятие межгрупповой дисперсии (о нем говорилось и в гл. 5 этой части учебника).

Межгрупповая дисперсия δ_x^2 случайной величины X является дисперсией распределения групповых средних $\bar{x}_{yj}$ с относительными частотами их повторений n_{yj} . Эта зависимость приведена в двух последних строках табл. 7.2.

Аналогичная межгрупповая дисперсия δ_y^2 может быть определена по зависимости групповых средних $\bar{y}_{xi}$ случайной величины Y от относительной частоты их повторений n_{xi} (по данным двух последних столбцов указанной таблицы).

Вычислить упомянутые дисперсии можно по формулам

$$\delta_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m (\bar{x}_{yj} - \bar{x})^2 n_{yj}, \quad \delta_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (\bar{y}_{xi} - \bar{y})^2 n_{xi}. \quad (7.20)$$

Корреляционным отношением Y на X (X на Y) называется отношение межгруппового среднего квадратического отклонения случайной величины Y (X) к ее среднему квадратическому отклонению:

$$\eta_{YX} = \frac{\delta_Y}{\sigma_Y}, \quad \left(\eta_{XY} = \frac{\delta_X}{\sigma_X} \right). \quad (7.21)$$

В теории вероятностей доказываются следующие свойства коэффициента корреляции.

1. Абсолютная величина коэффициента корреляции не превосходит единицы: $|r_{XY}| \leq 1$.
2. Выполнение условия $r_{XY} = \pm 1$ является необходимым и достаточным для того, чтобы Y и X были связаны линейной корреляционной зависимостью.
3. Если $r_{XY} = 0$, то случайные величины X и Y называются некоррелированными.

Свойства 2 и 3 характеризуют смысл крайних значений коэффициента корреляции: если он равен нулю, то линейная корреляционная связь отсутствует; если же он равен ± 1 , то между X и Y существует линейная корреляционная зависимость.

Приведем теперь

Свойства корреляционных отношений.

1. Корреляционные отношения неотрицательны и не превосходят единицы: $0 \leq \eta_{YX} \leq 1$, $0 \leq \eta_{XY} \leq 1$.
2. Равенство нулю корреляционного отношения η_{YX} является необходимым и достаточным условием того, что корреляционная связь Y на X отсутствует, а равенство нулю корреляционного отношения η_{XY} - необходимым и достаточным условием того, что отсутствует корреляционная связь X на Y .
3. Равенство единице корреляционного отношения η_{YX} является необходимым и достаточным условием того, что между Y и X существует однозначная корреляционная зависимость.
4. Для одной и той же корреляционной таблицы, характеризующей связь случайных величин X и Y , оба корреляционных отношения не меньше абсолютной величины коэффициента корреляции.
5. Выполнение равенства $\eta_{YX} = |r_{YX}| = |r_{XY}| = \eta_{XY}$ является необходимым и достаточным условием того, что корреляционная зависимость между случайными величинами Y и X точно линейная.

7.7 Множественная корреляция

Случайная величина может зависеть статистически не от одной, как это предполагалось в предыдущих разделах главы, а от нескольких случайных величин. Например, урожайность зависит от количества внесенных удобрений, количества выпавших осадков; масса человека - от его роста, объема груди, количества и качества потребляемой пищи и т.п.

Рассмотрим три величины, представленные своими значениями, определенными в каждом из $i = \overline{1, k}$ независимых испытаний. Средние значения одной из этих величин, $U = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_i, \dots, \bar{u}_k)$, статистически зависят от двух независимых переменных $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k)$ и $Y = (y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_k)$, имеющих случайный характер. Пусть произведено $n = n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, n_k$ наблюдений (n_i - количество наблюдений i -того испытания).

Результаты испытаний представлены в виде табл. 7.7.

Простейшей корреляционной зависимостью U от X и Y является линейная множественная корреляция. Она определяется уравнением плоскости регрессии:

$$u = ax + by + c, \quad (7.22)$$

U	$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	...	$\bar{u}_i$	...	$\bar{u}_k$
X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
Y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_k
n	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k

Табл. 7.7: Таблица двумерной случайной величины

где a, b, c — некоторые постоянные (параметры).

Задача состоит в том, чтобы найти такие значения параметров a, b и c уравнения (7.22), которые с точки зрения метода наименьших квадратов наилучшим образом соответствуют опытным данным.

Подставляя в уравнение (7.22) значения x_i и y_i ($i = \overline{1, k}$) получим значения $\bar{u}_i$, в общем отличные от значений $\bar{u}_i$, приведенных в табл. 7.7.

Разность $\bar{u}_i - \bar{u}_i = ax_i + by_i + c - \bar{u}_i$ характеризует отклонение опытных данных от их значений, определенных по функциональной зависимости (7.22).

Как и в случае составления уравнений прямой регрессии одномерных случайных величин, составляется сумма квадратов отклонений с учетом того, сколько раз наблюдалась каждая тройка значений $(x_i; y_i; u_i)$:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (ax_i + by_i + c - \bar{u}_i)^2 n_i.$$

Приравнивая нулю производные от S по параметрам a, b и c , можно прийти к системе трех уравнений, позволяющих определить эти параметры.

Если из уравнений исключить постоянную c (см. аналогичные преобразования для одномерной задачи в разделе 7.5), то можно прийти к уравнению линейной регрессии (уравнению плоскости, проходящей через точку с координатами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}$) для двумерной задачи:

$$u - \bar{u} = a(x - \bar{x}) + b(y - \bar{y}).$$

Здесь

$$a = \frac{r_{xu} - r_{xy}r_{yu}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_u}{\sigma_x}; \quad b = \frac{r_{yu} - r_{xy}r_{xu}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_u}{\sigma_y};$$

r_{xy}, r_{xu}, r_{yu} — коэффициенты корреляции между парами случайных величин X и Y , X и U , Y и U соответственно:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}; \quad r_{xu} = \frac{\overline{xu} - \bar{x} \cdot \bar{u}}{\sigma_x \sigma_u}; \quad r_{yu} = \frac{\overline{yu} - \bar{y} \cdot \bar{u}}{\sigma_y \sigma_u};$$

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}$ — выборочные средние случайных величин X, Y, U ; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_u$ — выборочные средние квадратические отклонения.

Установление тесноты линейной корреляционной связи между переменными можно осуществить, определив *совокупный коэффициент корреляции*:

$$R = \sqrt{\frac{r_{xu}^2 + r_{yu}^2 - 2r_{xu}r_{yu}r_{xy}}{1 - r_{xy}^2}}. \quad (7.23)$$

Совокупный коэффициент корреляции определяет меру тесноты линейной корреляционной связи между случайными величинами X, Y и U . Приведем без доказательства его основные свойства.

1. R изменяется от 0 до 1.
2. Если $R = 0$, то случайная величина U не связана со случайными величинами X и Y корреляционной зависимостью.
3. Если $R = 1$, то U связана с X и Y линейной корреляционной зависимостью.
4. Чем ближе R к нулю, тем менее тесна связь U с X и Y ; чем ближе к единице, тем эта связь теснее.

Наряду с исследованием связи случайной величины U одновременно с X и Y нередко требуется определить тесноту связи U с одной случайной величиной или другой в отдельности. Оценкой такой связи могут служить частные коэффициенты корреляции

$$r_{xu(y)} = \frac{r_{xu} - r_{xy}r_{yu}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yu}^2)}}, \quad r_{yu(x)} = \frac{r_{yu} - r_{xy}r_{xu}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{xu}^2)}}. \quad (7.24)$$

Первый из приведенных коэффициентов вычисляется в предположении, что случайная величина Y постоянна, второй — X .

Свойства частных коэффициентов корреляции аналогичны свойствам коэффициента корреляции между двумя случайными величинами (раздел 7.5). Каждый из них изменяется в пределах от -1 до 1 и обладает перенесенными в разделе 7.6 свойствами.

Обобщение корреляционных зависимостей на случай произвольного числа случайных величин можно найти в литературе по математической статистике.

7.8 Построение корреляционных соотношений и уравнений регрессии (пример)

Дано. Результаты испытания двух случайных величин $X = \{x_i\}$, ($i = 1, 10$) и $Y = \{y_j\}$, ($j = 1, 6$) представлены в виде корреляционной таблицы 7.8, в которой индекс i обозначает номер столбца, j — номер строки.

$j \cdot \cdot i$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_j \cdot \cdot x_i$		2,89	3,13	3,95	3,97	5,32	6,19	6,76	6,81	7,36	8,16
1	1,88	1	3								
2	2,62		4	6							
3	3,73				8	5					
4	3,94					3	8	6			
5	2,29						2	3	5		
6	4,61									4	2

Табл. 7.8: Корреляционная таблица

Требуется.

1. Считая корреляционную зависимость линейной, составить уравнения регрессии Y на X и X на Y .
2. Определить коэффициент корреляции и корреляционные отношения.
3. Проанализировать результаты.

Решение.

П.1. Определим величины, необходимые для записи прямой регрессии Y на X .

Для удобства и наглядности определяемые величины представим в виде табл. 7.9. В первый и второй столбцы этой таблицы переписаны первая и вторая строки табл. 7.8.

В третий столбец таблицы записаны суммарные частоты $n_{xi} = \sum_{j=1}^6 n_{ji}$ с которыми повторяются величины y_j для рассматриваемой величины x_i .

7.8. ПОСТРОЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

(сумма частот, стоящих в столбцах табл. 7.8). Например, $n_{x1} = 1$; $n_{x2} = 3 + 4 = 7$;

Четвертый столбец состоит из относительных частот $\bar{n}_{xi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^6 n_{ji}$,

$$\text{где } n = \sum_{i=1}^{10} n_{xi} = \sum_{j=1}^6 n_{yj} = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^6 n_{ji} = 60.$$

Средние групповые значения $\bar{y}_{xi} = \frac{1}{n_{xi}} \sum_{j=1}^6 y_j n_{ji}$ внесены в пятый столбец табл. 7.9.

Например, при $i = 2$ (второй столбец табл. 7.8):

$$\bar{y}_{x2} = \frac{1}{7} (y_1 n_{12} + y_2 n_{22} + \dots + y_6 n_{62}) = \frac{1}{7} (1,88 \cdot 3 + 2,62 \cdot 4 + \dots + 0) = 2,30.$$

i	x_i	n_{xi}	$\bar{n}_{xi}$	$\bar{y}_{xi}$	$\bar{y}_{xi} \bar{n}_{xi}$	$x_i \bar{n}_{xi}$	$x_i \bar{y}_{xi} \bar{n}_{xi}$	$x_i^2 \bar{n}_{xi}$	$(\bar{y}_{xi} - \bar{y})^2 \bar{n}_{xi}$
1	2,89	1	0,02	1,88	0,04	0,06	0,11	0,17	0,06
2	3,13	7	0,12	2,30	0,28	0,38	0,87	1,19	0,22
3	3,95	6	0,10	2,62	0,26	0,40	1,05	1,58	0,11
4	3,97	8	0,13	3,73	0,48	0,52	1,94	2,06	0,00
5	5,32	8	0,13	3,82	0,50	0,69	2,68	3,67	0,00
6	6,19	10	0,17	4,01	0,68	1,05	4,21	6,50	0,02
7	6,76	9	0,15	4,07	0,61	1,01	4,11	6,83	0,03
8	6,81	5	0,08	4,29	0,34	0,54	2,32	3,68	0,03
9	7,36	4	0,07	4,61	0,32	0,52	2,40	3,83	0,06
10	8,16	2	0,03	4,61	0,14	0,27	1,24	2,47	0,03
$\sum_{i=1}^{10}$		60	1		3,65 $= \bar{y}$	5,43 $= \bar{x}$	20,9 $= \bar{x} \bar{y}$	31,98 $= \bar{x}^2$	0,56 $= \delta_y^2$

Табл. 7.9: Таблица значений, необходимых для составления уравнения регрессии Y на X

Обозначения остальных вычисляемых величин приведены в первой стро-

ке табл. 7.9. В последней строке таблицы приведены суммарные значения представленных в ее столбцах величин.

По данным таблицы вычисляем коэффициент регрессии Y на X

$$\rho_{Y/X} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{20,9 - 5,43 \cdot 3,65}{31,98 - 5,43^2} = \frac{1,08}{2,50} = 0,43. \quad (7.25)$$

Подставляя полученное значение $\rho_{Y/X}$ и взятые из табл. 7.9 значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в уравнение прямой регрессии (7.14)

$$y - \bar{y} = \rho_{Y/X}(x - \bar{x}),$$

получим

$$y - 3,65 = 0,43(x - 5,43).$$

После преобразования приходим к уравнению прямой с угловым коэффициентом

$$y = 0,43x + 1,32.$$

На рис. 7.4 показана эта прямая, помеченная знаком Y/X . Значками * отмечены точки с координатами $(x_i; \bar{y}_{xi})$, расположение которых аппроксимирует описанная прямая.

Получим уравнение прямой регрессии X на Y . Для этого по аналогии с предыдущей таблицей представим в виде столбцов первые два столбца табл. 7.8. Значения следующих столбцов приведены в первой строке табл. 7.9. Они вычисляются аналогично подобным им значениям табл. 7.10.

Отметим, что приведенные в таблице значения $\bar{x}$, $\bar{y}$, и $\overline{xy}$ совпадают с соответствующими значениями табл. 7.9, хотя они подсчитаны по противоположным переменным (групповым вместо единичных и наоборот). Совпадение следовало ожидать, так как средние арифметические значения совокупности величин равны средним арифметическим их групповых значений (см. раздел 5.6).

По данным таблицы вычисляем коэффициент регрессии X на Y :

$$\rho_{X/Y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \frac{20,9 - 5,43 \cdot 3,65}{13,95 - 3,65^2} = \frac{1,08}{0,58} = 1,86. \quad (7.26)$$

Подставляя полученное значение $\rho_{X/Y}$ и взятые из табл. 7.9 или табл. 7.10 значения $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в уравнение прямой регрессии (7.15)

$$x - \bar{x} = \rho_{X/Y}(y - \bar{y}),$$

получим

$$x - 5,43 = 1,86(y - 3,65).$$

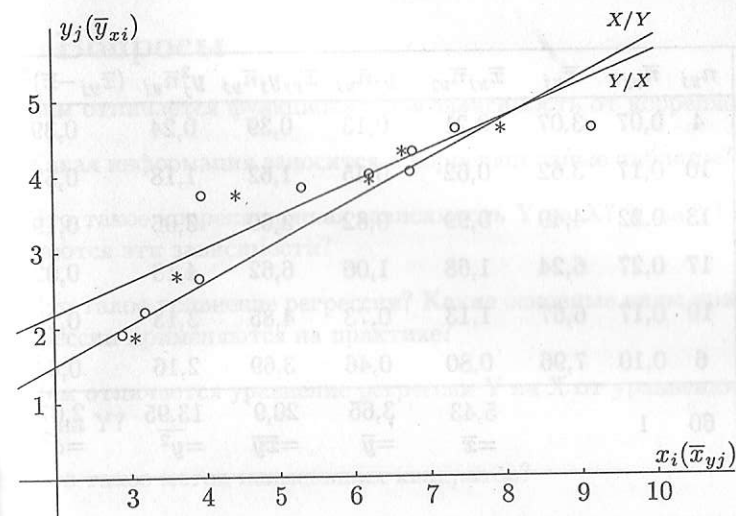


Рис. 7.4: Прямые регрессии примера

Выразив из этого уравнения y через x , приходим к уравнению прямой с угловым коэффициентом

$$y = 0,54x + 0,43.$$

Прямая, соответствующая этому уравнению, помечена на рис. 7.4 знаком X/Y . Значками * отмечены точки с координатами $(\bar{x}_{yj}, y_j)$, расположение которых аппроксимирует описанная прямая.

П.3. Определяем коэффициент корреляции случайных величин X и Y (7.17):

$$r_{X/Y} = \pm \sqrt{\rho_{X/Y} \rho_{Y/X}} = + \sqrt{1,86 \cdot 0,43} = 0,89.$$

Находим корреляционные отношения.

Предварительно, имея в виду, что знаменатели выражений (7.21) представляют собой дисперсии, найдем средние квадратические отклонения случайных величин X и Y :

$$\sigma_X = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \sqrt{31,98 - 5,43^2} = \sqrt{2,5} = 1,58;$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2} = \sqrt{13,95 - 3,65^2} = \sqrt{0,63} = 0,79.$$

j	y_j	n_{yj}	$\bar{n}_{yj}$	$\bar{x}_{yj}$	$\bar{x}_{yj}\bar{n}_{yj}$	$y_j\bar{n}_{yj}$	$\bar{x}_{yj}y_j\bar{n}_{yj}$	$y_j^2\bar{n}_{yj}$	$(\bar{x}_{yj}-\bar{x})^2\bar{n}_{yj}$
1	1,88	4	0,07	3,07	0,21	0,13	0,39	0,24	0,39
2	2,62	10	0,17	3,62	0,62	0,45	1,62	1,18	0,57
3	3,73	13	0,22	4,49	0,99	0,82	3,69	3,06	0,19
4	3,94	17	0,27	6,24	1,68	1,06	6,62	4,18	0,02
5	4,29	10	0,17	6,67	1,13	0,73	4,85	3,13	0,26
6	4,61	6	0,10	7,96	0,80	0,46	3,69	2,16	0,64
$\sum_{j=1}^6$		60	1		5,43 $=\bar{x}$	3,65 $=\bar{y}$	20,9 $=\bar{x}\bar{y}$	13,95 $=\bar{y}^2$	2,07 $=\delta_x^2$

Табл. 7.10: Таблица значений, необходимых для составления уравнения регрессии X на Y

Межгрупповые дисперсии случайных величин X и Y приведены в нижней строке последних столбцов таблиц 7.9 и 7.10. Имея эти данные находим

$$\delta_x = \sqrt{\delta_x^2} = \sqrt{2,07} = 1,44; \quad \delta_y = \sqrt{\delta_y^2} = \sqrt{0,56} = 0,75.$$

По формулам (7.21) находим корреляционные отношения:

$$\eta_{xy} = \frac{\delta_x}{\sigma_x} = \frac{1,44}{1,58} = 0,91; \quad \eta_{yx} = \frac{\delta_y}{\sigma_y} = \frac{0,75}{0,79} = 0,95.$$

Анализ полученных коэффициентов корреляции и корреляционных отношений позволяет выдвинуть следующие гипотезы:

3.1. Существует достаточно тесная корреляционная связь между случайными величинами X и Y , так как корреляционные отношения близки к единицам. Особенно близка эта связь для корреляции Y на X ($\eta_{yx} = 0,95$). Близость связи можно было заметить по таблицам. Из них видно, что отклонения $\bar{y}_{xi}$ от среднего арифметического значения этой величины незначительны.

3.2. Неравенства $\eta_{xy} \neq r_{xy}$ и $\eta_{yx} \neq r_{yx}$ говорят о том, что предположение о линейности корреляционных отношений в общем-то не вполне корректно.

7.9 Вопросы

1. Чем отличается функциональная зависимость от корреляционной?
2. Какая информация заносится в корреляционные таблицы?
3. Что такое корреляционная зависимость Y на X ? X на Y ? Чем отличаются эти зависимости?
4. Что такое уравнение регрессии? Какие основные виды уравнений регрессии применяются на практике?
5. Чем отличается уравнение регрессии Y на X от уравнения регрессии X на Y ?
6. Что такое метод наименьших квадратов?
7. Что положено в основу определения коэффициентов аппроксимирующих функций в методе наименьших квадратов?
8. Воспроизведите запись условия минимума квадратов отклонений точек графика от прямой.
9. Воспроизведите систему уравнений для определения коэффициентов, определяющих расположение аппроксимирующих прямых в методе наименьших квадратов.
10. В чем смысл квадратичной аппроксимации в методе наименьших квадратов?
11. Как формируется система уравнений для определения коэффициентов уравнения квадратичной аппроксимации?
12. Чем объяснить тот факт, что в методе наименьших квадратов наибольшее распространение получила линейная аппроксимация?
13. Каков смысл коэффициента регрессии Y на X ? X на Y ?
14. Запишите линейное уравнение регрессии как уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом. Поясните смысл координат точки и углового коэффициента.
15. В чем сходство и в чем различие между прямыми регрессии Y на X и X на Y ?

16. Что такое коэффициент корреляции? Как он выражается через коэффициенты регрессии?
17. Как определяется знак коэффициента корреляции?
18. Что такое корреляционные отношения?
19. Перечислите основные свойства коэффициента корреляции? Корреляционного отношения?
20. В каких пределах могут изменяться коэффициенты корреляции? Корреляционные отношения?
21. О чем говорит близость к нулю коэффициента корреляции? Корреляционного отношения?
22. О чем говорит близость к единице коэффициента корреляции? Корреляционного отношения?
23. Что такое множественная корреляция?
24. Из каких условий определяются коэффициенты линейной регрессии для двухмерных случайных величин?
25. Что такое совокупный коэффициент корреляции и как он изменяется?
26. Что определяют граничные значения совокупного коэффициента корреляции?

7.10 Задание на расчетную работу 4, часть 2

Воспользовавшись таблицей статистических данных, построенной в части 1 расчетной работы 4, и полагая, что случайная величина $X = \{x_i\}$ ($i = \overline{1, 10}$) представлена упорядоченными в порядке возрастания первыми десяти элементами таблицы, а случайная величина $Y = \{y_j\}$ ($j = \overline{1, 6}$) представлена упорядоченными в порядке возрастания элементами третьей строки той же таблицы, построить корреляционную таблицу, используя нижеследующее распределение частот.

$y_j \ x_i$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
y_1	1	2								
y_2		1	4							
y_3				5	4					
y_4					3	6	4			
y_5						2	3	4		
y_6									3	2

Табл. 7.11: Корреляционная таблица

Требуется.

1. Считая корреляционную зависимость линейной, составить уравнения регрессии Y на X и X на Y .
2. Определить коэффициент корреляции и корреляционные отношения.
3. Построить прямые регрессии на поле статистических данных.
4. Проанализировать результаты.

Глава 8

Определители. Матрицы

8.1 Матрицы. Определение. Основные виды матриц

Матрицей называется система чисел (объектов, явлений, ...), расположенных в виде таблицы:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}). \quad (8.1)$$

Здесь a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – элементы матрицы. Первый индекс (i) обозначает номер строки, на которой стоит элемент; второй (j) – номер столбца. Например, элемент a_{25} стоит на пересечении второй строки и пятого столбца матрицы.

Матрица, имеющая m строк и n столбцов (8.1), называется *прямоугольной* матрицей размера $m \times n$.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Говорят, что квадратная матрица имеет порядок n (число строк равно числу столбцов равно n).

Матрица, имеющая только одну строку, называется *матрицей-строкой* или *вектор-строкой*; только один столбец – *матрицей-столбцом* или *вектор-столбцом*.

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы, образуют *главную диагональ* матрицы.

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется *нижней (верхней) треугольной* матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единице, называется *единичной*.

$$I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Прямоугольная (в общем случае) матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

$$\Theta_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T , у которой по отношению к матрице A элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к A :

$$A_{n \times m}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Очевидно соотношение

$$(A^T)^T = A.$$

Матрица, для которой справедливо равенство $A = A^T$, называется *симметричной*. Симметричной может быть только квадратная матрица.

Матрица-столбец $A_{m \times 1}$ для экономии места может быть представлена матрицей-строкой $A_{1 \times m}^T = (a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1})$.

Матрица характеризуется значениями ее элементов и размерностью.

Еще одной характеристикой, относящейся только к квадратным матрицам, является ее определитель.

8.2 Определители

Определитель или *детерминант* — это число, характеризующее квадратную матрицу.

Определителем матрицы первого порядка $A_{1 \times 1} = (a_{11})$ является число, равное значению ее единственного элемента:

$$\Delta_A = \det A_{1 \times 1} = a_{11}. \quad (8.2)$$

Определителем матрицы второго порядка $A_{2 \times 2}$ называется число, равное произведению элементов ее главной диагонали за вычетом произведения элементов ее побочной диагонали:

$$\Delta_A = \det A_{2 \times 2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (8.3)$$

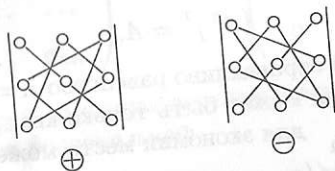
Определителем матрицы третьего порядка $A_{3 \times 3}$ называется число, определяемое выражением

$$\Delta_A = \det A_{3 \times 3} = |A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (8.4)$$

Существует простое правило составления записи (8.4), называемое *правилом треугольников*:



Примеры. Вычислить определители.

1. $\det(-3) = -3$; 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$;

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = -27$.

Для вычисления определителей порядка больше трех, существуют общие формулы. Эти формулы в пособии не приводятся, так как они практически не используются для вычисления определителей. Это объясняется во-первых, громоздкостью вычислений и, во-вторых, существуют другие более эффективные способы вычисления определителей порядка выше трех, о которых будет сказано после рассмотрения свойств определителей.

8.3 Свойства определителей

Сформулируем некоторые основные свойства определителей и продемонстрируем их справедливость на примерах определителей второго порядка. Читатель может проверить справедливость этих свойств на примере определителей третьего порядка. Справедливость свойств для определителей произвольного порядка доказывается методом математической индукции.

Пусть задан определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (8.5)$$

Сформулируем и убедимся в справедливости следующих свойств.

1. Определитель не изменится, если в нем строки и столбцы поменять местами:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta.$$

То есть определитель квадратной матрицы равен определителю транспонированной матрицы.

Свойство говорит о равнозначности строк и столбцов в определителе. Поэтому свойства определителей, касающиеся действий со строками, распространяются и на их столбцы. В дальнейшем это свойство будет подразумеваться.

2. Если в определителе поменять местами две произвольные (в общем случае определителя n -ного порядка) строки, то определитель сменит знак на противоположный:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\Delta.$$

3. Общий множитель всех элементов какой-либо строки можно вынести за знак определителя:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{vmatrix} = ca_{11}a_{22} - ca_{12}a_{21} = c\Delta.$$

4. Определитель, имеющий пропорциональные строки, равен нулю:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} ca_{12} & ca_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = ca_{12}a_{22} - ca_{22}a_{12} = 0.$$

Это свойство является следствием свойств 2 и 3. Свойство будет справедливо, в частности, при $c = 1$ (две строки одинаковы) и при $c = 0$.

5. Если элементы какой-либо строки определителя представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей следующим образом:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{12} + b_{12})a_{21} =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) = \Delta_{aa} + \Delta_{ba} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки прибавить элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель.

С использованием свойств 4 и 5 осуществим преобразование определителя (??), к элементам первой строки которого прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на c :

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ca_{21} & ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$

7. Определитель треугольной (в частности, диагональной) матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22}.$$

В частности, определитель единичной матрицы равен единице, нулевой квадратной матрицы — нулю.

8.4 Разложение определителя по элементам строк (столбцов)

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ n -го порядка называется произведение определителя $(n-1)$ -го порядка, получаемого из Δ путем вычеркивания i -той строки и j -того столбца (на пересечении которых стоит элемент a_{ij}), на $(-1)^{i+j}$.

Пример 1. Вычислить алгебраические дополнения элементов a_{22} и a_{32} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Теорема 1. Определитель равен сумме произведений элементов любой из его строк (столбцов) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}; \quad (8.6)$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}. \quad (8.7)$$

Соотношение (8.6) представляет собой разложение определителя n -го порядка по элементам его i -той строки; (8.7) — по элементам j -того столбца.

Убедимся в справедливости теоремы на примере определителя третьего порядка, разложив его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Это выражение с точностью до порядка слагаемых совпадает с формулой (8.4) для определителя третьего порядка.

Теорема 2. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой его строки (столбца) равна нулю.

Получаемое в результате такого разложения выражение равноценно определителю с двумя равными строками (столбцами). По свойству 4 (предыдущий раздел) такой определитель равен нулю.

Обобщая теоремы 1 и 2, можно записать соотношения:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ji} A_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k; \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \quad (8.8)$$

Величина δ_{ik} часто используется в математике и носит название "символ Кронекера".

Следствие. Если в определителе имеется строка только с одним ненулевым элементом, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

Утверждение следствия очевидно, так как в разложении такого определителя по элементам упомянутой строки все слагаемые разложения, кроме одного, обратятся в нуль, так как соответствующие алгебраические дополнения умножаются на нули.

Рассмотренные свойства определителей и сформулированные теоремы позволяют понизить порядок определителя до третьего и второго и затем по приведенным в разделе 8.2 формулам вычислить его.

Пример 2. Вычислить определитель Δ .

Решение: С правой стороны определителей напротив некоторых строк поставлены добавляемые к ним произведения чисел на номера (N) строк. Снизу — соответствующие произведения для столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

-3N1 -4N1

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -7 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5(-4)(-1)^{2+1} \det(-1) = -90.$$

В этом примере определитель четвертого порядка последовательными преобразованиями и разложениями по элементам строк приведен к определителю первого порядка, хотя преобразования можно было закончить после получения определителей третьего или второго порядков, правила вычисления которых приведены в разделе 8.2.

8.5 Линейные операции над матрицами

Матрицы A и B одной размерности считаются *равными*, если равны их соответствующие элементы:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij},$$

Суммой двух матриц A и B одной размерности $m \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$A + B = C \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Для суммы матриц справедливы свойства:

коммутативность:

$$A + B = B + A$$

ассоциативность:

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Справедливость указанных свойств для матриц следует из справедливости этих свойств для чисел — элементов матриц:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \quad a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется матрица B размера $m \times n$, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы A на λ :

$$B = \lambda A \iff b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Следует обратить внимание на принципиальное отличие произведения числа на матрицу от произведения числа на определитель. В первом случае все элементы матрицы умножаются на число; во втором — элементы лишь одной из строк (или одного из столбцов) (свойство 3 раздела 8.3). По отношению к рассмотренному произведению и сумме матриц A и B ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) справедливы свойства дистрибутивности:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

коммутативности и ассоциативности:

$$\lambda A = A \lambda;$$

$$(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A) = \lambda(A \mu).$$

8.6 Произведение матриц

Произведением матрицы A размера $m \times k$ на матрицу B размера $k \times n$ называется матрица C размера $m \times n$. Элементы c_{ij} , стоящие на пересечении i -той строки и j -того столбца матрицы C , равны сумме произведений элементов a_{is} i -той строки матрицы A на элементы b_{sj} j -того столбца матрицы B :

$$C = A \cdot B \iff c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}. \quad (8.9)$$

Из определения вытекает, что произведение возможно только в случае, если число столбцов первой матрицы, стоящей в произведении, равно числу строк второй матрицы. Число строк матрицы произведения равно числу строк первой из умножаемых матриц, а число столбцов — второй из них.

Пример 1. Найти произведение матриц:

8.6. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 0) \\ (0 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 0) \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}_{2 \times 1}.$$

Произведение матриц обладает перечисленными ниже свойствами.

1. Некоммутативность:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Справедливость свойства следует хотя бы из того, что в выражении (8.9) в общем случае $m \neq n$ и тогда при изменении мест умножаемых матриц они станут несовместимыми для произведения. Даже в случае, если $m = n$, коммутативность произведения, как правило, не имеет места. Продемонстрируем сказанное на примере.

Пример 2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-2) & (-2) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}_{1 \times 2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = ((-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1) = (5).$$

Сравнение двух последних результатов говорит о том, что произведения одинаковых, но расположенных в обратных порядках матриц не совпадают. Они отличаются даже размерами результирующих матриц.

Если произведение матриц не изменяется при их перестановке, то матрицы называются коммутирующими или перестановочными. В частности, как нетрудно проверить, единичная матрица является коммутирующей по отношению к любой квадратной матрице, имеющей одинаковый с единичной матрицей порядок:

$$I \cdot A = A \cdot I = A. \quad (8.10)$$

2. Ассоциативность:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

3. Дистрибутивность:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

4. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Свойство легко проверяется, в частности, на примере произведения квадратных матриц второго порядка.

Пример 3. Записать в координатной форме (в виде соотношений между элементами матриц) матричное уравнение $A \cdot X = B$, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}.$$

Используя свойства произведений матриц и определение равных матриц, данное в разделе ??, получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Таким образом, заданное в условии задачи матричное уравнение равносильно системе линейных алгебраических уравнений.

Произведение двух одинаковых квадратных матриц называется квадратом матрицы. Произведение квадрата матрицы на ту же матрицу справа или слева (такие матрицы всегда коммутирующие) приводят к кубу матрицы и т.д. Матрица степени n образуется из матрицы $(n-1)$ -й степени умножением ее справа или слева на ту же матрицу в первой степени. То есть

$$A^2 = A \cdot A; \quad A^3 = A^2 \cdot A; \quad \dots \quad A^n = A^{n-1} \cdot A.$$

8.7 Обратная матрица

Обратной матрицей по отношению к квадратной матрице A порядка n называется квадратная матрица A^{-1} порядка n , удовлетворяющая условию

8.7. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \quad (8.11)$$

где I — единичная матрица порядка n .

Неособенная матрица — это матрица, определитель которой не равен нулю.

Теорема. Для каждой неособенной матрицы существует и при том единственная обратная матрица.

Докажем справедливость теоремы.

Пусть задана квадратная неособенная матрица A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \Delta = |A| \neq 0. \quad (8.12)$$

Присоединенной (союзной) матрицей A^c называется транспонированная матрица алгебраических дополнений A_{ij} элементов матрицы a_{ij} матрицы A . То есть

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Следует обратить внимание на то, что у элементов матрицы A^c первый индекс определяет, как и положено для транспонированной матрицы, номер столбца, а второй — номер строки.

Рассмотрим и преобразуем произведение $A^c A$. При преобразовании воспользуемся равенством (8.8) и правилом произведения матрицы на посто-

янный множитель (раздел 8.5):

$$\begin{aligned}
 A^c A &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{kn} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \Delta I = I.
 \end{aligned}$$

Приравняем левую и правую части записанных равенств и поделим полученное равенство на определитель Δ :

$$\frac{1}{\Delta} A^c A = I.$$

Сравнивая записанное соотношение с (8.11), получим формулу для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^c. \quad (8.14)$$

Такую же формулу можно получить, рассматривая произведение AA^c . То есть матрицы A и A^c коммутативны, как коммутативны матрицы A и A^{-1} .

Последовательность вычисления обратной матрицы вытекает из описанной выше последовательности получения формулы (8.14).

Доказательство единственности обратной матрицы следует из совпадения результатов следующих двух путей преобразований.

Предположим, что для матрицы A существуют две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1} . Тогда с учетом свойства ассоциативности произведения матриц и определения единичной матрицы (8.11) запишем:

$$A_1^{-1} A A_2^{-1} = \begin{cases} A_1^{-1} (A A_2^{-1}) = A_1^{-1} I = A_1^{-1} \\ (A_1^{-1} A) A_2^{-1} = I A_2^{-1} = A_2^{-1} \end{cases} \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

Пример. Найти матрицу, обратную $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Используя формулу (8.4), найдем определитель матрицы A :

$$\Delta = (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-3) \cdot 0 = -2.$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A :

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2; & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2; \\
 A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -6; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \\
 A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3; \\
 A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \\
 A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4.
 \end{aligned}$$

Запишем выражение для обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В правильности определения обратной матрицы можно убедиться, найдя ее произведение справа или слева на исходную матрицу. Это произведение, как нетрудно убедиться, равно единичной матрице третьего порядка. Для обратной матрицы справедливы соотношения:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

8.8 Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} = b_n. \end{cases} \quad (8.15)$$

Ссылаясь на соотношения примера 3 раздела 8.6, запишем СЛАУ (8.15) в матричном виде

$$AX = B, \quad (8.16)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}. \quad (8.17)$$

Умножим обе части матричного уравнения (8.16) слева на матрицу A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Имея в виду соотношения $A^{-1}AX = IX = X$, получим решение матричного уравнения (8.16) в виде

$$X = A^{-1}B \quad (\neq BA^{-1}). \quad (8.18)$$

Описанный метод решения СЛАУ называется *матричным методом* или *методом обратной матрицы*. Использование его возможно только в случае, если матрица A неособенная.

Пример 1. Матричным методом найти решение СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A :

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{+N_2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Так как матрица A неособенная (ее определитель не равен нулю), обратная по отношению к ней матрица существует.

Найдем все алгебраические дополнения матрицы A :

$$A_{11} = -4; \quad A_{21} = -4; \quad A_{31} = 0;$$

$$A_{12} = -1; \quad A_{22} = 7; \quad A_{32} = -4;$$

$$A_{13} = 3; \quad A_{23} = -5; \quad A_{33} = -4$$

и сформируем обратную матрицу (8.14):

$$A^{-1} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Получим решение СЛАУ, используя соотношение (8.18):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -8 & -8 & 0 \\ -2+14-28 \\ 6-10-28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще один метод решения СЛАУ, вытекающий из матричного метода.

Представим решение (8.18) в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n A_{ki} b_k \quad (i = \overline{1, n}).$$

Из последнего соотношения следует, что Δ_i — это определитель, образованный из Δ путем замены в последнем элементе i -того столбца на свободные члены.

Таким образом,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (8.19)$$

Решения (8.19) уравнений (8.15) называются *формулами Крамера*, а метод решения — *методом Крамера* или *методом определителей*.

Пример 2. Методом Крамера найти решение системы уравнений примера 1.

Решение.

Найдем определители Δ_i :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -32.$$

Подставим найденные значения в формулы Крамера (8.19) (значение $\Delta = -16$ было найдено в примере 1):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-32}{-16} = 2.$$

Значения искомых переменных, как и следовало ожидать, совпадают с решением этой СЛАУ, полученным в примере 1 матричным методом.

Как и в случае использования матричного метода, формулы Крамера применимы только в случае, когда $\Delta \neq 0$.

8.9 Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную ненулевую матрицу A размера $m \times n$ (8.1). Из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении ее k строк и k столбцов ($1 \leq k \leq \min\{m, n\}$), можно составить некоторое количество определителей различного порядка, часть из которых не будет равна нулю. Будем называть эти определители *порожденными* данной матрицей.

Рангом r матрицы A ($\text{rang } A = r$) называется наибольший порядок отличного от нуля определителя, порожденного данной матрицей.

Элементарными преобразованиями по отношению к матрицам называют преобразования, не изменяющие ранга матрицы.

К элементарным относятся преобразования:

- 1) умножение строк (столбцов) матрицы на любые числа, отличные от нуля;
- 2) вычеркивание строк (столбцов), состоящих только из нулевых элементов;

- 3) изменение места нахождения строк (столбцов) в матрице;
 4) все действия, относящиеся к определителям и не изменяющие их значения.

Теорема. С помощью элементарных преобразований любую ненулевую матрицу можно привести к единичной, порядок которой будет равен рангу матрицы.

Понятно, что ранг нулевой матрицы равен нулю.

Преобразования можно осуществить следующим образом.

Переставим строки и столбцы исходной матрицы таким образом, чтобы на месте элемента a_{11} оказался ненулевой элемент (третье из перечисленных элементарных преобразований). Поделим элементы первой строки матрицы на a_{11} (первое из элементарных преобразований).

Умножая первую строку полученной матрицы на значение элемента матрицы, стоящего на месте a_{21} , вычтем все ее полученные элементы из соответствующих элементов второй строки (четвертое из перечисленных элементарных преобразований). В результате на месте элемента a_{21} появится нуль. Описанным образом можно получить нули во всех остальных элементах первого столбца, кроме первого.

Аналогично образуем нули во всех, кроме первого, элементах первой строки.

Оставляя далее "в покое" элементы первой строки и первого столбца, описанную операцию сделаем с элементом a_{22} , получив на его месте единицу и обращая в нуль остальные элементы второго столбца и второй строки. Затем переходим к третьему столбцу и строке и так далее.

Вычеркивая в процессе преобразований образовавшиеся нулевые строки и столбцы (второе из элементарных преобразований), в итоге придем к единичной матрице, порядок которой определит ранг исходной матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычтем из первой строки вторую для получения единицы на месте a_{11} .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строку на (-2) и прибавим полученные значения к второй строке. Затем умножим первую строку на (-5) и прибавим значения полученных элементов к третьей строке. В результате получим:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 9 & -17 \end{pmatrix}$$

Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго, затем эти же элементы, умноженные на (-2) , из элементов третьей строки, и, наконец, умноженные на 2 , из элементов четвертой строки.

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -11 \\ 0 & 1 & 9 & -17 \end{pmatrix}$$

Вычтем элементы второго столбца, умноженные на 9 , из соответствующих элементов третьего столбца и элементы этого же столбца, умноженные на (-7) , из элементов четвертого столбца:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Два последних столбца полученной матрицы состоят только из нулевых элементов. Эти столбцы вычеркиваем.

Вычитая элементы второй строки из элементов третьей строки и вычеркивая из полученной матрицы последнюю строку, мы получим:

из нулевых элементов, приходим к единичной матрице:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная единичная матрица имеет второй порядок. Это максимальный порядок матрицы, порожденной исходной матрицей, с определителем, отличным от нуля. Следовательно,

$$\text{rang } A = \text{rang } A_5 = r = 2.$$

Отметим, что порядок проведения элементарных преобразований над матрицами для определения их ранга не имеет значения. Тем не менее следует начинать преобразование с тех строк (столбцов), которые уже содержат единичные и максимальное количество нулевых элементов.

8.10 Вопросы

1. Какой математический объект называется матрицей?
2. Как определяется размер матрицы?
3. Что обозначает первый индекс в обозначении a_{ij} элемента матрицы?
4. Какая матрица называется прямоугольной? Квадратной? Нулевой? Единичной? Треугольной? Диагональной?
5. Что такое матрица-строка? Матрица-столбец?
6. Какие элементы образуют главную диагональ матрицы?
7. Что такое транспонированная матрица? Симметричная матрица?
8. Что собой представляет определитель матрицы?
9. Запишите формулы для вычисления определителей первого и второго порядков.
10. Сформулируйте правило треугольников вычисления определителя третьего порядка и запишите соответствующую правую формулу.
11. Перечислите 7 основных свойств определителей и докажите из справедливость на примере определителя второго порядка.
12. Покажите на примере определителя третьего порядка справедливость свойства 6 определителя (раздел 77).
13. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
14. Запишите формулы разложения определителя по элементам строки и столбца.
15. Чему равна сумма произведений элементов i -той строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой j -той строки (столбца)?
16. Какие операции над матрицами называются линейными?
17. Перечислите основные свойства линейных операций над матрицами. Поясните свойства соответствующими формулами.

18. Что называется произведением матриц? Запишите формулу для определения элементов матрицы произведения?
19. Сформулируйте основные свойства произведений матриц. Сопроводите формулировки соответствующими формулами.
20. Как представить систему уравнений в матричном виде?
21. В каком случае произведение матриц может быть коммутативным?
22. Как возвести матрицу в степень?
23. Что такое обратная матрица?
24. Опишите последовательность вычисления обратной матрицы.
25. Что представляет собой неособенная матрица?
26. Почему требование неособенности важно для вычисления обратной матрицы?
27. Что такое союзная матрица?
28. Можно ли менять местами операции определения обратной матрицы и транспонирование?
29. Что собой представляет матричный метод решения СЛАУ? Метод определителей?
30. Опишите последовательность определения решения СЛАУ методом обратной матрицы? Методом определителей?
31. Какие преобразования называются элементарными по отношению к матрицам?
32. Что такое ранг матрицы и как его определить методом элементарных преобразований?

8.11 Упражнения

К разделу 8.2

Вычислить определители, используя определение.

$$1. \det(-2); \quad 2. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad 3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad 4. \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0,5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

К разделу 8.4

Вычислить определители, образовав предварительно нули в элементах их строк (столбцов) и понижая порядок определителей до 2.

$$1. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

К разделам 8.5 — 8.7

Найти AB , BA , $A + B^T$ и $A^T + B$, если

$$1. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = A^T.$$

$$3. A = (1 \ 2 \ -1); \quad B = A^T.$$

Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

доказать справедливость соотношений:

4. $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$,

5. $(AB)^T = B^T A^T \neq A^T B^T$.

Для матрицы A , в задании к пунктам 4 и 5, найти:

6. A^2 ; 7. A^{-1} ;

убедиться в справедливости соотношений:

8. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; 9. $(A^{-1})^{-1} = A$; 10. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

К разделам 8.8 — 8.9

Системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ -3x+y+4z=4 \\ 3x+y-z=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-3y=-1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

решить

1. методом обратной матрицы;
2. методом определителей;
3. проверить правильность полученных решений путем их подстановки в заданные уравнения и сравнением результатов двух решений.

4. Путем элементарных преобразований определить ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

матрица A называется обратимой, если существует матрица B такая, что $AB = BA = E$. В этом случае матрица B называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} .

Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{найти } A^{-1}.$$

доказать справедливость равенств:

$$1. \det(A^T) = \det A; \quad 2. \det(A^T) = \det A; \quad 3. \det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

$$4. (AB)^T = B^T A^T; \quad 5. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Для матрицы A , в задании 5 пункта 4 и 5, найти:

$$6. A^2; \quad 7. A^{-1}; \quad 8. A^{-1}A; \quad 9. (A^{-1})^T; \quad 10. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

убедиться в справедливости этих равенств.

$$11. AA^{-1} = A^{-1}A = E; \quad 12. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}; \quad 13. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

К разделам 8.8 — 8.9

Системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -3x + y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

решить:

1. методом обратной матрицы;

2. методом Крамера;

3. проверить, справедливы ли следующие утверждения: если система уравнений имеет решение, то оно единственно.

Глава 9

Системы уравнений и неравенств

9.1 Основные положения

В разделе 8.8 рассматривалась система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), включающая n уравнений и содержащая n неизвестных. Для получения решения таких СЛАУ в случае их невырожденности (определитель матрицы коэффициентов не равен нулю) в указанном разделе предлагалось использовать матричный метод или метод определителей (Крамера).

К системам линейных алгебраических уравнений сводятся математические модели многих реальных задач, в том числе линеаризованные методы решения дифференциальных уравнений при замене в них дифференциальных операторов конечными приращениями, большой класс задач линейной аппроксимации.

Многие экономические задачи сводятся к системам уравнений, а задачи их оптимизации — к системам неравенств.

Отмеченные и другие математические модели далеко не всегда содержат столько неизвестных, сколько уравнений содержится в системе.

В общем случае будем рассматривать системы m уравнений с n неиз-

вестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (9.1)$$

Коэффициенты a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) образуют матрицу A размера $m \times n$ коэффициентов СЛАУ; правая часть уравнений – величины b_i – матрицу-столбец $m \times 1$ свободных членов; неизвестные x_j – матрицу-столбец $n \times 1$ неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С учетом введенных обозначений СЛАУ можно представить в матричном виде

$$A \cdot X = B$$

Если матрица $B = \Theta$ то есть, все элементы левой части СЛАУ нулевые, то СЛАУ называется *однородной*.

Решения x_i , удовлетворяющие СЛАУ (9.1), называют *допустимыми*. Отрицательные решения СЛАУ называют *недопустимыми*. Последние термины нашли применение в экономике и связаны с тем, что, например, отрицательная прибыль считается недопустимой при планировании работы предприятия.

9.2 Метод Гаусса решения СЛАУ

Из школьного курса алгебры известно, что решение СЛАУ не изменится, если к любому ее уравнению прибавить другое уравнение, умноженное на любое число. Решение не изменится и в том случае, если какое-либо уравнение в системе поменять местами, умножить любое уравнение на отличный от нуля множитель, исключить из системы уравнений тождество (тождественное нулевое уравнение).

Перечисленные действия над уравнениями системы перекликаются с элементарными преобразованиями над матрицами, перечисленными в разделе 8.9.

Отметим, что решение СЛАУ полностью определяется ее коэффициентами и свободными членами и не зависит от того, каким образом обозначить неизвестные величины. Поэтому вместо системы уравнений (9.1) можно ограничиться рассмотрением расширенной матрицы P . Предположим первоначально, что количество уравнений и неизвестных совпадают ($m = n$), тогда

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Под столбцами матрицы представлены соответствующие им переменные из СЛАУ. Последняя колонка в показанной строке ("св") относится к свободным членам системы уравнений.

Преобразования расширенной матрицы будем осуществлять, следуя описанным допустимым действиям над уравнениями. Это будет соответствовать элементарным преобразованиям строк (но не столбцов) расширенной матрицы.

Образовав на месте элемента a_{11} единицу, а все остальные элементы нули во всех остальных элементах первой строки расширенной матрицы. Для этого первую строку матрицы P (в колонке на месте элемента a_{11}) умножим на $-a_{21}$ и прибавим ее элементу в колонке a_{21} элементу в колонке a_{21} второй строки матрицы (второму уравнению СЛАУ). То же первую строку умножим на $-a_{31}$ и добавим ее элементу в колонке a_{31} элементу в колонке a_{31} третьей строки и т.д. до последней строки. В результате в первой строке расширенной матрицы (при x_1 в уравнении СЛАУ) будет единица, а во второй строке и нули во всех остальных строках (уравнениях).

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Образую далее единицу на месте коэффициента a'_{22} и нули в оставшихся элементах второй строки. И так далее до тех пор, пока матрица коэффициентов не превратится в единичную матрицу:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & : & b''_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & : & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & : & b''_n \end{pmatrix}.$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad \text{св}$

Возвращаясь к матрице P , вспоминаем, что первый столбец матрицы P_2 образуют коэффициенты, стоящие в СЛАУ при x_1 , второй — при x_2 и т.д. В результате описанных преобразований СЛАУ примет вид

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b''_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b''_2 \\ \dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = b''_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \vdots \\ b''_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате преобразований получено решение СЛАУ. Изложенный метод называется *методом Гаусса*.

Пример. Методом Гаусса получить решение СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение.

Составим расширенную матрицу и преобразуем ее по методу Гаусса

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & : & 2 \\ 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ 1 & 2 & 2 & : & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{+N2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & : & 4 \\ 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ -1 & 4 & 0 & : & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-N1/4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ 4 & 0 & 0 & : & 4 \\ -1 & 4 & 0 & : & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+N1/4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & -1 & 1 & : & 1 \\ 0 & 4 & 0 & : & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+N3/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{св}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

9.3 Теорема Кронекера-Капелли

Пусть задана система m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (9.3)$$

Составим матрицу A коэффициентов этой системы и расширенную матрицу P :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & : & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & : & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & : & b_m \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Относительно СЛАУ (9.3) можно утверждать следующее.

Теорема (Кронекера-Капелли).

СЛАУ при:

- 1) $\text{rang} A = \text{rang} P = n$ имеет единственное решение;
- 2) $\text{rang} A = \text{rang} P < n$ имеет бесчисленное множество решений;
- 3) $\text{rang} A < \text{rang} P$ не имеет решений (несовместна).

Рассмотрим каждый из перечисленных случаев.

Случай 1 ($\text{rang} A = \text{rang} P = n$).

Этот случай рассмотрен в предыдущем разделе. Для него преобразования Гаусса приводят к единственности каждого из корней СЛАУ.

Убедиться в том, что ранг расширенной матрицы в этом случае совпадает с рангом матрицы коэффициентов не представляет труда. Действительно, с помощью единственных единиц (остальные нули) в столбцах матрицы P_2 раздела 9.2 легко обратить в нули и отбросить правый столбец (свободных членов) этой матрицы. Этим доказывается равенство рангов матрицы коэффициентов и расширенной матрицы.

Случай 2 ($\text{rang } A = \text{rang } P = k < n$).

Случай 2 ($\text{rang} A = \text{rang} P = k < n$).
Элементарные преобразования над строками расширенной матрицы P (9.4) приведут ее в этом случае к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,k+1} & a'_{1,k+2} & \dots & a'_{1,n} & \vdots & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,k+1} & a'_{2,k+2} & \dots & a'_{2,n} & \vdots & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{k,k+1} & a'_{k,k+2} & \dots & a'_{k,n} & \vdots & b'_k \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

приводит в этом случае к следующей ее форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & \vdots & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & a'_{2n} & \vdots & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & b'_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b'_{k+1} \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

В рассматриваемом случае $\text{rang} P = k + 1 > \text{rang} A$.

Не равный нулю коэффициент b'_{k+1} (в случае равенства его нулю ранги матриц A и P были бы равными) в правой части уравнения, соответствующего последней строке матрицы (9.7), становится равным нулю в левой части этого (последнего) уравнения. Это противоречит условию рассматриваемого случая. Следовательно СЛАУ противоречива (несовместна, не имеет решения).

Пример 2. Найти решение СЛАУ или доказать ее несовместность:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 = -2. \end{cases}$$

Решение.

Запишем и преобразуем расширенную матрицу P заданной СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ -1 & 3 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+N_2 - N_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ -1 & 3 & 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Дальнейшие преобразования расширенной матрицы неуместны, так как первая строка матрицы указывает на несовместность системы уравнений. Для этой СЛАУ $\text{rang} P = 3$; $\text{rang} A = 2$.

9.4 Однородные системы уравнений

Пусть задана однородная система m уравнений с n неизвестными. У такой СЛАУ, в отличие от (9.3), все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (9.8)$$

Ранг расширенной матрицы такой СЛАУ всегда равен рангу матрицы коэффициентов, так как правый столбец матрицы P нулевой и его можно отбросить. Поэтому для однородной СЛАУ условия существования и единственности решения могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема (Кронекера-Капелли для однородных СЛАУ).

Однородная СЛАУ при:

- 1) $\text{rang} A = n$, имеет единственное решение, причем это решение нулевое (тривиальное);
- 2) $\text{rang} A < n$, имеет бесчисленное множество решений.

Случай 1. Для того, чтобы убедиться в его справедливости, достаточно сослаться на решение (8.19) СЛАУ методом Крамера. В этих решениях $\Delta \neq 0$ (так как $\text{rang} A = n \leq m$) и определитель Δ должен определяться по коэффициентам тех уравнений, которые при преобразованиях Гаусса не обратятся тождественно в нуль.

Что касается определителей Δ_i , то все они обратятся в нули, так как в каждом из них хотя бы один столбец представляет собой столбец нулевых свободных членов СЛАУ.

Случай 2 совпадает со случаем 2 общей теоремы Кронекера-Капелли и в дополнительном доказательстве не нуждается.

Пример. Определить c , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0, \\ x - 2y + 2z = 0, \\ 3x + y + cz = 0. \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения. Найти эти решения.

Решение.

Однородная СЛАУ имеет ненулевые решения только в случае, если ранг ее коэффициентов будет меньше количества неизвестных. В заданной СЛАУ количество неизвестных равно трем и ранг матрицы коэффициентов должен быть меньше трех. Поэтому определитель матрицы коэффициентов (квадратной матрицы третьего порядка) должен быть равен нулю.

Это условие используем для определения коэффициента c :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & c-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (c-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7(c-1) = 0, \Rightarrow c = 1.$$

Расширенную матрицу однородной СЛАУ составлять не имеет смысла, так как преобразования Гаусса с нулевыми элементами столбца свободных членов в любом случае оставит их нулевыми. Поэтому составим только матрицу коэффициентов системы с учетом полученного для c значения и преобразуем ее по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+N_1 \\ -N_1-N_2}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+N_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{:4 \\ -N_1/4}} \begin{pmatrix} 5/4 & 1 & 0 \\ 7/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выбрав в качестве основных переменных y и z (множители перед этими переменными равны единицам и образуют единичную матрицу), выразим их через свободную переменную x :

$$y = -\frac{5}{4}x; \quad z = -\frac{7}{4}x.$$

Таким образом, получено зависящее от значения переменной x общее решение заданной однородной системы уравнений при $c = 1$. При $c \neq 1$ возможны только нулевые решения этой СЛАУ.

9.5 Выпуклые множества точек

Множества, элементами которых являются точки, называют *точечными множествами*.

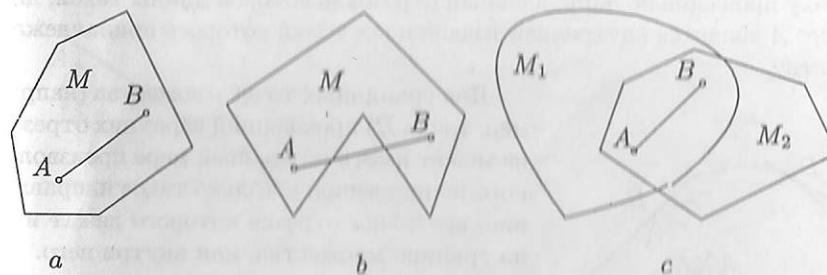


Рис. 9.1: Выпуклые и невыпуклые множества

Множество $\mathbb{R}_1$ представляет собой точечное множество на неограниченной прямой. Любое подмножество $\mathbb{R}_1$, например, отрезок прямой также представляет собой точечное множество.

Точечное множество в $\mathbb{R}_2$ — это точки неограниченной плоскости или любой части плоскости, например, ограниченные замкнутыми кривыми.

В $\mathbb{R}_3$ — это точки бесконечного трехмерного пространства или любой его неограниченной или ограниченной части.

В общем случае точечное множество может быть представлено в $\mathbb{R}_n$.

Множество точек называется *выпуклым*, если все точки, принадлежащие отрезку, соединяющему две любые точки A и B множества, также принадлежат этому множеству.

На рис. 9.1,а показан пример выпуклого точечного множества в $\mathbb{R}_2$, на рис. 9.1,б — невыпуклого.

Теорема. Пересечение двух выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Справедливость теоремы поясняется рисунком 9.1,с. Действительно, если $AB \in M_1 \cap M_2$, то $AB \in M_1$ и $AB \in M_2$. Но M_1 и M_2 — выпуклые множества. Следовательно, $M_1 \cap M_2$ также выпуклое множество, так как оно состоит из точек, принадлежащих одновременно и M_1 , и M_2 .

Пользуясь методом математической индукции, можно доказать, что пересечение конечного числа выпуклых множеств также является выпуклым множеством.

Ограниченные множества имеют *внутренние точки* и *граничные точки*.

Для любой внутренней точки множества рассматриваемого пространства (например, точка A на рис. 9.2) всегда можно выбрать проходящий через

эту точку произвольно направленный отрезок некоторой длины такой, для которого A является внутренней точкой и все точки которого принадлежат множеству.

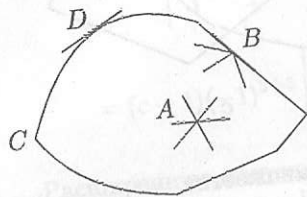


Рис. 9.2: Точки множества

Для граничных точек множества (например, точка B) проходящий через них отрезок может иметь по крайней мере произвольного направления, а только такое направление, все точки отрезка которого лежат или на границе множества, или внутри него.

Точка выпуклого множества называется *угловой точкой*, если через нее нельзя провести ни одного отрезка, состоящего только из точек множества и для которого эта точка была бы внутренней (точки C и D на рис. 9.2).

Следуя введенным определениям, можно говорить о выпуклых многоугольниках, многогранниках и т.д.

9.6 Интерпретация решений СЛАУ

Рассмотрим одно линейное уравнение с двумя переменными (неизвестными) x_1 и x_2 :

$$2x_1 + 3x_2 = 6.$$

Это частный вид СЛАУ при $m = 1$ и $n = 2$.

Найдем множество всех допустимых решений этой "системы", базисные решения и угловые точки. Каждое решение уравнения представляет собой пару чисел, лежащих на неограниченной прямой, показанной на рис. 9.3,а.

Допустимые (неотрицательные) решения этого уравнения лежат на отрезке AB прямой, расположенной в первой координатной четверти.

Это выпуклое множество с двумя угловыми точками $A(0; 2)$ и $B(3; 0)$.

Найдем базисные решения уравнения. Примем x_1 за основную переменную, x_2 — за свободную (неосновную). Тогда общее решение запишется в виде

$$x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2.$$

Полагая $x_2 = 0$, получим базисное решение $(3; 0)$.

Если за основную переменную принять x_2 , то на основе общего решения

$$x_2 = 2 - \frac{2}{3}x_1$$

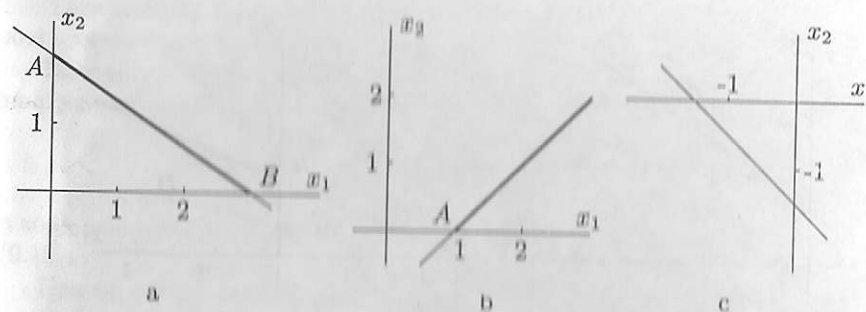


Рис. 9.3: Интерпретация допустимых решений СЛАУ

при $x_1 = 0$ получим базисное решение $(0; 2)$.

Оба базисные решения допустимы. Им соответствуют угловые точки A и B множества решений.

Для уравнения

$$x_1 - x_2 = 1$$

существует единственная угловая точка для действительных решений — это точка $A(1; 0)$. Вторая точка находится в бесконечности (рис. 9.3,б).

Уравнение

$$2x_1 + 2x_2 + 3 = 0$$

вообще не имеет угловых точек с действительными решениями (рис. 9.3,в).

Обобщая результаты анализа трех рассмотренных примеров, можно утверждать, что количество угловых точек множества допустимых решений совпадает с числом допустимых базисных решений. При этом базисные решения — это координаты угловых точек.

9.7 Неравенство с двумя переменными

Линейные неравенства для одного уравнения с двумя переменными представим в двух видах

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b \geq 0, \quad (9.9)$$

или

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b < 0. \quad (9.10)$$

Каждому из бесчисленного множества решений неравенств (9.9) и (9.10) соответствует пара чисел $(x'_1; x'_2)$, которая представляет собой точку на

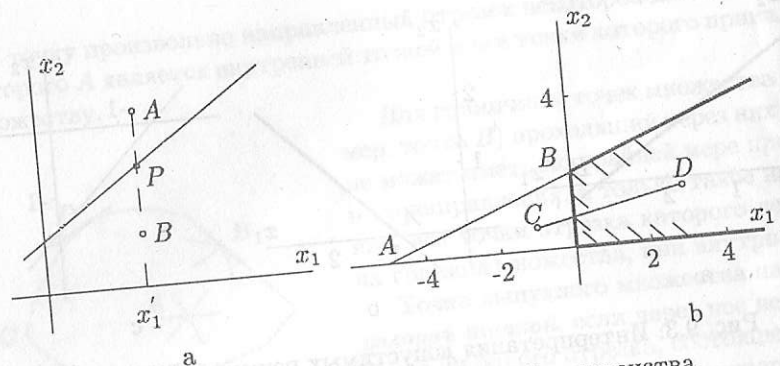


Рис. 9.4: Множества решений неравенства

плоскости. Геометрический смысл множества решений этих неравенств устанавливает следующая

Теорема. Множеством решений линейного неравенства (9.9) служит одна из двух полуплоскостей, на которые всю неограниченную плоскость делит прямая $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$, включая эту прямую. Вторая полуплоскость без этой прямой является множеством решений строгого неравенства (9.10).

Покажем, что это так.

Уравнение $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ описывает прямую.

Пусть представляется графически рисунком 9.4,а. Зафиксируем на прямой некоторую точку P с координатами $(x'_1; x'_2)$.

Выберем на плоскости еще две точки $A(x_1; x_2)$ и $B(x'_1; x'_2)$ такие, что A лежит выше прямой, а B — ниже прямой и обе точки имеют одинаковые с точкой P абсциссы.

Точки A и B называются *пробными*.

Пусть

$$AP = \Delta_1 = x'_2 - x_2 > 0 \quad \text{и} \quad PB = \Delta_2 = x'_2 - x'_2 = 0.$$

Подставим координаты точек A и B в левые части неравенств (9.9) и (9.10) соответственно:

$$a_1x'_1 + a_2x'_2 + b = a_1x'_1 + a_2(x'_2 + \Delta_1) + b = a_1x'_1 + a_2x'_2 + b + a_2\Delta_1 = a_2\Delta_1;$$

$$a_1x'_1 + a_2x'_2 + b = a_1x'_1 + a_2(x'_2 - \Delta_2) + b = a_1x'_1 + a_2x'_2 + b - a_2\Delta_2 = -a_2\Delta_2.$$

Подчеркнутые слагаемые равны нулю, так как представляют собой левую часть уравнения прямой с подставленными в него координатами точки P , принадлежащей прямой.

Таким образом, знаки правых частей полученных выражений определяются только знаком коэффициента a_2 (Δ_1 и Δ_2 положительны).

При $a_2 > 0$ координаты точки A и вся точка, лежащая выше прямой и на прямой, соответствует неравенству (9.9), так как

$$a_1x'_1 + a_2x'_2 + b \geq 0,$$

а координаты точки B и всех точек, лежащих ниже прямой, — неравенству (9.10).

При $a_2 < 0$ ситуация противоположная: неравенству (9.9) соответствуют точки пространства, лежащие ниже и на прямой, неравенству (9.10) — выше прямой.

Пример. Определить множество решений, соответствующих неравенству $2x_1 - 5x_2 + 10 \geq 0$.

Решение.

Построим прямую $2x_1 - 5x_2 + 10 = 0$, используя координаты точек базисного решения $A(-5; 0)$ и $B(0; 2)$.

Для определения множества пар значений координат $(x_1; x_2)$, удовлетворяющих заданному неравенству, используем любую пробную точку, не лежащую на прямой. Подставим, например, координаты точки $(0; 4)$, расположенной выше прямой, в левую часть заданного неравенства:

$$2 \cdot 0 - 5 \cdot 4 + 10 = -10 < 0.$$

Полученное неравенство говорит о том, что координаты точки $(0; 4)$, как и координаты всех других точек, лежащих выше прямой, не удовлетворяют заданному неравенству. Следовательно, неравенству будут отвечать координаты точек, лежащих ниже прямой, например, координаты точки $(0; 0)$:

$$2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 10 > 0!$$

Отметим, что начало координат является наиболее удобной пробной точкой для определения множества решений неравенств.

Если говорить о допустимых (положительных) значениях x_1 и x_2 , то они будут лежать под изображенной на рис. 9.4,б прямой в части плоскости, ограниченной дополнительными неравенствами

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Область допустимых значений заданного неравенства отмечена на рисунке штриховыми линиями.

Отметим, что полученное решение (в том числе допустимое решение) является выпуклым множеством — все его граничные точки удовлетворяют уравнению $2x_1 - 5x_2 + 10 = 0$, а точки любого отрезка, соединяющего не граничные точки C и D множества, удовлетворяют неравенству $2x_1 - 5x_2 + 10 > 0$.

9.8 Системы неравенств на плоскости

Рассмотрим систему двух неравенств с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \geq 0 & (\leq 0), \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \geq 0 & (\leq 0). \end{cases} \quad (9.11)$$

Множеством решений этой системы неравенств (если система соответствующих ей уравнений совместна) являются точки, принадлежащие пересечению полуплоскостей множеств решений обоих неравенств. Согласно свойству выпуклых множеств (теорема раздела 9.5) это множество выпукло. Кроме того, оно имеет конечное число угловых точек. Система двух неравенств имеет одну угловую точку. Это точка пересечения двух прямых, описываемых уравнениями, следующими из (9.11).

Границами трех неравенств на плоскости являются три прямые. Угловыми точками таких выпуклых множеств являются точки пересечения прямых.

Множеством решений системы m совместных линейных неравенств с двумя переменными является выпуклый многоугольник.

Пример. Определить и изобразить на координатной плоскости множество решений системы линейных неравенств и найти координаты угловых точек этого множества

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3 \leq 0; \\ x_1 + x_2 - 1 \geq 0; \\ x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 \leq 2,5; \\ 0 < x_2 < 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Строим прямую, соответствующую первому из заданных неравенств $① x_1 + x_2 - 3 = 0$. Эта прямая проходит через точки $(0;3)$ и $(3;0)$ (рис. 9.5).

Подставим в первое неравенство координаты контрольной точки $(0;0)$. $0 + 0 - 3 \leq 0 (!)$. Результат подтверждает справедливость первого из заданных неравенств. То есть начало координат принадлежит искомому

множеству. Поэтому множеством решений этого неравенства является полуплоскость, расположенная ниже прямой $①$, включая саму прямую.

2. Строим прямую $② x_1 + x_2 - 1 = 0$. Она проходит через точки $(0;1)$ и $(1;0)$. Для пробной точки $(0;0)$ получим: $0 + 0 - 1 < 0$. Это противоречит второму заданному неравенству — начало координат не входит в множество решений второго неравенства. Множеством решений являются точки, находящиеся выше прямой $②$, включая прямую.

3. Строим прямую $③ x_1 - x_2 = 0$. Она проходит через начало координат и, например, точку $(1;1)$.

Точка, лежащая на прямой, не может быть контрольной для определения множества решений неравенства. Выберем для этой цели точку $(1;0)$ и подставим ее координаты в третье неравенство: $1 - 0 > 0$.

Неравенство выполняется. Поэтому множество решений расположено ниже полуплоскости.

4. Прямая $④ x_1 = 2,5$ параллельна оси ординат. Начало координат принадлежит области решений четвертого неравенства ($0 < 2,5$). Поэтому лежащая слева от прямой $④$ полуплоскость определяет множество решений четвертого неравенства.

5. Последнее двойное неравенство определяет область, заключенную между горизонтальными прямыми $⑤ x_1 = 0$ и $⑥ x_1 = 1$. Пробная точка $(0;0,5)$ принадлежит множеству решений. В отличие от прямых $① - ④$, прямые $⑤$ и $⑥$ не входят в множество решений неравенств — неравенства строгие, равенства в них отсутствуют.

Прямые, не входящие в множества решений неравенств, отмечены на рис. 9.5 пунктиром.

В результате построения прямых и анализа множеств решений заданных неравенств делаем заключение о том, что множество решений системы неравенств ограничено шестиугольником $ABCDEF$. Точки всех прямых, определяющих границы шестиугольника, за исключением BC и EF , также входят в множество решений заданных неравенств.

Координаты угловых точек определим, решая пары систем уравнений, описывающих прямые, на пересечении которых стоят угловые точки:

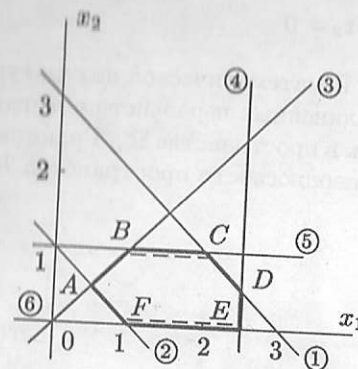


Рис. 9.5: Множество решений примера

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 2, 5 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} A(0,5;0,5); \\ C(2;1); \\ E(2,5;0); \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ x_1 = 2, 5 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} B(1;1); \\ D(2,5;0,5); \\ F(1;0). \end{array}$$

В математической литературе доказывается, что множеством решений n линейных неравенств с n переменными является выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{R}_n$. Границами таких многогранников (гранями) будут гиперплоскости пространства $\mathbb{R}_{n-1}$.

9.9 Вопросы

1. Как записать СЛАУ в матричном виде?
2. Как определяется размер матрицы коэффициентов СЛАУ?
3. Какая СЛАУ называется однородной?
4. Что представляют собой допустимые решения СЛАУ?
5. Опишите последовательность решения СЛАУ методом Гаусса.
6. Как формируется расширенная матрица СЛАУ?
7. К какому виду приводится матрица коэффициентов в итоге преобразования СЛАУ по методу Гаусса.
8. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли для общего вида СЛАУ. Для однородных СЛАУ.
9. Изобразите конечный вид расширенной матрицы СЛАУ для всех вариантов СЛАУ, в том числе для однородных СЛАУ.
10. Какие множества точек называются выпуклыми?
11. Почему пересечение выпуклых множеств точек является выпуклым множеством?
12. Дайте определения и поясните на соответствующих рисунках понятия: граничная точка множества; угловая точка множества.
13. Как графически определить области допустимых решений СЛАУ?
14. Как определить множество решений одного неравенства с двумя переменными?
15. Что такое пробная точка?
16. Что представляет собой система неравенств на плоскости?
17. Как определить угловые точки на множестве решений неравенств с двумя переменными?
18. Что собой представляют границы множеств решений систем неравенств в пространстве $\mathbb{R}_n$?

9.10 Упражнения

К разделам 9.3 — 9.4

Методом Гаусса найти решения СЛАУ или доказать их несовместность

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 = -7. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

К разделу 9.8.

5. Найти и изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4 > 0; \\ 2x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 < 2. \end{cases}$$

Выделить из этой системы множество допустимых решений.

9.11 Задание на расчетную работу 5

В задании на расчетную работу используются два параметра: N — последняя цифра номера группы, в которой обучается студент; n — номер студента в списке группы; $k = N + 0, 10$.

Задана СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = kN, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 + 3N, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3(1 - N). \end{cases}$$

В предположении, что $k = N$, решить СЛАУ:

- 1) матричным методом;
- 2) методом определителей;
- 3) методом Гаусса.

Приравняв нулю правые части СЛАУ

- 4) определить λ , при котором СЛАУ имеет нетривиальные решения. Найти эти решения.

- 5) Найти решения СЛАУ или доказать ее несовместность:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - kx_3 = k. \end{cases}$$

- 6) Найти и изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} Nx_1 + x_2 \leq 2k, \\ x_1 - kx_2 < 0; \\ 0,5N \leq x_1 < k + 3; \\ x_2 \geq -2N. \end{cases}$$

Найти координаты угловых точек.

Приложения

Приложение 1

Значения функции $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ ($f(-t) = f(t)$)

[illegible]

Приложение 2

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp[-t^2/2] dt$ ($\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$)

[illegible]

Приложение 3.

Критические точки $K_{кр}$ распределения χ^2

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α										
0,010	6,6	9,2	11,3	13,3	15,1	16,8	18,5	20,1	21,7	23,2
0,025	5,0	7,4	9,4	11,1	12,8	14,4	16,0	17,5	19,0	20,5
0,050	3,8	6,0	7,8	9,5	11,1	12,6	14,1	15,5	16,9	18,3

Приложение 4.

Нормально распределенные случайные числа ($m = 3$, $\sigma^2 = 1$).

3,464	3,137	5,455	2,677	2,932	3,296	2,712	4,298	3,060	0,744
2,469	2,806	3,543	1,442	3,187	1,810	4,486	2,646	2,366	3,697
3,926	4,375	3,785	2,037	4,022	2,528	4,279	6,521	3,571	1,149
3,194	4,192	4,394	2,445	3,046	3,321	5,945	4,974	2,742	3,412
3,906	2,487	2,475	3,595	3,881	2,066	4,579	3,161	4,179	1,945
3,007	3,769	3,971	3,712	4,090	2,369	1,499	2,512	2,838	2,864
4,033	3,303	3,448	3,748	2,310	3,756	1,382	2,655	2,689	0,949
2,543	2,782	4,372	3,225	3,378	3,769	3,181	2,264	3,960	1,470
2,518	4,678	2,943	1,771	2,514	3,856	2,509	1,017	1,624	2,850
4,356	2,439	2,744	2,788	3,219	3,779	1,990	3,598	2,082	4,598
4,065	3,415	2,831	3,313	2,995	2,101	3,012	2,275	3,147	2,879
4,096	3,181	4,393	1,837	2,089	4,231	2,801	2,754	4,239	0,426

Библиографический
СПИСОК

- [1] Вентцель Е.С., Овчаров Я.А. Теория вероятностей (Задачи и упражнения). — М.: Наука, 1989. — 488 с.
- [2] Высшая математика для экономистов /Под ред. Н.И.Крамара. М.: Изд-во "ЮНИТИ", 1997. — 440 с.
- [3] Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Ч. 2 — Минск: Высшая школа, 1988. — 266 с.
- [4] Карасев А.И., Алексютин Э.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Т.1 и 2 — М.: Высшая школа, 1982. — 640 с.
- [5] Коваленко И.М., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1985. — 266 с.
- [6] Лаптев А.Ф. Элементы векторного исчисления. — М.: Наука, 1975. — 336 с.
- [7] Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Высшая школа, 1972. — 424 с.
- [8] Справочник по математике для экономистов /Под ред. В.И.Ермакова. — М.: Высшая школа, 1997. — 384 с.
- [9] Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 1997. — 400 с.
- [10] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2 — М.: Высшая школа, 1997. — 416 с.

- [11] Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976. — 384 с.
- [12] Сборник задач по высшей математике для вузов /Под ред. А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича. — М.: Наука, 1981. — 470 с.
- [13] Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. — М.: Высшая школа, 1983. — 112 с.

Редактор Т.Н. Кривина
Техн. редактор Г.Н. Устинова
Корректор Т.Н. Кривина

Лицензия ЛР N 020301 от 30.12.1996 г.
Подписано в печать 01.08.99 Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,76. Усл. кр.-отт. 14,88.
Уч.-изд. л. 15,875.
Тираж 450 экз. Заказ

Арт. С-14/2000 г.

Самарский государственный аэрокосмический университет.
43086 Самара, Московское шоссе, 34.
ИПО СГАУ 443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.