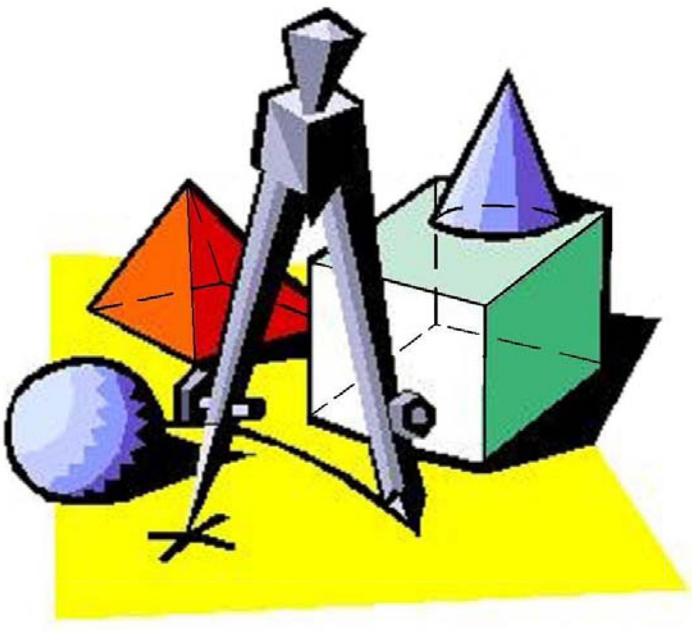
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Н.В. САВЧЕНКО

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ



САМАРА 2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Н.В. САВЧЕНКО

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве конспекта лекций

Самара
Издательство СГАУ
2011

УДК СГАУ: 514 (075)
ББК 22.151.3
С 137

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Н.П. К р ю ч и н
канд. техн. наук, доц. М.А. П е т р о в и ч е в

С 137 ***Савченко Н.В.***
Начертательная геометрия: конспект лекций / *Н.В. Савченко.* – Самара: Изд-во СГАУ, 2011. – 80 с.

ISBN 978 – 5 – 7883 – 0800 – 5

В настоящем учебном пособии кратко изложен теоретический материал курса начертательной геометрии.

Пособие предназначено для использования студентами первого курса при подготовке к практическим занятиям и экзамену.

Разработано для студентов механических факультетов, обучающихся по специальностям 160301 – Авиационные двигатели и энергетические установки, 160302 – Ракетные двигатели, 160201- Самолето- и вертолетостроение, 160801 – Ракетостроение, 160802 – Космические летательные аппараты и разгонные блоки.

УДК СГАУ: 514 (075)
ББК 22.151.3

ISBN 978 – 5 – 7883 – 0800 – 5

«Инженер, не умеющий чертить,
подобен писателю, не умеющему писать».

А.Н. Туполев

Введение

Отличительной особенностью ускоряющегося научно-технического прогресса является экспоненциальный рост объема научно-технической информации. Наиболее эффективными средствами передачи информации являются визуальные. Знание этих средств, умение ими пользоваться – составляющие графической грамотности, основы которой в высшей школе закладываются при изучении курса «Начертательная геометрия».

Следует отметить, что «Начертательная геометрия» включена в число обязательных дисциплин ведущих технических вузов мира. И связано это, прежде всего, с тем, что она как никакая другая дисциплина развивает логическое конструктивно-геометрическое мышление, пространственное представление и воображение, а также способность к анализу и синтезу пространственных форм.

Основная задача начертательной геометрии – изучение визуально-образного геометрического языка и технологии его реализации. Она является уникальным техническим языком, информативность которого настолько велика, что заменить его другим практически невозможно. Роль ее в подготовке специалистов и решении прикладных задач возрастает в связи с необходимостью повышения эффективности труда конструктора.

Основоположником этой графической науки был выдающийся французский математик и инженер Гаспар Монж, который в 1799 году издал свой классический труд под названием «Geometric descriptive» – «Начертательная геометрия». Основные положения этой книги не утратили своего значения и сегодня.

Г. Монж дал достаточно четкое определение назначения начертательной геометрии, ее прикладного значения. Он отмечал, что начертательная геометрия дает возможность решать задачи с пространственными (трехмерными) объектами посредством графических построений, выполняемых на плоском чертеже, имеющем только два измерения. Начертательная геометрия учит нас, во-первых, строить и понимать технические чертежи, во-вторых, изучать по чертежу геометрические свойства изображаемых предметов, их форму, размеры.

Исходя из этого, Г. Монж справедливо считал, что ***чертеж – это «язык техники»***. Более того, по его мнению, начертательная геометрия активно развивает интеллектуальные способности людей и тем самым создает возможность «совершенствования рода человеческого».

С Монжем солидарны и многие отечественные ученые и конструкторы. В их числе известный русский геометр В.И. Курдюмов, который говорил, что ***если, по словам Монжа, считать чертеж языком техники, то начертательная геометрия является грамматикой этого языка***.

Условные обозначения геометрических объектов

1. Плоскости проекций:

Π_1 – горизонтальная плоскость проекций;

Π_2 – фронтальная плоскость проекций;

Π_3 – профильная плоскость проекций.

2. Точки – прописные буквы латинского алфавита или арабские цифры (промежуточные точки): *A, B, C*… или *1, 2, 3*…

3. Проекции точек:

$A_1, B_1, C_1 \ldots 1_1, 2_1, 3_1 \ldots$ – горизонтальные проекции точек;

$A_2, B_2, C_2 \ldots 1_2, 2_2, 3_2 \ldots$ – фронтальные проекции точек;

$A_3, B_3, C_3 \ldots 1_3, 2_3, 3_3 \ldots$ – профильные проекции точек.

4. Прямые – строчные буквы латинского алфавита: *a, b, c*…
   Прямые, проходящие через точки *A* и *B*, *1* и *2*: *(A-B)*, *(1-2)*.

5. Проекции прямых:

$a_1, b_1, c_1 \ldots, (A_1\text{-}B_1), (1_1\text{-}2_1)$ – горизонтальные проекции прямых;

$a_2, b_2, c_2 \ldots, (A_2\text{-}B_2), (1_2\text{-}2_2)$ – фронтальные проекции прямых;

$a_3, b_3, c_3 \ldots, (A_3\text{-}B_3), (1_3\text{-}2_3)$ – профильные проекции прямых.

6. Отрезки прямых, ограниченных точками: *[AB]*, *[CD]*…
7. Луч с началом в точке *A*: *[A-B)*.
8. Линии уровня:

h – горизонтальная прямая;

f – фронтальная прямая;

p – профильная прямая.

9. Плоскости – прописные буквы греческого алфавита: $\Theta, \Sigma, \Psi \ldots$
10. Следы плоскостей:

$\Theta_1, \Sigma_1, \Psi_1 \ldots$ – горизонтальный;

$\Theta_2, \Sigma_2, \Psi_2 \ldots$ – фронтальный;

$\Theta_3, \Sigma_3, \Psi_3 \ldots$ – профильный.

11. Расстояния:

$|AB|$ – между точками *A* и *B*;

$|a, b|$ – между параллельными прямыми *a* и *b*;

$|A, \Psi|$ – между точкой *A* и плоскостью Ψ;

$|\Sigma, \Theta|$ – между параллельными плоскостями.

12. Углы – строчные буквы греческого алфавита: $\alpha, \beta, \gamma \ldots$
13. Величина угла:

$|\widehat{ABC}|, |AB \,\widehat{;}\, BC|$ – с вершиной в точке *B*;

$|a \,\widehat{;}\, b|$ – между пересекающимися прямыми;

$|\Sigma \,\widehat{;}\, \Theta|$ – между пересекающимися плоскостями.

Таблица 1

Символы взаиморасположения геометрических объектов и логических операций

Обозначение	Смысловое значение	Пример символической записи
(…)	способ задания геометрического объекта в пространстве и на комплексном чертеже	$A(A_1, A_2)$ – точка A задана на комплексном чертеже горизонтальной и фронтальной проекциями; $\Sigma(A, b)$ – плоскость Σ задана прямой b и точкой A.
$\in$ $\subset$, $\supset$	принадлежность	$A \in l$ – точка A принадлежит прямой l; $l \subset \Sigma$ – прямая l лежит в плоскости Σ
$\equiv$	совпадение	$A_1 \equiv B_1$ – горизонтальные проекции точек A и B совпадают.
//	параллельность	$a \parallel b$ – прямые a и b параллельны.
$\perp$	перпендикулярность	$c \perp d$ – прямые c и d перпендикулярны.
$\underline{\bullet}$	скрещивание	$m \;\underline{\bullet}\; n$ – прямые m и n скрещивающиеся.
$\cap$	пересечение	$k \cap l$ – прямые k и l пересекаются.
$\bar{\cap}$	касание	$l \;\bar{\cap}\; \Phi = N$ – прямая l касается плоскости Φ в точке N.
$\cup$	объединение	$AB \cup BC \cup CD$ – ломаная линия $ABCD$.
$\sim$	подобие	$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ – треугольники ABC и DEF подобны.
$\cong$	конгруэнтность	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ – треугольники ABC и DEF конгруэнтны, т.е. они могут быть совмещены в пространстве движением первого порядка.
=	равенство	$\vert AB\vert = \vert CD\vert$ – отрезки AB и CD равны.
/	отрицание	$A \notin l$ – точка A не принадлежит прямой l.
$\wedge$	конъюнкция предложений (соответствует союзу «и»)	$K \in a \wedge K \in d$ – точка K принадлежит прямым a и d.
$\vee$	дизъюнкция предложений (соответствует союзу «или»)	$A \in \Sigma \vee A \notin \Sigma$ – точка A принадлежит плоскости Σ или точка A не принадлежит плоскости Σ.
$\Rightarrow$ $\Leftarrow$	логическое следствие – импликация (следовательно, поэтому)	$a \parallel b \wedge c \parallel b \Rightarrow a \parallel c$ – прямые a и c параллельны прямой b, следовательно, они параллельны между собой.

Продолжение таблицы 1

Обозначение	Смысловое значение	Пример символической записи
$\Leftrightarrow$	логическая эквивалентность (что то же самое)	$A \in l \Leftrightarrow A_1 \in l_1,\ A_2 \in l_2$ – точка A принадлежит прямой l, следовательно, ее проекции лежат на одноименных проекциях прямой; справедливо и обратное утверждение: проекции точки A лежат на одноименных проекциях прямой l, следовательно, точка принадлежит этой прямой.
$\rightarrow$ $\leftarrow$	отображение, преобразование	$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} \rightarrow \frac{\Pi_4}{\Pi_1}$ – система ортогональных плоскостей $\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$ преобразуется в систему плоскостей $\frac{\Pi_4}{\Pi_1}$.

Таблица 2

Греческий алфавит

Буква	Название	Буква	Название
A, α	альфа	N, ν	ню
B, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	O, o	омикрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пи
E, ε	эпсилон	P, ρ	ро
Z, ζ	дзета	$\Sigma, \varsigma, \sigma$	сигма
H, η	эта	T, τ	тау
$\Theta, \vartheta, \theta$	тэта	Y, υ	ипсилон
I, ι	йота	Φ, φ	фи
K, κ	каппа	X, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
M, μ	мю	Ω, ω	омега

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Бубенников, А.В. Начертательная геометрия / А.В. Бубенников. – М.: Высшая школа, 1985.
2. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – М.: Высшая школа, 1998.
3. Королев, Ю.И. Начертательная геометрия / Ю.И. Королев. – СПб: Питер, 2006.
4. Лагерь, А.И. Основы начертательной геометрии / А.И Лагерь, А.Н. Мота, К.С. Рушелюк. – М.: Высшая школа, 2005.
5. Локтев, О.В. Краткий курс начертательной геометрии / О.В. Локтев. – М.: Высшая школа, 1999.
6. Нартова, Л.Г. Начертательная геометрия / Л.Г. Нартова, В.И. Якунин. – М.: Дрофа, 2003.
7. Фролов, С.А. Начертательная геометрия / С.А. Фролов. – М.: Высшая школа, 2006.

Дополнительная литература

8. Задания для графических работ по начертательной геометрии: метод. указания / сост. Л.П.Куванина, Л.А. Ратанова, Н.В. Савченко. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007.
9. Начертательная геометрия. Примеры решения графических работ: метод. указания для студентов очно-заочной формы обучения / сост. Н.В. Савченко. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007.
10. Начертательная геометрия. Примеры решения типовых задач и задания для контрольных работ: метод. указания для студентов-заочников. / Сост. Савченко Н.В.– Самара: Изд-во СГАУ, 2005.
11. Панин В.И. Геометрическое проектирование деталей самолета и двигателя в задачах по начертательной геометрии: учеб. пособие / В.И. Панин, М.И. Кочнев, К.И. Иващенко, Г.И. Панкова. – Куйбышев: Изд-во КуАИ, 1977.
12. Панин, В.И. Проецирование элементов авиационных двигателей в начертательной геометрии: учеб. пособие / В.И. Панин, М.И. Кочнев, К.И. Иващенко, Г.И. Панкова. – Куйбышев Изд-во КуАИ, 1978.
13. Пересечение многогранников плоскостью: метод. указания / сост. Л.П. Куванина, И.В. Мурачева. – Самара: СГАУ, 1992.
14. Пересечение поверхностей вращения плоскостью: метод. указания / сост. В.Я. Фадеев, Л.А. Ратанова – Куйбышев: КуАИ, 1991.
15. Пересечение прямой с поверхностью: метод. указания / сост. Г.И. Панкова. – Самара: КуАИ, 1991.
16. Применение основных теорем геометрии при решении задач по начертательной геометрии: метод. указания / сост. Н.Н. Калинина, В.И. Кулешова, СГАУ. – Самара, 2006.
17. Савченко, Н.В. Начертательная геометрия. Практические занятия: учеб. пособие / Н.В. Савченко, Г.И. Панкова, В.В. Платонова. – Самара: Изд-во СГАУ, 2007.
18. Савченко, Н.В. Сборник задач по начертательной геометрии. Часть 4. База данных: учеб. пособие / Н.В. Савченко [и др.]. – Самара: Изд-во СГАУ, 2011.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ ЧЕРТЕЖА

Реальный предмет (деталь или сборочная единица) имеет трехмерную форму, которую необходимо передать на листе, имеющем лишь два измерения. Сделать это можно, зная законы построения изображений. Правила построения изображений в начертательной геометрии основываются на методе проецирования. Изображение предмета на плоскости (его проекция) строится с помощью проецирующих лучей.

1.1. Виды проецирования

Аппарат проецирования включает в себя проецируемый объект, проецирующие лучи и плоскость, на которую осуществляется проецирование.

Вид проецирования зависит от способа проведения проецирующих лучей. Общим видом проецирования является центральное проецирование.

Проецирование называется ***центральным****, если проецирующие лучи проходят через неподвижную точку, называемую центром проекций.*

Пусть в пространстве находятся произвольные точки A и B, которые необходимо спроецировать на плоскость Π', используя центр проекций (полюс) S. Для этого из центра S проводятся проецирующие лучи, проходящие через заданные точки и пересекающие плоскость. На пересечении этих лучей с плоскостью проекций Π' находятся проекции точек (рис.1.1).

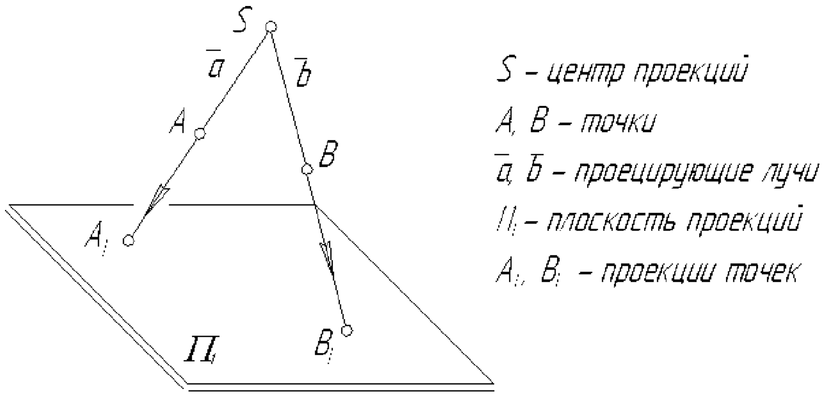


Рис. 1.1

Центральное проецирование не удобно для измерений, поэтому применяется, в основном, для построений перспективных изображений (перспективы). Методы построения таких изображений подробно рассматриваются в разделе начертательной геометрии «Линейная перспектива», который не входит в состав нашего курса.

Частным случаем центрального проецирования является параллельное проецирование. При выполнении данного вида проецирования считается, что центр проекций находится в бесконечности.

Проецирование называется ***параллельным****, если все проецирующие лучи проходят параллельно друг другу.*

Параллельное проецирование осуществляется при выполнении двух условиях:

1) задано направление проецирования $\overline{S}$;
2) проецирование ведется на плоскость, непараллельную направлению проецирования.

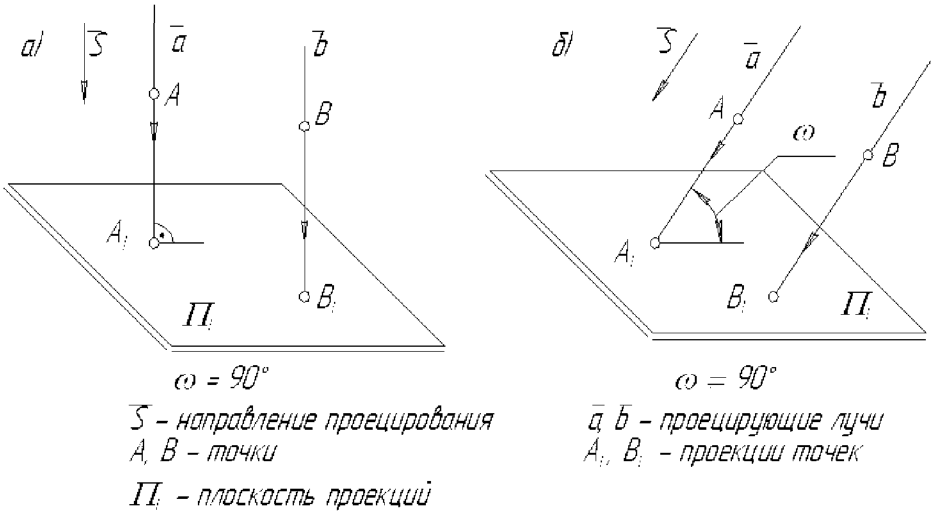


Рис. 1.2

В зависимости от угла наклона проецирующих лучей к плоскости проекций параллельное проецирование может быть:

1) прямоугольное (ортогональное), когда проецирующие углы падают на плоскость проекций под прямым углом ($\omega = 90°$);
2) косоугольное (аксонометрическое), если направление проецирования составляет с плоскостью проекций угол не равный 90°.

Построение всех машиностроительных чертежей основывается на прямоугольном проецировании, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только этот вид проецирования.

1.2. Основные свойства параллельного проецирования

При проецировании на плоскость проекций формы и размеры некоторых геометрических элементов могут искажаться. Однако существуют некоторые их свойства, которые всегда остаются неизменными (инвариантными).

1. *Проекция точки есть точка.*

Это очевидно из самого определения проекции как точки пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.

Следует помнить, что любой точке пространства соответствует только одна проекция на плоскости. Обратная формулировка этого свойства неверна, т.к. каждой проекции точки может соответствовать бесчисленное множество точек в пространстве. Это значит, что одна проекция точки не определяет ее положение в пространстве.

2. *Проекцией прямой в общем случае является прямая.*

Все проецирующие лучи, проходящие через прямую, заданную отрезком *AB*, образуют проецирующую плоскость *ABB′A′*, которая пересекает плоскость проекций $П_1$ по прямой $(A_1 - B_1)$(рис. 1.3 а). Исходя из этого справедливо и следующее утверждение.

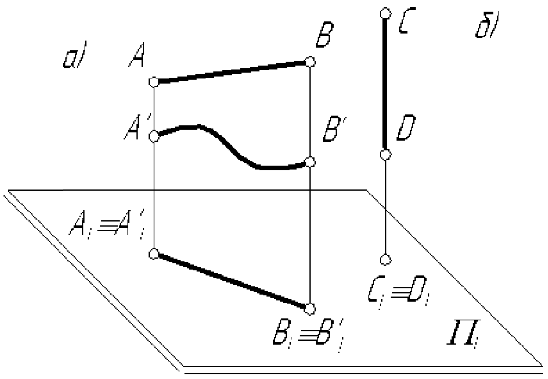


Рис. 1.3

3. *Прямая может быть проекцией не только прямой, но и любой кривой линии, если эта кривая находится в плоскости, перпендикулярной плоскости проекций* (рис.1.3а).

4. *Проекцией прямой, параллельной направлению проецирования, является точка.*

Она называется вырожденной проекцией прямой (рис. 1.3б).

5. а) *Если отрезок параллелен плоскости проекций, то он проецируется на нее в натуральную величину.*

$$[EF] \parallel \Pi_1 \Rightarrow |E_1F_1| = |EF|$$

б) В противном случае, *при прямоугольном параллельном проецировании он имеет проекцию меньшую истиной величины.*

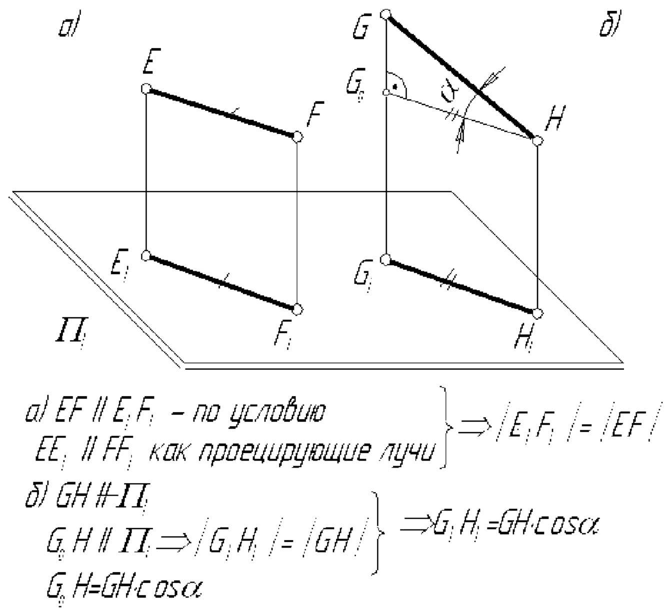


Рис. 1.4

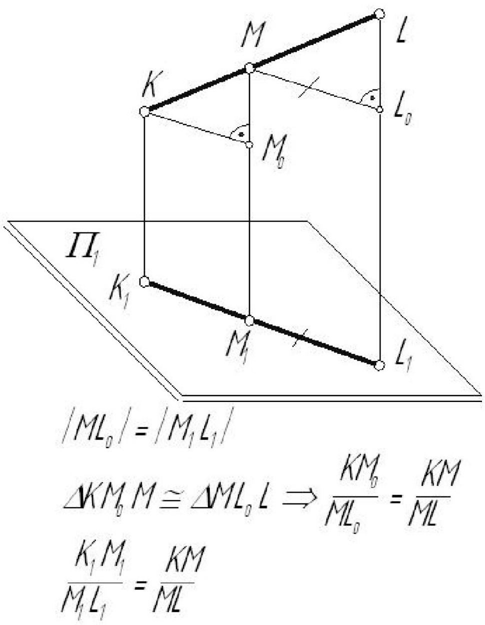


Рис. 1.5

6. *Если точка принадлежит прямой, то проекция этой точки лежит на проекции этой прямой.*

$$M \in [KL] \Rightarrow M_1 \in K_1L_1$$

7. *Если точка, лежащая на прямой, делит ее на отрезки в каком-либо отношении, то проекция этой точки поделит проекцию этой прямой в том же отношении.*

8. *Если прямые пересекаются, то их проекции тоже пересекаются. Причем проекция точки пересечения прямых является точкой пересечения проекций.*

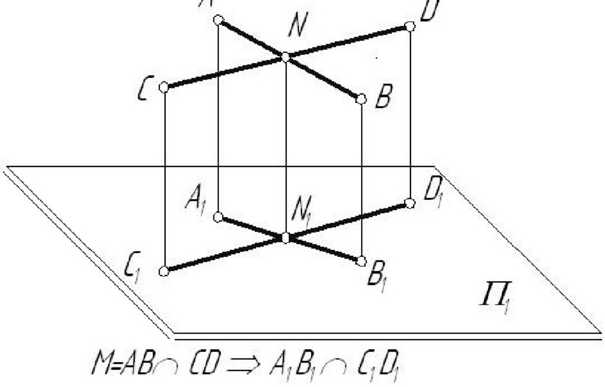


Рис. 1.6

Точка N одновременно принадлежит прямым (A-B) и (C-D). По шестому инвариантному свойству проекция этой точки должна принадлежать проекциям этих прямых, а следовательно, быть точкой пересечения проекций.

9. *Проекции параллельных прямых параллельны между собой.*

Плоскости Θ и Σ, проходящие через две параллельные прямые, параллельны, т.к. две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости.

$$\left.\begin{matrix}[EF] \parallel [GH] \\ EE_1 \parallel GG_1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Theta(EF \cap EE_1) \parallel \Sigma(GH \cap GG_1).$$

Параллельные плоскости пересекаются с третьей плоскостью (Π_1) по параллельным прямым, следовательно, $E_1F_1 \parallel G_1H_1$.

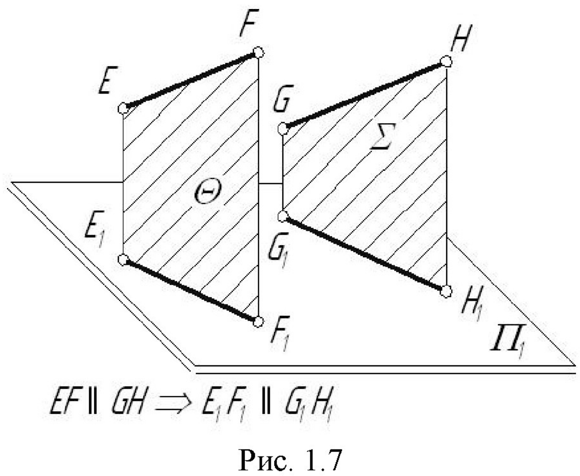


Рис. 1.7

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

2.1. Комплексный чертеж точки (Эпюр Монжа)

Проецирование геометрического объекта (точки, линии или фигуры) на одну плоскость проекций не определяет его положения в пространстве (какой-либо проекции точки может соответствовать бесчисленное множество точек в пространстве) и не дает полного представления о нем. Поэтому принято использовать не одну, а две или три взаимно перпендикулярные плоскости проекций – горизонтальную Π_1, фронтальную Π_2 и профильную Π_3. Две плоскости проекций делят пространство на 4 четверти (рис. 2.1 а), три плоскости – на 8 октантов (рис. 2.1 б).

Линии пересечения плоскостей проекций *0x, 0y, 0z* называются осями проекций. Они аналогичны осям декартовой системы координат с той разницей, что ось *0x* имеет положительное направление влево.

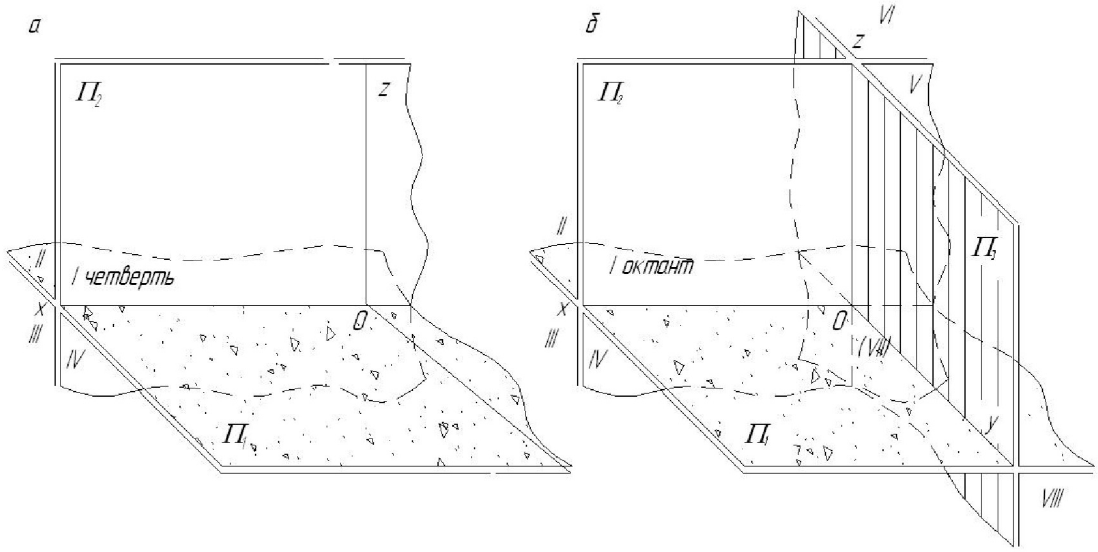


Рис. 2.1

Т.к. любой предмет можно рассматривать как множество точек, проецирование его на плоскость сводится к построению отдельных точек ему принадлежащих. Поэтому все базовые понятия и правила проецирования рассматриваются на примере построения точки.

Построим проекции точки *A*, расположенной в первом октанте пространства (рис.2.2). Для этого через точку проведем проецирующие лучи, идущие перпендикулярно плоскостям проекций. На пересечении этих лучей с плоскостями проекций находятся проекции самой точки *A*.

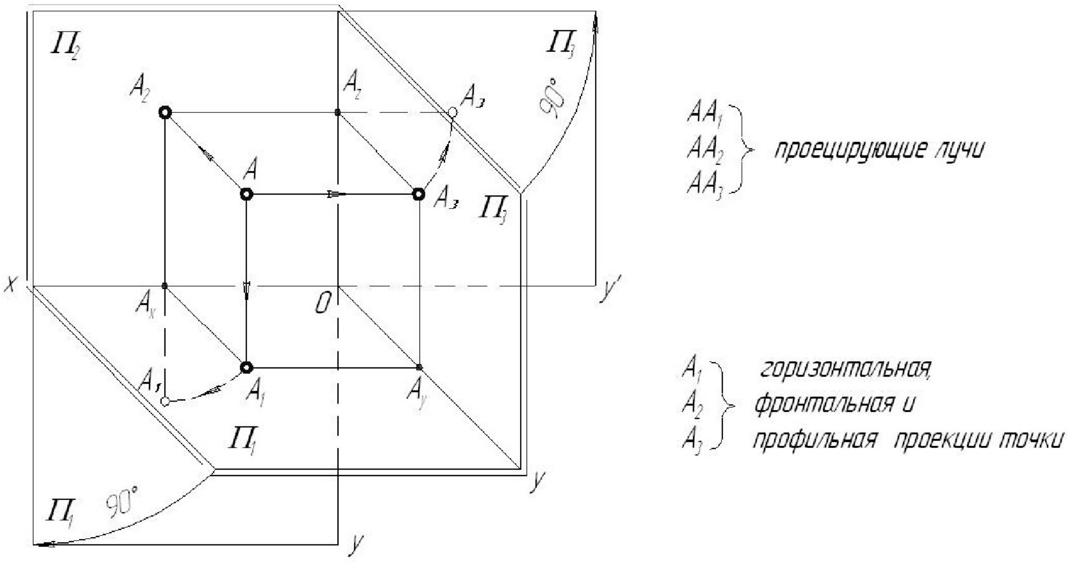


Рис. 2.2

Несмотря на наглядность пространственного изображения, работать с ним неудобно, т.к. горизонтальная и профильная плоскости проекций изображаются на нем с искажением. Удобнее совместить эти плоскости с фронтальной плоскостью проекций, развернув их на угол 90° вокруг осей проекций $0x$ и $0y$. При этом ось $0y$ разворачивается как с горизонтальной, так и с фронтальной плоскостями проекций, поэтому на чертеже она обозначается дважды – $0y$ и $0y'$.

Полученный таким образом чертеж называется комплексным чертежом (КЧ), или эпюром Монжа. В связи с тем, что он представляет собой развернутую в плоскость пространственную модель, **самой точки на комплексном чертеже нет** (рис. 2.3).

Проекции точки на КЧ соединяются между собой прямыми линиями, называющимися линиями связи и проходящими перпендикулярно осям проекций.

Независимо от того, в каком октанте находится точка, ее горизонтальная и фронтальная проекции всегда лежат на одной линии связи, перпендикулярной оси $0x$, а фронтальная и профильная проекция – на линии связи, перпендикулярной оси $0z$.

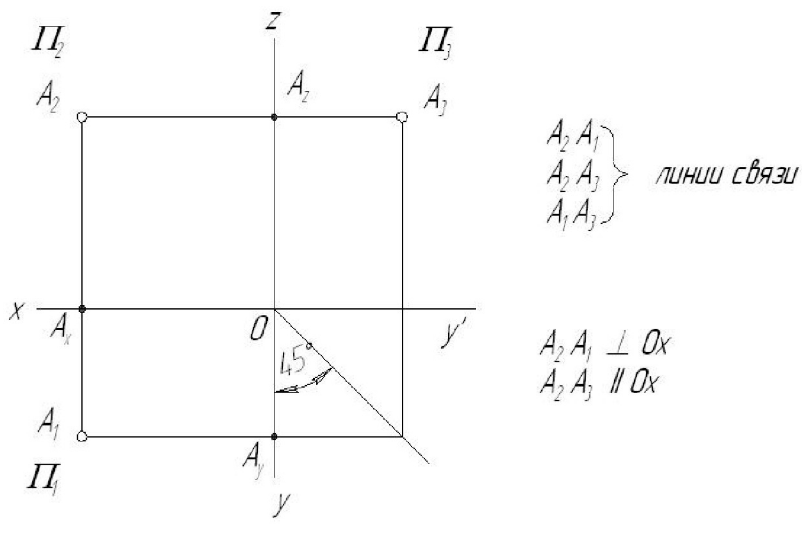


Рис. 2.3

Исходя из рисунка пространственной модели (рис. 2.2) можно выявить взаимосвязь между проекциями точки A:

1) расстояние от точки A до горизонтальной плоскости проекций (высота точки)

$$z = \left|A, \Pi_1\right| = \left|AA_1\right| = \left|A_2 A_x\right| = \left|A_3 A_y\right|;$$

2) расстояние от точки A до фронтальной плоскости проекций (глубина точки)

$$y = \left|A, \Pi_2\right| = \left|AA_2\right| = \left|A_1 A_x\right| = \left|A_3 A_z\right|;$$

3) расстояние от точки A до профильной плоскости проекций (широта точки)

$$x = \left|A, \Pi_3\right| = \left|AA_3\right| = \left|A_1 A_y\right| = \left|A_2 A_z\right|.$$

Например, расстояние от фронтальной проекции точки до оси $0x$ равно расстоянию от профильной проекции до оси $0y$. Следовательно, **по двум любым проекциям точки можно построить третью.**

Точки могут занимать частное положение в пространстве относительно плоскостей проекций:

1) если точка расположена на оси проекций, то две ее проекции лежат на этой оси, а третья находится в начале координат;
2) если точка лежит на плоскости проекций, тогда одна из ее проекций лежит в этой плоскости, а две другие – на осях проекций.

Допустим, что точка B лежит на оси $0z$, а точка C принадлежит горизонтальной плоскости проекций (рис. 2.4). Для точки C построения следует начинать с проекции, принадлежащей плоскости C_1, для точки B – с проекций B_2 и B_3, лежащих на осях проекций.

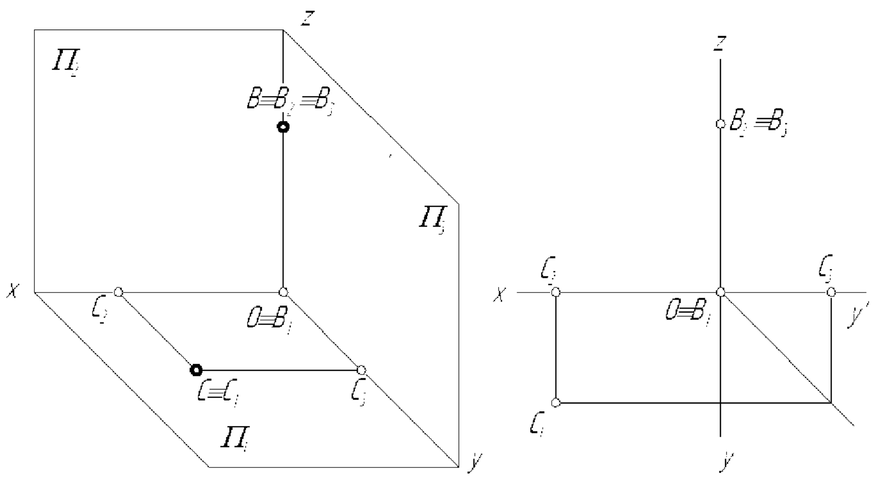


Рис. 2.4

2.2. Проецирование прямой

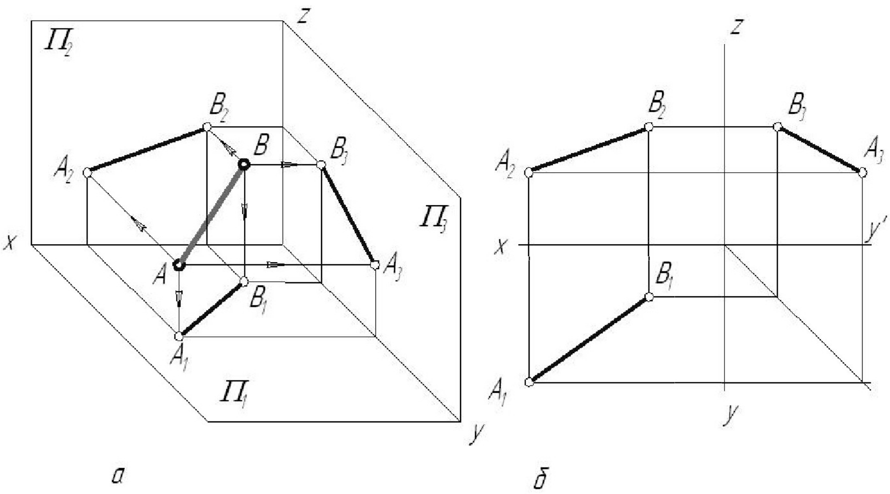


Рис. 2.5

Аксиома евклидовой геометрии гласит: **«Через две точки проходит единственная прямая»**. В связи с этим построение проекций прямой линии на КЧ сводится к построению проекций двух точек ей принадлежащих.

Построим проекции прямой *d*, которой принадлежат точки *A* и *B*. Спроецировав их на плоскости проекций, а затем соединив между собой одноименные проекции, получаем проекции прямой (рис.2.5).

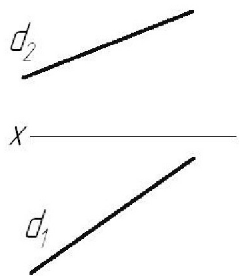


Рис. 2.6

На КЧ прямая может быть задана проекциями двух точек (отрезком) или, на основании инвариантного свойства 2[1], непосредственно своими проекциями (рис. 2.5 б, 2.6).

2.2.1. Положение прямой относительно плоскостей проекций

По расположению относительно плоскостей проекций различают прямые общего и частного положения.

*Прямые не параллельные и не перпендикулярные ни одной из плоскостей проекций называются **прямыми общего положения**.*

Признаки и свойства прямой общего положения:

1) На КЧ ни одна из проекций прямой общего положения, не параллельна осям проекций (или не перпендикулярна линиям связи) (рис. 2.5, 2.6).
2) Длина отрезка, принадлежащего прямой общего положения проецируется на любую плоскость проекций с искажением: каждая проекция отрезка короче его натуральной величины.

[1] См. п.1.2. Основные свойства параллельного проецирования.

Прямые общего положения могут быть восходящими или нисходящими.

*Прямая называется **восходящей**, если по мере удаления от наблюдателя она повышается.*

*Прямая называется **нисходящей**, если по мере удаления от наблюдателя она понижается.*

Для того, чтобы определить по КЧ положение прямой, необходимо обратить внимание на то, как дальняя от наблюдателя точка отрезка прямой расположена относительно ближайшей точки: выше или ниже, правее или левее. На рисунке 2.5 изображена восходящая вправо прямая, т.к. наиболее удаленная точка B располагается правее и выше ближайшей точки A.

<u>Признак восходящих и нисходящих прямых</u>:

1) На КЧ горизонтальная и фронтальная проекции имеют уклон в одну сторону относительно оси проекций (рис. 2.7 – прямая l).
2) У нисходящих прямых обе проекции наклонены в разные стороны относительно оси проекций (рис. 2.7 – прямая k).

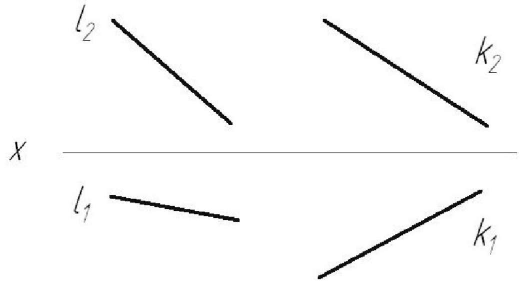


Рис. 2.7

Прямые частного положения подразделяются на прямые уровня и проецирующие прямые.

*Прямые, параллельные одной из плоскостей проекций, называются **прямыми уровня**.*

Существует три вида прямых уровня: горизонталь, фронталь и профильная прямая.

1. **Горизонталь** *(h) – прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций.*

<u>Признаки и свойства горизонтали:</u>

1) На КЧ фронтальная проекция горизонтали h_2 располагается параллельно оси $0x$ (или в безосном чертеже перпендикулярно линиям связи).
2) На горизонтальную плоскость проекций без искажения проецируются отрезок, принадлежащий горизонтали ($|A_1B_1| = |AB|$), и углы наклона его к фронтальной (β) и профильной (γ) плоскостям проекций.

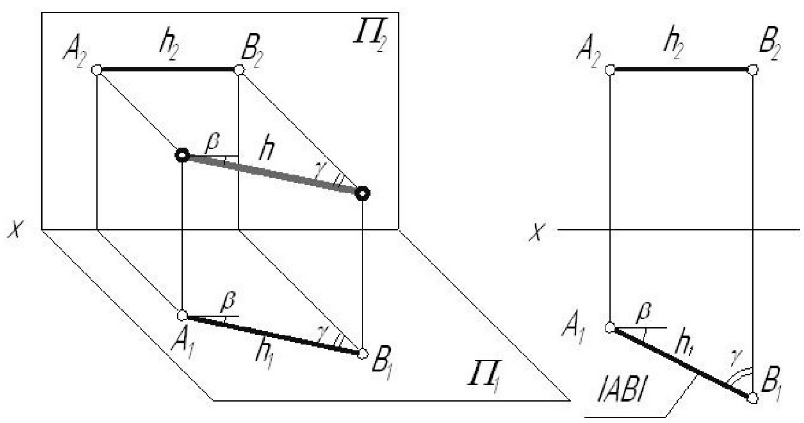


Рис. 2.8

2. **Фронталь** *(f) – прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций.*

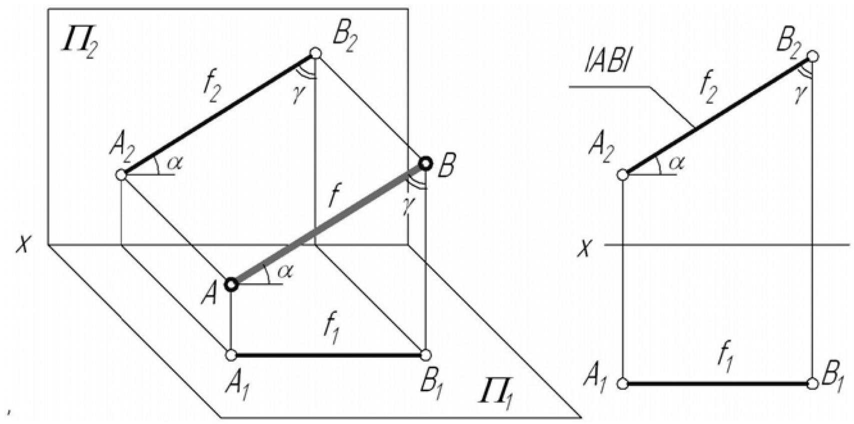


Рис. 2.9

Признаки и свойства фронтали:

1) На КЧ горизонтальная проекция фронтали f_1 располагается параллельно оси *0x* (или в безосном чертеже перпендикулярно линиям связи).
2) На фронтальную плоскость проекций проецируются без искажения отрезок, принадлежащий фронтали ($|A_2B_2| = |AB|$), и углы наклона его к горизонтальной (α) и профильной (γ) плоскостям проекций.

3. **Профильная прямая** – *прямая, параллельная профильной плоскости проекций.*

Признаки и свойства профильной прямой:

1) На КЧ фронтальная A_2B_2 и горизонтальная A_1B_1 проекции отрезка профильной прямой располагаются перпендикулярно оси *x*.
2) На профильную плоскость проекций проецируются без искажения отрезок, принадлежащий профильной прямой ($|A_3B_3| = |AB|$), и углы наклона его к фронтальной (β) и горизонтальной (α) плоскостям проекций.

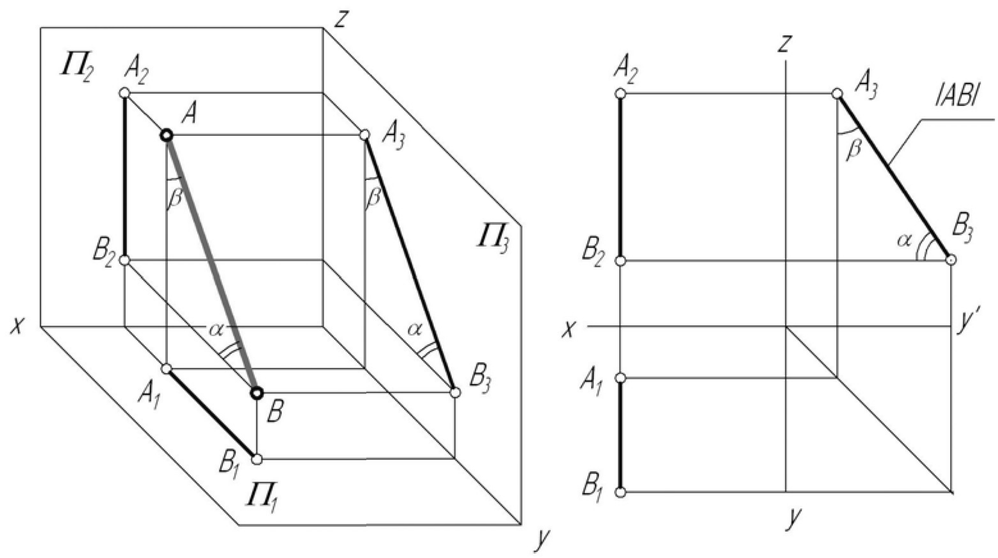


Рис. 2.10

Прямые, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, называются ***проецирующими прямыми***.

Существует три вида проецирующих прямых: горизонтально-проецирующая, фронтально-проецирующая и профильно-проецирующая прямая.

Проекцией проецирующей прямой на плоскость проекций, к которой она перпендикулярна, является точка (след прямой). Все точки, принадлежащие проецирующей прямой, проецируются на ее след.

1. **Горизонтально-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций.

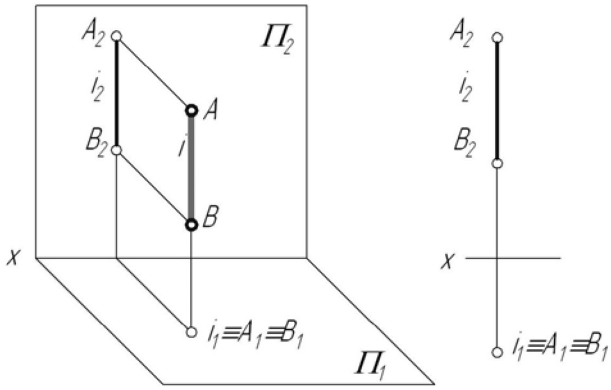


Рис. 2.11

2. **Фронтально-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций.

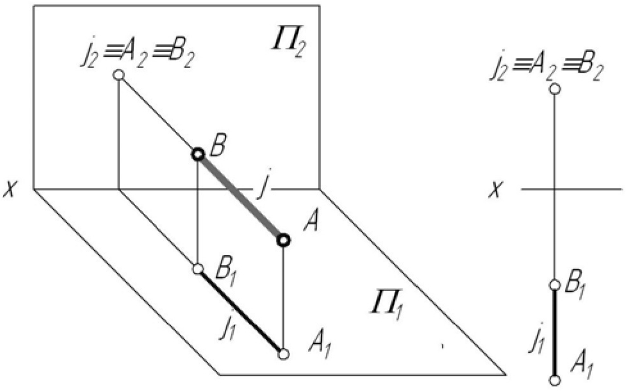


Рис. 2.12

3. **Профильно-проецирующая прямая** – прямая, перпендикулярная профильной плоскости проекций.

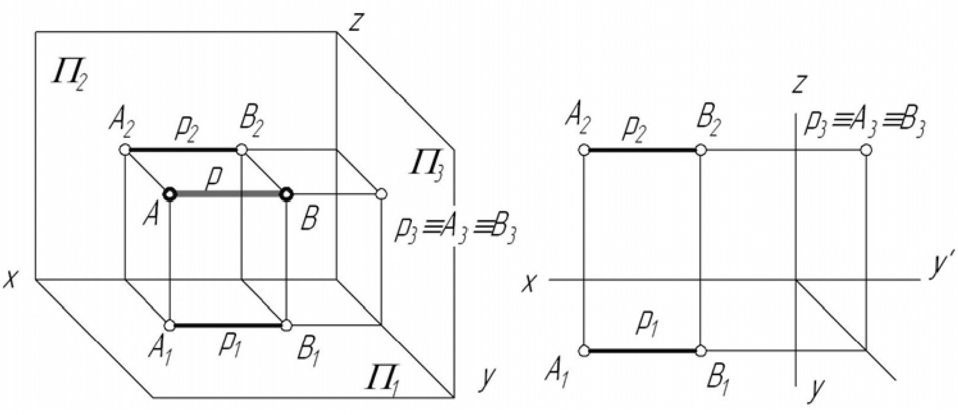


Рис. 2.13

К числу частных случаев расположения прямых можно отнести и прямые, лежащие непосредственно в плоскостях проекций. Их называют ***прямыми нулевого уровня***. На рис. 2.14 приведены примеры таких прямых: горизонталь *h* и профильно-проецирующая прямая *j* располагаются на горизонтальной плоскости проекций, следовательно их фронтальные проекции находятся на оси *0x*; фронталь *f* и профильно-проецирующая прямая *p* лежат во фронтальной плоскости проекций, а значит их горизонтальные проекции на КЧ совпадают с осью *0x*.

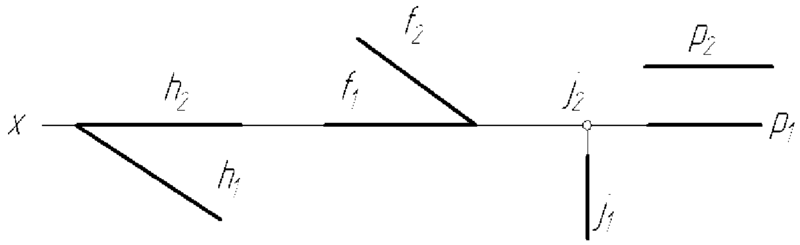


Рис. 2.14

2.2.2. Следы прямых линий

*Точка пересечения прямой с плоскостью проекций называется **следом прямой**.*

На рисунке 2.7 приведены пространственная модель и КЧ прямой *l*, пересекающей три плоскости проекций, а следовательно, имеющей три следа:

- горизонтальный $H = l \cap \Pi_1$,
- фронтальный $F = l \cap \Pi_2$,
- профильный след $P = l \cap \Pi_3$.

Очевидно, что фронтальная и профильная проекции горизонтального следа (*H*) прямой лежат на осях проекций *0x* и *0y* соответственно. Проекции фронтального (*F*) и профильного (*P*) следов прямой находятся аналогично.

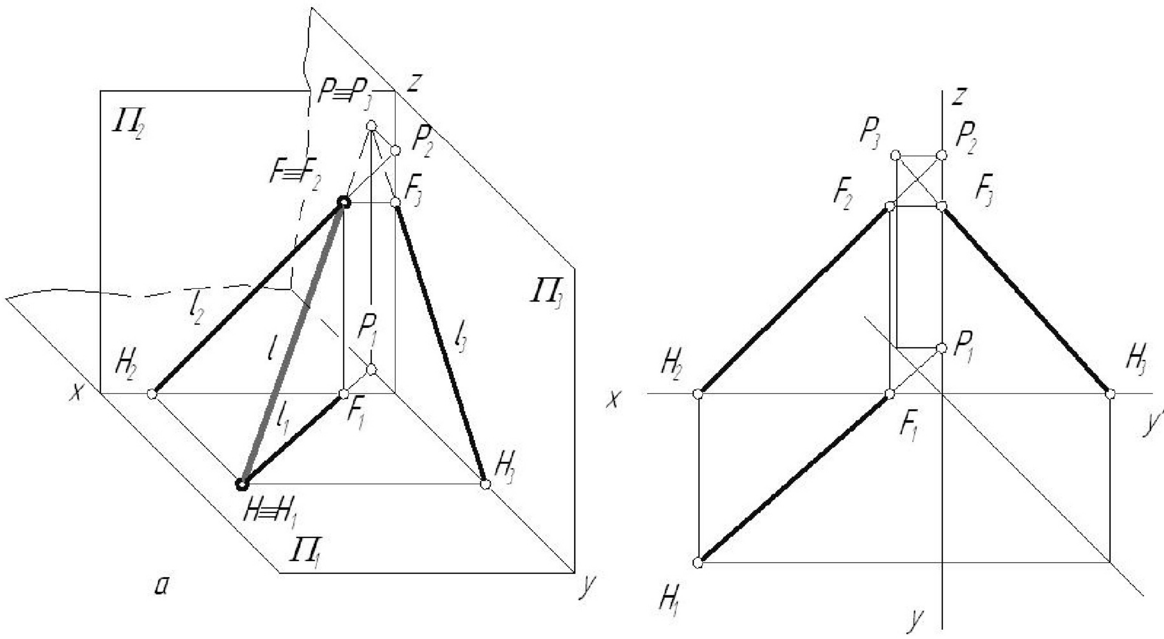


Рис. 2.15

Прямые общего положения пересекают три плоскости проекции и имеют три следа; прямые уровня пересекают две плоскости проекций (имеют два следа); проецирующие прямые пересекают одну плоскость проекции.

2.2.3. Деление отрезка в заданном отношении

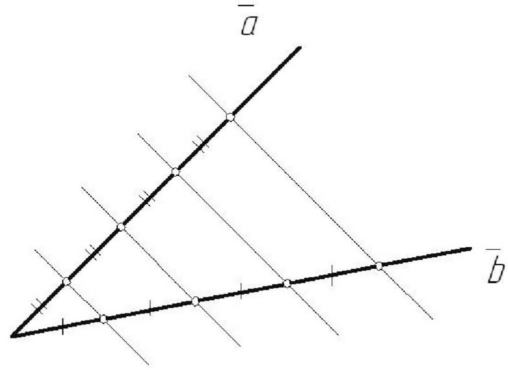


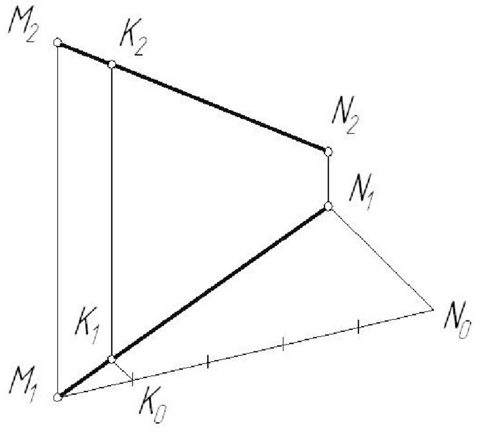
Рис. 2.16

<u>Теорема Фалеса:</u>

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Используя эту теорему и инвариантное свойство параллельного проецирования: «если точка делит отрезок прямой в данном отношении, то проекция этой точки поделит проекцию прямой в том же отношении», можно легко разделить любой отрезок в заданном отношении.

Чтобы на КЧ разделить отрезок в заданном отношении, необходимо в этом отношении разделить его проекции. На рисунке 2.17 отрезок $[MN]$ поделен точкой K в отношении $MK : KN = 1 : 4$

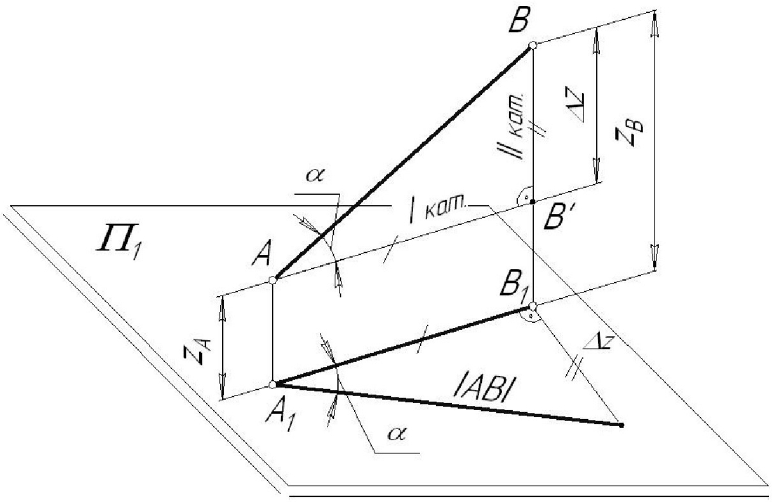


$$\frac{M_1K_0}{K_0N_0}=\frac{M_1K_1}{K_1N_1}=\frac{M_2K_2}{K_2N_2}=\frac{MK}{KN}$$

Рис. 2.17

2.2.4. Натуральная величина отрезка прямой общего положения. Метод прямоугольного треугольника

В отличие от отрезков прямых частного положения, проецирующихся хотя бы на одну из плоскостей проекций в натуральную величину, отрезок прямой общего положения на плоскости проекций проецируется с искажением. Для того чтобы найти его натуральную величину, необходимо провести ряд преобразований. Существует несколько методов нахождения натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона его к плоскостям проекций. Одним из этих методов является метод прямоугольного треугольника, в котором находится зависимость длины проекции отрезка от его истинной величины.



$$tg\alpha=\frac{BB'}{AB'}=\frac{BB_1-B'B_1}{AB'}=\frac{z_B-z_A}{A_1B_1}$$

Рис. 2.18

Возьмем прямую общего положения *AB* и спроецируем ее на горизонтальную плоскость проекций Π_1. Через точку *A* проведем линию, параллельную плоскости Π_1. Таким образом в пространстве получим прямоугольный треугольник ABB', один из катетов которого (AB') равен длине проекции отрезка, а угол между отрезком и этим катетом является углом наклона заданного отрезка к плоскости проекций (рис. 2.18).

Для определения натуральной величины отрезка прямой общего положения и углов наклона ее к плоскости проекций на КЧ необходимо построить прямоугольный треугольник:

1. Первый катет этого треугольника равен проекции отрезка на плоскости проекций (обычно прямоугольный треугольник пристраивают к проекции отрезка, однако в некоторых задачах целесообразно прямоугольный треугольник строить в стороне от проекций геометрических объектов).
2. Из проекции любого конца отрезка (A_1 или B_1) под прямым углом к проекции отрезка проводится луч, на котором откладывается длина второго катета, равная разности расстояний от концов отрезка до данной плоскости проекций.
3. Гипотенуза полученного таким образом прямоугольного треугольника равна длине заданного отрезка.
4. Угол наклона отрезка к той или иной плоскости проекций равен углу между гипотенузой – натуральной величиной и катетом – проекцией на эту плоскость проекций.

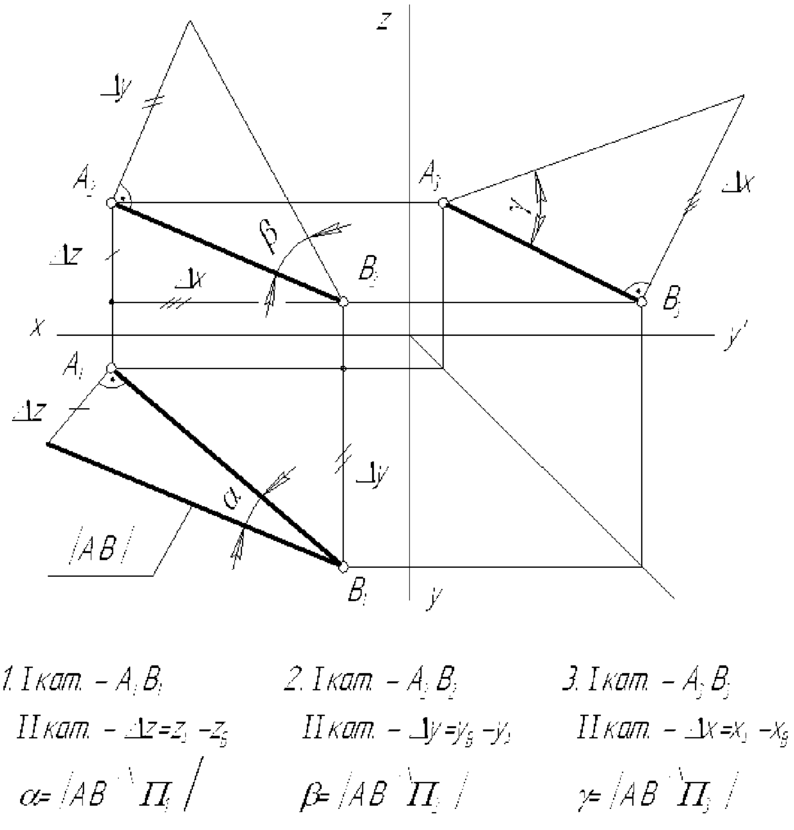


Рис. 2.19

Следовательно, для определения угла наклона отрезка к горизонтальной плоскости проекций прямоугольный треугольник строится на базе горизонтальной проекции отрезка, к фронтальной плоскости проекций – на базе фронтальной проекции, к профильной плоскости проекций – на базе профильной проекции.

2.3. Плоскость. Способы ее задания, положение относительно плоскостей проекций

Положение плоскости в пространстве может быть однозначно определено:

1) тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 2.20 а);
2) прямой и точкой, не лежащей на этой прямой (рис. 2.20 б);
3) двумя параллельными прямыми (рис. 2.20 в);
4) двумя пересекающимися прямыми (рис. 2.20 г);
5) плоской фигурой (рис. 2.20 д);
6) следом плоскости (рис. 2.20 е).

На КЧ плоскость задается проекциями этих элементов, но не ограничивается ими, т.к. она безгранична и бесконечна.

Всегда от одного способа задания плоскостей можно перейти к другому. Например, соединив между собой точки A, B и C отрезками прямых линий, можно получить плоскость, заданную треугольником ΔABC (рис. 2.20 а, д).

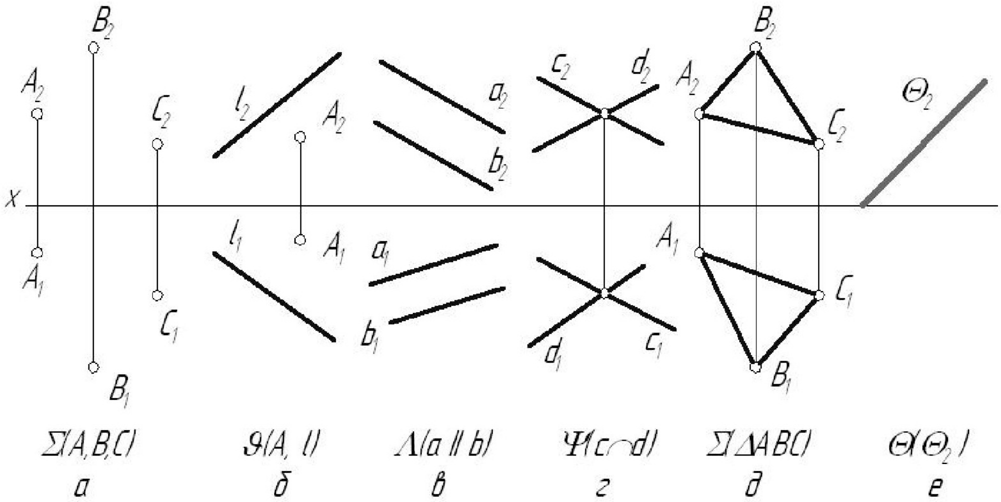


Рис. 2.20

***След плоскости** – это линия пересечения заданной плоскости с одной из плоскостей проекций.*

Соответственно различают горизонтальный, фронтальный и профильный следы плоскости.

Задание плоскости следами дает наиболее наглядное представление о положении плоскости в пространстве.

В системе двух плоскостей проекций плоскость в общем случае имеет два следа (рис. 2.21 а, б). Точки пересечения двух следов на оси проекций называются ***точками схода следов***. Для упрощения решения задач на практике обычно переходят от такого способа задания плоскости к заданию ее двумя пересекающимися прямыми нулевого уровня[2]: горизонталью, лежащей в горизонтальной плоскости проекций и совпадающей с горизонтальным следом

[2] См. п/п 2.2.1. Положение прямой относительно плоскостей проекций.

плоскости Λ_1, и фронталью, располагающейся во фронтальной плоскости проекций и совпадающей с фронтальным следом плоскости Λ_2 (рис.2.21 а, в).

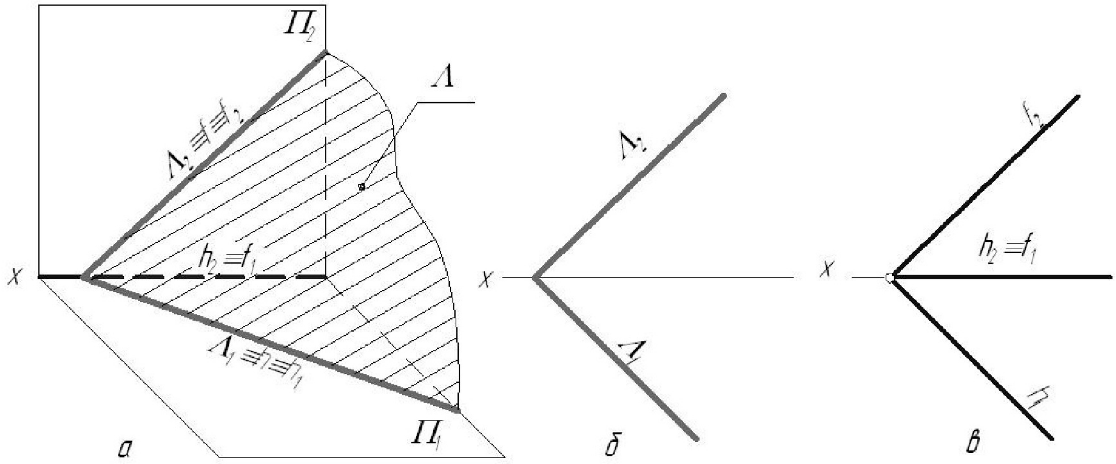


Рис. 2.21

Классификация плоскостей относительно плоскостей проекций аналогична классификации прямых: плоскости относительно плоскостей проекций могут занимать общее или частное положение.

> ***Плоскостью общего положения*** *называется плоскость не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций.*

Плоскость общего положения пересекает все плоскости проекций (рис. 2.21).[3]

Признаки и свойства плоскости общего положения:

1) Следы плоскости общего положения не параллельны и не перпендикулярны ни одной из осей проекций.
2) Любой плоский геометрический объект (отрезок или фигура), лежащий в плоскости, проецируется на любую из плоскостей проекций с искажением.

Плоскостями частного положения относительно плоскостей проекций называются плоскости параллельные или перпендикулярные им.

> *Плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций, называется* ***проецирующей плоскостью.***

Существует три вида проецирующих плоскостей: горизонтально-проецирующая, фронтально-проецирующая и профильно-проецирующая плоскости. Такие плоскости вырождаются в прямую линию (***след проекций***) на ту плоскость проекций, к которой они перпендикулярны.

1. **Горизонтально-проецирующая плоскость** – плоскость перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций.

Признаки и свойства горизонтально-проецирующей плоскости:

1) горизонтальный след плоскости Σ располагается наклонно к осям проекций $0x$ и $0y$ и

[3] В системе трех плоскостей проекций плоскость общего положения имеет три следа.

определяет углы наклона этой плоскости к фронтальной (β) и профильной (γ) плоскостям проекций;

2) горизонтальные проекции всех точек, прямых и плоских фигур, лежащих в горизонтально-проецирующей плоскости, находятся на ее горизонтальном следе Σ_1, его называют следом проекций.

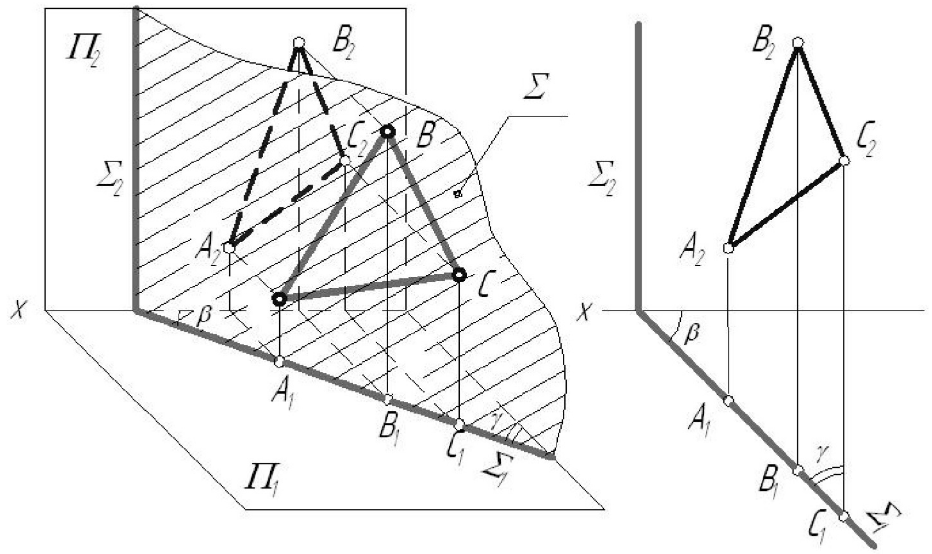


Рис. 2.22

2. **Фронтально-проецирующая плоскость** – плоскость перпендикулярная фронтальной плоскости проекций.

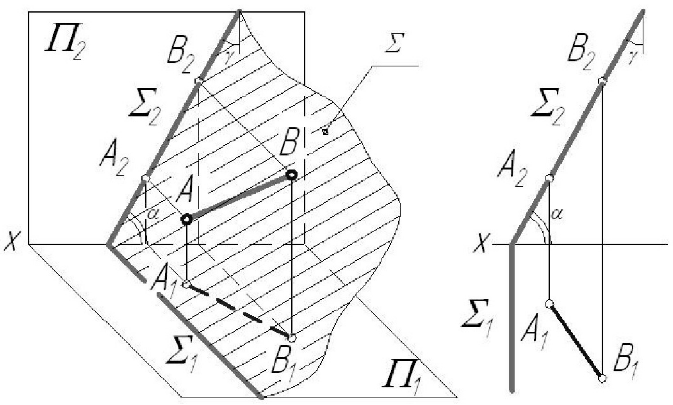


Рис. 2.23

<u>Признаки и свойства фронтально-проецирующей плоскости:</u>

1) фронтальный след плоскости Σ располагается наклонно к осям проекций $0x$ и $0z$ и определяет углы наклона этой плоскости к горизонтальной (α) и профильной (γ) плоскостям проекций;

2) фронтальные проекции всех точек, прямых и плоских фигур, лежащих во фронтально-проецирующей плоскости, находятся на ее фронтальном следе Σ_2.

3. **Профильно-проецирующая плоскость** – плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций.

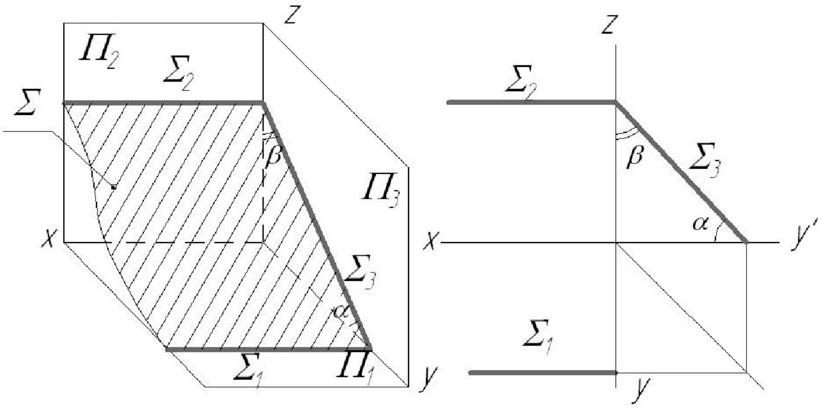


Рис. 2.24

Признаки и свойства профильно-проецирующей плоскости:

1) горизонтальный и фронтальный следы плоскости Σ располагаются параллельно оси проекций *0x*, а профильный след наклонен к осям *0y'* и *0z*. Он определяет углы наклона этой плоскости к фронтальной (β) и горизонтальной (α) плоскостям проекций;
2) профильные проекции всех точек, прямых и плоских фигур, лежащих в профильно-проецирующей плоскости, находятся на ее профильном следе.

*Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, называется **плоскостью уровня**.*

Все точки этой плоскости одинаково удалены от той плоскости проекций, к которой она параллельна. Любой отрезок или плоская фигура, лежащие в плоскости уровня, проецируются без искажения на параллельную ей плоскость проекций.

Существует три вида плоскостей уровня: горизонтальная, фронтальная и профильная плоскости уровня.

Плоскости уровня пересекают только две плоскости проекций, поэтому, в отличие от ранее рассмотренных плоскостей, имеют только два следа.

1. **Горизонтальная плоскость уровня** – плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций.

Признаки и свойства горизонтальной плоскости:

1) фронтальный и профильный следы плоскости Γ располагаются параллельно осям проекций *0x* и *0y* соответственно;
2) фронтальные проекции всех точек, прямых и плоских фигур, лежащих в горизонтальной плоскости, находятся на ее фронтальном следе, профильные проекции – на профильном;
3) горизонтальные проекции плоских фигур, лежащих в плоскости, равны их натуральным величинам.

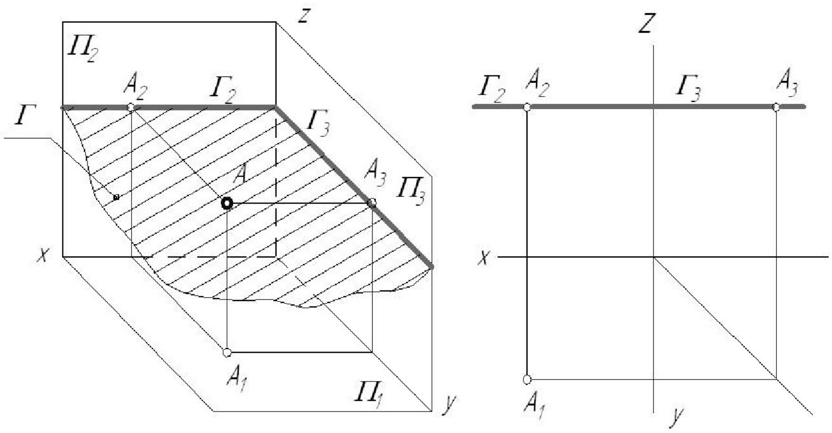


Рис. 2.25

2. **Фронтальная плоскость** – плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций.

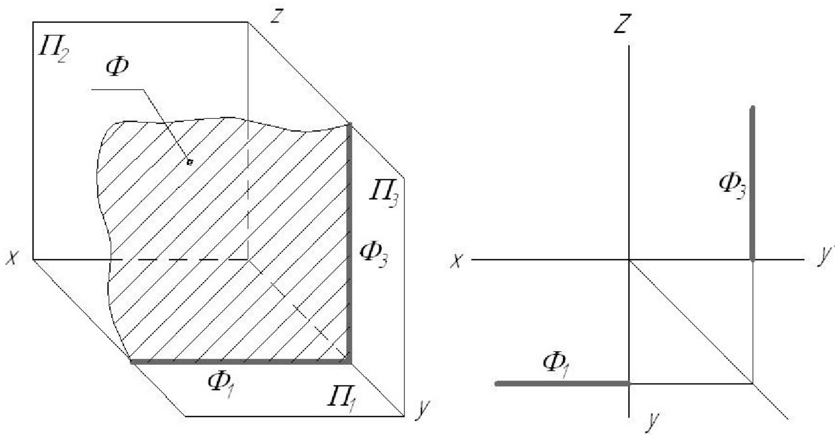


Рис. 2.26

Признаки и свойства горизонтальной плоскости:

1) горизонтальный и профильный следы плоскости Ф располагаются параллельно осям проекций *0x* и *0z* соответственно;
2) горизонтальные проекции всех точек, прямых и плоских фигур, лежащих во фронтальной плоскости, находятся на ее горизонтальном следе, профильные проекции – на профильном;
3) фронтальные проекции плоских фигур, лежащих в плоскости, равны их натуральным величинам.

3. **Профильная плоскость** – плоскость, параллельная профильной плоскости проекций.

Признаки и свойства профильной плоскости:

1) фронтальный и горизонтальный следы плоскости Р располагаются параллельно осям проекций *0z* и *0y* соответственно;
2) фронтальные проекции всех точек, прямых и плоских фигур, лежащих в профильной плоскости, находятся на ее фронтальном следе, горизонтальные проекции – на горизонтальном;
3) профильные проекции плоских фигур, лежащих в плоскости, равны их натуральным величинам.

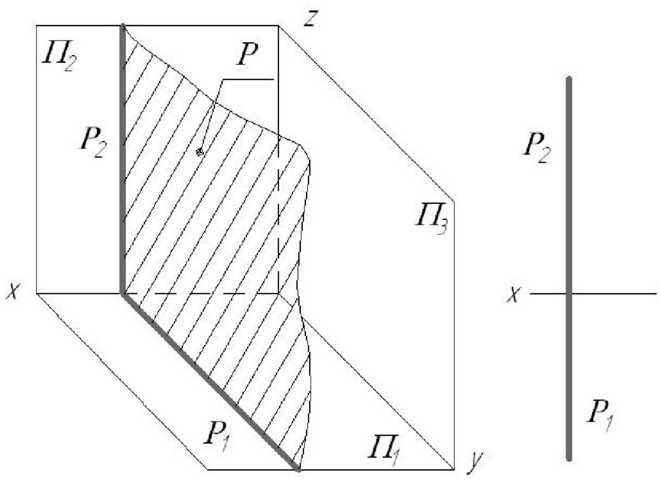


Рис. 2.27

Лекция 3

3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ТОЧКИ, ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

3.1. Взаимное расположение точки и прямой

Возможны два варианта расположения точки относительно прямой:

1) точка принадлежит прямой (рис. 3.1 а), тогда, согласно основным свойствам прямоугольного проецирования[4], на КЧ ее проекции лежат на одноименных проекциях прямой.

$$A \in l \Rightarrow \begin{cases} A_1 \in l_1 \\ A_2 \in l_2 \end{cases};$$

2) точка не принадлежит прямой (рис. 3.1 б), если хотя бы одна из проекций точки не принадлежит проекции прямой.

$$B \notin k \Rightarrow \begin{cases} B_1 \in k_1 \\ B_2 \notin k_2 \end{cases}; \quad C \notin k \Rightarrow \begin{cases} C_1 \notin k_1 \\ C_2 \notin k_2 \end{cases}.$$

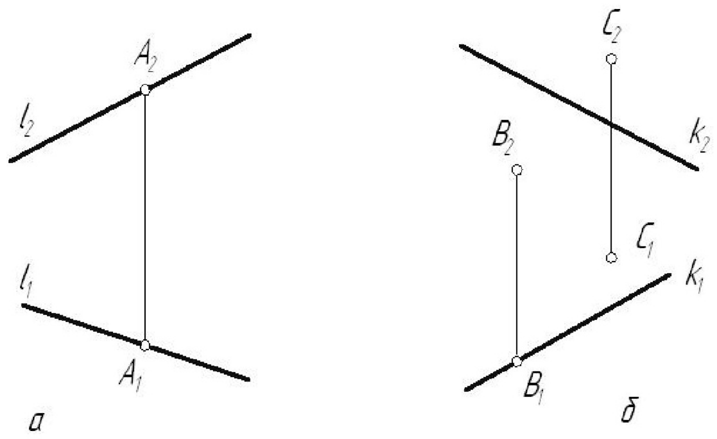


Рис. 3.1

[4] См. п. 1.2

3.2. Взаимное расположение прямых

Прямые в пространстве могут занимать относительно друг друга одно из трех положений:

1) быть параллельными;
2) пересекаться;
3) скрещиваться.

***Параллельными** называются прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек.*

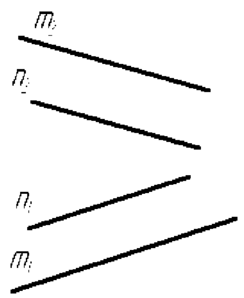


Рис. 3.2

Если прямые параллельны друг другу, то на КЧ их одноименные проекции тоже параллельны (см. п. 1.2).

$$m \parallel n \Rightarrow \begin{cases} m_1 \parallel n_1 \\ m_2 \parallel n_2 \end{cases}.$$

***Пересекающимися** называются прямые, лежащие в одной плоскости и имеющие одну общую точку.*

У пересекающихся прямых на КЧ одноименные проекции пересекаются в проекциях точки A. Причем фронтальная (A_2) и горизонтальная (A_1) проекции этой точки должны находиться на одной линии связи.

$$c \cap d = A \Rightarrow \begin{cases} c_1 \cap d_1 = A_1 \\ c_2 \cap d_2 = A_2 \end{cases}.$$

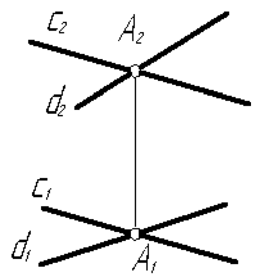


Рис. 3.3

***Скрещивающимися** называются прямые, лежащие в параллельных плоскостях и не имеющие общих точек.*

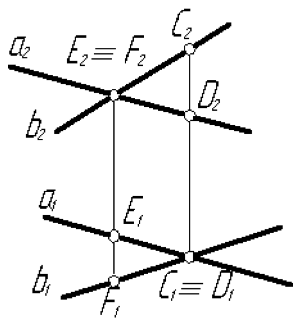


Рис. 3.4

Если прямые скрещивающиеся, то на КЧ их одноименные проекции могут пересекаться, но точки пересечений одноименных проекций не будут лежать на одной линии связи.

На рис. 3.4 точка C принадлежит прямой b, а точка D – прямой a. Эти точки находятся на одинаковом расстоянии от фронтальной плоскости проекций. Аналогично точки E и F принадлежат разным прямым, но находятся на одном расстоянии от горизонтальной плоскости проекций. Поэтому на КЧ их фронтальные проекции совпадают.

3.3. Принадлежность прямой и точки плоскости

Возможны два случая расположения точки относительно плоскости: точка может принадлежать плоскости или не принадлежать ей (рис. 3.5).

Признак принадлежности точки и прямой плоскости:

***Точка принадлежит плоскости**, если принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости.*

***Прямая принадлежит плоскости**, если имеет с ней две общие точки или имеет с ней одну общую точку и параллельна другой прямой, лежащей в этой плоскости.*

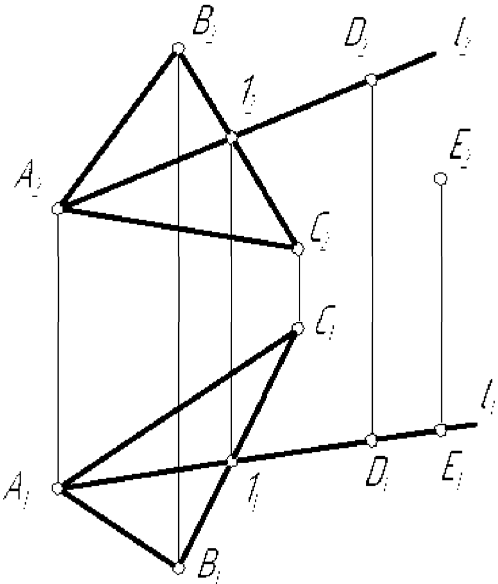


Рис. 3.5

На рис. 3.5 изображена плоскость $\Sigma(\Delta ABC)$ и точки D и E. Точка D принадлежит плоскости, т. к. принадлежит прямой l, имеющей с этой плоскостью две общие точки – *1* и A. Точка E не принадлежит плоскости, т.к. через нее нельзя провести прямую, лежащую в данной плоскости.

$$\left.\begin{matrix} D_1 \in l_1 \\ D_2 \in l_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D \in l(A,1) \subset \Sigma(\Delta ABC) \Rightarrow D \in \Sigma;$$

$$\left.\begin{matrix} E_1 \in l_1 \\ E_2 \notin l_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow E \notin l(A,1) \subset \Sigma(\Delta ABC) \Rightarrow E \notin \Sigma.$$

На рис. 3.6 показана плоскость $\Theta(a \cap b)$ и прямая t, лежащая в этой плоскости, т.к. имеет с ней общую точку *1* и параллельна прямой a.

$$\left.\begin{matrix} t \cap b = 1 \\ t \parallel a \end{matrix}\right\} \Rightarrow t \subset \Theta(a \cap b).$$

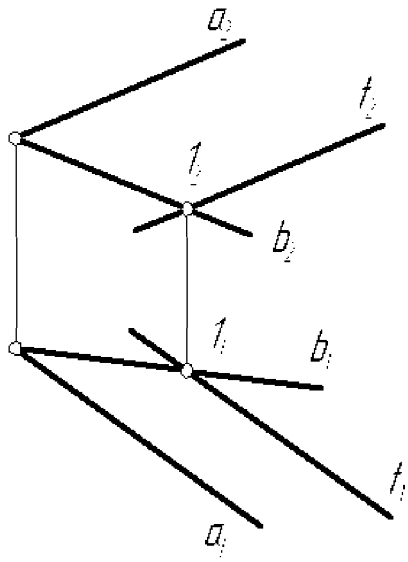


Рис. 3.6

3.4. Линии уровня плоскости

***Линиями уровня плоскости** называются прямые, лежащие в плоскости и параллельные одной из плоскостей проекций.*

Существуют три линии уровня плоскости: горизонталь плоскости, фронталь плоскости и профильная прямая плоскости.

1. **Горизонталь плоскости** – прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций.

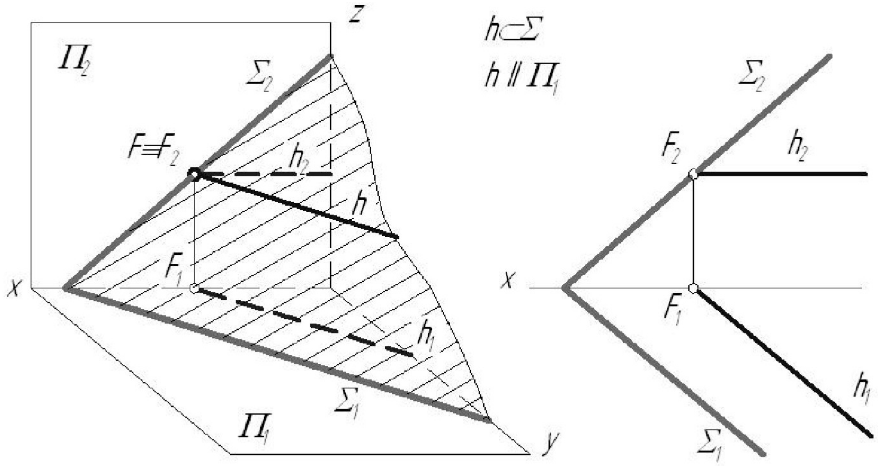


Рис. 3.7

Признаки и свойства горизонтали плоскости:

1) все горизонтали плоскости параллельны друг другу;
2) фронтальный след горизонтали (точка F) принадлежит фронтальному следу плоскости;
3) горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу плоскости.

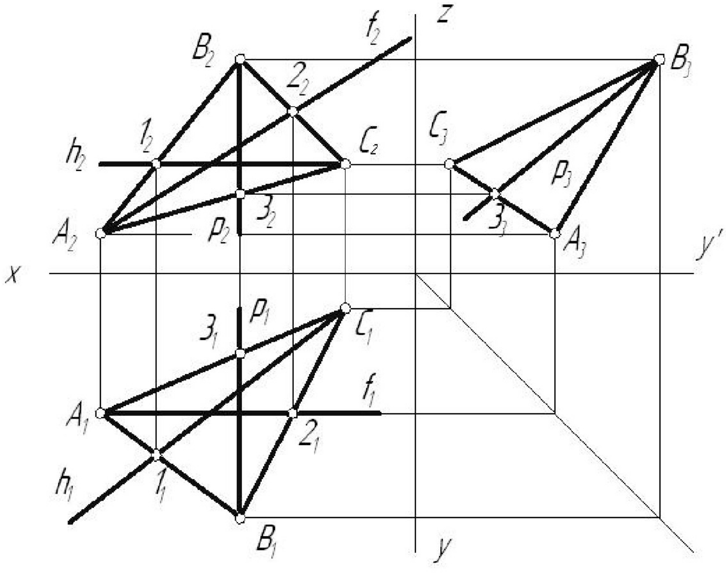


Рис. 3.8

На рис. 3.8 приведена плоскость общего положения, заданная ΔABC, и принадлежащая ей горизонталь h. Если плоскость не задана следами, то построение горизонтали плоскости начинают с построения ее фронтальной проекции, идущей параллельно оси x. Т.к. горизонталь принадлежит плоскости, то она имеет с ней две общие точки – *1* и *C*. Зная их фронтальные проекции 1_2 и C_2, по линиям связи можно получить горизонтальные проекции 1_1 и C_1, а затем, соединив между собой, получить горизонтальную проекцию горизонтали.

2. **Фронталь плоскости** – прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций.

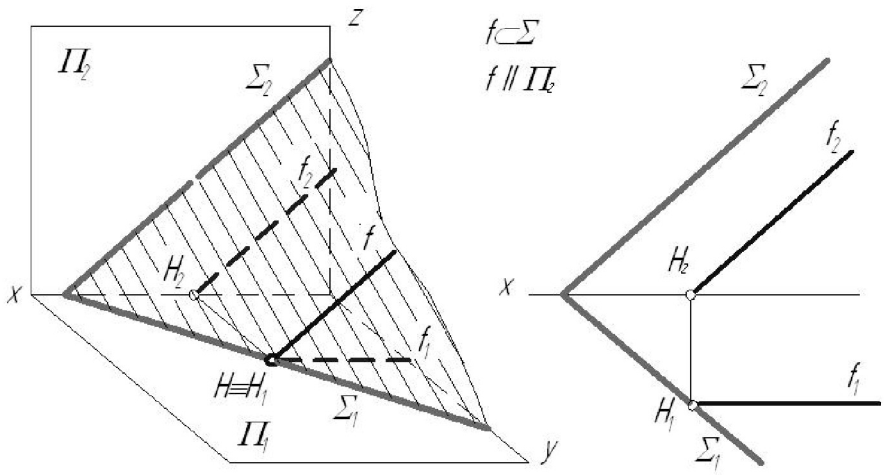


Рис. 3.9

<u>Признаки и свойства фронтали плоскости:</u>

1) все фронтали плоскости параллельны друг другу;
2) горизонтальный след фронтали (точка *H*) принадлежит горизонтальному следу плоскости;
3) фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу плоскости.

Если плоскость не задана следами, то построение фронтали плоскости начинают с построения ее горизонтальной проекции, идущей параллельно оси *x* (рис. 3.8). Т.к. фронталь принадлежит плоскости, то имеет с ней две общие точки – *2* и *A*. Имея их горизонтальные проекции 2_1 и A_1, по линиям связи можно получить фронтальные проекции 2_2 и A_2, а затем, соединив между собой, получить фронтальную проекцию фронтали.

3. **Профильная прямая плоскости** – прямая лежащая в плоскости и параллельная профильной плоскости проекций (рис. 3.10).

<u>Признаки и свойства профильной прямой плоскости:</u>

1) все профильные прямые плоскости параллельны друг другу;
2) фронтальный след профильной прямой (точка *F*) принадлежит фронтальному следу плоскости, а ее горизонтальный след (точка *H*) – горизонтальному следу плоскости;
3) профильная проекция профильной прямой параллельна профильному следу плоскости.

Если плоскость не задана следами, то построение профильной прямой плоскости начинают с построения ее фронтальной или горизонтальной проекций, идущих перпендикулярно оси *x* (рис. 3.10).

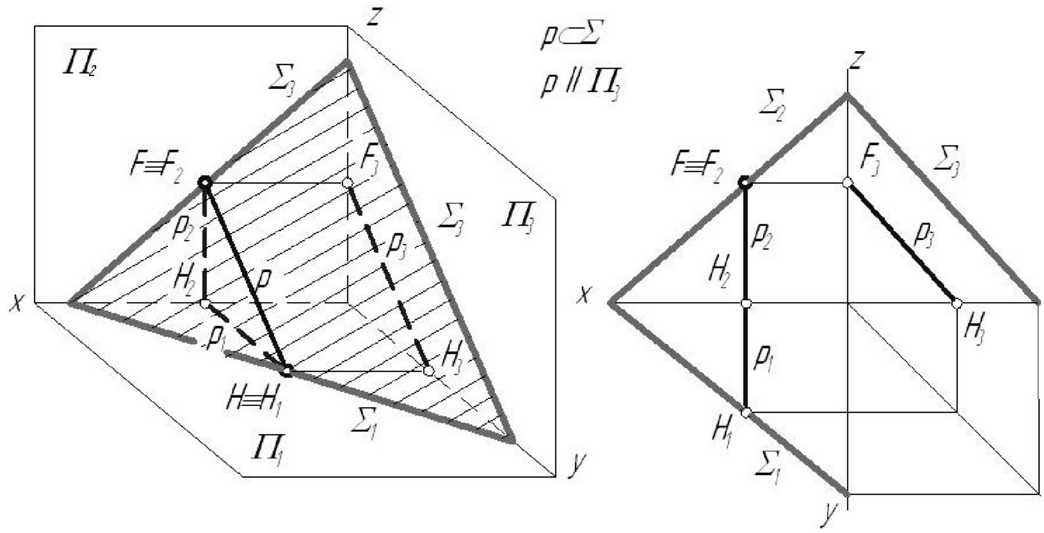


Рис. 3.10

3.5. Взаимное расположение плоскостей

Плоскости по отношению друг к другу могут занимать два положения: быть параллельными или пересекаться.

Параллельные плоскости не имеют ни одной общей точки.

Если плоскости параллельны, то на КЧ параллельны их одноименные следы. На рисунке 3.11 изображены две параллельные плоскости:

$$\Sigma \parallel \Theta \Rightarrow \begin{cases} \Sigma(\Sigma_1, \Sigma_2), \Theta(\Theta_1, \Theta_2) \\ \Sigma_1 \parallel \Theta_1, \Sigma_2 \parallel \Theta_2 \end{cases}.$$

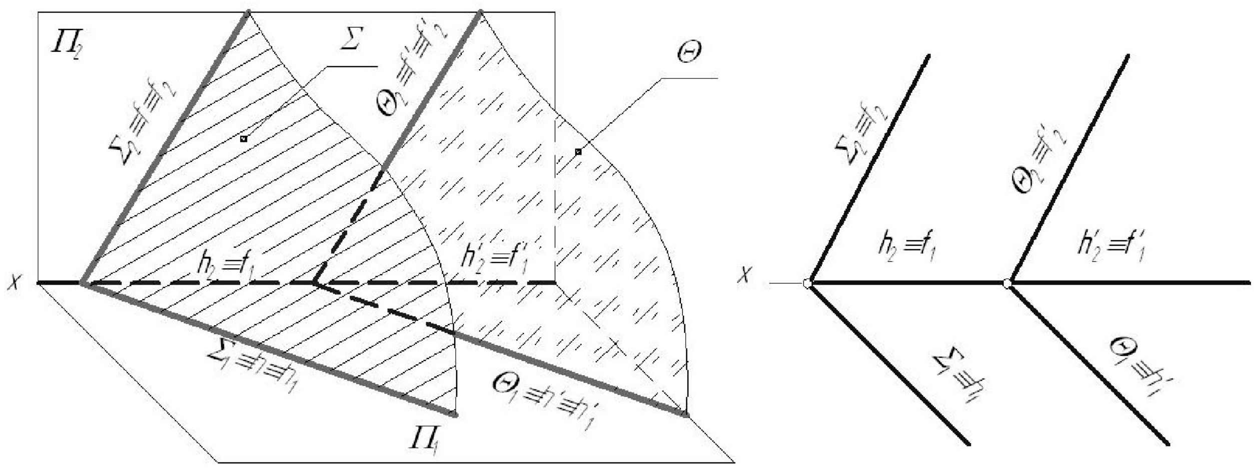


Рис. 3.11

<u>**Признак параллельности плоскостей:**</u>

Плоскости параллельны*, если пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым второй плоскости.*

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma(a \cap b), \Theta(c \cap d) \\ a \parallel c, b \parallel d\end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta .$$

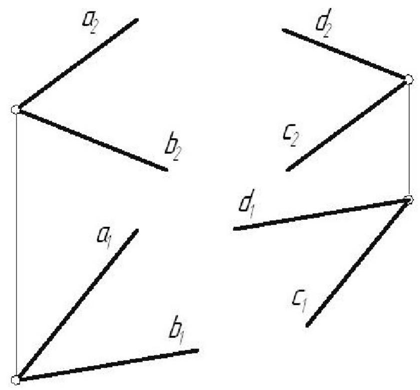


Рис. 3.12

Если две плоскости не параллельны, то они обязательно пересекаются и результатом их пересечения является прямая.

Рассмотрим сначала **частные случаи** пересечение двух плоскостей.

Пример 1. *Пересекаются плоскость общего положения* $\Theta(k \cap m)$ *и горизонтально-проецирующая плоскость* $\Sigma(\Sigma_1)$, *заданная следом.*

Этот случай является основой для решения задач на пересечение плоскостей в общем виде.

Так как одна из заданных плоскостей проецирующая, то все геометрические элементы, включая и линию пересечения плоскостей *l*, спроецируются на след этой плоскости.

На КЧ горизонтальная проекция линии пересечения определяется исходя из принадлежности ее проецирующей плоскости Σ, а фронтальная проекция – по принадлежности второй заданной плоскости.

$$1. \Sigma \perp \Pi_1 \Rightarrow l_2 \equiv \Sigma_2$$
$$2. l \subset \Theta \Leftrightarrow (l \cap m = 1, l \parallel k)$$

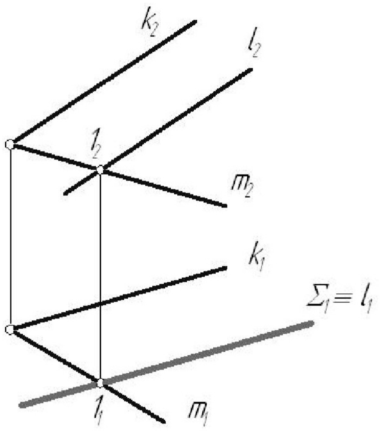


Рис. 3.13

Пример 2. *Пересекаются плоскости общего положения, заданные следами.*

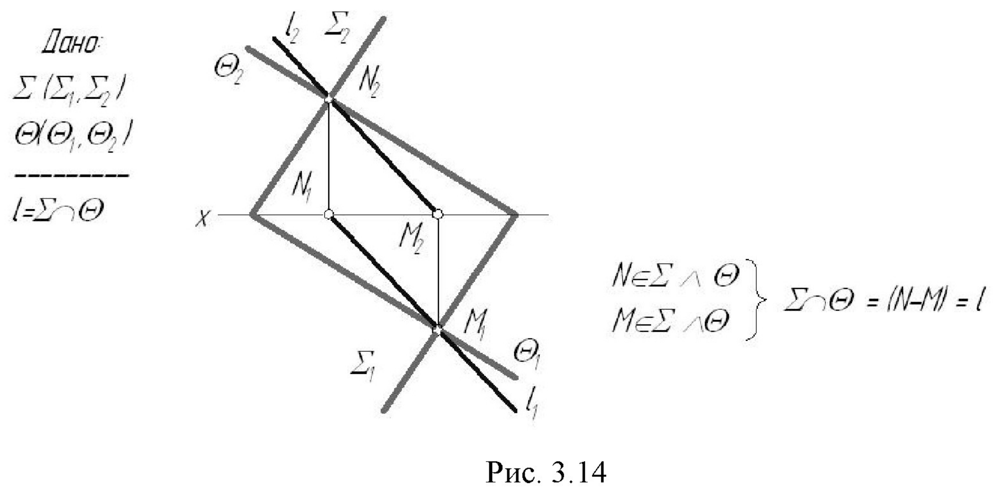


Рис. 3.14

В этом случае следы плоскости пересекаются в пределах чертежа, следовательно, линия пересечения этих плоскостей строится по двум точкам, являющимся следами линии пересечения, которые находятся в точках пересечения одноименных следов плоскостей.

> *Для построения* ***линии пересечения плоскостей*** в общем случае *необходимо найти две точки, одновременно принадлежащие этим плоскостям, или одну общую точку, если известно направление линии пересечения.*

Направление линии пересечения известно в том случае, если:

1) пересекающиеся плоскости содержат взаимно-параллельные прямые (линия пересечения плоскостей параллельна этим прямым);
2) две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей плоскости (линия пересечения перпендикулярна этой плоскости).

Общая точка для двух пересекающихся плоскостей в общем случае определяется с помощью вспомогательной плоскости частного положения, также пересекающей заданные плоскости по прямой (рис. 3.15).

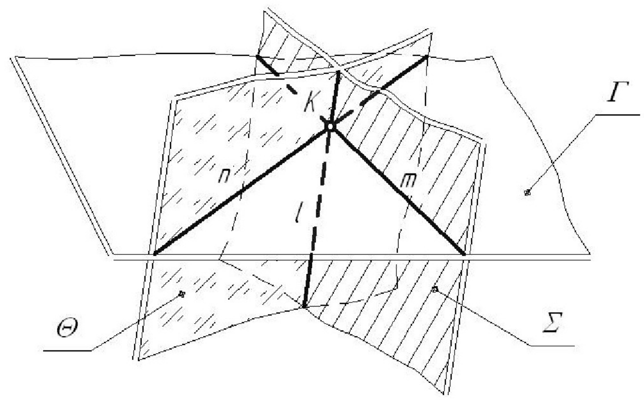


Рис. 3.15

<u>Общий случай</u>: *Пересекаются плоскости общего положения.*

$$\frac{\Sigma(\Delta ABC),\Theta(h \cap k)}{l = \Sigma \cap \Theta}.$$

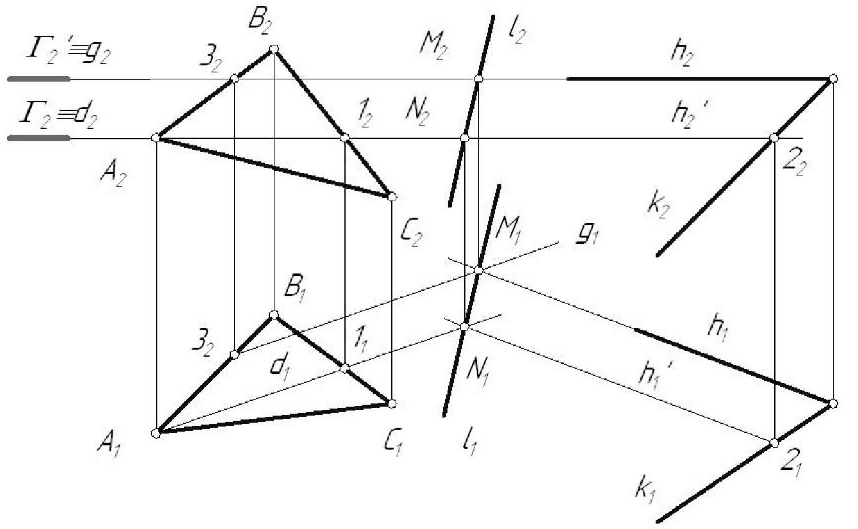


Рис. 3.16

1. $\Gamma(\Gamma_2) \parallel \Pi_1$.	4. $\Gamma'(\Gamma'_2) \parallel \Pi_1$.	
2. $\Gamma \cap \Sigma = d, \Gamma \cap \Theta = h'$.	5. $\Gamma' \cap \Sigma = g, \Gamma' \cap \Theta = h'$.	7. $\Sigma \cap \Theta = l(N,M)$.
3. $d \cap h = N$.	6. $g \cap h' = M$.	

3.6. Взаимное расположение прямой и плоскости

Для прямой и плоскости возможны три случая их взаимного расположения:

1) прямая линия может принадлежать плоскости[5];
2) быть параллельна плоскости;
3) пересекаться с ней.

3.6.1. Параллельность прямой и плоскости

<u>Признак параллельности прямой и плоскости</u> хорошо известен из курса стереометрии:

> ***Прямая параллельна плоскости****, если она параллельна прямой, принадлежащей этой плоскости.*

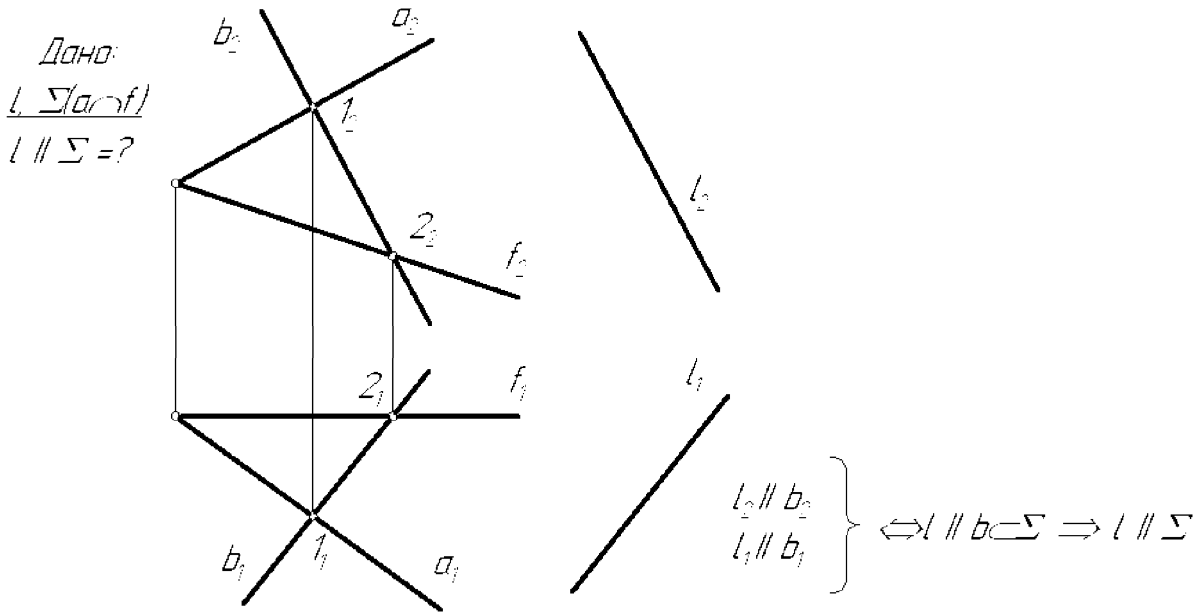


Рис. 3.16

3.6.2. Определение видимости на КЧ

Для улучшения наглядности изображений, заданных на КЧ, принято видимые для наблюдателя линии показывать сплошными, а невидимые – штриховыми линиями. При этом предполагается, что:

1) плоскости и поверхности непрозрачны;
2) луч зрения от наблюдателя всегда попадает перпендикулярно к той плоскости проекций, относительно которой определяется видимость.

На рисунке 3.17 заданы две пары точек:

1) точки A и B, находящиеся на одном проецирующем луче, направленном перпендикуляр-

---

[5] Задача принадлежности рассматривалась в п. 3.3.

но горизонтальной плоскости проекций Π_1;

2) точки C и D, через которые проходит проецирующий луч, перпендикулярный фронтальной плоскости проекций Π_2.

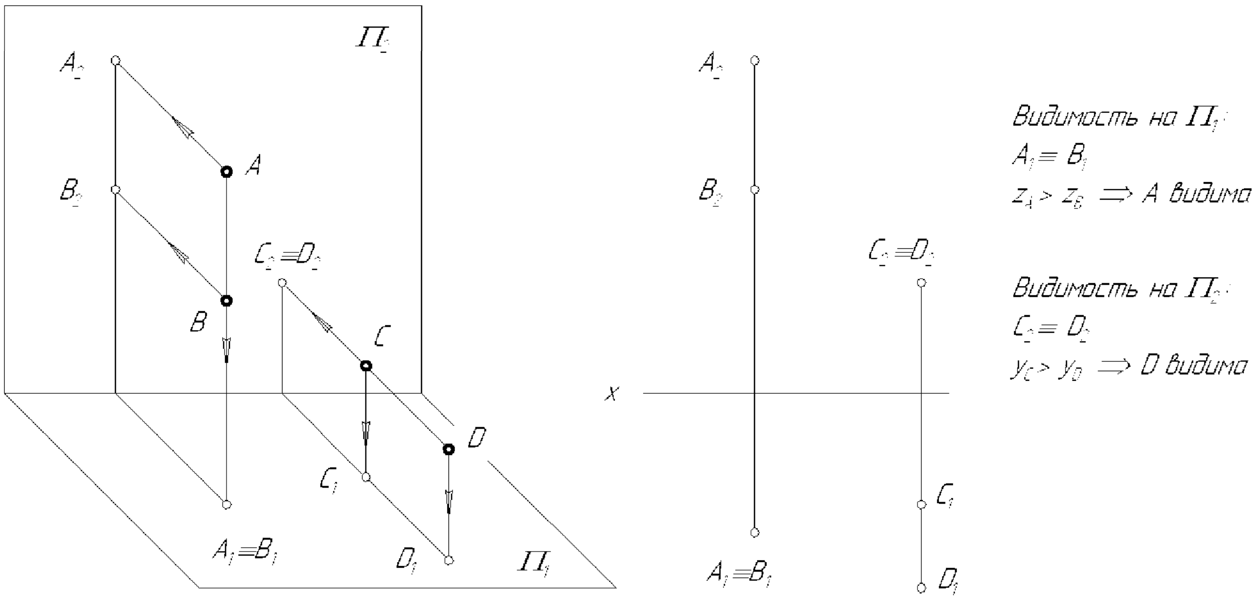


Рис. 3.17

Необходимо определить видимость точек относительно горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций.

Если на КЧ какие-либо две проекции точек совпадают, то для наблюдателя будет видима та точка, проекция которой находится дальше от оси проекций.

Точки A и B, C и D называются точками, конкурирующими в видимости, а сам метод определения видимости – **методом конкурирующих точек**.

Конкурирующими в видимости точками *называются точки, лежащие на одном проецирующем луче, но принадлежащие разным геометрическим объектам.*

3.6.3. Пересечение прямой с плоскостью

Прямая называется пересекающей плоскость, если она имеет с ней только одну общую точку. Рассмотрим различные случаи пересечения прямой и плоскости.

Частные случаи:

Пример 1. *Прямая – проецирующая, плоскость – частного положения.*

На КЧ необходимо построить проекции точки пересечения прямой с плоскостью и определить видимость этой прямой относительно горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций.

Точка K должна одновременно принадлежать и прямой, и плоскости.

1) Горизонтальную проекцию точки пересечения находим из условия принадлежности ее прямой i. Так как все точки, лежащие на горизонтально-проецирующей прямой, совпадают с ее следом: $K_1 \equiv i_1$.

2) Определение фронтальной проекции точки пересечения сводится к задаче на принадлежность точки K плоскости Σ:

$$\Sigma \supset c \supset K \Rightarrow \begin{cases} K_1 \in c_1 \\ K_2 \in c_2 \end{cases}.$$

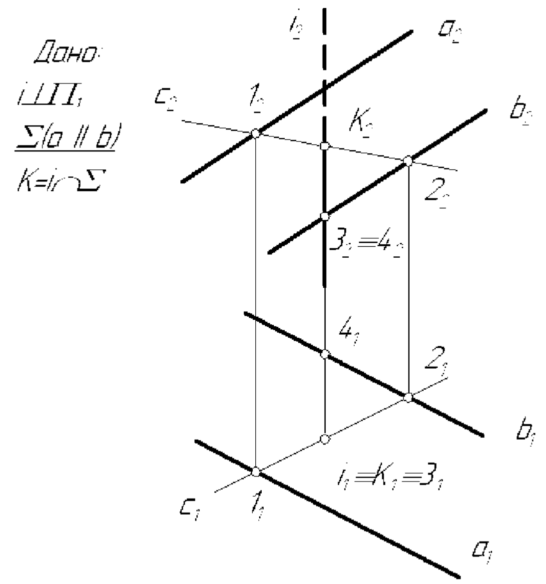


Рис. 3.18

Пример 2. *Прямая – общего положения, плоскость – проецирующая.*

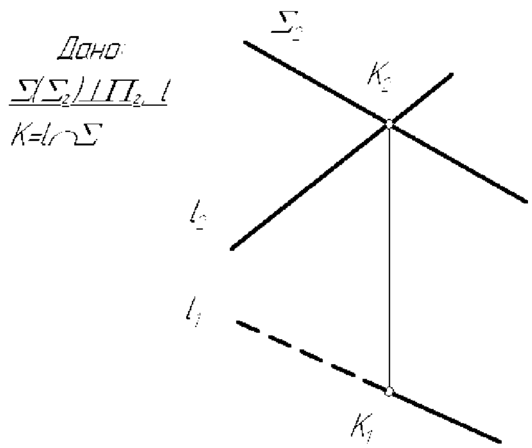


Рис. 3.19

В данном случае фронтальная проекция точки пересечения лежит на следе плоскости

$$K_2 \in \Sigma_2.$$

Построение недостающей горизонтальной проекции точки пересечения сводится к задаче на принадлежность точки прямой:

$$K \in l \Rightarrow (K_2 \in l_2, K_1 \in l_1).$$

Общий случай:

Пересечение *прямой общего положения с плоскостью общего положения* (первая основная позиционная задача).

В общем случае задача на пересечение прямой с плоскостью решается с помощью вспомогательной секущей плоскости, на которую накладывается ряд условий:

1) она должна быть плоскостью частного положения;
2) должна проходить через заданную прямую

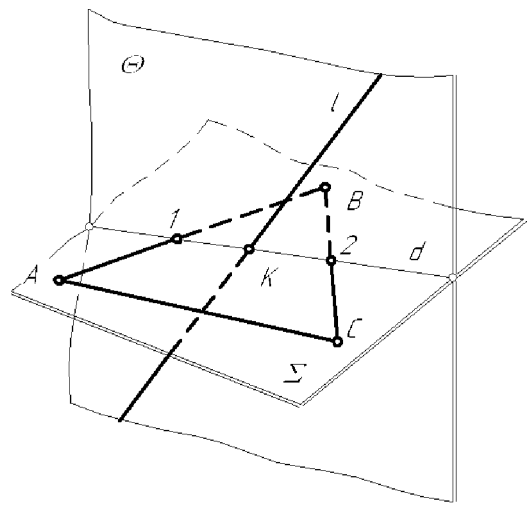


Рис. 3.20

<u>Порядок нахождения точки пересечения прямой с плоскостью:</u>

1) Через прямую l проводится вспомогательная плоскость частного положения Θ.
2) Определяется линия пересечения вспомогательной плоскости Θ с заданной плоскостью $\Sigma(\Delta ABC)$.
3) На пересечении линии пересечения плоскостей $d(1,2)$ с заданной прямой находится точка K, являющаяся искомой точкой.

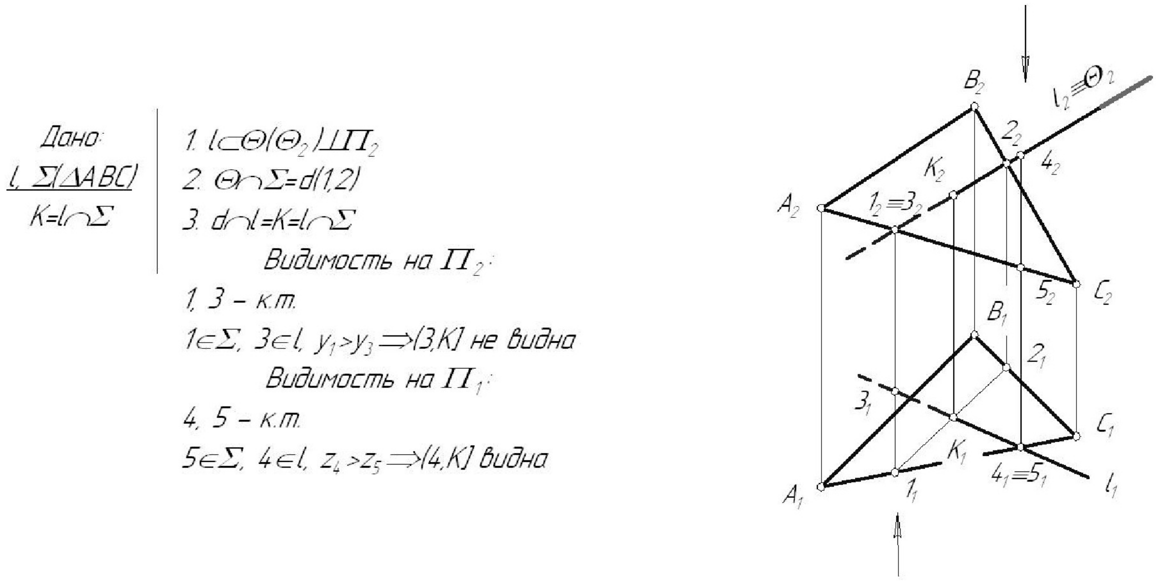


Рис. 3.21

Лекция 5

4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕКСКИХ ОБЪЕКТОВ

4.1. Проецирование прямого угла

В общем случае плоский угол проецируется на плоскость проекций с искажением.

Возьмем две прямые общего положения l и k. Прямая l пересекает горизонтальную плоскость проекций под углом α, а прямая k – под углом α'. Между собой прямые пересекаются под произвольным углом φ. Прямоугольная проекция угла φ_1 определяется по формуле:

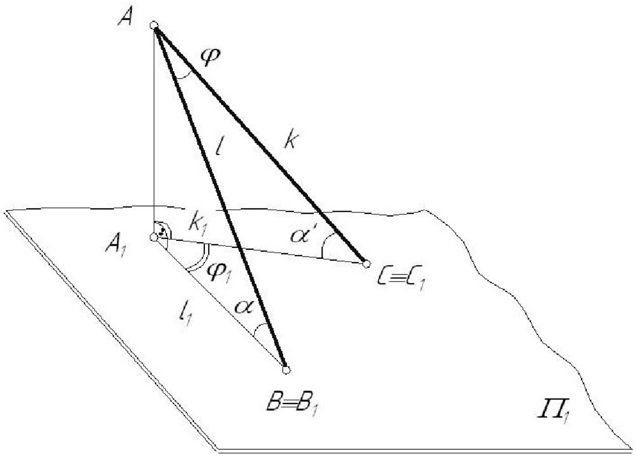


Рис. 4.1

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\varphi - \sin\alpha\sin\alpha'}{\cos\alpha\cos\alpha'}.$$

Пусть $\varphi = 90°$, $\cos\varphi = 0$, тогда при $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$.

$$\cos\varphi_1 = -\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\cos\alpha\cos\alpha'} = -tg\alpha tg\alpha'.$$

При $\alpha = 0, \beta \neq 0$, $\cos\varphi_1 = 0$, следовательно, $\varphi_1 = 90°$.

<u>Теорема о проецировании прямого угла:</u>

Прямой угол на плоскость проекций проецируется без искажения, если, по крайней мере, один из его лучей параллелен этой плоскости проекций.

Пусть прямые *l(AB)* и *k(AC)* пересекаются под прямым углом. Прямая *l* параллельна горизонтальной плоскости проекций. Тогда:

1. $\left.\begin{array}{l} AB \perp AC(\textit{по условию}) \\ AB \perp AA_1 \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp \Theta(AC \cap AA_1).$

$A_1B_1 \,//\, AB \Rightarrow A_1B_1 \perp \Theta$.

2. $A_1B_1 \perp A_1C_1$.

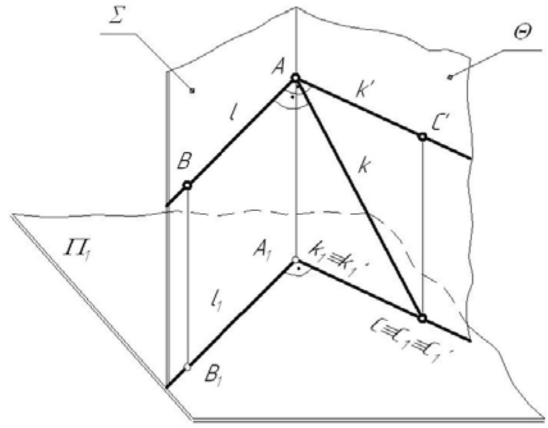


Рис. 4.2

Все прямые, лежащие в плоскости Θ, на горизонтальную плоскость проекций проецируются перпендикулярно следу плоскости Σ.

<u>Пример</u>: *Построить перпендикуляр из точки А к горизонтали.*

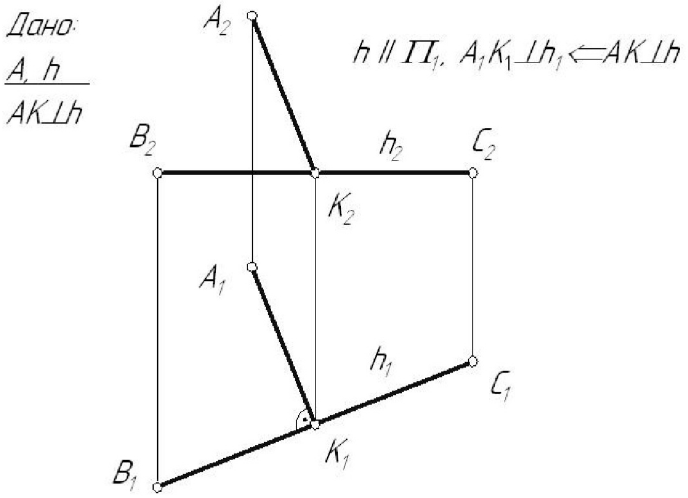


Рис. 4.3

4.2. Линия наибольшего наклона плоскости

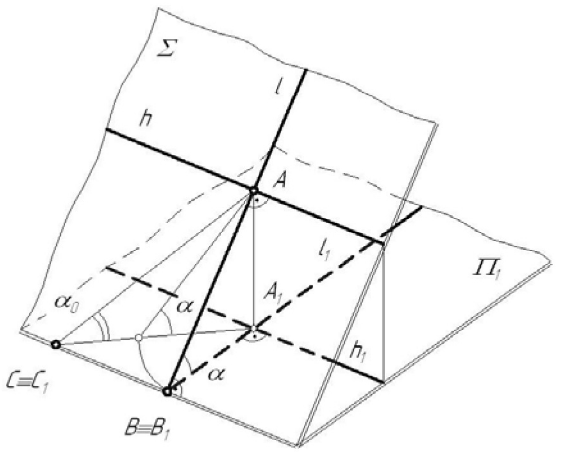
Прямая, лежащая в плоскости и образующая с плоскостью проекций наибольший угол, называется ***линией наибольшего наклона плоскости.***

Линии наибольшего наклона перпендикулярны к соответствующим линиям уровня плоскости.

Угол между линией наибольшего наклона и плоскостью проекций равен углу наклона самой плоскости к этой плоскости проекций. Поэтому с помощью этой линии определяют двухгранные углы между заданной плоскостью и соответствующими плоскостями проекций.

<u>Теорема:</u>

Прямые, лежащие в плоскости и перпендикулярные соответствующим линиям уровня плоскости, являются линиями наибольшего наклона.



Возьмем плоскость общего положения Σ, наклоненную под углом α к горизонтальной плоскости проекций Π_1. Проведем в ней горизонталь h и две линии общего положения – прямую AB, перпендикулярную горизонтали, и произвольно наклоненную прямую AC.

Рис. 4.4

В результате построений угол $\angle ABC$ прямой. Линию AB повернем вокруг проецирующего луча AA_1 до совмещения с плоскостью угла ACA_1. Из рисунка видно, что $\angle\alpha > \angle\alpha°$. Значит, прямая AB наклонена к плоскости проекций Π_1 под большим углом. Поэтому именно она называется линией наибольшего наклона.

<u>Пример:</u> *Определить действительную величину угла наклона плоскости* $\Sigma(a \cap b)$ *к горизонтальной плоскости проекций.*

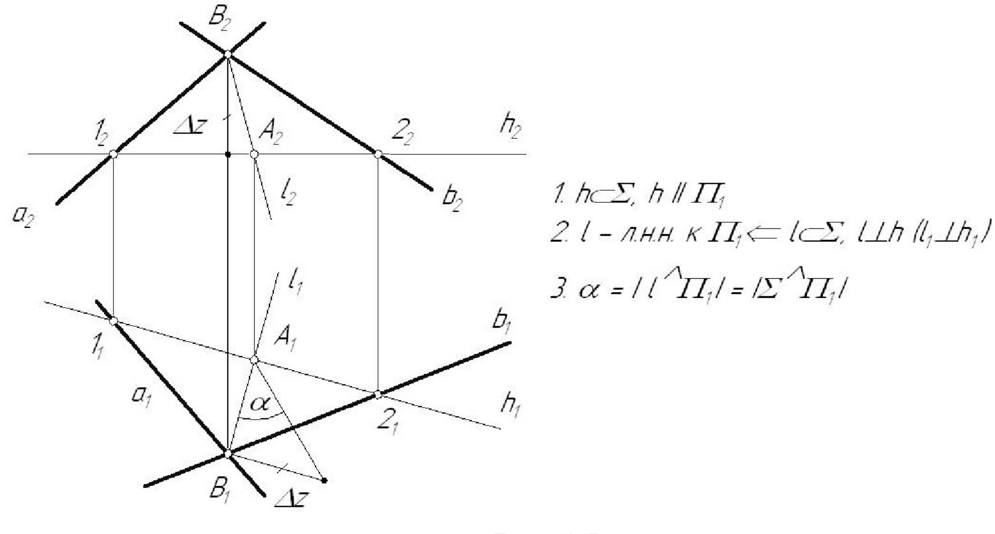


Рис. 4.5

Аналогично находятся углы наклона плоскости к фронтальной и профильной плоскостям проекций. Л.н.н. к фронтальной плоскости проекций перпендикулярна фронтали плоскости, а л.н.н. к профильной плоскости проекций – профильной прямой плоскости.

4.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

Из курса элементарной геометрии известно, что *прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.* Но, исходя из теоремы о проецировании прямого угла, перпендикуляр, проведенный к прямым общего положения, на КЧ проецируется с искажением. Поэтому применительно к начертательной геометрии признак перпендикулярности прямой и плоскости формулируется следующим образом.

<u>Признак перпендикулярности прямой и плоскости:</u>

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся линиям уровня этой плоскости.

Это связано с тем, что только к линиям уровня на плоскостях проекций можно построить прямой угол без искажения. В качестве линий уровня плоскости, при решении задач на перпендикулярность геометрических объектов, обычно выбирают горизонталь и фронталь.

Возьмем плоскость общего положения Σ и проведем в ней горизонталь и фронталь. Затем из точки пересечения линий уровня плоскости восстановим перпендикуляр *АК*.

На основании теоремы о проецировании прямого угла *горизонтальная проекция перпендикуляра к плоскости общего положения на КЧ располагается перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а следовательно, и к ее горизонтальному следу, а фронтальная проекция перпендикуляра – фронтальной проекции фронтали и фронтальному следу.*

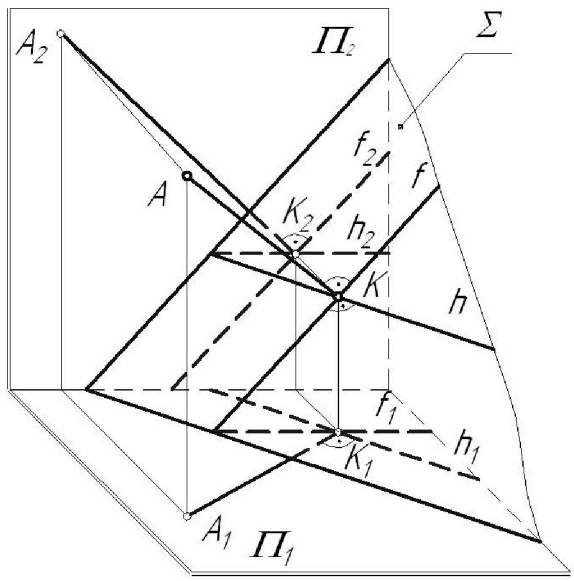


Рис. 4.6

<u>Пример:</u> *Из точки А провести перпендикуляр к плоскости $\Sigma(h \cap f)$ и найти его основание.*

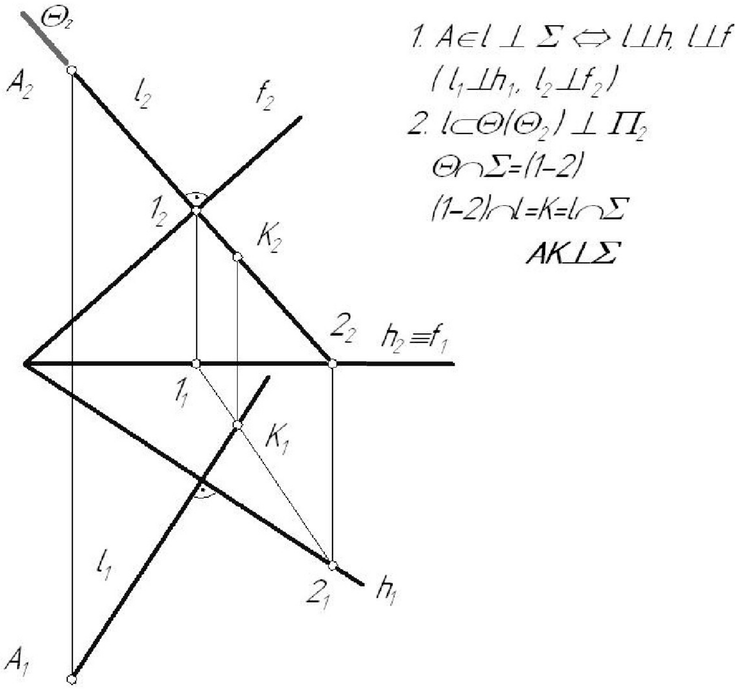


Рис. 4.7

Частный случай: *Прямая перпендикулярна проецирующей плоскости.*

В этом случае перпендикулярная прямая будет являться линией уровня и на КЧ *перпендикулярными будут вырожденная проекция плоскости (след проекций) и соответствующая проекция прямой.*

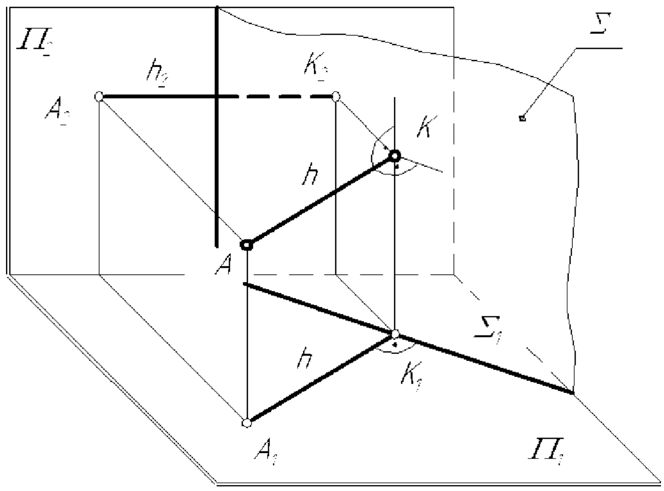


Рис. 4.8

Пример: *Найти расстояние от точки А до фронтально-проецирующей плоскости* $\Sigma(\Sigma_2)$.

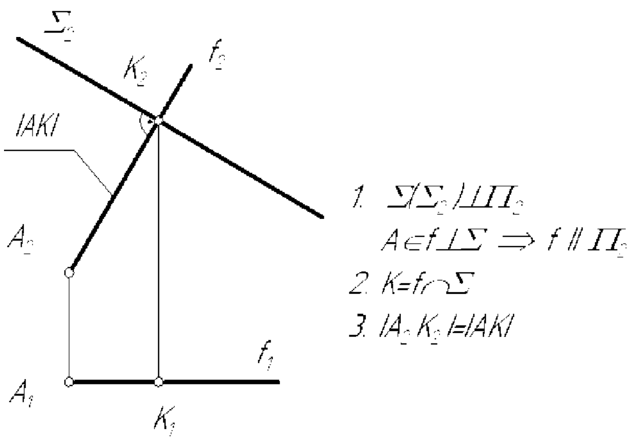


Рис. 4.9

4.4. Перпендикулярность плоскостей

Признак перпендикулярности плоскостей:

Плоскость перпендикулярна другой, если она проходит через перпендикуляр к этой плоскости.

Плоскость перпендикулярна другой плоскости, если она перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости.

Итак, зная, как располагаются проекции прямой, перпендикулярной плоскости, легко строить взаимно-перпендикулярные плоскости. Исходя из признака перпендикулярности плоскостей можно:

1) построить перпендикуляр к заданной плоскости и через него провести искомую плоскость

или

2) в заданной плоскости взять прямую и перпендикулярно ей провести искомую плоскость.

В любом из этих случаев задача будет иметь бесчисленное множество решений, если на искомую плоскость не наложены дополнительные условия.

Рассмотрим два примера построения перпендикулярных плоскостей.

<u>Пример</u>: *Через точку А провести плоскость, перпендикулярную плоскости* $\Sigma(a \| b)$.

Вариант 1:

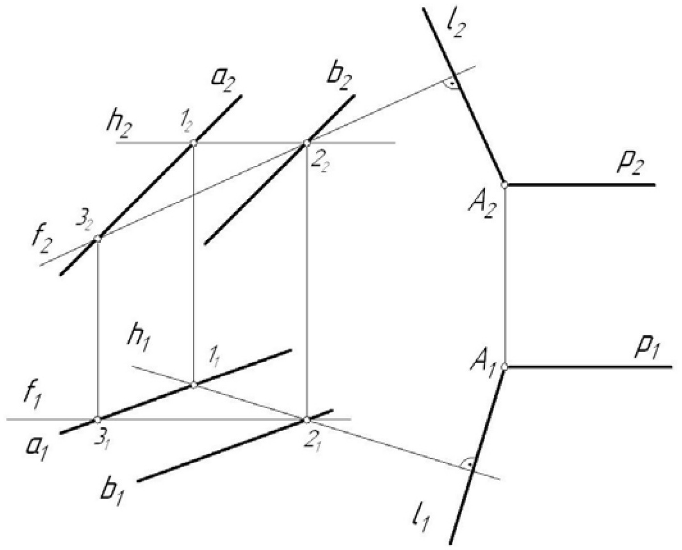


Рис. 4.10

Новая плоскость задана двумя пересекающимися прямыми, одна из которых отвечает условию перпендикулярности плоскостей (прямая *l*), в зависимости от выбора второй прямой, искомая плоскость может занимать различное положение в пространстве. В данном случае прямая *p* – профильно-проецирующая, следовательно, сама плоскость является профильно-проецирующей плоскостью.

Вариант 2:

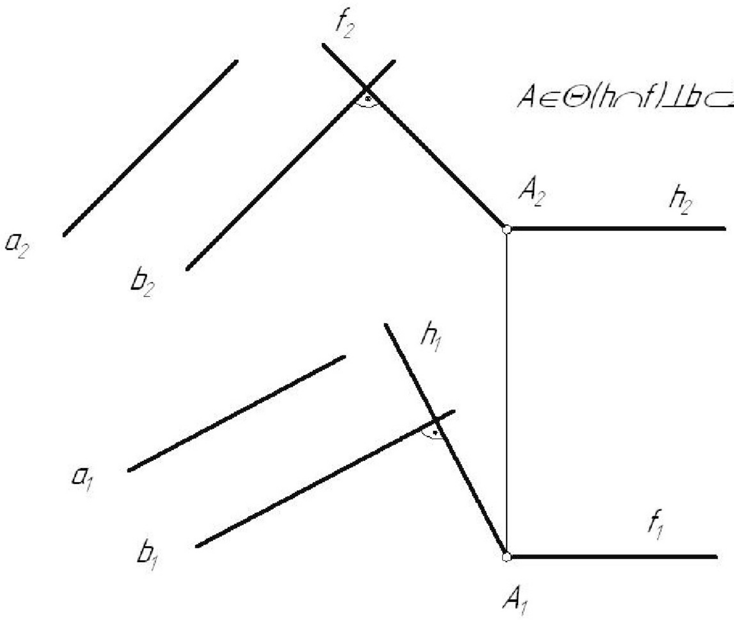


Рис. 4.11

4.5. Перпендикулярность прямых общего положения

<u>Признак перпендикулярности прямых:</u>

Прямые взаимно перпендикулярны, если через одну из них можно провести плоскость, перпендикулярную второй прямой.

Возьмем прямую общего положения *l* и точку *A*, не лежащую на ней. Для того чтобы провести перпендикуляр из точки к прямой, необходимо, следуя признаку перпендикулярности, через точку *A* провести плоскость, перпендикулярную заданной прямой, задав ее горизонталью и фронталью. Любая прямая, лежащая в этой плоскости, будет перпендикулярна прямой *l*. Например, прямые *l* и *m* – перпендикулярные скрещивающиеся прямые.

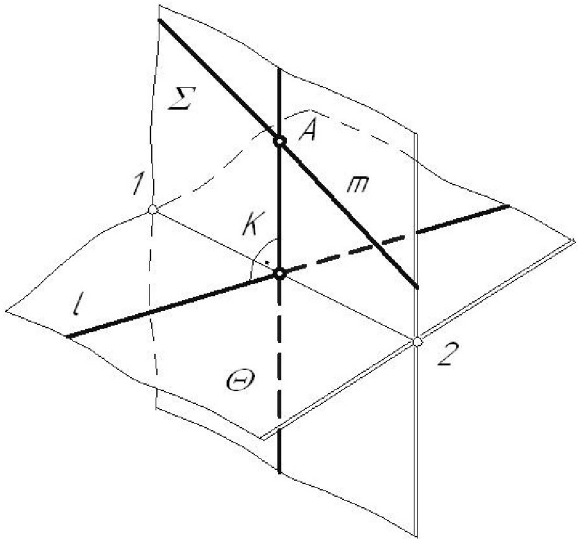
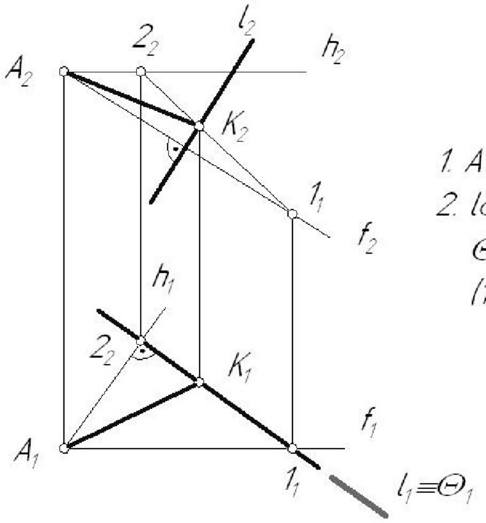


Рис. 4.12

Если требуется построить пересекающиеся перпендикулярные прямые, то сначала необходимо найти точку пересечения прямой *l* и перпендикулярной к ней плоскости Σ[6] .

<u>Пример</u>: *Опустить перпендикуляр из точки A на прямую l.*



1. $A \in \Sigma(h \cap f) \perp l \Rightarrow l \perp h,\ l \perp f$

2. $l \subset \Theta(\Theta_1) \perp \Pi_1$

$\Theta \cap \Sigma = (1\text{–}2)$

$(1\text{–}2) \cap l = K$

$AK \subset \Sigma \perp l \Rightarrow AK \perp l$

Рис. 4.13

[6] См. п/п 3.6.3

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ. ЧЕТЫРЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для упрощения решения метрических, а также некоторых позиционных задач могут применяться методы, позволяющие переходить от задания фигур общих положений к частным. Эти методы основываются на двух принципах:

1) замещение системы плоскостей проекций на новую систему плоскостей, в которой неподвижный геометрический объект занимает какое-либо частное положение (**способ замены плоскостей проекций**);
2) перемещение геометрического объекта в пространстве таким образом, чтобы он занял какое-либо частное положение в неподвижной системе плоскостей проекций (**способ вращения**).

В зависимости от расположения оси в пространстве, вокруг которой вращается геометрический объект, различают следующие виды способа вращения:

1) вращение вокруг линии уровня;
2) вращение вокруг проецирующей прямой;
3) плоско-параллельное перемещение.

Эти способы преобразования включают в себя **четыре основные задачи начертательной геометрии**:

1. *Преобразование комплексного чертежа таким образом, чтобы прямая общего положения стала линией уровня.*
2. *Преобразование комплексного чертежа таким образом, чтобы линия уровня стала проецирующей прямой.*
3. *Преобразование комплексного чертежа таким образом, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей плоскостью уровня.*
4. *Преобразование комплексного чертежа таким образом, чтобы проецирующая плоскость стала плоскостью уровня.*

5.1. Метод замены плоскостей проекций

Сущность этого метода заключается в том, что проецируемый объект не изменяет своего положения в пространстве, а заменяется система плоскостей проекций. Может быть заменена одна, две и более плоскостей. Замена производится до тех пор, пока геометрический объект не займет частное положение относительно новой плоскости проекций. При этом новая плоскость должна быть перпендикулярна оставшейся «старой» плоскости проекций.

Возьмем точку A, расположенную в ортогональной системе плоскостей проекций

$\frac{\Pi_2}{\Pi_1}$, и повернем вокруг нее горизонтальную плоскость проекций Π_1 в положение Π_5, получив таким образом новую ортогональную систему плоскостей проекций $\frac{\Pi_2}{\Pi_5}$. При этом должно соблюдаться следующее условие:

Расстояние от точки до «старой» плоскости проекций в новой системе плоскостей проекций должно остаться неизменным.

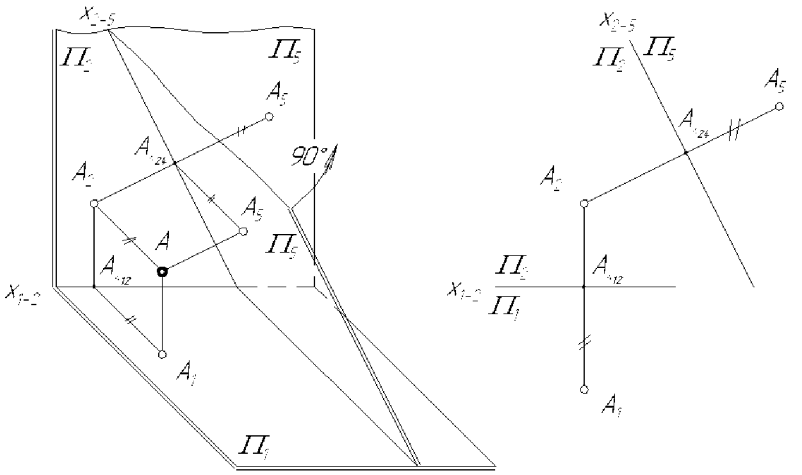


Рис. 5.1

$$\left.\begin{array}{l}\Pi_1 \to \Pi_5 \\ \Pi_5 \perp \Pi_2\end{array}\right\}$$

$$|AA_2| = |A_1A_{12}| = |A_5A_{25}|$$

1 основная задача. Преобразованием прямой общего положения в прямую уровня можно определить:

- натуральную длину отрезка;
- углы наклона прямой к плоскостям проекций.

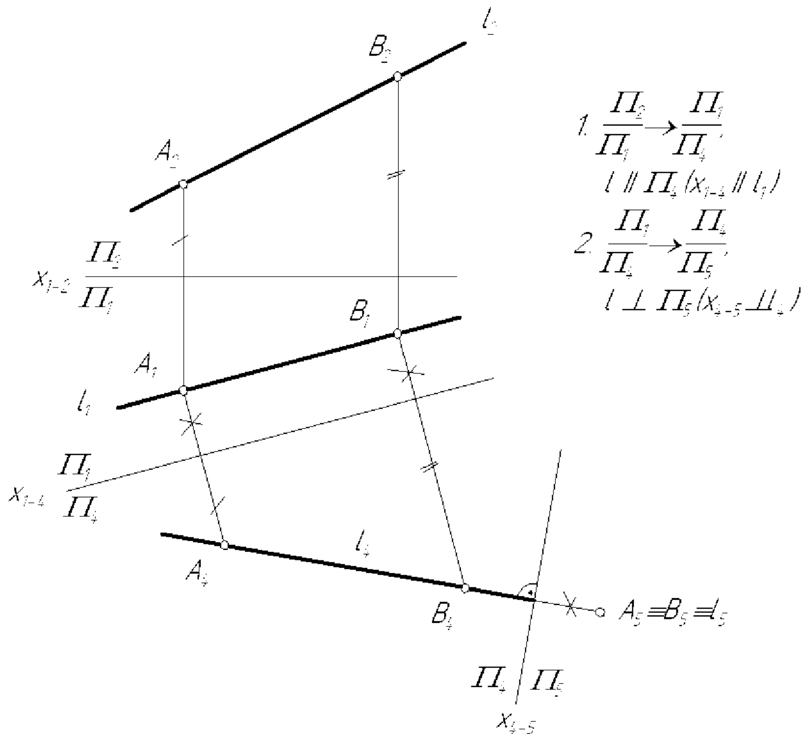


Рис. 5.2

2 основная задача. С помощью преобразования прямой уровня в проецирующую прямую можно найти:

– расстояние между точкой и прямой;

– расстояние между параллельными или скрещивающимися прямыми и т.п.

3 основная задача. Преобразованием плоскости общего положения в проецирующую плоскость можно определить:

– расстояние от точки до плоскости или расстояние между параллельными плоскостями;

– углы наклона плоскости к плоскостям проекций.

4 основная задача. Преобразованием проецирующей плоскости в плоскость уровня можно найти:

– натуральную величину плоской фигуры;

– угол между пересекающимися прямыми;

– центр описанной или вписанной окружности;

– построить биссектрису угла и т.п.

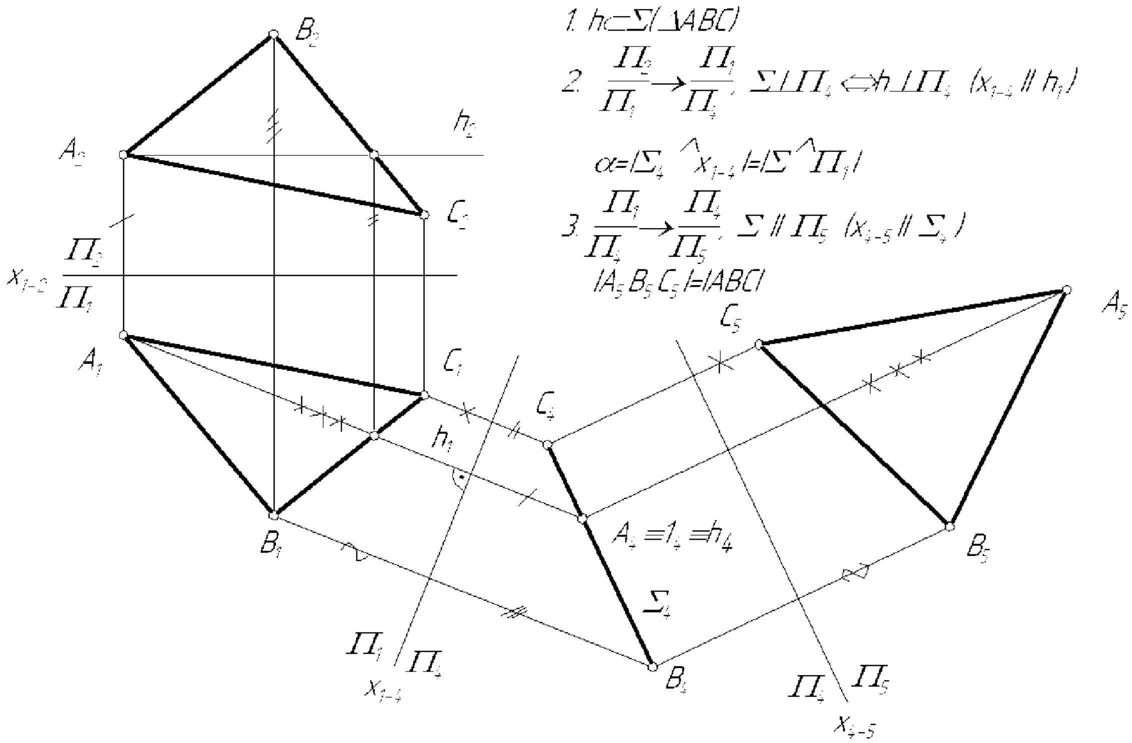


Рис. 5.3

5.2. Вращение вокруг линии уровня

В отличие от метода замены плоскостей проекций, вращением вокруг линии уровня плоскость общего положения в плоскость уровня можно преобразовать за одно вращение.

Сущность метода вращения вокруг линии уровня заключается в том, что плоский геометрический объект совмещается с плоскостью уровня, проходящей через ось вращения. И на соответствующую плоскость проекций плоская фигура проецируется без искажения. Каждая точка заданного геометрического объекта вращается в своей плоскости, перпендикулярной линии уровня. Траектория движения точки – окружность, центр которой находится на оси вращения, а радиус вращения равен расстоянию от точки до оси вращения.

Если за ось вращения взята горизонталь, то траектория вращения точки на горизонтальную плоскость проекций Π_1 проецируется в виде отрезка, перпендикулярного горизонтальной проекции горизонтали. Новое положение точки будет определено, когда горизонтальная проекция траектории ее движения будет равна натуральной величине радиуса вращения.

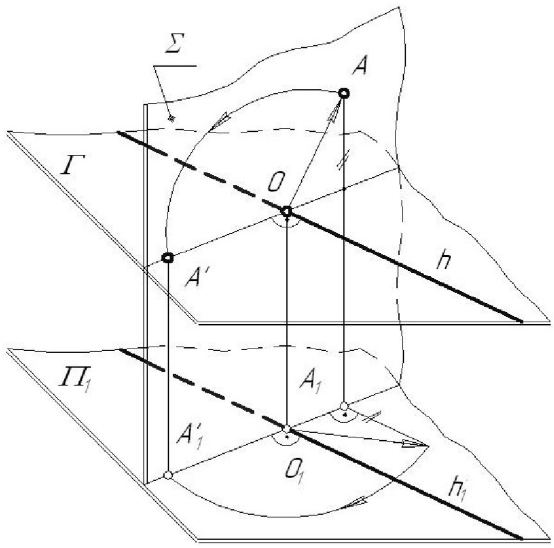


Рис. 5.4

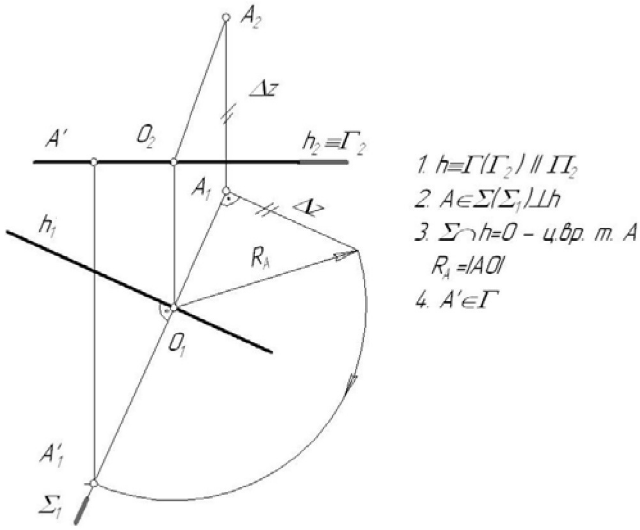


Рис. 5.5

Пример: *Определить натуральную величину треугольника* ΔABC.

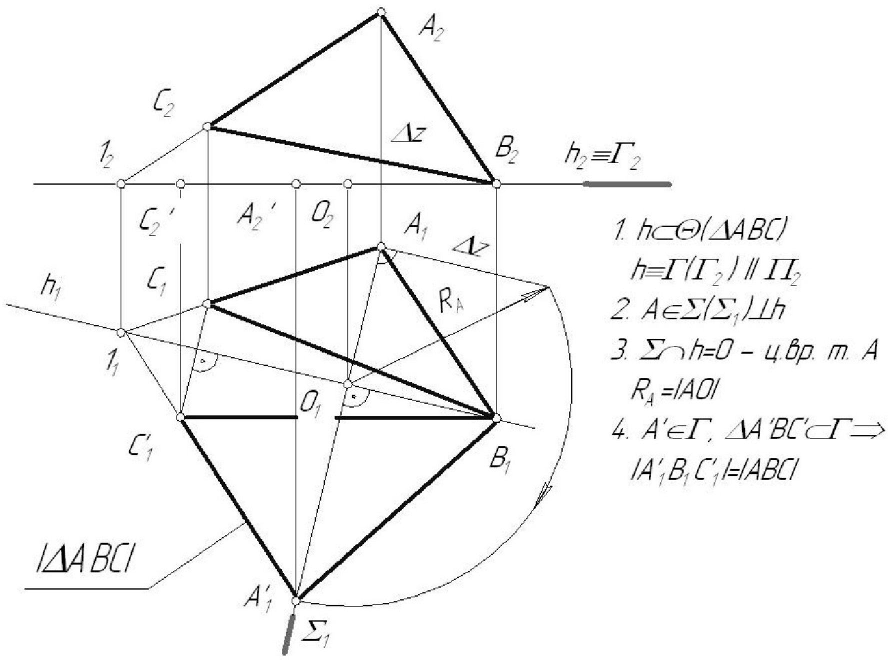


Рис. 5.6

Положение плоскости, при котором она становится плоскостью уровня, определяется вращением только одной ее точки, в данном случае – точки *A*.

5.3. Вращение вокруг проецирующих прямых

Этот метод, как и метод вращения вокруг линии уровня, предполагает неизменность системы плоскостей проекций, в которой вокруг проецирующей оси вращается геометрический объект – точка, прямая или плоская фигура. При этом все точки, принадлежащие геометрическому объекту, вращаются в параллельных плоскостях, расположенных перпендикулярно оси вращения.

5.3.1. Вращение точки

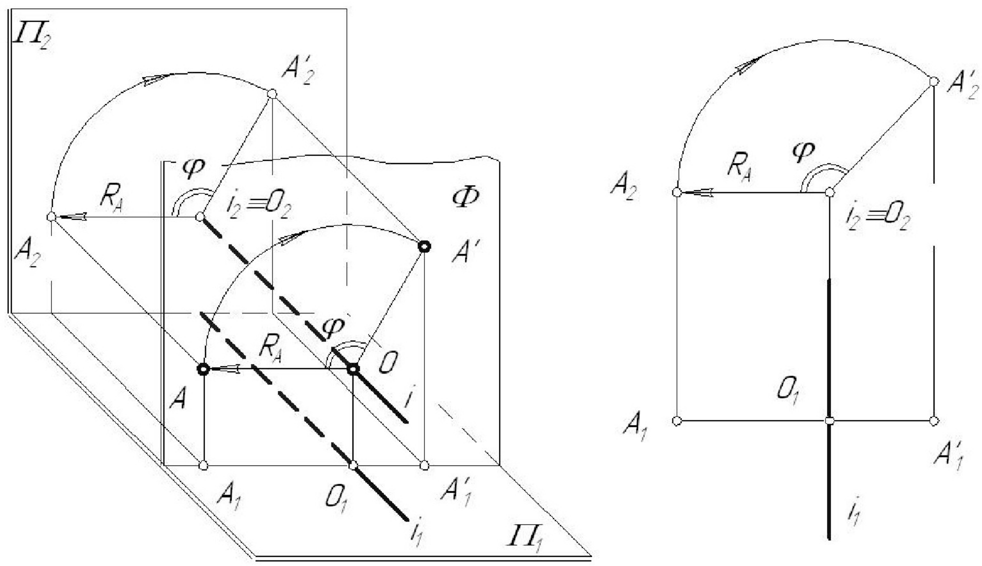


Рис. 5.7

Траектория движения точки – окружность (дуга окружности), центр которой находится на пересечении оси вращения с плоскостью вращения, а радиус вращения равен расстоянию от точки до оси.

На КЧ траектория движения проецируется без искажения на ту плоскость проекций, к которой ось вращения перпендикулярна. На другие плоскости проекций она проецируется в виде отрезка, параллельного оси проекций.

5.3.2. Вращение прямой

Вращение прямой линии на КЧ сводится к вращению на один и тот же угол двух принадлежащих ей точек. Однако вращение прямой можно свести к вращению одной ее точки на заданный угол, если учитывать, что *при вращении вокруг проецирующей оси проекция прямой на плоскость проекций, к которой эта ось перпендикулярна, остается равной самой себе.*

Возьмем отрезок AB, принадлежащий прямой общего положения, и повернем его вокруг фронтально-проецирующей оси j так, чтобы он стал параллелен горизонтальной плоскости проекций (**1 основная задача**). На КЧ показана траектория вращения только одной точки, принадлежащей заданной прямой, находящейся на минимальном расстоянии от оси вращения.

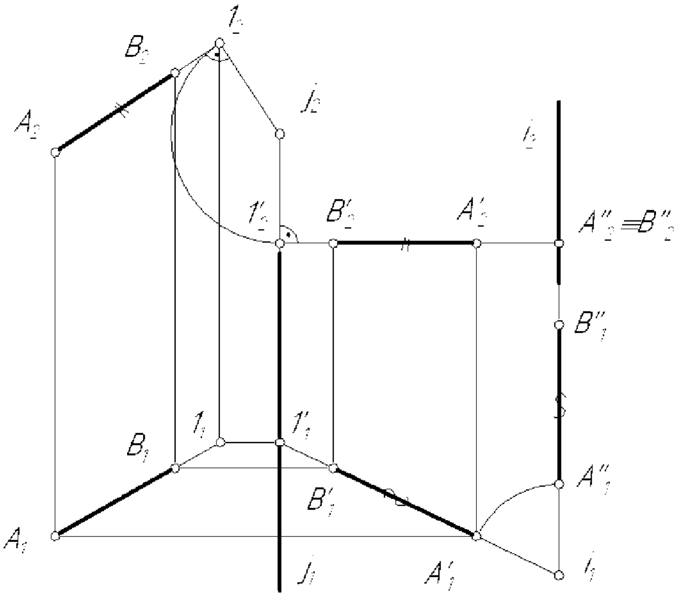


Рис. 5.8

Если ось вращения на чертеже не задана, то ее можно выбрать таким образом, чтобы она пересекала прямую, тогда поворот вокруг нее значительно упрощается. На рис. 5.8 горизонтально-проецирующая ось вращения i пересекает горизонтальную прямую *(A'B')*. Тогда вращением вокруг нее одного из концов отрезка прямая преобразовывается в фронтально-проецирующую прямую (**2 основная задача**).

5.3.3. Вращение плоскости

Вращение плоскости вокруг проецирующей оси сводится к вращению на один и тот же угол элементов, определяющих эту плоскость в пространстве.

Возьмем плоскость общего положения $\Sigma(\Delta ABC)$ и вращением вокруг проецирующей оси преобразуем ее в проецирующую плоскость (**3 основная задача**). Для этого преобразования необходимо провести одно вращение, при котором линия уровня плоскости превратится в проецирующую прямую.

Чтобы найти натуральную величину плоской фигуры, следует провести второе вращение, преобразовав проецирующую плоскость в плоскость уровня (**4 основная задача**).

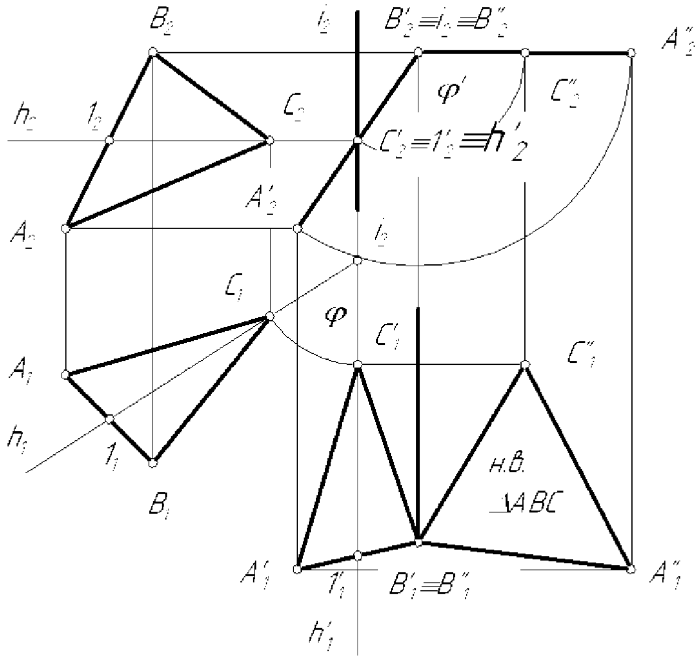


Рис. 5.9

5.4. Плоскопараллельное перемещение

Как известно, при вращении системы точек вокруг проецирующей оси одна из проекций плоской фигуры остается конгруэнтной самой себе. Поэтому проекцию, форма и размеры которой остаются неизменными, можно перемещать в новое, удобное для решения задачи положение. При этом не задается радиус вращения точки, а траектория ее движения произвольна. Этот способ преобразования КЧ называется плоскопараллельным перемещением.

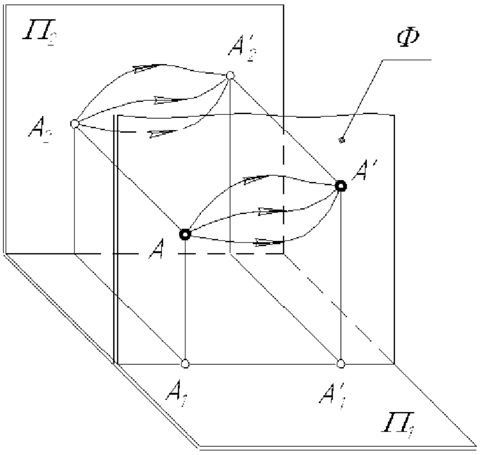


Рис. 5.10

Плоскопараллельное перемещение можно рассматривать как частный случай вращения вокруг проецирующих прямых, когда точки заданного объекта перемещаются во взаимно параллельных плоскостях, параллельных одной из плоскостей проекций, а положение осей вращения на КЧ не указывается.

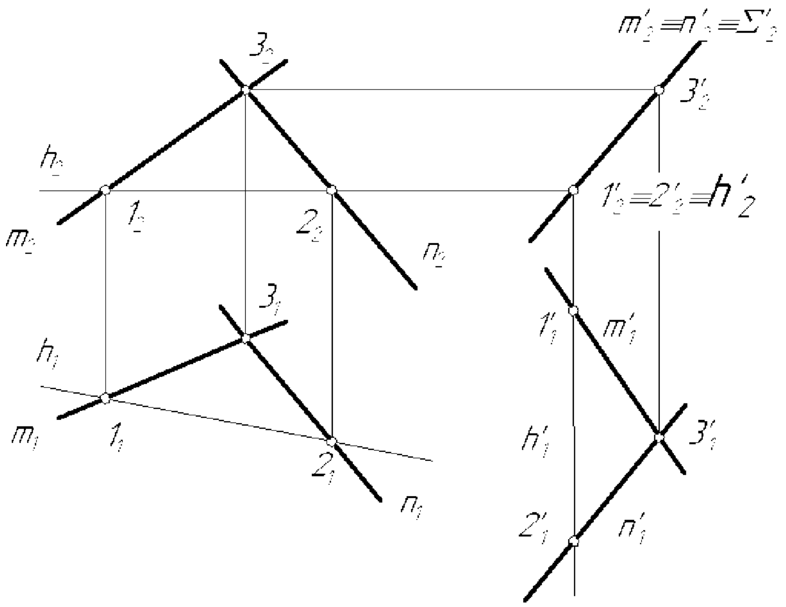


Рис. 5.11

Допустим, что плоскость общего положения, заданную пересекающимися прямыми m и n, необходимо перевести во фронтально-проецирующее положение. Для этого возьмем в плоскости горизонталь h и преобразуем ее во фронтально-проецирующую прямую. Горизонтальную проекцию горизонтали располагаем перпендикулярно оси x в любом месте КЧ. В процессе перемещение расстояния между горизонтальными проекциями точек, определяющих плоскость, остается неизменным.

Лекция 8

6. ПОВЕРХНОСТИ

Поверхность – абстрактная фигура, не имеющая толщины. Она ограничивает какое-либо тело, состоящее из металла, пластмассы и т.д. Тело конечно, а поверхность может быть бесконечна. Например, шар ограничен сферой; боковой поверхностью конуса является коническая поверхность.

6.1. Способы задания поверхности

Существует несколько способов задания поверхности, в том числе: кинематический, аналитический и графический.

Внедрение в инженерную практику компьютерных технологий обусловило совместное использование графических и аналитических методов задания поверхностей.

С точки зрения аналитической геометрии:

> ***Поверхность*** *– непрерывное множество точек, координаты которых связаны в декартовой системе координат уравнением вида* $F(x, y, z) = 0$.

Если $F(x, y, z)$ – многочлен *n*-й степени, то поверхность называется алгебраической поверхностью *n*-го порядка.

Если $F(x, y, z)$ – трансцендентная функция, то и поверхность называется трансцендентной.

В начертательной геометрии поверхность задается графически, а к ее образованию подходят с точки зрения кинематики:

> ***Поверхность – совокупность непрерывных последовательных положений линий, движущихся в пространстве по определенному закону.***

Эта движущаяся линия называется **образующей**, а линия, по которой она движется, – **направляющей**.

Поверхность считается заданной, если по одной проекции точки, принадлежащей ей, можно построить вторую проекцию. Совокупность независимых условий, необходимых и достаточных для однозначного определения поверхности, называется **определителем поверхности**:

$$\mathbf{\Phi}\ (\Gamma),[A],$$

где **Ф** – поверхность,

(Г) – геометрическая часть определителя поверхности – совокупность геометрических фигур, образующих поверхность;

[А] – алгоритмическая часть определителя поверхности – закон перемещения образующей.

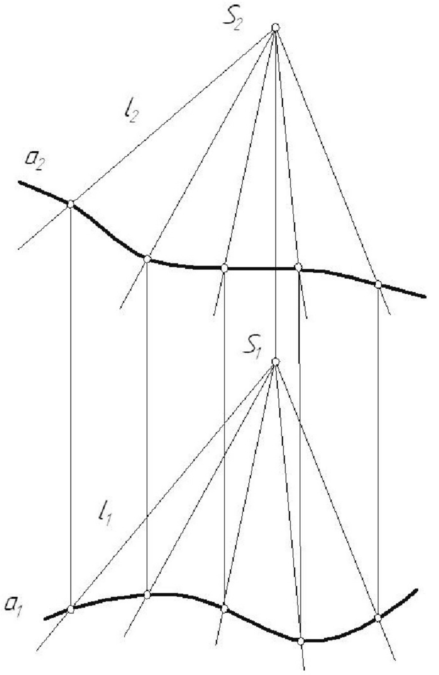


Рис. 6.1

Например, определитель конической поверхности имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Phi}\ (\bar{l}\ , \tilde{a}\ , S), [l \cap a\ , S \in l\ ],$$

где l – образующая;

a – направляющая;

S – точка пересечения образующих.

Алгоритмическая часть определителя читается следующим образом:

Любая образующая l пересекает направляющую a и проходит через точку S.

На чертеже поверхность может быть задана:

1. Набором элементов, определяющих эту поверхность.
2. Очерком поверхности.
3. Каркасом поверхности.

***Очерком поверхности** называется проекции контура поверхности на плоскости проекций.*

Каркасный способ задания поверхности предполагает, что поверхность можно определить как двупараметрическое множество точек с одной стороны, а с другой – поверхность – однопараметрическое множество линий.

***Каркасом** (точечным или линейным) называется множество точек или линий, определяющих поверхность.*

Каркасным способом задаются такие сложные поверхности с образующими переменного вида, которые нельзя описать математически.

6.2. Классификация поверхностей

Существует множество различных подходов к классификации поверхностей. Однако главными из них являются следующие критерии:

1. Закон образования поверхности:
   - *поверхности закономерные* – если закон их образования известен и может быть выражен математически;
   - *незакономерные*.
2. Вид образующей:
   - *поверхности линейные* – образующая прямая линия;

- *поверхности нелинейные (криволинейные)* – образующая кривая линия.

3. Закон движения образующей:
   - *поверхности переноса* – с поступательным движением образующей;
   - *поверхности вращения* – с вращательным движением образующей;
   - *винтовые поверхности* – с винтовым движением образующей.

4. Постоянность (вариабильность) формы образующей:
   - *поверхности с образующей постоянной формы*;
   - *поверхности с образующей переменной формы*.

5. Возможность развертывания поверхности:
   - *развертываемые* – поверхности, совмещаемые с плоскостью без складок и разрывов:
   - *неразвертываемые*.

Очевидно, что любую поверхность можно классифицировать одновременно по нескольким признакам. Например, цилиндрическая поверхность вращения:

1) линейчатая закономерная развертываемая поверхность вращения;
2) циклическая поверхность переноса окружности постоянного радиуса;
3) алгебраическая поверхность второго порядка.

Из всего множества поверхностей в кратком курсе начертательной геометрии мы будем рассматривать только гранные поверхности и поверхности вращения.

6.3. Многогранники. Точка и прямая на поверхности

Гранные поверхности имеют прямую образующую и ломаную линию в качестве направляющей.

У **пирамидальной поверхности** образующая l, двигаясь по ломаной направляющей a, все время проходит через одну точку S, называемую вершиной.

Образующая **призматической поверхности**, двигаясь в пространстве по ломаной направляющей, все время остается параллельной самой себе.

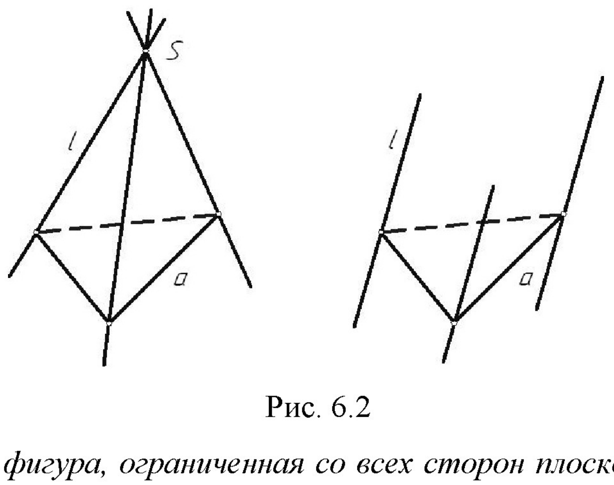


Рис. 6.2

Многогранник *– пространственная фигура, ограниченная со всех сторон плоскостями (гранями).*

Построение проекций точек, принадлежащих боковой поверхности многогранника, осуществляется с помощью образующих и направляющей.

Возьмем трехгранную пирамиду и точки D,E, F, лежащие на ее боковой поверхности. Необходимо определить недостающие горизонтальные проекции этих точек:

1) Точки E и F лежат на ребрах пирамиды, следовательно, их горизонтальные проекции будут лежать на горизонтальных проекциях соответствующих ребер.
2) Точка D принадлежит грани пирамиды, поэтому ее недостающую проекцию следует определять с помощью образующей 1-S. Кроме того, из графического условия не ясно, на какой грани находится точка D, ее фронтальной проекции соответствуют две горизонтальные проекции.

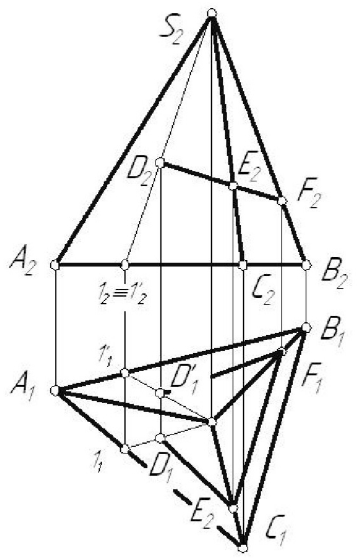


Рис. 6.3

Из КЧ видно, что прямая или ломаная линия, принадлежащая поверхности многогранника может быть построена по характерным точкам, которыми являются точки перехода ее через ребра.

6.4. Поверхности вращения

Поверхности вращения имеют произвольную образующую, движущуюся по окружности.

Каждая точка образующей l движется по окружности с центром на оси вращения i (рис. 6.4). Это окружность называется **параллелью**. Параллель, проходящая через наиболее удаленную от оси вращения точку образующей, называется **экватором**, а через ближайшую – **горлом**. Линия m, получаемая при пересечении поверхности плоскостью, проходящей через ось вращения, называется **меридианом**. Все меридианы поверхности вращения конгруэнтны. Каждый из них разделяется на два, симметричных относительно оси вращения, **полумеридиана**.

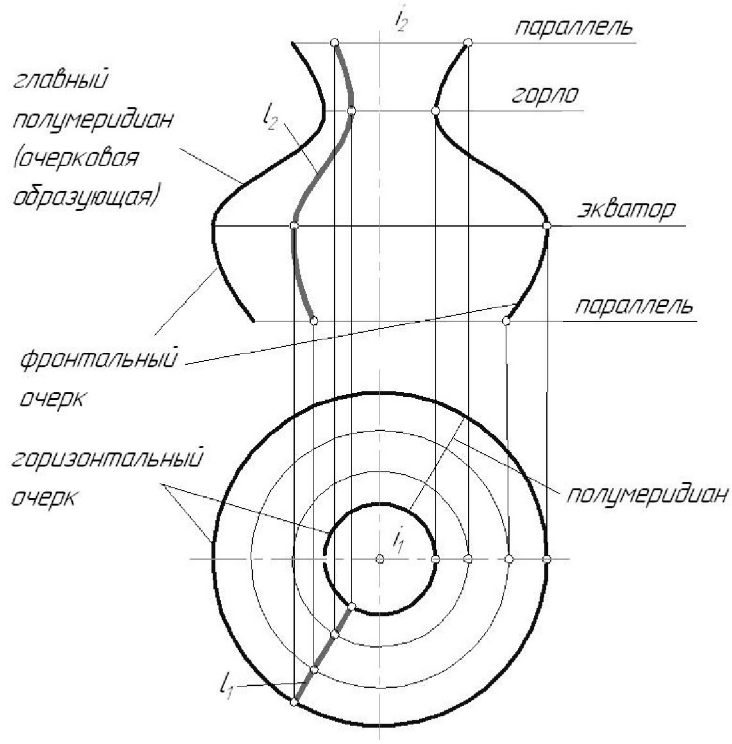


Рис. 6.4

Меридиан, лежащий в плоскости, параллельной плоскости проекций, называется главным меридианом. В данном примере он определяет фронтальный очерк поверхности, горизонтальный очерк определяется экватором и горлом.

6.4.1. Цилиндр вращения

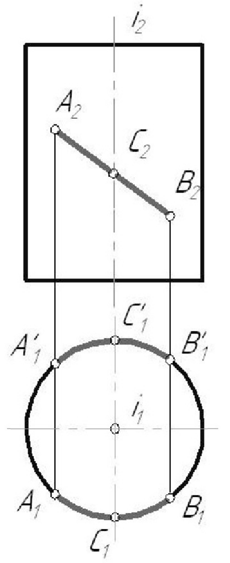


Рис. 6.5

Цилиндрическая поверхность вращения – поверхность, образованная движением прямой линии параллельно оси.

Возьмем фронтально-проецирующий цилиндр и линию AB, расположенную на его боковой поверхности. Горизонтальная проекция этой линии спроецируется на горизонтальный очерк цилиндра, т.к. все ее точки лежат на его боковой поверхности.

Линия принадлежит поверхности*, если каждая ее точка принадлежит этой поверхности.*

6.4.2. Конус вращения

Коническая поверхность вращения образуется движением прямой линии, пересекающей ось вращения.

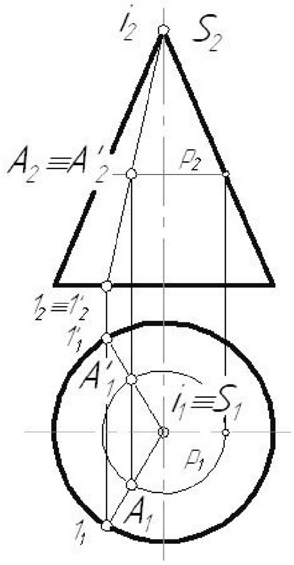


Рис. 6.6

Точка принадлежит поверхности*, если она принадлежит линии, лежащей на этой поверхности.*

Построение точек, принадлежащих поверхности вращения, ведется с помощью образующих или параллелей поверхности.

Пусть задана фронтальная проекция точки A, принадлежащей поверхности конуса. Этой проекции соответствуют две горизонтальные проекции точки A_1 и A'_1. Их можно определить с помощью образующих поверхности 1-S и $1'$-S или параллели p.

6.4.3. Однополосный гиперболоид вращения

Гиперболоид вращения – поверхность, образованная вращением прямой вокруг скрещивающейся с ней оси.

Линейчатая поверхность, которую необходимо построить, называется однополосным гиперболоидом вращения. Она образуется вращением прямой l вокруг скрещивающейся с ней оси i. Ближайшая к оси вращения точка образующей описывает наименьшую параллель – горло гиперболоида. Главный меридиан – гипербола.

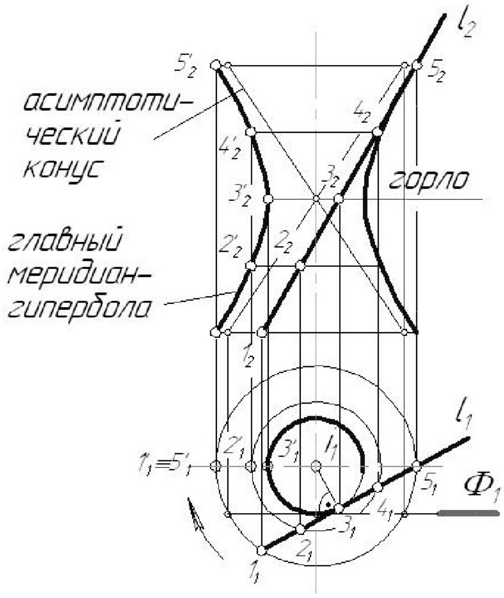


Рис. 6.7

Эта поверхность может быть также получена вращением очерковой гиперболы вокруг своей мнимой оси *i*. Поверхность имеет два семейства прямолинейных образующих, т.к. через одну точку можно провести две прямые – восходящую прямую (как в данной задаче) и нисходящую прямую. Это видно, если касательно к горлу гиперболоида провести плоскость $\Phi(\Phi_1)$, параллельную оси вращения. Такая плоскость пересекает поверхность по двум прямым. Вторая восходящая прямая образует второе семейство образующих.

Если в центре горла гиперболоида построить конус с таким же углом наклона образующих, как у гиперболоида, то получим так называемый асимптотический конус, к которому поверхность приближается в бесконечности.

6.4.4. Тор

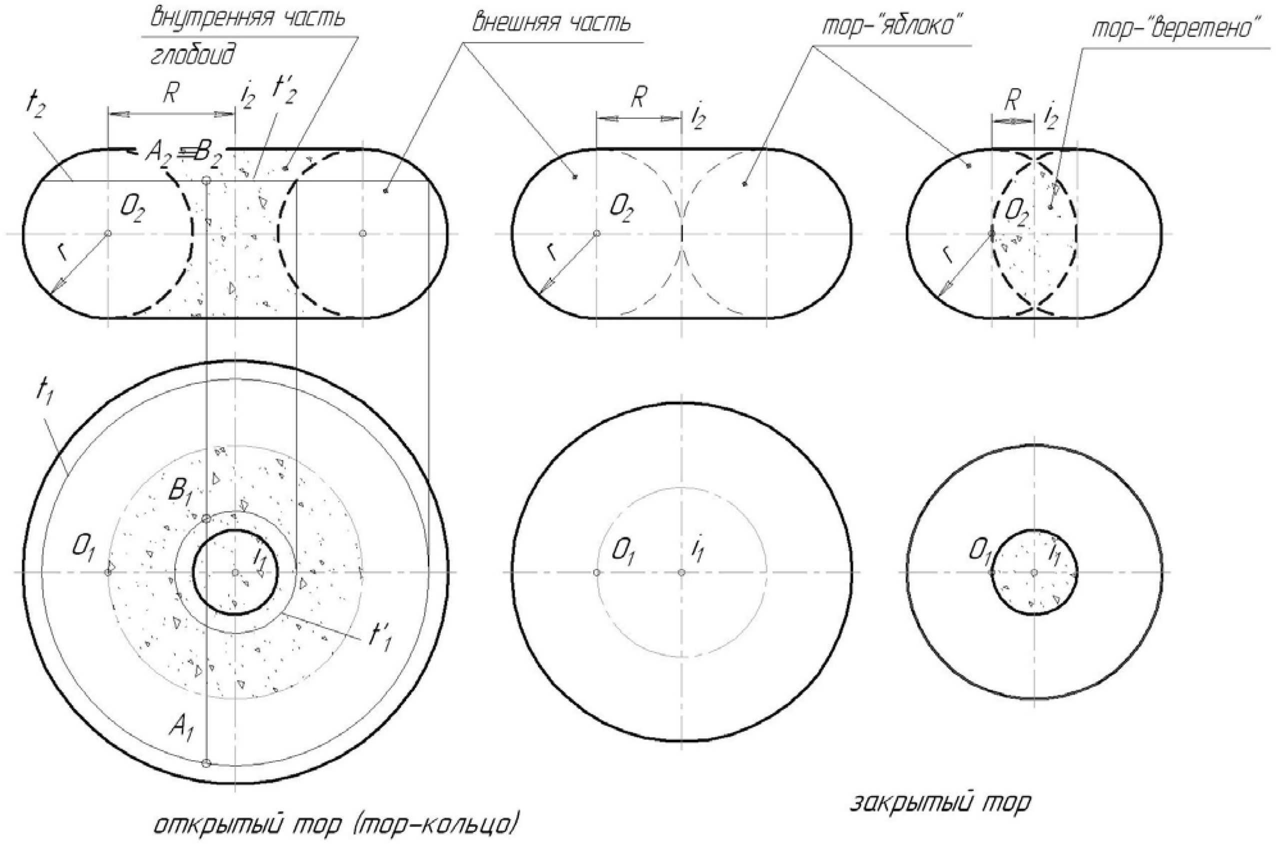


Рис. 6.8

Точка *A* располагается на параллели внешней части открытого тора, точка *B* лежит на внутренней параллели. Поверхность тора образуется при вращении окружности вокруг оси, расположенной в плоскости окружности.

В зависимости от соотношения величины радиуса образующей тора r и расстояния от центра окружности до оси вращения t возможны три разновидности тора (рис. 6.8):

- образующая – окружность не пересекает ось вращения ($r < t$) – ***открытый тор***;
- образующая – окружность касается оси вращения ($r = t$) – ***закрытый тор***;
- образующая – окружность пересекает ось вращения ($r > t$) – ***закрытый тор***.

Лекция 9

6.5. Пересечение поверхности многогранника плоскостью

Плоская фигура, получаемая в результате пересечения какой-либо поверхности плоскостью, называется ***сечением****.*

Сечением многогранника является многоугольник, его обычно строят с помощью вспомогательных секущих плоскостей. Построение линии пересечения поверхности с плоскостью начинают с нахождения особых (опорных) точек. Для многогранника это точки пересечения ребер и сторон его основания с заданной плоскостью (если построение ведется «способом ребер») или линии пересечения граней и основания многогранника с плоскостью (если построение ведется «способом граней»).

Пример: *Построить линию пересечения трехгранной пирамиды SABC плоскостью общего положения* $\Sigma(h \cap f)$. *Построить развертку нижней отсеченной части пирамиды.*

Основание пирамиды принадлежит горизонтальной плоскости проекций, его горизонтальная проекция является натуральной величиной.

Плоскость задана таким образом, что пересекает только боковую поверхность пирамиды. Следовательно, сечение будет иметь треугольную форму. Т.к. горизонталь плоскости *h* проходит через одну из вершин основания, то одна из точек сечения известна – точка *C*. Остальные точки сечения можно найти с помощью дополнительных секущих плоскостей Λ и Λ', проходящих через ребра *SA* и *SB*.

Для улучшения наглядности изображения необходимо показать видимость:

1) сечения относительно поверхности многогранника и выделить его цветным карандашом;
2) поверхности относительно заданной плоскости;
3) геометрических элементов, которыми задана плоскость, относительно поверхности многогранника.

Натуральная величина сечения определяется вращением вокруг линии уровня, другие необходимые для построения развертки натуральные величины в данной задаче определены методом прямоугольного треугольника.

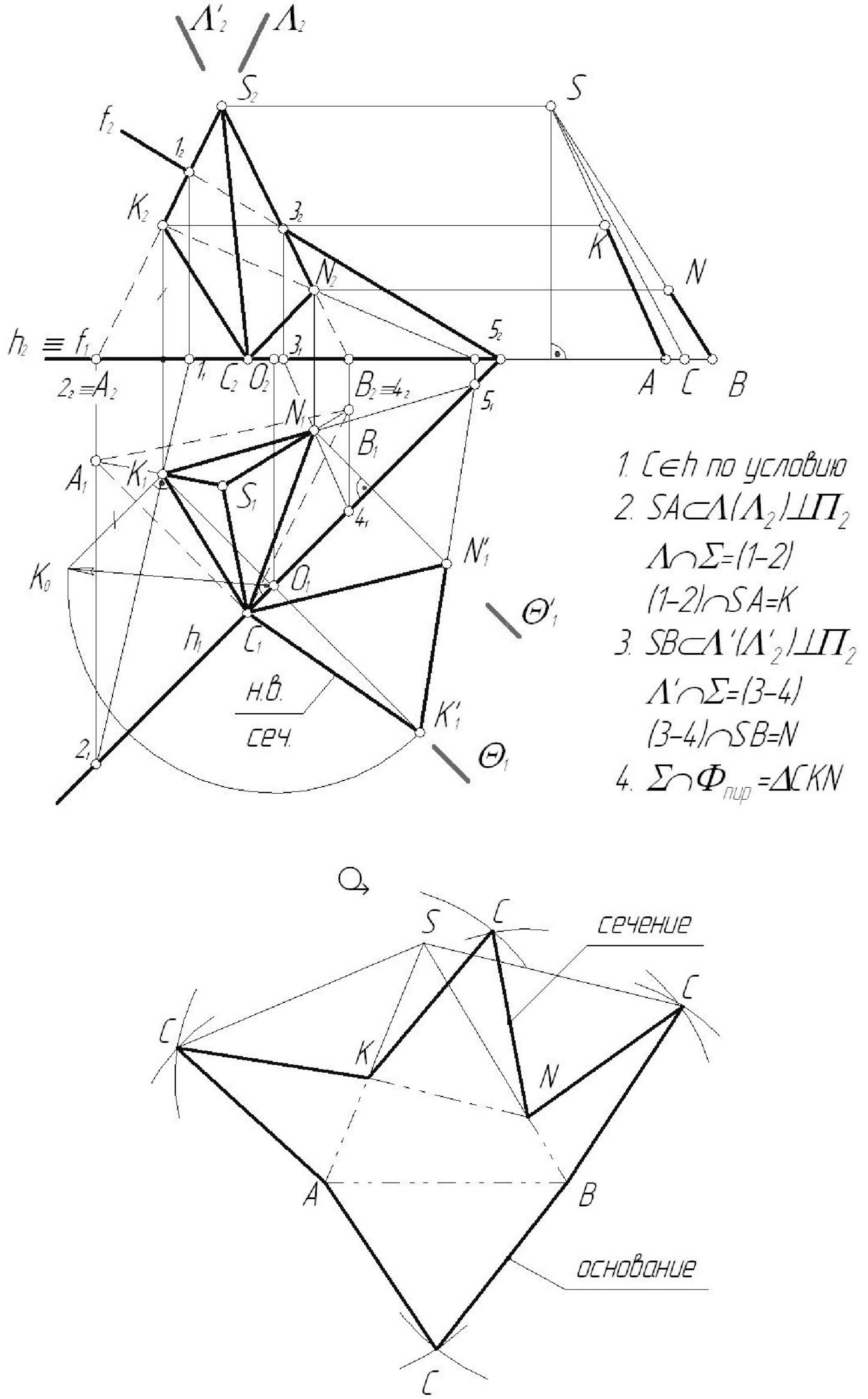


Рис. 6.9

<u>Построение развертки</u>:

1. Методом прямоугольного треугольника находятся длины ребер пирамиды. Т.к. разность высот от концов отрезка до горизонтальной плоскости проекций Π_1 у всех трех ребер одна и равна высоте пирамиды, катет прямоугольного треугольника, равный этой величине, целесообразней начертить в стороне от изображения, правее фронтальной проекции пирамиды. Второй катет равен длинам горизонтальных проекций ребер. Для определения натуральной величины отрезков *AK* и *BN* необходимо провес-

ти горизонтальные вспомогательные линии от проекций точек K и N до пересечения с соответствующими гипотенузами прямоугольных треугольников.
2. Развертка строится способом треугольников с использованием приема засечек.

6.6. Пересечение прямой с поверхностью

Возможны три варианта расположения прямой относительно поверхности. Прямая может:

1) пересекать поверхность;
2) касаться поверхности;
3) не пересекать поверхность.

Частные случаи:

Пример 1. *Пересекаются прямая общего положения l с проецируюей поверхностью* $\boldsymbol{\Phi}$.

Если задана проецирующая поверхность, то одна из проекций искомых точек пересечения определяется сразу, исходя из принадлежности их этой проецирующей поверхности.

В данном примере призма является горизонтально-проецирующей поверхностью, следовательно, горизонтальные проекции точек пересечения лежат на пересечении горизонтальной проекции прямой l и горизонтального очерка призмы.

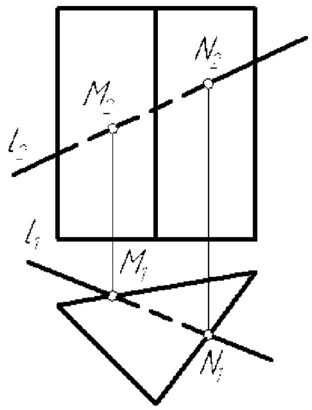


Рис. 6.10

$$N_1, L_1 = l_1 \cap \boldsymbol{\Phi}_1.$$

Вторая проекция точек определяется исходя из принадлежности их непроецирующей прямой l.

$$N, M \in l \Rightarrow N_2, M_2 \in l_2.$$

Пример 2. *Пересекаются проецирующая прямая i с поверхностью конуса* $\boldsymbol{\Phi}$.

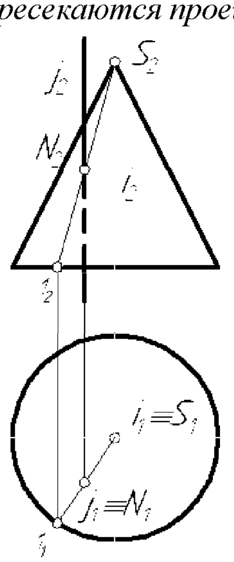


Рис. 6.11

В этом случае одна из проекций искомой точки также изначально определена на чертеже. Она совпадает с вырожденной проекцией прямой.

$$i \perp \Pi_1, N \in S1 \Rightarrow N_1 \equiv i_1.$$

Вторая проекция точки определяется из условия принадлежности ее образующей поверхности.

$$S1 \subset \Phi_k, N \notin S1 \Rightarrow N_1 \in S_1 1_1.$$

Общий случай:

Пересекаются непроецирующая поверхность и прямая общего положения.

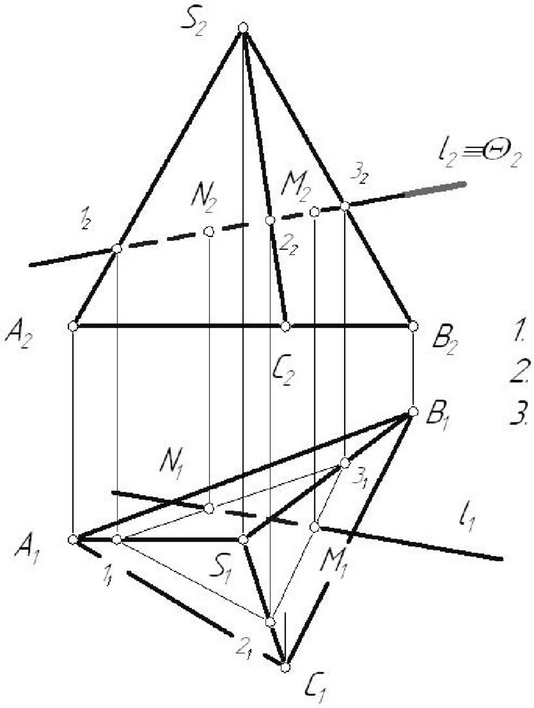
В этом случае, чтобы найти точки пересечения прямой с поверхностью, необходимо:

1) Заключить прямую в дополнительную (вспомогательную) плоскость.
2) Построить линию пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью.
3) Определить точки пересечения полученного сечения с заданной прямой.

Эти точки являются искомыми.

В качестве вспомогательной плоскости выбирают плоскость общего или частного положения, дающую наиболее простую линию сечения поверхности (ломаную или окружность).

Пример: Построить точки пересечения прямой l с трехгранной пирамидой $SABC$. Определить видимость прямой относительно поверхности.



1. $l \subset \Theta(\Theta_2) \perp \Pi_2$
2. $\Theta \cap \Phi_п = 1\text{-}2\text{-}3$
3. $1\text{-}2\text{-}3 \cap l = l \cap \Phi_п = N, M$

Рис. 6.12

Видимость прямой определяется по принадлежности точек пересечения граням пирамиды. Видима та часть прямой, которая исходит из точки, лежащей на видимой грани многогранника.

Пример: *Построить точки пересечения прямой l с конусом.*

В данном примере в качестве дополнительной плоскости выбирается плоскость общего положения, проходящая через вершину конуса и пересекающая его боковую поверхность по образующим.

Видимость прямой определяется по принадлежности точек пересечения той или иной образующей. Видна та часть прямой, которая исходит из точки, принадлежащей видимой образующей.

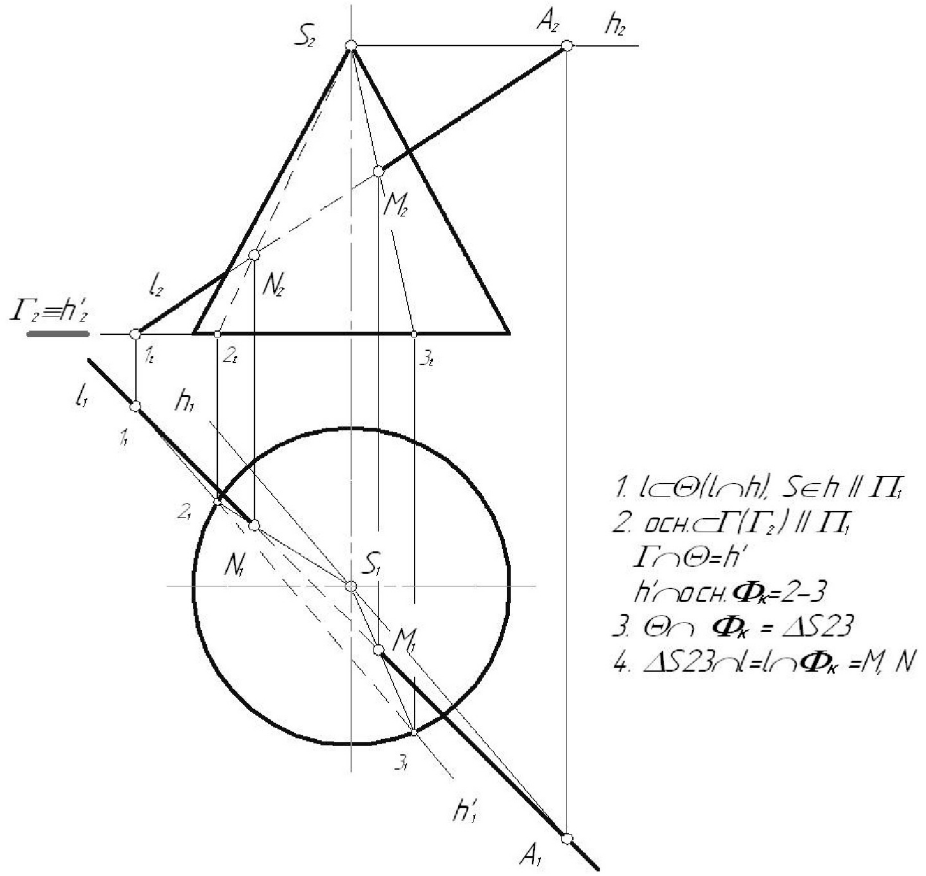


Рис. 6.13

Лекция 10

6.7. Пересечение поверхности вращения плоскостью

Форма сечения поверхности вращения плоскостью зависит от угла наклона секущей плоскости к оси вращения поверхности.

Если секущая плоскость:

1) перпендикулярна оси вращения, сечение – окружность;
2) наклонена к оси и пересекает все образующие – эллипс;
3) параллельна одной образующей – парабола;
4) параллельна двум образующим – гипербола;
5) проходит через вершину – две пересекающиеся прямые;
6) касается поверхности – прямая.

Вся совокупность этих линий может быть получена при пересечении конуса плоскостью. Поэтому их называют коническими сечениями, или **кониками**.

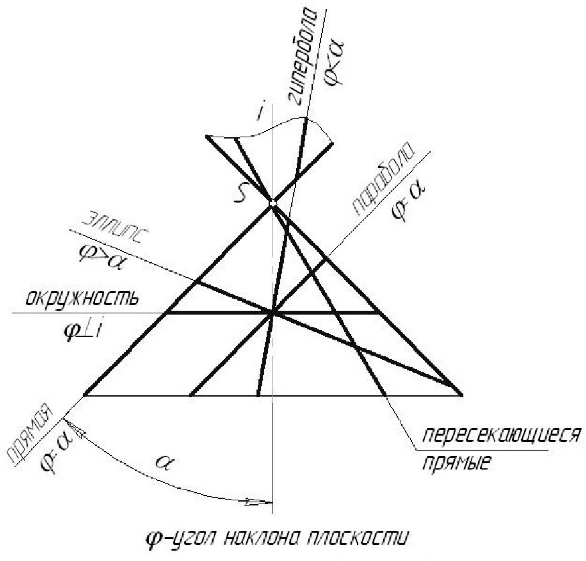


Рис. 6.14

Для построения линии пересечения необходимо найти общие точки поверхности и заданной плоскости. Для определения этих точек необходимо ввести дополнительные секущие плоскости, которые дают наиболее простые линии сечения – окружности или ломаные прямые.

Построение линии сечения начинают с нахождения **характерных точек сечения**, к которым относятся:

1) высшая и низшая точки;
2) крайняя левая и крайняя правая точки, в которых проекции линии сечения касаются очерковых образующих (точки, лежащие на границе видимости);
3) ближайшая и наиболее удаленная точки сечения.

Пример: *Определить линию сечения конуса плоскостью общего положения $\Theta(h \cap f)$. Построить развертку нижней отсеченной поверхности конуса.*

Анализ формы линии пересечения

Заданная плоскость пересекает только боковую поверхность конуса, следовательно, линией сечения q является эллипс.

Характерные точки линии пересечения:

1) **Высшая и низшая точки сечения** (A, B) определяют большую ось эллипса и лежат на линии наибольшего наклона плоскости Θ к плоскости основания конуса. Эти точки определяются с помощью дополнительной плоскости Σ.

$$i \subset \Sigma(\Sigma_1) \perp h(\Sigma_1 \perp h_1)$$
$$\Theta \cap \Sigma = (1-2) \supset [AB]\big((1-2) \cap \Phi_k = A, B\big)$$
O – центр эллипса
$$[AO] = [OB]$$

2) **Малая ось эллипса** (C, D) перпендикулярна к линии наибольшего наклона (большой оси), т.е. лежит на горизонтали плоскости $\Gamma(\Gamma_2)$.

$$O \in \Gamma(\Gamma_2) \parallel \Pi_1$$
$$\Gamma \cap \Sigma = h' \supset [CD]\big(h' \cap \Phi_k = C, D\big)$$

3) **Точки границы видимости** (E, F) сечения на Π_2 лежат в плоскости $\Phi(\Phi_1)$, делящей конус на видимую и невидимую части по отношению к фронтальной плоскости проекций.

$$i \subset \Phi(\Phi_1) \parallel \Pi_2(\Phi_1 \parallel 0x)$$
$$\Phi \cap \Sigma = f' \supset [EF](f' \cap \Phi_k = EF)$$

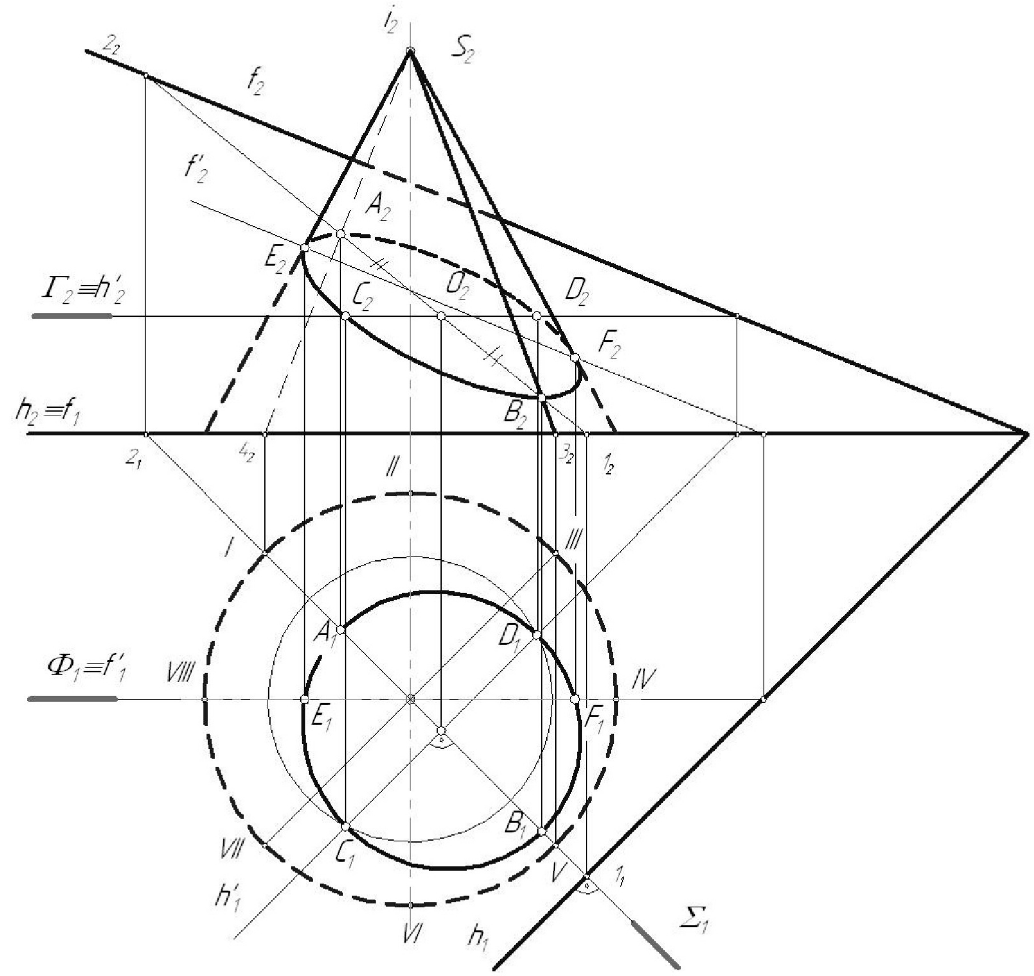


Рис. 6.15

<u>Развертка</u>

Полная развертка боковой поверхности конуса представляет собой угол кругового сектора. Ее можно построить двумя способами:

1. **<u>Нахождение угла кругового сектора</u>**.

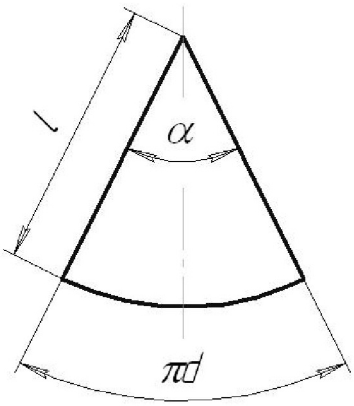


Рис. 6.16

$$\pi d = l\alpha,$$

$$\alpha = \frac{\pi d}{l},$$

$$\alpha = \frac{180^\circ d}{l},$$

где d – диаметр окружности основания конуса,

l – длина образующей.

2. **Способ малых хорд**.

Графическое построение величины πd осуществляется способом малых хорд, при котором окружность основания конуса делится на 8 или 12 равных частей и полученная длина дуги приравнивается ее хорде.

Разрывать отсеченную боковую поверхность следует по наиболее короткой или длинной образующей, так чтобы развертка представляла собой симметричную фигуру и была единым целым.

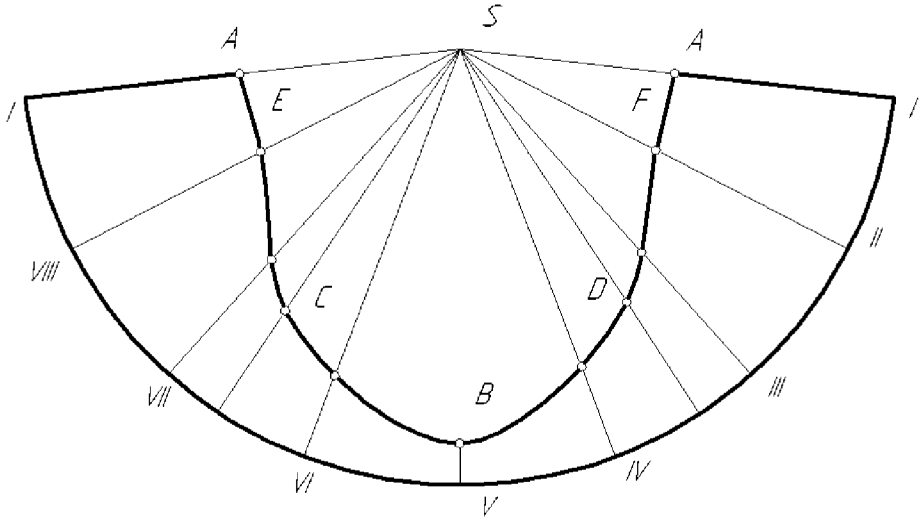


Рис. 6.17

6.8. Пересечение поверхностей

6.8.1. Пересечение многогранников

Многогранники пересекаются по замкнутым пространственным ломаным линиям, которые могут быть найдены следующим образом:

1. **Способ ребер**. Находятся точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого.
2. **Способ граней**. Определяются отрезки прямых, по которым грани одного многогранника пересекаются с гранями другого.

Пример: *Построить линию пересечения двух трехгранных призм, одна из которых проецирующая.*

В результате пересечения заданных многогранников получается ломаная пространственная линии. Она соединяет соответствующие точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого. Так как одна из призм проецирующая относительно горизонтальной плоскости проекций, горизонтальная проекция линии пересечения совпадает с горизонтальным очерком этой призмы. Искомые точки сечения можно получить, решая задачу на пересечение прямой (ребра) с плоскостью (гранью).

$$d \cap ab = A,\ d \cap bc = B.$$

$$e \cap ab = D,\ e \cap bc = C.$$

Для построения точек пересечения ребра b с гранями призмы, используется горизонтально-проецирующая плоскость Θ.

$$b \cap dg = E.$$
$$b \cap eg = F.$$

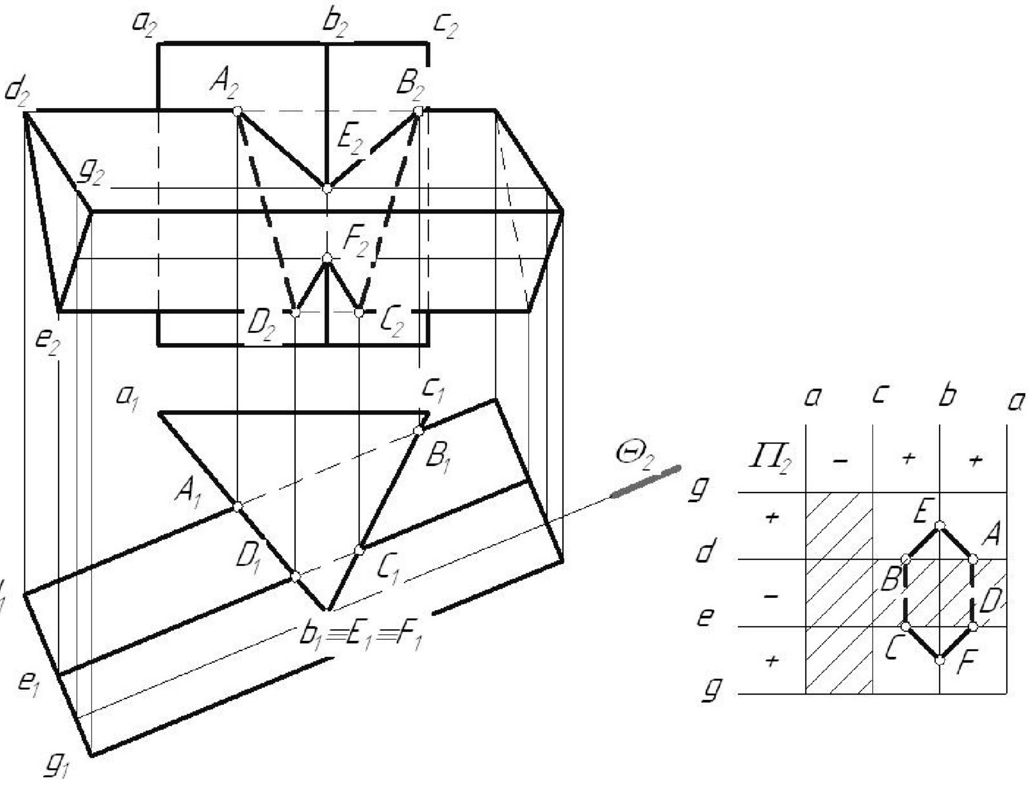


Рис. 6.18

Для определения видимости линии сечения строится диаграмма, на которой схематично в произвольных размерах изображаются грани заданных призм. Знаками "+" и "–" отмечается видимость граней многогранников. На соответствующих гранях и ребрах наносятся точки сечения, и соединяют их с учетом видимости. Видимыми считаются те звенья линии пересечения, которые лежат на видимых гранях обоих многогранников.

Лекция 11

6.8.2. Пересечение поверхностей вращения

Линией пересечения поверхностей является плоская или пространственная кривая, состоящая из:

– одного замкнутого контура, если одно геометрическое тело частично врезается в поверхность другого;
– распадается на несколько линий, если поверхность одного тела полностью пронизывает поверхность другого.

Рассмотрим особые случаи пересечения поверхностей вращения.

Цилиндрические, конические поверхности и однополосный гиперболоид вращения относятся к линейчатым поверхностям вращения второго порядка. Сфера, эллипсоид вращения, параболоид вращения и двухполосный гиперболоид вращения – нелинейчатые поверхностям второго порядка.

Поверхность второго порядка – множество точек пространства, декартовые координаты которых соответствуют алгебраическому уравнению второй степени.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + jz + k = 0\,.$$

Из аналитической геометрии известно, что порядок линии пересечения поверхностей равен произведению порядков поверхностей. Поэтому в общем случае две поверхности второго порядка (квадрики) пересекаются по пространственной линии четвертого порядка (биквадратной кривой), которая иногда распадается на несколько линий.

В некоторых частных случаях линия пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Условия, при которых это возможно, определены в следующих теоремах. Зная их, можно быстрее и точнее построить линию пересечения поверхностей.

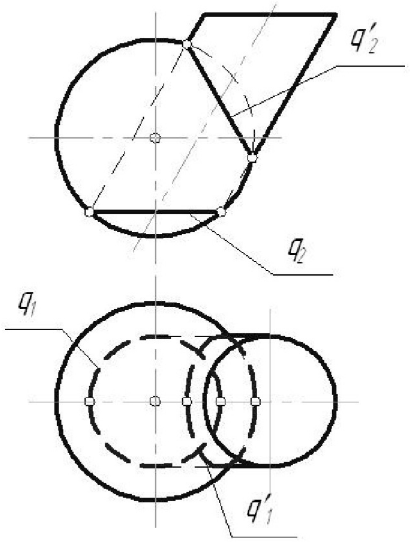


Рис. 6.19

Теорема 1:

Если две квадрики пересекаются по одной плоской кривой, то существует и другая плоская кривая, по которой они пересекаются.

Например, линия пересечения сферы и эллиптического цилиндра с круговым основанием распадается на две коники – окружности (q, q').

Теорема 2:

Если две квадрики имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две коники, плоскости которых проходят через отрезок прямой, соединяющей эти точки.

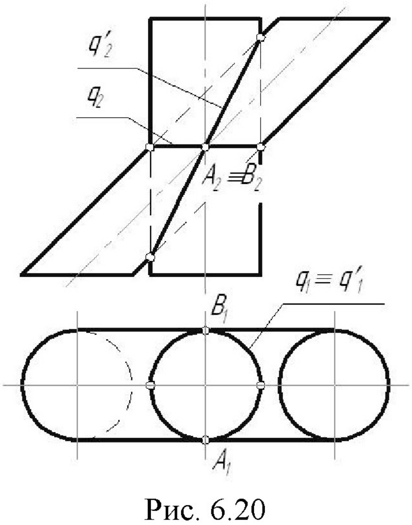


Рис. 6.20

Поверхности прямого кругового цилиндра и эллиптического цилиндра с круговым основанием имеют две общие точки касания (A, B). Следовательно, по Т2 они пересекаются по двум коникам – окружности (q) и эллипсу (q'), плоскости которых пересекаются по прямой AB.

Теорема 3:

Две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям-параллелям, число которых равно числу точек пересечения главных полумеридианов поверхностей.

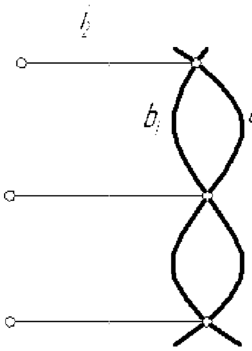


Рис. 6.21

Соосными называются поверхности, имеющие общую ось вращения.

Так как плоскость сечения перпендикулярна оси вращения *i*, линия сечения (окружность) проецируется:

- в окружность на плоскость, перпендикулярную оси *i*;
- в отрезок прямой – на плоскость, параллельную оси *i*;
- в эллипс – на любую другую плоскость.

Эти особенности соосных поверхностей вращения позволяют использовать их, в частности сферу, в качестве посредников при построении линии пересечения поверхностей вращения. Любая поверхность вращения, ось которой проходит через центр сферы, соосна с ней и, следовательно, пересекает ее по окружности.

Теорема 4 (Теорема Монжа):

Если две поверхности второго порядка (квадрики) описаны вокруг третьей квадрики, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка (коникам).

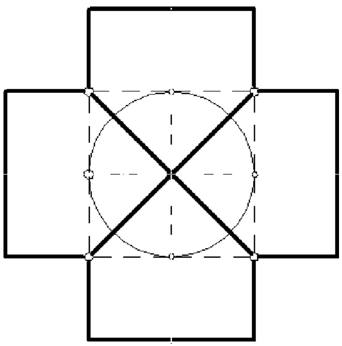


Рис. 6.22

В соответствии с этой теоремой, линии пересечения поверхностей, описанных около сферы, будут плоскими кривыми – эллипсами.

Построение линии пересечения поверхностей вращения в **общем случае** ведется с помощью дополнительных секущих поверхностей, в качестве которых могут быть использованы плоскости или сферы.

Секущие поверхности выбираются таким образом, чтобы с заданными поверхностями они пересекались по линиям, легко определяемым на КЧ.

Чтобы построить линию пересечения поверхностей на КЧ, необходимо:

1. Ввести ряд вспомогательных плоскостей или сфер, пересекающих обе заданные поверхности.
2. Построить линию пересечения каждой заданной поверхности со вспомогательной.

3. В месте пересечения построенных таким образом линий определить точки искомой линии взаимного пересечения.
4. Соединить полученные точки пересечения между собой с учетом видимости линии сечения.

Способ нахождения линии пересечения с помощью дополнительных плоскостей называется **способом секущих плоскостей**, а нахождение линии сечения с помощью дополнительных сфер – **способом секущих сфер**.

Каким бы способом не производилось нахождение линии пересечения, ее построение начинается с определения характерных точек сечения, а затем определяются промежуточные точки, необходимые для точности построения линии пересечения.

<u>К характерным точкам линии пересечения относятся</u>:
1. точки, проекции которых лежат на проекциях контурных образующих (очерках) заданных поверхностей;
2. «крайние» точки – правые и левые, наивысшие и наинизшие, ближайшие и наиболее удаленные.

6.8.2.1. Способ секущих плоскостей

Обычно в качестве секущих плоскостей используются плоскости уровня, т.к. линии пересечения их с заданными поверхностями проецируются на плоскость проекций без искажения. Также в некоторых случаях используются и проецирующие плоскости.

Этот способ применяют тогда, когда дополнительные плоскости рассекают заданные поверхности по окружностям-параллелям или прямым-образующим.

<u>Пример</u>: *Построить линию пересечения кругового конуса и сферы.*

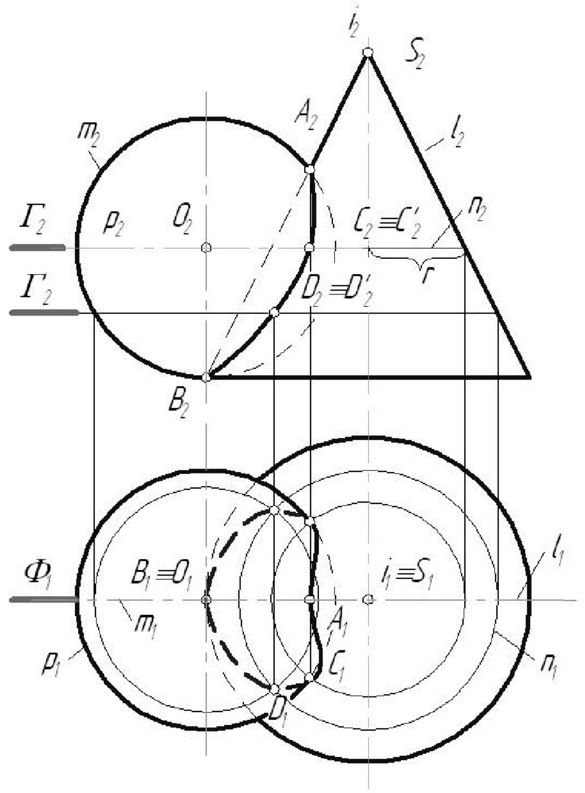


Рис. 6.23

Конус и сфера имеют общую плоскость симметрии $\Phi(\Phi_1)$, параллельную фронтальной плоскости проекций, с помощью которой находятся высшая и низшая точки линии сечения A и B. Эта плоскость пересекает конус по очерковым образующим l, а сферу – по главному меридиану m.

Обе поверхности содержат семейство параллелей, параллельных горизонтальной плоскости проекций, поэтому остальные точки линии сечения необходимо находить с помощью горизонтальных плоскостей уровня.

Точки C и D, лежащие на границе видимости, находятся с помощью плоскости $\Gamma(\Gamma_2)$, проходящей через экватор сферы. Эта плоскость, в свою очередь, пересекает конус по параллели n радиуса r.

6.8.2.2. Способ секущих концентрических сфер

Применение сфер в качестве поверхностей-посредников основано на теореме о двух соосных поверхностях вращения.

Следствие этой теоремы:

Сфера, центр которой лежит на оси поверхности вращения, пересекается с последней по окружностям.

Линия пересечения сферы с поверхностью проецируется на одну из плоскостей проекций в виде отрезков, а на другую – в виде окружности.

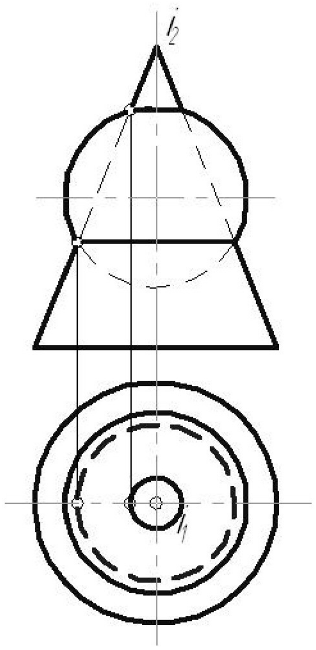


Рис. 6.24.

Этот способ может быть использован лишь при одновременном выполнении трех условий:

1. Пересекающиеся поверхности – поверхности вращения.
2. Оси поверхностей пересекаются.
3. Поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

Пример: *Построить линию пересечения конуса и цилиндра.*

При решении этой задачи сначала строится фронтальная проекция линии пересечения, т.к. общая плоскость симметрии поверхностей параллельна фронтальной плоскости проекций.

«Крайние» точки сечения – высшая и низшая, ближайшая и наиболее удаленная точки (точки, лежащие на границе видимости относительно горизонтальной плоскости проекций) определяются с помощью плоскостей уровня.

Промежуточные точки сечения находятся с помощью секущих сфер, центр которых располагается в точке пересечения осей вращения поверхностей. Сфера минимального радиуса проводится так, чтобы она касалась одной поверхности, а вторую пересекала. Секущие сферы соосны с поверхностями конуса и цилиндра, а следовательно, пересекают их по параллелям.

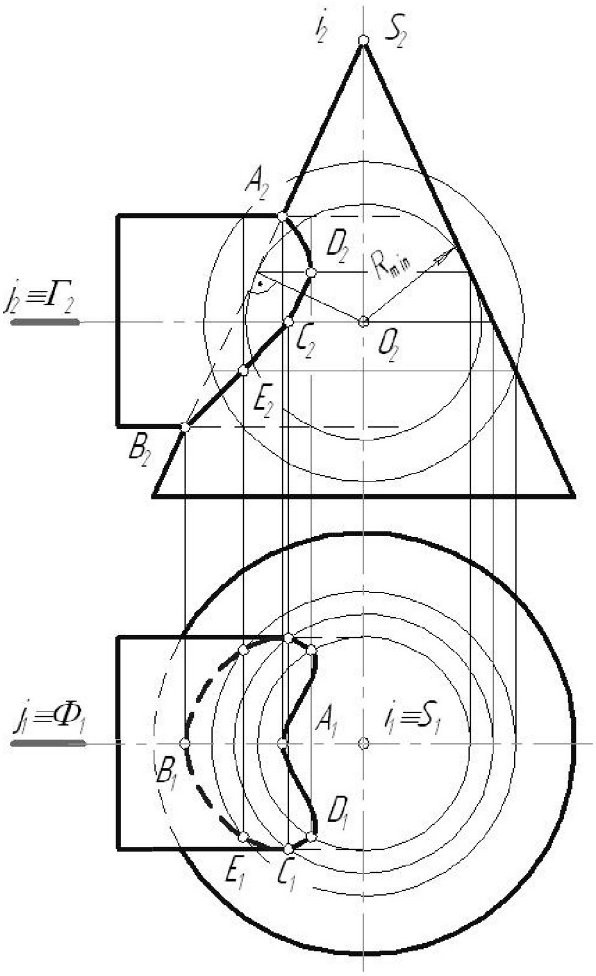


Рис. 6.25

6.8.2.2. Способ секущих эксцентрических сфер

Метод секущих эксцентрических сфер может быть применен при соблюдении следующих условий:

1. Одна из пересекающихся поверхностей циклическая, вторая – поверхность вращения.
2. Поверхности должны иметь общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

Сущность метода заключается в следующем: подбирается сфера, пересекающая обе заданные поверхности по окружностям. Точки пересечения этих окружностей будут являться искомыми точками линии сечения.

Пример: *Построить линию пересечения закрытого тора с открытым тором.*

Заданные поверхности располагаются так, что их оси $i \perp \Pi_1$, $j \perp \Pi_2$, а фронтальная плоскость $\Phi(\Phi_1)$ является плоскостью симметрии. С помощью этой плоскости находятся высшая и низшая точки сечения.

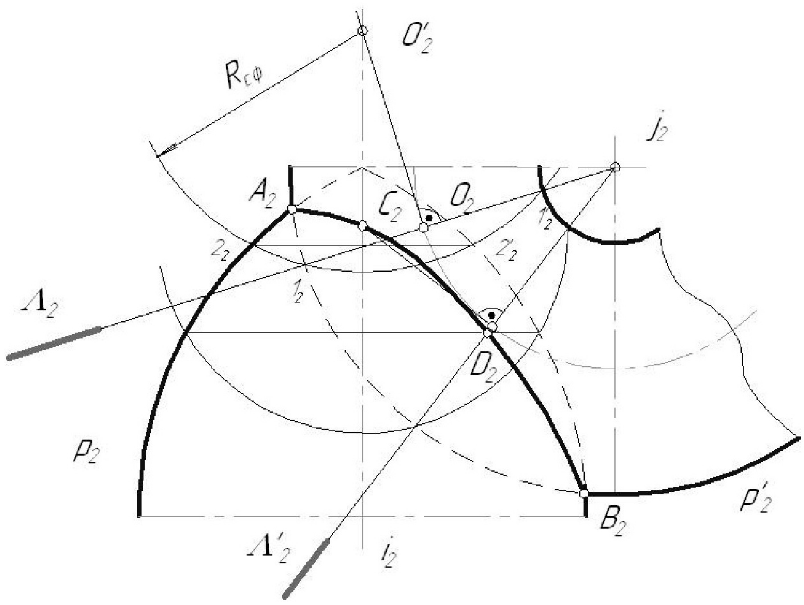


Рис. 6.26

Для построения промежуточных точек необходимо через ось тора провести фронтально-проецирующую плоскость, пересекающую тор по окружности *1-1'*.

$$j \subset \Lambda(\Lambda_2) \perp \Pi_2,$$
$$\Lambda \cap \Phi'_T = 1-1'.$$

O – центр сечения тора, из которого строится перпендикуляр к плоскости Λ. На пересечении этого перпендикуляра с осью второго тора *i* находится центр первой секущей сферы. Радиус сферы подбирается таким образом, чтобы она пересекла тор по окружности *1-1'*.

$$R_{сф} = |1, O|$$

Полученная сфера пересекает тор по параллели 2-2′. На пересечении двух окружностей находятся искомые точки *C* и *C'*.

Остальные точки находятся аналогично.

Лекция 12

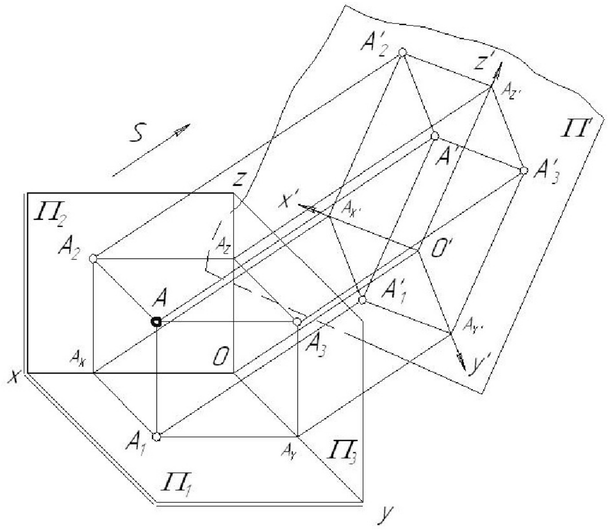
7. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

При разработке проектно-конструкторской документации, наряду с ортогональными проекциями, применяются аксонометрические. Эти изображения, с одной стороны, пространственно наглядны, с другой – дают возможность измерений.

Сущность аксонометрического проецирования заключается в том, что геометрический объект, ориентированный определенным образом относительно ортогональной системы плоскостей проекций, проецируется вместе с осями проекций на новую плоскость, называемую **аксонометрической** или **картинной**. В результате этого проецирования получается одна аксонометрическая проекция (**аксонометрия**).

7.1. Принцип аксонометрического проецирования

Возьмем в пространстве прямоугольную систему координат $0xyz$ и точку A, связанную с этой системой. Спроецируем эту точку по направлению S на картинную плоскость Π'.



$$\left.\begin{matrix} 0'x' \\ 0'y' \\ 0'z' \end{matrix}\right\}$$ аксонометрические оси

Рис. 7.1

При проецировании на картинную плоскость происходит искажение отрезков, параллельных осям проекций. Мерой этого искажения являются ***коэффициенты искажения*** – *отношение длины отрезка, параллельного аксонометрическим осям, к его натуральной величине.*

$$K_x = \frac{A'A'_3}{AA_3} = \frac{0'A'_x}{0A_x}$$ – коэффициент искажения по оси *0'x'*;

$$K_y = \frac{A'A'_2}{AA_2} = \frac{0'A'_y}{0A_y}$$ – коэффициент искажения по оси *0'y'*;

$$K_z = \frac{A'A'_1}{AA_1} = \frac{0'A'_z}{0A_z}$$ – коэффициент искажения по оси *0'z'*.

7.2. Виды аксонометрических проекций

В зависимости от направления проецирования (S) аксонометрические проекции подразделяются на:

1) прямоугольные ($S \perp \Pi'$);
2) косоугольные ($S \neq \Pi'$).

Каждый из этих видов проекций делится на три вида:

1. **Изометрия** – коэффициенты искажений по всем осям одинаковы.

$$K_x = K_y = K_z$$

2. **Диметрия** – коэффициенты искажений по двум осям одинаковы.

$$K_x = K_y \neq K_z$$ – горизонтальная диметрия

$K_x = K_z \neq K_y$ – фронтальная диметрия

$K_z = K_y \neq K_x$ – профильная диметрия

3. **Триметрия** – коэффициенты искажений по трем осям различны.

$$K_x \neq K_y \neq K_z .$$

Стандартными аксонометрическими изображениями являются прямоугольные изометрия и диметрия, а также косоугольные фронтальная и горизонтальная изометрии и фронтальная диметрия (ГОСТ 2.317-69).

7.3. Связь между коэффициентами искажений

Теорема:

Сумма квадратов коэффициентов искажений есть величина постоянная и не зависящая от положения ортогональных плоскостей проекций.

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = const .$$

Пусть две ортогональные оси проекций совпадают с аксонометрической плоскостью. Спроецируем третью ось на эту плоскость по направлению S.

$K_x = K_y = 1,$

$K_z = \frac{0z'}{0z} = ctg\omega,$

$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 1 + 1 + ctg\omega = 2 + ctg\omega.$

где ω – угол между направлением проецирования и картинной плоскостью.

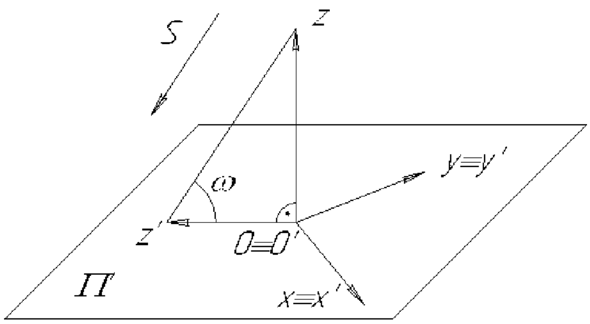


Рис. 7.2

7.4. Коэффициенты искажений прямоугольной аксонометрии

При $\omega = 90°$ $ctg\omega = 0$, тогда

$$\boxed{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 2 .}$$

Коэффициенты изменяются в диапазоне $0 < K < 1$.

$K = 0$ – аксонометрическая плоскость перпендикулярна какой-либо оси.

$K = 1$ – аксонометрическая плоскость параллельна какой-либо оси, тогда аксонометрическая проекция превращается в ортогональную.

Аксонометрические проекции не могут быть взяты параллельно или перпендикулярно осям проекций, а картинная плоскость должна пересекать все три плоскости проекций.

Прямоугольная изометрия

В изометрии $K_x = K_y = K_z = K$, тогда уравнение связи коэффициентов имеет вид $3K^2 = 2$.

Таким образом, в прямоугольной изометрической проекции коэффициенты искажения по всем трем осям равны

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}82\,.}$$

Прямоугольная фронтальная диметрия

В стандартной диметрии принимают $K_x = K_z = K$, а $K_y = 0{,}5K$.

$$K^2 + (0{,}5K)^2 + K^2 = 2, \qquad 2{,}25K^2 = 2, \qquad K = \sqrt{\frac{2}{2{,}25}} \approx 0{,}94.$$

Следовательно, в прямоугольной фронтальной диметрии коэффициенты искажения по осям равны:

$$\boxed{K_x \approx 0{,}94,\ K_z \approx 0{,}94,\ K_y \approx 0{,}47.}$$

7.5. Приведенные коэффициенты искажения

На практике, в целях сокращения вычислений, рекомендуется пользоваться приведенными коэффициентами искажений. При этом изображение строиться в масштабе $m:1$, где коэффициент m называется **коэффициентом приведения**, а аксонометрия называется **практической** или **приведенной**.

Прямоугольная изометрия

$$K_x = K_y = K_z = K_{np} = 1,$$

$$m = \frac{1}{K} = \frac{1}{0{,}82} = 1{,}22\,.$$

Следовательно, в приведенной изометрии изображение увеличено в 1,22 раза.

Оси изометрической проекции располагаются под углом 120° друг к другу.

Прямоугольная фронтальная диметрия

$$K_x = K_z = K_{np} = 1,$$

$$K_y = 0{,}5K_{np} = 0{,}5,$$

$$m = \frac{1}{K} = \frac{1}{0{,}94} = 1{,}06\,.$$

Косоугольная фронтальная диметрия

В косоугольной фронтальной диметрии (кабинетная проекция) картинная плоскость располагается параллельно фронтальной плоскости *x0z*, а направление проецирования выбирают так, что коэффициент искажения по оси *0y* равен 0,5. Поэтому в косоугольной аксонометрии нет необходимости использовать приведенные коэффициенты искажения.

7.6. Углы между аксонометрическими осями. Построение аксонометрических проекций геометрических элементов

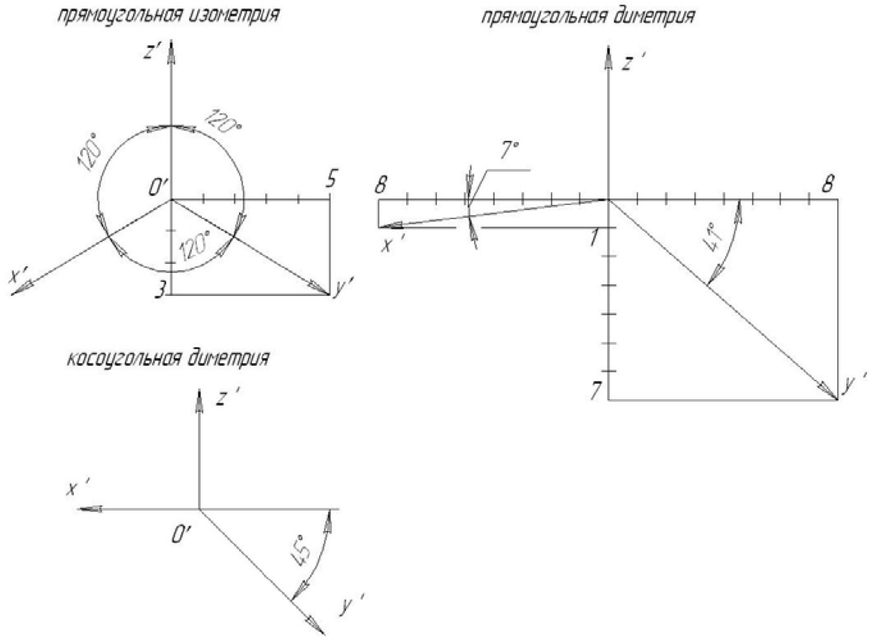


Рис. 7.3

Для построения аксонометрической проекции точки при заданном направлении аксонометрических осей необходимо отложить на них действительные координаты этой точки с учетом коэффициентов искажений:

$$x'_A = K_x x_A, \qquad y'_A = K_y y_A,$$

$$z'_A = K_z z_A .$$

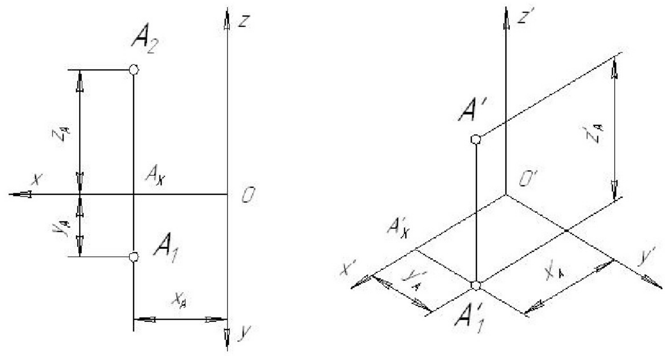


Рис. 7.4

Рассмотрим построение аксонометрических изображений окружностей, расположенных в плоскостях проекций.

Если в плоскости проекций или параллельной ей плоскости располагается окружность, то на картинную плоскость она спроецируется ортогонально в виде эллипса.

Проекцией окружности, параллельной плоскости проекций, в ортогональной аксонометрии является эллипс, большая ось которого перпендикулярна «свободной» аксонометрической оси, а малая – совпадает с этой осью.

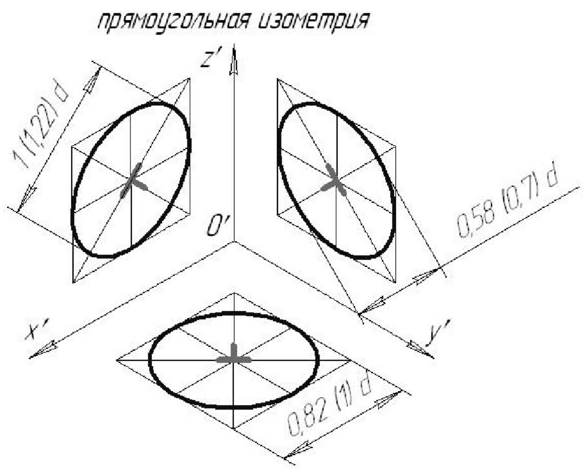
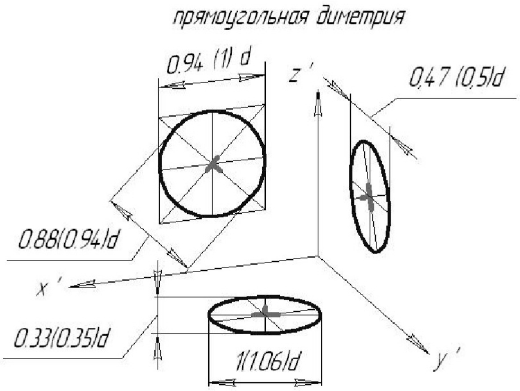


Рис. 7.5



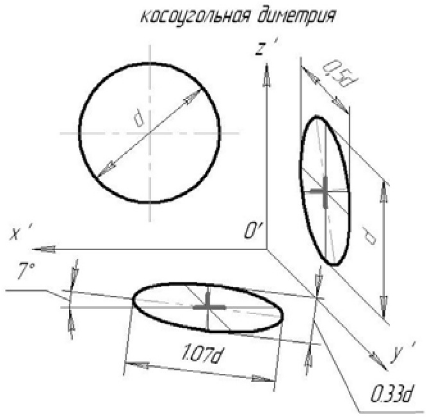


Рис. 7.6

Рис. 7.7

На рисунках 7.8 и 7.9 приведены примеры построения практической прямоугольной изометрии и практической прямоугольной и косоугольной диметрии цилиндрической детали с прямоугольным вырезом.

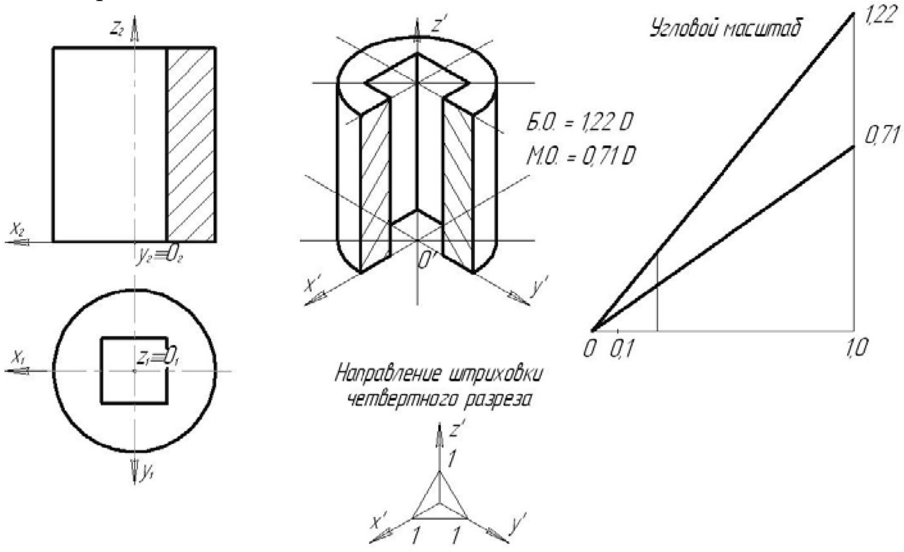


Рис. 7.8

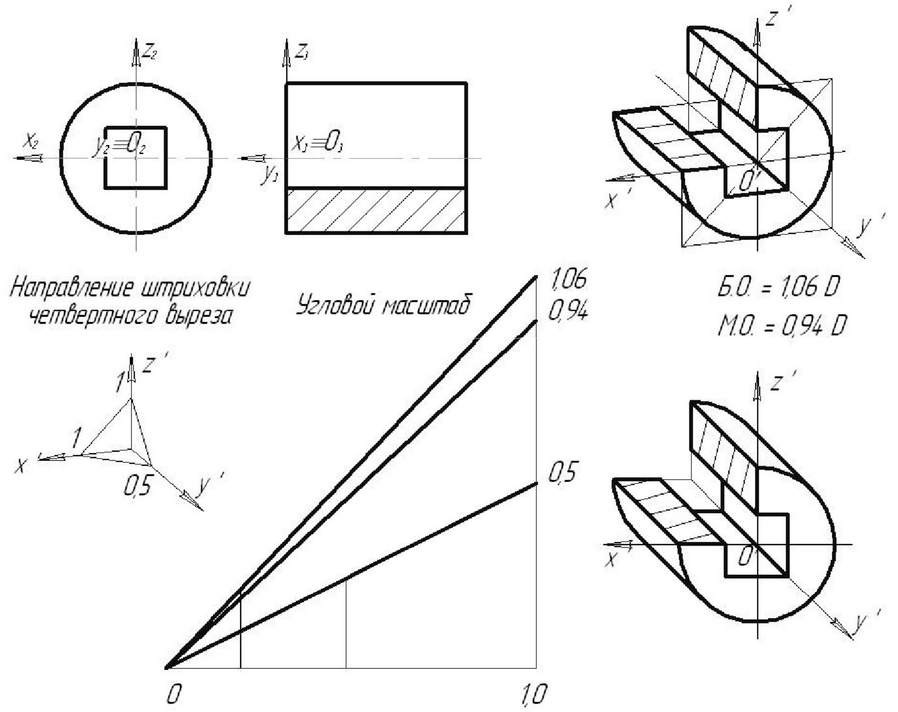


Рис. 7.9

Содержание

Учебное издание

Савченко Нелли Вячеславовна

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций

Редакторская обработка Ю.Н. Литвинова
Компьютерная верстка Н.В. Савченко

Подписано в печать 27.06.2011. Формат $60 \times 84\ {}^1\!/_8$
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 10,0
Тираж 100 экз. Заказ . Арт.С. – 7/2011.

Самарский государственный аэрокосмический университет
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета
443086, Самара, Московское шоссе, 34.