

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЁВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В. С. Асланов

Динамика твёрдого тела и систем тел

Интерактивное мультимедийное пособие

Самара
2011

УДК 531

Авторы:

Асланов Владимир Степанович

Асланов, В. С. Динамика твердого тела и систем тел [Электронный ресурс] : интерактивное мультимед. пособие / В. С. Асланов; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (Нац. Исслед. Ун-т) – Электрон. текстовые и граф. данные. (2 Мб). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК Pentium; Windows 2000 или выше.

Данный научно-образовательный контент разработан в обеспечение учебной подготовки студентов факультета летательных аппаратов специальностей: 160100.65 Самолето- и вертолетостроение; 160400.65 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов; В учебном пособии рассмотрены некоторые вопросы классической динамики твердого тела. Тематически пособие разделено на две главы. Первая глава посвящена способам задания углового движения твердого тела и описанию такого движения. Во второй главе разобраны общие вопросы интегрирования уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки. В подготовке пособия участвовали студенты группы №1505 по направлению 010900.68 "Механика. Прикладная математика" – 2006/07 учебного года: Николай Дьяков, Сергей Ендуткин, Татьяна Иванова, Антон Кондуков, Ксения Крикунова, Владимир Курчаткин, Вадим Макаров, Ольга Мысина, Святослав Пивоваров, Антон Попов, Антон Сверчков, Валерия Такмакова, Александр Хорошев, Булат Шакиров, Наталия Ярош, под руководством заведующего кафедрой теоретической механики профессора В. С. Асланова (дополнительные материалы <http://fla.ssau.ru/moodle/course/view.php?id=4>).

©Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2011

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Оглавление

1 Кинематика твёрдого тела	6
1.1 Системы координат	7
1.2 Направляющие косинусы	10
1.3 Углы Эйлера	12
1.4 Параметры Родрига-Гамильтона	14
1.4.1 Описание кватерниона. Основные постулаты	14
1.4.2 Преобразование вращения	22
1.4.3 Связь параметров Родрига-Гамильтона с другими кинематическими параметрами	25
1.4.3.1 Углы Эйлера.	25
1.4.3.2 Параметры Кейли-Клейна	28
1.5 Параметры Кейли-Клейна	28
1.5.1 Определение параметров Кейли-Клейна	28
1.5.2 Связь параметров Кейли-Клейна с параметрами Родрига-Гамильтона и углами Эйлера	32
1.6 Линейное преобразование координат	34

Закреть

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

1.7	Сложение поворотов твердого тела	35
1.8	Выражение угловой скорости тела через параметры Кейли-Клейна. Кинематические уравнения	36
1.9	Анализ способов задания положения твёрдого тела в пространстве	38
2	Динамика твёрдого тела	42
2.1	Углы Эйлера	43
2.2	Канонические переменные	45
2.2.1	Канонические переменные Депри	47
2.2.2	Выражение $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ через переменные Депри	51
2.2.3	Канонические переменные «действие–угол»	54
2.3	Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае Эйлера	60
2.3.1	Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае Эйлера	60
2.3.2	Об однозначности решения	67
2.4	Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае Лагранжа	69
2.4.1	Лагранжев случай движения весомого твердого тела вокруг неподвижной точки. Симметричный гироскоп	69
2.4.2	Простейшие интегралы уравнений движения	70
2.4.3	Сферический гироскоп	76
2.5	Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае С. В. Ковалев- ской	77
2.5.1	Общие замечания	77
2.5.2	Переменные С.В. Ковалевской	79
2.5.3	Основное уравнение С.В. Ковалевской; переменные s_1 и s_2	80
2.5.4	Определение переменных $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ через s_1 и s_2	85
2.6	Теорема Ляпунова об однозначных решениях уравнений Эйлера-Пуассона	89
2.7	Случай Делоне и Бобылева-Стеклова	96
2.7.1	Случай Делоне	97

2.7.2	Случай Бобылева-Стеклова	106
2.8	Анализ движения случая Эйлера в переменных Депри и переменных «действие-угол»	116
2.8.1	Фазовое пространство в переменных Депри	116
2.8.2	Фазовое пространство в переменных «действие-угол»	120

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Введение

Изучение движения твердого тела является классической задачей механики. Можно сказать, что интерес именно к этой задаче на долгие годы определил бурное развитие механики. Систематическое изложение механики твёрдого тела было дано впервые Эйлером в его сочинении “Теория движения твердых тел”, где было исследовано движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, получены уравнения движения. Динамика твердого тела является введением в динамику систем твердых тел. Первыми системами тел, которые стали предметом исследования были гиростаты. Интерес к этим системам обусловил и технический прогресс. Было замечено, что свойства быстро вращающихся тел могут быть использованы в технических системах: еще в 1752 году было высказано предложение использовать вращающийся гироскоп для создания на корабле искусственного горизонта. Однако практические реализации гироскопических систем появились лишь в начале 20 века. В настоящее время сложно найти область техники, где бы не присутствовали технические устройства, представляющие собой системы связанных твердых тел. Именно поэтому важно знать подходы к описанию кинематики и динамики твердого тела, чему и посвящено настоящее учебное пособие, в котором рассматриваются классические задачи динамики твердого тела. Тематически пособие разделено на две главы. Первая глава посвящена способам задания углового движения твердого тела и описанию такого движения. Во второй главе разобраны общие вопросы интегрирования уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки, а также рассмотрены канонические переменные Депри и «действие-угол».

Автор выражает признательность за полезные замечания и участие в подготовке рукописи доценту Вадиму Вячеславовичу Юдинцеву.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Назад

На весь экран

Глава 1

Кинематика твёрдого тела

В главе рассматриваются вопросы задания углового положения твердого тела. В первом параграфе рассматривается задание углового положения твердого тела при вращении вокруг неподвижной точки с использованием углов Эйлера или матрицы направляющих косинусов. Представлены кинематические уравнения в параметрах Эйлера. Во втором и третьем параграфах дается описание задания углового положения твердого тела с помощью параметров Родрига-Гамильтона и параметров Кейли-Клейна соответственно. Приводится описание кватерниона и краткое отражение основных постулатов алгебры кватернионов. Здесь же приведены геометрические интерпретации введения указанных параметров и показана связь между ними, а также показан переход от параметров Родрига-Гамильтона и Кейли-Клейна к углам Эйлера и направляющим косинусам. Показаны линейные преобразования координат, осуществляемые с помощью таких параметров, а также рассмотрен вопрос о сложении поворотов твердого тела, представляющего в параметрах Кейли-Клейна

Закреть

[Домашняя](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Назад](#)
[На весь экран](#)
[Закреть](#)

последовательность дробно-линейных преобразований. Выведены соотношения, соответствующие кинематическим уравнениям, осуществляющим связь параметров Родрига-Гамильтона и Кейли-Клейна с угловыми скоростями. В четвертом параграфе главы приведен анализ различных способов задания углового положения твердого тела в пространстве.

1.1. Системы координат

Твердым телом называется такая система материальных точек, для которой расстояние между любой парой точек не меняется с течением времени. Из приведенного определения следует, что для векторов $\vec{r}_J$ и $\vec{r}_K$ соединяющих произвольную точку O тела с точками J и K , выполняются условия:

$$r_J^2 = \text{const}, r_K^2 = \text{const}, \quad (1.1.1)$$

$$(\vec{r}_J - \vec{r}_K)^2 = r_J^2 + r_K^2 - 2(\vec{r}_J, \vec{r}_K) = \text{const}. \quad (1.1.2)$$

Отсюда получаем соотношение

$$(\vec{r}_J, \vec{r}_K) = \text{const}, \quad (1.1.3)$$

которое описывает условие неизменности скалярного произведения векторов, соединяющих любые пары точек в теле. В силу произвольности точек J и K из условия (1.1.3) следуют все равенства (1.1.1), (1.1.2), поэтому условие (1.1.3) эквивалентно исходному определению твердого тела.

Отметим, что приведенное определение твердого тела не является полным. Легко убедиться, что всевозможные зеркальные отражения пространства удовлетворяют этому определению, но они не включаются в математическую модель твердого

тела. Поэтому данное определение дополняется условием неизменности смешанного произведения векторов:

$$(\vec{r}_J \times \vec{r}_J, \vec{r}_K) = \text{const.} \quad (1.1.4)$$

Условия (1.1.3) и (1.1.4) полностью определяют математическую модель твердого тела. Из условия (1.1.3) следует, что если в какой-то момент времени с некоторыми точками тела связать *ортонормированный* базис $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, то этот базис будет оставаться *ортонормированным* в любой последующий момент, а разложение вектора $\vec{r}_J$ произвольной точки тела в этом базисе неизменно. Условие (1.1.4) дополнительно означает неизменность взаимной ориентации базисных векторов в том смысле, что правая тройка векторов остается правой, а левая – левой.

Рассмотрим произвольное движение твердого тела относительно некоторой системы отсчета $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ (рисунок 1.1.1). Свяжем с телом некоторый базис $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и зададимся координатами $\vec{r}_k$ ($k = 1, 2, 3$) произвольной точки тела в этом базисе. Тогда положение этой точки в системе $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ в любой момент времени дается соотношением

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r} = \vec{R}_O + \sum_{k=1}^3 r_k \vec{e}_k, \quad (1.1.5)$$

и в силу неизменности координат r_k для однозначного его определения достаточно в любой момент времени задать положение базиса $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ относительно базиса $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$.

Таким образом, задача определения положения твердого тела сводится к задаче определения взаимного расположения двух базисов, начала которых в общем случае не совпадают. Введем систему отсчета $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$, оси которой параллельны одноименным осям исходной системы $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$. Тогда движение базиса $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ относительно исходной системы отсчета $A\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ может быть полностью описано движением точки O (радиус-вектор $\vec{R}_O$) и движением базиса $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ относительно $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ (рисунок 1.1.1). Последнее представляет собой движение твердого тела с

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

Домашняя



Назад

На весь экран

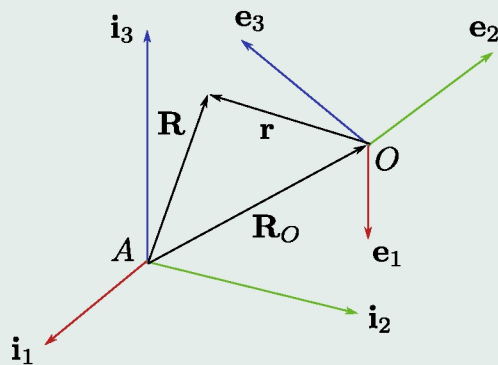


Рис. 1.1.1. Определение положения твердого тела

Закреть

неподвижной точкой O .

Описанная схема лежит в основе всех существующих способов задания положения твердого тела, а разница в способах заключается только в разном выборе параметров, задающих положение базиса $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ относительно базиса $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$.

В дальнейшем при рассмотрении различных способов задания положения твердого тела с неподвижной точкой O будем считать базисы $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ правыми ортонормированными тройками векторов.

1.2. Направляющие косинусы

Направляющие косинусы $\alpha_{kj} = (\vec{i}_k, \vec{e}_j)$ представляют собой коэффициенты в разложении ортов $\vec{e}_j$ базиса по ортам базиса $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ по ортам $\vec{i}_k$ базиса $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$:

$$\vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_{kj} \cdot \vec{i}_k, \quad (j = 1, 2, 3).$$

В этом случае произвольное положение твердого тела с неподвижной точкой задается матрицей направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \|\alpha_{kj}\|_{k,j=1}^3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \|e_k \cdot i_j\|. \quad (1.2.1)$$

В силу ортонормированности базисов матрица $\mathbf{A}$ является ортогональной, т. е. она удовлетворяет условию $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, “Т” – знак транспонирования. Последнее условие определяет 6 независимых уравнений на коэффициенты α_{kj} . Поэтому только три из девяти элементов матрицы направляющих косинусов являются независимыми.

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Матрица направляющих косинусов удовлетворяет дополнительному условию $\det(\mathbf{A}) = 1$ вытекающему из того, что рассматриваемые базисы являются правыми тройками векторов. Для данного способа имеет место взаимно однозначное соответствие между положениями тела и элементами матрицы направляющих косинусов.

Если в начальный момент времени орты связанного с телом базиса совпадают с одноименными ортами системы отсчета, то положение каждой точки тела $\vec{r}(t)$ будет определяться через ее начальное положение $\vec{r}'$ формулой $\vec{r}(t) = (t) \cdot \vec{r}'$. Отсюда в силу ортогональности матрицы $\mathbf{A}$ следует, что любое движение твердого тела можно рассматривать как зависящее от времени ортогональное преобразование в трехмерном пространстве.

Найдем выражения производных от направляющих косинусов a_{kj} по времени через проекции угловой скорости на оси подвижной системы

$$di_1/dt = \tilde{d}i_1/dt + \omega \times i_1. \quad (1.2.2)$$

Так как вектор i_1 в неподвижной системе не меняется, то его абсолютная производная di_1/dt равна нулю, следовательно

$$0 = \tilde{d}i_1/dt + \omega \times i_1.$$

Спроектируем это равенство на ось ξ , причем примем во внимание, что $i_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3$. На этом основании мы при проектировании получим:

$$0 = \dot{a}_{11} + a_{13}q - a_{12}r.$$

Подобным образом можно найти и остальные соотношения и в результате придем к равенствам.

$$\begin{cases} \dot{a}_{i1} = -q \cdot a_{i3} + r \cdot a_{i2}, \\ \dot{a}_{i2} = -r \cdot a_{i1} + p \cdot a_{i3}, \\ \dot{a}_{i3} = -p \cdot a_{i2} + q \cdot a_{i1}. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Закреть

1.3. Углы Эйлера

Положение твердого тела с неподвижной точкой можно задавать также различными системами углов – Эйлера, Крылова и др. Суть такого описания основывается на том, что два правых ортонормированных базиса $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ можно совместить последовательными поворотами вокруг трех некопланарных осей на некоторые углы.

Рассмотрим систему **углов Эйлера** (Рисунок 1.3.1). Пусть базис $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ занимает произвольное положение. Все векторы $\vec{i}_k$ базиса $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ можно совместить с базисными векторами $\vec{e}_k$ с помощью следующих трех поворотов:

- 1) Поворот вокруг оси $\vec{i}_3$ на угол ψ до совмещения вектора $\vec{i}_1$ с *линией узлов* $\vec{i}'_1$, т. е. поворот, переводящий вектор $\vec{i}_1$ в плоскость векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.
- 2) Поворот вокруг линии узлов $\vec{i}'_1$ на угол θ до совмещения орта $\vec{i}_3$ с ортом $\vec{e}_3$.
- 3) Поворот вокруг оси $\vec{e}_3$ на угол φ до полного совмещения базисов.

Совокупность указанных поворотов переводит базис $O\vec{i}_1\vec{i}_2\vec{i}_3$ в базис $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и представляет собой последовательность поворотов на углы Эйлера ψ (угол прецессии), θ (угол нутации) и φ (угол собственного вращения).

Получим выражения проекций мгновенной угловой скорости твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки, через углы Эйлера и их производные.

Рассматриваемое тело участвует в сложном движении, состоящем из трех вращений: с угловой скоростью $\dot{\psi}$ вокруг оси OZ , с угловой скоростью $\dot{\theta}$ вокруг линии узлов ON и с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг оси Oz . Мгновенная угловая скорость тела ω равна сумме угловых скоростей составляющих вращений. Пусть p, q, r – проекции ω соответственно на оси Ox, Oy, Oz , жестко связанные с телом. Выражения для p, q, r через углы Эйлера и их производные легко получить из рисунка 1.3.2, на

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

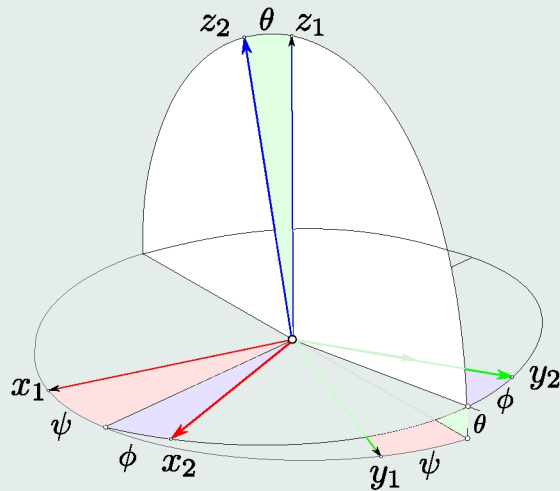


Рис. 1.3.1. Последовательность поворотов

котором вспомогательная прямая OM лежит в плоскости Oxy и перпендикулярна линии узлов. Имеем

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

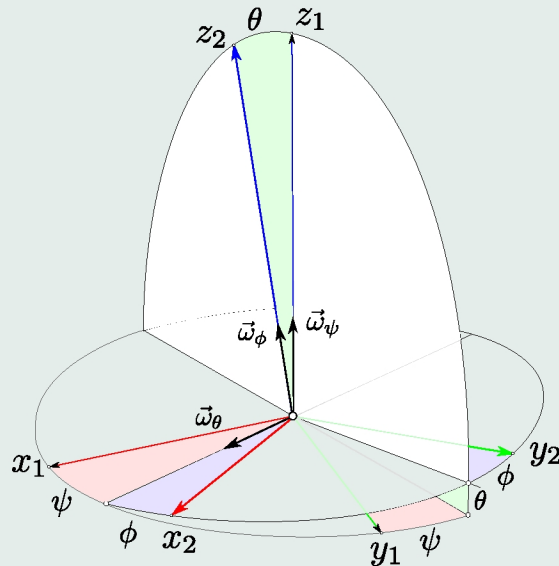


Рис. 1.3.2. К определению угловой скорости тела

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

1.4. Параметры Родрига-Гамильтона

1.4.1. Описание кватерниона. Основные постулаты

Исторически первой гиперкомплексной системой, рассмотренной в математике, является система кватернионов, введённая английским математиком и механиком Гамильтоном.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Уже из самого названия «кватернион», что переводится как четвёрка, ясно, что этот математический объект содержит четыре чего-то. Под кватернионом понимают число, составленное из действительной единицы 1 и трех мнимых единиц i_1, i_2, i_3 , с действительными элементами вида (1.4.1):

$$\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_0 1 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3. \quad (1.4.1)$$

Единицы 1, i_1 , i_2 , i_3 можно рассматривать как единичные векторы (орты) четырехмерного пространства, тогда любой кватернион можно представить в этом пространстве точкой или радиусом-вектором.

Гамильтон ввел кватернионы, он же ввел и основные постулаты, определяющие действия над кватернионами:

- 1) Два кватерниона Λ и M равны, если равны их элементы λ_i ($i = 0, \dots, 3$).

$$\Lambda = M \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i.$$

- 2) Суммой кватернионов Λ и M называется кватернион, элементами которого являются величины $\lambda_i + \mu_i$:

$$\Lambda + M = (\lambda_0 + \mu_0) 1 + (\lambda_1 + \mu_1) i_1 + (\lambda_2 + \mu_2) i_2 + (\lambda_3 + \mu_3) i_3.$$

- 3) При умножении кватерниона Λ на скаляр a происходит умножение на это число всех его элементов:

$$a\Lambda = a\lambda_0 1 + a\lambda_1 i_1 + a\lambda_2 i_2 + a\lambda_3 i_3.$$

Сложение кватернионов и умножение их на скаляр подчиняются правилам обычной алгебры:

- 1) $\Lambda + M = M + \Lambda, (\Lambda + M) + N = \Lambda + (M + N),$
- 2) $a\Lambda = \Lambda a, (ab)\Lambda = \Lambda(ba),$
- 3) $(a + b)\Lambda = a\Lambda + b\Lambda, a(\Lambda + M) = a\Lambda + aM.$
- 4) Для того, чтобы определить произведение кватернионов, необходимо задать правила умножения единиц $1, i_1, i_2, i_3.$ Эти правила следующие:

$$\begin{aligned}
 1 \circ i_1 &= i_1 \circ 1 = i_1, \\
 1 \circ i_2 &= i_2 \circ 1 = i_2, \\
 1 \circ i_3 &= i_3 \circ 1 = i_3, 1 = 1. \\
 i_1 \circ i_1 &= -1, \\
 i_2 \circ i_2 &= -1, \\
 i_3 \circ i_3 &= -1, \\
 i_1 \circ i_2 &= -i_2 \circ i_1 = i_3, \\
 i_3 \circ i_1 &= -i_1 \circ i_3 = i_2, \\
 i_2 \circ i_3 &= -i_3 \circ i_2 = i_1.
 \end{aligned}$$

При таком правиле умножения произведение двух кватернионов также является кватернионом. Благодаря подобранному таким образом правилам умножения, алгебра кватернионов содержит в себе алгебру действительных и комплексных чисел, а также трехмерную векторную алгебру.

Кватернионы содержат действительные числа $(a, 0, 0, 0)$ с единственной единицей 1, комплексные числа $(a, b, 0, 0)$ с двумя единицами 1, i и векторы $(0, a, b, c)$ в пространстве трех измерений.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

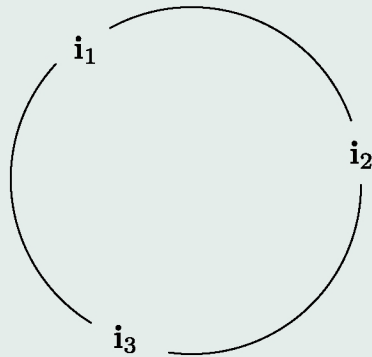


Рис. 1.4.1. При умножении двух единиц, расположенных по часовой стрелке, получается третья единица с плюсом; в обратном порядке – единица берётся с минусом

Введенные правила умножения позволяют записать

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - \lambda_1 \mu_1 - \lambda_2 \mu_2 - \lambda_3 \mu_3 + \lambda_0 (\mu_1 i_1 + \mu_2 i_2 + \mu_3 i_3) + \\ + \mu_0 (\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3) + \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix} \quad (1.4.2)$$

1) Кватернион есть сумма скалярной и векторной частей.

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}.$$

- 2) Умножение кватернионов обладает ассоциативными и дистрибутивными по отношению к сложению свойствами.

$$(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N),$$

$$\Lambda \circ (M + N) = \Lambda \circ M + \Lambda \circ N.$$

- 3) Умножение кватернионов некоммукативно; перестановка сомножителей допустима только тогда, когда один из сомножителей является скалярным или когда векторные части сомножителей пропорциональны.

$$\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda.$$

- 4) Скалярная часть произведения кватернионов не изменяется при циклической перестановке сомножителей.

$$\text{sqal} [\Lambda \circ M \circ N] = \text{sqal} [M \circ N \circ \Lambda] = \text{sqal} [N \circ \Lambda \circ M].$$

- 5) Кватернионом, сопряженным данному кватерниону Λ , является следующий кватернион, обозначаемый $\tilde{\Lambda}$:

$$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \vec{\lambda}.$$

- 6) Норма кватерниона определяется как

$$\|\Lambda\| = \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Кватернион называется нормированным, если $\|\Lambda\| = 1$.

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

- 7) Сопряженное произведению двух кватернионов равно произведению их сопряженных значений, взятых, в обратном порядке

$$\overline{(\Lambda \circ M)} = \bar{M} \circ \bar{\Lambda}.$$

- 8) Норма произведения двух кватернионов равна произведению норм сомножителей.

$$\|\Lambda \circ M\| = \|M\| \circ \|\Lambda\|.$$

- 9) Произведение двух кватернионов равно нулю только тогда, когда один из сомножителей равен нулю.

$$\Lambda \circ M = 0, \text{ значит } \Lambda = 0 \text{ или } M = 0.$$

- 10) Кватернионом, обратным данному кватерниону Λ , называется кватернион

$$\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|},$$

для которого выполняется равенство

$$\Lambda \circ \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \circ \Lambda = 1.$$

Для нормированного кватерниона $\Lambda^{-1} = \bar{\Lambda}$.

Любой кватернион с действительными элементами

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$$

может быть представлен в виде

$$\Lambda = |\Lambda| \left(\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\vec{\lambda}}{|\Lambda|} \right), \quad (1.4.3)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

где

$$|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|} = \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

Величина

$$\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\vec{\lambda}}{|\Lambda|}$$

называется верзором кватерниона. Векторную часть верзора можно записать в виде

$$\frac{\vec{\lambda}}{|\Lambda|} = \frac{\vec{\lambda}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{|\Lambda|} = \xi \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{|\Lambda|}, \quad (1.4.4)$$

$$\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} = \cos \theta,$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}{|\Lambda|} = \sin \theta,$$

$$0 \leq \theta < \pi.$$

Тогда

$$\Lambda = |\Lambda| (\cos \theta + \xi \sin \theta).$$

Эта форма записи напоминает нам о комплексных числах. Даже вектор ξ подчиняется свойству мнимой единицы комплексного числа $\xi \circ \xi = \xi^2 = -1$. Также как и для комплексного числа, для кватерниона справедлива формула Муавра

$$\Lambda^n = (|\Lambda|)^n (\cos n\theta + \xi \sin n\theta). \quad (1.4.5)$$

Рассмотрим нормированный кватернион

$$\Lambda = \cos \theta + \xi \sin \theta \quad (1.4.6)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Этот кватернион может быть представлен в виде произведения некоторых двух векторов $\mathbf{b} \circ \mathbf{a}^{-1}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $a = b$, $a = \sqrt{\|\mathbf{a}\|}$, $b = \sqrt{\|\mathbf{b}\|}$;
- 2) угол между векторами a и b равен ϑ ;
- 3) плоскость ab перпендикулярна к единичному вектору ξ ;
- 4) векторы a , b , ξ образуют правую систему осей.

Имея в виду свойство 1, можем написать

$$\mathbf{\Lambda} = \cos \vartheta + \xi \sin \vartheta = \frac{ab \cos \vartheta + \xi ab \sin \vartheta}{|\mathbf{a}|}. \quad (1.4.7)$$

Величины $ab \cos \vartheta$ и $\xi ab \sin \vartheta$ можно представить в виде скалярного и векторного произведений $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ соответственно. Исходя из этого получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{-sqal(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) + vect(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\|} = \\ &= -\frac{sqal(\mathbf{b} \circ \mathbf{a}) + vect(\mathbf{b} \circ \mathbf{a})}{\|\mathbf{a}\|} = -\frac{\mathbf{b} \circ \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\mathbf{b} \circ \tilde{\mathbf{a}}}{\|\mathbf{a}\|} = \mathbf{b} \circ \mathbf{a}^{-1} \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Рис. 1.4.2

Из рисунка 1.4.2 следует, что когда векторы a , b , ξ образуют правую систему координат, угол $\vartheta < \pi$ отсчитывается от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ против направления движения часовой стрелки при наблюдении с положительной оси ξ . Принятые здесь определенность

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

выбора положительного направления единичного вектора ξ и соответствующее ему положительное направление отсчета угла ϑ задаются только правилами векторного умножения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; в принципе можно взять обратное направление отсчета ϑ и т. п.; однако установленной здесь условности будем придерживаться в дальнейшем.

Из соотношения (1.4.8) следует, что каждому нормированному кватерниону Λ может быть поставлена в соответствие дуга большого круга сферы радиуса $a = b$, имеющая направление положительного угла ϑ и соединяющая концы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. В связи с этим кватернион Λ может быть однозначным образом представлен дугой большого круга $\arcs \Lambda$, плоскость которого определяется вектором ξ , а длина – углом ϑ . Направление кватерниона задано направлением вектора ξ ; положение дуги Λ на ее большом круге произвольно, т.е. дуга является скользящей.

1.4.2. Преобразование вращения

Алгебра кватернионов позволяет представить конечный поворот в пространстве в простой и удобной форме. Такое представление базируется на фундаментальной теореме. Пусть Λ и R некоторые кватернионы

$$R = r_0 + r_1 i_1 + r_2 i_2 + r_3 i_3 = r_0 + \vec{r}$$

и

$$\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 = \lambda_0 + \vec{\lambda}.$$

В этом случае величина

$$R' = \Lambda \circ R \circ \Lambda^{-1} \quad (1.4.9)$$

есть кватернион, норма и скалярная часть которого равны норме и скалярной части кватерниона R

$$R' = r_0 + \vec{r}', \quad (1.4.10)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Векторная часть $\vec{r}' = r'_1 i_1 + r'_2 i_2 + r'_3 i_3$ получается вращением вектора $\vec{r}$ по конусу вокруг оси $\vec{\lambda}$ на двойной угол. Так, если записать

$$\Lambda = |\Lambda| \left(\cos \frac{\theta}{2} + \vec{\xi} \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

где

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|},$$

то $\vec{r}'$ получается вращением $\vec{r}$ вокруг оси $\vec{\xi}$ на угол θ .

$$\vec{r}' \vec{\lambda} \theta \vec{r} \vec{\lambda} \theta$$

Операция $R' = \Lambda \circ R \circ \Lambda^{-1}$ изменяет только векторную часть кватерниона – по этой причине ее можно рассматривать как операцию преобразования вектора r в вектор r' , записываемую в виде $r' = \Lambda \circ r \circ \Lambda^{-1}$. Поскольку норма кватерниона не меняется преобразованием, то длина вектора (т. е. его модуль $|\vec{r}'| = \sqrt{\|R\|^2 - r_0^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$) также остается неизменной:

$$|\vec{r}'| = \sqrt{|R'| - r_0'^2} = \sqrt{|R| - r_0^2} = |\vec{r}|. \quad (1.4.11)$$

Отсюда следует, что преобразование $r' = \Lambda \circ r \circ \Lambda^{-1}$ является ортогональным преобразованием. Согласно теореме Эйлера, любое ортогональное преобразование есть вращение вокруг некоторой оси. Преобразование $r' = \Lambda \circ r \circ \Lambda^{-1}$ определяет сразу же ось этого вращения: этой осью является $\text{vect} \Lambda = \vec{\lambda}$.

Кватернион Λ называется кватернионом преобразования.

Выполняя умножение $R' = \Lambda \circ R \circ \Lambda^{-1}$ и приравнявая члены при четырёх единицах, получаем выражение компонент кватерниона R' в следующем виде

$$\begin{cases} r'_0 = r_0, \\ r'_1 = \frac{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_1 + \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_2 + \frac{2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_3, \\ r'_2 = \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_1 + \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_2 + \frac{2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_3, \\ r'_3 = \frac{2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_1 + \frac{2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_2 + \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} r_3. \end{cases} \quad (1.4.12)$$

Если последнюю систему записать в матричной форме, получим

$$\mathbf{r}' = \mathbf{B} \mathbf{r}. \quad (1.4.13)$$

Таким образом, получается, что компоненты нового вектора $\mathbf{r}'$ выражаются через компоненты старого вектора $\mathbf{r}$. В результате можно сопоставить матрицу преобразования $\mathbf{B}$ с матрицей преобразования $\mathbf{A}$ записанной через направляющие косинусы. Получается, что $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$. Операция вращения $\mathbf{R}' = \Lambda \circ \mathbf{R} \circ \Lambda^{-1}$ осуществляет поворот вокруг оси $\vec{\lambda}$ против часовой стрелки, а матрица преобразования $\mathbf{A}$ (не транспонированная) осуществляет поворот по часовой стрелке, поэтому её берём именно в транспонированном виде.

Рассмотрим преобразование $\Lambda^{-1} \circ R' \circ \Lambda$. Если подставить выражение для R' то получим исходный кватернион R .

$$\Lambda^{-1} \circ R' \circ \Lambda = 1 \circ R \circ 1 = R.$$

То есть операция преобразования следующего вида $R' = \Lambda^{-1} \circ R \circ \Lambda$ описывает обратное вращение, то есть вращение вокруг оси $\vec{\lambda}$, но по часовой стрелке.

Для того чтобы осуществить несколько последовательных поворотов вокруг разных осей и на разные углы нужно составить комбинацию из кватернионов вращения. Например, вращение Λ и последующее вращение M эквивалентны одному вращению $M \circ \Lambda$.

Компоненты кватерниона преобразования $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3$ являются параметрами Родрига-Гамильтона. Т.о. для того, чтобы задать вращение вектора вокруг какой-нибудь оси, необходимо задать четыре компонента кватерниона Λ : $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

1.4.3. Связь параметров Родрига-Гамильтона с другими кинематическими параметрами

Собственный кватернион преобразования имеет компоненты, которыми являются параметры Родрига-Гамильтона. Связь между компонентами кватерниона, задающего преобразование вращения, и направляющими косинусами, являющимися элементами матрицы ортогонального преобразования, была изложена выше. Установим связь кватерниона преобразования с другими кинематическими параметрами.

1.4.3.1. Углы Эйлера.

В целом последовательность трех вращений различных несовпадающих осей задает произвольное преобразование; преобразование такого рода носит название *вращение на эйлеровы углы*.

Рассмотрим эйлерову последовательность трех поворотов, приводящих базис $\mathbf{I}$ в базис $\mathbf{E}$ и совершаемых вокруг координатных осей (рисунок 1.4.3). Пусть первый поворот осуществляется вокруг оси i_3 на угол прецессии φ , второй поворот – вокруг оси i'_1 на угол нутации ψ и третий поворот – вокруг оси e_3 на угол вращения ϑ . Матрица преобразования A , задающая переход от системы координат $\mathbf{I}$ к системе

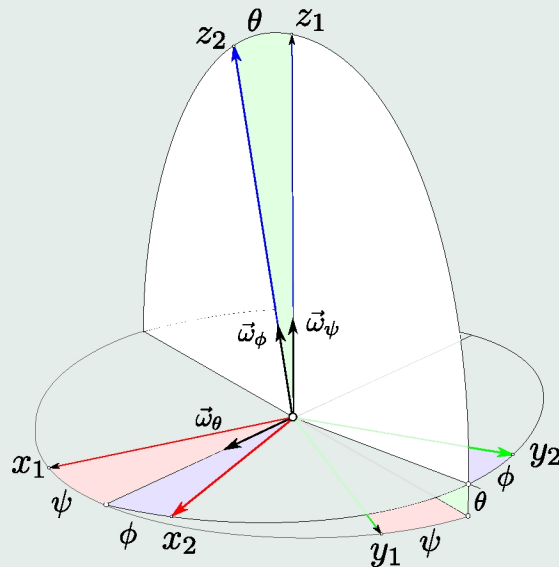


Рис. 1.4.3. Углы Эйлера

E , получается в виде произведения трех матриц последовательных поворотов:

$$A = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -\sin \psi & \cos \psi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Выполняя умножение, получаем

$$A = \begin{vmatrix} c_{\vartheta} c_{\varphi} - s_{\vartheta} s_{\varphi} c_{\psi} & c_{\vartheta} s_{\varphi} + s_{\vartheta} c_{\varphi} c_{\psi} & s_{\vartheta} s_{\psi} \\ -s_{\vartheta} c_{\varphi} - c_{\vartheta} c_{\psi} s_{\varphi} & -s_{\vartheta} s_{\varphi} + c_{\vartheta} c_{\varphi} c_{\psi} & c_{\vartheta} s_{\psi} \\ s_{\varphi} s_{\psi} & -s_{\psi} c_{\varphi} & c_{\psi} \end{vmatrix}. \quad (1.4.14)$$

Аналогичным образом можно найти кватернион результирующего преобразования по кватернионам каждого плоского поворота. В соответствии с фундаментальной теоремой кватернион плоского вращения на угол ϑ равен $\cos \frac{\vartheta}{2} + \xi \sin \frac{\vartheta}{2}$, где ξ – единичный вектор оси вращения.

Пусть Λ – кватернион первого поворота, совершаемого вокруг оси i_3 на угол φ , тогда, очевидно,

$$\Lambda^* = \cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2},$$

Второй поворот происходит вокруг оси i'_1 на угол ψ ; собственный кватернион M^* этого поворота равен

$$M^* = \cos \frac{\psi}{2} + i_1 \sin \frac{\psi}{2}.$$

Третий поворот совершается вокруг оси e_3 на угол ϑ ; кватернион этого поворота

$$P^* = \cos \frac{\vartheta}{2} + i_3 \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Результирующий собственный кватернион N^* будет равен произведению

$$\Lambda^* \circ M^* \circ P^* = \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\psi}{2} + i_1 \sin \frac{\psi}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + i_3 \sin \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Отсюда вытекает следующая связь компонент кватерниона с углами Эйлера:

$$\begin{aligned} \nu_0^* &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi + \vartheta}{2}, \quad \nu_2^* = \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \\ \nu_1^* &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\varphi - \vartheta}{2}, \quad \nu_3^* = \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\varphi + \vartheta}{2} \end{aligned}$$

1.4.3.2. Параметры Кейли-Клейна

Параметры Кейли-Клейна являются комплексными комбинациями компонент кватерниона. Они вводятся в кинематику вращения твердого тела либо посредством стереографического проектирования сферы на плоскость и задания дробно – линейного преобразования плоскости в себя, либо с помощью изоморфной операции линейного преобразования, задаваемой унитарной матрицей. Для установления связи кватерниона с параметрами Кейли-Клейна удобно использовать второй путь. Опуская изложение этого метода приведем связь параметров Кейли-Клейна с компонентами кватерниона:

$$\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3,$$

$$\beta = \lambda_2 + i\lambda_1,$$

$$\delta = \lambda_0 - i\lambda_3,$$

$$\gamma = i\lambda_1 - \lambda_2$$

1.5. Параметры Кейли-Клейна

1.5.1. Определение параметров Кейли-Клейна

Эти величины, определяющие положение твердого тела, представляют комплексные комбинации параметров Родрига-Гамильтона. С их помощью повороту

[Домашняя](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)[Назад](#)[На весь экран](#)[Заккрыть](#)

Домашняя



Назад

На весь экран

тела сопоставляется некоторое дробно-линейное преобразование в плоскости комплексного переменного, а задача сложения поворотов сводится к выполнению последовательности таких преобразований.

В дальнейшем используются два представления комплексных чисел: представление их точками плоскости $z = x + iy$ и сопоставляемыми им с помощью стереографической проекции точками сферической поверхности единичного радиуса (сферы Римана).

Плоскостью z будет служить экваториальная плоскость сферы единичного радиуса Σ_0 , на которую проектируются из ее полюса N точки плоскости. Система осей $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выбирается с началом координат в центре сферы O так, чтобы оси совпали с осями x и y плоскости, а ось ξ_3 шла к полюсу сферы (рисунок 1.5.1). Тогда, выражая, что три точки $N(0, 0, 1)$, $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $M'(x, y, 0)$ лежат на одной прямой NMM' , получим соотношения

$$\frac{x}{\xi_1} = \frac{y}{\xi_2} = \frac{1}{1 - \xi_3}, \text{ т. е. } z = x + iy = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3}, \quad (1.5.1)$$

причем ξ_1, ξ_2, ξ_3 связаны уравнением поверхности сферы

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1. \quad (1.5.2)$$

Окружности плоскости Π , содержащие центр сферы, переходят при стереографическом преобразовании в большие круги сферы. Действительно, с помощью (1.5.1) и (1.5.2) выражение

$$A(x^2 + y^2) - (Bx + Cy) = A \frac{1 - \xi_3^2}{(1 - \xi_3)^2} - \frac{B\xi_1 + C\xi_2}{1 - \xi_3} = A + \frac{2A\xi_3 - B\xi_1 - C\xi_2}{1 - \xi_3}$$

Преобразуется на проходящей через начало координат плоскости

Закреть

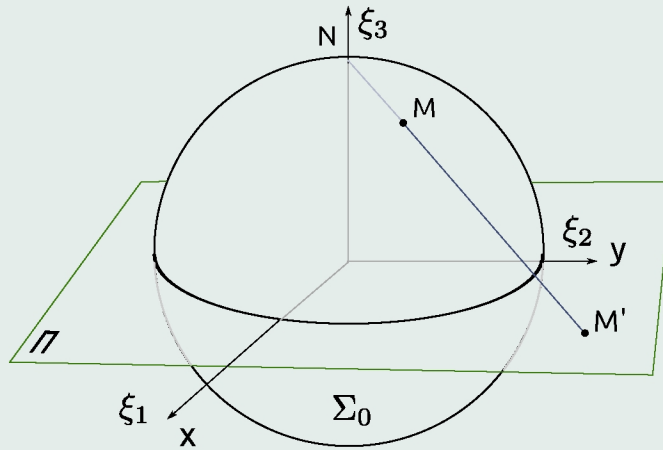


Рис. 1.5.1. К определению параметров Кейли-Клейна

$$2A\xi_3 - B\xi_1 - C\xi_2 = 0$$

в уравнение окружности

$$\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y - \frac{C}{2A}\right)^2 = 1 + \frac{B^2 + C^2}{4A^2}.$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Эта окружность содержит центр сферы, так как её радиус

$$R = \sqrt{1 + \frac{B^2 + C^2}{4A^2}}$$

больше расстояния от центра окружности до центра сферы, равного $\sqrt{(B^2 + C^2)/(4A^2)}$. Но пересечение упомянутой плоскости со сферой представляет окружность большого круга, что и требовалось доказать. Можно показать (мы не будем на этом останавливаться), что стереографическая проекция любой окружности плоскости Π представляет некоторую окружность сферы.

Возвращаясь к случаю твердого тела, имеющего неподвижную точку O , представим себе описанную вокруг O единичную сферу Σ , неизменно связанную с телом и системой осей $Ox_1x_2x_3$. При поворотах тела сфера Σ скользит по неподвижной сфере Σ_0 . Большой круг Γ сферы Σ после поворота займет на Σ_0 положение Γ' . Пусть γ и γ' – окружности плоскости Π , которым соответствуют на Σ_0 большие круги Γ и Γ' . Этому преобразованию окружности γ в γ' сопоставляется поворот тела (сферы Σ). Но при указанном преобразовании комплексные координаты z и z' точек окружностей γ и γ' связаны друг с другом дробно-линейным соотношением

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}. \quad (1.5.3)$$

Коэффициенты этого преобразования $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определены с точностью до произвольного множителя, так как соотношение (1.5.3) не изменится при умножении числителя и знаменателя на одно и то же число. Поэтому выбор коэффициентов можно подчинить условию нормирования, которое берется в форме

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (1.5.4)$$

Величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ называют *параметрами Кейли-Клейна*.

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

1.5.2. Связь параметров Кейли-Клейна с параметрами Родрига-Гамильтона и углами Эйлера

Установим связь, полученных параметров Кейли-Клейна, с параметрами Родрига-Гамильтона. Для этого для этого отметим, что дробно-линейное преобразование, при котором три точки z_1, z_2, z_3 , определяющие окружность γ , переходят в точки z'_1, z'_2, z'_3 , определяющие γ' , может быть записано в виде

$$\frac{z - z_2}{z - z_1} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{z' - z'_2}{z' - z'_1} \frac{z'_3 - z'_1}{z'_3 - z'_2}. \quad (1.5.5)$$

Вектор поворота θ пересекает сферу Σ_0 в точке P , координаты которой пропорциональны параметрам Родрига $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, и в диаметрально противоположной точке Q . Коэффициент пропорциональности надо выбрать так, чтобы удовлетворялось уравнение сферы (1.5.2), поэтому получим выражения координат P и Q в виде

$$\xi_1 = \pm \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}}, \quad \xi_2 = \pm \frac{\lambda_2}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}}, \quad \xi_3 = \pm \frac{\lambda_3}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}}.$$

На плоскости Π им по (1.5.1) соответствуют точки P' и Q' с координатами

$$z_2 = \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\sqrt{1 - \lambda_0^2 - \lambda_3}}, \quad z_3 = -\frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\sqrt{1 - \lambda_0^2 + \lambda_3}}.$$

Но точки P и Q не смещаются при повороте тела; поэтому в дробно-линейном преобразовании (1.5.5)

$$z_2 = z'_2, \quad z_3 = z'_3.$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

Полосу сферы N до поворота соответствует точка $z_1 = \infty$; её координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 после поворота равны

$$\xi_1 = 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_3\lambda_1), \quad \xi_2 = 2(-\lambda_0\lambda_1 + \lambda_3\lambda_2), \quad \xi_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2,$$

Теперь по (1.5.1) получаем:

$$z'_1 = \frac{\lambda_3 - i\lambda_0}{\lambda_1 - i\lambda_2}.$$

После подстановки в (1.5.5) величин

$$z_2 = z'_2 = \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\sqrt{1 - \lambda_0^2 - \lambda_3^2}}, \quad z_3 = z'_3 = -\frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{\sqrt{1 - \lambda_0^2 + \lambda_3^2}},$$

$$z_1 = \infty, \quad z'_1 = \frac{\lambda_3 - i\lambda_0}{\lambda_1 - i\lambda_2}$$

будем иметь

$$z' = \frac{z(\lambda_3 - i\lambda_0) + \lambda_1 + i\lambda_2}{z(\lambda_1 - i\lambda_2) - (\lambda_3 + i\lambda_0)},$$

и, следовательно,

$$\alpha = C(\lambda_3 - i\lambda_0), \quad \beta = C(\lambda_1 + i\lambda_2),$$

$$\gamma = C(\lambda_1 - i\lambda_2), \quad \delta = -C(\lambda_3 + i\lambda_0).$$

Коэффициент пропорциональности C определяем по (1.5.4). Окончательные выражения параметров Кейли-Клейна через параметры Родрига-Гамильтона будут:

$$\alpha = \lambda_0 + i\lambda_3, \quad \beta = -\lambda_2 + i\lambda_1, \quad \gamma = \lambda_2 + i\lambda_1, \quad \delta = \lambda_0 - i\lambda_3. \quad (1.5.6)$$

Из них видно, что α, δ , а также β, γ являются комплексными сопряженными числами; сумма квадратов модулей $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\gamma|^2 + |\delta|^2$ равна по (1.5.4) единице.

Выражения параметров Кейли-Клейна через эйлеровы углы имеют вид:

$$\alpha = \cos \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\psi + \varphi}{2}}, \quad \beta = i \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i \frac{\psi - \varphi}{2}},$$

$$\delta = \cos \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\psi + \varphi}{2}}, \quad \gamma = i \sin \frac{\vartheta}{2} e^{-i \frac{\psi - \varphi}{2}}.$$

1.6. Линейное преобразование координат

Преобразование координат (x_1, x_2, x_3) в (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , выражаемое формулой (1.5.3), может быть записано в виде:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3). \quad (1.6.1)$$

Но из (1.5.3) следует, что

$$z = \frac{-\delta z' + \beta}{\gamma z' - \alpha}. \quad (1.6.2)$$

Поэтому обратное преобразование (ξ_1, ξ_2, ξ_3) в (x_1, x_2, x_3) будет

$$(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} (\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (1.6.3)$$

Явное выражение преобразования (1.6.1) по (1.5.1) имеет вид:

$$\frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3} = \frac{\alpha(x_1 + ix_2) + \beta(1 - x_3)}{\gamma(x_1 + ix_2) + \delta(1 - x_3)}. \quad (1.6.4)$$

Сопряженное выражение будет

$$\frac{\xi_1 - i\xi_2}{1 - \xi_3} = \frac{\delta(x_1 - ix_2) - \gamma(1 - x_3)}{-\beta(x_1 - ix_2) + \alpha(1 - x_3)}. \quad (1.6.5)$$

Домашняя

◀ ▶

◀ ▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть

Перемножая (1.6.4) и (1.6.5), получим по (1.5.2) и (1.5.4):

$$\frac{1 + \xi_3}{1 - \xi_3} = \frac{1 + [(\alpha\delta + \beta\gamma)x_3 - (\alpha\gamma - \beta\delta)x_1 - (\alpha\gamma + \beta\delta)ix_2]}{1 - [(\alpha\delta + \beta\gamma)x_3 - (\alpha\gamma - \beta\delta)x_1 - (\alpha\gamma + \beta\delta)ix_2]},$$

откуда заключаем, что величина в квадратных скобках равна ξ_3 . Воспользовавшись этим значением ξ_3 , получим $\xi_1 + i\xi_2$ и $\xi_1 - i\xi_2$. Таким образом придем к формулам преобразования

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + i\xi_2 &= \alpha^2(x_1 + ix_2) - \beta^2(x_1 - ix_2) - 2\alpha\beta x_3, \\ \xi_1 - i\xi_2 &= -\gamma^2(x_1 + ix_2) + \delta^2(x_1 - ix_2) + 2\gamma\delta x_3, \\ \xi_3 &= -\alpha\gamma(x_1 + ix_2) + \beta\delta(x_1 - ix_2) + (\alpha\delta + \beta\gamma)x_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.6)$$

Обратное преобразование получаем, используя замены, указываемые формулой (1.6.3):

$$\left. \begin{aligned} x_1 + ix_2 &= \delta^2(\xi_1 + i\xi_2) - \beta^2(\xi_1 - i\xi_2) + 2\delta\beta\xi_3, \\ x_1 - ix_2 &= -\gamma^2(\xi_1 + i\xi_2) + \alpha^2(\xi_1 - i\xi_2) + 2\gamma\alpha\xi_3, \\ x_3 &= -\gamma\delta(\xi_1 + i\xi_2) - \beta\alpha(\xi_1 - i\xi_2) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\xi_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.7)$$

В формулах линейных преобразований (1.6.6) и (1.6.7), конечно, нет более нужды считать переменные нормированными согласно (1.5.2).

1.7. Сложение поворотов твердого тела

В параметрах Кейли-Клейна задача сложения поворотов сводится к выполнению последовательности дробно-линейных преобразований: повороту θ_1 соответствует преобразование

$$z' = \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}, \quad (1.7.1)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

а следующему за ним повороту θ_2 соответствует преобразование

$$z'' = \frac{\alpha_2 z' + \beta_2}{\gamma_2 z' + \delta_2}.$$

Результирующий поворот θ соответствует преобразованию z в z'' и имеет вид

$$z'' = \frac{\alpha_2 \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} + \beta_2}{\gamma_2 \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} + \delta_2} = \frac{\alpha_{12} z + \beta_{12}}{\gamma_{12} z + \delta_{12}}. \quad (1.7.2)$$

Таким образом, параметры Кейли-Клейна результирующего поворота выражаются через параметры последовательных поворотов θ_1 и θ_2 по формулам

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12} &= \alpha_1 \alpha_2 + \gamma_1 \beta_2, & \beta_{12} &= \alpha_2 \beta_1 + \delta_1 \beta_2, \\ \gamma_{12} &= \gamma_2 \alpha_1 + \gamma_1 \delta_2, & \delta_{12} &= \gamma_2 \beta_1 + \delta_1 \delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.3)$$

1.8. Выражение угловой скорости тела через параметры Кейли-Клейна. Кинематические уравнения

Переходя к определению угловой скорости, обозначим параметры Кейли-Клейна в моменты t и $t + dt$ через

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta; \quad \alpha + \dot{\alpha}dt, \beta + \dot{\beta}dt, \gamma + \dot{\gamma}dt, \delta + \dot{\delta}dt.$$

Им соответствуют в формулах (1.7.3) параметры $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ первого θ_1 и параметры $(\alpha_{12}, \beta_{12}, \gamma_{12}, \delta_{12})$ результирующего поворота θ . Второй поворот с параметрами $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ в данном случае представляет бесконечно малый поворот

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

$\delta'\theta = \omega dt$, проекции которого на оси системы $O\xi_1\xi_2\xi_3$ равны

$$\tilde{\omega}_1 dt = 2\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \quad \tilde{\omega}_2 dt = 2\frac{\lambda_2}{\lambda_0}, \quad \tilde{\omega}_3 dt = 2\frac{\lambda_3}{\lambda_0},$$

так что с точностью до малых второго порядка

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}\tilde{\omega}_1 dt, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\tilde{\omega}_2 dt, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\tilde{\omega}_3 dt \quad (1.8.1)$$

и по (1.5.6)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= 1 + \frac{i}{2}\tilde{\omega}_3 dt, & \beta_2 &= \frac{1}{2}(-\tilde{\omega}_2 + i\tilde{\omega}_1) dt, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}(\tilde{\omega}_2 + i\tilde{\omega}_1) dt, & \delta_2 &= 1 - \frac{i}{2}\tilde{\omega}_3 dt. \end{aligned} \right\} \quad (1.8.2)$$

Найдем далее

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \dot{\alpha} dt &= \left(1 + \frac{i}{2}\tilde{\omega}_3 dt\right) \alpha + \frac{1}{2}(-\tilde{\omega}_2 + i\tilde{\omega}_1) \gamma dt, \\ \beta + \dot{\beta} &= \left(1 + \frac{i}{2}\tilde{\omega}_3 dt\right) \beta + \frac{1}{2}(-\tilde{\omega}_2 + i\tilde{\omega}_1) \delta dt \end{aligned} \right\} \quad (1.8.3)$$

и т. д. Получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{i}{2}\tilde{\omega}_3 \alpha + \frac{i}{2}(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2) \gamma, & \dot{\gamma} &= -\frac{i}{2}\tilde{\omega}_3 \gamma + \frac{i}{2}(\tilde{\omega}_1 - i\tilde{\omega}_2) \alpha, \\ \dot{\beta} &= \frac{i}{2}\tilde{\omega}_3 \beta + \frac{i}{2}(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2) \delta, & \dot{\delta} &= -\frac{i}{2}\tilde{\omega}_3 \delta + \frac{i}{2}(\tilde{\omega}_1 - i\tilde{\omega}_2) \beta. \end{aligned} \right\} \quad (1.8.4)$$

Заменив здесь проекции $\tilde{\omega}_s$ вектора угловой скорости на оси $O\xi_1\xi_2\xi_3$ их выражениями через проекции $\tilde{\omega}_s$ на оси, связанные с телом, по формулам (1.6.7), получим также

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{i}{2}\omega_3 \alpha + \frac{i}{2}(\omega_1 - i\omega_2) \beta, & \dot{\gamma} &= -\frac{i}{2}\omega_3 \gamma + \frac{i}{2}(\omega_1 - i\omega_2) \delta, \\ \dot{\beta} &= -\frac{i}{2}\omega_3 \beta + \frac{i}{2}(\omega_1 + i\omega_2) \alpha, & \dot{\delta} &= -\frac{i}{2}\omega_3 \delta + \frac{i}{2}(\omega_1 + i\omega_2) \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (1.8.5)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Легко составляются и обратные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2 &= 2i \left(\dot{\alpha}\beta - \alpha\dot{\beta} \right), \\ \tilde{\omega}_1 - i\tilde{\omega}_2 &= 2i \left(\dot{\delta}\gamma - \delta\dot{\gamma} \right), \\ \tilde{\omega}_3 &= 2i \left(\dot{\beta}\gamma - \dot{\alpha}\delta \right) = 2i \left(\dot{\delta}\alpha - \dot{\gamma}\beta \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.8.6)$$

и также

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_1 + i\omega_2 &= 2i \left(\beta\dot{\delta} - \dot{\beta}\delta \right), \\ \omega_1 - i\omega_2 &= 2i \left(\gamma\dot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma} \right), \\ \omega_3 &= 2i \left(\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta \right) = 2i \left(\beta\dot{\gamma} - \dot{\beta}\gamma \right). \end{aligned} \right. \quad (1.8.7)$$

Выражения (1.8.5) – (1.8.7) являются кинематическими уравнениями, связывающими угловые скорости твердого тела с параметрами Кейли-Клейна.

1.9. Анализ способов задания положения твёрдого тела в пространстве

Проведенные исследования различных кинематических параметров, с помощью которых может быть задано положение твердого тела в пространстве, показали, что существуют, вообще говоря, только три различных типа параметров. Это – направляющие косинусы, углы Эйлера и компоненты кватерниона. Такие параметры, как компоненты вектора конечного поворота и параметры Кейли-Клейна или Родрига-Гамильтона являются кватернионными параметрами, так как они определяют различным образом одну и ту же физическую величину – эквивалентное эйлерово вращение вокруг одной оси. Различие параметров заключается в способах описания движения твердого тела или, что тоже, связанной с ним системы координат.

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

В случае направляющих косинусов задается «координатное» положение связанной системы координат относительно исходной, при этом каждая ось связанного базиса может быть различным образом представлена в исходном базисе. В случае углов Эйлера положение твердого тела задается с помощью трех последовательных плоских поворотов, таких, что их сумма дает эквивалентное положение связанного базиса. Величины a_{jk} , матрицы поворота A , представляющие собой направляющие косинусы осей ξ, η, ζ с осями x, y, z , определенным образом выражаются через тригонометрические функции углов ψ, ϑ, ϕ :

$$A = \begin{pmatrix} c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\psi c_\vartheta & c_\varphi s_\psi + s_\varphi c_\psi c_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\varphi c_\psi - c_\varphi s_\psi c_\vartheta & -s_\varphi s_\psi + c_\varphi c_\psi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\vartheta s_\psi & -s_\vartheta c_\psi & c_\vartheta \end{pmatrix} \quad (1.9.1)$$

Для параметров Родрига-Гамильтона (как и для параметров Кейли-Клейна) положение твердого тела задается одним эквивалентным плоским поворотом вокруг некоторой оси, определяемой как ось эйлера вращения. Не представляет сложности найти матрицу перехода от направляющих косинусов к параметрам Родрига-Гамильтона:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} & \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} & \frac{2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \\ \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} & \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} & \frac{2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \\ \frac{2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} & \frac{2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} & \frac{\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \end{pmatrix}. \quad (1.9.2)$$

Соответственно, кинематические уравнения, описывающие движение твердого тела в функции от величины угловой скорости, имеют, вообще говоря, три различные

Закреть

формы: уравнения в направляющих косинусах:

$$\begin{aligned}\dot{a}_{i1} &= -q \cdot a_{i3} + r \cdot a_{i2}, \\ \dot{a}_{i2} &= -r \cdot a_{i1} + p \cdot a_{i3}, \\ \dot{a}_{i3} &= -p \cdot a_{i2} + q \cdot a_{i1},\end{aligned}\quad (1.9.3)$$

уравнения в углах Эйлера:

$$\begin{aligned}p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},\end{aligned}\quad (1.9.4)$$

уравнения в кватернионах (на примере параметров Родрига-Гамильтона):

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_0 &= \frac{1}{2} (-p\lambda_1 - q\lambda_2 - r\lambda_3), \\ \dot{\lambda}_1 &= \frac{1}{2} (p\lambda_0 + r\lambda_2 - q\lambda_3), \\ \dot{\lambda}_2 &= \frac{1}{2} (q\lambda_0 + p\lambda_3 - r\lambda_1), \\ \dot{\lambda}_3 &= \frac{1}{2} (r\lambda_0 + q\lambda_1 - p\lambda_2).\end{aligned}\quad (1.9.5)$$

Кинематические уравнения в направляющих косинусах представляют собой систему девяти скалярных линейных уравнений, удовлетворяющих шести связям, являющимися условиями ортогональности; эти уравнения не имеют особых точек, т.е. в принципе всегда разрешимы. Уравнения в углах Эйлера (и Крылова) являются системой трех независимых линейных уравнений, имеющих одну особую точку, в которой система параметров вырождается. Кватернионные уравнения представляют собой систему четырех линейных невырождающихся уравнений, удовлетворяющих одному уравнению связи (на норму кватерниона).

Среди всех кинематических параметров и соответственно способов задания движения твердого тела использование кватернионов представляется наиболее удоб-

Домашняя

◀ ▶

◀ ▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

ным. В отличие от направляющих косинусов, операции ортогонального преобразования однозначно задаются формальными операциями над кватернионами (в случае направляющих косинусов существуют два различных способа задания движения матрицами ортогонального преобразования A и B). В случае кватернионов имеется минимальное число невырождающихся параметров и соответственно минимальное число связей; это обстоятельство дает существенное преимущество этим параметрам при численном интегрировании кинематических уравнений. Наконец, использование кватернионов позволяет представить в едином виде две наиболее важные физические величины, характеризующие движение твердого тела: характеристику его локального движения (угловую скорость) и характеристику его положения (вектор конечного поворота). Обе эти величины представляются векторами мгновенного эйлера вращения и эквивалентного эйлера вращения.

Аппарат алгебры кватернионов позволяет в явном виде представить эти величины векторами пространства H , которое всегда можно совместить с реальным трехмерным пространством. При этом вектор конечного поворота и вектор бесконечно малого вращения (угловой скорости) имеют один и тот же физический смысл. Применение другого формализма приводит к более сложным представлениям оператора преобразования и оператора угловой скорости.

Все это делает кватернионы наиболее удобными кинематическими параметрами для исследования общих свойств движения твердого тела и, в частности, для исследования общих свойств кинематических уравнений. Поскольку кинематические уравнения описывают одно и то же движение, они, естественно, должны сводиться друг к другу; однако этот переход не всегда тривиален.

Глава 2

Динамика твёрдого тела

Глава посвящена рассмотрению задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Следует отметить, что задача об исследовании движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки является одной из самых замечательных задач теоретической механики. Дело в том, что эта задача описывается сравнительно простой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнениями Эйлера-Пуассона), для которой известны три общих первых интеграла. Кроме того, доказано (теорема Якоби), что для сведения задачи к квадратурам достаточно для этих уравнений найти еще только один новый первый интеграл, не зависящий от времени.

Однако несмотря на усилия многих выдающихся математиков, в течение двухсот лет этот дополнительный первый интеграл так и не был найден. Более того, при ограничениях на распределение масс в твердом теле новый первый интеграл удалось найти только в трех случаях: случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Если новые первые интегралы в случаях Эйлера и Лагранжа были получены сравнительно просто, то, чтобы найти новый первый интеграл и свести к квадратурам, С.В. Ковалевской пришлось расширить задачу (ввести комплексное время) и воспользоваться как раз разработанной к тому времени теорией функций комплексного переменного. С тех пор любой новый метод, предложенный для интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений достаточно общего вида, обязательно применяют и к решению задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

В данной главе рассмотрены общие вопросы интегрирования дифференциальных уравнений Эйлера-Пуассона, описывающих движение твердого тела вокруг неподвижной точки: интегрирование в однозначных функциях времени, существование дополнительных аналитических и алгебраических первых интегралов. Рассмотрены три случая интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона, приведена теорема Ляпунова об однозначных решениях уравнений Эйлера-Пуассона. Особое внимание уделено рассмотрению канонических переменных в динамике твердого тела (переменные Делпри и переменные «действие-угол») и их применение к анализу движения твердого тела в случае Эйлера.

2.1. Углы Эйлера

Как было отмечено ранее, положение твердого тела в пространстве в каждый момент времени определяется положением подвижной системы координат $Oxyz$ относительно неподвижной системы $Ox_1y_1z_1$ и может быть задано тремя углами Эйлера θ, φ, ψ . Введем в дополнение к ортам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{k}_1$ осей Ox, Oy, Oz, Oz_1 орт $\bar{e}$, направленный по линии узлов OJ и, спроектировав вектор угловой скорости

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} \bar{k} + \dot{\psi} \bar{k}_1 + \dot{\theta} \bar{e} \quad (2.1.1)$$

Закреть

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

на оси $Oxyz$, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} p &= (\bar{\omega} \cdot \bar{i}) = \dot{\varphi} (\bar{k} \cdot \bar{i}) + \dot{\psi} (\bar{k}_1 \cdot \bar{i}) + \dot{\theta} (\bar{e} \cdot \bar{i}), \\ q &= (\bar{\omega} \cdot \bar{j}) = \dot{\varphi} (\bar{k} \cdot \bar{j}) + \dot{\psi} (\bar{k}_1 \cdot \bar{j}) + \dot{\theta} (\bar{e} \cdot \bar{j}), \\ r &= (\bar{\omega} \cdot \bar{k}) = \dot{\varphi} (\bar{k} \cdot \bar{k}) + \dot{\psi} (\bar{k}_1 \cdot \bar{k}) + \dot{\theta} (\bar{e} \cdot \bar{k}). \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Из ортогональности осей следует, что

$$(\bar{k} \cdot \bar{i}) = (\bar{k} \cdot \bar{j}) = (\bar{e} \cdot \bar{k}) = 0, \quad (\bar{k} \cdot \bar{k}) = 1.$$

Проектируя орт $\bar{k}_1$ на оси Ox , Oy , Oz , получим

$$\begin{aligned} (\bar{k}_1 \cdot \bar{i}) &= \gamma = \sin \theta \sin \varphi, \\ (\bar{k}_1 \cdot \bar{j}) &= \gamma' = \sin \theta \cos \varphi, \\ (\bar{k}_1 \cdot \bar{k}) &= \gamma'' = \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Кроме того, заметим, что

$$(\bar{e} \cdot \bar{i}) = \cos \varphi, \quad (\bar{e} \cdot \bar{j}) = -\sin \varphi.$$

После подстановки найденных выражений в соотношения (2.1.2) получим следующие кинематические уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Отметим, что наряду с выражениями (2.1.3) для $\gamma, \gamma', \gamma''$ можно найти и выражения для остальных шести направляющих косинусов $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ в зависимости от углов Эйлера θ, φ, ψ . Эти выражения даются матрицей:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_\varphi c_\psi - c_\theta s_\psi s_\varphi & c_\varphi s_\psi + c_\theta c_\psi s_\varphi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\varphi c_\psi - c_\theta s_\psi c_\varphi & -s_\varphi s_\psi + c_\theta c_\psi c_\varphi & c_\varphi s_\theta \\ s_\theta s_\psi & -s_\theta c_\psi & c_\theta \end{vmatrix} \quad (2.1.5)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Легко показать, что определитель этой матрицы равен единице. Выразим углы Эйлера через переменные $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$. Из формул (2.1.3) непосредственно находим, что

$$\theta = \arccos \gamma'', \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\gamma}{\gamma'} \right). \quad (2.1.6)$$

Чтобы получить выражение для угла прецессии, умножим первые два соотношения (2.1.4) на γ и γ' соответственно и сложим их. Тогда с помощью формул (2.1.3) получим уравнение

$$\dot{\psi} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{\gamma^2 + \gamma'^2}. \quad (2.1.7)$$

Следовательно, если найдены решения уравнений Эйлера-Пуассона $p(t), q(t), r(t), \gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t)$ то из формул (2.1.6) находятся законы изменения углов нутации $\theta(t)$ и собственного вращения $\varphi(t)$, а закон изменения угла прецессии $\psi(t)$ определяется квадратурой из формулы (2.1.7). Эта квадратура принципиально не представляет затруднений. Таким образом, основную трудность в определении закона движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки представляет решение уравнений Эйлера-Пуассона.

2.2. Канонические переменные

Углы Эйлера θ, φ, ψ можно рассматривать и как обобщенные координаты, которые вместе с обобщенными импульсами $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ определяемыми соотношениями

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}, \\ p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}, \\ p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

[Домашняя](#)

[Назад](#)
[На весь экран](#)

образуют систему канонических переменных в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. В формулах (2.2.1) кинетическая энергия определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad (2.2.2)$$

в которой p, q, r должны быть заменены их выражениями (2.1.4). Выразим теперь зависимость проекций угловой скорости p, q, r через обобщенные импульсы $p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ и углы Эйлера θ, φ, ψ , для чего воспользуемся выражением кинетической энергии (2.2.2) и кинематическими уравнениями Эйлера (2.1.4). Получим соотношения

$$\begin{aligned} p_\theta &= Ap \cos \varphi - Bq \sin \varphi, \\ p_\varphi &= Cr, \\ p_\psi &= (Ap \sin \varphi - Bq \cos \varphi) \sin \theta + Cr \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

разрешая которые относительно p, q, r , найдем искомую зависимость:

$$\begin{aligned} Ap &= \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) + p_\theta \cos \varphi, \\ Bq &= \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) - p_\theta \sin \varphi, \\ Cr &= p_\varphi. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Кроме того, воспользовавшись формулами

$$\begin{aligned} \bar{K} &= Ap \bar{i} + Bq \bar{j} + Cr \bar{k}, \\ \bar{e} &= \cos \varphi \bar{i} - \sin \varphi \bar{j}, \\ \bar{k}_1 &= \sin \theta \sin \varphi \bar{i} + \sin \theta \cos \varphi \bar{j} + \cos \theta \bar{k}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

где $\bar{K}$ – кинетический момент тела относительно точки O , из соотношений (2.2.3) найдем:

$$\begin{aligned} p_\theta &= (\bar{K} \cdot \bar{e}), \\ p_\varphi &= (\bar{K} \cdot \bar{k}), \\ p_\psi &= (\bar{K} \cdot \bar{k}_1). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

[Заккрыть](#)

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закрыть

2.2.1. Канонические переменные Депри

Кроме канонических переменных $\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi$ в некоторых случаях удобно использовать углы l, φ_2, φ_3 и соответствующие им обобщенные импульсы L, I_2, I_3 , введенные в динамику твердого тела Депри. На рисунке 2.2.1 система координат $Ox_1y_1z_1$ – неподвижная, а $Oxyz$ – подвижная система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тела.

Построим вектор кинетического момента $\bar{K}$ и проведем перпендикулярную ему плоскость OMN . Эта плоскость пересечет по прямой OM неподвижную плоскость x_1Oy_1 и по прямой ON – подвижную плоскость xOy .

В качестве обобщенных координат выберем углы l, φ_2, φ_3 , как показано на рисунке 2.2.1. Тогда скорости изменения этих углов $\dot{l}, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ будут направлены по оси Oz , по вектору $\bar{K}$ и по оси Oz_1 соответственно (см. рисунок 2.2.1). Введем в дополнение к ортам $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{k}_1$ осей Ox, Oy, Oz, Oz_1 орт $\bar{s}$, направленный по вектору $\bar{K}$. Спроектировав вектор угловой скорости

$$\bar{\omega} = \dot{l}\bar{k} + \dot{\varphi}_2\bar{s} + \dot{\varphi}_3\bar{k}_1 \quad (2.2.7)$$

на оси системы $Oxyz$, получим

$$\begin{aligned} p &= (\bar{\omega} \cdot \bar{i}) = l(\bar{k} \cdot \bar{i}) + \dot{\varphi}_2(\bar{s} \cdot \bar{i}) + \dot{\varphi}_3(\bar{k} \cdot \bar{i}), \\ q &= (\bar{\omega} \cdot \bar{j}) = l(\bar{k} \cdot \bar{j}) + \dot{\varphi}_2(\bar{s} \cdot \bar{j}) + \dot{\varphi}_3(\bar{k} \cdot \bar{j}), \\ r &= (\bar{\omega} \cdot \bar{k}) = l(\bar{k} \cdot \bar{k}) + \dot{\varphi}_2(\bar{s} \cdot \bar{k}) + \dot{\varphi}_3(\bar{k} \cdot \bar{k}). \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Введем далее соответствующие углам l, φ_2, φ_3 обобщенные импульсы L, I_2, I_3 согласно формулам:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial T}{\partial \dot{l}}, \\ I_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2}, \\ I_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

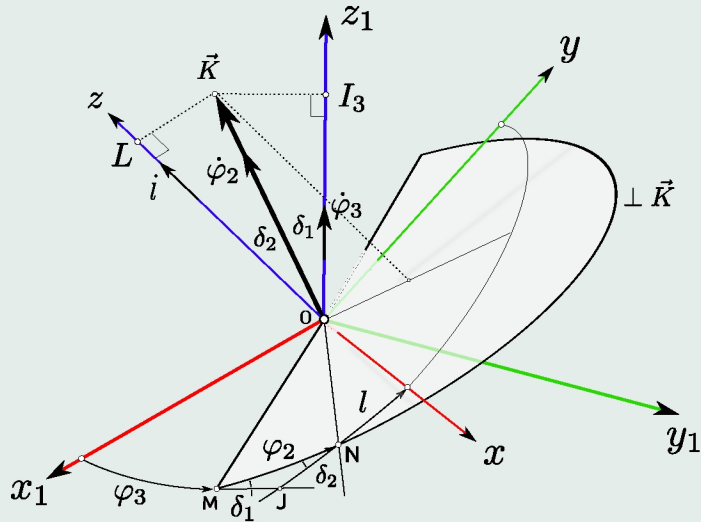


Рис. 2.2.1. Задание положения твердого тела через переменные Депри

Тогда на основании формул (2.2.2) и (2.2.5) для кинетической энергии и кинетического момента, получим с помощью соотношений (2.2.8) следующие выражения

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

для обобщенных импульсов:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = A p \frac{\partial p}{\partial \dot{l}} + B q \frac{\partial q}{\partial \dot{l}} + C r \frac{\partial r}{\partial \dot{l}} = (A p \bar{i} + B q \bar{j} + C r \bar{k}) \cdot \bar{k} = (\bar{K} \cdot \bar{k}), \\ I_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = (\bar{K} \cdot \bar{s}) = K, \\ I_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = (\bar{K} \cdot \bar{k}_1). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Из формул (2.2.10) следует, что обобщенные импульсы L , I_3 являются проекциями кинетического момента на оси Oz и Oz_1 а импульс I_2 равен величине вектора кинетического момента. Поэтому, вводя еще вспомогательные углы δ_1 и δ_2 между вектором кинетического момента $\bar{K}$ и осями Oz_1 и Oz (см. рисунок 2.2.1), получим

$$\begin{aligned} I_3 &= I_2 \cos \delta_1, \\ L &= I_2 \cos \delta_2. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Если теперь оси Ox_1 и Oz_1 неподвижной системы координат направить по прямым OM и вектору $\bar{K}$, то углы δ_2 , φ_2 и l будут эйлеровыми углами нутации, прецессии и собственного вращения. Из формул (2.2.11) следует, что импульсы L , I_2 , I_3 дают возможность определить углы наклона вспомогательной плоскости OMN с основными плоскостями Ox_1y_1 и Oxy .

Отметим связь между импульсами p_θ , p_φ , p_ψ и импульсами L , I_2 , I_3 , которую можно получить из формул (2.2.6) и (2.2.10) и из рисунков 1.3.2 и 2.2.1:

$$\begin{aligned} p_\theta &= I_2 \sin \delta_2 \sin (l - \varphi), \\ p_\varphi &= L, \\ p_\psi &= I_3. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

При выводе формул (2.2.12) надо принять во внимание, что ось ON перпендикулярна вектору $\bar{K}$ и, следовательно, проекция вектора $\bar{K}$ на плоскость Oxy перпендикулярна оси ON .

Домашняя

◀ ▶

◀ ▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Найдем теперь в переменных Депри выражение для кинетической энергии твердого тела. Из формулы (2.2.2) имеем

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{K_x^2}{A} + \frac{K_y^2}{B} + \frac{K_z^2}{C} \right), \quad (2.2.13)$$

где K_x , K_y и K_z являются проекциями вектора кинетического момента $\bar{K}$ на подвижные оси $Oxyz$:

$$\begin{aligned} K_x &= Ap, \\ K_y &= Bq, \\ K_z &= Cr. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Обозначая через $\bar{K}_{xy}$ проекцию вектора $\bar{K}$ на плоскость Oxy , найдем, что вектор $\bar{K}_{xy}$ составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{2} - l$, а модуль этого вектора

$$K_{xy} = \sqrt{I_2^2 - L^2}. \quad (2.2.15)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} K_x &= K_{xy} \sin l, \\ K_y &= K_{xy} \cos l. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Так как из формул (2.2.10) вытекает, что

$$K_z = L, \quad (2.2.17)$$

то выражение (2.2.13) для кинетической энергии в переменных Депри будет иметь вид

$$T = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C}. \quad (2.2.18)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Покажем теперь, что переменные Депри есть канонические переменные. Больше того, покажем, что существует однородное каноническое преобразование, которое переводит фазовое пространство Эйлера $(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi)$ в фазовое пространство Депри $(l, \varphi_2, \varphi_3, L, I_2, I_3)$.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся известным дифференциальным соотношением между длинами сторон и величинами углов сферического треугольника $M N J$, изображенного на рисунке 5.2,

$$d\varphi_2 = \cos\delta_2 d(\varphi - l) + \cos\delta_1 d(\psi - \varphi_3) - \sin(\varphi - l) \sin\delta_2 d\theta. \quad (2.2.19)$$

Умножая соотношение (2.2.19) на величину I_2 , на основании формул (2.2.11) и (2.2.12) можно окончательно записать:

$$L dl + I_2 d\varphi_2 + I_3 d\varphi_3 = p_\theta d\theta + p_\varphi d\varphi + p_\psi d\psi. \quad (2.2.20)$$

Из последнего соотношения следует вывод о том, что преобразование $(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi) \rightarrow (l, \varphi_2, \varphi_3, L, I_2, I_3)$ является однородным каноническим преобразованием.

2.2.2. Выражение $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ через переменные Депри

Выразим сначала переменные p, q, r через переменные Депри, для чего воспользуемся формулами (2.2.4) и соотношениями (2.2.11) и (2.2.12). В результате получим

$$\begin{aligned} Ap &= I_2 \left[\frac{\cos\delta_1 - \cos\delta_2 \cos\theta}{\sin\theta} \sin\varphi + \sin\delta_2 \sin(l - \varphi) \cos\varphi \right], \\ Bq &= I_2 \left[\frac{\cos\delta_1 - \cos\delta_2 \cos\theta}{\sin\theta} \cos\varphi - \sin\delta_2 \sin(l - \varphi) \sin\varphi \right], \\ Cr &= L. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Для сферического треугольника, изображенного на рисунке 2.2.2, справедлива еще одна зависимость, связывающая длины сторон и величины углов:

$$\cos \delta_1 = \cos \delta_2 \cos \theta + \sin \delta_2 \sin \theta \cos (\varphi - l). \quad (2.2.22)$$

Заменяя в двух первых формулах (2.2.21) $\cos \delta_1$ его выражением (2.2.22), получим соотношения

$$\begin{aligned} Ap &= I_2 \sin \delta_2 \sin l, \\ Bq &= I_2 \sin \delta_2 \cos l, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

которые с помощью формул (2.2.11) приведем к следующему виду:

$$p = \frac{1}{A} \sqrt{I_2^2 - L^2} \sin l, \quad q = \frac{1}{B} \sqrt{I_2^2 - L^2} \cos l, \quad r = \frac{L}{C}. \quad (2.2.24)$$

Для нахождения зависимости переменных $\gamma, \gamma', \gamma''$ от переменных Депри воспользуемся известными формулами для сферического треугольника. В итоге после всех преобразований получим:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sin \theta \sin \varphi = \sin l \cos \delta_1 \sin \delta_2 + \sin l \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos \varphi_2 + \cos l \sin \delta_1 \sin \varphi_2, \\ \gamma' &= \sin \theta \cos \varphi = \cos l \cos \delta_1 \sin \delta_2 + \cos l \sin \delta_1 \cos \delta_2 \cos \varphi_2 - \sin l \sin \delta_1 \sin \varphi_2, \\ \gamma'' &= \cos \theta = \cos \delta_1 \cos \delta_2 - \sin \delta_1 \sin \delta_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Заменяя в уравнениях (2.2.25) угол соответствующим ему соотношением из формул (2.2.11), окончательно получим искомые формулы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{I_3}{I_2} \sin \delta_2 \sin l + \sqrt{1 - \frac{I_3^2}{I_2^2}} \cos \delta_2 \sin l \cos \varphi_2 + \sqrt{1 - \frac{I_3^2}{I_2^2}} \cos l \sin \varphi_2, \\ \gamma' &= \frac{I_3}{I_2} \sin \delta_2 \cos l + \sqrt{1 - \frac{I_3^2}{I_2^2}} \cos \delta_2 \cos l \cos \varphi_2 - \sqrt{1 - \frac{I_3^2}{I_2^2}} \sin l \sin \varphi_2, \\ \gamma'' &= \frac{I_3}{I_2} \cos \delta_2 - \sqrt{1 - \frac{I_3^2}{I_2^2}} \sin \delta_2 \cos \varphi_2 \quad \left(\cos \delta_2 = \frac{L}{I_2} \right). \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

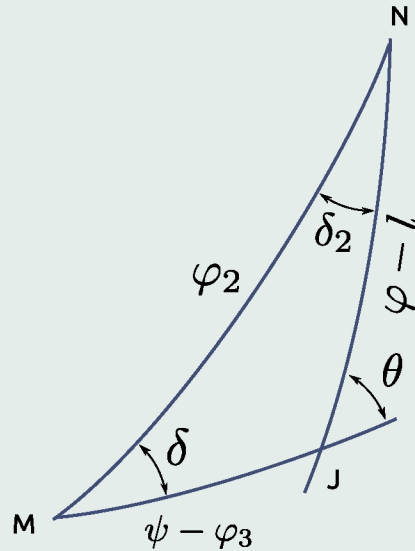


Рис. 2.2.2. Сферический треугольник $M N J$

Таким образом, в данной главе рассмотрены два вида канонических переменных: переменные Эйлера и переменные Депри. Переменные Эйлера являются более общими и удобны для многих случаев интегрирования.

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

2.2.3. Канонические переменные «действие–угол»

Рассмотрим Лиувиллеву систему с n степенями свободы (лиувиллевыми системами будем называть системы, удовлетворяющие всем условиям, при которых доказывается теорема Лиувилля). Предположим, что выражения для p_j , полученные из первых интегралов этой системы, имеют вид

$$p_j = f_j(q_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.2.27)$$

и что траектория (2.2.27) на каждой координатной плоскости (q, p) 2 n -мерного фазового пространства будет замкнутой кривой. (К случаю замкнутой кривой будем относить также и периодическую по q_j с периодом T_j^* кривую $p_j(q_j)$, отождествляя точки $p_j(q_{j0})$ и $p_j(q_{j0} + T_j^*)$, где q_{j0} – начальное значение.) Тогда периодическим будем называть такое движение системы, при котором проекции точки с координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$; $p_1, p_2, \dots, p_n$ на каждую координатную плоскость (q_j, p_j) 2 n -мерного фазового пространства описывает замкнутую кривую $p_j = p_j(q_j)$.

Введём вместо произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, постоянные $I_1, I_2, \dots, I_n$, называемые действиями, по формулам

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j dq_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.2.28)$$

где написанный выше интеграл берётся за полный период изменения q_j .

Если же одна из переменных q_j – циклическая, то соответствующий ей импульс p_j – постоянный и траекторией движения на плоскости (q_j, p_j) будем прямая линия. Это движение можно рассматривать как периодическое по q_j с любым периодом, например с периодом 2π , что мы и будем делать. Поэтому формула (2.2.28) для всех циклических переменных должна иметь вид

$$I_j = p_j. \quad (2.2.29)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Из полученных n соотношений (2.2.28) можно при условии, что

$$\frac{D(I_1, I_2, \dots, I_n)}{D(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \neq 0,$$

выразить произвольные постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ через постоянные $I_1, I_2, \dots, I_n$:

$$\alpha_j = \alpha_j(I_1, I_2, \dots, I_n) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2.30)$$

Рассмотрим теперь определяемую соотношением (2.2.27), а также соотношением $\sum_{j=1}^n f_j dq_j = dW$ функцию $W(q_1, q_2, \dots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$:

$$W = \int \sum_{j=1}^n f_j(q_j, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) dq_j, \quad (2.2.31)$$

которая является полным интегралом уравнения

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, \partial W / \partial q_1, \partial W / \partial q_2, \dots, \partial W / \partial q_n) = \alpha_1. \quad (2.2.32)$$

Заменяя в функции W постоянные α на постоянные I по формулам (2.2.30), представим её в следующем виде:

$$W = W(q_1, q_2, \dots, q_n, I_1, I_2, \dots, I_n). \quad (2.2.33)$$

Эту функцию можно рассматривать как производящую функцию канонического преобразования

$$(q, p) \rightarrow (w, I),$$

при котором новые импульсы (I) будут постоянными. Действительно, формулы, определяющие это каноническое преобразование, имеют вид

$$p_j = \partial W / \partial q_j, \quad w_j = \partial W / \partial I_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.2.34)$$

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = \alpha_1, \quad (2.2.35)$$

причем последняя формула следует из независимости функции W от времени.

В соответствии же с первой группой формул (2.2.34) соотношение (2.2.35), служащее для определения функции W , совпадает с уравнением (2.2.32), для которого функция W является полным интегралом. Из формулы (2.2.35) следует, что новая и старая функции Гамильтона равны и новую функцию Гамильтона можно записать на основании формулы (2.2.30) в виде

$$H = \alpha_1 = H(I_1, I_2, \dots, I_n). \quad (2.2.36)$$

Эта новая функция Гамильтона уже не будет зависеть от переменных $w_1, w_2, \dots, w_n$, которые, следовательно, являются циклическими. Тогда из уравнений Гамильтона $\frac{dq_j}{dt} = \frac{dH_j}{dp_j}$, $\frac{dp_j}{dt} = -\frac{dH}{dq_j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), написанных для переменных w, I , вытекает

$$\frac{dI_j}{dt} = 0, \quad \frac{dw_j}{dt} = \frac{\partial H(I_1, I_2, \dots, I_n)}{\partial I_j} = \omega_j(I_1, I_2, \dots, I_n). \quad (2.2.37)$$

Интегрируя эти уравнения (принимая во внимание, что ω_j – постоянные величины), получим соотношения

$$I_j = \text{const}, \quad w_j = \omega_j t + \beta_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2.2.38)$$

в которых β_j – постоянные интегрирования.

Первая группа этих соотношений ничего нового не даёт и только подтверждает, что I_j – постоянные величины. Вторая группа уравнений показывает, что величины w_j , называемые угловыми переменными, являются линейными функциями времени. Связь их с переменными q определяется из второй группы соотношений (2.2.34)

$$w_j = \partial W / \partial I_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2.39)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

[Домашняя](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Назад](#)
[На весь экран](#)
[Закреть](#)

Выясним некоторые свойства угловых переменных w_j . Возьмём замкнутую траекторию на плоскости (q_j, p_j) . Тогда при движении изображающей точки по этой траектории все переменные q , кроме q_j останутся неизменными. Выясним, что при этом произойдёт с w_j . Обозначая через Δw_k приращение, которое получает величина w_k при условии, что координата q_j совершила полный цикл изменения, с помощью формулы (2.2.39) найдём:

$$\Delta w_k = \oint dw_k = \oint \frac{\partial^2 W}{\partial I_k \partial q_j} dq_j. \quad (2.2.40)$$

Так как действие I_k при интегрировании является параметром, то символ дифференцирования по I_k можно вынести за знак интеграла. Тогда на основании первой группы формул (2.2.34) получим

$$\Delta w_k = \frac{\partial}{\partial I_k} \oint \frac{\partial W}{\partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial I_k} \oint p_j dq_j. \quad (2.2.41)$$

Из формулы (2.2.28) следует, что

$$\oint p_j dq_j = 2\pi I_j, \quad (2.2.42)$$

и поэтому окончательно

$$\Delta w_k = 2\pi \frac{\partial I_j}{\partial I_k} = 2\pi \delta_{kj}, \quad (2.2.43)$$

где δ_{kj} – символ Кронекера, равный нулю при $k \neq j$ и единице при $k = j$.

Таким образом, когда переменная q_j совершает полный цикл своего изменения, переменная w_j изменится на 2π , что и оправдывает её название – угловой переменной. Кроме того, I_j имеет размерность кинетического момента и поэтому

[Домашняя](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Назад](#)
[На весь экран](#)
[Заккрыть](#)

канонически-сопряжённая действию координата w_j соответствует угловой переменной.

Обозначая через T_j полный период изменения величины q_j , получим, согласно формулам (2.2.38) и (2.2.43), выражение $\Delta w_j = 2\pi = \omega_j T_j$, из которого следует

$$\omega_j = 2\pi / T_j. \quad (2.2.44)$$

Поэтому постоянная ω_j равна круговой частоте изменения q_j .

Рассмотрим теперь зависимость старых переменных (q_j, p_j) от новой переменной w_j . Из сказанного выше следует, что при изменении угловой переменной w_j на 2π переменная q_j , а с ней на основании формулы (2.2.27) – и переменная p_j возвращаются к своим первоначальным значениям. Поэтому q_j и p_j являются 2π -периодическими функциями угловой переменной w_j и могут быть представлены в виде рядов Фурье:

$$q_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i k w_j}, \quad (2.2.45)$$

где

$$a_k = \int_0^{2\pi} q_j e^{-i k w_j} dw_j \quad (2.2.46)$$

и

$$p_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{i k w_j}, \text{ где } b_k = \int_0^{2\pi} p_j e^{-i k w_j} dw_j. \quad (2.2.47)$$

Возьмём теперь какую-либо функцию канонических переменных q, p интегрируемой системы с периодическим движением, например, функцию $\Phi(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$. Так как переменные q_j, p_j будут 2π -периодическими функциями угловой переменной w_j , то и функция Φ будет 2π -периодической функцией всех угловых переменных.

Домашняя



Назад

На весь экран

ных $w_1, \dots, w_n$, n -кратный ряд Фурье, который имеет вид

$$\Phi(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} C_{k_1, k_2, \dots, k_n}(I_1, I_2, \dots, I_n) \cdot e^{i(k_1 w_1 + \dots + k_n w_n)}, \quad (2.2.48)$$

где $k_1, k_2, \dots, k_n$ – целые числа, пробегающие значению от $-\infty$ до $+\infty$. Введём для удобства следующие обозначения:

$$\begin{aligned} k_1 w_1 + \dots + k_n w_n &= (k, w), \\ C_{k_1, k_2, \dots, k_n}(I_1, I_2, \dots, I_n) &= C_k(I), \\ \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{k_n=-\infty}^{\infty} &= \sum_k, \\ \Phi(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) &= \Phi(q, p) \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

и отметим, что $k = 0$ означает $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. В этих обозначениях формула (2.2.48) примет вид

$$\Phi(q, p) = \sum_k C_k(I) e^{i(k, w)}. \quad (2.2.50)$$

Переходя в (2.2.50) на основании соотношений (2.2.38) к зависимости от времени, получим n -частотную и в общем случае квазипериодическую функцию времени

$$\Phi(q, p) = \sum_k C_k(I) e^{i[(k, w)t + (k, \beta)]}. \quad (2.2.51)$$

Отметим, что переменные «действие-угол» в интегрируемых задачах можно ввести и более общем случае.

Закреть

2.3. Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае Эйлера

2.3.1. Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае Эйлера

Уравнения Эйлера-Пуассона, которые в случае Эйлера ($x_G = 0$, $y_G = 0$, $z_G = 0$) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = 0, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = r\gamma' - q\gamma'', \\ \dot{\gamma}' = p\gamma'' - r\gamma, \\ \dot{\gamma}'' = q\gamma - p\gamma', \end{cases} \quad (2.3.2)$$

обладают следующими четырьмя первыми интегралами:

$$\begin{cases} p^2 + Bq^2 + Cr^2 = !_1, \\ Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = !_2, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ {}^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = !_4. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Последний интеграл показывает, что K – величина кинетического момента – постоянная величина. Кроме того, так как в случае Эйлера момент внешних сил относительно неподвижной точки равен нулю, то, по теореме об изменении кинетического момента, получим $\frac{dK}{dt} = 0$ и, следовательно, кинетический момент $\bar{K}$ будет неподвижным вектором в осях $Ox_1y_1z_1$.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Так как система уравнений (2.3.1) – замкнутая, то для ее интегрирования воспользуемся первым и четвертым интегралами (2.3.3), которые перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} p^2 + Bq^2 + Cr^2 &= D\nu^2, \\ 2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= D^2\nu^2, \\ (C_1 = D\nu^2, C_4 = D^2\nu^2) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Выражая теперь из этих интегралов p и r через q :

$$\begin{cases} p^2 = \frac{B}{A} \frac{(B-C)}{(A-C)} (f - q^2), \\ r^2 = \frac{B}{C} \frac{(A-B)}{(A-C)} (g - q^2), \end{cases} \quad (2.3.5)$$

где

$$\begin{cases} f = \nu^2 \frac{D}{B} \frac{(D-C)}{(B-C)}, \\ g = \nu^2 \frac{D}{B} \frac{(A-D)}{(A-B)}, \end{cases}$$

и подставляя полученные соотношения во второе уравнение (2.3.1) получим:

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}} \sqrt{(f - q^2)(g - q^2)}. \quad (2.3.6)$$

Выберем оси координат таким образом, чтобы соблюдались неравенства $A > B > C$. Тогда из соотношений (2.3.5) вытекает, что

$$f \geq 0, \quad g \geq 0, \quad A \geq D \geq C,$$

и, следовательно, знак разности

$$g - f = \nu^2 \frac{D}{B} \frac{(A-C)(B-D)}{(A-B)(B-C)}$$

совпадает со знаком разности $B - D$.

Рассмотрим случай, когда

$$B - D > 0, g > f. \quad (2.3.7)$$

(Случай $B - D < 0, g < f$ исследуется аналогично). Полагая

$$q = \sqrt{f} u, \quad k^2 = \frac{f}{g} = \frac{(A - B)(D - C)}{(B - C)(A - D)} < 1, \quad (2.3.8)$$

определим из уравнения (2.3.6) время t как функцию переменной величины u при помощи эллиптического интеграла

$$n(t - t_0) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}, \quad (2.3.9)$$

где

$$n = \nu \sqrt{\frac{D(B - C)(A - D)}{ABC}},$$

а t_0 – постоянная интегрирования. Обращение этого эллиптического интеграла, как следует из формулы $v = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{(1 - \omega^2)(1 - k^2 \omega^2)}}$ (обращением этого интеграла является функция $\omega = \operatorname{sn} v$) дает выражение

$$u = \operatorname{sn} \tau, \quad \tau = n(t - t_0),$$

с помощью которого из формул (2.3.5) и соотношений

$$\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1,$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{dn}^2 v = 1$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

[Домашняя](#)
[◀](#)
[▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Назад](#)
[На весь экран](#)
[Закреть](#)

найдем

$$\begin{cases} q = \varepsilon_1 \nu \sqrt{\frac{D(D-C)}{B(B-C)}} \operatorname{sn} \tau, \\ p = \varepsilon_2 \nu \sqrt{\frac{D(D-C)}{A(A-C)}} \operatorname{cn} \tau, \\ r = \varepsilon_3 \nu \sqrt{\frac{D(A-D)}{C(A-C)}} \operatorname{dn} \tau. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

В этих формулах каждая из трех величин ε_1 , ε_2 и ε_3 в зависимости от начальных условий равна $+1$ или -1 (при $r_0 > 0$, $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = +1$). Полученные выражения для p , q , r зависят от трех произвольных постоянных ν , D , t_0 .

Найдем теперь решение оставшихся трех уравнений Пуассона (2.3.2) при известных функциях p, q, r . В этом случае уравнения (2.3.2) становятся линейными однородными уравнениями и их общее решение будет найдено, если будет определена соответствующая фундаментальная система частных решений. Для определения частных решений воспользуемся системой уравнений (2.3.1), которую перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ap) &= (Bq)r - (Cr)q, \\ \frac{d}{dt}(Bq) &= (Cr)p - (Ap)r, \\ \frac{d}{dt}(Cr) &= (Ap)q - (Bq)p. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Сравнивая полученную систему уравнений с уравнениями (2.3.2), убеждаемся, что функции γ_1 , γ_1' , γ_1'' , где

$$\gamma_1 = \frac{Ap}{l}, \gamma_1' = \frac{Bq}{l}, \gamma_1'' = \frac{Cr}{l}, (l = vD), \quad (2.3.12)$$

а p, q, r определяются формулами (2.3.10), составляют частное решение уравнения Пуассона. Найденное решение в силу второго интеграла (2.3.4) удовлетворяют соотношению

$$\gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2 = 1. \quad (2.3.13)$$

Это частное решение соответствует тому случаю, когда ось z_1 направлена не по вертикали, а вдоль постоянного вектора $\vec{K}$.

Заменяя в формулах (2.3.12) направляющие косинусы $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_1''$ их выражениями (2.1.3) и (2.1.4) через углы Эйлера и подставляя в формулу (2.1.7) вместо $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_1''$ их выражения (2.3.12), получим

$$l \sin \theta \sin \varphi = A p, l \sin \theta \cos \varphi = B q, l \cos \theta = C r, \quad (2.3.14)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = v D \frac{A p^2 + B q^2}{A^2 p^2 + B^2 q^2}. \quad (2.3.15)$$

Из формул (2.3.14) и (2.3.15), полагая в них p, q, r известными из (2.3.10) функциями времени и интегрируя уравнение (2.3.15), найдем явную зависимость углов Эйлера θ, φ, ψ от времени. Зная же углы Эйлера как функции времени, легко из соотношений (2.3.5) найти направляющие косинусы $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1''$ оси x_1 и $\beta_1, \beta_1', \beta_1''$ оси y_1 . Каждая из этих троек направляющих косинусов является частным решением уравнений Пуассона и соответствует тому случаю, когда в качестве осей x_1 и y_1 выбраны прямоугольные оси, перпендикулярные постоянному вектору кинетического момента $\vec{K}$. При этом будем предполагать, что оси x_1 и y_1 выбраны таким образом, чтобы угол ψ обращался в нуль при $t = t_0$.

Определитель матрицы (1.4.5) равен единице. Поэтому найденные выражения для троек направляющих косинусов $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_1'', \beta_1, \beta_1', \beta_1'', \gamma_1, \gamma_1', \gamma_1''$ представляют собой фундаментальную систему частных решений и, следовательно, общее решение уравнений Пуассона будет иметь вид:

$$\begin{cases} \gamma = !' \alpha_1 + !'' \beta_1 + !''' \gamma_1, \\ \gamma' = !' \alpha_1' + !'' \beta_1' + !''' \gamma_1', \\ \gamma'' = !' \alpha_1'' + !'' \beta_1'' + !''' \gamma_1'', \end{cases} \quad (2.3.16)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

где C' , C'' , C''' – постоянные интегрирования. В этом решении из трех постоянных величин C' , C'' , C''' произвольными являются только две в силу существования соотношения $C'^2 + C''^2 + C'''^2 = 1$, выводимого из тривиального интеграла $\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$ при использовании очевидных соотношений

$$\alpha_1 \beta_1 + \alpha'_1 \beta'_1 + \alpha_1 \beta''_1 = 0, \alpha_1 \gamma_1 + \alpha'_1 \gamma'_1 + \alpha''_1 \gamma''_1 = 0,$$

$$\beta_1 \gamma_1 + \beta'_1 \gamma'_1 + \beta''_1 \gamma''_1 = 0, \alpha_1^2 + \alpha_1'^2 + \alpha_1''^2 = 1,$$

$$\beta_1^2 + \beta_1'^2 + \beta_1''^2 = 1, \gamma_1^2 + \gamma_1'^2 + \gamma_1''^2 = 1.$$

Таким образом, полученное в случае Эйлера общее решение (2.3.16) уравнений Эйлера-Пуассона зависит от пяти произвольных постоянных ν , D , t_0 , C' , C'' .

Покажем теперь, что зависимость от времени каждого из девяти направляющих косинусов α_1 , α'_1 , α''_1 ; β_1 , β'_1 , β''_1 ; γ_1 , γ'_1 , γ''_1 может быть выражена в виде рациональной функции от тэта-функций Якоби. Для величин γ_1 , γ'_1 , γ''_1 это следует из формул (2.3.10) и (2.3.12).

Предварительно определим углы Эйлера θ , φ , ψ как функции времени. Для углов θ и φ такая зависимость от времени следует из формул (2.3.10) и (2.3.14). Подставим теперь в правую часть уравнения (2.3.15) вместо p и q их выражения (2.3.10). Заменяя в этом уравнении $\text{sn}^2 \tau$ на $1 - \text{sn}^2 \tau$ и переходя от производной по t к производной по τ ($dt = \frac{d\tau}{n}$), получим

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{\nu D}{nC} + \frac{\nu D(C-A)}{nAC} \frac{1}{1+m \text{sn}^2 \tau}, \quad (2.3.17)$$

$$m = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}. \quad (2.3.18)$$

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Воспользовавшись формулами

$$= \int_0^v \frac{dv}{1 + n \operatorname{sn}^2 v},$$

$$= v + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \left[\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} v + \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(v-a)}{\theta(v+a)} \right],$$

проинтегрируем уравнение (2.3.17). Будем иметь выражение

$$\psi = \lambda \tau + \chi_1 \frac{1}{2} \ln \frac{\theta(\tau-a)}{\theta(\tau+a)}, \quad (2.3.19)$$

где a определяется из соотношения

$$k^2 \operatorname{sn}^2 a = -m, \quad (2.3.20)$$

в котором k – модуль эллиптического интеграла (вычисляется по формуле (7.8))

$$\chi_1 = -\frac{\nu D(A-C)}{n A C} \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}, \quad (2.3.21)$$

а λ – некоторое действительное постоянное число.

Вычислим теперь коэффициент χ_1 . Из формул (2.3.18) и (2.3.20) и, принимая во внимание соотношения $\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1$ и $k^2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{dn}^2 v = 1$, получим:

$$\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} = i \sqrt{\frac{m}{(k^2 + m)(1 + m)}} = i \sqrt{\frac{A C (B - C) (A - D)}{D B (A - C)^2}} \quad (2.3.22)$$

и, следовательно,

$$\chi_1 = -i. \quad (2.3.23)$$

2.3.2. Об однозначности решения

Покажем теперь, что остальные шесть направляющих косинусов выражаются рационально через тэта-функции Якоби. Из соотношений (2.3.14) следует

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2}}{l}, \quad (2.3.24)$$

$$\sin \varphi = V_1 \sin \theta, \cos \varphi = V_2 \sin \theta, \quad (2.3.25)$$

где функции

$$V_1 = \frac{A l p}{A^2 p^2 + B^2 q^2}, V_2 = \frac{B l q}{A^2 p^2 + B^2 q^2} \quad (2.3.26)$$

выражаются с помощью (2.3.10) и формул

$$\begin{cases} \operatorname{sn} v = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_1(\pi v/2K)}{\theta_4(\pi v/2K)}, \\ \operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\theta_2(\pi v/2K)}{\theta_4(\pi v/2K)}, \\ \operatorname{dn} v = \sqrt{k'} \cdot \frac{\theta_3(\pi v/2K)}{\theta_4(\pi v/2K)} \end{cases}$$

рационально через тета-функции Якоби.

Заменяя в формуле (2.3.24) p^2 и q^2 их значениями из соотношений (2.3.10), получим выражение

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \cdot \sqrt{1 + \frac{C(A-B)}{A(B-C)} \operatorname{sn}^2 \tau},$$

которое на основании формул (2.3.18) и (2.3.20) перепишем в виде

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \cdot \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 \tau}. \quad (2.3.27)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Воспользовавшись формулой

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 \tau = \frac{\theta^2(0)}{\theta^2(a)} \frac{\theta(\tau + a) \theta(\tau - a)}{\theta^2(\tau)},$$

окончательно получим

$$\sin \theta = \lambda_1 \frac{\sqrt{\theta(\tau + a) \theta(\tau - a)}}{\theta^2(\tau)}, \quad (2.3.28)$$

где λ_1 – постоянный коэффициент. Вычисляя затем $\sin \psi$ и $\cos \psi$ (где $\psi = \lambda \tau - \frac{i}{2} \ln \frac{\theta(\tau - a)}{\theta(\tau + a)}$) с помощью формулы

$$e^{i\psi} = e^{i\lambda\tau} \sqrt{\frac{\theta(\tau - a)}{\theta(\tau + a)}} = e^{i\lambda\tau} \frac{\sqrt{\theta(\tau + a) \theta(\tau - a)}}{\theta(\tau + a)},$$

убеждаемся, что $\sin \psi$ и $\cos \psi$ зависят от той же иррациональности, что и $\sin \theta$, и, следовательно, произведения

$$\sin \theta \sin \psi, \sin \theta \cos \psi \quad (2.3.29)$$

будут рациональными функциями θ . Но в выражениях для $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1; \beta_1, \beta'_1, \beta''_1$, получаемых из формул (2.3.16), в которых $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ заменены правыми частями соотношений (2.3.25), величины $\sin \theta$, $\cos \psi$ и $\sin \psi$ встречаются только в виде произведений (2.3.29). Следовательно, и эти шесть направляющих косинусов выражаются рационально через θ -функции Якоби. Если же рассматривать время t как комплексное переменное, то полученные результаты можно сформулировать следующим образом: общее решение (2.3.10) и (2.3.16) уравнений Эйлера-Пуассона в случае Эйлера выражается в однозначных функциях времени.

2.4. Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае Лагранжа

2.4.1. Лагранжев случай движения весоного твердого тела вокруг неподвижной точки. Симметричный гироскоп

Пусть весоное твердое тело S движется вокруг неподвижного полюса O , для которого эллипсоид инерции тела является поверхностью вращения. Пусть при этом центр масс тела лежит на оси вращения эллипсоида инерции, или, как говорят, на динамической оси симметрии тела. Этот случай движения тела носит название лагранжева случая движения весоного твердого тела, а само тело называется симметричным весоным гироскопом. Уравнения движения

$$\begin{cases} J_{\xi\xi} \dot{\omega}_\xi - (J_{\eta\eta} - J_{\zeta\zeta}) \omega_\eta \omega_\zeta = M g (a_{32} \zeta_C - a_{33} \eta_C), \\ J_{\eta\eta} \dot{\omega}_\eta - (J_{\zeta\zeta} - J_{\xi\xi}) \omega_\zeta \omega_\xi = M g (a_{33} \xi_C - a_{31} \zeta_C), \\ J_{\zeta\zeta} \dot{\omega}_\zeta - (J_{\xi\xi} - J_{\eta\eta}) \omega_\xi \omega_\eta = M g (a_{31} \eta_C - a_{32} \zeta_C), \end{cases}$$

для названного случая примут вид:

$$\begin{cases} J_{\xi\xi} \dot{\omega}_\xi - (J_{\xi\xi} - J_{\zeta\zeta}) \omega_\eta \omega_\zeta = M g a_{32} \zeta_C, \\ J_{\xi\xi} \dot{\omega}_\eta - (J_{\zeta\zeta} - J_{\xi\xi}) \omega_\zeta \omega_\xi = -M g a_{31} \zeta_C, \\ \dot{\omega}_\zeta = 0. \end{cases} \quad (2.4.1)$$

Здесь ось симметрии тела принята за ось ζ , а координата ζ центра масс тела обозначена ζ_C , причем эта величина может быть и положительной, и отрицательной. Ось Oz направлена вертикально вверх. Косинусы θ_{31}, θ_{32} следующим образом зависят

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

от эйлеровых углов φ и θ :

$$\begin{aligned} 0_{31} &= \sin \varphi \sin \theta, \\ a_{32} &= -\cos \varphi \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

2.4.2. Простейшие интегралы уравнений движения

Последнее из уравнений (2.4.1) показывает, что

$$\omega_{\zeta} = \text{const} = \omega_{0\zeta}. \quad (2.4.3)$$

Заметим, что приложенная к телу сила тяжести не даёт момента относительно вертикали; следовательно, кинетический момент тела относительно оси Oz постоянен и равен своему начальному значению:

$$G_z = \text{const} = G_{0z}.$$

Последнее уравнение согласно формулам

$$\begin{cases} a_x = a_{11} a_{\xi} + a_{12} a_{\eta} + a_{13} a_{\zeta}, \\ a_y = a_{21} a_{\xi} + a_{22} a_{\eta} + a_{23} a_{\zeta}, \\ a_z = a_{31} a_{\xi} + a_{32} a_{\eta} + a_{33} a_{\zeta}, \end{cases} \quad \begin{cases} G_{O\xi} = J_{\xi\xi} \omega_{\xi}, \\ G_{O\eta} = J_{\eta\eta} \omega_{\eta}, \\ G_{O\zeta} = J_{\zeta\zeta} \omega_{\zeta} \end{cases}$$

и (2.4.3) можно переписать в виде

$$J_{\xi\xi}(\omega_{\xi} 0_{31} + \omega_{\eta} 0_{32}) + J_{\zeta\zeta} \omega_{0\zeta} u = G_{0z}, \quad (2.4.4)$$

где для краткости положено

$$u = a_{33} = \cos \theta. \quad (2.4.5)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Непосредственно из уравнений (2.4.1) интеграл (2.4.4) получается следующим образом. Умножаем первое из уравнений (2.4.1) на a_{13} , второе на a_{32} и складываем:

$$J_{\xi\xi}(\dot{\omega}_{\xi}a_{31} + \dot{\omega}_{\eta}a_{32}) + (J_{\xi\xi} - J_{\zeta\zeta})\omega_{\xi}(\omega_{\xi}a_{32} - \omega_{\eta}a_{31}) = 0. \quad (2.4.6)$$

Обратимся к кинематическим формулам. Общая структура этих формул такова:

$$\dot{a}_{\mu\nu} = \omega_{(\nu+2)} a_{\nu, (\mu+1)} - \omega_{(\nu+1)} a_{\mu, (\nu+2)},$$

причем индексы 1, 2, 3 у угловой скорости соответственно означают x , y , z , а числа в скобках должны быть заменены их наименьшими положительными вычетами по модулю, равному 3. С помощью этих формул получаем

$$-J_{\zeta\zeta}\omega_{\zeta}(\omega_{\xi}0_{32} - \omega_{\eta}0_{31}) = J_{\zeta\zeta}\omega_{\zeta}\dot{a}_{33} = J_{\zeta\zeta}\omega_{\zeta}\dot{u};$$

с другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} J_{\xi\xi}\omega_{\zeta}(\omega_{\xi}0_{32} - \omega_{\eta}0_{31}) &= J_{\xi\xi}\omega_{\xi}(\omega_{\zeta}0_{32} - \omega_{\eta}0_{33}) + J_{\xi\xi}\omega_{\eta}(\omega_{\xi}a_{33} - \omega_{\zeta}0_{31}) = \\ &= J_{\xi\xi}\omega_{\xi}\dot{0}_{31} + J_{\xi\xi}\omega_{\eta}\dot{0}_{32}. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в равенство (2.4.6) и воспользовавшись интегралом (2.4.3), находим:

$$J_{\xi\xi}(\dot{\omega}_{\xi}0_{31} + \omega_{\xi}\dot{a}_{31} + \dot{\omega}_{\eta}0_{32} + \omega_{\eta}\dot{0}_{32}) + J_{\xi\xi}\omega_{\zeta}\dot{u} = 0,$$

откуда и вытекает интеграл (2.4.4).

Запишем интеграл энергии

$$T = U + h,$$

где h – произвольная постоянная. Запишем кинетическую энергию как

$$T = \frac{1}{2}(J_{\xi\xi}\omega_{\xi}^2 + J_{\eta\eta}\omega_{\eta}^2 + J_{\zeta\zeta}\omega_{\zeta}^2),$$

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

а силовую функцию по формуле

$$U = -g \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} z_{\nu} + \text{const} = -M g z_C + \text{const},$$

и заметив, что

$$z_C = \zeta_C \cos \theta = \zeta_C u,$$

найдем окончательно:

$$J_{\xi\xi}(\omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2) + J_{\zeta\zeta}\omega_{\zeta 0}^2 = -2Mg\zeta_C u + 2h. \quad (2.4.7)$$

Выразим ω_{ξ} , ω_{η} , ω_{ξ} , θ_{31} , θ_{32} через эйлеровы углы по формулам (2.4.2) и

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi} &= \sin \varphi \sin \theta \cdot \dot{\psi} + \cos \varphi \cdot \dot{\theta}, \\ \omega_{\eta} &= \cos \varphi \sin \theta \cdot \dot{\psi} - \sin \varphi \cdot \dot{\theta}, \\ \omega_{\zeta} &= \cos \theta \cdot \dot{\psi} + \dot{\varphi}, \end{aligned} \right\}$$

тогда найденные интегралы (2.4.3), (2.4.4) и (2.4.7) примут вид:

$$\dot{\psi} u + \dot{\varphi} = \omega_{0\zeta}, \quad (2.4.8)$$

$$J_{\xi\xi} \dot{\psi}^2 (1 - u^2) = G_{0z} - J_{\zeta\zeta} \omega_{0\zeta} u, \quad (2.4.9)$$

$$J_{\xi\xi} \{ \dot{\psi}^2 (1 - u^2) + \dot{\theta}^2 \} = -2Mg\zeta_C u + 2h - J_{\xi\xi} \omega_{0\xi}^2. \quad (2.4.10)$$

Из уравнения (2.4.9) имеем

$$\dot{\psi} = \frac{G_{0z} - J_{\zeta\zeta} \omega_{0\zeta} u}{J_{\xi\xi}(1 - u^2)}. \quad (2.4.11)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закрыть

Подставив это выражение в равенство (2.4.10), найдем:

$$J_{\xi\xi}\dot{\theta}^2 = \frac{J_{\xi\xi}\dot{u}^2}{1-u^2} = -2Mg\zeta_C u + 2h - J_{\zeta\zeta}\omega_{0\zeta}^2 - \frac{(G_{0z} - J_{\zeta\zeta}\omega_{0\zeta}u)^2}{J_{\xi\xi}(1-u^2)}$$

или, после сокращений

$$\dot{u}^2 = \frac{1}{J_{\xi\xi}^2} \{ [-2Mg\zeta_C u + 2h - J_{\zeta\zeta}\omega_{0\zeta}^2] (1-u^2) J_{\xi\xi} - (G_{0z} - J_{\zeta\zeta}\omega_{0\zeta}u)^2 \} = Q(u). \quad (2.4.12)$$

Из равенства (2.4.8) получим:

$$\dot{\varphi} = \omega_{0\zeta} - \frac{(G_{0z} - J_{\zeta\zeta}\omega_{0\zeta}u)u}{J_{\xi\xi}(1-u^2)}. \quad (2.4.13)$$

Пусть центр масс тела лежит на положительной стороне оси $O\zeta$; тогда ζ_C будет положительно, и, следовательно, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} Q(-\infty) < 0, \quad Q(-1) &= -\frac{(G_{0z} + J_{\zeta\zeta}\omega_{0\zeta})^2}{J_{\xi\xi}} < 0, \\ Q(u_0) \geq 0, \quad Q(+1) &= -\frac{(G_{0z} - J_{\zeta\zeta}\omega_{0\zeta})^2}{J_{\xi\xi}} < 0, \quad Q(+\infty) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.14)$$

Здесь через u_0 обозначено начальное значение переменной u , причем u_0 заключено в интервале $-1 \leq u_0 \leq +1$.

Полином $Q(u)$ для $u = u_0$ должен принять положительное значение или обратиться в нуль, так как иначе для начальной скорости $\dot{u}_0$ мы по формуле (2.4.12) получили бы мнимое выражение. Из равенств (2.4.14) видим, что

$$Q(u) = \frac{2Mg\zeta_C}{J_{\xi\xi}} (u - u_1)(u - u_2)(u - u'), \quad (2.4.15)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

если через u_1, u_2, u' мы обозначим три вещественные корни полинома $Q(u)$. Эти корни расположены в таких интервалах:

$$-1 \leq u_1 \leq u_0 \leq u_2 \leq +1 < u' < +\infty. \quad (2.4.16)$$

Из равенств (2.4.12) и (2.4.15) ясно, что для того, чтобы $\dot{u}$ сохраняло вещественное значение, u должно меняться в пределах от u_1 до u_2 :

$$u_1 \leq u \leq u_2.$$

Введем новую переменную χ , положив

$$u = u_1 \cos^2 \chi + u_2 \sin^2 \chi = u_1 - (u_1 - u_2) \sin^2 \chi; \quad (2.4.17)$$

согласно только что написанным неравенствам χ всегда будет оставаться вещественным. Имеем

$$u - u_1 = -(u_1 - u_2) \sin^2 \chi,$$

$$u - u_2 = (u_1 - u_2) \cos^2 \chi,$$

$$u - u' = (u_1 - u')(1 - k^2 \sin^2 \chi),$$

где $k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u' - u_1}$, причем k^2 в силу неравенств (2.4.16) заключено в пределах $0 \leq k^2 < 1$. Подставив вычисленные значения разностей $u - u_1, u - u_2, u - u'$ в уравнение (2.4.11), найдем

$$\frac{d\chi}{\pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}} = \varepsilon dt,$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{M g \zeta_C(u' - u_1)}{2 J_{\xi\xi}}}.$$

Закреть

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Отсюда получим

$$\sin \chi = \sin \operatorname{am}(\varepsilon t + \beta),$$

где β – произвольная постоянная. Теперь из уравнения (2.4.17) найдем u как функцию от времени, а затем получим φ и ϕ квадратурами из уравнений (2.4.13) и (2.4.11). Этим и закончим интеграцию.

Остановимся на частном случае движения гироскопа, а именно, допустим, что

$$\omega_{0\zeta} = 0.$$

Тогда уравнения (2.4.11) и (2.4.12) можно будет переписать так:

$$(1 - u^2) \dot{\psi} = \frac{G_{0z}}{J_{\xi\xi}},$$

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{-2 M g \zeta_C}{J_{\xi\xi}} u + \frac{2h}{J_{\xi\xi}} \right) (1 - u^2) - \frac{G_{0z}^2}{J_{\xi\xi}^2}.$$

Напишем уравнение, относящееся к движению сферического маятника и положим

$$z = R \cos \theta = R u,$$

где θ в применении к маятнику означает сферическую координату «дополнение до широты»; будем иметь:

$$(1 - u^2) \dot{\psi} = \frac{A}{R^2},$$

$$\dot{u}^2 = \left(\frac{-2g}{R} u + \frac{2H}{R^2} \right) (1 - u^2) - \frac{A^2}{R^4}.$$

Отвлекаясь от различного обозначения произвольных постоянных, видим, что уравнения движения оси гироскопа и сферического маятника станут одинаковыми,

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

если положить радиус шара равным

$$R = \frac{J_{\xi\xi}}{M\zeta_C}.$$

Иначе говоря, ось симметрии тела совершает такое же движение, как радиус-вектор весоной частицы, принужденной оставаться на сфере указанного радиуса.

2.4.3. Сферический гироскоп

Твердое тело, подпертое в одной точке, называется сферическим гироскопом, если эллипсоид инерции для точки опоры обращается в сферу. Покажем, что движение весоного симметричного гироскопа может быть поставлено в весьма простую связь с движением некоторого весоного сферического гироскопа. В самом деле, интегралам (2.4.3), (2.4.4) и (2.4.7) можно дать вид:

$$\begin{aligned}\omega_\zeta &= \omega_{0\zeta}, \\ \omega_\xi a_{31} + \omega_\eta a_{32} + \frac{J_{\xi\xi}\omega_{0\xi}}{J_{\xi\xi}} u &= 2E, \\ \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \frac{J_{\xi\xi}\omega_{0\xi}^2}{J_{\xi\xi}} &= 2(Du + K),\end{aligned}\tag{2.4.18}$$

где

$$D = -\frac{Mg\zeta_C}{J_{\xi\xi}},\tag{2.4.19}$$

а K и E – новые постоянные, функции прежних. Будем теперь одновременно с симметричным гироскопом S рассматривать воображаемое тело Σ , имеющее относительно S постоянную угловую скорость $(\omega'_{0\xi} - \omega'_{0\zeta})\bar{\zeta}^0$ вокруг оси симметрии. Таким образом, проекции угловой скорости $\bar{\omega}'$ тела Σ на оси $O\xi\eta\zeta$ равны:

$$\omega'_\xi = \omega_\xi, \quad \omega'_\eta = \omega_\eta, \quad \omega'_\zeta = \omega_{0\zeta} + (\omega'_{0\xi} - \omega'_{0\zeta}) = \omega'_{0\xi}.$$

Если теперь постоянную величину ω'_ξ выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$J_{\zeta\zeta}\omega_{0\zeta} = J_{\xi\xi}\omega'_\zeta,$$

то интегралы (2.4.18) для тела Σ заменяются следующими:

$$\begin{cases} \omega'_\zeta = \omega_{0\zeta}, \\ \omega'_\xi a_{31} + \omega'_\eta a_{32} + \omega'_\zeta u = 2E, \\ \omega'^2_\xi + \omega'^2_\eta + \omega'^2_\zeta = 2Du + 2K', \end{cases} \quad (2.4.20)$$

где K' – новая постоянная, отличная от постоянной K . Сравнивая (2.4.18) и (2.4.20), видим, что движение тела Σ происходит так, как будто оно было весомое, а эллипсоид инерции для точки опоры был сферой.

Итак, общий лагранжев случай движения твердого тела получается из того частного, когда эллипсоидом инерции служит сфера, посредством присоединения постоянного вращения вокруг оси симметрии тела.

2.5. Интегрирование уравнений Эйлера-Пуассона в случае С. В. Ковалевской

2.5.1. Общие замечания

В случае, открытом С.В. Ковалевской, принимается, что $A = B = 2C$, $y_G = z_G = 0$ и в качестве подвижной системы координат выбирается такая система главных осей, в которой $x_G < 0$. Следует отметить, что приведение к квадратурам уравнений движения в этом случае является задачей достаточно сложной. Уравнения Эйлера-Пуассона, которые в общем случае имеют вид:

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M g(z_G\gamma' - y_G\gamma''),$$

$$B\dot{q} + (A - C)rp = Mg(x_G\gamma'' - z_G\gamma),$$

$$C\dot{r} + (B - A)pq = Mg(y_G\gamma - x_G\gamma'),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',$$

$$\frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,$$

$$\frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma',$$

в данном случае можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} 2\frac{dp}{dt} &= qr, \\ 2\frac{dq}{dt} &= -pr - c\gamma'', \\ \frac{dr}{dt} &= c\gamma', \\ \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'', \\ \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma, \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma', \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

где $A = \frac{Mg x_G}{C}$.

Для системы уравнений (2.5.1) были найдены четыре первых интеграла:

$$\begin{cases} 2(p^2 + q^2) + r^2 = 2A\gamma + 6l_1, \\ 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ [(p + iq)^2 + A(\gamma + i\gamma')] [(p - iq)^2 + A(\gamma - i\gamma')] = k^2. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Четвертый интеграл, найденный С.В. Ковалевской, можно записать в виде:

$$(p^2 + q^2 + c\gamma)^2 + (2pq + c\gamma') = k^2.$$

Домашняя

◀ ▶

◀ ▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Отсюда видно, что в условиях задачи, где переменные p, q, c, γ, γ' действительны, постоянная k также действительное число.

Соображения, основанные на теории последнего множителя, приводят нас к заключению, что в рассматриваемом случае, так же как и в классических случаях, интегрирование системы кинематических уравнений Эйлера (три последние уравнений в системе (9.1)) и системы уравнений (2.5.2) может быть сведено в интегрированию одного уравнения, представляющего полный дифференциал, и к дополнительной квадратуре для определения времени.

Для получения этого уравнения необходимо исключение из уравнений (2.5.1) и системы первых интегралов (2.5.2) четырех переменных, например, путем выражения их при помощи соотношений (2.5.2) через две остающихся переменные. Однако действительное исключение переменных указанным способом фактически не выполнено в силу вычислительных трудностей.

Для решения задачи С.В. Ковалевская шла иным путем, введя новые переменные, при помощи которых действительное исключение переменных и сведение интегрирования системы к интегрированию одного уравнения становится фактически выполнимым.

2.5.2. Переменные С.В. Ковалевской

Как заметила С.В. Ковалевская, система уравнений (2.5.1) может быть значительно упрощена путем введения вместо переменных p, q, γ, γ' других переменных:

$$x_1 = p + i q, x_2 = p - i q, \quad (2.5.3)$$

$$\xi_1 = (p + i q)^2 + A(\gamma + i \gamma'), \xi_2 = (p - i q)^2 + A(\gamma - i \gamma') \quad (2.5.4)$$

[Домашняя](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Назад](#)
[На весь экран](#)

В новых переменных (2.5.3), (2.5.4) четыре первых интеграла (2.5.2) окончательно примут вид соответственно:

$$r^2 = 6l_1 + \xi_1 + \xi_2 - (x_1 + x_2)^2, \quad (2.5.5)$$

$$Ar\gamma'' = 2cl - x_2\xi_1 - x_1\xi_2 + x_1x_2(x_1 + x_2), \quad (2.5.6)$$

$$A\gamma''^2 = A^2 - k^2 + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2 - x_1^2x_2^2, \quad (2.5.7)$$

$$\xi_1\xi_2 = k^2. \quad (2.5.8)$$

Дальнейшее упрощение задачи состоит в том, чтобы из уравнений (2.5.5)–(2.5.8) исключить переменные r и γ'' . Их исключение приведет к тому, что вместо системы четырех уравнений с шестью переменными мы получим два уравнения с четырьмя переменными, которые позволяют нам определить две из оставшихся четырех переменных через две другие.

2.5.3. Основное уравнение С.В. Ковалевской; переменные s_1 и s_2

Для упрощения вычислений введем следующие обозначения:

$$E = 6l_1 - (x_1 + x_2)^2,$$

$$F = 2cl + x_1x_2(x_1 + x_2),$$

$$G = A^2 - k^2 - x_1^2x_2^2.$$

[Закреть](#)

Домашняя

◀ ▶

◀ ▶

Назад

На весь экран

Закреть

Тогда уравнения (2.5.5)–(2.5.8) примут вид:

$$\begin{aligned} r^2 &= E + \xi_1 + \xi_2, \\ Ar\gamma'' &= F - x_2\xi_1 - x_1\xi_2, \\ A\gamma''^2 &= G + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2, \\ \xi_1\xi_2 &= k^2. \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

Исключая r и γ'' из первых трёх уравнений системы (2.5.9), получим:

$$(E + \xi_1 + \xi_2)(G + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2) - (F - x_2\xi_1 - x_1\xi_2)^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и собирая члены с ξ_1 и ξ_2 , после преобразований получим:

$$R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2 + R_1(x_1, x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0, \quad (??) \quad (2.5.10)$$

где

$$R(x) = Ex^2 + 2Fx + G, \quad (2.5.11)$$

$$R_1(x_1, x_2) = EG - F^2, \quad (2.5.12)$$

После исключения r и γ'' остаётся система уравнений:

$$\begin{cases} R(x_2)\xi_1 + R(x_1)\xi_2 + R_1(x_1, x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0, \\ \xi_1\xi_2 = k^2, \end{cases} \quad (2.5.13)$$

из которых конечно, можно определить ξ_1 , ξ_2 как функции x_1 , x_2 , т.е. в конце концов все переменные Ковалевской можно выразить через x_1 , x_2 . Однако С.В. Ковалевская пошла в своих вычислениях другим путем. Уравнения (2.5.13) имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha\xi_1 + \beta\xi_2^2 = 0, \\ \xi_1\xi_2 = k^2. \end{cases}$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Последние уравнения можно свести к следующим уравнениям:

$$\left[\sqrt{\xi_1} \frac{\sqrt{R(x_2)}}{x_1 - x_2} \pm \sqrt{\xi_2} \frac{\sqrt{R(x_1)}}{x_1 - x_2} \right]^2 = -\frac{R_1(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2} \pm 2k \frac{\sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} - k^2. \quad (2.5.14)$$

Разложим правую часть выражения (2.5.14) на множители линейные относительно k . Для этого необходимо найти корни следующего уравнения

$$\omega^2 \pm 2\omega \frac{\sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{R_1(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = 0. \quad (2.5.15)$$

Корни этого уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}, \\ \omega_2 &= \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

где $R(x_1, x_2) = Ex_1x_2 + F(x_1 + x_2) + G$. Очевидно, что ω_1 и ω_2 являются также корнями уравнения:

$$\omega^2 - 2\omega \frac{R(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2} - \frac{R_1(x_1, x_2)}{(x_1 - x_2)^2} = 0. \quad (2.5.17)$$

Уравнение (2.5.17) называют основным уравнением С.В. Ковалевской. Уравнение С.В. Ковалевской, имеющее в дальнейшем основное значение, можно переписать в виде:

$$(x_1 - x_2)^2 \omega^2 - 2R(x_1, x_2)\omega - R_1(x_1, x_2) = 0. \quad (2.5.18)$$

Обозначим левую часть уравнения (2.5.18) через $Q(\omega, x_1, x_2)$, так что:

$$Q(\omega, x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 \omega^2 - 2R(x_1, x_2)\omega - R_1(x_1, x_2).$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Легко показать, что $Q(\omega, x_1, x_2)$ есть квадратичный многочлен относительно каждой из переменных ω, x_1, x_2 . Из решений (2.5.16) видно, что:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} &= -(\omega_1 - \omega_2), \\ 2 \frac{R(x_1, x_2)}{(x_1-x_2)^2} &= \omega_1 + \omega_2. \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

Введём основные переменные Ковалевской. Следует отметить, что С.В. Ковалевская вводит в качестве основных переменных не ω_1, ω_2 , а две с ними связанные величины s_1, s_2 , причем

$$\begin{cases} s_1 = \omega_1 + 3l_1, \\ s_2 = \omega_2 + 3l_1. \end{cases} \quad (2.5.20)$$

В этих переменных уравнения (2.5.19) выражаются через переменные s_1 и s_2 следующим образом:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2} &= -(s_1 - s_2), \\ 2 \frac{R(x_1, x_2)}{(x_1-x_2)^2} &= s_1 + s_2 - 6l_1. \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Далее, используя первые два уравнения системы (2.5.1) и полученные выражения для s_1 и s_2 (2.5.21), можно получить дифференциальные уравнения в переменных x_1, x_2 . Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} &= -i \frac{\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}}{s_1 - s_2}, \\ \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} - \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} &= i \frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}}{s_1 - s_2}. \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Левые части уравнений (2.5.22) могут быть выражены через переменные s_1 и s_2 . Доказательство этого положения, данное С.В. Ковалевской, связано с теоремой

сложения эллиптических функций. Далее будем учитывать, что

$$\begin{aligned} -\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} &= 2\frac{d\omega_1}{\sqrt{\varphi(\omega_1)}}, \\ \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} &= 2\frac{d\omega_2}{\sqrt{\varphi(\omega_2)}}, \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

где $\varphi(\omega) = \omega((\omega - 3l_1)^2 + A^2 - k^2) - 2A^2l^2$.

Сравнивая системы уравнений (2.5.23) и (2.5.22) и замечая, что $d\omega_1 = ds_1$ и $d\omega_2 = ds_2$, а многочлен $\varphi(\omega) = \varphi(s - 3l_1) = \varphi(s)$ (обозначив через e_1, e_2, e_3 корни многочлена $\varphi(s)$ можно переписать $\varphi(s) = (s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)$), получим:

$$2\frac{ds_1}{\sqrt{\varphi(s_1)}} = -i\frac{\sqrt{(s_1 - e_4)(s_1 - e_5)}}{s_1 - s_2}dt,$$

$$2\frac{ds_2}{\sqrt{\varphi(s_2)}} = -i\frac{\sqrt{(s_2 - e_4)(s_2 - e_5)}}{s_1 - s_2}dt,$$

или, полагая $\Phi(s) = \varphi(s)(s - e_4)(s - e_5)$, получим еще:

$$2\frac{ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} = i\frac{dt}{s_1 - s_2},$$

$$2\frac{ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} = -i\frac{dt}{s_1 - s_2}.$$

Из последних двух выражений окончательно найдем:

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} &= 0, \\ \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} &= \frac{i}{2} dt. \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Таким образом, проинтегрировав уравнения (2.5.24) можно выразить s_1 и s_2 через t , а затем через t при помощи s_1 и s_2 выразить все переменные данной задачи.

Как следует из теории последнего множителя, исключая dt и пользуясь четырьмя первыми интегралами задачи, можно свести интеграцию уравнений к интеграции одного уравнения, представляющего собой уравнение в полных дифференциалах. Очевидно, что первое уравнение в системе (2.5.24) и есть то уравнение, которое должно существовать по теореме Якоби.

2.5.4. Определение переменных $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ через s_1 и s_2

Определим необходимые величины $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ как функции переменных s_1 и s_2 . Для этого рассмотрим основное уравнение Ковалевской в виде (2.5.18). Его можно привести к виду:

$$(s_1 - z)(s_2 - z) = \left[\sqrt{2z} \frac{x_1 x_2 - z + 3l_1}{x_1 - x_2} + \frac{2lc}{\sqrt{2z}} \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right]^2 + \frac{2\varphi(z)}{(x_1 - x_2)^2} \left[\frac{(x_1 + x_2)^2}{2z} - 1 \right]. \quad (2.5.25)$$

В уравнении (2.5.25) z – произвольно выбранное число. Если вместо него подставить один из корней многочлена третьей степени $\varphi(z)$, то есть e_1, e_2, e_3 , то из уравнения (2.5.25) получим:

$$\sqrt{2e_\alpha} \frac{x_1 x_2 - e_\alpha + 3l_1}{x_1 + x_2} + \frac{2lc}{\sqrt{2e_\alpha}} \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)}, \quad (2.5.26)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$. Учитывая выражения (2.5.3) для переменных x_1, x_2 , введём замену:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_1 x_2 + 3 l_1}{x_1 - x_2} = \frac{p^2 + q^2 + 3 l_1}{2 q i}, \\ Y &= \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2 q i}, \\ Z &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} = \frac{p}{2 q i}. \end{aligned} \quad (2.5.27)$$

Вводя обозначение

$$P_\alpha = \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (2.5.28)$$

выражение (2.5.26) переписывается в виде:

$$\sqrt{2e_\alpha}X - e_\alpha\sqrt{2e_\alpha}Y + \frac{2lc}{\sqrt{2e_\alpha}}Z = P_\alpha$$

или

$$\begin{aligned} X - e_1 Y + \frac{lc}{e_1} Z &= \frac{1}{\sqrt{2e_1}} P_1, \\ X - e_2 Y + \frac{lc}{e_2} Z &= \frac{1}{\sqrt{2e_2}} P_2, \\ X - e_3 Y + \frac{lc}{e_3} Z &= \frac{1}{\sqrt{2e_3}} P_3. \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

Исключая из системы (2.5.29) X , получаем:

$$\begin{aligned} (e_2 - e_1)Y + \frac{e_3}{2lc}(e_2 - e_1)Z &= \frac{\sqrt{e_2}P_1 - \sqrt{e_1}P_2}{\sqrt{2e_1e_2}}, \\ (e_3 - e_1)Y + \frac{e_3}{2lc}(e_3 - e_1)Z &= \frac{\sqrt{e_3}P_1 - \sqrt{e_1}P_2}{\sqrt{2e_1e_3}}. \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

Исключая из (2.5.30) Z и учитывая второе уравнение из системы (2.5.27) получим

$$q = i \left(\sqrt{2} \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha \right)^{-1}, \quad (2.5.31)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

где

$$\begin{aligned}\varphi'(e_1) &= (e_1 - e_2)(e_1 - e_3), \\ \varphi'(e_2) &= (e_2 - e_1)(e_2 - e_3), \\ \varphi'(e_3) &= (e_3 - e_2)(e_3 - e_1).\end{aligned}$$

Аналогично, исключая из системы (2.5.30) Y и учитывая третье уравнение из системы (2.5.27), а также полученное выражение для q (2.5.31), получим

$$p = - \sum \frac{\sqrt{e_\beta} \sqrt{e_\delta}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha \left(\sqrt{2} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha \right)^{-1}, \quad (2.5.32)$$

где α, β, δ принимают значения 1, 2, 3. Для нахождения r воспользуемся первым уравнением системы (2.5.1):

$$2 \frac{dp}{dt} = q r.$$

Учитывая полученную формулу для @ (2.5.32), получаем

$$r = -\sqrt{2} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_{\beta\delta} \left(\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha \right)^{-1}, \quad (2.5.33)$$

где

$$P_{\beta\delta} = \frac{P_\beta P_\delta}{s_1 - s_2} \left[\frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{(s_1 - e_\beta)(s_2 - e_\delta)} - \frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{(s_1 - e_\beta)(s_2 - e_\delta)} \right].$$

Найдём теперь выражения для $\gamma, \gamma', \gamma''$. Начнём с γ'' . Сначала из системы (2.5.29) найдём X :

$$X = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha (e_\beta + e_\delta).$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

С другой стороны, из первого уравнения системы (2.5.27):

$$X = \frac{p^2 + q^2 + 3l_1}{2qi} = (p^2 + q^2 + 3l_1)Y.$$

Откуда

$$p^2 + q^2 + 3l_1 = \frac{Y}{X} = \sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} (e_\beta + e_\delta) P_\alpha \left(\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha \right)^{-1}. \quad (2.5.34)$$

Из первого и второго уравнений Эйлера-Пуассона (2.5.1)

$$2 \frac{dp}{dt} = qr,$$

$$2 \frac{dq}{dt} = -rp - \gamma''$$

получим:

$$\gamma'' = -\frac{1}{qA} \frac{d(p^2 + q^2)}{dt}.$$

С учётом уравнения (2.5.34) выражение для γ'' примет вид:

$$\gamma'' = \frac{1}{A} \sum \frac{\sqrt{e_\beta} \sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\delta)} P_{\alpha\beta} \left(\sum \frac{\sqrt{e_\alpha}}{\varphi'(e_\alpha)} P_\alpha \right)^{-1}. \quad (2.5.35)$$

Выведенные выше формулы (2.5.32), (2.5.31), (2.5.33) и (2.5.35) дают выражение величин p, q, r, γ'' через s_1 и s_2 . Пользуясь этими формулами, можно определить выражение для γ из интеграла энергии в виде:

$$\gamma = p^2 + q^2 + \frac{1}{2}r^2 - 3l_1, \quad (2.5.36)$$

а выражение для γ' – из интеграла площадей (см. систему (9.2))

$$2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l,$$

откуда

$$\gamma' = \frac{1}{q} \left(l - \frac{1}{2} r\gamma'' - p\gamma \right). \quad (2.5.37)$$

Отметим, что выведенные выше формулы для p, q, r, γ, γ' и γ'' однозначно зависят от величин P_α и $P_{\beta\delta}$:

$$P_\alpha = \sqrt{(s_1 - e_\alpha)(s_2 - e_\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta \neq \delta),$$

$$P_{\beta\delta} = \frac{P_\beta P_\delta}{s_1 - s_2} \left[\frac{\sqrt{\Phi(s_1)}}{(s_1 - e_\beta)(s_2 - e_\delta)} - \frac{\sqrt{\Phi(s_2)}}{(s_1 - e_\delta)(s_2 - e_\beta)} \right].$$

Величины P_α и $P_{\beta\delta}$ являются симметрическими функциями от s_1 и s_2 . Поэтому, по теореме Якоби об обращении ультраэллиптических интегралов, P_α и $P_{\beta\delta}$ – однозначные функции времени. Следовательно, однозначными функциями времени и величины $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$, представляющие общее решение уравнений Эйлера-Пуассона в случае С.В. Ковалевской.

2.6. Теорема Ляпунова об однозначных решениях уравнений Эйлера-Пуассона

Случаи Эйлера, Лагранжа и С.В. Ковалевской являются единственными случаями, когда общие решения уравнений Эйлера-Пуассона представляются в однозначных функциях времени на всей комплексной плоскости. Это доказывается теоремой Ляпунова.

Домашняя



Назад

На весь экран

Покажем, что это действительно так. Для этого, используя метод малого параметра Пуанкаре, будем искать решения уравнений Эйлера-Пуассона в виде рядов по степеням малого параметра μ :

$$\begin{aligned} p &= P + p_1\mu + \dots, & \gamma &= \Gamma + \gamma_1\mu + \dots, \\ q &= Q + q_1\mu + \dots, & \gamma' &= \Gamma' + \gamma'_1\mu + \dots, \\ r &= R + r_1\mu + \dots, & \gamma'' &= \Gamma'' + \gamma''_1\mu + \dots. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Подставляя эти ряды в уравнения Эйлера-Пуассона и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ , получим уравнения для определения неизвестных функций $P, Q, R, \Gamma, \Gamma', \Gamma'', p_j, q_j, r_j, \gamma_j, \gamma'_j, \gamma''_j$ ($i = 1, 2, 3 \dots$). В частности, эти уравнения для определения функций $P, Q, R, \Gamma, \Gamma', \Gamma''$ имеют вид:

$$\begin{cases} A \frac{dP}{dt} + (C - B)QR + z'_G \Gamma' - y'_G \Gamma'' = 0, \\ B \frac{dQ}{dt} + (A - C)RP + x'_G \Gamma'' - z'_G \Gamma = 0, \\ C \frac{dR}{dt} + (B - A)PQ + y'_G \Gamma - x'_G \Gamma' = 0, \\ \frac{d\Gamma}{dt} = R\Gamma' - Q\Gamma'', \\ \frac{d\Gamma'}{dt} = P\Gamma'' - R\Gamma, \\ \frac{d\Gamma''}{dt} = Q\Gamma - P\Gamma', \end{cases} \quad (2.6.2)$$

где $x'_G = -Mg x_G$, $y'_G = -Mg y_G$, $z'_G = -Mg z_G$. Функции $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ определяются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} A \frac{dp_j}{dt} + (C - B)(Qr_j - Rq_j) + z'_G \gamma'_j - y'_G \gamma''_j = f_j^{(1)}, \\ B \frac{dq_j}{dt} + (A - C)(Rp_j - Pr_j) + x'_G \gamma''_j - z'_G \gamma_j = f_j^{(2)}, \\ C \frac{dr_j}{dt} + (B - A)(Pq_j - Qp_j) + y'_G \gamma_j - x'_G \gamma'_j = f_j^{(3)}, \\ \frac{d\gamma_j}{dt} - R\gamma'_j + Q\gamma''_j - r_j\Gamma' + q_j\Gamma'' = f_j^{(4)}, \\ \frac{d\gamma'_j}{dt} - P\gamma''_j + R\gamma_j - p_j\Gamma'' + r_j\Gamma = f_j^{(5)}, \\ \frac{d\gamma''_j}{dt} - Q\gamma_j + P\gamma'_j - q_j\Gamma + p_j\Gamma' = f_j^{(6)}, \end{cases} \quad (2.6.3)$$

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

где выражения $f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(6)}$ – полиномы от величин $p_1, \dots, p_{j-1}; q_1, \dots, q_{j-1}; r_1, \dots, r_{j-1}; \gamma_1'', \dots, \gamma_{j-1}''$ с постоянными коэффициентами, причём

$$f_1^{(1)} = 0, \dots, f_1^{(6)} = 0. \quad (2.6.4)$$

Частные решения системы (2.6.2) возьмём в виде

$$\begin{aligned} P &= \frac{a_1}{t}, & Q &= \frac{a_2}{t}, & R &= \frac{a_3}{t}, \\ \Gamma &= \frac{b_1}{t^2}, & \Gamma' &= \frac{b_2}{t^2}, & \Gamma'' &= \frac{b_3}{t^2}, \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

где a_i, b_i – постоянные величины.

Поставляя решение (2.6.5) в уравнения (2.6.2), получим уравнения для определения параметров a_i, b_i :

$$\begin{cases} -Aa_1 + (C - B)a_2a_3 + z'_G b_2 - y'_G b_3 = 0, \\ -Ba_2 + (A - C)a_3a_1 + x'_G b_3 - z'_G b_1 = 0, \\ -Ca_1 + (B - A)a_1a_2 + y'_G b_1 - x'_G b_2 = 0, \\ -2b_3 = a_2b_1 - a_1b_2, \\ -2b_2 = a_1b_3 - a_3b_1, \\ -2b_1 = a_3b_2 - a_2b_3. \end{cases} \quad (2.6.6)$$

Эти уравнения имеют две системы решений. Первая из них

$$\begin{aligned} a_1 &= -B'C', b_1 = 0, \\ a_2 &= -C'A', b_2 = 0, \\ a_3 &= -A'B', b_3 = 0, \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

где

$$A' = \sqrt{\frac{A}{B - C}}, B' = \sqrt{\frac{B}{C - A}}, C' = \sqrt{\frac{C}{A - B}},$$

Домашняя



Назад

На весь экран

возможна, когда все A, B, C различны. Вторая система соответствует предположению, что $y'_G = 0, x'^2_G + z'^2_G \neq 0$ и имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 = 0, b_1 &= \frac{-2Bi}{z'_G + ix'_G}, \\ a_2 &= 2i, b_2 = 0, \\ a_3 = 0, b_3 &= \frac{-2B}{z'_G + ix'_G}. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Подставляя решение (2.6.5) в уравнение (2.6.3), соответствующее $j = 1$, получим:

$$\begin{cases} At \frac{dp_1}{dt} + (C - B)(a_2 r_1 + a_3 q_1) + z'_G t \gamma'_1 - y'_G t \gamma''_1 = 0, \\ Bt \frac{dq_1}{dt} + (A - C)(a_3 p_1 - a_1 r_1) + x'_G t \gamma''_1 - z'_G t \gamma_1 = 0, \\ Ct \frac{dr_1}{dt} + (B - A)(a_1 q_1 - a_2 p_1) + y'_G t \gamma_1 - x'_G t \gamma'_1 = 0, \end{cases} \quad (2.6.9)$$

$$\begin{cases} t^2 \frac{d\gamma_1}{dt} - t a_3 \gamma'_1 + t a_2 \gamma''_1 - r_1 b_2 + q_1 b_3 = 0, \\ t^2 \frac{d\gamma'_1}{dt} - t a_1 \gamma''_1 + t a_3 \gamma_1 - p_1 b_2 + r_1 b_1 = 0, \\ t^2 \frac{d\gamma''_1}{dt} - t a_2 \gamma_1 + t a_1 \gamma'_1 - q_1 b_3 + p_1 b_2 = 0. \end{cases} \quad (2.6.10)$$

Так как эта система линейных дифференциальных уравнений принадлежит к классу уравнений Коши-Эйлера, то её решение ищется в виде

$$\begin{aligned} p_1 &= N_1 t^s, \gamma_1 = N_4 t^{s-1}, \\ q_1 &= N_2 t^s, \gamma'_1 = N_5 t^{s-1}, \\ r_1 &= N_3 t^s, \gamma''_1 = N_6 t^{s-1}, \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

где $N_1, \dots, N_6$ – постоянные. Подставляя эти решения в уравнения (2.6.10), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения $N_1, \dots, N_6$.

Закреть

[Домашняя](#)

[Назад](#)
[На весь экран](#)
[Заккрыть](#)

Приравняв определитель системы к нулю, получим уравнение шестой степени для нахождения показателя s :

$$\begin{vmatrix} A s & (C - B) a_3 & (C - B) a_2 & 0 & z'_G & -y'_G \\ (A - C) a_3 & B s & (A - C) a_1 & -z'_G & 0 & x'_G \\ (B - A) a_2 & (B - A) a_1 & C s & y'_G & -x_G & 0 \\ 0 & b_3 & -b_2 & s - 1 & -a_3 & a_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 & a_3 & s - 1 & -a_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 & -a_2 & a_1 & s - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.6.12)$$

Для однозначности решения (2.6.11) необходимо и достаточно, чтобы: все корни уравнения (2.6.12) были вещественными целыми числами; всякий кратный корень этого уравнения обращал в нуль все миноры определителя (2.6.12) до порядка, равного кратности этого корня (не включая его).

Пусть теперь $A \neq B \neq C$, тогда подставляя в уравнение (2.6.12) вместо $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, их выражения (2.6.7), после некоторых преобразований получим

$$s(s - 1)^3(s^2 - 4) = 0.$$

Так как корни этого уравнения – действительные целые числа и корень $s = 1$ – трёхкратный, то для однозначности рассматриваемого решения необходимо и достаточно, чтобы минор четвертого порядка, получаемый из определителя (2.6.12) при $s = 1$ вычеркиванием второго и третьего столбцов и третьей и четвертой строки, должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A & 0 & z'_G & -y'_G \\ A'B'(C - A) & -z'_G & 0 & x'_G \\ 0 & -A'B' & 0 & B'C' \\ 0 & C'A' & -B'C' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$x'_G \sqrt{A(B-C)} + y'_G \sqrt{B(C-A)} + z'_G \sqrt{C(A-B)} = 0.$$

Обозначая подвижные оси координат так, чтобы $A > B > C$, убеждаемся, что средний радикал – мнимое число. Поэтому при действительных значениях A, B, C, x_G, y_G, z_G последнее уравнение справедливо только в двух случаях:

$$x_G = y_G = z_G = 0, \quad (2.6.13)$$

$$y'_G = 0, x'_G \sqrt{A(B-C)} + z'_G \sqrt{C(A-B)} = 0. \quad (2.6.14)$$

Во втором случае – случае Гесса-Аппельерота – общее решение уравнений (2.6.3) не приводит к однозначным функциям времени. Покажем это.

Подставим в определитель (2.6.12) вместо $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, их выражения (2.6.8) и представим выражение (2.6.12) в виде $D_1 D_2 = 0$, где

$$D_1 = \begin{vmatrix} Bs & -z'_G & x'_G \\ \frac{2B}{z'_G + i x'_G} & s-1 & 2i \\ -\frac{2Bi}{z'_G + i x'_G} & -2i & s-1 \end{vmatrix} = B(s+2)(s-1)(s+3), \quad (2.6.15)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} As & 2(C-B)i & z'_G \\ 2(B-A)i & Cs & x'_G \\ -\frac{2Bi}{z'_G + i x'_G} & \frac{2Bi}{z'_G + i x'_G} & s-1 \end{vmatrix} = (s-2)f(s), \quad (2.6.16)$$

$$f(s) = ACs(s+1) + 2(B-A)(C-2B) - 2B(A-C) \frac{x'_G(x'_G + iz'_G)}{x_G'^2 + z_G'^2}. \quad (2.6.17)$$

При условиях $A > C$ и $x'_G \neq 0, z'_G \neq 0$ уравнение $f(s) = 0$ не имеет вещественных корней. Что и доказывает высказанное утверждение. Поэтому, если $A \neq B \neq C$,

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

единственно возможным случаем, в котором рассматривается решение уравнения (2.6.3) при $j = 1$ будет однозначным, является случай Эйлера.

Предположим теперь, что числа A, B, C не все различны, например, $A = B$. Тогда не нарушая общности, можно выбрать в экваториальной плоскости эллипсоида инерции такие оси Oxy , что $y'_G = 0$. Подставляя в определитель (2.6.12) вместо $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, их выражения (2.6.8) и полагая $y'_G = 0$ получим уравнения (2.6.14), в котором D_1 и D_2 находятся по формулам (2.6.15)-(2.6.17). Если исключить случай $s = 2$, уравнение $D_2 = 0$ ($f(s) = 0$) может иметь действительные корни (при $A = B$) только в трёх случаях:

- 1) Когда $x'_G = 0$, т.е. когда $A = B$, $x_G = y_G = 0$. (случай Лагранжа).
- 2) Когда $A = C$, т.е. когда $A = B = C$ и, следовательно, $x_G = y_G = 0$ (случай Лагранжа).
- 3) Когда, наконец $z_G = 0$.

В последнем случае уравнение $f(s) = 0$ при $A = B$ приводится к уравнению

$$s(s+1) = 2(n-1), \quad (2.6.18)$$

где $n = \frac{A}{C}$. Так как для существования однозначного решения s должно быть целым числом, то из уравнения (2.6.18) следует, что n должно быть целым числом. При $z_G = 0$ система (2.6.6) имеет решение аналогичное решению (2.6.8):

$$a_1 = 0, b_1 = \frac{-2C}{z'_G + i y'_G},$$

$$a_2 = 0, b_2 = \frac{-2Ci}{z'_G + i y'_G},$$

$$a_3 = 2i, b_3 = 0.$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Это решение можно получить из решения (2.6.8) круговой перестановкой величин $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, x'_G, y'_G, z'_G, A, B, C$. Следовательно, и соответствующее уравнение для s , полученное из уравнения $f(s) = 0$, будет

$$A s (s + 1) + 2 (! - B)(-2C) - 2 !(-A) \frac{y'_G(y'_G + i x'_G)}{x'^2_G + y'^2_G} = 0.$$

При $A = B$ это уравнение приводится к следующему:

$$(s - \frac{2}{n} + 2)(s + \frac{2}{n} - 1) = 0,$$

а требование целочисленности корней сводится к требованию, чтобы $\frac{2}{n}$ было целым числом. Следовательно, n и $\frac{2}{n}$ должны быть целыми числами, а это возможно только при $n = 1$ и при $n = 2$. Если $n = 1$, приходим к случаю Лагранжа, а если $n = 2$, – к случаю Ковалевской.

Таким образом, за исключением трёх случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, рассматриваемое решение уравнений (2.6.10) при $j = 1$, а следовательно, и решение (2.6.1), не приводит к однозначным функциям времени на всей комплексной плоскости переменного t . Отсюда вытекает, что необходимое условие существования однозначного общего решения уравнений Эйлера-Пуассона выполняется только в указанных трёх случаях.

Таким образом, справедлива теорема Ляпунова: общее решение уравнений Эйлера-Пуассона, зависящее от пяти произвольных постоянных, выражается в однозначных функциях времени только в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

2.7. Случай Делоне и Бобылева-Стеклова

Как было показано выше, интегрирование уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае С.В Ковалевской сводится к обра-

Закреть

щению ультраэллиптических интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \int \frac{ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} &= C_5, \\ \int \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{\Phi(s_1)}} + \int \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{\Phi(s_2)}} &= i\sqrt{2t} + C_6, \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

где

$$\Phi(s) = (s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)(s - e_4)(s - e_5),$$

причем двумя известными корнями будем полагать корни

$$e_4 = 3l_1 - k, \quad e_5 = 3l_1 + k. \quad (2.7.2)$$

В общем случае, когда все корни многочлена $\Phi(s)$ различны, зависимость величин $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ от времени выражается в абелевых функциях, весьма сложных для геометрического исследования движения.

Если же многочлен $\Phi(s)$ имеет кратный корень, то ультраэллиптические интегралы (2.7.1) вырождаются в эллиптические и решение задачи, естественно, упрощается.

В данном параграфе будут рассмотрены два случая вырождения, в которых оказалось возможным при определенных предположениях найти явные зависимости переменных $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ и углов Эйлера от времени и достаточно просто провести подробный анализ движения.

2.7.1. Случай Делоне

Н.Б. Делоне рассмотрел случай, когда $e_4 = e_5$ т.е., как следует из равенств (2.7.2), когда $k = 0$. В этом случае система уравнений Эйлера-Пуассона в безразмерных переменных, $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$, будет, кроме трех первых общих интегралов

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

$$\left. \begin{aligned} 2(p^2 + q^2) + r^2 &= 2\gamma + 6l_1, \\ 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' &= 2l, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.7.3)$$

иметь ещё два частных интеграла

$$p^2 - q^2 + \gamma = 0, \quad (2.7.4)$$

$$2pq + \gamma' = 0, \quad (2.7.5)$$

получающихся при $k = 0$ из последнего интеграла (2.5.2) для случая Ковалевской, переписанного в виде

$$(p^2 - q^2 + \gamma)^2 + (2pq + \gamma')^2 = k^2. \quad (2.7.6)$$

Из последнего интеграла (2.7.3) и интегралов (2.8.2) и (2.7.5) найдем

$$\gamma'^2 = 1 - \gamma^2 - \gamma'^2 = 1 - (p^2 - q^2)^2 - 4p^2q^2 = 1 - (p^2 + q^2)^2. \quad (2.7.7)$$

Из первого интеграла (2.7.3) и интеграла (2.8.2) будем иметь

$$4p^2 + r^2 = 6l_1. \quad (2.7.8)$$

Выразим теперь переменные $q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ через переменную величину p . Для определенности будем предполагать, что $r_0 > 0$ и $q_0 > 0$. Из формул (2.8.2), (2.7.5), (2.7.7) и (2.7.8) следует, что для этого достаточно найти q как функцию p . Перепишем второй интеграл (2.7.3) в виде

$$r\gamma'' = 2l - 2(p\gamma + q\gamma') \quad (2.7.9)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Заккрыть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

и, подставляя в него вместо величин $\gamma, \gamma', \gamma''$ и r их выражения из формул (2.8.2), (2.7.5), (2.7.7) и (2.7.8), получим после возведения в квадрат уравнение

$$6 l_1(p^2 + q^2)^2 + 8 l p(p^2 + q^2) + 4p^2 + 4 l^2 - 6 l_1 = 0.$$

Из этого уравнения найдем

$$q = \sqrt{-p^2 - \frac{2l}{3l_1}p \pm \frac{\sqrt{6l_1 - 4p^2}}{6l_1} \sqrt{6l_1 - 4l^2}}. \quad (2.7.10)$$

Отметим, что для действительного движения должно выполняться неравенство $3l_1 \geq 2l^2$. Зависимость же величины p от времени можно найти из уравнения

$$2dp/dt = qr, \quad (2.7.11)$$

подставив в него вместо q и r правые части выражения (2.7.10), и выражения

$$r = \sqrt{6l_1 - 4p^2},$$

полученного из соотношения (2.7.8). Однако проще от переменной p перейти к новой переменной v по формуле

$$\sqrt{6l_1 - 4p^2} = \sqrt{6l_1} + 2pv. \quad (2.7.12)$$

Тогда величины p, q, r могут быть выражены через v следующим образом:

$$\begin{aligned} p &= -v\sqrt{6l_1}/(v^2 + 1), \\ r &= (1 - v^2)\sqrt{6l_1}/(v^2 + 1), \\ q &= \frac{1}{v^2 + 1} \sqrt{\pm \frac{1}{\sqrt{6l_1}} \cdot \sqrt{6l_1 - 4l^2}(1 - v^4) - 6l_1 v^2 + \frac{4l}{\sqrt{6l_1}} v (v^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

С помощью формул (2.7.13) величины $\gamma, \gamma', \gamma''$ можно также выразить через переменную v . Зависимость же величины v от времени на основании полученных выше формул и уравнения (2.7.11) находится из уравнения

$$2 dv/dt = -\sqrt{R(v)} \quad (v_0 = 0), \quad (2.7.14)$$

где

$$R(v) = \pm (1 - v^4) \sqrt{1 - \frac{2l^2}{3l_1} - 6l_1v^2 + \frac{4l}{\sqrt{6l_1}}v(v^2 + 1)}. \quad (2.7.15)$$

Так как $R(v)$ – полином четвертой степени относительно v , то обращение интеграла

$$\frac{t - t_0}{2} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{\sqrt{R(v)}}, \quad (2.7.16)$$

приводит к эллиптическим функциям времени. Следовательно, и величины $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ с помощью полученных выше формул могут быть выражены в эллиптических функциях времени.

Предположим теперь, что в рассматриваемом случае твердому телу в начальный момент времени ($t = 0$) сообщена большая угловая скорость вокруг оси, близкой к оси Oz , и исследуем получающееся при этом решение. Пусть ось Oz в начальный момент времени составляет с вертикалью угол θ_0 , $0 < \theta_0 \leq \pi/2$ (случай $\theta_0 = 0$ будет изучен дополнительно), а ось Oy будет горизонтальна. Тогда

$$\gamma_0 = \sin \theta_0, \quad \gamma'_0 = 0, \quad \gamma''_0 = \cos \theta_0, \quad (2.7.17)$$

а два интеграла (2.8.2) и (2.7.5) будут удовлетворены при условии

$$p_0 = 0, \quad q_0^2 = \gamma_0. \quad (2.7.18)$$

[Домашняя](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Назад](#)
[На весь экран](#)
[Закреть](#)

Предполагая, как и выше, что

$$q_0 > 0 \text{ и } r_0 > 0 \text{ (} r_0 \text{— большая величина)} \quad (2.7.19)$$

получим полную совокупность начальных условий.

Из формул (2.7.8) и (2.7.9) получим соотношения

$$6 l_1 = r_0^2, \quad 2l = r_0 \gamma_0'', \quad 6 l_1 - 4l^2 = r_0^2 \gamma_0^2, \quad (2.7.20)$$

с помощью которых выражения (2.7.13) и (2.7.14) примут вид

$$\begin{cases} p = -r_0 \mu (\mu^2 + \sigma^2)^{-1} \sigma, \\ q = r_0 \mu (\mu^2 + \sigma^2)^{-1} \sqrt{R(\sigma)}, \\ r = r_0 (\mu^2 - \sigma^2) (\mu^2 + \sigma^2)^{-1}, \end{cases} \quad (2.7.21)$$

$$\begin{cases} 2 d\sigma/dt = -r_0 \sqrt{R(\sigma)}, \\ R(\sigma) = -(\sigma^4 - 2\alpha \mu \sigma^3 + \sigma^2 - 2\alpha \mu^3 \sigma - \mu^4), \\ \alpha = \gamma_0'' \gamma_0^{-1} \quad (\sigma_0 = 0). \end{cases} \quad (2.7.22)$$

В этих формулах

$$v = \sigma/\mu, \quad \mu = \sqrt{\gamma_0/r_0}, \quad (2.7.23)$$

в формуле для $R(\sigma)$, получающейся из последней формулы (2.7.13), знак плюс под радикалом перед первым членом выбран в силу начальных условий (2.7.18). Отметим, что вследствие предположений, величина μ — малый параметр. Проинтегрируем уравнение (2.7.22)

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{R(\sigma)}} = -\frac{r_0}{2} t. \quad (2.7.24)$$

Чтобы получить зависимость величины σ от времени, можно привести интеграл в левой части соотношения (2.7.24) к стандартному виду Лежандра и затем его

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

обращение выразить в известных эллиптических функциях Якоби. Однако проще определить зависимости величины σ от времени методом, предложенным Л.Н. Сре-тенским. Для этой цели найдем разложение корней $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ уравнения $R(\sigma) = 0$ в ряды по малому параметру μ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\mu^2 + \alpha \mu^3 + \mu^4(\dots), & \sigma_2 &= \mu^2 + \alpha \mu^3 + \mu^4(\dots), \\ \sigma_3 &= -i + \alpha \mu + \mu^2(\dots), & \sigma_4 &= i + \alpha \mu + \mu^2(\dots) \end{aligned} \right\}, \quad (2.7.25)$$

и перейдем к новой переменной u

$$2\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_1) \cos u = \mu^2 \cos u + \mu^3 \alpha + \mu^4(\dots), \quad (2.7.26)$$

$$u_0 = \pi/2 + \mu\alpha + \mu^2(\dots). \quad (2.7.27)$$

В зависимости от этой переменной u полином

$$R(\sigma) = -(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_4) = -(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)[\sigma^2 - \sigma(\sigma_3 + \sigma_4) + \sigma_3\sigma_4]_4 \quad (2.7.28)$$

будет иметь вид

$$R(\sigma) = (1/4)(\sigma_2 - \sigma_1)^2 \sin^2 u [\sigma_3\sigma_4 - \sigma(\sigma_3 + \sigma_4) + \sigma^2] = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4}\right)^2 [1 + \mu^2(\dots)] \sin^2 u. \quad (2.7.29)$$

Таким образом, соотношение (2.7.24) можно переписать в виде

$$\int_{u_0}^u [1 + \mu^2(\dots)] du = \frac{r_0}{2} t \quad (d\sigma = -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin u du). \quad (2.7.30)$$

Учитывая (2.7.27), найдем

$$u = \frac{\pi}{2} + \frac{r_0}{2} t + \mu(\dots). \quad (2.7.31)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Подставляя выражение (2.7.26) в формулы (2.7.21) и учитывая (2.7.23), найдем зависимости $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ от переменной u и, следовательно, от времени t :

$$\begin{cases} p = -\sqrt{\gamma_0}(\cos u + \mu \alpha) + \mu^2(\dots), \\ q = \sqrt{\gamma_0} \sin u + \mu^2(\dots), \\ r = r_0 + \mu(\dots), \\ \gamma = -\gamma_0(\cos 2u + 2\mu \alpha \cos u), \\ \gamma' = \gamma(\sin 2u + 2\mu \alpha \sin u), \\ \gamma'' = \gamma_0'' - 2\mu \gamma_0 A \cos u + \mu^2(\dots). \end{cases} \quad (2.7.32)$$

Анализ движения твердого тела проще всего проводить с помощью углов Эйлера θ, φ, ψ , определяемых уравнениями:

$$A \cos \theta = \gamma'', \quad \frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{d\psi}{dt} \cos \theta, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1 - \gamma''^2}. \quad (2.7.33)$$

Из первой формулы (2.7.33) и последней формулы (2.7.32) вытекает следующее выражение для углов нутации:

$$\theta = \theta_0 + 2\mu \cos u + \mu^2(\dots). \quad (2.7.34)$$

Подставляя выражения (2.7.32) во вторую формулу (2.7.33), перепишем ее на основании интегралов (2.8.2), (2.7.5) и тривиального интеграла (2.7.3) в виде

$$d\psi/dt = -p/(p^2 + q^2). \quad (2.7.35)$$

Интегрируя, найдем формулу для угла прецессии

$$\psi = \psi_0 + \frac{2\mu}{\gamma_0} \sin u + \frac{\mu^2 \alpha}{\gamma_0} \sin 2u + \mu^3(\dots) \quad (2.7.36)$$

Закреть

Угол собственного вращения φ найдем из третьего соотношения (2.7.33)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + r_0 t + \mu(\dots). \quad (2.7.37)$$

Рассмотрим теперь опущенное выше условие $\theta_0 = 0$. При этом условии из формул (2.7.17) и (2.7.18) вытекают соотношения

$$p_0 = q_0 = \gamma_0 = \gamma'_0 = 0, \gamma''_0 = 1, 6l_1 - 4l^2 = 0, \quad (2.7.38)$$

Тогда из формул (2.7.19), (2.7.20), (2.7.8), (2.7.10) следует

$$q = -\sqrt{-p(p + 2\mu_1)}, \quad r = r_0 \sqrt{1 - 4\mu_1^2 p^2}, \quad (2.7.39)$$

где

$$\mu_1 = 1/r_0. \quad (2.7.40)$$

Знак минус перед первым из радикалов выбран с учетом условия $q_0 = 0$ и условия $\dot{q}_0 = -\gamma''_0 < 0$, получающегося из второго уравнения системы уравнений Эйлера-Пуассона в безразмерных переменных в случае Ковалевской $2\frac{dq}{dt} = -pr - \gamma''$ (см. §9) и соотношений (2.7.38) и (2.7.19). Для определения зависимости величины p от времени перепишем уравнение (2.7.11) при помощи соотношений (2.7.39) в виде

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{\sqrt{f(\xi)}} = -\frac{r_0}{2} dt, & \xi = 2\mu_1 p, \\ f(\xi) = (1 - \xi^2)(-\xi^2 - 4\mu_1^2 \xi) & (\xi_0 = 0). \end{cases} \quad (2.7.41)$$

Так как корни уравнения $f(\xi) = 0$ будут

$$\xi_1 = +1, \xi_2 = -1, \xi_3 = 0, \xi_4 = -4\mu_1^2, \quad (2.7.42)$$

и $\xi = 0$, то движение будет происходить только при условии, что

$$\xi_4 < \xi < \xi_3. \quad (2.7.43)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Поэтому аналогично сделанному выше, введем новую переменную v

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4) + \frac{1}{2}(\xi_3 - \xi_4) \cos v = 2\mu_1^2(\cos v - 1) \quad (2.7.44)$$

и, подставляя полученное соотношение в уравнение (2.7.41), найдем его после интегрирования

$$v = (1/2)r_0 t + \mu_1^3(\dots). \quad (2.7.45)$$

Из формул (2.7.39), (2.7.41), (2.7.44) и первых интегралов (2.8.2) и (2.7.5) будем иметь

$$\begin{cases} p = -\mu_1 (1 - \cos v), \\ q = -\mu_1 \sin v, \\ r = r_0 + \mu_1^3(\dots), \\ \gamma = -\mu_1^2 (1 - 2 \cos v + \cos 2v), \\ \gamma' = -\mu_1^2 (2 \sin v - \sin 2v), \\ \gamma'' = 1 - 2\mu_1^4 (1 - \cos v)^2 + \mu_1^8(\dots). \end{cases} \quad (2.7.46)$$

Снова используя соотношения для углов Эйлера θ, φ, ψ , получаемые на основании формул (2.7.33) и (2.7.46), найдем

$$\begin{cases} \theta = 2\mu_1^2 (1 - A \cos v) + \mu_1^6(\dots), \\ \psi - \varphi = \frac{1}{2}r_0 t, \\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}r_0 t + \mu_1^3(\dots). \end{cases} \quad (2.7.47)$$

Формулы (2.7.34), (2.7.36), (2.7.37) и (2.7.47) позволяют в достаточной мере проследить за движением гироскопа Ковалевской в случае Делоне и выявить зависимость этого движения от начальных условий.

2.7.2. Случай Бобылева-Стеклова

Рассмотрим ещё одно частное решение уравнений движения для случая Ковалевской, вытекающее из случая интегрируемости Бобылёва-Стеклова. Уравнениям (2.5.1), в которых снова для удобства опустим тильды, удовлетворяет частное решение (??). Для этого частного решения три первых интеграла (2.5.2), переписанных в виде

$$\begin{cases} 2(p^2 + q^2) + r^2 - 2\gamma = 6l_1, \\ 2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = 2l, \\ (p^2 - q^2 + \gamma)^2 + (2pq + \gamma')^2 = k^2, \end{cases} \quad (2.7.48)$$

вырождаются в один:

$$\gamma - \frac{\gamma''^2}{2p_0^2} = \gamma_0 - \frac{1}{2} \frac{\gamma_0''^2}{p_0^2}. \quad (2.7.49)$$

Другим первым интегралом останется тривиальный интеграл

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \quad (2.7.50)$$

Для определенности будем считать, что

$$\gamma_0 \geq 0, \quad \gamma'_0 = 0, \quad \gamma''_0 \geq 0, \quad (2.7.51)$$

и предположим сначала, что

$$0 < \gamma''_0 < 1 \quad (2.7.52)$$

(случаи $\gamma''_0 = 0$ и $\gamma''_0 = 1$ будут разобраны ниже). Введем параметр μ

$$\mu = \gamma''_0 / r_0. \quad (2.7.53)$$

Тогда из последнего соотношения (??) получим

$$p_0 = -\mu, \quad (2.7.54)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

а из интегралов (2.7.49) и (2.7.50) найдем

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_0 + \frac{1}{2\mu^2}(\gamma''^2 - \gamma_0''^2), \\ \gamma' = \sqrt{1 - \gamma''^2 - \left[\gamma_0 + \frac{1}{2\mu^2}(\gamma''^2 - \gamma_0''^2)\right]^2}. \end{cases} \quad (2.7.55)$$

В этой формуле и в последнем соотношении (??) величины r, γ, γ' выражены через переменную γ'' . Зависимость же γ'' от времени можно найти из последнего уравнения (2.5.1), которое перепишем в следующем виде:

$$\frac{d\gamma''}{dt} = -p_0 \sqrt{1 - \gamma''^2 - \left[\gamma_0 + \frac{1}{2\mu^2}(\gamma''^2 - \gamma_0''^2)\right]^2}. \quad (2.7.56)$$

После введения нового времени τ

$$t/\mu = \tau, \quad (2.7.57)$$

это уравнение на основании формулы (2.7.54) примет вид

$$\begin{cases} d\gamma''/d\tau = \sqrt{f(\gamma''^2)}, \\ f(\gamma''^2) = (1 - \gamma''^2)\mu^4 - [\mu^2\gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma''^2 - \gamma_0''^2)]^2 = -\frac{1}{4}(\gamma''^2 - h_1)(\gamma''^2 - h_2), \end{cases} \quad (2.7.58)$$

где

$$h_j = \gamma_0''^2 - 2\mu^2\sqrt{1 - \gamma_0''^2} - 2\mu^4 - (-1)^j 2\mu^2\sqrt{1 - \gamma_0''^2 + 2\mu^2\sqrt{1 - \gamma_0''^2} + \mu^4}, \quad (j = 1, 2). \quad (2.7.59)$$

Интегрируя полученное уравнение и обращая интеграл (??) приходим к эллиптическим функциям Якоби.

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Предположим теперь, что рассматриваемому твердому телу в начальный момент времени ($t = 0$) сообщена большая угловая скорость вокруг оси, близкой к оси Oz , т. е. что r_0 – большая величина, а параметр μ – малый. В этом случае постоянные h_j , как это следует из формул (2.7.59), при достаточно малом μ положительны, и, следовательно

$$h_j = \chi_j^2 (\chi_1^2 > \chi_2^2), \quad (j = 1, 2). \quad (2.7.60)$$

Тогда делая в уравнении (2.7.58) замену

$$\gamma''^2 = \chi_2^2 \sin^2 \xi + \chi_1^2 \cos^2 \xi, \quad (2.7.61)$$

приходим к эллиптическому интегралу первого рода

$$\int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}} = u, \quad k^2 = 1 - \frac{\chi_2^2}{\chi_1^2}, \quad (2.7.62)$$

$$u = -\frac{\chi_1}{2} \tau + u_0, \quad u_0 = \int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}. \quad (2.7.63)$$

Величина ξ_0 определяется из уравнения

$$\gamma_0''^2 = \chi_2^2 \sin^2 \xi_0 + \chi_1^2 \cos^2 \xi_0. \quad (2.7.64)$$

Обращение интеграла (2.7.62) в соответствии с определением полного эллиптического интеграла приводит к эллиптической функции

$$\sin \xi = \operatorname{sn} u \quad (\xi = \operatorname{am} u). \quad (2.7.65)$$

Подставляя найденное выражение в формулу (2.7.61) и используя функцию Якоби

$$k^2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{dn}^2 v = 1$$

и соотношение (2.7.63), получим

$$\gamma'' = \chi_1 \operatorname{dn} u, \quad (2.7.66)$$

с помощью которой остальные соотношения примут вид

$$\begin{cases} p = -\mu, & q = 0, & r = \frac{\chi_1}{\mu} \operatorname{dn} u, \\ \gamma = \sqrt{1 - \gamma_0'^2} + \frac{\chi_1^2 \operatorname{dn}^2 u - \gamma_0'^2}{2\mu^2}, & \gamma' = \frac{k^2 \chi_1^2}{2\mu^2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{cases} \quad (2.7.67)$$

Для получения последней формулы (2.7.67) мы воспользовались соотношением, получаемым из (2.7.58):

$$\gamma' = \frac{1}{2\mu^2} \sqrt{-(\gamma'^2 - \chi_1^2)(\gamma'^2 - \chi_2^2)}.$$

Приведем разложение по степеням малого параметра μ и величин :

$$k^2 = 4\mu^2 \frac{\sqrt{1 - \gamma_0'^2} + \mu^2}{\chi_1^2} + \mu^6(\dots), \chi_1 = \gamma_0'' + \mu^4(\dots). \quad (2.7.68)$$

Для получения разложения по μ величины u_0 воспользуемся формулой (2.7.66)

$$\gamma_0'' = \chi_1 \operatorname{dn} u_0 \quad (2.7.69)$$

Предварительно найдем разложение величины $\operatorname{dn} u$ в ряд по степеням k^2 , для чего используем выражения для эллиптических функций Якоби

$$\operatorname{dn} u = \sqrt[4]{1 - k^2} \theta_3 \left[\frac{\pi u}{2K} \right] / \theta_4 \left[\frac{\pi u}{2K} \right]. \quad (2.7.70)$$

Из формулы (2.7.68) следует, что величина k мала вместе с μ . Поэтому разложение параметров K, q^* , входящих в формулу (2.7.70), имеет следующий вид

$$K = \pi/2 + k^2(\dots), q^* = k^2/16 + k^4(\dots), (q^* = e^{-\pi K'/K}). \quad (2.7.71)$$

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Из (2.7.70) получим

$$\operatorname{dn} u = 1 - \frac{k^2}{4}(1 - \cos 2u) + k^4(\dots). \quad (2.7.72)$$

Следовательно,

$$\operatorname{dn} u_0 = 1 - \frac{k^2}{4}(1 - \cos 2u_0) + k^4 + (\dots). \quad (2.7.73)$$

Кроме того, из (2.7.59) и (2.7.60) найдем

$$\gamma_0''/\chi_1 = 1 + k^4(\dots). \quad (2.7.74)$$

Приравнивая на основании формулы (2.7.69) правые части разложений (2.7.73) и (2.7.74), будем иметь соотношение

$$\cos 2u_0 = 1 + k^2(\dots), \quad (2.7.75)$$

из которого получим

$$u_0 = k^2(\dots). \quad (2.7.76)$$

Используя формулу (2.7.76) и вторую из формул (2.7.63), вычислим выражение для $\cos 2u$, которое понадобится ниже:

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos(-\chi_1\tau + 2u_0) = \cos \chi_1\tau \cos 2u_0 + \sin \chi_1\tau \sin 2u_0 = \\ &= \cos r_0 t + k^2(\dots). \end{aligned} \quad (2.7.77)$$

Таким образом, подставляя разложение (2.7.72) в формулы (2.7.67) и используя соотношение

$$-\frac{1}{k^2} \frac{d \operatorname{dn} u}{d u} = \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

Домашняя



Назад

На весь экран

найдем с помощью (2.7.77) выражения для $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ в виде рядов по степеням малого параметра μ .

Выразим теперь углы Эйлера θ, φ, ψ с помощью (2.7.33). Из первой формулы (2.7.33) и формул (2.7.66), (2.7.68), (2.7.70) и (2.7.77) получим

$$\cos \theta = \gamma_0'' \left[1 + \mu^2 \frac{\sqrt{1 - \gamma_0''^2}}{\gamma_0''^2} (\cos r_0 t - 1) \right] + \mu^4 (\dots) \quad (2.7.78)$$

Для определения угла прецессии ψ преобразуем вторую формулу (2.7.33) с помощью соотношений (2.7.66), (2.7.67) к виду

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\nu}{1 + n \operatorname{sn}^2 u} \right), \quad (2.7.79)$$

где

$$\nu = \frac{1 - \gamma_0''^2 + 2\mu^2 \sqrt{1 - \gamma_0''^2}}{1 - \chi_1^2}, \quad n = \frac{k^2 \chi_1^2}{1 - \chi_1^2}. \quad (2.7.80)$$

Заменяя в уравнении (2.7.79) dt на du по формулам (2.7.57) и (2.7.63) и интегрируя его, получим

$$\psi - \psi_0 = \frac{1}{\chi_1} \left[J_1 u + J_2 \ln \frac{\theta(u - a)}{\theta(u + a)} \right], \quad (2.7.81)$$

где

$$k^2 \operatorname{sn}^2 a = -n \quad \left(\operatorname{sn}^2 a = -\frac{\chi_1^2}{1 - \chi_1^2} = -m \right) \quad (2.7.82)$$

$$J_1 = -1 + \nu \left[1 + \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right], \quad J_2 = \frac{\nu}{2} \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}. \quad (2.7.83)$$

Закреть

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Так как $n > 0$, то из формулы (2.7.82) следует, что $\operatorname{sn} a$ – мнимое число и, следовательно, число a – мнимое. Поэтому числа $u \pm a$ будут комплексно-сопряженными числами и функции $\theta(u \pm a)$ – комплексно-сопряженными функциями. Таким образом, можно положить

$$\begin{aligned} \theta(u+a) &= \rho e^{i\chi}, & \theta(u-a) &= \rho e^{-i\chi} \\ \left(\ln \frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)} \right) &= -2i\chi. \end{aligned} \quad (2.7.84)$$

Найдем величину χ . Воспользуемся теоремой сложения тэта-функций. Имеем

$$\begin{aligned} \theta(u+a) &= 1 - 2q^* \cos \frac{\pi(u+a)}{K} + q^{*4}(\dots) = \\ &= 1 - 2q^* \cos \frac{\pi u}{K} \cos \frac{\pi a}{K} + 2q^* \cos \frac{\pi u}{K} \sin \frac{\pi a}{K} + q^{*4}(\dots), \end{aligned} \quad (2.7.85)$$

где разложение величин q^* , K в ряды по степеням k^2 приведено в (2.7.71). Найдем теперь разложение величин $\cos 2a$, $\sin 2a$, для чего воспользуемся тождеством

$$1 - \operatorname{dn}^2 u = k^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

и преобразуем формулу (2.7.72) к виду

$$k^2 \operatorname{sn}^2 a = \frac{k^2}{2} (1 - \cos 2a) + k^4(\dots).$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение (2.7.82), окончательно получим

$$\begin{cases} \cos 2a = (1 + 2m) + k^2(\dots), \\ \sin 2a = 2i\sqrt{m(m+1)} + k^2(\dots). \end{cases} \quad (2.7.86)$$

Из (??) следует, что $\pi/K = 2 + k^2(\dots)$, поэтому

$$\sin \pi \eta / K = \sin 2\eta + k^2(\dots), \quad \cos \pi \eta / K = \cos 2\eta + k^2(\dots) \quad (2.7.87)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

и по формуле (??)

$$\theta(u+a) = \left[1 - \frac{k^2}{8}(1+2m)\cos 2u \right] + i \frac{k^2}{4} \sqrt{m(m+1)} \sin 2u + k^4(\dots). \quad (2.7.88)$$

Правая часть выражения (2.7.88) – комплексное число. Поэтому его аргумент χ определяется по формуле

$$\chi = \operatorname{arctg} \left[\frac{k^2}{4} \sqrt{m(m+1)} \sin 2u + k^4(\dots) \right]. \quad (2.7.89)$$

Для определения разложения величин J_1, J_2 воспользуемся формулой

$$\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} = \frac{2\pi}{K} q^* \sin \frac{\pi a}{K} + q^{*2}(\dots), \quad (2.7.90)$$

которую, принимая во внимание выражения (2.7.71) и (2.7.86), представим следующим образом:

$$\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} = \frac{ik^2}{2} \sqrt{m(m+1)} + k^4(\dots). \quad (2.7.91)$$

Из (2.7.82) имеем

$$\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} = \frac{i\sqrt{m}}{\sqrt{1+m}} + k^2(\dots). \quad (2.7.92)$$

Подставляя полученные выражения в (2.7.83), найдем

$$\begin{aligned} J_1 &= \mu^4(\dots), \\ J_2 &= \frac{i\sqrt{m}}{2\sqrt{1+m}} + \mu^2(\dots). \end{aligned} \quad (2.7.93)$$

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Учитывая (2.7.84) и (2.7.89), получим выражение для угла прецессии

$$\psi - \psi_0 = -\frac{\mu^2 \sin r_0 t}{\gamma_0'' \sqrt{1 - \gamma_0''^2}} + \mu^3(\dots). \quad (2.7.94)$$

Последнее уравнение (2.7.33) для определения угла собственного вращения φ можно, учитывая полученные выше результаты, представить в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = r_0 \left[1 + \mu^2 \frac{\sqrt{1 - \gamma_0''^2}}{\gamma_0''^2} (\cos \theta r_0 t - 1) \right] + \mu^2(\dots).$$

Интегрируя это уравнение при условии $\varphi_0 = \pi/2(\text{tg} \varphi_0 = \gamma_0/\gamma_0')$, будем иметь

$$\varphi - \frac{\pi}{2} = (r_0 - \frac{1}{r_0} \sqrt{1 - \gamma_0''^2}) t + \mu^2(\dots). \quad (2.7.95)$$

Из формул (2.7.78), (2.7.94) и (2.7.95) просто найти движение твердого тела в рассматриваемом случае.

Изучим теперь движение тела при отброшенных ранее условиях $\gamma_0'' = 0$ и $\gamma_0'' = 1$. При $\gamma_0'' = 0$ ($r_0 \neq 0$) из формул (??) получим

$$p = p_0 = 0, \quad \gamma'' = 0. \quad (2.7.96)$$

Эти условия, совместно с условием $q = 0$, приводят к случаю движения физического маятника. При $\gamma_0'' = 1$ имеем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 = \gamma_0' = 0, \quad \chi_1^2 = 1, \quad \chi_2^2 = 1 - 4\mu^4, \\ k = 2\mu^2, \quad u = -r_0 t/2 + k^2(\dots), \end{aligned} \right\} \quad (2.7.97)$$

с помощью которых найдем углы Эйлера θ , φ , ψ . Из формул (2.7.69) и (2.7.73) получим соотношение

$$\gamma'' = \text{dn } u = 1 - \frac{k^2}{2} \sin^2 u + k^4(\dots), \quad (2.7.98)$$

из которого определим угол нутации

$$\cos \theta = 1 - 2\mu^4 \sin^2(r_0 t/2) + \dots, \quad \theta = 2\mu^2 \sin(r_0 t/2) + \dots \quad (2.7.99)$$

Угол прецессии ψ найдем из уравнения

$$d\psi/dt = p_0 \gamma / (1 - \gamma'^2). \quad (2.7.100)$$

Подставляя в него выражение

$$p_0 \gamma = -\frac{c}{2\mu} (\gamma'^2 - 1), \quad (2.7.101)$$

получающееся с помощью формул (2.7.54), (2.7.55), имеем

$$\psi - \psi_0 = r_0 t/2. \quad (2.7.102)$$

Для определения угла собственного вращения перепишем, используя полученные выше соотношения, уравнение (2.7.33) для φ в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = (r_0/2) + \mu^3(\dots). \quad (2.7.103)$$

Формулы (2.7.99), (2.7.102) и (2.7.103) также дают возможность достаточно просто проследить за движением рассматриваемого твердого тела.

Домашняя

◀ ▶

◀ ▶

Назад

На весь экран

Закреть

2.8. Анализ движения случая Эйлера в переменных Депри и переменных «действие-угол»

2.8.1. Фазовое пространство в переменных Депри

В случае Эйлера функция Гамильтона будет равна кинетической энергии системы ($H = T$), т.к. рассматривается бессиловое поле. Как говорилось в §5, в некоторых случаях кроме канонических переменных $\theta, \varphi, \psi, @_{\theta}, p_{\varphi}, @_{\psi}$ удобно использовать углы l, φ_2, φ_3 и соответствующие им обобщенные импульсы L, I_2, I_3 , введенные в динамику твердого тела Депри. Функция Гамильтона в этих переменных в случае Эйлера будет иметь следующий вид:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C} (H = T). \quad (2.8.1)$$

Следовательно, в переменных Депри движение твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Эйлера определяется системой четырех канонических уравнений:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L}, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_2}, \quad \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial l}, \quad \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2} \quad (2.8.2)$$

с функцией Гамильтона (2.8.1) (постоянные величины φ_3 и I_3 в функцию H не входят). Эти уравнения имеют два однозначных первых интеграла:

$$H = h, \quad I_2 = C', \quad (2.8.3)$$

где h и C' – произвольные постоянные. Поэтому, считая величину I_2 постоянным параметром, мы свели задачу о движении твердого тела вокруг неподвижной точки

Домашняя



Назад

На весь экран

в случае Эйлера в переменных Депри к определению движения консервативной системы с одной степенью свободы.

Разрешим теперь уравнение (2.8.1) относительно L , получим:

$$L^2 = I_2^2 \frac{\beta^{-1} - \alpha_1^{-1} \sin^2 l - \alpha_2^{-1} \cos^2 l}{1 - \alpha_1^{-1} \sin^2 l - \alpha_2^{-1} \cos^2 l}, \quad (2.8.4)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{A}{C}, \quad \alpha_1 = \frac{B}{C}, \quad \beta = \frac{I_2^2}{2CH}. \quad (2.8.5)$$

Эти параметры α_1, α_2 и β в силу соотношений (2.7.5) будут постоянными. Считая, что $A > B > C$, найдем

$$\alpha_1 > \alpha_2 > 1. \quad (2.8.6)$$

Для определения границ изменения параметра β выразим его из уравнения (2.7.6) в виде

$$\beta = \frac{1}{(\alpha_1^{-1} \sin^2 l + \alpha_2^{-1} \cos^2 l) \sin^2 \delta_2 + \cos^2 \delta_2}, \quad (2.8.7)$$

где

$$\cos \delta_2 = L/I_2. \quad (2.8.8)$$

Оценивая наибольшее и наименьшее значения параметра β , получим, принимая во внимание неравенства (2.8.6)

$$\begin{cases} \beta_{\min} = \frac{1}{\alpha_2^{-1} \sin^2 \delta_2 + \cos^2 \delta_2} \geq 1, \\ \beta_{\max} = \frac{\alpha_1}{1 + \cos^2 \delta_2 (\alpha_1 - 1)} \leq \alpha_1, \end{cases} \quad (2.8.9)$$

и, следовательно, окончательно

$$1 \leq \beta \leq \alpha_1. \quad (2.8.10)$$

Заккрыть

Однако вместо трех параметров α_1, α_2 и β введем два параметра χ^2 и λ^2 :

$$\begin{cases} \chi^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1(\alpha_2 - 1)} = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \\ \lambda^2 = \chi^2 \frac{A}{C} \frac{2CH - I_2^2}{I_2^2 - 2AH} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta - 1)}{(\alpha_2 - 1)(\alpha_1 - \beta)}, \end{cases} \quad (2.8.11)$$

из которых χ^2 зависит лишь от моментов инерции, а λ^2 – и от начальных условий.

Из соотношений (2.8.7), (2.8.9), (2.8.10) вытекает, что параметр λ может меняться в пределах от нуля до бесконечности:

$$0 \leq \lambda \leq \infty, \quad (2.8.12)$$

достигая значения $\lambda = 0$ при $\delta_2 = 0$ и при любом значении угла l и значении $\lambda = \infty$ при $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$, $l = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). С помощью этих параметров выражение (2.8.4) можно переписать следующим образом:

$$L^2 = I_2^2 \frac{\chi^2}{\chi^2 + \lambda^2} \frac{1 - \lambda^2 + (\chi^2 + \lambda^2) \sin^2 l}{1 + \chi^2 \sin^2 l}. \quad (2.8.13)$$

Зависимость $L(l)$ на фазовой плоскости (l, L) можно представить в виде кривых, указанных на рисунке 2.8.1.

Из вида функции L , определяемой формулой (2.8.13), следует, что эта функция периодична по l с периодом π . Кроме того, когда

$$L = \pm I_2 \quad (\lambda = 0), \quad (2.8.14)$$

ось Oz подвижной системы координат совпадает с вектором кинетического момента $\bar{K}$, и мы имеем дело с перманентным вращением тела около большей оси эллипсоида инерции. В этом случае прямые $L = \pm I_2$ должны стягиваться в точки, и поэтому фазовый портрет, показанный на рисунке 12.1, представляет развертку сферы с

Домашняя

◀◀

▶▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Заккрыть

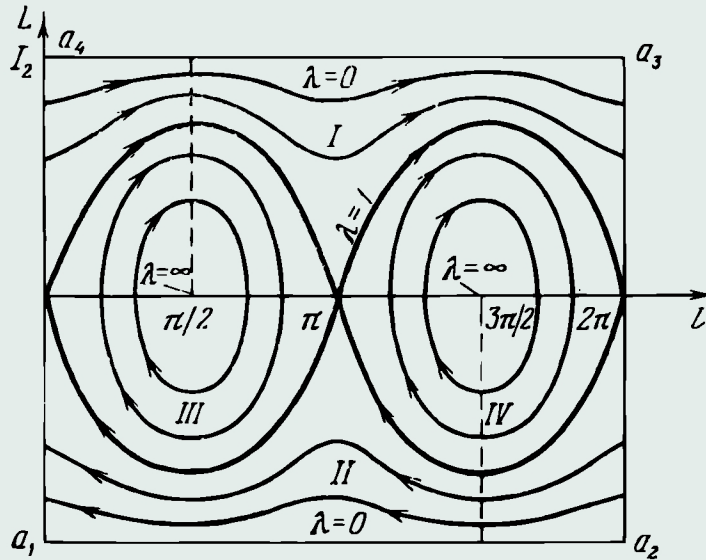


Рис. 2.8.1. Фазовая плоскость (l, L)

полюсами $L = \pm I_2$. Эта сфера (l, L) сепаратрисой ($\lambda = 1$) разделяется на четыре инвариантные области, обозначенные на рисунке 2.1 римскими цифрами I, II, III, IV, в каждой из которых кривые $L = L(l)$ замкнуты.

Отметим, что в этих областях можно уточнить неравенства (2.8.12). Так, в областях I и II справедливы неравенства:

$$0 \leq \lambda < 1, \quad (2.8.15)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

в областях III и IV – неравенства:

$$1 \leq \lambda < \infty. \quad (2.8.16)$$

2.8.2. Фазовое пространство в переменных «действие-угол»

В каждой из областей I, II, III, IV, вместо переменных l, L , можно ввести переменные «действие-угол» I_1, w_1 , где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint L dl. \quad (2.8.17)$$

При этом интегрирование ведется по замкнутым контурам на указанной сфере. Отметим, что

$$I_1 \geq 0. \quad (2.8.18)$$

Естественно, что величина I_1 , которая на основании формул (2.8.13) и (2.8.17) перепишется в виде:

$$I_1 = \frac{I_2}{2\pi} \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 + \lambda^2}} \oint \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 + (\chi^2 + \lambda^2) \sin^2 l}{1 + \chi^2 \sin^2 l}} dl \quad (2.8.19)$$

и сопряженный с ней угол w_1 в зависимости от областей будут вычисляться по-разному.

В силу периодичности кривых $L(l)$, изображенных на рисунке 12.1 выражение (2.8.19) можно переписать в следующем виде:

$$I_1 = \frac{2I_2}{\pi} \frac{\chi}{\sqrt{\chi^2 + \lambda^2}} \int_{l_0}^{l_0+l_1} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 + (\chi^2 + \lambda^2) \sin^2 l}{1 + \chi^2 \sin^2 l}} dl, \quad (2.8.20)$$

Домашняя

◀

▶

◀

▶

Назад

На весь экран

Закреть

где для областей I, II, III, IV будем иметь соответственно

$$l_1 = \frac{\pi}{2}, \quad l_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad l_1 = \arccos \sqrt{(\lambda^2 - 1) / (\lambda^2 + \chi^2)},$$

$$l_1 = -\arccos \sqrt{(\lambda^2 - 1) / (\lambda^2 + \chi^2)}.$$

В первом случае (в областях I и II) интеграл (2.8.20) может быть вычислен с помощью подстановки

$$\operatorname{ctg} l = -\sqrt{1 + \chi^2} \operatorname{tg} \xi \quad (2.8.21)$$

следующим образом

$$I_1(I_2, \lambda) = \frac{2I_2}{\pi\chi} \sqrt{\frac{1 + \chi^2}{\chi^2 + \lambda^2}} [(\chi^2 + \lambda^2) \Pi(\chi^2, \lambda) - \lambda^2 K(\lambda)]. \quad (2.8.22)$$

Здесь (χ^2, λ) и $K(\lambda)$ – полные эллиптические интегралы третьего и первого рода. Последнее уравнение может быть однозначно разрешить относительно λ ($0 < \lambda < 1$):

$$\lambda = \Phi_1(I_1/I_2). \quad (2.8.23)$$

Аналогично для второго случая, когда ($1 < \lambda < \infty$) (в областях III, IV), делая подстановку

$$\cos l = -\frac{\sqrt{1 + \chi^2}}{\lambda} \frac{\sin \eta}{\sqrt{1 + \chi^2 \lambda^{-2} \sin^2 \eta}} \quad (\eta = 0 \text{ ?} @8 \quad l = l_0) \quad (2.8.24)$$

в интеграл (2.8.20), получим

$$I_1(I_2, \lambda) = \frac{2I_2}{\pi\lambda\chi} \sqrt{\frac{1 + \chi^2}{\chi^2 + \lambda^2}} \left[(\chi^2 + \lambda^2) \Pi\left(\frac{\chi^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) - \lambda^2 K\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]. \quad (2.8.25)$$

Это уравнение также может быть однозначно разрешено относительно λ ($1 < \lambda < \infty$):

$$\lambda = \Phi_2(I_1/I_2). \quad (2.8.26)$$

Определим функцию Гамильтона в переменных «действие-угол», для чего воспользуемся вторым из соотношений (2.8.11), разрешая его относительно постоянной энергии, не изменяющейся при каноническом преобразовании. Будем иметь выражение

$$H = \frac{I_2^2}{2A} \left(1 - \frac{C-A}{C} \frac{\chi^2}{\lambda^2 + \chi^2} \right), \quad (2.8.27)$$

в котором λ является функцией от I_1 и I_2 . Таким образом, для функции $H = H(I_1, I_2)$ все обобщенные координаты – циклические. Кроме того, в функцию не входят величины φ_3 и I_3 . Поэтому из уравнений Гамильтона для этих величин

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_3}, \quad \frac{dI_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_3}$$

получим

$$\varphi_3 = w_3 = \text{const}, \quad I_3 = \text{const}. \quad (2.8.28)$$

Отличные от нуля частоты движения твердого тела в случае Эйлера определяются следующими уравнениями Гамильтона

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{\pi}{2K(\lambda)} \frac{A-C}{AC} \frac{\chi}{\sqrt{(1+\chi^2)(\lambda^2+\chi^2)}}, \\ \frac{dw_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \frac{I_2}{C} \left(1 - \frac{A-C}{A} \frac{\Pi(\chi^2, \lambda)}{K(\lambda)} \right), \end{cases} \quad (2.8.29)$$

в которые вместо λ надо подставить функцию $\Phi_1(I_1/I_2)$ или $\Phi_2(I_1/I_2)$ для соответствующего случая.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

Чтобы найти выражение старых переменных l, φ_2, L через новые w_1, w_2, I_1 и наоборот (переменные $\varphi_3 = w_3, I_2, I_3$ не изменяются), построим функцию W канонического преобразования $(l, \varphi_2, \varphi_3, L, I_2, I_3) \rightarrow (w_1, w_2, w_3, I_1, I_2, I_3)$. Эта производящая функция должна быть полным интегралом уравнения $H(l, \varphi_2, \varphi_3, \partial W / \partial l, \partial W / \partial \varphi_2, \partial W / \partial \varphi_3) = h$.

Функцию W можно искать в виде

$$W = I_3 \varphi_3 + I_2 \varphi_2 + V(l, I_1, I_2), \quad (2.8.30)$$

где

$$V(l, I_1, I_2) = \pm \int L(l, I_1, I_2) dl$$

$$W = I_3 \varphi_3 + I_2 \varphi_2 \pm \int L(l, I_1, I_2) dl. \quad (2.8.31)$$

Тогда получим следующие выражения для угловых переменных w_1, w_2, w_3 :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\partial W}{\partial I_1} = \pm \frac{\partial \lambda}{\partial I_1} \int \frac{\partial L}{\partial \lambda} dl, \\ w_2 &= \frac{\partial W}{\partial I_2} = \varphi_2 \pm \frac{1}{I_2} \int L dl \pm \frac{\partial \lambda}{\partial I_1} \int \frac{\partial L}{\partial \lambda} dl, \\ w_3 &= \varphi_3. \end{aligned} \quad (2.8.32)$$

Для первого случая ($0 < \lambda < 1$) имеем:

$$\begin{aligned} w_1 &= \pm \frac{\pi}{2} \left[\frac{F(\xi, \lambda)}{K(\lambda)} \right], \\ w_2 &= \varphi_2 \pm \left\{ \frac{\sqrt{(1+\lambda^2)(\lambda^2+\chi^2)}}{\chi} \right\} \left[\Pi(\xi, \chi^2, \lambda) - \Pi(\chi^2, \lambda) \frac{F(\xi, \lambda)}{K(\lambda)} \right], \\ w_3 &= \varphi_3. \end{aligned} \quad (2.8.33)$$

Для второго случая ($1 < \lambda < \infty$) имеем:

$$lw_1 = \frac{\pi}{2} \left[\frac{F(\eta, 1/\lambda)}{K(1/\lambda)} \right],$$

$$w_2 = \varphi_2 + \left\{ \frac{\sqrt{(1+\chi^2)(\lambda^2+\chi^2)}}{\chi\lambda} \right\} \times \\ \times \left[\Pi \left(\eta, \frac{\chi^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda} \right) - \Pi \left(\frac{\chi^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda} \right) \frac{F(\eta, 1/\lambda)}{K(1/\lambda)} \right], \\ w_3 = \varphi_3.$$

Заменяя в формулах величину λ на ее выражение, полученное из (2.8.21) получим зависимость новых переменных ω_1, ω_2, I_1 от старых переменных l, φ_2, L .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1) Г.К. Суслов. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
- 2) В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела – М.: Наука, 1973
- 3) Голдстейн Г. Классическая механика. – М.:Наука, 1975. – 415 с.
- 4) Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. – М.: Наука, 1985. – 286 с.
- 5) Ю.А. Архангельский. Аналитическая динамика твердого тела. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». – М., 1977. – 328 с.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть

- 6) Г.К. Суслов. Теоретическая механика. – М.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
- 7) В.В. Голубев. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.: Гостехиздат, 1953. – 288 с.
- 8) Н.Н. Бухгольц. Основной курс теоретической механики. Часть вторая. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

Домашняя



Назад

На весь экран

Закреть