МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В.В. СЕРГЕЕВ, М.А. ЧИЧЕВА

ТЕОРИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» в качестве учебника для студентов, обучающихся по образовательной программе высшего профессионального образования по специальности «Информационная безопасность автоматизированных систем»

САМАРА
Издательство СГАУ
2013

УДК 004.032.2(075)
ББК 32.973.2я7
С 322

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. П.К. Кузнецов,
д-р техн. наук, проф. А.Г. Храмов

Сергеев В.В.
С 322 **Теория цифровой обработки сигналов и изображений:** учеб. / *В.В. Сергеев, М.А. Чичева.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 216 с.: ил.

ISBN 978-5-7883-0941-5

В данном учебнике рассмотрены основы теории цифровой обработки сигналов. Учебник состоит из семи разделов, посвященных основным аспектам курса: дискретным последовательностям (детерминированным и случайным), дискетным линейным системам, описанию сигналов и систем в частотной и z-области. Изучается дискретное преобразование Фурье и спектральный анализ дискретных сигналов. Дано обобщение основных понятий и методов на двумерный случай. Каждый раздел заканчивается практическими заданиями, выполнение которых поможет студентам лучше усвоить теоретический материал.

Учебник предназначен для студентов специальностей и направлений «Прикладные математика и физика», «Прикладные математика и информатика», «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем».

УДК 004.032.2(075)
ББК 32.973.2я7

ISBN 978-5-7883-0941-5

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

1 Последовательности и линейные системы, инвариантные к сдвигу 6

1.1 Последовательности 6
1.2 Дискретные линейные системы, инвариантные к сдвигу 9
1.3 Физическая реализуемость и устойчивость ЛИС-систем 12
1.4 Разностные уравнения 14
1.5 Практические задания к главе 1 17

2 Описание дискретных сигналов и систем в частотной области 23

2.1 Частотная характеристика ЛИС-системы и спектры дискретных сигналов 23
2.2 Некоторые свойства спектров последовательностей 26
2.3 Соотношение между спектрами непрерывных и дискретных сигналов 32
2.4 Практические задания к главе 2 36

3 Описание дискретных сигналов и систем с помощью *z*-преобразования 39

3.1 Прямое *z*-преобразование 39
3.2 Основные свойства *z*-преобразования 47
3.3 Обратное *z*-преобразование 51
3.4 Анализ и синтез ЛИС-систем с использованием *z*-преобразования 58
3.5 Практические задания к главе 3 65

4 Спектральный анализ дискретных сигналов 72

4.1 Дискретное преобразование Фурье 72
4.2 Связь ДПФ с *z*-преобразованием и непрерывным спектром последовательности 76
4.3 Использование ДПФ для вычисления отсчетов непрерывного спектра 78
4.4 Использование ДПФ для вычисления последовательности по ее спектру 80
4.5 Основные свойства ДПФ 82
4.6 Вычисление линейной свертки при помощи ДПФ 85
4.7 Быстрое преобразование Фурье 87
4.8 Совмещенные алгоритмы БПФ 95
4.9 Практические задания к главе 4 97

5 Цифровая обработка случайных сигналов 101

5.1 Случайные последовательности и их характеристики 104
5.2 Прохождение случайных последовательностей через ЛИС-системы 107
5.3 Факторизация энергетического спектра 110
5.4 Практические задания к главе 5 116

6 Линейная фильтрация и восстановление изображений 122

6.1 Восстановление дискретного сигнала ЛИС-системой 122
6.2 Оптимальное линейное восстановление 127
6.3 Реализация оптимального фильтра обработкой "в прямом и обратном времени" 135

6.4 Реализация оптимального фильтра при помощи ДПФ ... 139
6.5 Восстановление сигнала физически-реализуемым БИХ-фильтром ... 143
6.6 Восстановление сигнала КИХ-фильтром ... 151
6.7 Практические задания к главе 6 ... 154
7 Двумерные дискретные сигналы и системы ... 158
7.1 Двумерные последовательности ... 158
7.2 Двумерные дискретные ЛИС-системы ... 162
7.3 Физическая реализуемость двумерных систем ... 165
7.4 Двумерные разностные уравнения ... 169
7.5 Описание двумерных дискретных сигналов и систем в частотной области ... 172
7.6 Двумерное *z*-преобразование ... 178
7.7 Основные свойства двумерного *z*-преобразования ... 189
7.8 Анализ и синтез двумерных ЛИС-систем с использованием *z*-преобразования ... 191
7.9 Двумерные случайные последовательности, их характеристики и прохождение через ЛИС-системы ... 197
7.10 Практические задания к главе 7 ... 199

ВВЕДЕНИЕ

Учебник по курсу "Теоретические основы цифровой обработки сигналов" предназначен для студентов, обучающихся по специальностям "Прикладные математика и физика", "Прикладная математика и информатика", "Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем", а также студентов, проходящих обучение по аналогичным направлениям бакалавриата и магистратуры, и аспирантов.

Учебник состоит из семи глав, посвященных основным аспектам курса: дискретным последовательностям (детерминированным и случайным), дискетным линейным системам, описанию сигналов и систем в частотной и z-области. Изучается дискретное преобразование Фурье и спектральный анализ дискретных сигналов. Дано обобщение основных понятий и методов на двумерный случай.

Каждый раздел заканчивается практическими заданиями, выполнение которых поможет студентам лучше усвоить теоретический материал.

1 ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ИНВАРИАНТНЫЕ К СДВИГУ

1.1 Последовательности

При цифровой обработке непрерывный сигнал $f(t)$ представляется набором своих значений (отсчетов) в дискретные моменты времени – последовательностью. Мы ограничимся рассмотрением наиболее распространенного на практике случая, когда интервал между отсчетами (шаг дискретизации во времени) постоянен и равен Δ.

Для записи последовательности будем пользоваться одним из двух обозначений: $f=\{f(n\Delta)\}$ или $f=\{f(n)\}$. В обоих случаях n – целое. Первая запись определяет значения элементов последовательности как значения непрерывного сигнала в дискретные моменты физической шкалы времени, то есть непосредственно отражает процесс дискретизации сигнала:

$$f(n\Delta)=f(t)\big|_{t=n\Delta}. \qquad (1.1)$$

Во второй записи в качестве аргумента дискретного сигнала используется просто порядковый номер отсчета n, которому в этом случае придается смысл дискретного безразмерного времени. Второе обозначение короче и поэтому предпочтительнее, однако в случаях, когда требуется учитывать реальный масштаб времени, применяется первое.

Интервал определения последовательности может быть конечным, полубесконечным или бесконечным. При $n\in[N_1,N_2]$, где N_1,N_2 – целые, имеем последовательность *конечной длины*, при $n\in(-\infty,N_2]$ – левостороннюю, а при $n\in(N_1,\infty)$ – *правостороннюю* последовательность. При $n\in(-\infty,\infty)$ последовательность является *двусторонней* (бесконечной, не ограниченной по аргументу). Для унификации рассмотрения всякую последовательность обычно приводят к бесконечной, полагая отсчеты, лежащие вне интервала определения, тождественно равными нулю. При этом данная классификация по существу относится не к области определения, а к области, в которой значения последовательности могут отличаться от нуля.

Последовательность называется *детерминированной,* если можно точно указать ее значения для любого момента дискретного времени n. Последовательность – *случайная,* если ее элементы – случайные величины.

Приведем примеры важнейших детерминированных последовательностей.

Единичный импульс:

$$\delta(n)=\begin{cases}1, n=0\\0, n\neq 0.\end{cases} \tag{1.2}$$

Графическое изображение единичного импульса приведено на рис. 1.1. Аналогично определяется и единичный импульс, сдвинутый на n_0 отсчетов:

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1, & n=n_0\\0, & n\neq n_0\end{cases} \tag{1.3}$$

Единичный скачок:

$$u(n)=\begin{cases}1, n\geq 0\\0, n<0.\end{cases} \tag{1.4}$$

Графическое изображение единичного скачка показано на рис. 1.2. Единичный скачок можно выразить через единичный импульс:

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k).$$

Приведенные обозначения единичного импульса и единичного скачка являются стандартными и используются далее везде.

Дискретный прямоугольный импульс длины N:

$$f(n)=\begin{cases}1, & 0\leq n\leq N-1;\\0, & n<0 \quad \text{или} \quad n\geq N.\end{cases} \tag{1.5}$$

Эта последовательность (см. рис. 1.3) очевидным образом выражается через функции единичного импульса или единичного скачка:

$$f(n)=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)=u(n)-u(n-N).$$

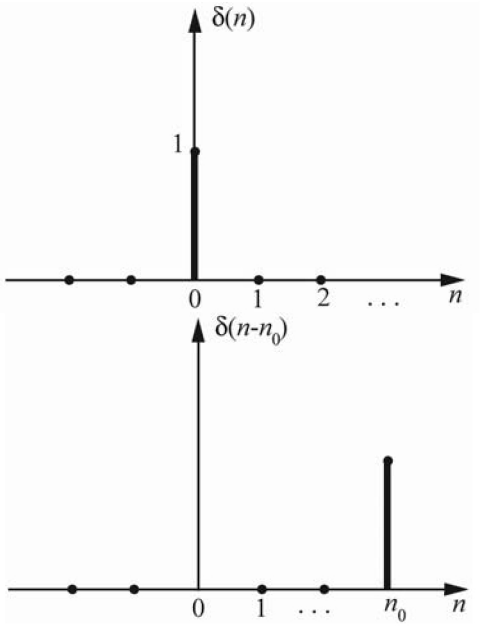


Рис. 1.1. Иллюстрации единичного импульса

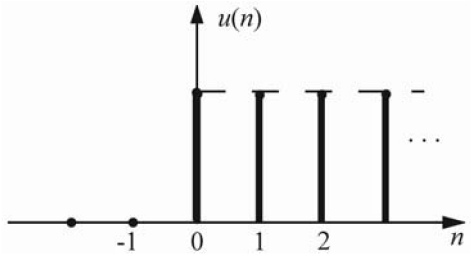


Рис. 1.2. Иллюстрация единичного скачка

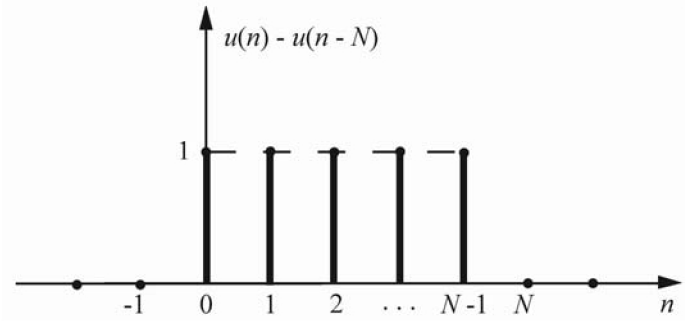


Рис. 1.3. Иллюстрация дискретного прямоугольного импульса

Дискретная правосторонняя экспонента:

$$f(n)=\left\{\begin{matrix} a^n, n\geq 0 \\ 0, n<0 \end{matrix}\right\}=a^n u(n)\,. \qquad (1.6)$$

График последовательности при $0<a<1$ показан на рис. 1.4.

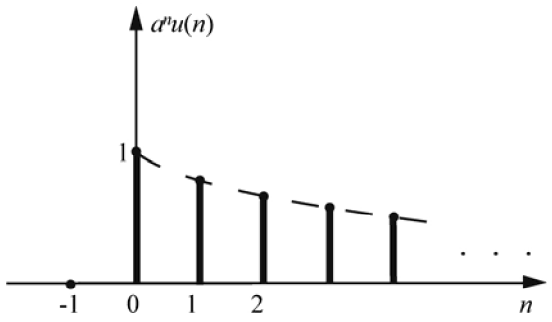


Рис. 1.4. Иллюстрация дискретной правосторонней экспоненты

Дискретная комплексная экспонента задается выражением

$$f(n)=e^{i\omega n}=\cos\omega n+i\sin\omega n\,, \qquad (1.7)$$

где i – мнимая единица, ω – константа, имеющая смысл безразмерной частоты. Последовательность (1.7) играет исключительно важную роль при анализе сигналов и систем в частной области (см. главу 2).

1.2 Дискретные линейные системы инвариантные к сдвигу

Будем называть *дискретной системой* правило $\mathcal{L}$ – преобразования одной последовательности f, называемой *входной*, в другую последовательность g, называемую *выходной*.

В общем виде это преобразование обозначается

$$\{g(n)\}=\mathcal{L}\left[\{f(n)\}\right]. \qquad (1.8)$$

Дискретная система $\mathcal{L}$ называется *линейной*, если для нее соблюдается принцип суперпозиции, то есть для любых последовательностей f_1, f_2 и постоянных a,b

$$\mathcal{L}\left[\{af_1(n)+bf_2(n)\}\right]=a\mathcal{L}\left[\{f_1(n)\}\right]+b\mathcal{L}\left[\{f_{2(n)}\}\right]. \qquad (1.9)$$

Дискретная система, *инвариантная к сдвигу,* характеризуется тем, что, если справедливо соотношение (1.8), то справедливо и соотношение

$$\{g(n-n_0)\} = \mathcal{L}\left[\{f(n-n_0)\}\right] \tag{1.10}$$

при любом целом n_0. Иными словами: задержка входного сигнала приводит к равной задержке выходного сигнала без изменения самого закона преобразования входа в выход.

Дискретные системы, обладающие одновременно свойствами линейности и инвариантности к сдвигу, называются *дискретными линейными системами инвариантными к сдвигу* (ЛИС-системами). Такие системы также называют *дискретными линейными системами с постоянными параметрами* (ЛПП-системами). Классу ЛИС-систем принадлежат многие алгоритмы цифровой обработки сигналов и дискретные модели реальных динамических объектов. Для таких систем наиболее глубоко разработаны математические методы анализа и синтеза. Мы ограничимся рассмотрением именно этого класса дискретных систем.

Чтобы описать систему, нужно указать конкретное правило преобразования входного сигнала в выходной. ЛИС-систему можно описать с помощью ее импульсной характеристики.

Импульсная характеристика h дискретной ЛИС-системы определяется как реакция системы на входное воздействие в форме единичного импульса:

$$\{h(n)\} = \mathcal{L}\left[\{\delta(n)\}\right]. \tag{1.11}$$

Импульсная характеристика исчерпывающим образом описывает ЛИС-систему с точки зрения преобразования сигналов. Действительно, любую последовательность на входе ЛИС-системы можно представить в виде бесконечной суммы

$$f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k). \tag{1.12}$$

В силу соотношения (1.9) преобразование суммы равно сумме преобразований слагаемых. Каждое слагаемое в сумме (1.12) есть сдвинутый единичный импульс с коэффициентом – значением соответствующего отсчета входной последовательности. Согласно (1.10) и (1.11) каждый такой импульс дает на выходе отклик в виде сдви-

нутой импульсной характеристики с тем же коэффициентом. Полная выходная последовательность записывается в виде:

$$g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, h(n-k) \,. \qquad (1.13)$$

Здесь и далее полагаем, что последовательности, входящие в выражения вида (1.13) таковы, что эта сумма ряда сходится при любом конечном n.

Таким образом, знания импульсной характеристики достаточно, чтобы по входной последовательности вычислить выходную.

Выражение (1.13) задает *свертку последовательностей* f и h. Часто используется его краткая символическая запись:

$$y(n) = f(n) * h(n) \,. \qquad (1.14)$$

Отметим некоторые легко доказываемые свойства свертки (пусть a, b и c – произвольные последовательности):

– *коммутативность*

$$a(n) * b(n) = b(n) * a(n) \,; \qquad (1.15)$$

– *ассоциативность*

$$a(n) * \left[b(n) * c(n) \right] = \left[a(n) * b(n) \right] * c(n) \,; \qquad (1.16)$$

– *дистрибутивность*

$$a(n) * \left[b(n) + c(n) \right] = a(n) * b(n) + a(n) * c(n) \,. \qquad (1.17)$$

Для любой последовательности $a(n)$ можно записать

$$a(n) * \delta(n - n_0) = a(n - n_0) \qquad (1.18)$$

при любом целом n_0 (формула (1.18) выражает так называемое *фильтрующее свойство* единичного импульса).

Легко показать, что, если ЛИС-система состоит из N последовательно соединенных звеньев с импульсными характеристиками $h_1, h_2, ..., h_N$, то ее импульсная характеристика h равна свертке импульсных характеристик звеньев:

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) * ... * h_N(n) \,. \qquad (1.19)$$

При параллельном соединении звеньев их импульсные характеристики суммируются, то есть для системы в целом

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) + ... + h_N(n) \,. \qquad (1.20)$$

1.3 Физическая реализуемость и устойчивость ЛИС-систем

Дискретная система называется *физически реализуемой,* если значение выходной последовательности в произвольный момент n_0 зависит только от значений входной последовательности при $n \le n_0$. Иначе говоря, для физически реализуемой системы отклик не опережает входное воздействие.

Для независимости выхода физически реализуемой дискретной ЛИС-системы от "будущих" значений входной последовательности требуется, чтобы в свертку (1.13) все значения $f(k)$ при $k > n$ входили с нулевыми коэффициентами. Очевидно, это выполняется, если

$$h(n) = 0 \text{ при } n < 0. \tag{1.21}$$

Это условие является необходимым и достаточным для физической реализуемости ЛИС-системы.

Дискретная система называется *устойчивой,* если любому ограниченному входному воздействию соответствует ограниченный отклик, то есть при

$$|f(n)| \le M_f \quad \forall n \tag{1.22}$$

из (1.12) следует

$$|g(n)| \le M_g \quad \forall n, \tag{1.23}$$

где M_f, M_g – некоторые положительные константы.

Необходимым и достаточным условием устойчивости дискретной ЛИС-системы является абсолютная суммируемость импульсной характеристики:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \tag{1.24}$$

Докажем это. Сначала докажем необходимость, используя контрпример. Рассмотрим ограниченную входную последовательность

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } h(-n) \ge 0, \\ -1 & \text{при } h(-n) < 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Определим значение последовательности на выходе системы при $n=0$. В соответствии с формулами (1.13) и (1.25)

$$g(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(-k)\right|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|.$$

Если условие (1.24) не выполняется, то не выполняется и условие устойчивости (1.23). Следовательно, выполнение условия (1.24) является необходимым условием устойчивости системы. Для доказательства достаточности предположим, что условие (1.24) выполняется и на вход системы поступает ограниченная последовательность, то есть справедливо неравенство (1.22). Тогда, используя свойство коммутативности свертки (1.13), получаем:

$$\left|g(n)\right|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,f(n-k)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|\cdot\left|f(n-k)\right|\le M_f\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h(k)\right|=M_g<\infty,$$

то есть всегда выполняется соотношение (1.23), выходная последовательность ограничена и система устойчива.

Теперь, после введения понятий физической реализуемости и устойчивости можно дать простую, но важную классификацию ЛИС-систем по форме импульсной характеристики. У ЛИС-систем *с конечной импульсной характеристикой* (КИХ-систем), как следует из самого названия, импульсная характеристика представляет собой последовательность конечной длины, то есть $h(n)=0$ при $n\notin[N_1,N_2]$. КИХ-системы всегда устойчивы, так как для них сумма (1.24) конечна. При $N_1\ge 0$ такие системы являются физически реализуемыми.

ЛИС-системы с *бесконечной импульсной характеристикой* (БИХ-системы) имеют в качестве импульсной характеристики правостороннюю, левостороннюю или двустороннюю последовательность, то есть $h(n)=0$ при $n<N_1$, или $h(n)=0$ при $n>N_2$, или $h(n)\ne 0$ при $n\notin(-\infty,\infty)$. Такие системы могут быть неустойчивыми. Требование физической реализуемости здесь выполняется только в первом случае при $N_1\ge 0$.

Если у КИХ- или БИХ-системы импульсная характеристика равна нулю при $n < N_1 < 0$ то такая система тоже может быть реализована, если допустить задержку в получении сигнала на выходе. Величина этой задержки должна быть достаточной, чтобы "сдвинуть" импульсную характеристику вправо в область неотрицательных значений аргумента на число отсчетов не меньше $(-N_1)$. Строго говоря, при этом реализуется не исходная система, а другая, эквивалентная последовательному соединению системы и звена задержки. Однако в большинстве практических приложений такая замена вполне допустима.

1.4 Разностные уравнения

Как следует из выражений (1.13) и (1.21), для физически реализуемой БИХ-системы значение последовательности на выходе зависит от текущего и всех предыдущих значений входной последовательности. Описание (1.13) не является конструктивным в том смысле, что не позволяет практически построить БИХ-систему: для получения каждого значения выходной последовательности требуется выполнить бесконечное число операций сложения и умножения. Число операций можно сделать конечным, если выразить текущее значение выходной последовательности не только через входные, но и через предыдущие выходные значения, иначе говоря, записать уравнение ЛИС-системы в рекурсивной форме. При этом получаем описание ЛИС-системы в виде *линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами*:

$$g(n) = \sum_{j=1}^{M} a_j g(n-j) + \sum_{j=0}^{N} b_j f(n-j), \qquad (1.26)$$

где $\{a_j\}, \{b_j\}$ – коэффициенты уравнения; M, N – целые константы, характеризующие сложность системы.

Величина M при старшем коэффициенте $a_M \neq 0$ определяет порядок разностного уравнения (ЛИС-системы). БИХ-системы всегда имеют ненулевой порядок и являются *рекурсивными*: для них каждое следующее значение выходной последовательности вычисляется через M предыдущих. В частном случае, когда все коэффициенты $\{a_j\}$ равны нулю, уравнение (1.26) описывает *нерекурсивную* КИХ-систему, имеющую нулевой порядок.

Заметим, что разностное уравнение (1.26) при конечных M, N описывает более узкий класс физически реализуемых ЛИС-систем, нежели свертка (1.13). Для некоторых форм импульсной характеристики переход от свертки к разностному уравнению осуществить не удается. Впрочем, такие "неприводимые" случаи на практике не встречаются и поэтому ниже не рассматриваются.

Обратный переход от разностного уравнения (1.26) к свертке (1.13) возможен всегда, его осуществление означает выражение выходной последовательности через входную в явной форме, то есть решение разностного уравнения. Методы решения разностных уравнений хорошо разработаны. В простейших случаях продуктивным является последовательное отыскание отсчетов выходного сигнала путем *прямой подстановки* в уравнение с дальнейшим обобщением результата методом математической индукции.

Пример 1.1. Пусть физически реализуемая ЛИС-система первого порядка описывается разностным уравнением

$$g(n) = ag(n-1) + f(n)\ , \tag{1.27}$$

где a – постоянный коэффициент. Требуется получить описание системы в виде свертки. Найдем вначале импульсную характеристику системы. В соответствии с определением импульсной характеристики (1.11) уравнение (1.27) можно переписать в виде

$$h(n) = ah(n-1) + \delta(n). \tag{1.28}$$

Рассматриваемая система физически реализуема, поэтому все значения импульсной характеристики при $n < 0$ равны нулю (см. формулу (1.21)). При $n \geq 0$ значения импульсной характеристики определяются прямой подстановкой в уравнение (1.28) предыдущих значений с учетом формулы (1.2):

$$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = a \cdot 0 + 1 = 1\ ;$$

$$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a \cdot 1 + 0 = a\ ;$$

$$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a \cdot a + 0 = a^2\ ;$$

. . .

Анализируя этот результат, нетрудно заметить, что импульсная характеристика имеет аналитическое выражение в виде правосторонней экспоненты (1.6):

$$h(n) = a^n u(n). \tag{1.29}$$

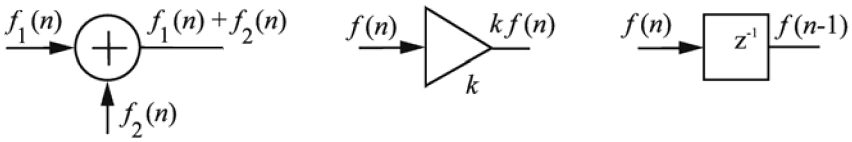
С учетом свойства коммутативности свертки (1.13), а также выражения (1.4) для единичного скачка, получаем окончательный результат:

$$g(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,f(n-k)= \\ =\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k\,u(k)\,f(n-k)=\sum_{k=0}^{\infty} a^k\,f(n-k). \tag{1.30}$$

Заметим, что в общем случае при решении разностного уравнения (1.26) прямой подстановкой необходимо задавать *начальные условия*, число которых зависит от сложности уравнения. Так, для получения решения при $n \geq 0$ нужно задать $y(-1), y(-2), ..., y(-M)$, а также $f(-1), f(-2), ..., f(-N)$, то есть всего $(M+N)$ величин.

Метод прямой подстановки, будучи громоздким, имеет весьма ограниченное применение. Существуют другие, более мощные аналитические методы решения разностных уравнений, позволяющие сразу получить результат в общем виде. Один из таких методов, основанный на применении z -преобразования, мы рассмотрим ниже.

Описание ЛИС-системы с помощью разностного уравнения имеет важное практическое значение, поскольку непосредственно определяет алгоритм преобразования входной последовательности в выходную. По разностному уравнению легко строится структурная схема ЛИС-системы, состоящая из комбинации типовых элементов, осуществляющих операции суммирования (рис. 1.5,*а*), умножения на коэффициент (рис. 1.5,*б*) и задержки (сдвига) последовательности (рис. 1.5,*в*).



а) *б)* *в)*

Рис. 1.5. Типовые элементы структурных схем ЛИС-систем:
а) элемент суммирования; б) элемент умножения; в) элемент задержки

На рис. 1.6 представлена структурная схема, соответствующая прямой реализации ЛИС-системы по разностному уравнению (1.26).

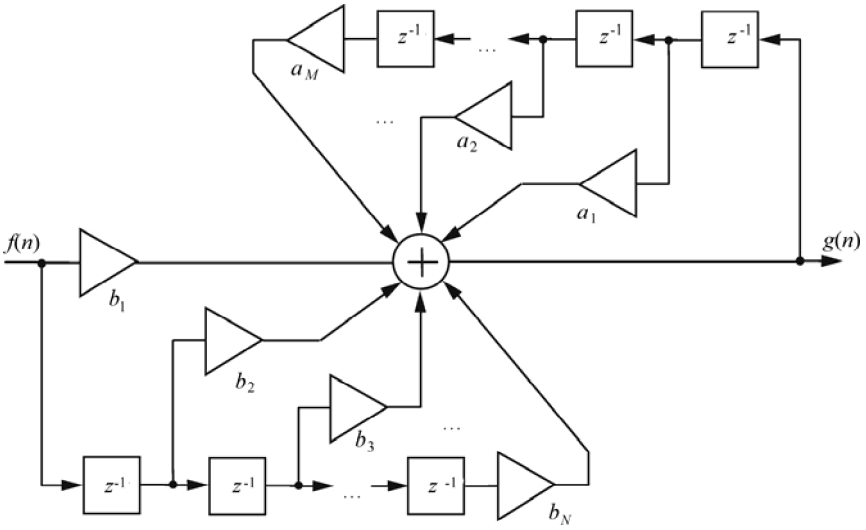


Рис. 1.6. Пример структурной схемы для прямой реализации ЛИС-системы по разностному уравнению

1.5 Практические задания к главе 1

ЛИС-системы

1.5.1. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой $h(n)=a^n u(n)$ подается последовательность $x(n)=b^n u(n)$. Определить выходную последовательность $\{y(n)\}$.

Решение

Выходная последовательность определяется через свертку (1.13):

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b^k u(k)a^{n-k}u(n-k).$$

Под знаком суммы стоит произведение функций единичного скачка:

$$u(k)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad k\geq 0,\\ 0 & \text{при} \quad k<0,\end{cases} \qquad u(n-k)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad n-k\geq 0 \quad \text{или} \quad k\leq n,\\ 0 & \text{при} \quad n-k<0 \quad \text{или} \quad k>n.\end{cases}$$

Откуда следует (рис. 1.7), что при $n<0$

$$u(k)u(n-k)=0.$$

При $n\geq 0$:

$$u(k)u(n-k)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad 0\leq k\leq n,\\ 0 & \text{при} \quad k<0 \text{ или } k>n.\end{cases}$$

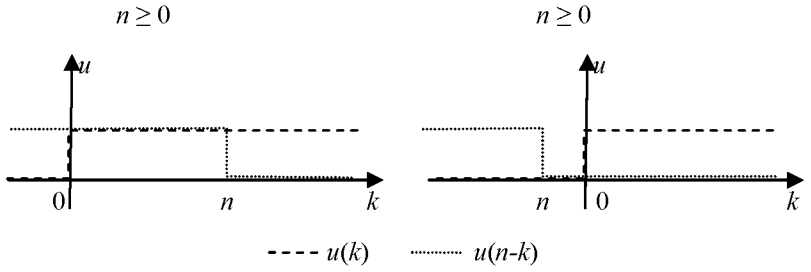


Рис. 1.7

Этот факт позволяет изменить пределы суммирования в свертке. При этом домножим все выражение на $u(n)$, чтобы учесть связь со знаком n:

$$y(n)=\left[\sum_{k=0}^{n}b^k a^{n-k}\right]u(n)=\left[a^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k\right]u(n).$$

При $a\neq b$ суммируем геометрическую прогрессию:

$$y(n)=a^n\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1-\frac{b}{a}}u(n)=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}u(n).$$

При $a=b$:

$$y(n)=\left[a^n\sum_{k=0}^{n}1\right]u(n)=a^n(n+1)u(n).$$

1.5.2. На рис. 1.8 представлены графики входных последовательностей и импульсных характеристик ЛИС-систем. Нарисовать графики выходных последовательностей.

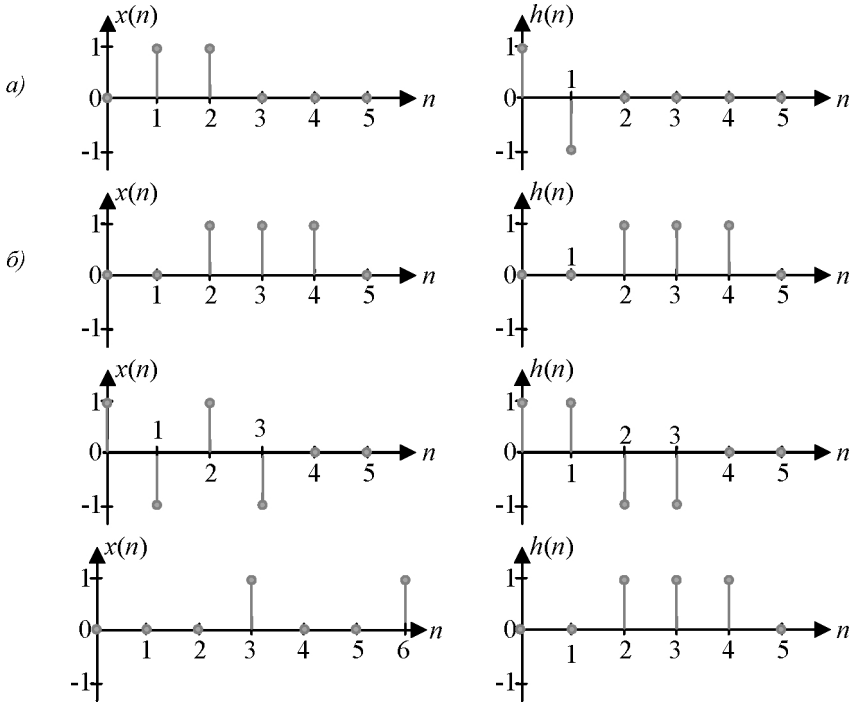


Рис. 1.8

1.5.3. Задана структурная схема ЛИС-системы (рис. 1.9). Определить ИХ системы. При каких значениях параметров a и b система устойчива? Определить выходную последовательность, если на вход системы поступает $x(n)=\gamma^n u(n-2)$.

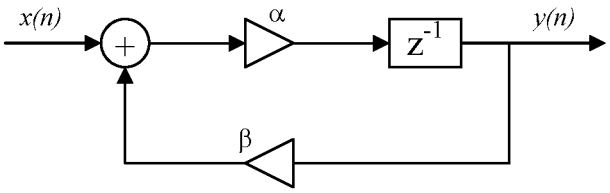


Рис. 1.9

1.5.4. То же для $x(n)=(n+1)\gamma^n u(n)$.

1.5.5. То же для $x(n)=\cos\omega n$.

1.5.6. То же для структурной схемы – рис. 1.10 и $x(n)=u(n)$.

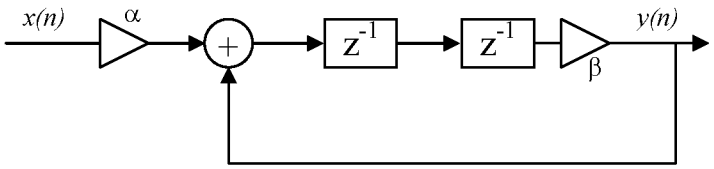


Рис. 1.10

1.5.7. То же для структурной схемы – рис. 1.11 и $x(n)=\delta(n-3)$.

Указание: представить систему как последовательное соединение двух систем.

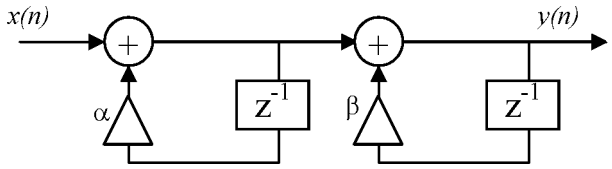


Рис. 1.11

1.5.8. То же для структурной схемы – рис. 1.12 и $x(n)=u(n)-u(n-2)$.

Указание: представить систему как параллельное соединение двух систем.

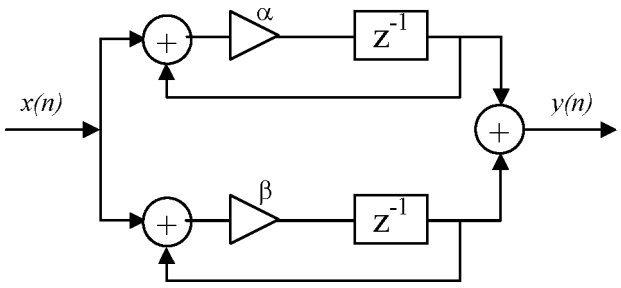


Рис. 1.12

1.5.9. Задана структурная схема ЛИС-системы (рис. 1.13). Определить выходную последовательность, если на вход системы поступает $x(n)=u(n)$. Какой порядок имеет система? Устойчива ли она? Нарисовать график входной и выходной последовательностей, а также последовательностей в точках «а» и «б» структурной схемы.

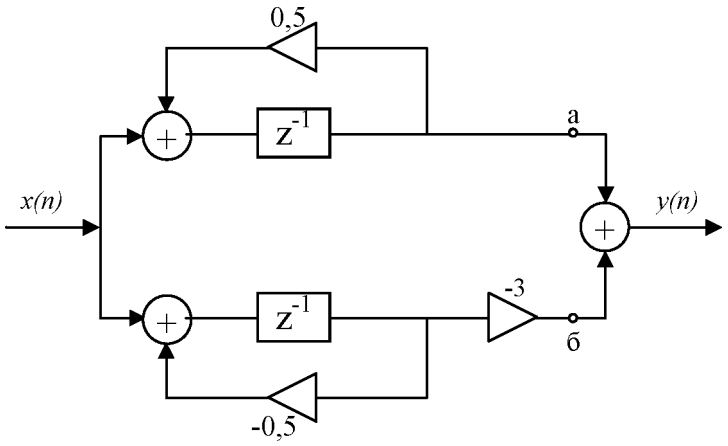


Рис. 1.13

1.5.10. То же для структурной схемы – рис. 1.14.

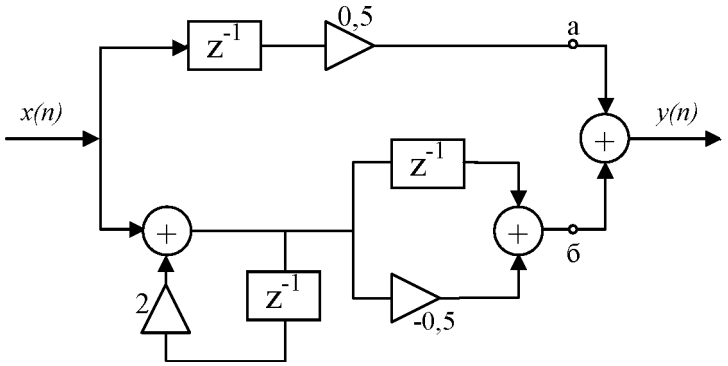


Рис. 1.14

1.5.11. Вычислить свертку двух последовательностей $x(n)=\alpha^{|n|}$ и $h(n)=u(n)$.

1.5.12. Вычислить и изобразить графически свертку двух последовательностей: $x(n)=nu(n)$ и $h(n)=a^n u(n)$.

1.5.13. Вычислить свертку двух последовательностей:
$a(n)=u(n)-u(n-N)$ и $b(n)=u(n)-u(n-M)$.

1.5.14. Вычислить свертку двух последовательностей: $x(n)=a^{|n|}$ и $h(n)=u(n)$.

1.5.15. Вычислить свертку $u(n)*u(n)*u(n)$.

2 ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

2.1 Частотная характеристика ЛИС-системы и спектры дискретных сигналов

Весьма ценным для анализа ЛИС-систем является их описание с помощью отклика на синусоидальный входной сигнал. В теоретических исследованиях вместо синусоидального сигнала обычно берется комплексная экспонента (1.7). Обратим внимание на использование в выражение (1.7) безразмерной частоты

$$\omega = \Omega\Delta \ , \tag{2.1}$$

которое является традиционным при описании дискретных сигналов и систем вне связи с масштабом времени.

Итак, пусть на вход дискретной ЛИС-системы поступает последовательность (1.7). Тогда выходная последовательность запишется в виде

$$g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) f(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\omega k} \ .$$

Мы получили выходную последовательность, совпадающую с входной с точностью до множителя, зависящего от частоты. Этот множитель

$$H\left(e^{i\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\omega k} \tag{2.2}$$

называется *частотной характеристикой* дискретной ЛИС-системы. Частотная характеристика задает "коэффициент передачи" ЛИС-системы при прохождении сигнала – комплексной экспоненты для каждого значения ее частоты ω :

$$e^{i\omega n} \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{i\omega n} H\left(e^{i\omega}\right).$$

Частотная характеристика определена тогда, когда ряд (2.2) сходится. Условие устойчивости ЛИС-системы (2.2) одновременно является и условием абсолютной сходимости этого ряда. Таким образом, для устойчивой системы частотная характеристика определена всегда. Отметим, что ряд (2.2) можно рассматривать как степенной от комплексной переменной $z = e^{i\omega}$. Известно, что степенной ряд, абсолютно сходящийся на некотором множестве точек (в нашем

случае – на единичной окружности в плоскости z или, что одно и то же, на всей числовой оси вещественной переменной ω), на том же множестве сходится равномерно. Этот факт равномерной сходимости нам понадобится ниже.

Выражение (2.2) позволяет вычислить частотную характеристику по импульсной. Установим и правило обратного перехода, для чего умножим обе части выражения (2.2) на $e^{i\omega n}$ и проинтегрируем по интервалу изменения частоты $(-\pi,\pi)$ (учтем при этом, что равномерно сходящийся ряд можно интегрировать почленно):

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{i\omega}\right)e^{i\omega n}\,d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega n}\sum_{-\infty}^{\infty} h(k)e^{-i\omega k}\,d\omega = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} h(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(n-k)}\,d\omega.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Вычисление интегралов под суммой с учетом формулы (1.3) дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(n-k)}d\omega = \left\{\begin{matrix}2\pi, n=k\\ 0\ , n\neq k\end{matrix}\right\} = 2\pi\delta(n-k)\ ,$$

выражение (2.3) приводится к свертке и в соответствии со свойством свертки (1.18) упрощается:

$$\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{i\omega}\right)e^{i\omega n}\,d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)2\pi\delta(n-k) = 2\pi h(n)*\delta(n) = 2\pi h(n)\ .$$

Таким образом, окончательно будем иметь

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{i\omega}\right)e^{i\omega n}\,d\omega\,. \tag{2.4}$$

Выражения (2.2) и (2.4) определяют соответственно *прямое и обратное преобразование Фурье* функции дискретного аргумента (последовательности). Преобразование Фурье функции иначе называется ее спектром. Частотная характеристика ЛИС-системы – это спектр ее импульсной характеристики.

Аналогичную пару преобразований Фурье можно записать и для произвольной последовательности f:

$$F\left(e^{i\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-i\omega k}\ , \tag{2.5}$$

$$f(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F\left(e^{i\omega}\right)e^{i\omega n}\,d\omega\ . \tag{2.6}$$

Выражение (2.5) определяет спектр последовательности, а выражение (2.6) – представление последовательности через спектр. Будем считать, что ряд (2.5) сходится (на условиях сходимости ряда и, следовательно, существования спектра мы еще остановимся в следующем параграфе).

Спектральное представление сигналов и систем широко применяется при анализе измерительной информации, синтезе фильтров и т.д. Описание ЛИС-системы посредством частотной характеристики во многих случаях проще и удобнее описания во временной области. Убедимся в этом, установив связь спектров последовательностей на входе и выходе системы. Спектр выходной последовательности с учетом ее выражения через свертку (1.13) запишется в виде

$$G\left(e^{i\omega}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m)e^{-i\omega m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(m-k)\right]e^{-i\omega m}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m-k)\,e^{-i\omega m}.$$

Заметим, что допустимость перестановки сумм можно обосновать при условии ограниченности последовательности f и абсолютной суммируемости h. Заменим переменную для внутренней суммы $n=m-k$. Тогда

$$G\left(e^{i\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega(n+k)}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)e^{-i\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-i\omega n}.$$

Принимая во внимание выражения (2.2) и (2.5), получаем алгебраическое соотношение

$$G\left(e^{i\omega}\right)=F\left(e^{i\omega}\right)H\left(e^{i\omega}\right), \tag{2.7}$$

которое однозначно связывает спектры входной и выходной последовательностей.

Сопоставление формул (1.13) и (2.7) показывает, что свертка последовательностей преобразуется в произведение спектров. Этот факт часто используют при анализе прохождения сигналов через ЛИС-систему и вообще при вычислении сверток: применение прямого и обратного преобразования Фурье и соотношения (2.7) по сложности вычислений иногда оказывается проще непосредственного использования формулы (1.13).

2.2 Некоторые свойства спектров последовательностей

Перечислим некоторые наиболее существенные свойства спектров последовательностей. Для определенности будем в основном говорить о спектрах дискретных сигналов, хотя все сказанное, с точностью до обозначений, остается справедливым и для частотной характеристики дискретной ЛИС-системы. Вначале приведем несколько свойств, качественно характеризующих спектры.

Свойство 1. Достаточным (но не необходимым!) условием существования спектра последовательности f является абсолютная сходимость ряда (2.5):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| f(n) \right| < \infty \ . \tag{2.8}$$

При выполнении условия (2.8) спектр (2.5) есть непрерывная функция частоты ω. Соответственно, как уже отмечалось, частотная характеристика ЛИС-системы определена и непрерывна в случае, если система устойчива (см. формулу (1.24)). Если условие (2.8) не выполняется, то ряд (2.5) либо расходится (при этом, естественно, спектр не определен), либо сходится условно (не абсолютно). В последнем случае спектр существует, хотя, возможно, не для всех значений частот, и может иметь разрывы.

Свойство 2. Спектр последовательности – периодическая функция частоты. Его период равен 2π, то есть $F\left(e^{i\omega}\right) = F\left(e^{i[\omega+2\pi k]}\right)$ для любого целого k. Это очевидным образом вытекает из периодичности по частоте дискретной комплексной экспоненты, используемой в выражениях (2.5) и (2.6):

$$e^{i[\omega+2\pi k]n} = e^{i\omega n}\, e^{i2\pi kn} = e^{i\omega n} \ .$$

В силу этого свойства для полного описания спектра достаточно задать его на любом интервале частот длиной в период. Обычно используется интервал $\omega \in [0, 2\pi)$ или $\omega \in [-\pi, \pi)$.

В общем случае спектр – комплексная функция, которую можно представить через вещественную и мнимую части или через модуль и фазу:

$$F\left(e^{i\omega}\right) = \mathrm{Re}\, F\left(e^{i\omega}\right) + i\,\mathrm{Im}\, F\left(e^{i\omega}\right) = \left|F\left(e^{i\omega}\right)\right| e^{i \arg F\left(e^{i\omega}\right)}.$$

Указанные компоненты спектра обладают следующим свойством.

Свойство 3. Если f – вещественная последовательность, то модуль и вещественная часть ее спектра являются четными функциями частоты, а фаза и мнимая часть – нечетными. Это свойство несложно доказать.

Принимая во внимание периодичность спектра и рассматривая его на интервале $\omega \in [0, 2\pi)$, данное свойство можно сформулировать иначе: модуль и вещественная часть спектра симметричны, а фаза и мнимая часть антисимметричны относительно середины интервала (точки $\omega = \pi$). Такая симметрия позволяет полностью описать спектр вещественной последовательности, задав его лишь на половине периода, то есть при $\omega \in [0, \pi)$. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие указанные свойства.

Пример 2.1. Определим частотную характеристику ЛИС-системы первого порядка из (1.27). Импульсная характеристика системы задается выражением (1.29). Частотную характеристику – спектр импульсной характеристики – получим, подставив выражение (1.29) в (2.2):

$$\begin{aligned} H\left(e^{i\omega}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-i\omega k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-i\omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a e^{-i\omega}\right)^k. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Полученная сумма геометрической прогрессии сходится, и притом абсолютно, если $\left|ae^{-i\omega}\right| = |a| < 1$. Одновременно обеспечивается и

сходимость ряда (1.24), то есть устойчивость системы. Пусть система устойчива. Тогда после суммирования ряда (2.9) получаем

$$H\left(e^{i\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-i\omega}}=\frac{1}{1-a\cos\omega+i\,a\sin\omega}\ .$$

Модуль и фаза частотной характеристики определяются соответственно по формулам:

$$\left|H\left(e^{i\omega}\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(1-a\cos\omega\right)^2+a^2\sin^2\omega}}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}}\ ;$$

$$\arg H\left(e^{i\omega}\right)=-\mathrm{arctg}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}.$$

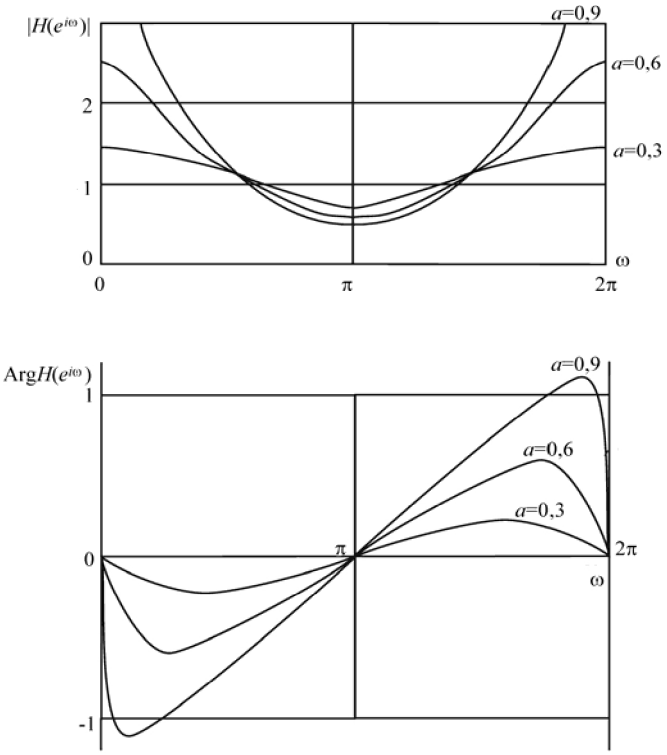


Рис. 2.1. Модуль и фаза частотной характеристики ЛИС-системы первого порядка

Частотная характеристика зависит от синуса и косинуса частоты, то есть является периодической (см. свойство 2). Семейства графиков для ее модуля и фазы при различных значениях параметра a приведены на рис. 2.1. Видно, что частотная характеристика – непрерывная функция частоты. Так как импульсная характеристика системы вещественна, частотная характеристика обладает симметрией на рассмотренном интервале (см. свойство 3).

Если $|a| \geq 1$, то ряды (1.24) и (2.2) не сходятся, система неустойчива, и ее частотная характеристика не существует.

Пример 2.2. Последовательность

$$f(n) = \frac{\sin \omega_0 n}{\pi n} \tag{2.10}$$

не удовлетворяет условию (2.8), но ее спектр существует на интервале частот $[0, \pi]$ всюду, кроме точки $\omega = \omega_0$ и равен

$$F\left(e^{i\omega}\right) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega < \omega_0, \\ 0, & \omega_0 < \omega \leq \pi, \end{cases} \tag{2.11}$$

что легко проверяется подстановкой выражения (2.11) в (2.6) с учетом симметрии спектра. Для данной последовательности ряд (2.5) является условно сходящимся, и ее спектр имеет разрыв в точке $\omega = \omega_0$.

ЛИС-система с импульсной характеристикой вида (2.10) называется *идеальным фильтром низких частот дискретного времени.* Этот фильтр удаляет из входного сигнала все спектральные составляющие в диапазоне частот $\omega_0 < \omega \leq \pi$. Такая система не является ни физически реализуемой, ни устойчивой, но тем не менее играет важную теоретическую роль в задачах синтеза цифровых фильтров.

Следующие свойства спектров касаются различных действий с ними.

Свойство 4. Преобразование Фурье линейно. Это означает, что для любых последовательностей f_1, f_2 и постоянных a, b из соотношения

$$f_3(n) = a\, f_1(n) + b\, f_2(n) \tag{2.12}$$

следует

$$F_3\left(e^{i\omega}\right) = a\, F_1\left(e^{i\omega}\right) + b\, F_2\left(e^{i\omega}\right) . \tag{2.13}$$

Свойство 5. Сдвиг последовательности соответствует умножению ее спектра на комплексную экспоненту, а именно, если

$$f_2(n) = f_1(n - n_0) \ , \tag{2.14}$$

то

$$F_2\left(e^{i\omega}\right) = F_1\left(e^{i\omega}\right)e^{-i\omega n_0} \ . \tag{2.15}$$

Такое преобразование спектра оставляет неизменным его модуль, но прибавляет к фазе слагаемое $(-\omega n_0)$, линейно зависящее от частоты.

Свойство 6. Инверсия (изменение знака аргумента последовательности) соответствует инверсии частоты в спектре, то есть если

$$f_2(n) = f_1(-n) \ , \tag{2.16}$$

то

$$F_2\left(e^{i\omega}\right) = F_1\left(e^{-i\omega}\right) \ . \tag{2.17}$$

Если инверсии подвергается вещественная последовательность, то с учетом 4-го свойства модуль и вещественная часть ее спектра остаются без изменения, а фаза и мнимая часть меняют знак, то есть получаем спектр, комплексно-сопряженный исходному.

Справедливость выражений (2.13), (2.15) и (2.17) легко проверяется подстановкой последовательностей (2.12), (2.14) и (2.16) в формулу (2.5).

Свойство 7. Свертка последовательностей соответствует произведению их спектров, то есть последовательность

$$f_3(n) = f_1(n) * f_2(n) \tag{2.18}$$

имеет спектр

$$F_3\left(e^{i\omega}\right) = F_1\left(e^{i\omega}\right)F_2\left(e^{i\omega}\right) \ . \tag{2.19}$$

Это важное свойство в других обозначениях уже доказывалось и обсуждалось в предыдущем параграфе.

Свойство 8. Произведение последовательностей соответствует свертке их спектров, а именно, если

$$f_3(n) = f_1(n)\, f_2(n) \ , \tag{2.20}$$

то

$$F_3\left(e^{i\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_1\left(e^{i\varphi}\right)F_2\left(e^{i[\omega-\varphi]}\right)d\varphi\ . \qquad (2.21)$$

Формула (2.21) определяет так называемую круговую (циклическую) свертку периодических функций F_1 и F_2 . Для доказательства свойства 8 покажем, что из соотношения (2.21) следует соотношение (2.20). Подставим формулу (2.21) в выражение обратного преобразования Фурье (2.6) и далее переменим порядок интегрирования:

$$f_3(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_3\left(e^{i\omega}\right)e^{i\omega n}d\omega=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_1\left(e^{i\omega}\right)F_2\left(e^{i[\omega-\varphi]}\right)e^{i\omega n}d\varphi d\omega=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}F_1\left(e^{i\varphi}\right)\left[\int_{-\pi}^{\pi}F_2\left(e^{i[\omega-\varphi]}\right)e^{i\omega n}\,d\omega\right]d\varphi\,.$$

Заметим, что для допустимости перемены порядка интегрирования достаточно, чтобы подынтегральное выражение (то есть спектр F_3) было ограниченным. Введем новую переменную для внутреннего интеграла: $\upsilon=\omega-\varphi$, тогда получим, что

$$f_3(n)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}F_1\left(e^{i\varphi}\right)e^{i\varphi n}\left[\int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi}F_2\left(e^{i\upsilon}\right)e^{i\upsilon n}\,d\upsilon\right]d\varphi\,.$$

Все подынтегральные выражения – периодические, интегрирование идет по периоду, поэтому можно сдвинуть пределы интегрирования для внутреннего интеграла, тогда

$$f_3(n)=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_1\left(e^{i\varphi}\right)e^{i\varphi n}d\varphi\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_2\left(e^{i\upsilon}\right)e^{i\upsilon n}\,d\upsilon\right]$$

$$=f_1(n)\,f_2(n),$$

что и требовалось доказать.

2.3 Соотношение между спектрами непрерывных и дискретных сигналов

Как уже отмечалось, дискретный сигнал (последовательность) обычно получают посредством дискретизации непрерывного сигнала. Дискретизация оказывает влияние на характеристики сигнала и, в частности, изменяет его спектр. Определим, как соотносятся между собой спектр исходной непрерывной функции времени и спектр полученной из нее последовательности.

Известно, что непрерывный сигнал $f(t)$ и его спектр $F_{\text{Н}}(\Omega)$ связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$F_{\text{Н}}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\Omega t}\, dt \ , \tag{2.22}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{Н}}(\Omega) e^{i\Omega t}\, d\Omega \ , \tag{2.23}$$

где $\Omega \left[\frac{\textit{радиан}}{c} \right]$ – угловая частота. Выражение (2.22) определяет спектр непрерывного сигнала (прямое преобразование Фурье), а выражение (2.23) дает представление сигнала через спектр (обратное преобразование). Для взаимно однозначного соответствия непрерывного сигнала и его спектра достаточно, чтобы тот и другой были абсолютно интегрируемыми на $(-\infty, \infty)$, кусочно-непрерывными и кусочно-монотонными.

Чтобы сравнить спектр (2.22) со спектром последовательности (2.5), нужно выразить последний в сопоставимых координатах, то есть задать спектр последовательности в виде функции размерной частоты. Подставляя выражение для частоты (2.1) в формулы (2.5) и (2.6), получаем

$$F\left(e^{i\Omega\Delta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta) e^{-i\Omega\Delta k} \ , \tag{2.24}$$

$$f(n\Delta) = \frac{\Delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} F\left(e^{i\Omega\Delta}\right) e^{i\Omega\Delta n}\, d\Omega \ . \tag{2.25}$$

В выражениях (2.24) и (2.25) использовано обозначение последовательности, отражающее процесс дискретизации непрерывного сигнала (см. формулу (1.1)). Спектр последовательности в формуле (2.24), в отличие от формулы (2.25), зависит от шага дискретизации Δ и является периодическим по частоте Ω с периодом $2\pi/\Delta$.

Установим связь выражений (2.24) и (2.22). Дальнейшие преобразования ведутся в предположении, что функция $F_{\text{Н}}$ ограничена и абсолютно интегрируема на $(-\infty,\infty)$. С учетом формулы (1.1) перейдем от непрерывного сигнала (2.23) к последовательности

$$f(n\Delta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_{\text{Н}}(\Omega)\,e^{i\Omega\Delta n}\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int\limits_{(2m-1)\pi/\Delta}^{(2m+1)\pi/\Delta}F_{\text{Н}}(\Omega)\,e^{i\Omega\Delta n}d\Omega.$$

Здесь на втором шаге произведена тождественная замена несобственного интеграла бесконечной суммой интегралов по смежным интервалам длиной $2\pi/\Delta$. После введения для каждого слагаемого новой переменной интегрирования $\Omega'=\Omega-\frac{2\pi}{\Delta}m$ получаем

$$f(n\Delta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta}F_{\text{Н}}\left(\Omega'+\frac{2\pi}{\Delta}m\right)e^{i\left(\Omega'+\frac{2\pi}{\Delta}m\right)\Delta n}\,d\Omega'\,.$$

Изменим порядок суммирования и интегрирования, отбросим ненужный штрих в обозначении частоты и учтем, что $e^{i2\pi mn}=1$. Тогда

$$f(n\Delta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_{\text{Н}}\left(\Omega+\frac{2\pi}{\Delta}m\right)e^{i\Omega\Delta n}d\Omega\,.$$

Сравнение полученного выражения с выражением (2.25) выявляет искомое соотношение между спектрами:

$$F\left(e^{i\Omega\Delta}\right)=\frac{1}{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_{\text{Н}}\left(\Omega+\frac{2\pi}{\Delta}m\right)\,. \qquad (2.26)$$

Таким образом, *спектр последовательности состоит из суммы бесконечного числа спектров непрерывного сигнала, сдвинутых друг относительно друга на* $2\pi/\Delta$.

Если спектр непрерывного сигнала ограничен по полосе частот, то есть

$$F_{\text{Н}}(\Omega) = 0 \quad \text{при} \quad |\Omega| \geq \pi/\Delta \ , \tag{2.27}$$

то в диапазоне $\Omega \in (-\pi/\Delta, \pi/\Delta)$, определяющем один период спектра последовательности,

$$F\left(e^{i\Omega\Delta}\right) = \frac{1}{\Delta} F_{\text{Н}}(\Omega) \ .$$

Этот факт иллюстрирует рис. 2.2. Очевидно, что в данном случае можно однозначно восстановить спектр непрерывного сигнала по спектру последовательности, а следовательно, и сам непрерывный сигнал по дискретному.

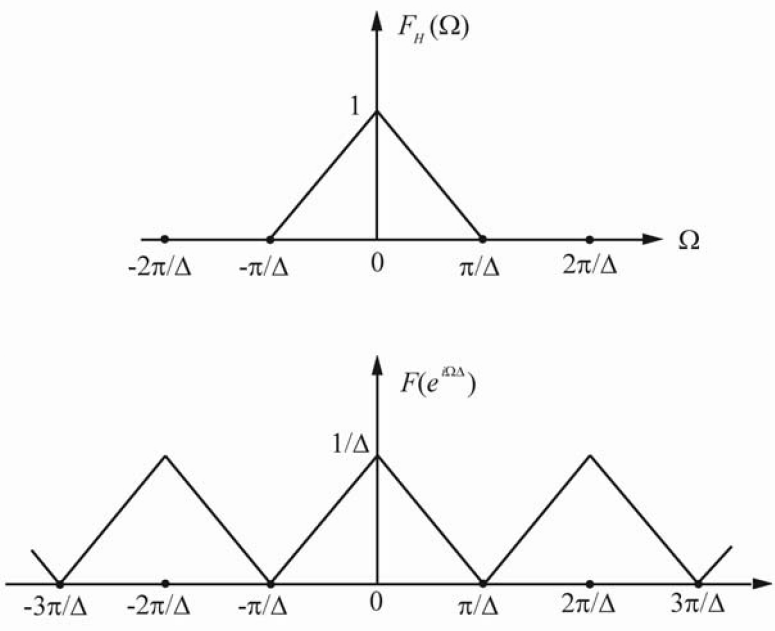


Рис. 2.2. Пример спектров непрерывного и дискретного сигналов

Если ограничение (2.27) не выполняется, то возникает *эффект наложения спектров*, выражающийся в том, что высокочастотные составляющие спектра непрерывного сигнала попадают в область более низких частот в спектре последовательности (рис. 2.3). Этот

эффект всегда нежелателен, поскольку из-за него теряется взаимно однозначная связь спектров; часть информации, содержащейся в непрерывном сигнале, необратимо теряется при дискретизации.

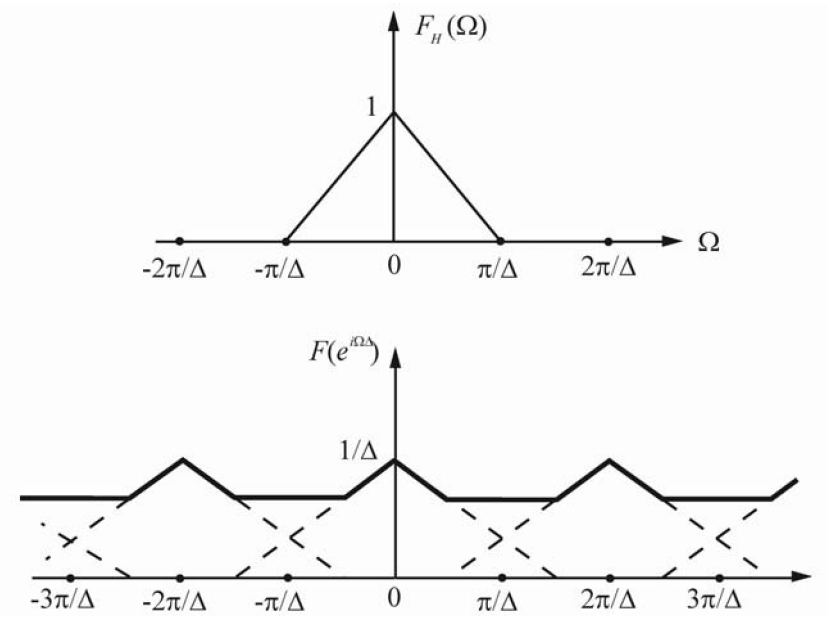


Рис. 2.3. Пример спектра непрерывного сигнала и дискретного с наложением спектров

Эффекта наложения можно избежать, если дискретизировать непрерывный сигнал с достаточно высокой скоростью: для выполнения неравенства (2.27) нужно, чтобы верхняя частота $\Omega_в$ в спектре непрерывного сигнала была меньше π/Δ, или, соответственно, шаг дискретизации

$$\Delta < \pi/\Omega_в \ . \qquad (2.28)$$

На практике выбирают $\Delta << \pi/\Omega_в$.

Неравенство (2.28) представляет собой ограничение, налагаемое на шаг дискретизации непрерывного сигнала известной *теоремой Котельникова*.

2.4 Практические задания к главе 2

Частотная характеристика, спектры последовательностей

2.4.1. ЛИС-система с вещественной импульсной характеристикой имеет следующую частотную характеристику:

$$H\left(e^{i\omega}\right)=\begin{cases}1-\frac{\omega}{\omega_0}, & 0\le\omega<\omega_0;\\ 0, & \omega_0\le\omega<\pi.\end{cases}$$

Найти и изобразить графически импульсную характеристику. Найти реакцию этой системы на входную последовательность $x(n)=\cos\frac{\pi}{3}n$.

2.4.2. Импульсная характеристика ЛИС-системы равна $h(n)=\alpha^n\left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u(n)$. Найти частотную характеристику. Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ.

2.4.3. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой $h(n)=\delta(n)+\delta(n+1)+\delta(n+2)$ подается последовательность $x(n)=\sin\frac{\pi}{3}n$. Определить выходную последовательность.

2.4.4. Дан спектр вещественной последовательности:

$$X\left(e^{i\omega}\right)=\begin{cases}1, \pi/3\le\omega\le 2\pi/3,\\ 0, 0\le\omega<\pi/3,\\ 0, 2\pi/3<\omega\le\pi.\end{cases}$$

Определить и изобразить графически для $-6\le n\le 6$ последовательность $x(n)$.

2.4.5. Доказать равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{i\omega})\right|^2 d\omega\,.$$

2.4.6. Задана частотная характеристика ЛИС-системы с вещественной импульсной характеристикой:

$$H\left(e^{i\omega}\right)=i,\ 0<\omega<\pi\ .$$

Определить импульсную характеристику. Определить сигнал на выходе системы, если на вход поступает последовательность $x(n)=\cos\frac{\pi}{2}n$.

2.4.7. Задана частотная характеристика ЛИС-системы:

$$H\left(e^{i\omega}\right)=\frac{1}{2-\cos(\omega)}\ .$$

Найти импульсную характеристику. Построить разностное уравнение. Зарисовать структурную схему. Определить реакцию этой ЛИС-системы на единичный скачок.

2.4.8. ЛИС-система описывается разностным уравнением:

$$y(n)=\beta x(n)+\alpha y(n-2)\ .$$

При каких значениях параметров α,β система устойчива? Определить выходную последовательность, если на вход системы поступает $x(n)=\cos(n)$.

2.4.9. ЛИС-система имеет импульсную характеристику:

$$h(n)=\alpha^n u(n)+\alpha^{n-1}u(n-1)+\alpha^{n-2}u(n-2)\ .$$

Найти частотную характеристику. Зарисовать АЧХ и ФЧХ.

2.4.10. ЛИС-система с вещественной импульсной характеристикой имеет частотную характеристику:

$$H\left(e^{i\omega}\right)=i\omega,\ 0\le\omega<\pi\ .$$

Найти импульсную характеристику.

2.4.11. ЛИС-система с вещественной импульсной характеристикой имеет частотную характеристику:

$$H\left(e^{i\omega}\right)=\omega,\ 0\le\omega<\pi\ .$$

Найти импульсную характеристику. Найти реакцию этой системы на входную последовательность $x(n)=1+(-1)^n$.

2.4.12. На вход дискретной ЛИС-системы, описываемой разностным уравнением

$$y(n) = \alpha y(n-2) + x(n),$$

подаётся последовательность $x(n) = \sin\frac{\pi}{3}n$. Определить выходную последовательность $y(n)$. *Указание:* использовать частотную характеристику.

2.4.13. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n+1)$ подается последовательность $x(n) = \sin\frac{\pi}{3}n$. Определить выходную последовательность. *Указание:* использовать частотную характеристику.

3 ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ *Z*-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3.1 Прямое *z*-преобразование

При изучении дискретных сигналов и систем чрезвычайно полезным оказывается представление последовательностей при помощи *z*-преобразования. Прямым *z*-преобразованием последовательности f называется комплексная функция

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}\ , \tag{3.1}$$

где z – комплексная переменная. Ниже иногда будем использовать сокращенную запись (3.1) в форме $f(n)\xrightarrow{z}F(z)$. Множество значений z, для которых ряд (3.1) сходится, и, следовательно, *z*-преобразование существует и является конечным, называется *областью сходимости* *z*-преобразования. Область сходимости зависит от формы преобразуемой последовательности.

Часто в литературе *z*-преобразование вводится в форме:

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}\ .$$

Это так называемое одностороннее *z*-преобразование, которое применяется для последовательностей, заданных только при $n\ge 0$. Выражение (3.1) задает более общее *двустороннее* *z*-преобразование. С математической точки зрения оно определяет разложение комплексной функции $F(z)$ в степенной ряд Лорана.

Если f – последовательность конечной длины, то есть $f(n)=0$ при $n\notin[N_1,N_2]$, то *z*-преобразование вычисляется как сумма конечного числа слагаемых:

$$F(z)=\sum_{k=N_1}^{N_2} f(n)z^{-n}\ . \tag{3.2}$$

Очевидно, что его область сходимости включает те значения z, при которых все слагаемые в сумме (3.2) конечны, то есть всю комплексную *z*-плоскость за исключением точки $z=0$, если $N_2>0$, и

точки $z=\infty$, если $N_1<0$. Этот факт иллюстрирует рис. 3.1,*а*, на котором область сходимости *z*-преобразования отмечена штриховкой (такой способ изображения областей сходимости будем использовать и в дальнейшем).

Для *полубесконечной левосторонней последовательности* ($f(n)=0$ при $n>N_2$):

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{N_2} f(n)z^{-n} \quad . \tag{3.3}$$

В данном случае степенной ряд бесконечен по положительным степеням *z*. Известно, что такой ряд сходится в круге с центром в начале координат (рис. 3.1,*б*), то есть при

$$|z|<R_+ \, , \tag{3.4}$$

где R_+ – внешний радиус сходимости, некоторая постоянная.

Вопрос о сходимости на границе области, то есть при $|z|=R_+$, должен исследоваться дополнительно для каждого конкретного ряда. Следует заметить, что если $N_2>0$, то ряд (3.3) содержит и конечное число членов с отрицательными степенями *z*, в этом случае, очевидно, из области сходимости исключается точка $z=0$.

Для полубесконечной правосторонней последовательности ($f(n)=0$ при $n<N_1$) имеем бесконечный ряд по отрицательным степеням *z*:

$$F(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty} f(n)z^{-n} \quad . \tag{3.5}$$

Опираясь на предыдущий случай, легко показать, что ряд (3.5) сходится во внешней части круга (рис. 3.1,*в*):

$$|z|>R_- \, , \tag{3.6}$$

где R_- – внутренний радиус сходимости, а также, возможно, на самой границе области (то есть при $|z|=R_-$). Если $N_1<0$, то из области сходимости исключается точка $z=\infty$.

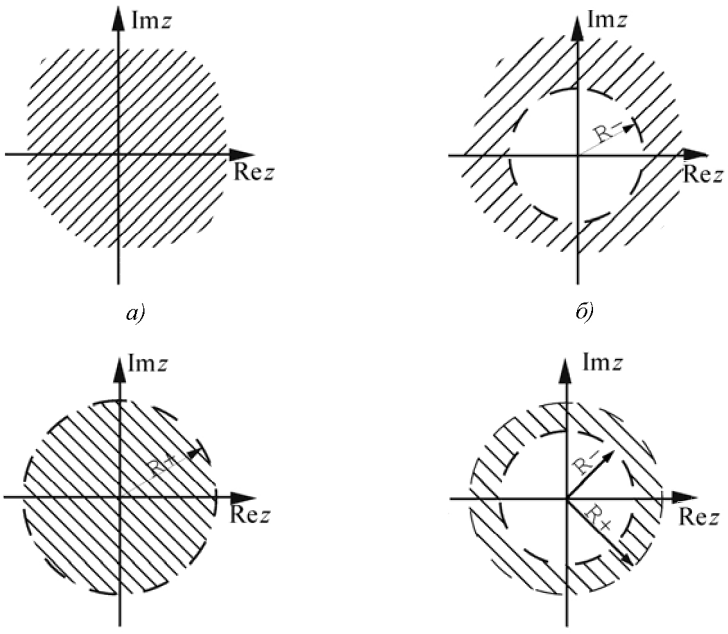


Рис. 3.1. Примеры различных областей сходимости для z-преобразования: а) конечной последовательности; б) правосторонней последовательности; в) левосторонней последовательности; г) двусторонней бесконечной последовательности

В общем случае, когда f – бесконечная двусторонняя последовательность, ее z-преобразование можно представить как сумму z-преобразований левосторонней и правосторонней последовательностей:

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{N} f(n)z^{-n}+\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)z^{-n}\,, \qquad (3.7)$$

где N – произвольное целое число. Первое слагаемое в выражении (3.7) имеет область сходимости вида (3.4), второе слагаемое – область сходимости вида (3.6). Если $R_- < R_+$, то получаем, что полное z-преобразование сходится внутри кольца (рис. 3.1,*г*):

$$R_- < |z| < R_+ \qquad (3.8)$$

и, возможно, на его границах. Если $R_- > R_+$, то области сходимости слагаемых в выражении (3.7) не пересекаются и z-преобразование

двусторонней последовательности не существует. Если $R_- = R_+$, то z-преобразование определено лишь тогда, когда оба слагаемых в выражении (3.7) сходятся на границах своих областей сходимости. Примером такого "экзотического" случая может служить z-преобразование последовательности $\frac{\sin\omega_0 n}{\pi n}$, сходящееся только на единичной окружности (см. табл. 1.1, строка 14).

Следует заметить, что функция $F(z)$, если ее задать не через ряд, а в явном виде, может иметь смысл не только в области сходимости, но и на всей комплексной плоскости. Область сходимости начинает играть роль лишь тогда, когда мы связываем эту функцию с определенной последовательностью f, то есть пытаемся получить ее, суммируя ряд (3.1). Тогда при указании области сходимости соответствие последовательности и ее z-преобразования является взаимно однозначным. Одно и то же z-преобразование, но с различными областями сходимости, соответствует разным последовательностям (см. табл. 1.1, строки 5, 6 и 8, 9), поэтому при вычислении z-преобразований и манипуляциях с ними указание областей сходимости является обязательным.

Таблица 1.1. *Z-преобразования некоторых последовательностей*

№ п/п	Последовательность	z-преобразование	Область сходимости z-преобразования
1	Единичный импульс $\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$	1	Вся z-плоскость
2	$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$	z^{-n_0}	$z\neq 0$ (при $n_0>0$) или $z\neq\infty$ (при $n_0<0$)
3	Единичный скачок $u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0,\\ 0, & n<0\end{cases}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
4	Прямоугольный импульс $u(n)-u(n-N),\ N>0$	$1+z^{-1}+z^{-2}+\ldots+z^{-(N-1)}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert\neq 0$
5	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-a\,z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$

Окончание табл. 1.1

№ п/п	Последовательность	z-преобразование	Область сходимости z-преобразования
6	$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-a\,z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7	$n a^n u(n)$	$\dfrac{a\,z^{-1}}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8	$(n+1)\,a^n u(n)$	$\dfrac{1}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
9	$-(n+1)\,a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
10	$a^n u(n)+b^{-n}u(-n-1) = \begin{cases} a^n, & n \ge 0, \\ b^{-n}, & n<0, \lvert ab\rvert<1 \end{cases}$	$\dfrac{1-ab}{\left(1-a\,z^{-1}\right)(1-b\,z)}$	$\lvert a\rvert < \lvert z\rvert < \dfrac{1}{\lvert b\rvert}$
11	$\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right)^{\lvert n\rvert}$, $\lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{1-0{,}5a\left(z+z^{-1}\right)}$	$\left\lvert\dfrac{1-\sqrt{1-a^2}}{a}\right\rvert < \lvert z\rvert < \left\lvert\dfrac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\right\rvert$
12	$a^n \cos(\omega n+\varphi)u(n)$	$\dfrac{\cos\varphi - a\cos(\varphi-\omega)z^{-1}}{1-2a(\cos\omega)z^{-1}+a^2 z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
13	$\dfrac{1}{n}u(n-1)$	$\ln\left(\dfrac{1}{1-z^{-1}}\right)$	$\lvert z\rvert \ge 1$, $z \ne 1$
14	$\dfrac{\sin\omega_0\,\pi}{\pi n}$, $0<\omega<\pi$	$\begin{cases} 1, & \lvert\arg z\rvert < \omega_0 \\ 0, & \omega_0 < \lvert\arg z\rvert \le \pi \end{cases}$	$\lvert z\rvert = 1$, $\lvert\arg z\rvert \ne \omega_0$
15	$\dfrac{a^n}{n!}u(n)$	$\exp\left(-az^{-1}\right)$	$z \ne 0$

Как следует из свойств степенных рядов, внутри области сходимости функция $F(z)$ является *аналитической*. Особые точки функции, в которых она теряет аналитичность, определяют границу области.

Важнейший класс z-преобразований представляют *дробно-рациональные функции*, то есть отношения полиномов от z или, что эквивалентно, от z^{-1} :

$$F(z)=\frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^j}{\sum_{j=0}^{M} c_j z^j}, \tag{3.9}$$

где $\{b_j\}$,$\{c_j\}$ – постоянные коэффициенты.

Особыми точками дробно-рациональной функции, которые могут ограничить область сходимости z-преобразования, являются *полюсы*, то есть те значения z, при которых она обращается в бесконечность. Очевидно, полюсы – это корни полинома в знаменателе $F(z)$. Введем в рассмотрение и нули дробно-рациональной функции – корни полинома в числителе. Разлагая полиномы на множители, можно привести формулу (3.9) к виду

$$F(z)=\frac{b_0 \prod_{j=1}^{N}\left(1-q_j z^{-1}\right)}{c_0 \prod_{j=1}^{M}\left(1-p_j z^{-1}\right)}, \tag{3.10}$$

где $\{q_j\}$ – нули, $\{p_j\}$ – полюсы.

При получении (3.10) предполагается, что коэффициенты b_0 и c_0 не равны нулю. В более общем случае, когда $b_0, b_1, ..., b_{N_1}$ и $c_0, c_1, ..., c_{M_1}$ все равны нулю $(N_1 < N,\ M_1 < M)$, выражение (3.10) принимает вид:

$$F(z)=\frac{b_{N_1+1}}{c_{M_1+1}} z^{(M_1-N_1)} \frac{\prod_{j=1}^{N-N_1}\left(1-q_j z^{-1}\right)}{\prod_{j=1}^{M-M_1}\left(1-p_j z^{-1}\right)},$$

здесь кроме нулей $\{q_j\}$ и полюсов $\{p_j\}$ имеется еще $(M_1 - N_1)$ -кратный нуль (если $M_1 > N_1$) или $(N_1 - M_1)$ -кратный полюс (если $N_1 > M_1$) в начале координат.

Как следует из формулы (3.10), дробно-рациональное z-преобразование с точностью до константы описывается расположением нулей и полюсов в z-плоскости. Диаграмма нулей и полюсов в сопоставлении с областью сходимости z-преобразования наглядно отражает основные качественные характеристики последовательности. Отметим, что область сходимости дробно-рационального z-преобразования никогда не включает границы, то есть соответствует строгим неравенствам (3.4), (3.6) или (3.8).

Пример 3.1. Вычислим z-преобразование правосторонней экспоненты $f(n) = a^n\, u(n)$. В соответствии с формулой (3.1) имеем

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n\, u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n .$$

Этот ряд (геометрическая прогрессия) сходится, если $\left|a\, z^{-1}\right| < 1$ или $|z| > |a|$. При этом $F(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$.

Данное дробно-рациональное z-преобразование имеет единственный полюс в точке $z = a$ и единственный нуль в начале координат. Соответствующая ему диаграмма нулей и полюсов для вещественного положительного a приведена на рис. 3.2 (на этом и следующих рисунках полюсы обозначаются крестиком, а нули – кружочком).

Еще раз обратимся к выражению (3.1). Если комплексную переменную представить через модуль и фазу: $z = r\, e^{i\omega}$, то

$$F(z) = F\left(re^{i\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, r^{-n}\, e^{-i\omega n} . \qquad (3.11)$$

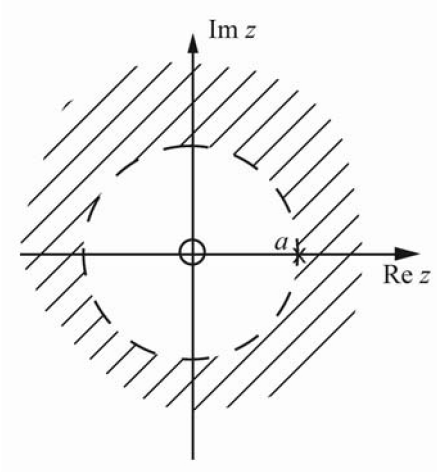


Рис. 3.2. Диаграмма нулей и полюсов для z-преобразования правосторонней экспоненты

При $r=1$ выражение (3.1) совпадает с (2.5), то есть z-преобразование превращается в спектр последовательности. Таким образом, спектр последовательности – это ее z-преобразование, вычисленное на единичной окружности (рис. 3.3):

$$F\left(e^{i\omega}\right)=F(z)\Big|_{z=e^{i\omega}} \quad . \tag{3.12}$$

Разумеется, выражение (3.12) имеет смысл только тогда, когда единичная окружность принадлежит области сходимости z-преобразования, то есть когда $R_{-}<1$, и $R_{+}>1$ (см. формулы (3.4), (3.6), (3.8)). Если область сходимости не включает единичную окружность, то спектр последовательности не определен, однако z-преобразование существует. Следовательно, z-преобразование является более общим средством описания последовательностей, чем спектр Фурье. Класс последовательностей, описываемых при помощи z-преобразования, включает не только затухающие в обе стороны последовательности, для которых сходится ряд (2.5), но и многие другие, не являющиеся ограниченными при устремлении аргумента к плюс или минус бесконечности.

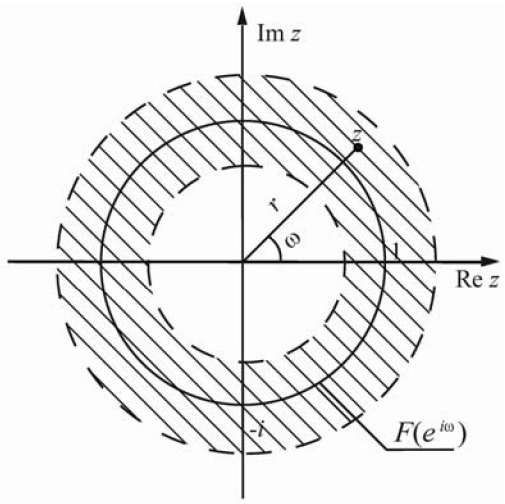


Рис. 3.3. Иллюстрация к интерпретации спектра последовательности

3.2 Основные свойства *z*-преобразования

Для работы с *z*-преобразованиями и, в частности, для вычисления *z*-преобразований последовательностей, не вошедших в приведенную выше таблицу, могут оказаться полезными следующие их свойства.

Свойство 1. *Z*-преобразование последовательности *f* существует, и ряд (3.1) сходится в кольце

$$R_- < |z| < R_+ \ , \tag{3.13}$$

где R_- – неотрицательная, а R_+ – положительная константы $(R_- < R_+)$, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f(n)|} = R_- \ ,$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f(-n)|} = R_+ \ , \tag{3.14}$$

где $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}$ означает верхний предел последовательности.

Напомним, что *верхним пределом действительной последовательности a(n)* называется число A такое, что:

1) существует подпоследовательность данной последовательности, стремящаяся к A;

2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое N, что $a(n) < A + \varepsilon$ при $n \geq N$.

Всякая последовательность имеет единственный (конечный или бесконечный) верхний предел. Верхний предел совпадает с пределом в обычном смысле, если последний существует.

На границах кольца, то есть при $|z| = R_-$ и $|z| = R_+$ z-преобразование может как сходиться, так и расходиться. Примем этот результат без доказательства, ограничившись его простой интерпретацией. Пределы (3.14) означают, что абсолютные значения элементов последовательности могут, например, иметь экспоненциальную асимптотику:

$$|f(n)| \sim A_1 R_-^n \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$|f(n)| \sim A_2 R_+^n \quad \text{при} \quad n \to -\infty,$$

где A_1, A_2 – некоторые положительные числа.

Если $R_+ > R_- > 1$, то последовательность $|f(n)|$ является расходящейся, то есть $\lim\limits_{n \to -\infty} |f(n)| = 0$, $\lim\limits_{n \to -\infty} |f(n)| = \infty$.

Если $R_- < R_+ < 1$, то она сходится к нулю: $\lim\limits_{n \to -\infty} |f(n)| = \infty$, $\lim\limits_{n \to -\infty} |f(n)| = 0$.

При $R_- < 1$ имеем затухающую в обе стороны последовательность $\lim\limits_{n \to \pm\infty} |f(n)| = 0$, для которой выполняется условие абсолютной суммируемости (2.8).

Свойство 2. Z-преобразование линейно, то есть если

$$f_1(n) \xrightarrow{z} F_1(z), \quad f_2(n) \xrightarrow{Z} F_2(z),$$

то для любых постоянных a, b:

$$a f_1(n) + b f_2(n) \xrightarrow{Z} a F_1(z) + b F_2(z). \qquad (3.15)$$

Справедливость соотношения (3.15) вытекает из самого определения z-преобразования (3.1). Областью сходимости суммы (3.15) является пересечение областей сходимости слагаемых. Исключение составляют ситуации, когда, например, при линейной комбинации дробно-рациональных z-преобразований появившиеся нули компен-

сируют некоторые полюсы. В этом случае область сходимости может расшириться (такой эффект имел место при переходе от z-преобразования единичного скачка к z-преобразованию прямоугольного импульса, см. табл. 1.1, строки 3 и 4).

Свойство 3. Сдвиг последовательности соответствует умножению ее z-преобразования на целую степень z, а именно, если

$$f_2(n) = f_1(n - n_0), \tag{3.16}$$

то

$$F_2(z) = z^{-n_0} F_1(z). \tag{3.17}$$

Для доказательства достаточно подставить последовательность (3.16) в формулу (3.1) и заменить переменную при суммировании:

$$F_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n - n_0) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) z^{-m-n_0} =$$

$$= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m) z^{-m} = z^{-n_0} F_1(z).$$

При сдвиге последовательности область сходимости z-преобразования не изменяется – за исключением, возможно, точек $z = 0$ и $z = \infty$.

Свойство 4. Умножение последовательности на аргумент соответствует дифференцированию ее z-преобразования, а точнее, если

$$f_2(n) = n f_1(n), \tag{3.18}$$

то

$$F_2(z) = -z \frac{dF_1(z)}{dz}. \tag{3.19}$$

Докажем это, для чего запишем сумму (3.1) относительно последовательности f_1 и продифференцируем:

$$\frac{dF_1(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n) z^{-n}.$$

Внутри области сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно, поэтому

$$\frac{dF_1(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nf_1(n)z^{-n} =$$

$$= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_2(n)z^{-n} = -z^{-1} F_2(z),$$

что эквивалентно соотношению (3.19). При умножении последовательности на аргумент область сходимости z-преобразования не меняется за исключением, возможно, точек границ области, на которых функция $F_1(z)$ теряет аналитичность.

Свойство 5. Умножение последовательности на экспоненту изменяет масштаб аргумента в z-преобразовании. Если $f_1(n) \xrightarrow{Z} F_1(z)$ с областью сходимости $R_- < |z| < R_+$ и

$$f_2(n) = a^n f_1(n), \tag{3.20}$$

то

$$F_2(z) = F_1(z/a) \tag{3.21}$$

с областью сходимости $|a|R_- < |z| < |a|R_+$. Для доказательства этого свойства подставим последовательность (3.20) в формулу (3.1):

$$F_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n f_1(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(n)(z/a)^{-n} = F_1(z/a),$$

что и требуется получить. Область сходимости для $F_2(z)$ получается подстановкой z/a вместо z в неравенство для области сходимости $F_1(z)$.

Свойство 6. Инверсия (изменение знака) времени последовательности приводит к замене переменной z на z^{-1} в выражении z-преобразования, то есть, если $f_1(n) \xrightarrow{Z} F_1(z)$ с областью сходимости $R_- < |z| < R_+$ и

$$f_2(n) = f_1(-n), \tag{3.22}$$

то

$$F_2(z) = F_1\left(z^{-1}\right) \tag{3.23}$$

с областью сходимости $(1/R_+)<|z|<(1/R_-)$. Доказательство этого свойства сводится к подстановке последовательности (3.22) в формулу (3.1) и замене переменной при суммировании:

$$F_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_1(-n)z^{-n}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m)z^{m}=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_1(m)\left(z^{-1}\right)^{-m}=F_1\left(z^{-1}\right).$$

Область сходимости $F_2(z)$ получим, подставив z^{-1} вместо z в неравенство для области сходимости $F_1(z)$.

Свойство 7. Свертка последовательностей соответствует произведению их z-преобразований. Если

$$f_3(n)=f_1(n)*f_2(n)\,, \tag{3.24}$$

то

$$F_3(n)=F_1(n)F_2(n)\,. \tag{3.25}$$

Нетрудно провести доказательство этого свойства, с точностью до обозначений совпадающее с доказательством аналогичного свойства для спектров (см. парагр. 2.2). Областью сходимости $F_3(z)$ является пересечение областей сходимости $F_1(z)$ и $F_2(z)$. Исключение составляют случаи компенсации полюсов $F_1(z)$ нулями $F_2(z)$ или, наоборот, при которых область сходимости может расширяться.

3.3 Обратное z-преобразование

Установим правило перехода от z-преобразования к исходной последовательности. Соотношение для такого обратного z-преобразования можно вывести из интегральной теоремы Коши, из которой следует, что

$$\oint_C z^{k-1}dz=2\pi i\,\delta(k)\,, \tag{3.26}$$

где интеграл берется против часовой стрелки по замкнутому контуру C, охватывающему начало координат комплексной z-плоскости.

Умножим обе части выражения (3.1) на z^{k-1} и проинтегрируем по C, выбрав контур так, чтобы он полностью лежал внутри области сходимости z-преобразования:

$$\oint_C F(z) z^{k-1} dz = \oint_C z^{k-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} dz .$$

Равномерно сходящийся на C ряд можно интегрировать почленно, поэтому с учетом формул (3.26) и (1.18) имеем

$$\oint_C F(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \oint_C z^{k-n-1} dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, \delta(k-n) = 2\pi i f(k).$$

Отсюда следует окончательное соотношение для обратного z-преобразования:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F(z) z^{n-1} dz , \qquad (3.27)$$

где C – контур, окружающий начало координат с направлением обхода против часовой стрелки и расположенный в области сходимости $F(z)$.

Практически взять интеграл (3.27) можно несколькими способами. Если подынтегральная функция

$$W(z) = F(z) z^{n-1} \qquad (3.28)$$

является аналитической во всей внутренней области контура, за исключением конечного числа особых точек, то универсальный способ вычисления дает *теорема о вычетах*. В соответствии с ней интеграл (3.27) определяется через сумму вычетов:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C W(z) dz = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\left[W(z), z = p_j \right], \qquad (3.29)$$

где N – число особых точек внутри контура C; $\{p_j\}$ – особые точки; $\mathrm{Res}\left[W(z), z = p_j \right]$ – вычет функции $W(z)$ в точке $z = p_j$.

Для функции $W(z)$, имеющей своими особыми точками полюсы, вычеты вычисляются следующим образом. Если полюс в точке $z = p_j$ простой, то есть $W(z)$ можно представить в виде

$$W(z) = \frac{U(z)}{z - p_j},$$

где $U(z)$ – функция, не имеющая особенностей (аналитическая) в точке $z = p_j$, то

$$\operatorname{Res}\left[W(z), z = p_j\right] = \lim_{z \to p_j}\left[\left(z - p_j\right)W(z)\right] = U\left(p_j\right). \qquad (3.30)$$

Если полюс в точке $z = p_j$ *l-кратный*, то есть:

$$W(z) = \frac{U(z)}{\left(z - p_j\right)^l}, \quad l \geq 2,$$

то

$$\operatorname{Res}\left[W(z), z = p_j\right] = \frac{1}{(l-1)!}\lim_{z \to p_j}\frac{d^{l-1}}{d\,z^{(l-1)}}\left[\left(z - p_j\right)^l W(z)\right] = \\ = \frac{1}{(l-1)!}\frac{d^{l-1}U(z)}{d\,z^{(l-1)}}\bigg|_{z=p_j}. \qquad (3.31)$$

Выражения (3.28) – (3.31) позволяют находить, в частности, обратные z-преобразования для дробно-рациональных функций $F(z)$.

Пример 3.2. Вычислим последовательность, соответствующую z-преобразованию $F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ с областью сходимости $|z| > |a|$.

Согласно соотношению (3.27), в данном случае

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{z - a}dz.$$

Контур интегрирования C должен располагаться в области сходимости, то есть вне круга радиуса $|a|$ с центром в начале координат. При $n \geq 0$ подынтегральная функция $W(z) = \frac{z^n}{z - a}$ имеет один простой

полюс в точке $z = a$. При $n < 0$ появляется второй полюс кратности ($-n$) в начале координат. Взаимное расположение области сходимости, контура интегрирования и обоих полюсов показано на рис. 3.4. Как видно, оба полюса охватываются контуром. В соответствии с выражениями (3.29) и (3.30) при $n \geq 0$:

$$f(n) = \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-a}, z = a\right] = a^n \ .$$

При $n<0$ последовательность определяется как сумма двух вычетов, значение первого из которых уже найдено:

$$\begin{aligned} f(n) &= \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-a}, z = a\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-a}, z = 0\right] = \\ &= a^n + \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{z-a}, z = 0\right]. \end{aligned} \qquad (3.32)$$

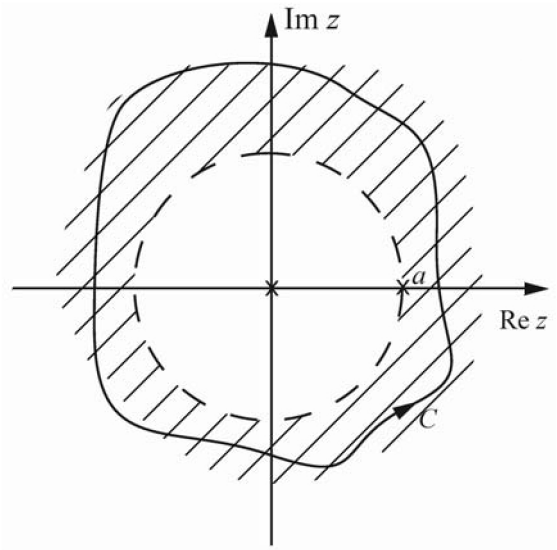


Рис. 3.4. Взаимное расположение области сходимости, контура интегрирования и полюсов: иллюстрация к примеру

Найдем вычет в начале координат. При $n=-1$ полюс в $z=0$ простой, и поэтому $\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(z-a)}, z=0\right]=-a^{-1}$. При $n=-2$ полюс двукратный. В соответствии с выражением (3.31):

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{z^2(z-a)}, z=0\right]=\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right)\Bigg|_{z=0}=-\frac{1}{(z-a)^2}\Bigg|_{z=0}=-a^{-2}.$$

Для произвольного отрицательного n получается:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{z^{(-n)}(z-a)}, z=0\right]=\frac{1}{(-n-1)!}\frac{d^{(-n-1)}}{dz^{(-n-1)}}\left(\frac{1}{z-a}\right)\Bigg|_{z=0}= \\ =\frac{(-1)^{(-n-1)}}{(z-a)^{(-n)}}\Bigg|_{z=0}=-a^n. \tag{3.33}$$

Таким образом, подставив выражение (3.33) в формулу (3.32), при $n<0$ имеем $f(n)=a^n-a^n=0$.

Окончательный результат:

$$f(n)=\left\{\begin{matrix} a^n, & n\geq 0 \\ 0, & n<0 \end{matrix}\right\}=a^n u(n).$$

Непосредственное вычисление обратного z-преобразования методом вычетов может оказаться весьма трудоемким, особенно если у функции $F(z)$ имеется много особых точек. На практике чаще используют обходной путь, приводя $F(z)$ к представлению в виде суммы простых функций, обратные z-преобразования которых известны. Так, для дробно-рациональной функции $F(z)$ общего вида (3.9) применяется ее разложение на простые дроби:

$$F(z)=\frac{P\left(z^{-1}\right)}{Q\left(z^{-1}\right)}=A\left(z^{-1}\right)+\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{l_j}\frac{C_{jk}}{\left(1-p_j z^{-1}\right)^k}, \tag{3.34}$$

где $P\left(z^{-1}\right), Q\left(z^{-1}\right), A\left(z^{-1}\right)$ – полиномы от z^{-1}; M – общее число полюсов; l_j – кратность полюса; p_j, C_{jk} – постоянные коэффициенты.

Слагаемое A в разложении (3.34) присутствует, если степень полинома P не меньше степени полинома Q, и определяется алгебраическим делением P на Q. Значения постоянных C_{jk} можно найти методом неопределенных коэффициентов (см. пример ниже). Выражение (3.34) позволяет представить произвольную дробно-рациональную функцию через сумму табличных z-преобразований.

При переходе от выражения (3.34) к самой последовательности следует обращать особое внимание на взаимное расположение полюсов z-преобразования и его области сходимости вида (3.8). Как уже отмечалось, именно полюсы определяют радиусы области сходимости. Простая дробь

$$\frac{C_{jk}}{\left(1-p_j z^{-1}\right)^k}$$

соответствует последовательности правосторонней, если $\left|p_j\right| \le R_-$, и левосторонней, если $\left|p_j\right| \ge R_+$. Область сходимости такого элементарного z-преобразования будет определяться соответственно неравенством $|z| > \left|p_j\right|$ или $|z| < \left|p_j\right|$.

Пример 3.3. Определим последовательность, соответствующую z-преобразованию

$$F(z) = \frac{1-ab}{(1-bz)\left(1-az^{-1}\right)}, \quad |ab| < 1 \tag{3.35}$$

с областью сходимости

$$|a| < |z| < \frac{1}{|b|}. \tag{3.36}$$

Для этого запишем выражение (3.35) в виде отношения полиномов по отрицательным степеням z:

$$F(z) = \frac{\left(a-\frac{1}{b}\right)z^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{b}z^{-1}\right)}, \tag{3.37}$$

а затем, учитывая наличие полюсов в точках $z=a$ и $z=1/b$, произведем разложение на простые дроби:

$$F(z)=\frac{C_1}{1-az^{-1}}+\frac{C_2}{1-\frac{1}{b}z^{-1}}. \qquad (3.38)$$

где C_1, C_2 – неопределенные коэффициенты. Для отыскания C_1 и C_2 приведем выражение (3.38) к общему знаменателю и сравним его с записью (3.37):

$$\frac{C_1-\frac{1}{b}C_2 z^{-1}+C_2-aC_2 z^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{b}z^{-1}\right)}=\frac{\left(a-\frac{1}{b}\right)z^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{b}z^{-1}\right)}.$$

Приравнивая в числителях коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ -\frac{1}{b}C_1-aC_2=a-\frac{1}{b}, \end{cases}$$

решение которой дает: $C_1=1, C_2=-1$, то есть

$$F(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}-\frac{1}{a-\frac{1}{b}z^{-1}}=F_1(z)+F_2(z). \qquad (3.39)$$

Первое слагаемое $F_1(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$ имеет полюс в точке $z=a$, расположенной на внутренней границе кольца сходимости (3.36), как показано на рис. 3.5. Следовательно, оно соответствует правосторонней последовательности и имеет область сходимости $|z|>|a|$.

Из таблицы z преобразований получаем:

$$f_1(n)=a^n u(n).$$

Второе слагаемое в сумме (3.39)

$$F_2(z)=\frac{-1}{a-\frac{1}{b}z^{-1}}$$

имеет полюс в точке $z=1/b$, расположенной на внешней границе кольца сходимости (3.36). Следовательно, оно соответствует левосторонней последовательности и имеет область сходимости $|z|<1/|b|$. Из таблицы z-преобразований: $f_2(n)=b^{-n}u(-n-1)$.

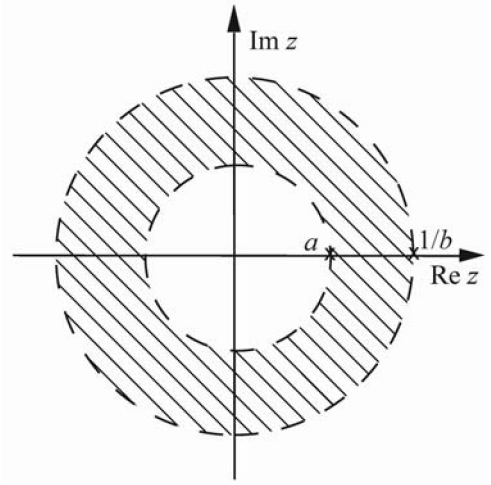


Рис. 3.5. Расположение полюсов: иллюстрация к примеру

В силу линейности z-преобразования окончательный результат получаем в виде

$$f(n)=f_1(n)+f_2(n)=a^n u(n)+b^{-n}u(-n-1)=\begin{cases} a^n, & n\geq 0, \\ b^{-n}, & n<0. \end{cases}$$

3.4 Анализ и синтез ЛИС-систем с использованием z-преобразования

Определим *передаточную функцию* дискретной ЛИС-системы как z-преобразование ее импульсной характеристики:

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}. \qquad (3.40)$$

Передаточная функция является еще одной формой описания ЛИС-системы, она однозначно определяет закон преобразования входной последовательности в выходную. Действительно, учитывая

соответствие формул (3.24) и (3.25), свертку (1.14) можно записать в z-области в виде

$$G(z) = F(z)H(z), \tag{3.41}$$

где $G(z), F(z)$ – z-преобразования выходной и входной последовательностей. Область сходимости $G(z)$ состоит как минимум из пересечения областей сходимости $F(z)$ и $H(z)$.

Выражение, аналогичное (3.41), мы имели и раньше при описании ЛИС-системы в частотной области (см. формулу (2.7)). Это естественно, ведь в соответствии с соотношением (3.12) частотная характеристика системы есть ее передаточная функция (а спектр дискретного сигнала – его z-преобразование) при значениях переменной z, взятых на единичной окружности в комплексной z-плоскости. Однако понятие передаточной функции существенно шире понятия частотной характеристики, поскольку применимо и к системам, для которых ряд (3.40) не сходится на единичной окружности.

Передаточную функцию нетрудно получить непосредственно из разностного уравнения ЛИС-системы. Покажем это на примере физически реализуемой системы, описываемой разностным уравнением (3.35). Используя сформулированные в парагр. 3.2 свойства 2 и 3 z-преобразования (линейность и сдвиг последовательности), уравнение (3.35) можно записать в преобразованной форме:

$$G(z) = \sum_{j=1}^{M} a_j G(z) z^{-j} + \sum_{j=0}^{N} b_j F(z) z^{-j} =$$

$$= G(z) \sum_{j=1}^{M} a_j z^{-j} + F(z) \sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j} \quad .$$

Отсюда легко выражается $G(z)$ в явном виде:

$$G(z) = F(z) \frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}}{1 - \sum_{j=1}^{M} a_j z^{-j}} . \tag{3.42}$$

Сопоставив выражения (3.42) и (3.41), видим, что

$$H(z)=\frac{\sum_{j=0}^{N} b_j z^{-j}}{1-\sum_{j=1}^{M} a_j z^{-j}}. \qquad (3.43)$$

Полученная передаточная функция $H(z)$ отличается от записи (3.9) только обозначениями коэффициентов в знаменателе, то есть является дробно-рациональной. Нетрудно показать, что ЛИС-системы, допускающие представление в виде разностных уравнений конечного порядка, всегда имеют дробно-рациональные передаточные функции.

Заметим, что переход от уравнения (1.26) к (3.42) по существу определяет метод решения линейных разностных уравнений с помощью z-преобразования. В отличие от громоздкого и неуниверсального метода прямой подстановки, рассмотренного в парагр. 1.4, в данном случае можно получить результат в общем виде и не указывать начальные значения для участвующих в решении последовательностей (предполагается, что они являются бесконечными, то есть заданы для всех значений дискретного времени).

Пример 3.4. На вход ЛИС-системы, описываемой разностным уравнением (1.27), поступает сигнал – правосторонняя экспонента:

$$f(n)=b^n u(n), \quad b\neq a\ . \qquad (3.44)$$

Определим последовательность на выходе системы. Для этого перейдем от разностного уравнения к передаточной функции:

$$G(z)=aG(z)z^{-1}+F(z)\ ,$$

$$G(z)=F(z)\frac{1}{1-a\,z^{-1}}\ , \qquad (3.45)$$

$$H(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}. \qquad (3.46)$$

Передаточная функция имеет один полюс в точке $z = a$ и соответствует правосторонней импульсной характеристике (так как система физически реализуема). Следовательно, область сходимости $H(z)$ – внешняя часть круга: $|z|>|a|$. Определив по таблице z-преобразований соответствующую передаточной функции (3.46) импульсную характеристику

$$h(n) = a^n u(n),$$

можно записать решение разностного уравнения во временной области в виде свертки:

$$g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k f(n-k),$$

что совпадает с выражением (1.30). Однако в данном случае нам известна входная последовательность, поэтому можно конкретизировать результат. Для последовательности (3.44) из таблицы находим

$$F(z) = \frac{1}{1 - b z^{-1}}, \quad |z| > |b|. \tag{3.47}$$

Подставив формулы (3.36) и (3.47) в (3.41), получим

$$G(z) = \frac{1}{\left(1 - a z^{-1}\right)\left(1 - b z^{-1}\right)}, \quad |z| > \max\{|a|, |b|\}.$$

После разложения $G(z)$ на простые дроби имеем

$$G(z) = \frac{a}{a-b} \times \frac{1}{1 - a z^{-1}} - \frac{b}{a-b} \times \frac{1}{1 - b z^{-1}}. \tag{3.48}$$

Сопоставление полюсов функции $G(z)$ с ее областью сходимости показывает, что оба слагаемых в выражении (3.48) соответствуют правосторонним последовательностям. После перехода от (3.48) к последовательности получаем окончательный результат:

$$g(n) = \frac{a}{a-b} a^n u(n) - \frac{b}{a-b} b^n u(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} u(n).$$

Выполняя последовательность преобразований (1.26) в (3.43) в обратном порядке, можно перейти от дробно-рациональной передаточной функции к разностному уравнению. Это открывает простую возможность синтеза структуры ЛИС-системы с заданной импульсной характеристикой.

Пример 3.5. Построим структурную схему ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = a^n \left(\cos\frac{\pi}{2} n\right) u(n). \tag{3.49}$$

С помощью таблицы z-преобразований перейдем от характеристики (3.49) к передаточной функции системы:

$$H(z)=\frac{1}{1+a^2z^{-2}},\quad |z|>|a|\ .$$

В соответствии с выражением (3.41)

$$G(z)=F(z)H(z)=F(z)\frac{1}{1+a^2z^{-2}}$$

или

$$G(z)\left(1+a^2z^{-2}\right)=F(z)\ ,$$

$$G(z)=-a^2G(z)z^{-2}+F(z)\ .$$

Последнему соотношению во временной области соответствует разностное уравнение

$$g(n)=-a^2\,g(n-2)+g(n)\ . \qquad (3.50)$$

Структурная схема системы, описываемой разностным уравнением (3.50), представлена на рис. 3.6.

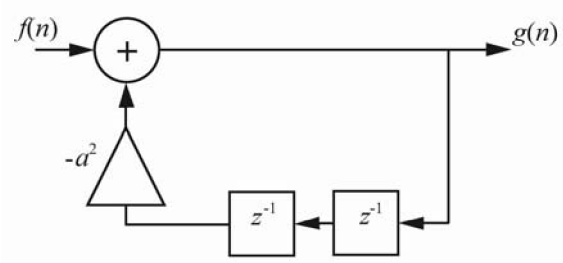


Рис. 3.6. Структурная схема, описываемая разностным уравнением (3.50)

Формулу (3.41) можно использовать и для определения передаточной функции ЛИС-системы по известным сигналам на входе и выходе, то есть для синтеза системы, осуществляющей заданное преобразование:

$$H(z)=\frac{G(z)}{F(z)}\ , \qquad (3.51)$$

а также для определения входного сигнала по известным выходному сигналу и передаточной функции:

$$F(z)=\frac{G(z)}{H(z)}. \qquad (3.52)$$

При этом, однако, следует учитывать, что соотношения (3.51) и (3.52) не всегда позволяют однозначно определить последовательность h и f соответственно, так как во многих случаях можно произвольно назначать область сходимости и, следовательно, получать правосторонние, левосторонние или двусторонние последовательности.

Пример 3.6. Определим, какую последовательность f нужно подать на выход ЛИС-системы с импульсной характеристикой $h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)$, чтобы получить на выходе $g(n)=3u(n)$.

Перейдем к z-преобразованиям:

$$H(z)=1+2z^{-1},\ z\neq 0;\ G(z)=\frac{3}{1-z^{-1}},\ |z|>1.$$

В соответствии с формулой (3.52) z-преобразование входной последовательности:

$$F(z)=G(z)\frac{1}{H(z)}=\frac{3}{1-z^{-1}}\frac{1}{1+2z^{-1}}. \qquad (3.53)$$

Для первого сомножителя в выражении (3.53) область сходимости известна $(|z|>1)$. Для второго ее можно назначить либо внутри окружности, проходящей через полюс в точке $z=-2$, либо вне ее. В первом случае область сходимости $F(z)$ – кольцо: $1<|z|<2$, то есть f будет двусторонней последовательностью. Во втором случае область сходимости $F(z)$ – внешняя часть круга: $|z|>2$, то есть f – правосторонняя последовательность. Таким образом, задача имеет два решения:

а) f – двусторонняя последовательность:

$$F(z)=\frac{3}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)}=\underset{1<|z|<2}{\frac{1}{1-z^{-1}}}+\underset{|z|>1}{\frac{2}{1+2z^{-1}}}$$

$$f(n) = u(n) - 2(-2)^n u(-n-1);$$

б) f – правосторонняя последовательность:

$$F(z) = \frac{3}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}\right)} = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{2}{1+2z^{-1}}$$

$$|z| > 2 \qquad |z| > 1 \qquad |z| > 2$$

$$f(n) = \left[1 + 2(-2)^n\right] u(n).$$

Ранее было сформулировано условие устойчивости ЛИС-системы, выраженное как требование абсолютной суммируемости ее импульсной характеристики (см. неравенство (1.24)). То же условие можно выразить и как требование к передаточной функции системы. Имеется простая взаимосвязь между расположением полюсов на z-плоскости, областью сходимости передаточной функции и такими свойствами системы, как устойчивость и физическая реализуемость. Неравенство (1.24) означает, что ряд (3.40) абсолютно сходится на единичной окружности, а такое возможно, если единичная окружность расположена в области сходимости ряда. Следовательно, ЛИС-система является устойчивой, если область сходимости передаточной функции содержит внутри себя окружность единичного радиуса на z-плоскости.

Как уже говорилось, область сходимости дробно-рационального z-преобразования ограничена полюсами. Если ЛИС-система физически реализуема, то есть ее импульсная характеристика является правосторонней последовательностью, удовлетворяющей условию (1.21), то область сходимости передаточной функции – внешняя часть круга, проходящего через наиболее удаленный от начала координат полюс. Такая система устойчива, если все полюсы ее передаточной функции лежат внутри единичной окружности. Пример диаграммы полюсов для устойчивой физически реализуемой системы дан на рис. 3.7.

Отметим, наконец, следующее: в соответствии с формулами (1.19), (1.20) и свойствами z-преобразования при последовательном соединении N ЛИС-систем (звеньев) передаточная функция объединенной системы

$$H(z) = \prod_{j=1}^{N} H_j(z), \qquad (3.54)$$

где $H_j(z)$ – передаточная функция j-го звена, а при параллельном соединении

$$H(z)=\sum_{j=1}^{N} H_j(z) \quad . \tag{3.55}$$

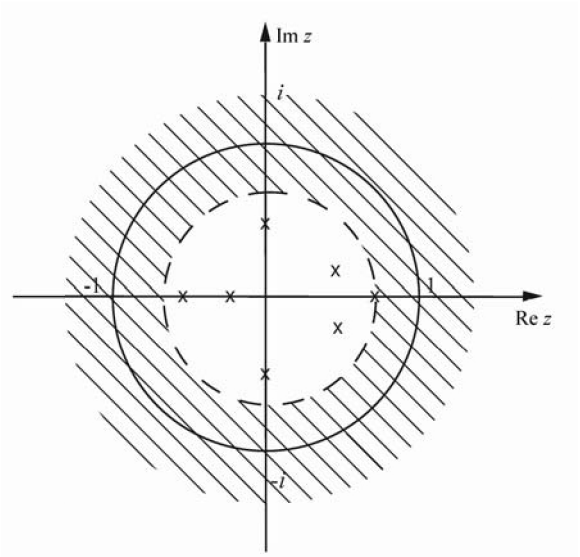


Рис. 3.7. Диаграмма полюсов для устойчивой физически реализуемой ЛИС-системы

Соотношение (3.54) используется при реализации системы в последовательной (каскадной) форме, а соотношение (3.55) – в параллельной. Представление дробно-рациональной передаточной функции в виде (3.54) легко получить, выразив ее через нули и полюсы (см. формулу (3.10)), а представление в виде суммы (3.55) – разложив ее на простые дроби (см. формулу (3.34)).

3.5 Практические задания к главе 3

Прямое z-преобразование

3.5.1. Вычислить z-преобразование последовательности:

$$x(n)=\left(\alpha^n+\beta^n\right)u(n), \quad |\alpha|<|\beta| .$$

Указать область сходимости.

3.5.2. Вычислить *z*-преобразование последовательности:

$$x(n)=\alpha^{|n|}+\beta^{|n|},\quad |\alpha|<|\beta|<1.$$

Указать область сходимости.

3.5.3. Вычислить *z*-преобразование последовательности:

$$x(n)=\alpha^{n}\left(\sin\frac{\pi}{2}n\right)u(n).$$

Указать область сходимости.

3.5.4. Вычислить *z*-преобразование последовательности:

$$x(n)=\alpha^{n}\left(u(n)-u(n-3)\right).$$

Указать область сходимости.

3.5.5. Вычислить *z*-преобразование последовательности:

$$x(n)=\alpha^{n}u(-n).$$

Указать область сходимости.

3.5.6. Вычислить *z*-преобразование последовательности:

$$x(n)=\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1).$$

Указать область сходимости.

3.5.7. Вычислить *z*-преобразование последовательности:

$$x(n)=\begin{cases}1/n, n\geq 1,\\ 0, n<1\end{cases}$$

без использования таблицы *z*-преобразования.

3.5.8. Вычислить *z*-преобразование последовательности:

$$x(n)=\begin{cases}1/n!, n\geq 0\\ 0, n<0\end{cases}$$

без использования таблицы *z*-преобразования.

Обратное z-преобразование

3.5.9. Вычислить обратное *z*-преобразование методом вычетов:

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^2},\quad |z|>|\alpha|.$$

3.5.10. Вычислить обратное *z*-преобразование методом вычетов:

$$X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\quad |z|<|\alpha|.$$

3.5.11. Вычислить обратное *z*-преобразование для

$$X(z)=\frac{1}{1-3z^{-2}+2z^{-4}}$$

в случае, если исходная последовательность (а) правосторонняя, (б) левосторонняя, (в) двусторонняя. Указать область сходимости *z*-преобразования для каждого случая. Изобразить графически полученные последовательности.

3.5.12. Вычислить обратное *z*-преобразование от

$$X(z)=\frac{1}{1-5z^{-2}+4z^{-4}},$$

если известно, что последовательность $x(n)$ - левосторонняя.

3.5.13. Вычислить обратное *z*-преобразование для

$$X(z)=\frac{3+z^{-1}-z^{-2}-z^{-3}}{1-z^{-2}},\quad |z|>1.$$

3.5.14. Вычислить обратное *z*-преобразование для

$$X(z)=\frac{z^{-1}}{1+z^{-2}},\quad |z|>1.$$

3.5.15. Вычислить обратное *z*-преобразование для

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}-2z^{-2}},\quad |z|>2.$$

3.5.16. Вычислить обратное *z*-преобразование методом вычетов:

$$X(z)=1+z^{-1},\quad z\neq 0.$$

3.5.17. Вычислить обратное *z*-преобразование методом вычетов:

$$X(z)=\frac{z^{-3}}{1-\alpha\, z^{-1}},\quad |z|>|\alpha|.$$

3.5.18. Вычислить обратное z-преобразование методом вычетов:

$$X(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})^2},\quad |z|<1.$$

3.5.19. Вычислить обратное z-преобразование методом вычетов:

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}},\quad |z|>1.$$

3.5.20. Вычислить сумму $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\sin(k)$, используя математический аппарат теории ЛИС-систем.

3.5.21. Вычислить сумму $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\cos(k)$, используя математический аппарат теории ЛИС-систем.

Анализ и синтез ЛИС-систем с использованием z-преобразования

3.5.22. Решить задачу 1.5.3 с использованием z-преобразования.

3.5.23. Определить множество вещественных параметров (a,b), при которых ЛИС-система, описываемая разностным уравнением

$$y(n)=ay(n-1)+by(n-2)+x(n),$$

является устойчивой. Изобразить графически в плоскости (a,b) найденное множество.

3.5.24. Построить ЛИС-систему (зарисовать ее структурную схему), которая осуществляет преобразование единичного скачка в последовательность:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-4k).$$

Определить ее импульсную и частотную характеристики. Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ. Найти передаточную функцию. Исследовать устойчивость.

3.5.25. Построить ЛИС-систему (зарисовать ее структурную схему), которая осуществляет преобразование единичного скачка в последовательность

$$y(n)=\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)u(n).$$

Определить ее импульсную и частотную характеристики. Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ. Найти передаточную функцию. Исследовать устойчивость.

3.5.26. Построить физически реализуемую ЛИС-систему (зарисовать ее структурную схему), которая осуществляет преобразование последовательности $x(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)$ в последовательность $y(n)=2^{-n}u(n)$. Определить ее импульсную и частотную характеристики. Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ. Найти передаточную функцию. Исследовать устойчивость. Определить реакцию этой ЛИС-системы на единичный скачок.

3.5.27. ЛИС-система состоит из двух последовательно соединенных ЛИС-систем, первая из которых описывается разностным уравнением $y(n)=\alpha y(n-2)+x(n)$, а вторая – разностным уравнением $y(n)=x(n-1)+x(n)+x(n+1)$. Определить ее импульсную и частотную характеристики. Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ. Записать разностное уравнение и построить структурную схему системы. Найти передаточную функцию. Исследовать устойчивость. Определить реакцию этой ЛИС-системы на единичный скачок.

3.5.28. ЛИС-система состоит из двух последовательно соединенных ЛИС-систем, первая из которых описывается уравнением $y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k x(n-k)$, а вторая – уравнением $y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x(n-k)$. Определить ее импульсную и частотную характеристики.

Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ. Записать разностное уравнение и построить структурную схему системы. Найти передаточную функцию. Исследовать устойчивость. Определить реакцию этой ЛИС-системы на единичный скачок.

3.5.29. Записать аналитическое выражение для чисел Фибоначчи.

3.5.30. ЛИС-система состоит из двух параллельно соединенных ЛИС-систем, первая из которых описывается разностным уравнением $y(n)=\alpha y(n-1)+x(n-1)$, а вторая – разностным уравнением $y(n)=-\alpha y(n-1)+x(n)$. Определить ее импульсную и частотную характеристики. Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ. Записать разностное уравнение и построить структурную схему системы. Найти передаточную функцию. Исследовать устойчивость. Определить реакцию этой ЛИС-системы на единичный скачок.

3.5.31. Определить передаточную функцию и импульсную характеристику физически реализуемой ЛИС-системы, осуществляющей преобразование последовательности $x(n)=\left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u(n)$ в последовательность $y(n)=\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)u(n)$. Записать разностное уравнение. Построить структурную схему системы. Построить диаграмму нулей и полюсов передаточной функции. Исследовать устойчивость. Найти частотную характеристику. Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ. Определить реакцию этой ЛИС-системы на единичный скачок.

3.5.32. Построить структурную схему ЛИС-системы с заданной импульсной характеристикой: $h(n)=n^2\alpha^n u(n)$. При каких значениях параметра α система будет устойчивой? Найти частотную характеристику. Зарисовать АЧХ и ФЧХ.

3.5.33. ЛИС-система состоит из двух параллельно соединенных ЛИС-систем, первая из которых имеет импульсную характеристику $h(n)=\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)u(n)$, а вторая описывается разностным уравнением $y(n)=-y(n-1)+x(n)$. Определить импульсную и частотную

характеристики ЛИС-системы. Зарисовать ИХ, АЧХ и ФЧХ. Записать разностное уравнение и построить структурную схему системы. Найти передаточную функцию. Исследовать устойчивость. Определить реакцию этой ЛИС-системы на единичный скачок.

3.5.34. Построить физически реализуемую ЛИС-систему, которая осуществляет преобразование последовательности $x(n)=2\delta(n)+\delta(n-1)$ в последовательность $y(n)=2^{-n}u(n)$. Является ли эта система устойчивой? Определить ее импульсную и частотную характеристики. Записать разностное уравнение. Построить структурную схему системы. Найти передаточную функцию. Исследовать устойчивость. Построить графики АЧХ и ФЧХ. Определить реакцию этой ЛИС-системы на единичный скачок.

4 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Анализ спектров – это одна из основных задач цифровой обработки сигналов. Основой цифрового спектрального анализа является дискретное преобразование Фурье (ДПФ), которое переводит последовательность, заданную во временной области, в последовательность, соответствующую компонентам спектра. Связь между непрерывным и дискретным преобразованиями Фурье является одним из вопросов, рассматриваемых в данном разделе.

Практическая ценность ДПФ заключается в том, что для него разработаны чрезвычайно эффективные алгоритмы вычисления, называемые алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ).

4.1 Дискретное преобразование Фурье

Пусть $f_н(t)$ – непрерывная периодическая функция времени (см. рис. 4.1):

$$f_н(t) = f_н(t + kT), \tag{4.1}$$

где T – период, k – любое целое число.

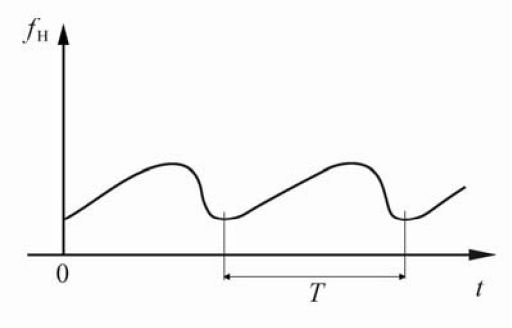


Рис. 4.1. Пример непрерывной периодической функции времени

Такую функцию можно разложить в ряд Фурье (см. п. 1.2.1.), то есть представить в спектральной области. Этот ряд (спектр) будет содержать гармонические (синусоидальные) составляющие с периодами T, $T/2$, $T/3$, …, T/m, … . В комплексной форме представление периодической функции через ряд Фурье записывается в виде:

$$f_н(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_н(m) e^{i\frac{2\pi}{T}mt} . \qquad (4.2)$$

Здесь

$$\left\{ e^{i\frac{2\pi}{T}mt} \right\}_{m=-\infty}^{\infty}$$

– набор функций, образующих базис, по которому производится разложение $f_н(t)$ в ряд; $F_н(m)$ – коэффициенты этого разложения – спектральные компоненты сигнала.

Эти компоненты образуют последовательность – дискретный спектр (см. рис. 4.2). Заметим, что дискретность спектра связана с тем, что функция $f_н(t)$ периодична.

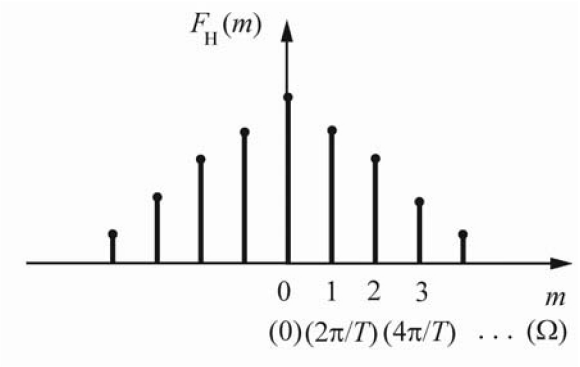


Рис. 4.2. Дискретный спектр функции

Пусть теперь $f(n)$ – последовательность, периодическая с периодом N:

$$f(n) = f(n + kN), \qquad (4.3)$$

которую можно получить дискретизацией периодической функции непрерывного аргумента, удовлетворяющей условию (4.1). Такая последовательность есть частный случай периодической функции общего вида, поэтому для нее все сказанное выше остается в силе. При переходе от (4.1) к (4.3) мы просто заменили t на n, а T на N. В новых обозначениях можно записать и ряд (4.2):

$$f(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} F(m)e^{i\frac{2\pi}{N}mn} . \qquad (4.4)$$

Однако то, что теперь функция рассматривается при целочисленных значениях аргумента, дает основание не удовлетвориться такой записью. Действительно, в данной ситуации базис разложения содержит только N различных функций:

$$\left\{e^{i\frac{2\pi}{N}mn}\right\}_{m=0}^{N-1},$$

а остальные базисные функции совпадают с ними. Это связано со свойством периодичности дискретной комплексной экспоненты:

$$e^{i\frac{2\pi}{N}mn}=e^{i\frac{2\pi}{N}(m+kN)n} .$$

Естественно, одинаковые базисные функции дают и одинаковые коэффициенты разложения. Поэтому представление последовательности через ряд вида (4.4) является избыточным.

Для устранения избыточности предлагается усечь ряд (4.4), ограничиваясь базисом только из N различных комплексных экспонент. Разложение по такому базису принято записывать в виде:

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F(m)e^{i\frac{2\pi}{N}mn} , \qquad (4.5)$$

где последовательность коэффициентов $F(m)$ называется дискретным спектром или дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) исходной последовательности. Появившийся множитель перед суммой не меняет характера представления, он вводится исходя из некоторых дополнительных соображений.

Определим коэффициенты разложения (4.5). Умножим обе части выражения (4.5) на $e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$ при $0<k\le N-1$ и просуммируем по периоду:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{i\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} F(m)e^{i\frac{2\pi}{N}n(m-k)} . \qquad (4.6)$$

После замены порядка суммирования выражение (4.6) преобразуется к виду:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(m-k)} . \qquad (4.7)$$

Будем рассматривать интервал значений индексов длиной в период: $0 \le m,k \le N-1$. Нетрудно показать, что для этого интервала внутренняя сумма

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(m-k)} = \begin{Bmatrix} N & m=k \\ 0 & m \ne k \end{Bmatrix} = N\delta(m-k) . \qquad (4.8)$$

Подставив (4.8) в (4.7), после замены индекса получаем:

$$F(n) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}mn} . \qquad (4.9)$$

Пара соотношений (4.9), (4.5) определяют дискретное преобразование Фурье последовательности: (4.9) – прямое ДПФ, (4.5) – обратное.

Заметим, что, в отличие от «классического» преобразования Фурье, здесь и $f(n)$, и $F(m)$ – последовательности. Как следствие, и в этом легко убедиться, и $F(m)$, и $f(n)$ – периодичны с периодом N (условная иллюстрация этого факта дана на рис. 4.3).

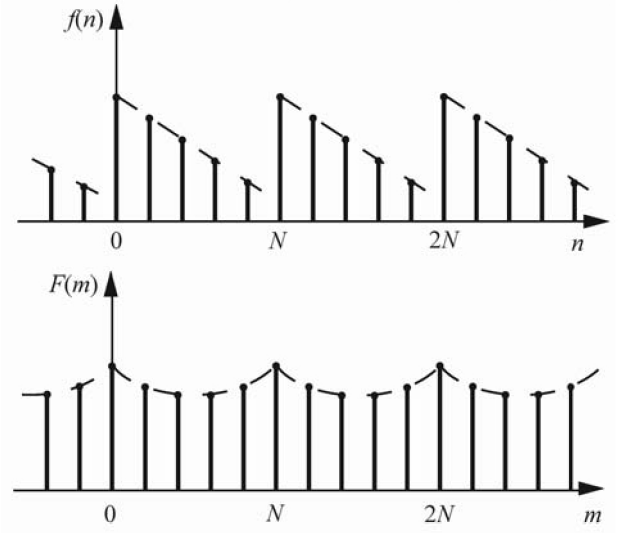


Рис. 4.3. Иллюстрация периодичности последовательности и ее дискретного спектра

Из соотношений (4.5), (4.9) видно, что для вычисления и прямого, и обратного ДПФ берутся отсчеты последовательностей только в N точках одного периода. Это позволяет формально использовать ДПФ и для последовательностей $f(n)$ и $F(m)$, заданных только на интервале $[0, N-1]$, то есть непериодических (имеющих конечную длину). Однако при этом всегда неявно предполагается периодическая продолженность преобразуемых последовательностей на всю бесконечную числовую ось аргумента, как это показано на рис. 4.3.

4.2 Связь ДПФ с *z*-преобразованием и непрерывным спектром последовательности

ДПФ – это третье функциональное преобразование последовательностей, которое мы определяем в данном учебнике. До этого были введены в рассмотрение преобразование Фурье последовательности (см. главу 2) и *z*-преобразование (глава 3). Выясним, как связано ДПФ с введенными ранее преобразованиями.

Пусть имеется последовательность конечной длины:

$$f(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \notin [0, N-1].$$

Вычислим ее *z*-преобразование (чтобы не было путаницы в обозначениях, будем индексировать его буквой *z)*:

$$F_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) z^{-n} . \qquad (4.10)$$

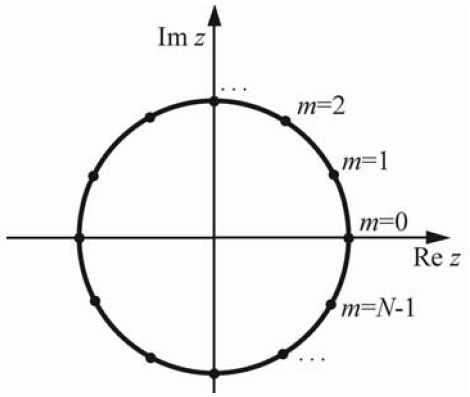


Рис. 4.4. Связь ДПФ и z-преобразования

Сравнение выражений (4.9) и (4.10) показывает, что коэффициенты ДПФ последовательности конечной длины N равны значениям ее z-преобразования в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности в комплексной z-плоскости (см. рис. 4.4):

$$F(m) = F_z(z)\Big|_{z=e^{i\frac{2\pi}{N}m}}, \quad 0 \le m \le N-1. \tag{4.11}$$

Формула (4.11) задает простой способ определения ДПФ по z-преобразованию. Возможен и обратный переход, то есть определение z-преобразования по ДПФ:

$$\begin{aligned} F_z(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i\frac{2\pi}{N}mn} \right] z^{-n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1} \right)^n = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) \frac{1 - \left(e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1} \right)^N}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{F(m)}{1 - e^{i\frac{2\pi}{N}m} z^{-1}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Выражение (4.12) интерполируют значения коэффициентов ДПФ на всю комплексную z-плоскость.

Теперь определим связь ДПФ и непрерывного спектра. Ранее мы уже получали, что преобразование Фурье последовательности есть ее z-преобразование, вычисленное на единичной окружности, то есть при $z = e^{i\omega}$ (см. формулу (3.12)). Поэтому здесь можно воспользоваться только что полученными результатами. Переход от непрерывного спектра к ДПФ задается выражением

$$F(m) = F_z\left(e^{i\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}m, \quad 0 \le m \le N-1}. \tag{4.13}$$

Иными словами, коэффициенты ДПФ есть равноотстоящие отсчеты непрерывного спектра последовательности конечной длины на интервале частот $[0, 2\pi]$ (см. рис. 4.5).

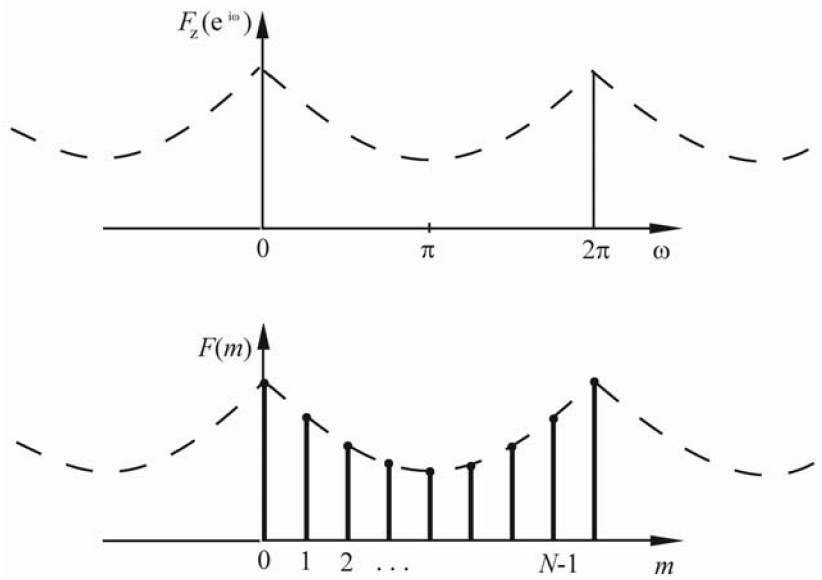


Рис. 4.5. Иллюстрация связи непрерывного спектра и ДПФ

Нетрудно выполнить и обратный переход, то есть вычислить непрерывный спектр по ДПФ. Для этого нужно в формулу (4.2) для z-преобразования подставить $z = e^{i\omega}$. Поскольку получающееся при такой подстановке соотношение нам далее не понадобится, мы не будем его записывать.

4.3 Использование ДПФ для вычисления отсчетов непрерывного спектра

При цифровом спектральном анализе прикладной интерес представляют отсчеты непрерывного спектра. Если требуемое число отсчетов равно N – длине исходной последовательности, то они непосредственно определяются через ДПФ в соответствии с формулой (4.13). Однако часто требуется более "детальный" анализ спектра, то есть получение большего, чем N , числа отсчетов. Дадим решение этой задачи.

Пусть имеется последовательность конечной длины:

$$f(n) = 0 \text{ при } n \notin [0, N-1]$$

и требуется определить L отсчетов ее непрерывного спектра $F_z\left(e^{i\omega}\right)$, равномерно распределенных на интервале $[0,2\pi]$, то есть на периоде спектра $(L > N)$.

Преобразование Фурье (спектр) последовательности задается выражением (2.5), которое в данном случае записывается в виде:

$$F_z\left(e^{i\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-i\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i\omega n} . \qquad (4.14)$$

Определим отсчеты спектра в L точках спектра (4.14), а именно, при значениях частоты $\omega_l = \frac{2\pi}{L}l, \quad 0 \le l \le L-1$:

$$F_z\left(e^{i\omega_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i\frac{2\pi}{L}nl} . \qquad (4.15)$$

С другой стороны, введем в рассмотрение новую последовательность длиной в L отсчетов:

$$f^*(n) = \begin{cases} f(n) & 0 \le n \le N-1, \\ 0 & N \le n \le L-1 \end{cases} \qquad (4.16)$$

и вычислим её L-точечное ДПФ:

$$F^*(l) = \sum_{n=0}^{L-1} f^*(n)e^{-i\frac{2\pi}{L}nl} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-i\frac{2\pi}{L}nl} . \qquad (4.17)$$

На последнем шаге преобразований здесь учтено, что, поскольку при $N \le n \le L-1$ последовательность (4.16) равна нулю, то пределы суммирования в (4.17) сужаются. Сравнивая выражения (4.15) и (4.17), видим, что

$$F_z\left(e^{i\omega_l}\right) = F^*(l) .$$

Таким образом, простое дополнение последовательности конечной длины нулями позволяет получить сколь угодно большое число отсчетов ее спектра при помощи ДПФ. На практике ограничениями при этом выступают конечность арифметики и шумы вычислений.

4.4 Использование ДПФ для вычисления последовательности по ее спектру

Спектральный анализ дискретного сигнала основан на переходе от последовательности к ее спектру. Выше мы видели, что для вычисления любого числа отсчетов спектра можно использовать ДПФ. Однако в практических приложениях встречается и обратная задача, когда спектр задан, а требуется получить саму последовательность. Оказывается, для получения последовательности по спектру также можно использовать ДПФ (точнее, обратное ДПФ).

Для вычисления обратного ДПФ нужен не сам непрерывный спектр последовательности, а лишь его отсчеты, то есть дискретный спектр $F(m)$. Переход от непрерывного спектра к отсчетам («дискретизация» спектра) может повлиять на форму получаемой последовательности. Поэтому, чтобы получить искомый результат, нужно правильно выбирать значение N – длину ДПФ (число отсчетов непрерывного спектра). Рассмотрим эти вопросы детально.

Пусть $f(n)$ – произвольная последовательность (не обязательно конечной длины). Будем предполагать, что z-преобразование

$$F_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

сходится в области, включающей в себя единичную окружность. В этом случае можно положить $z = e^{i\omega}$ и перейти к непрерывному спектру последовательности:

$$F_z\left(e^{i\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-i\omega n} .$$

И теперь, имея $F_z\left(e^{i\omega}\right)$, мы должны при помощи обратного ДПФ получить исходную последовательность $f(n)$.

В первую очередь произведем дискретизацию спектра. Для этого на интервале частот $[0, 2\pi)$ возьмем N равномерно расположенных отсчетов спектра, которые будем считать коэффициентами ДПФ:

$$F(m) = F_z\left(e^{i\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}, \; 0 \le m \le N-1 . \qquad (4.18)$$

От дискретного спектра $F(m)$ при помощи обратного ДПФ (4.5) можно перейти к самой последовательности. Но, как уже говорилось, при этом получается не исходная (произвольная) последовательность, а периодическая с периодом N:

$$f_N(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i\frac{2\pi}{N}mn} . \tag{4.19}$$

Выясним, как связаны между собой $f(n)$ и $f_N(n)$. Для этого подставим в выражение (4.19) значения коэффициентов ДПФ (4.18) (при этом заменим индекс внутреннего суммирования):

$$\begin{aligned} f_N(n) &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) e^{-i\frac{2\pi}{N}mk}\right] e^{i\frac{2\pi}{N}mn} = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}m(n-k)} . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Заметим, что в (4.20) внутренняя сумма при произвольных n, k:

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}m(n-k)} = \begin{Bmatrix} N & \text{при} & n-k+rN=0 \\ 0 & \text{при} & n-k+rN\neq 0 \end{Bmatrix} = N\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(n-k+rN),$$

где r – любое целое. Поэтому, продолжая цепочку преобразований (4.20), получаем:

$$\begin{aligned} f_N(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) N \sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(n-k+rN) = \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k+rN) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n+rN). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Таким образом, периодическая последовательность, полученная при помощи обратного ДПФ из дискретизированного спектра непериодической последовательности, состоит из бесконечной суммы сдвинутых копий исходной последовательности.

Если длина последовательности $f(n)$ превышает N, то слагаемые в (4.21) имеют пересекающиеся области ненулевых значений, то есть возникает «эффект наложения». Для бесконечной последовательности эффект наложения есть всегда.

В случае последовательности конечной длины, чтобы эффекта наложения не было, следует выбирать N больше длины последовательности.

4.5 Основные свойства ДПФ

Дадим сводку некоторых свойств ДПФ, которые могут быть полезны в дальнейшем.

Свойство 1. *Линейность*. Если $f_1(n) \to F_1(m)$, $f_2(n) \to F_2(m)$, то $a f_1(n) + b f_2(n) \to a F_1(m) + b F_2(m)$ при любых постоянных a, b. Здесь предполагается, что последовательности f_1 и f_2 имеют одинаковую длину.

Свойство 2. *Периодичность* (уже упоминалось выше). Последовательности, удовлетворяющие прямому ДПФ:

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}mn}$$

и, соответственно, обратному ДПФ:

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m) e^{i\frac{2\pi}{N}mn}$$

являются периодическими с периодом N. Такие последовательности удобно представлять не на числовой прямой, а на окружности, как показано на рис. 4.6.

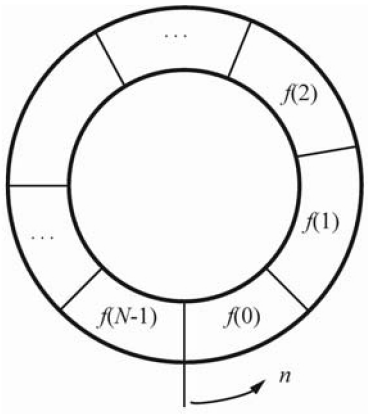


Рис. 4.6. Представление конечных последовательностей, удовлетворяющих ДПФ

При таком представлении их можно рассматривать одновременно и как периодические, и как последовательности конечной длины на интервале $[0, N-1]$.

Свойство 3. *Сдвиг.* Если последовательность $f(n)$ – периодична с периодом N и ее ДПФ – $F(m)$, то последовательность $f(n-n_0)$ имеет ДПФ $F(m)e^{-i\frac{2\pi}{N}n_0 m}$.

Следует учитывать особенности сдвига, если ДПФ применяется к последовательности конечной длины. В этом случае последовательность дополняется до периодической и осуществляется так называемый круговой («циклический») сдвиг. Если представить такую последовательность на окружности, то циклической сдвиг соответствует повороту окружности на n_0 точек.

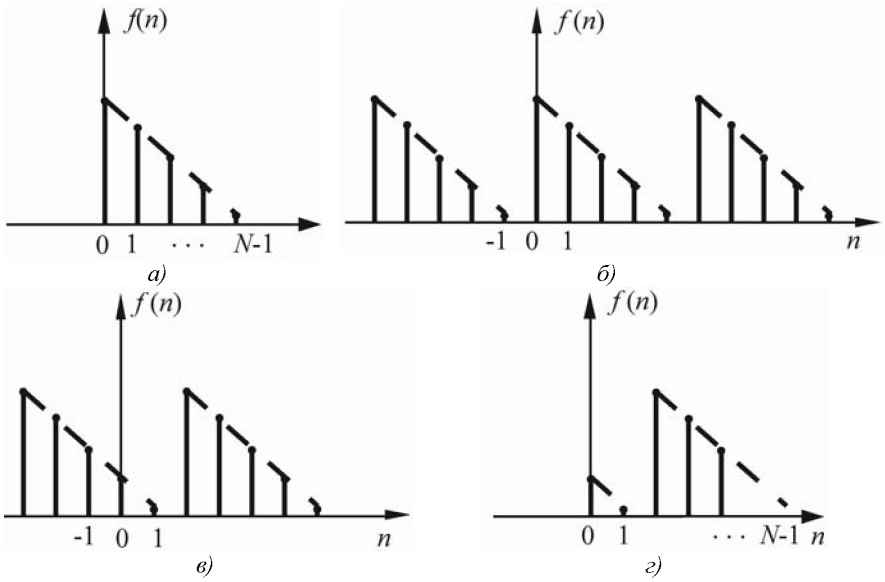


Рис. 4.7. Иллюстрация эффекта циклического сдвига

Эффект циклического сдвига для последовательности конечной длины, представленной на числовой оси, иллюстрирует рис. 4.7. На рис. 4.7,*а* показана последовательность конечной длины, заданная на $[0, N-1]$. При ДПФ последовательность считается периодически

продолженной (рис. 4.7,*б*). При умножении ДПФ на экспоненту сдвигается именно периодическая последовательность, то есть мы получаем последовательность, показанную на рис. 4.7,*в*. И сдвинутая последовательность снова рассматривается на интервале $[0, N-1]$, то есть в результате имеем последовательность конечной длины, показанную на рис. 4.7,*г*, в которой отсчеты, вышедшие в результате сдвига за пределы интервала $[0, N-1]$, например, как в данной иллюстрации, вправо, опять появляются на этом же интервале слева.

Свойство 4. *Циклическая свертка последовательностей.* Пусть $f(n)$ и $h(n)$ – периодические последовательности с периодом N и их ДПФ равны соответственно $F(m)$ и $H(m)$. Сформируем новое ДПФ, перемножив два имеющихся:

$$G(m) = F(m)H(m),$$

и вычислим обратное ДПФ от произведения. Полученная в результате этих действий последовательность $g(n)$ будет связана с исходными последовательностями следующим соотношением:

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)h(n-k). \qquad (4.22)$$

Выражение определяет так *называемую круговую (циклическую) свертку периодических последовательностей.*

Такое название становится понятным, если рассмотреть последовательности на окружностях (рис. 4.8). Значения циклической свертки получаются поэлементным перемножением соответственных отсчетов на окружностях и последующим суммированием произведений. На рис. 4.8,*а* дана иллюстрация для вычисления $g(0)$:

$$g(0) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)h(-k).$$

Различные значения отсчетов круговой свертки получаются при смещении одной окружности относительно другой (рис. 4.8,*б* и *в*):

$$g(1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)h(1-k), \quad \ldots \quad , g(N-1) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k)h(N-1-k).$$

Очевидно, последовательность $g(n)$ также является периодичной с периодом N. Рассматривается она на том же интервале $[0, N-1]$, что и сворачиваемые последовательности.

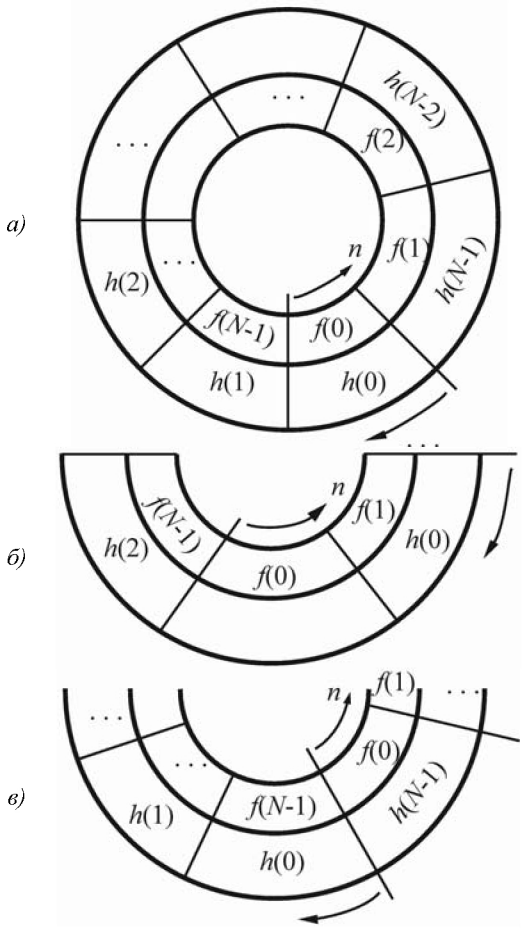


Рис. 4.8. Иллюстрация циклической свертки последовательностей

4.6 Вычисление линейной свертки при помощи ДПФ

Практический интерес при обработке сигналов представляет линейная (апериодическая) свертка последовательностей вида (1.13), которая не совпадает с циклической сверткой (4.22). Тем не менее хотелось бы для получения линейной свертки применить ДПФ, по-

скольку это преобразование имеет очень эффективный алгоритм вычисления (см. далее парагр. 4.7). Возникает задача, как, производя вычисление циклической свертки последовательностей, получить результат, совпадающий с линейной сверткой. Рассмотрим ее решение.

Пусть имеются две последовательности конечной (и, возможно, разной) длины

$$f(n)=0 \quad \text{при} \quad n\notin[0,N_1-1],$$
$$h(n)=0 \quad \text{при} \quad n\notin[0,N_2-1]$$

и требуется вычислить их линейную свертку (см. также (1.13)):

$$g(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)h(n-k). \qquad (4.23)$$

Нетрудно убедиться, что последовательность (4.23) также имеет конечную длину в (N_1+N_2-1) отсчетов:

$$g(n)=0 \text{ при } n\notin[0,N_1+N_2-2].$$

С учетом этого согласимся получать вместо конечной последовательности – линейной свертки – периодическую последовательность – циклическую свертку с тем условием, что на основном периоде (начинающего с точки $n=0$) они совпадут. Такое совпадение возможно, если период циклической свертки будет не меньше, чем длина линейной (то есть не меньше N_1+N_2-1). Но для того, чтобы циклическая свертка имела заданный период, такой же период должны иметь сворачиваемые последовательности и такую же длину должно иметь ДПФ, применяемое здесь по схеме, изложенной в свойстве 4 (см. предыдущий параграф). Поэтому исходные последовательности нужно дополнить нулями как минимум до длины в (N_1+N_2-1) отсчетов и применять ДПФ такой же длины.

Благодаря дополнению нулями при циклической свертке ненулевые значения периода одной последовательности $f(n)$ будут взаимодействовать с ненулевыми значениями только одного периода второй последовательности $h(n)$. При этом полностью исключатся круговые наложения, характерные для циклической свертки.

Метод вычисления линейной свертки при помощи ДПФ, изображенный на схеме (рис. 4.9), получил название “быстрой свертки”

в отличие от непосредственного суммирования произведений в соответствии с (4.23) ("прямой" свертки). Термин “быстрая” здесь употреблен потому, что вычисление свертки через ДПФ более эффективно с точки зрения числа выполняемых арифметических операций. Выигрыш в эффективности начинает ощущаться при длинах сворачиваемых последовательностей в несколько десятков отсчетов (20-30) и быстро растет с увеличением N_1 и N_2 .

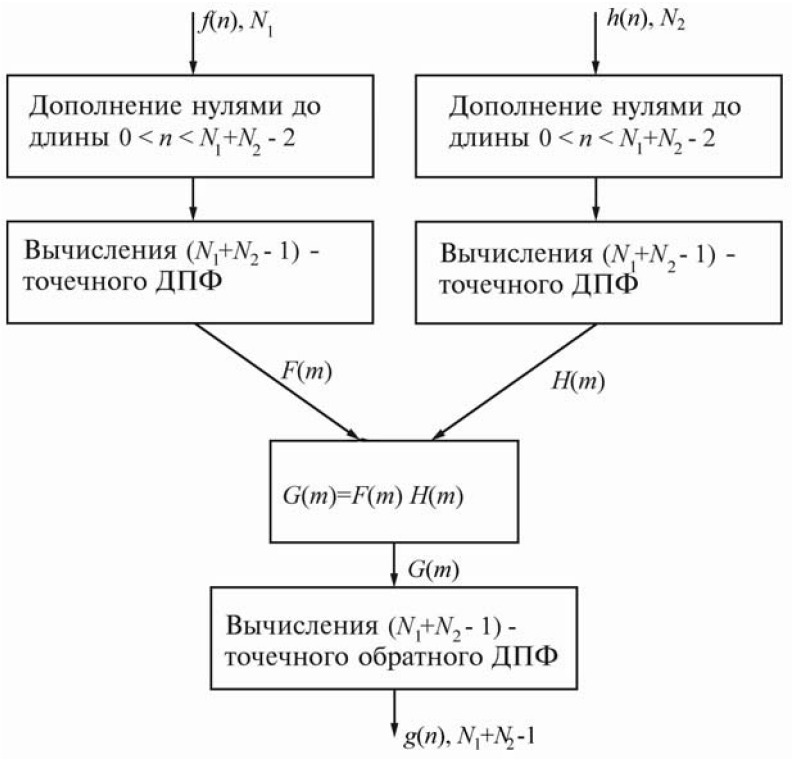


Рисунок 4.9. Схема вычисления линейной свертки при помощи ДПФ

4.7 Быстрое преобразование Фурье

Рассмотрим принцип построения алгоритмов вычисления ДПФ, обладающих малой вычислительной сложностью и называемых алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Здесь построим так называемый алгоритм БПФ с прореживанием во времени как наиболее простой и наглядный. Вопрос построения

быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований подробно рассмотрим в главе 5.

Дискретное преобразование Фурье (прямое) можно записать в виде

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w_N^{mn} \quad , \tag{4.24}$$

где $w_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ – так называемый фазовый (поворачивающий) множитель. Если использовать векторное представление комплексного числа на комплексной плоскости, то умножение этого числа на w_N поворачивает вектор вокруг начала координат по часовой стрелке на угол $\frac{2\pi}{N}$ (рис. 4.10).

Сформулируем некоторые очевидные свойства фазового множителя, которые нам будут нужны далее:

1) $w_N^{K+lN} = w_N^K$ при произвольном целом *l*, то есть степень w_N, рассматриваемая как показательная функция, периодична с периодом *N;*

2) $w_N^N = 1$;

3) $w_N^{N/2} = -1$;

4) $w_N^2 = w_{N/2}$.

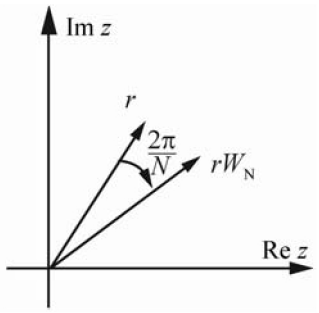


Рис. 4.10. Иллюстрация умножения комплексного числа на фазовый множитель

Поскольку дискретный спектр (4.24) рассматривается в N точках $\left(0 \le m \le N-1\right)$, то если вычислять его непосредственно по формуле (4.24), считая, что фазовые множители получены заранее, потребуется N раз выполнить по N операций умножения и по (N-1) операций сложения комплексных чисел. Так как преобразование вычисляется на ЭВМ, то общее время его выполнения (без учета служебных операций) равно:

$$T_{\text{ДПФ}} = N^2 T_y + N\left(N-1\right)T_c \approx N^2\left(T_y + T_c\right),$$

где T_y – время выполнения операции комплексного умножения; T_c – время выполнения операции комплексного сложения. Квадратичный характер возрастания вычислительной сложности ДПФ и вызывает необходимость разработки алгоритмов БПФ.

Одна из основных идей БПФ заключается в том, что исходная N-точечная последовательность разбивается на несколько более коротких последовательностей, дискретные спектры которых могут быть скомбинированы таким образом, чтобы в итоге получилось ДПФ полной последовательности. В частности, можно разбить последовательность на две равные части по $N/2$ отсчетов. Тогда, если пренебречь затратами времени на объединение (комбинирование) частей,

$$T_{\text{ДПФ}} \approx \left(T_y + T_c\right)\left(\frac{N}{2}\right)^2 \times 2 = \left(T_y + T_c\right)N^2\frac{1}{2},$$

то есть имеем двукратный выигрыш во времени по сравнению с (4.25). Причем операцию разбиения можно повторять многократно, при этом выигрыш будет еще более значительным.

Реализуем идею разбиения для частного, но широко рассматриваемого случая, когда длина ДПФ равна целой степени двойки: $N = 2^M$. Напомним, что преобразованию подлежит последовательность $f\left(n\right), \quad 0 \le n \le N-1$. Введем в рассмотрение две $N/2$-точечные последовательности, состоящие из четных и нечетных членов исходной последовательности:

$$f_0\left(l\right) = f\left(2l\right), \quad f_1\left(l\right) = f\left(2l+1\right), \quad 0 \le l \le \frac{N}{2} - 1. \qquad (4.25)$$

Тогда N-точечное ДПФ разбивается на два слагаемых:

$$F(m)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)w_N^{mn}=\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} f(n)w_N^{mn}}_{\text{(по четным)}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} f(n)w_N^{mn}}_{\text{(по нечетным)}}=$$

$$=\sum_{l=0}^{N/2-1} f(2l)w_N^{2ml}+\sum_{l=0}^{N/2-1} f(2l+1)w_N^{m(2l+1)},$$

окончательно

$$F(m)=\sum_{l=0}^{N/2-1} f_0(l)\left(w_N^2\right)^{ml}+w_N^m\sum_{l=0}^{N/2-1} f_1(l)\left(w_N^2\right)^{ml}=$$

$$=\sum_{l=0}^{N/2-1} f_0(l)w_{N/2}{}^{ml}+w_N^m\sum_{l=0}^{N/2-1} f_0(l)w_{N/2}^{ml}=F_0(m)+w_N^mF_1(m), \tag{4.26}$$

где $F_0(m),F_1(m)$ – $N/2$-точечные ДПФ последовательностей $f_0(n)$ и $f_1(n)$.

Дискретные спектры $F_0(m)$ и $F_1(m)$ определены при $0\le m\le \frac{N}{2}-1$, однако нам нужно знать $F(m)$ при $0\le m\le N-1$. Поэтому нужно доопределить формулу (4.26) для интервала $\frac{N}{2}\le m\le N-1$, используя свойство периодичности спектров:

$$\begin{cases} F(m)=F_0(m)+w_N^mF_1(m), \\ F\left(m+\frac{N}{2}\right)=F_0\left(m+\frac{N}{2}\right)+w_N^{m+\frac{N}{2}}F_1\left(m+\frac{N}{2}\right), \end{cases} \quad 0\le m\le\frac{N}{2}-1. \tag{4.27}$$

Заметим, что из свойств фазового множителя следует:

$$w_N^{m+\frac{N}{2}}=-w_N^m.$$

Это позволяет в два раза сократить в (4.27) число используемых значений фазового множителя и записать окончательно:

$$\begin{cases} F(m) = F_0(m) + w_N^m F_1(m), \\ F\left(m + \frac{N}{2}\right) = F_0(m) - w_N^m F_1(m), \end{cases} \qquad 0 \le m \le \frac{N}{2} - 1. \qquad (4.28)$$

В этой формуле в обеих строках содержатся одинаковые значения дискретных спектров $F_0(m)$ и $F_1(m)$ и одинаковые значения фазовых множителей.

Полученное соотношение определяет операцию объединения "половинных" ДПФ в целое, которую часто изображают графически. Для этого приняты специальные обозначения. Вычисления по (4.28) требуют выполнения двух типов "элементарных" операций: сложение-вычитание пары чисел (так называемой "бабочки") и умножение на постоянный множитель, который мы уже использовали ранее (рис. 4.11).

В качестве примера на рис. 4.12 изображена схема формирования 8-точечного ДПФ из двух ДПФ длины 4.

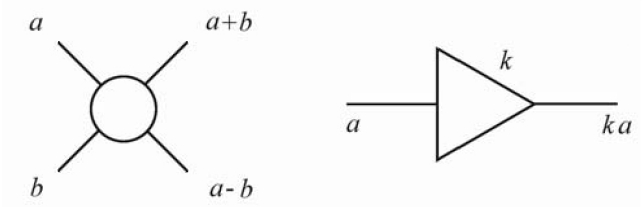


Рис. 4.11. Элементарные операции, используемые в ДПФ

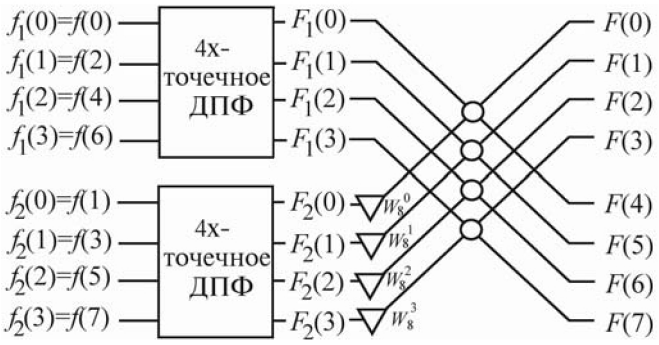


Рис. 4.12. Схема формирования 8-точечного ДПФ из двух 4-точечных

Используя аналогичную операцию разбиения (прореживания), вычислим каждое 4-точечное ДПФ через пару двухточечных. При этом обозначим:

$f_{11}(n)$ – четные члены $f_1(n)$,

$f_{12}(n)$ – нечетные члены $f_1(n)$,

$f_{21}(n)$ – четные члены $f_2(n)$,

$f_{22}(n)$ – нечетные члены $f_2(n)$.

Схема, соответствующая предпоследнему шагу преобразований, показанная на рис. 4.12, имеет вид, изображенный на рис. 4.13.

И, наконец, двухточечное ДПФ может быть вычислено впрямую, так как показано на рис. 4.14 для первого блока приведенной схемы. Здесь учтено, что $w_2^0 = 1$, поэтому преобразование выполняется без умножений:

$$F_{11}(0) = f_{11}(0) + f_{11}(1),$$
$$F_{11}(1) = f_{11}(0) - f_{11}(1).$$

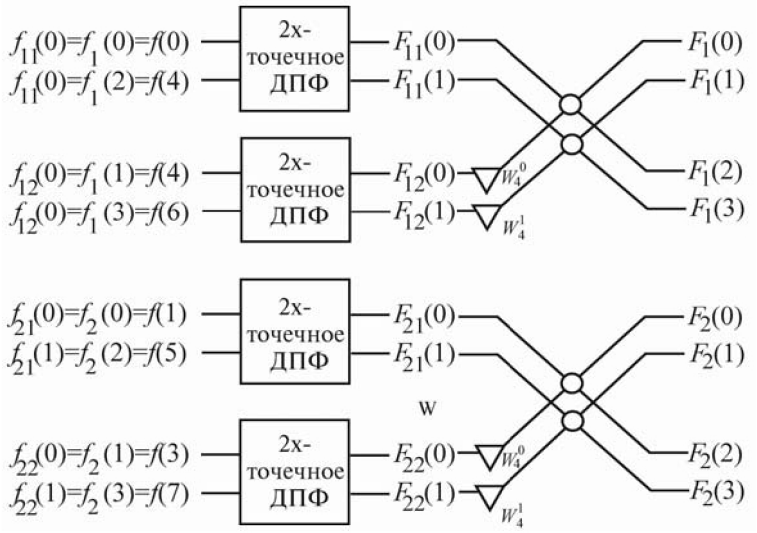


Рис. 4.13. Предпоследний шаг преобразования 8-точечной последовательности в ДПФ

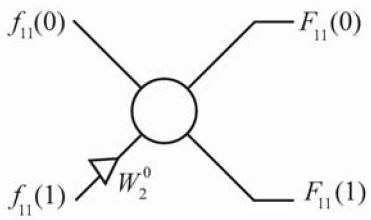


Рис. 4.14. Вычисление двухточечного ДПФ

На рис. 4.15 изображена схема 8-точечного ДПФ полностью, в ней учтено известное свойство фазового множителя $w_{N/2} = w_N^2$, а также ради регулярности структуры показаны и тривиальные умножения. Аналогичную структуру имеет и схема БПФ для большего числа точек (равного целой степени двойки).

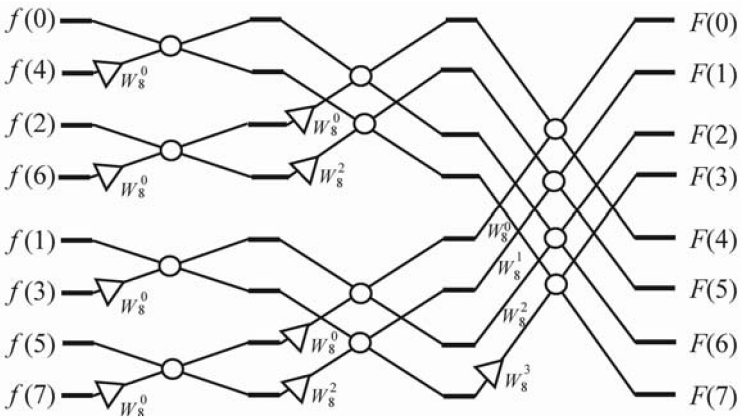


Рис. 4.15. Полная схема 8-точечного ДПФ

Произведем оценку вычислительной эффективности алгоритма БПФ. Преобразование выполняется за $\log_2 N$ шагов. На каждом шаге, очевидно, нужно выполнить N сложений (или вычитаний) и $N/2$ умножений. Поэтому время выполнения БПФ:

$$T_{\text{БПФ}} = \log_2 N\left[\frac{N}{2}T_y + NT_c\right] = N\log_2 N\left(\frac{T_y}{2} + T_c\right). \qquad (4.29)$$

То есть $T_{\text{БПФ}}$ пропорционально $N\log_2 N$, что существенно меньше оценки (4.25). Относительный выигрыш от применения БПФ: $T_{\text{ДПФ}}/T_{\text{БПФ}}$ пропорционален $\dfrac{N}{\log_2 N}$ и растет с увеличением N.

В завершение параграфа сделаем несколько замечаний.

Во-первых, из схемы БПФ видно, что дискретный спектр получается из последовательности с перестановленными элементами. Перестановка (переупорядочение) данных – характерная особенность большинства алгоритмов БПФ. При $N = 2^M$ закон перестановки весьма прост: отсчеты входной последовательности должны быть расположены в двоично-инверсном порядке. Такой порядок определяется следующим образом. Нужно записать аргументы (номера) отсчетов последовательности в двоичном коде, используя M двоичных разрядов. Затем порядок следования разрядов инвертируется (заменяется на обратный). Получаемые после этого числа и будут являться порядковыми номерами отсчетов после перестановки.

На рис. 4.16 показана схема двоично-инверсионного переупорядочения отсчетов для N=8, на нем же приведено двоичное представление номеров отсчетов до и после инверсии.

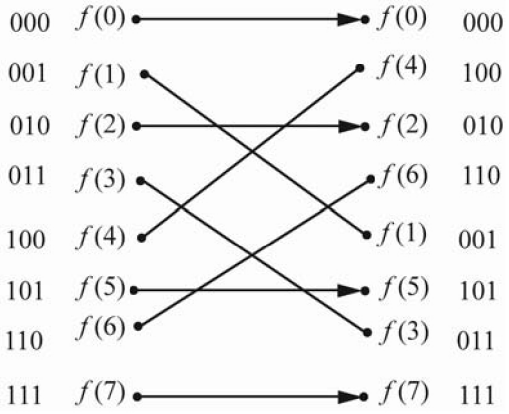


Рис. 4.16. Схема двоично-инверсионного переупорядочения отсчетов, используемая в ДПФ длины 8

Если требуется обрабатывать последовательность, представленную в естественном порядке, нужно граф двоичной инверсии присоединить слева к рассмотренной ранее схеме БПФ.

Во-вторых, при использовании рассмотренного алгоритма не требуется дополнительной памяти ЭВМ кроме той, которая отведена под исходные данные (обрабатываемый массив). Результаты всех промежуточных шагов вычислений, а также сам дискретный спектр можно размещать в той же памяти, что и входную последовательность. Подобные алгоритмы БПФ, в которых для входной и выходной последовательности, а также для промежуточных данных используется одна и та же область памяти, называются *алгоритмами БПФ с замещением*.

В третьих, хотя мы рассмотрели алгоритм прямого ДПФ, заданного выражениями (4.9) и (4.24), все сказанное остается в силе и для обратного преобразования (4.5):

$$f(n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}F(m)w_N^{-mn}\ . \qquad (4.30)$$

Обратное ДПФ вычисляется по тому же самому алгоритму БПФ, если в нем заменить w_N на w_N^{-1}, а в конце вычислений разделить результат на N. То есть рассмотренный алгоритм БПФ обеспечивает вычисление как прямого, так и обратного преобразований.

4.8 Совмещенные алгоритмы БПФ

Рассмотрим случай, когда последовательность $f(n)\in\mathbb{R}$. В этом случае можно уменьшить вычислительную сложность алгоритма быстрого преобразования Фурье почти вдвое за счет симметрии спектра вещественной последовательности.

Представим снова ДПФ (4.24) в форме

$$F(m)=\sum_{n=0}^{N/2-1}f_0(n)w_{N/2}^{mn}+w_N^m\sum_{n=0}^{N/2-1}f_1(n)w_{N/2}^{mn} \qquad (4.31)$$

и введем вспомогательную комплексную функцию

$$z(n)=f_0(n)+if_1(n)\ . \qquad (4.32)$$

Найдем ДПФ $Z(m)$ комплексной последовательности $z(n)$ и выделим из него частичные спектры $F_0(m)$ и $F_1(m)$ периода $N/2$. Для этого покажем, что ДПФ вещественной последовательности обладает свойством симметрии:

$$F(N-m)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n) w_N^{(N-m)n} = \overline{\overline{\sum_{n=0}^{N-1} f(n) w_N^{-mn}}} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} f(n) w_N^{mn}} = \overline{F(m)}.$$

Тогда для $F_0(m)$ и $F_1(m)$ можно записать:

$$F_0\left(\frac{N}{2}-m\right)=\overline{F_0(m)},\quad F_1\left(\frac{N}{2}-m\right)=\overline{F_1(m)}.$$

Используя свойство линейности ДПФ, получим соотношение

$$Z(m)=F_0(m)+iF_1(m). \tag{4.33}$$

Тогда

$$\overline{Z\left(\frac{N}{2}-m\right)}=\overline{F_0\left(\frac{N}{2}-m\right)+iF_1\left(\frac{N}{2}-m\right)}=F_0(m)-iF_1(m). \tag{4.34}$$

Составляя из соотношений (4.33) и (4.34) систему уравнений получим правило выделения частичных спектров:

$$\begin{cases} F_0(m)=\dfrac{Z(m)+\overline{Z\left(\frac{N}{2}-m\right)}}{2}, \\ F_1(m)=\dfrac{Z(m)-\overline{Z\left(\frac{N}{2}-m\right)}}{2i}. \end{cases} \tag{4.35}$$

Таким образом, алгоритм совмещенного вычисления ДПФ вещественной последовательности состоит из следующих шагов:

1) Выделение из последовательности $f(n)$ четных и нечетных элементов, образующих подпоследовательности $f_0(n)$ и $f_1(n)$ – (4.25).

2) Формирование вспомогательной комплексной последовательности $z(n)$ – (4.32).

3) Вычисление ДПФ $Z(m)$.

4) Выделение частичных спектров $F_0(m)$ и $F_1(m)$ – (4.35).

5) Формирование полного спектра исходной последовательности из частичных спектров – (4.28).

Отметим, что аналогичный подход может быть использован для одновременного вычисления спектров двух вещественных последовательностей $f_0(n)$ и $f_1(n)$. Для этого достаточно выполнить шаги 2-4.

4.9 Практические задания к главе 4

Циклическая свертка

4.9.1. Вычислить циклическую свертку двух последовательностей {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} и {1, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0}.

4.9.2. Вычислить циклическую свертку последовательностей

$$x(n)=\begin{cases}1, n=0,1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1;\\ 0, n=\frac{N}{2},\frac{N}{2}+1,\ldots,N-1\end{cases} \text{ и } y(n)=\begin{cases}1, n=0,1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1;\\ 0, n=\frac{N}{2},\frac{N}{2}+1,\ldots,N-1,\end{cases}$$

N – четное. Результат изобразить графически.

4.9.3. Вычислить циклическую свертку последовательностей

$$x(n)=n, n=0,1,2,\ldots,N-1 \text{ и } y(n)=n, n=0,1,2,\ldots,N-1.$$

Результат изобразить графически.

4.9.4. Вычислить циклическую свертку последовательностей

$$x(n)=n, n=0,1,2,\ldots,N-1 \text{ и } y(n)=\begin{cases}1, n=0,1,2,\ldots,N/2-1;\\ 0, n=N/2,N/2+1,\ldots,N-1,\end{cases}$$

N - четное. Результат изобразить графически.

Дискретное преобразование Фурье

4.9.5. Имеется программная процедура, которая может вычислять ***только прямое*** ДПФ. Как с помощью этой процедуры вычислить обратное ДПФ? Нарисовать блок-схему.

4.9.6. Вычислить аналитически ДПФ последовательности:

$$x(n)=(-1)^n, n=0\ldots N-1.$$

Рассмотреть случаи четного и нечетного N. Изобразить графически амплитудный и фазовый спектры для $N=8$.

4.9.7. Вычислить аналитически ДПФ последовательности

$$x(n)=\left(1+(-1)^n\right)\Big/2,\ n=0\ldots N-1.\ x(n)=(-1)^n,\ n=0\ldots N-1.$$

Рассмотреть случаи четного и нечетного N. Изобразить графически амплитудный и фазовый спектры для $N=8$.

4.9.8. Вычислить аналитически ДПФ последовательности $x(n)=n,\ n=0\ldots N-1$. Изобразить графически амплитудный и фазовый спектры для $N=8$.

4.9.9. Вычислить аналитически ДПФ последовательности $x(n)=\cos(4\pi n/N),\ n=0\ldots N-1,\ \ N=16$. Изобразить графически амплитудный и фазовый спектры.

4.9.10. Вычислить аналитически ДПФ последовательности $x(n)=\sin(4\pi n/N),\ n=0\ldots N-1,\ \ N=16$. Изобразить графически амплитудный и фазовый спектры.

4.9.11. Вычислить аналитически ДПФ последовательности $x(n)=a^n,\ n=0\ldots N-1$. Изобразить графически амплитудный и фазовый спектры для $a=1/2,\ N=16$.

4.9.12. Вычислить аналитически ДПФ последовательности $x(n)=a^n\cos(\pi n/2),\ n=0\ldots N-1,\ \ N=2^M$. Изобразить графически амплитудный и фазовый спектры для $a=1/2,\ N=16$.

4.9.13. Вычислить аналитически ДПФ последовательности $x(n)=a^n\sin(\pi n/2),\ n=0\ldots N-1,\ \ N=2^M$. Изобразить графически амплитудный и фазовый спектры для $a=1/2,\ N=16$.

4.9.14. Доказать равенство Парсеваля для ДПФ:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\left|X(m)\right|^2.$$

4.9.15. Задан дискретный спектр Фурье

$$\{X(0),X(1),X(2),\ldots,X(N-1)\}$$

некоторой последовательности

$$\{x(0), x(1), x(2), ..., x(N-1)\}.$$

Найти дискретный спектр Фурье

$$\{Y(0), Y(1), Y(2), ..., Y(N-1)\}$$

последовательности

$$\{y(0), y(1), y(2), ..., y(N-1)\} = \{x(0), x(N-1), x(N-2), ..., x(1)\}.$$

4.9.16. Задан дискретный спектр Фурье

$$\{X(0), X(1), X(2), ..., X(N-1)\}$$

некоторой последовательности

$$\{x(0), x(1), x(2), ..., x(N-1)\}.$$

Найти дискретный спектр Фурье

$$\{Y(0), Y(1), Y(2), ..., Y(N-1)\}$$

комплексно-сопряженной последовательности

$$\{y(0), y(1), y(2), ..., y(N-1)\} = \{\overline{x(0)}, \overline{x(1)}, \overline{x(2)}, ..., \overline{x(N-1)}\}.$$

4.9.17. Задан дискретный спектр Фурье

$$\{X(0), X(1), X(2), ..., X(N-1)\}$$

некоторой последовательности

$$\{x(0), x(1), x(2), ..., x(N-1)\}.$$

Найти дискретный спектр Фурье

$$\{Y(0), Y(1), Y(2), ..., Y(N-1)\}$$

последовательности

$$\{y(0), y(1), y(2), ..., y(N-1)\} = \{x(N-1), x(N-2), x(N-3), ..., x(0)\}.$$

4.9.18. Задан дискретный спектр Фурье

$$\{X(0), X(1), X(2), ..., X(N-1)\}$$

некоторой последовательности

$$\{x(0), x(1), x(2), ..., x(N-1)\}.$$

Найти дискретный спектр Фурье

$$\{Y(0),Y(1),Y(2),...,Y(N-1)\}$$

последовательности

$$\{y(0),y(1),y(2),...,y(N-1)\}=\{x(0),-x(1),x(2),-x(3)...\}.$$

4.9.19. Задан дискретный спектр Фурье

$$\{X(0),X(1),X(2),...,X(N-1)\}$$

некоторой последовательности

$$\{x(0),x(1),x(2),...,x(N-1)\}.$$

Найти дискретный спектр Фурье

$$\{Y(0),Y(1),Y(2),...,Y(N-1)\}$$

последовательности

$$\{y(0),y(1),y(2),...,y(N-1)\}=$$

$$=\left\{x\left(\frac{N}{2}\right),x\left(\frac{N}{2}+1\right),x\left(\frac{N}{2}+2\right),...,x(N-1),x(0),x(1),x(2),...,x\left(\frac{N}{2}-1\right)\right\}.$$

Быстрое преобразование Фурье

4.9.20. Зарисовать граф 16-точечного прямого БПФ.

4.9.21. Зарисовать граф 8-точечного обратного БПФ.

4.9.22. Сравнить количество арифметических операций, необходимых для вычисления циклической свертки двух последовательностей длины $N=2^M$:
(1) методом непосредственного вычисления;
(2) с использованием БПФ ($M=1,2,3,4,\ldots$).

4.9.23. Сравнить количество арифметических операций, необходимых для вычисления апериодической свертки двух последовательностей длины $N=2^M$:
(1) методом непосредственного вычисления;
(2) с использованием БПФ ($M=1,2,3,4,\ldots$).

4.9.24. Разработать алгоритм для вычисления обратного ДПФ вещественной последовательности длины $N=2^M$ с использованием процедуры БПФ длины $\frac{N}{2}$.

5 ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

В отличие от детерминированных процессов, течение которых определено однозначно, *случайный процесс* (*сигнал*) представляет изменения физической системы во времени и в пространстве, которые заранее в точности предсказать невозможно.

Понятие случайного процесса хорошо знакомо. Каждый раз, когда проводится эксперимент (опыт), итогом его является функция, определенная на интервале времени, а не какое-либо одно число. Если f – функция одной переменной, то говорят о случайном процессе, если f – функция двух или большего числа переменных, то говорят о случайном поле.

Аргумент функции f может быть непрерывным и дискретным. В последнем случае используют термин "случайная последовательность" – одномерная (случайный процесс) или многомерная (случайное поле).

Заметим следующее: *каждая отдельная реализация случайного сигнала является функцией детерминированной*. Поэтому для описания индивидуальных свойств реализаций случайного процесса следует использовать методы, изложенные в предыдущих главах. Особенности случайного процесса проявляются при изучении свойств совокупности реализаций или всего ансамбля. Поскольку этот ансамбль – вероятностный, то и характеристики случайного процесса оказываются вероятностными.

Одномерная *функция распределения вероятностей*

$$P_t(\eta) = P\{f(t) < \eta\} \tag{5.1}$$

связана с одномерной *плотностью вероятностей*

$$p_t(\eta) = \frac{\partial P_t(\eta)}{\partial \eta} . \tag{5.2}$$

Соответственно r-мерная плотность вероятностей

$$p_{t_1,t_2,\ldots t_r}(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r) = \frac{\partial^r P_{t_1,t_2,\ldots t_r}(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r)}{\partial\eta_1 \partial\eta_2 \ldots \partial\eta_r} = \frac{\partial^r P_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} , \tag{5.3}$$

где $\mathbf{t} = (t_1, t_2 \ldots t_r)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_r)$.

Плотность вероятностей удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_t(\eta)d\eta = 1 \qquad (5.4)$$

– в одномерном случае, а в r-мерном случае:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\eta})d\boldsymbol{\eta} = 1 \ . \qquad (5.5)$$

Последовательности функций

$$p_t(\eta),\ p_{t_1,t_2}(\eta_1,\eta_2),\dots,p_{t_1,t_2\dots t_r}(\eta_1,\eta_2\dots\eta_r)$$

представляют своеобразную лестницу, поднимаясь по которой, удается все более и более подробно характеризовать случайный процесс. В прикладных задачах часто достаточно знать о случайном процессе меньше, чем дают функции распределения: можно ограничиться *числовыми характеристиками* случайного процесса.

Среди числовых характеристик случайного процесса наиболее важными являются *среднее значение* $\mu_f(t)$, *дисперсия* $\sigma_f^2(t)$ и *корреляционная функция* $R_f(t,\tau)$:

$$\mu_f(t) = E\{f(t)\}, \quad \sigma_f^2(t) = E\left\{\left(f(t)-\mu_f(t)\right)^2\right\},$$

$$R_f(t,\tau) = E\left\{\left(f(t)-\mu_f(t)\right)\left(f(\tau)-\mu_f(\tau)\right)\right\},$$

где E – оператор усреднения.

Очевидно, значения корреляционной функции зависят не только от степени взаимосвязи, но и от абсолютных значений процесса. Эта зависимость устраняется введением нормировки:

$$\rho_f(t,\tau) = \frac{R_f(t,\tau)}{\sqrt{R_f(t,t)R_f(\tau,\tau)}} = \frac{R_f(t,\tau)}{\sigma_f(t)\sigma_f(\tau)}, \quad \left|\rho_f(t,\tau)\right| < 1$$

– эту величину называют *коэффициентом корреляции* между сечениями процесса и она показывает меру их линейной зависимости.

Для определения меры статистической зависимости между двумя случайными процессами f и g рассматривают *взаимную корреляционную* функцию:

$$R_{fg}(t,\tau) = E\left\{\left(f(t)-\mu_f(t)\right)\left(g(\tau)-\mu_g(\tau)\right)\right\}.$$

Если описание случайного процесса не выходит за рамки введенных статистических моментов, говорят, что оно выполнено в рамках корреляционной теории или на уровне статистики второго порядка.

Случайный процесс $f(t)$ называется *стационарным в узком смысле* (строго), если аналитическое выражение плотности вероятности не зависит от выбора точки начала отсчета времени. Из приведенного определения стационарного процесса следует, что одномерная плотность вероятностей не зависит от времени, а для числовых характеристик стационарного процесса справедливы следующие свойства:

- среднее значение и дисперсия не зависят от времени:

$$\mu_f(t) = m_f, \quad \sigma_f^2(t) = \sigma_f^2; \tag{5.6}$$

- корреляционная функция зависит только от разности $t = t' - \tau$:

$$R_f(t', \tau) = R_f(t' - \tau) = R_f(t). \tag{5.7}$$

При этом

$$\left|R_f(t)\right| \le R_f(0) = \sigma_f^2, \quad R_f(t) = R_f(-t). \tag{5.8}$$

Кроме того, обычно выполняется условие:

$$R_f(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{5.9}$$

Случайные процессы, удовлетворяющие условиям (5.6), (5.7), называют *стационарными в широком смысле* (по А.Я. Хинчину). Случайные процессы, стационарные в узком смысле (строго), являются стационарными в широком смысле, но не наоборот.

Стационарный случайный процесс называется *эргодическим*, если любая его вероятностная характеристика может быть получена из одной достаточно длинной его реализации путем усреднения во времени: среднее во времени равно среднему по ансамблю. На практике, как правило, мы не располагаем множеством реализаций случайного процесса, но имеем возможность наблюдать его в течение большого промежутка времени T или на большем пространственном интервале. В этом случае выражения для оценок математического ожидания и корреляционной функции выглядят следующим образом:

$$\hat{\mu}_f \approx \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\,, \tag{5.10}$$

$$\hat{R}_f(\tau) \approx \frac{1}{T}\int_0^T \left(f(t)-\mu_f\right)\left(f(t+\tau)-\mu_f\right)dt\,. \tag{5.11}$$

5.1 Случайные последовательности и их характеристики

Произвольная случайная последовательность $f(n)$ может быть описана посредством указания тех или иных ее статистических характеристик. В дальнейшем ограничимся рассмотрением статистик второго порядка. Для среднего и дисперсии выражения будут иметь вид:

$$\mu_f(n) = E\{f(n)\}\,, \quad \sigma_f^2(n) = E\left\{\left(f(n)-\mu_f(n)\right)^2\right\}. \tag{5.12}$$

Корреляционная функция последовательности f и взаимная корреляционная функция последовательностей f и g определяются следующим образом:

$$R_f(k,l) = E\left\{\left(f(k)-\mu_f(k)\right)\cdot\left(f(l)-\mu_f(l)\right)\right\}, \tag{5.13}$$

$$R_{fg}(k,l) = E\left\{\left(f(k)-\mu_f(k)\right)\cdot\left(g(l)-\mu_g(l)\right)\right\}. \tag{5.14}$$

Коэффициент корреляции для случайных последовательностей задается:

$$\rho_f(k,l) = \frac{R_f(k,l)}{\sigma_f(k)\sigma_f(l)}\,,$$

при этом во многих практических приложениях важную роль играет коэффициент корреляции между соседними отсчетами $\rho_f = E\left\{\rho_f(n,n+1)\right\}$.

Условия стационарности случайной последовательности аналогичны условиям для случайных процессов:

$$\mu_f(n) = \mu_f\,,\ \sigma_f^2(n) = \sigma_f^2\,,\ R_f(k,l) = R_f(k-l)\,. \tag{5.15}$$

Для корреляционных функций стационарных последовательностей справедливы следующие свойства:

$$R_f(0)=\sigma_f^2\ ,\quad R_f(k)=R_f(-k)\ ,\quad R_{gf}(k)=R_{fg}(-k) \tag{5.16}$$

$$\lim_{k\to\infty} R_f(k)=0\ ,\quad \lim_{k\to\infty} R_{fg}(k)=0 \tag{5.17}$$

Везде далее мы ограничимся рассмотрением именно стационарных последовательностей.

Используя свойство эргодичности применительно к случайной последовательности, можно получить оценки ее числовых характеристик. Действительно, пусть число элементов последовательности $1\le n\le N$, тогда дискретные аналоги выражений (5.10) – (5.11) запишутся следующим образом:

$$\hat{\mu}_f \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(k)\,,$$

$$\hat{R}_f(n)\approx \frac{1}{N-n}\sum_{k=1}^{N-n}\left(f(k)-\mu_f\right)\left(f(k+n)-\mu_f\right).$$

Для одномерной стационарной случайной последовательности $f(n)$ корреляционная функция $R_f(m)$ представляет собой одномерную детерминированную последовательность. Введем преобразование Фурье последовательности $R_f(m)$, которое называется *спектральной плотностью мощности* (*энергетическим спектром*) последовательности $f(n)$:

$$\Phi_f\left(e^{i\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_f(m)\,e^{-i\omega n}\ . \tag{5.20}$$

При этом отсчеты корреляционной функции могут быть вычислены через спектральную плотность $\Phi_f\left(e^{i\omega}\right)$ через обратное преобразование Фурье:

$$R_f(m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_f\left(e^{i\omega}\right)e^{i\omega m}d\omega\ . \tag{5.21}$$

Отметим некоторые свойства энергетических спектров:

- энергетический спектр $\Phi_f\left(e^{i\omega}\right)$ – вещественная функция частоты;

- энергетический спектр всегда неотрицателен: $\Phi_f\left(e^{i\omega}\right) \geq 0$;

- энергетический и взаимный энергетический спектры обладают свойствами симметрии:

$$\Phi_f\left(e^{i\omega}\right) = \Phi_f\left(e^{-i\omega}\right), \quad \Phi_{fg}\left(e^{i\omega}\right) = \Phi_{gf}\left(e^{-i\omega}\right).$$

Часто по аналогии энергетическим спектром называют и z-преобразование корреляционной функции.

Рассмотрим примеры.

Пример 5.1. *Белый шум* (последовательность независимых случайных величин). Его корреляционная функция имеет вид

$$R_f(n) = \sigma_f^2 \delta(n).$$

Из (5.20) следует

$$\Phi_f\left(e^{i\omega}\right) = \sigma_f^2, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

то есть спектральная плотность белого шума постоянна на всех частотах (см. рис. 5.1).

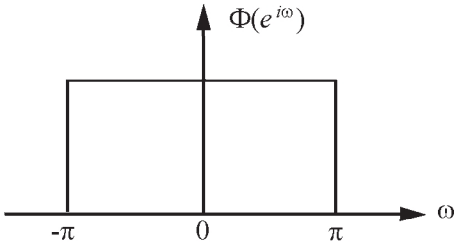


Рис. 5.1. Спектральная плотность мощности последовательности типа "белый шум"

Пример 5.2. Последовательность с биэкспоненциальной корреляционной функцией

$$R_f(n) = \sigma_f^2 \cdot \rho^{|n|} \tag{5.24}$$

имеет энергетический спектр следующего вида (см. рис. 5.2):

$$\Phi_f\left(e^{i\omega}\right) = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\omega)}, \quad -\pi \leq \omega \leq -\pi,$$

где ρ – коэффициент корреляции между соседними отсчетами последовательности.

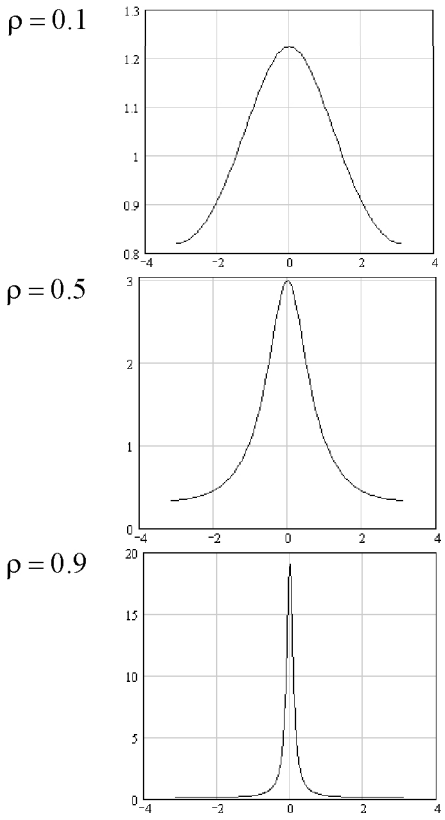


Рис. 5.2. Спектральная плотность мощности случайной последовательности с биэкспоненциальной корреляционной функцией

5.2 Прохождение случайных последовательностей через ЛИС-системы

Пусть известны характеристики входного сигнала – стационарной случайной последовательности $f(n)$: среднее значение μ_f, автокорреляционная функция R_f и энергетический спектр Φ_f. Требуется получить соответствующие характеристики для последовательности $g(n)$ на выходе устойчивой ЛИС-системы с импульсной характеристикой $h(n)$, а также взаимные статистические характеристики входной и выходной последовательностей.

Среднее значение для выходной последовательности с учетом стационарности сигналов и известной формулы свертки определяется следующим образом:

$$\mu_g = E\{g(n)\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) f(n-k)\right\} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) E\{f(n-k)\} = \mu_f \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k). \tag{5.25}$$

Если ЛИС-система описана не импульсной характеристикой, а частотной $H\left(e^{i\omega}\right)$ или передаточной функцией $H(z)$, то для вычисления среднего значения выходной последовательности можно воспользоваться соотношениями:

$$\mu_g = \mu_f H\left(e^{i\omega}\right)\Big|_{\omega=0}, \quad \mu_g = \mu_f H(z)\Big|_{z=1}, \tag{5.26}$$

которые вытекают из сравнения (5.25) с формулами (2.2) и (3.40), определяющими указанные характеристики системы.

В дальнейшем для сокращения изложения будем полагать $\mu_g = \mu_f = 0$. При невыполнении этого равенства всегда можно учесть математическое ожидание и его преобразование отдельно на основании формул (5.25) и (5.26).

Корреляционная функция выходной последовательности

$$R_g(n) = E\left\{\left(g(k) - \mu_g\right)\left(g(k+n) - \mu_g\right)\right\}$$

определяется следующим образом:

$$R_g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)h(l+k)\right] R_f(n-k). \tag{5.27}$$

Выражение (5.27), записанное с использованием оператора свертки, выглядит следующим образом:

$$R_g(n) = h(n) * h(-n) * R_f(n). \tag{5.28}$$

Взаимная корреляционная функция входной и выходной последовательностей при $\mu_f = 0$ вычисляется в виде

$$R_{fg}(n) = E\left\{\left(f(n) - \mu_f\right)\left(g(n+k) - \mu_g\right)\right\} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_f(n-k) = h(n) * R_f(n). \tag{5.29}$$

То есть искомая характеристика является сверткой импульсной характеристики ЛИС-системы и автокорреляционной функции входного сигнала.

Энергетический спектр последовательности на выходе системы легко выводится из уже полученного соотношения (5.28). Действительно, с учетом свойств z-преобразования (см. парагр. 3.2) имеем

$$\Phi_g(z) = H(z) H\left(z^{-1}\right) \Phi_f(z), \tag{5.30}$$

и далее, положив $z = e^{i\omega}$, получаем собственно энергетический спектр:

$$\Phi_g\left(e^{i\omega}\right) = H\left(e^{i\omega}\right) H\left(e^{-i\omega}\right) \Phi_f\left(e^{i\omega}\right). \tag{5.31}$$

Частотная характеристика обладает известной симметрией и выражение (5.31) может быть записано в более компактной форме:

$$\Phi_g\left(e^{i\omega}\right) = \left|H\left(e^{i\omega}\right)\right|^2 \Phi_f\left(e^{i\omega}\right). \tag{5.32}$$

Получаем, что энергетический спектр последовательности на выходе ЛИС-системы равен энергетическому спектру входной последовательности, умноженному на квадрат модуля частотной характеристики системы.

Взаимный энергетический спектр входной и выходной последовательности вычисляется аналогично:

$$\Phi_{fg}(z) = H(z) \Phi_f(z), \tag{5.33}$$

и далее при $z = e^{i\omega}$:

$$\Phi_{fg}\left(e^{i\omega}\right) = H\left(e^{i\omega}\right) \Phi_f\left(e^{i\omega}\right) \tag{5.34}$$

он равен произведению частотной характеристики системы и энергетического спектра входной последовательности.

5.3 Факторизация энергетического спектра

В развитие полученных результатов рассмотрим один важный методический прием, который часто используется при синтезе алгоритмов цифровой обработки сигналов.

Поставим следующую задачу: синтезировать физически реализуемую устойчивую ЛИС-систему, которая при поступлении на вход дискретного стационарного белого шума дает на выходе сигнал с заданной корреляционной функцией $R_g(n)$. Такую систему иногда называют "формирующим фильтром". Для простоты изложения будем считать, что входной белый шум имеет единичную дисперсию, то есть его корреляционная функция

$$R_f(n) = \delta(n).$$

Нам известно выражение (5.30), связывающее энергетические спектры на входе и выходе ЛИС-системы. В данном случае $\Phi_f(z) = 1$, а энергетический спектр выходного сигнала $\Phi_g(z)$ – вычисляется по заданной последовательности $R_g(n)$. При этом вытекающее из (5.30) соотношение

$$\Phi_g(z) = H(z)H\left(z^{-1}\right) \tag{5.35}$$

можно рассматривать как уравнение относительно передаточной функции $H(z)$ искомого формирующего фильтра. Процедура нахождения $H(z)$ предполагает разложение $\Phi_g(z)$ на пару "симметричных" (в смысле (5.35)) множителей. Осуществление такого разложения будем называть факторизацией энергетического спектра.

Решение задачи факторизации не является единственным. Для того, чтобы оно имело практический смысл, необходимо выполнить следующие два требования:

1) Найденная передаточная функция $H(z)$ должна соответствовать физически реализуемой ЛИС-системе конечного порядка, то есть допускать представление в дробно-рациональной форме (в виде отношения полиномов по отрицательным степеням z).

2) Передаточная функция $H(z)$ должна соответствовать устойчивой ЛИС-системе, то есть иметь полюсы, лежащие внутри единичной окружности в комплексной z-плоскости.

Если энергетический спектр $\Phi_g(z)$ является дробно-рациональным, то среди решений задачи факторизации всегда найдется такое, которое удовлетворяет выдвинутым требованиям. Рассмотрим детально процедуру построения этого решения.

В силу четности автокорреляционной функции $R_g(n)$ ее z-преобразование – энергетический спектр $\Phi_g(z)$ – обладает свойством симметрии:

$$\Phi_g(z) = \Phi_g\left(z^{-1}\right)$$

и, следовательно, если он является дробно-рациональным, может быть представлен в виде

$$\Phi_g(z) = \frac{B(z)}{A(z)}, \tag{5.36}$$

где

$$A(z) = \sum_{j=-M}^{M} a_j z^{-j} \quad , \tag{5.37}$$

$$B(z) = \sum_{j=-N}^{N} b_j z^{-j} \tag{5.38}$$

– полиномы из положительных и отрицательных степеней z с коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

$$a_j = a_{-j} \ , \ b_j = b_{-j} \ .$$

Рассмотрим сначала полином (5.37), стоящий в знаменателе дробно-рационального энергетического спектра (5.36). Уравнение

$$A(z) = 0$$

имеет $2M$ (то есть четное) число корней. Причем, благодаря симметрии коэффициентов, если комплексное число p – корень этого уравнения (полюс функции $\Phi_g(z)$), то и $1/p$ также является корнем (полюсом). Если $|p| < 1$, то $|1/p| > 1$, то есть половина корней будет лежать внутри единичной окружности комплексной z-плоскости, а другая половина – вне единичной окружности. На самой единичной окружности корней нет, так как наличие таковых противоречило бы

условиям сходимости рассматриваемого дробно-рационального z-преобразования при $|z|=1$. Обозначим через p_j ($1 \le j \le M$) корни, лежащие внутри единичной окружности. Несложно показать, что при этом степенной полином (5.37) может быть представлен через свои корни в виде:

$$A(z) = A_0 \prod_{j=1}^{M} \left(1 - p_j z^{-1}\right) \prod_{j=1}^{M} \left(1 - p_j z\right), \tag{5.39}$$

где A_0 – некоторая постоянная. Введем обозначение

$$A^+(z) = \sqrt{A_o} \prod_{j=1}^{M} \left(1 - p_j z^{-1}\right), \tag{5.40}$$

после которого выражение (5.39) записывается в форме

$$A(z) = A^+(z) A^+\left(z^{-1}\right), \tag{5.41}$$

то есть требуемая факторизация полинома $A(z)$ произведена.

Аналогичным образом осуществляется и факторизация полинома (5.38) из числителя дробно-рационального энергетического спектра:

$$B(z) = B^+(z) B^+\left(z^{-1}\right), \tag{5.42}$$

где

$$B^+(z) = \sqrt{B_o} \prod_{j=1}^{M} \left(1 - q_j z^{-1}\right) \tag{5.43}$$

– полином по отрицательным степеням z; B_0 – некоторая постоянная; q_j $(1 \le j \le N)$ – корни $B^+(z)$.

Следует остановиться на особенностях выбора корней полинома (5.43). Во-первых, уравнение $B(z) = 0$ может иметь решение, лежащее на единичной окружности комплексной z-плоскости, (это всего лишь означает, что для некоторых частот ω энергетический спектр $\Phi_g\left(e^{i\omega}\right)$ равен нулю. Во-вторых, к корням q_j $(1 \le j \le N)$ нет необходимости предъявлять требование $|q_j| < 1$, поскольку, как

мы увидим ниже, они будут определять положение нулей передаточной функции искомой ЛИС-системы, не влияющей на ее устойчивость. Основные условия формирования полинома (5.43) заключаются в том, что из всех $2N$ корней указанного уравнения должно быть использовано по одному корню из каждой пары взаимообратных.

Полученные факторизованные представления (5.41) и (5.42) полиномов (5.37) и (5.38) позволяют произвести факторизацию и энергетического спектра (2.36) в целом:

$$\Phi_g(z) = \frac{B^+(z)B^+\left(z^{-1}\right)}{A^+(z)A^+\left(z^{-1}\right)} = \Phi_g^+(z)\Phi_g^+\left(z^{-1}\right), \qquad (5.44)$$

где

$$\Phi_g^+(z) = \frac{B^+(z)}{A^+(z)} \qquad (5.45)$$

дробно-рациональная функция от z^{-1}, не имеющая полюсов вне единичной окружности в z-плоскости. Из сравнения (5.44) с (5.35) видно, что в качестве искомой передаточной функции физически реализуемого и устойчивого формирующего фильтра можно принять

$$H(z) = \Phi_g^+(z)z^{-L}$$

при любом целом $L \geq 0$. Для простоты везде далее будем полагать $L = 0$, то есть брать

$$H(z) = \Phi_g^+(z) = \frac{B^+(z)}{A^+(z)}. \qquad (5.46)$$

Пример 5.3. Определим передаточную функцию и построим разностное уравнение физически-реализуемой и устойчивой ЛИС-системы, преобразующей белый шум с единичной дисперсией в стационарную случайную последовательность с автокорреляционной функцией

$$R_y(k) = \rho^{|k|} - a\rho^{|k-1|} - a\rho^{|k+1|}, \quad |\rho| < 1, |a| \leq 0.5.$$

С помощью таблицы в парагр. 3.1 и свойств z-преобразования (парагр. 3.2) вычисляем энергетический спектр выходной последовательности:

$$\Phi_g(z)=\frac{\left(1-\rho^2\right)\left(1-az^{-1}-az\right)}{\left(1-\rho z^{-1}\right)\left(1-\rho z\right)}=\frac{B(z)}{A(z)}\ .$$

Полином в знаменателе сразу записан в требуемой факторизованной форме:

$$A(z)=\left(1-\rho z^{-1}\right)\left(1-\rho z\right)=A^{+}(z)A^{+}\left(z^{-1}\right)\ ,$$

где

$$A^{+}(z)=1-\rho z^{-1}\ .$$

Произведем факторизацию полинома в числителе, для чего решим уравнение

$$B(z)=\left(1-\rho^2\right)\left(1-a\,z^{-1}-a\,z\right)=0$$

или

$$a\,z^2-z+a=0\ .$$

Корни этого уравнения:

$$z_{1,2}=\frac{1}{2a}\left(1\pm\sqrt{1-4a^2}\right).$$

Легко проверить, что они являются взаимообратными: $z_1=\dfrac{1}{z_2}$. В зависимости от выбора одного из этих корней, используемого в качестве q_1 в (5.43), имеем два варианта факторизации $B(z)$:

$$B^{+}(z)=\sqrt{B_0}\left(1-\frac{1\pm\sqrt{1-4a^2}}{2a}z^{-1}\right),$$

где значения множителя

$$B_0=\left(1-\rho^2\right)\frac{1\mp\sqrt{1-4a^2}}{2}$$

найдены подстановкой (5.43) в (5.42), раскрытием скобок и приравниванием коэффициента при любом из имеющихся степеней z к соответствующему коэффициенту в первоначальном представлении $B(z)$.

Итак, согласно (5.46), получаем две различные передаточные функции искомой ЛИС-системы:

$$H(z)=\sqrt{\left(1-\rho^2\right)\frac{1\mp\sqrt{1-4a^2}}{2}}\;\frac{\left(1-\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a^2}}{2a}z^{-1}\right)}{1-\rho z^{-1}},$$

по которым легко строятся два варианта, описывающих систему разностных уравнений:

$$g(n)=\rho g(n-1)+\sqrt{\left(1-\rho^2\right)\frac{1\mp\sqrt{1-4a^2}}{2}}\left[f(n)-\frac{1\pm\sqrt{1-4a^2}}{2a}f(n-1)\right].$$

Процедуру факторизации, очевидно, можно использовать и для решения более общей задачи, чем та, которая была поставлена в начале данного параграфа, а именно для синтеза физически реализуемой устойчивой ЛИС-системы, преобразующей стационарную случайную последовательность с одной автокорреляционной функцией $R_f(n)$ в последовательность с другой автокорреляционной функцией $R_g(n)$. Действительно, непосредственно из (5.30) следует:

$$\frac{\Phi_g(z)}{\Phi_f(z)}=H(z)H\left(z^{-1}\right),$$

дробно-рациональные энергетические спектры входного и выходного сигналов могут быть факторизованы:

$$\Phi_f(z)=\Phi_f^+(z)\,\Phi_f^+\left(z^{-1}\right),$$

$$\Phi_g(z)=\Phi_g^+(z)\,\Phi_g^+\left(z^{-1}\right),$$

где

$$\Phi_f^+(z)=\frac{B_f^+(z)}{A_f^+(z)},\quad \Phi_g^+(z)=\frac{B_g^+(z)}{A_g^+(z)},$$

$A_f^+(z)$, $B_f^+(z)$, $A_g^+(z)$, $B_g^+(z)$ – полиномы, определяемые в процессе факторизации, и, следовательно, в качестве передаточной функции ЛИС-системы можно принять:

$$H(z)=\frac{\Phi_g^+(z)}{\Phi_f^+(z)}=\frac{A_f^+(z)B_g^+(z)}{A_g^+(z)B_f^+(z)}\ . \qquad (5.47)$$

Причем здесь нужно более строго, чем раньше, подходить к выбору корней при факторизации числителя энергетического спектра входного сигнала – $\Phi_f(z)$, то есть при конструировании полинома $B_f^+(z)$: в соответствии с (5.47) корни этого полинома оказываются полюсами передаточной функции и для того, чтобы система была устойчивой, они должны обязательно выбираться внутри единичной окружности *z*-плоскости. Задача не будет иметь решения (система не получится устойчивой), если у $B_f^+(z)$ будут иметься корни, лежащие на единичной окружности, и эти корни не будут скомпенсированы соответствующими корнями $B_g^+(z)$.

5.4 Практические задания к главе 5

Преобразование случайных последовательностей в ЛИС-системах

5.4.1. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой $h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$ поступает стационарная случайная последовательность с математическим ожиданием M_x и корреляционной функцией:

$$R_x(n)=\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1)\,.$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию последовательности на выходе системы, а также взаимную корреляционную функцию входной и выходной последовательностей.

5.4.2. Определить корреляционную функцию последовательности на выходе двумерной ЛИС-системы, если на ее вход поступает последовательность с корреляционной функцией

$$R(m,n)=(\rho^{|m|})\delta(n)\,.$$

Система описывается разностным уравнением

$$y(m,n) = \rho y(m,n-1) + x(m,n).$$

5.4.3. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию последовательности на выходе ЛИС-системы, если на ее вход поступает последовательность с математическим ожиданием, равным 1, и корреляционной функцией

$$R(m) = \delta(m-1) + 2\delta(m) + \delta(m+1).$$

Импульсная характеристика ЛИС-системы равна

$$h(n) = \delta(n) - \delta(n-1).$$

5.4.4. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой:

$$h(n) = \delta(n-2) - \delta(n-3)$$

поступает сумма двух независимых случайных последовательностей:

(1) белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией;

(2) последовательность с единичным математическим ожиданием, единичной дисперсией и экспоненциальной корреляционной функцией (коэффициент корреляции соседних отсчетов равен 0,8).

Определить математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и энергетический спектр выходной последовательности.

5.4.5. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = \delta(n-2) - \alpha\delta(n-3)$$

поступает сумма двух независимых стационарных случайных последовательностей: дискретного белого шума с математическим ожиданием M_1 и дисперсией D_1 и последовательности с математическим ожиданием M_2 и корреляционной функцией

$$R(k) = D_2\alpha^{|k|}, |a| < 1.$$

Определить математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и энергетический спектр выходной последовательности.

5.4.6. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = \alpha^{n-1} u(n-1), |\alpha| < 1$$

поступает стационарная случайная последовательность с математическим ожиданием M_x и корреляционной функцией

$$R_x(k) = D_x(\rho^{|k|}), |\rho| < 1.$$

Определить математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию и энергетический спектр выходной последовательности.

5.4.7. Стационарная случайная последовательность с математическим ожиданием M_x и корреляционной функцией:

$$R_x(k) = D_x \delta(k)$$

поступает на вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = u(n) - u(n-3).$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайной последовательности на выходе системы, а также взаимную корреляционную функцию входной и выходной последовательностей.

5.4.8. Стационарная случайная последовательность с математическим ожиданием M_x и корреляционной функцией:

$$R_x(k) = D_x \alpha^{|k|}, |\alpha| < 1$$

поступает на вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = \delta(n-10) + \beta\,\delta(n-11).$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайной последовательности на выходе системы, а также взаимную корреляционную функцию входной и выходной последовательностей.

5.4.9. Стационарная случайная последовательность с математическим ожиданием M_x и корреляционной функцией

$$R_x(k) = D_x \alpha^{|k|}, |\alpha| < 1$$

поступает на вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = \alpha^n\, u(n).$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайной последовательности на выходе системы, а также взаимную корреляционную функцию входной и выходной последовательностей.

5.4.10. Стационарная случайная последовательность с математическим ожиданием M_x и корреляционной функцией

$$R_x(k) = D_x\delta(k)$$

поступает на вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n) = \left(\alpha^n + \beta^n\right)u(n), \quad |\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1.$$

Определить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию последовательности на выходе системы, а также взаимную корреляционную функцию входной и выходной последовательностей.

5.4.11. Стационарная случайная последовательность с математическим ожиданием M_x и корреляционной функцией $R_x(k) = D_x\delta(k)$ поступает на вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой $h(n) = \alpha^n\left(\cos\frac{\pi}{2}n\right)u(n), \quad |\alpha| < 1.$

Определить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию последовательности на выходе системы, а также взаимную корреляционную функцию входной и выходной последовательностей.

Факторизация энергетического спектра

5.4.12. Определить передаточную функцию и построить структурную схему ЛИС-системы, преобразующей стационарную случайную последовательность с корреляционной функцией

$$R_x(k) = 0,5^{|k|}$$

в последовательность с корреляционной функцией

$$R_y(k) = 6\delta(k) + \delta(k+1) + \delta(k-1) - 2\delta(k+2) - 2\delta(k-2).$$

5.4.13. Определить передаточную функцию и построить структурную схему ЛИС-системы, преобразующей стационарную случайную последовательность с корреляционной функцией

$$R_x(k) = \delta(k) + \frac{2}{5}[\delta(k-1) + \delta(k+1)]$$

в последовательность с корреляционной функцией

$$R_y(k) = \delta(k) + \frac{1}{2}[\delta(k-1) + \delta(k+1)].$$

5.4.14. Определить передаточную функцию, импульсную характеристику, построить структурную схему ЛИС-системы, преобразующей последовательность с корреляционной функцией

$$R_x(k) = \delta(k) + \frac{1}{2}\left(\delta(k-1) + \delta(k+1)\right)$$

в последовательность с корреляционной функцией

$$R_y(k) = \alpha^{|k|}, \quad |\alpha| < 1.$$

5.4.15. Определить передаточную функцию, импульсную характеристику, построить структурную схему ЛИС-системы, преобразующей последовательность с корреляционной функцией

$$R_x(k) = D_x\alpha^{|k|}, \quad |\alpha| < 1$$

в последовательность с корреляционной функцией

$$R_y(k) = D_y\beta^{|k|}, \quad |\beta| < 1.$$

Определить математическое ожидание выходной последовательности, если входная имеет математическое ожидание M_x.

5.4.16. Определить передаточную функцию, импульсную характеристику, построить структурную схему ЛИС-системы, преобразующей последовательность с корреляционной функцией

$$R_x(k) = D_x\delta(k)$$

в последовательность с корреляционной функцией

$$R_y(k) = D_y\left[\delta(k) + 0,5\delta(k+1) + 0,5\delta(k-1)\right].$$

5.4.17. Определить передаточную функцию, импульсную характеристику, построить структурную схему ЛИС-системы, преобразующей последовательность с корреляционной функцией

$$R_x(k) = D_x\delta(k)$$

в последовательность с корреляционной функцией

$$R_y(k) = 0{,}5D_y\left(\alpha^{|k|} + \beta^{|k|}\right), \quad |\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1.$$

5.4.18. Определить передаточную функцию, импульсную характеристику, построить структурную схему ЛИС-системы, преобразующей последовательность с корреляционной функцией

$$R_x(k) = 0{,}5D_x\left(\alpha^{|k|} + \beta^{|k|}\right), \quad |\alpha| < 1, \quad |\beta| < 1$$

в последовательность с корреляционной функцией

$$R_y(k) = D_y\delta(k).$$

5.4.19. Построить ЛИС-систему, формирующую из белого шума случайную последовательность $\eta(n)$ с корреляционной функцией

$$R_\eta(m) = 2^{-|m|}\cos\frac{\pi}{2}m.$$

5.4.20. Построить ЛИС-систему, формирующую из белого шума случайную последовательность $\eta(n)$ с корреляционной функцией

$$R_\eta(m) = 2^{-|m|}\left(1 + \frac{|m|}{2}\right).$$

5.4.21. Определить передаточную функцию, импульсную характеристику, построить структурную схему ЛИС-системы, преобразующей стационарную в широком смысле случайную последовательность $x(n)$ с корреляционной функцией

$$R_x(k) = \delta(k) + \frac{1}{2}\left(\delta(k-1) + \delta(k+1)\right)$$

в последовательность $y(n)$ с корреляционной функцией

$$R_y(k) = 2^{-|k|}.$$

6 ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

6.1 Восстановление дискретного сигнала ЛИС-системой

Пусть имеется полезный сигнал – последовательность $f(n)$. Однако непосредственному наблюдению (измерению) он недоступен. В нашем распоряжении имеется лишь сигнал $g(n)$ – результат прохождения сигнала через некоторую "искажающую" систему, дополнительно искаженный шумом $v(n)$ (рис. 6.1).

Рис. 6.1. Модель наблюдения полезного сигнала

Требуется восстановить полезный сигнал по наблюдаемому. Для этого необходимо синтезировать такую восстанавливающую систему (фильтр), чтобы при подаче на ее вход наблюдаемого сигнала на выходе получалась бы оценка $\hat{f}(n)$ полезного сигнала (рис. 6.2).

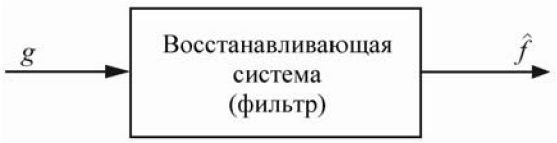


Рис. 6.2. Схема восстанавливающей системы

Далее мы сузим класс рассматриваемых сигналов и систем.

Во-первых, в большинстве практически важных случаев искажения сигнала удается описать моделью ЛИС-системы, рассмотрением которой мы и ограничимся. Будем считать, что известна ее импульсная характеристика $h(n)$. Тогда наблюдаемая последовательность запишется в виде:

$$g(n) = f(n) * h(n) + v(n) \ . \qquad (6.1)$$

Соотношение (6.1) задает так называемую *линейную модель наблюдения в дискретном времени*.

Во-вторых, восстанавливать сигнал будем также при помощи ЛИС-системы:

$$\hat{f}(n) = g(n) * h_{восст}(n) \ , \qquad (6.2)$$

где $h_{восст}(n)$ - импульсная характеристика восстанавливающей ЛИС-системы.

В-третьих, и полезный сигнал $f(n)$, и шум $v(n)$ будем считать стационарными случайными последовательностями, статистические характеристики которых известны.

Заметим, что, поскольку все преобразуемые последовательности случайны, то и ошибка восстановления:

$$\varepsilon(n) = \hat{f}(n) - f(n) \qquad (6.3)$$

в каждый момент времени случайна. Мы будем строить такой восстанавливающий фильтр, который обеспечивает минимум ошибки в среднеквадратичном смысле, то есть минимизирует ее дисперсию:

$$\overline{\varepsilon}^2 = E\left\{ \varepsilon^2(n) \right\} = E\left\{ \left[\hat{f}(n) - f(n) \right]^2 \right\} \to \min \ . \qquad (6.4)$$

Из всего сказанного наиболее существенным является ограничение, заключающееся в требовании линейности восстанавливающей системы. Однако для нелинейных систем получить конкретные результаты их синтеза гораздо сложнее. Кроме того, из теории информации известно, что для важного класса сигналов – гауссовских – оптимальное (наилучшее) в среднеквадратичном смысле восстановление обеспечивается именно линейной системой.

ЛИС-система, реализующая преобразование (6.2) и обеспечивающая при этом выполнение условия (6.4), называется "*оптимальным линейным восстанавливающим фильтром*". А ее применение реализует процедуру оптимального линейного восстановления.

Очень часто, однако, на импульсную характеристику восстанавливающей ЛИС-системы налагаются дополнительные ограничения, связанные с удобством реализации. Например, требуется, чтобы она была КИХ-системой или физически реализуемой БИХ-системой

(см.п.4.3). В таких ситуациях ошибка восстановления несколько возрастет, то есть мы получим *квазиоптимальные* процедуры восстановления.

Мы объединим рассмотрение оптимального и квазиоптимального восстановления следующим образом: будем считать, что импульсная характеристика восстанавливающая ЛИС-системы отлична от нуля для значения аргумента из некоторого множества D (интервала наблюдения):

$$h_{восст}(n) = 0 \text{ при } n \notin D . \tag{6.5}$$

Определим при этом ограничении параметры системы, минимизирующие ошибку восстановления. С учетом сказанного выше конкретизируется формула (6.2):

$$\hat{f}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{восст}(k)\, g(n-k) = \sum_{k \in D} h_{восст}(k)\, g(n-k) \tag{6.6}$$

и условие минимизации ошибки (6.4):

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon}^2 &= E\left\{\left[\hat{f}(n) - f(n)\right]^2\right\} = \\ &= E\left\{\left[\sum_{k \in D} h_{восст}(k)\, g(n-k) - f(n)\right]^2\right\} \to \min . \end{aligned} \tag{6.7}$$

Минимизация ошибки осуществляется, путем варьирования ненулевых отсчетов импульсной характеристики восстанавливающей системы. В точке минимума обеспечивается равенство нулю всех частных производных:

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial h_{восст}(m)} = 0 , \quad m \in D . \tag{6.8}$$

Подставив (6.7) в (6.8), получаем:

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial h_{восст}(m)} = E\left\{\left[\sum_{k \in D} h_{восст}(k)\, g(n-k) - f(n)\right] g(n-m)\right\} = 0 ,$$

$$m \in D . \tag{6.9}$$

Из последнего выражения следуют два важных соотношения.

Во-первых, это выражение можно записать в виде:

$$E\{\varepsilon(n)g(n-m)\}=0, \qquad m\in D, \tag{6.10}$$

то есть взаимная корреляционная функция $B_{\varepsilon g}(m)=0$, ошибка оптимального восстановления некоррелирована с наблюдаемым сигналом. Это утверждение известно в теории оценивания как "*лемма об ортогональном проецировании*", которая будет нам полезна в дальнейшем.

Во-вторых, перенеся в (6.9) вычитаемое в правую часть после применения оператора математического ожидания, получим:

$$\sum_{k\in D} h_{восст}(k)B_g(m-k)=B_{fg}(-m) \tag{6.11}$$

– *уравнение Винера-Хопфа* для дискретных систем.

Таким образом, импульсная характеристика оптимального линейного восстанавливающего (или квазиоптимального) фильтра определяется из системы, состоящей из уравнения Винера-Хопфа и ограничений, налагаемых на импульсную характеристику:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\in D} h_{восст}(k)B_g(m-k)=B_{fg}(-m), & m\in D, \\ h_{восст}(m)=0, & m\notin D. \end{cases} \tag{6.12}$$

Различный вид области D приводит к существенно различным методам решения системы (6.12). Определим ошибку восстановления сигнала оптимальным линейным фильтром, продолжив преобразования, входящие в (6.7), с учетом (6.3) и (6.10):

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon}^2 &= E\left\{\varepsilon(n)\left[\sum_{k\in D} h_{восст}(k)g(n-k)-f(n)\right]\right\}= \\ &= E\left\{\varepsilon(n)\sum_{k\in D} h_{восст}(k)g(n-k)\right\}-E\left[\varepsilon(n)f(n)\right]= \\ &= \sum_{k\in D} h_{восст}(k)E\{\varepsilon(n)g(n-k)\}-E\{\varepsilon(n)f(n)\}=-E\{\varepsilon(n)f(n)\}= \end{aligned}$$

$$= -E\left\{\left[\sum_{k\in D} h_{восст}(k)\, g(n-k) - f(n)\right] f(n)\right\} =$$

$$= E\left\{ f^2(n)\right\} - \sum_{k\in D} h_{восст}(k) E\left\{ f(n)\, g(n-k)\right\} = \qquad (6.13)$$

$$= \sigma_f^2 - \sum_{k\in D} h_{восст}(k) B_{fg}(-k).$$

Рассмотрим важный частный случай, когда имеет место упрощенная модель наблюдения с белым шумом, независимым от сигнала:

$$g(n) = f(n) + v(n), \qquad B_v(k) = \sigma_v^2 \delta(k) \qquad (6.14)$$

и нулевой отсчет импульсной характеристики $h_{восст}(0)$ не равен нулю, $(\{0\} \in D)$. В этом случае

$$B_g(k) = B_f(k) + B_v(k) = B_f(k) + \sigma_v^2 \delta(k),$$

$$B_{fg}(k) = E\left\{ f(n)\, g(n+k)\right\} = E\left\{ f(n)\left[f(n+k)\right] + v(n+k)\right\} =$$

$$= E\left\{ f(n)\, f(n+k)\right\} + E\left\{ f(n) v(n+k)\right\} = B_f(k) = B_f(-k),$$

и из уравнения Винера-Хопфа (6.11) получаем:

$$\sum_{k\in D} h_{восст}(k)\left[B_f(m-k) + \sigma_v^2 \delta(m-k)\right] = B_f(m),$$

$$\sum_{k\in D} h_{восст}(k) B_f(m-k) + \sigma_v^2\, h_{восст.}(m) = B_f(m)$$

и при $m = 0$:

$$\sum_{k\in D} h_{восст}(k) B_f(-k) + \sigma_v^2\, h_{восст}(0) = \sigma_f^2 \quad . \qquad (6.15)$$

При этих же условиях выражение (6.14) для ошибки приобретает вид:

$$\varepsilon^2 = \sigma_f^2 - \sum_{k \in D} h_{восст}(k) B_f(-k) = \sigma_v^2 h_{восст}(0),$$

а после подстановки в него выражения (6.15):

$$\varepsilon^2 = \sigma_v^2 h_{восст}(0). \qquad (6.16)$$

Это очень простое соотношение нам будет полезно в дальнейшем.

6.2 Оптимальное линейное восстановление

Пусть на отсчеты импульсной характеристики восстанавливающей ЛИС-системы не наложено никаких ограничений, то есть она может быть отлична от нуля в любой точке. Это значит, что в оценке полезного сигнала будут учтены все наблюдаемые отсчеты (как "прошлые", так и "будущие"). При этом восстановление, очевидно, будет наилучшим (оптимальным).

Так как ограничений на $h_{восст}(n)$ в данном случае нет, то из введенной в предыдущем параграфе системы уравнений (6.12) остается только уравнение Винера-Хопфа, записываемое в виде:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{восст}(k) B_g(m-k) = B_{fg}(-m). \qquad (6.17)$$

Выражение (6.17) можно интерпретировать как свертку последовательностей, поэтому, переходя к их z-преобразованиям, получаем:

$$H_{восст}(z)\Phi_g(z) = \Phi_{fg}\left(z^{-1}\right),$$

$$H_{восст}(z) = \frac{\Phi_{fg}\left(z^{-1}\right)}{\Phi_g(z)}. \qquad (6.18)$$

Формула (6.18) задает передаточную функцию искомого оптимального фильтра. Его импульсная характеристика может быть определена отсюда обычным путем через обратное z-преобразование.

Определим, какую минимальную ошибку восстановления обеспечивает оптимальный фильтр. Для этого можно было бы, конечно, воспользоваться формулой (6.13), полученной в предыдущем параграфе, но в данном случае удобнее и полезнее для анализа сделать иначе. Определим сначала корреляционную функцию и энергетический спектр ошибки восстановления:

$$B_{\varepsilon}(m) = E\{\varepsilon(n)\varepsilon(n+m)\} = E\left\{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{восст}(k)\, g(n-k) - f(n)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{восст}(l)\, g(n+m-l) - f(n+m)\right]\right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{восст}(k) h_{восст}(l) B_g(m-l+k) -$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{восст}(k) B_{fg}(-k-m) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{восст}(l) B_{fg}(m-l) + B_f(m).$$

Запишем это же выражение в сокращенной форме, используя оператор свертки:

$$\begin{aligned} B_{\varepsilon}(m) &= h_{восст}(m) * h_{восст}(-m) * B_g(m) - \\ &- h_{восст}(-m) * B_{fg}(-m) - \\ &- h_{восст}(m) * B_{fg}(m) + B_f(m) \end{aligned} \qquad (6.19)$$

и перейдем к z-преобразованиям последовательностей, входящих в (6.19):

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon}(z) &= H_{восст}(z) H_{восст}\left(z^{-1}\right)\Phi_g(z) - \\ &- H_{восст}\left(z^{-1}\right)\Phi_{fg}\left(z^{-1}\right) - \\ &- H_{восст}(z)\Phi_{fg}(z) + \Phi_f(z). \end{aligned} \qquad (6.20)$$

Выражения (6.19) и (6.20) справедливы для любой восстанавливающей системы, а не только для оптимальной, поскольку при их получении мы не налагали ограничений на $h_{восст}(n)$. Для оптимального фильтра учтем соотношение (6.18) и получим:

$$\Phi_{\varepsilon}(z) = \Phi_f(z) - \frac{\Phi_{fg}\left(z^{-1}\right)}{\Phi_g(z)}\Phi_{fg}(z)$$

или, что удобнее,

$$\Phi_{\varepsilon}(z) = \Phi_{f}(z) - H_{восст}(z)\Phi_{fg}(z) . \qquad (6.21)$$

Из последней формулы искомую среднеквадратичную ошибку можно вычислить двумя путями:

1) Перейти от z-преобразования (6.21) к самой последовательности (корреляционной функции ошибки):

$$B_{\varepsilon}(m) = B_{f}(m) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{восст}(k) B_{fg}(m-k)$$

и далее при $m = 0$ получить

$$\varepsilon^2 = \sigma_f^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{восст}(k) B_{fg}(-k)$$

(последняя формула, кстати, является частным случаем формулы (6.13)).

2) Перейти от z-преобразования к энергетическому спектру ошибки восстановления и вычислить ошибку по формуле

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{\varepsilon}\left(e^{i\omega}\right) d\omega .$$

В общей постановке решение задачи на этом завершается. Более продвинутый результат можно получить, введя дополнительные упрощения.

Рассмотрим частную, но очень распространенную ситуацию восстановления сигнала при линейной модели наблюдения (6.1), когда *полезный сигнал и шум статистически независимы*. Оптимальный линейный восстанавливающий фильтр для этого случая называется *фильтром Винера-Колмогорова*. Определим его передаточную функцию. Для начала подсчитаем корреляционные функции, входящие в (6.17). Корреляционные функции наблюдаемого сигнала:

$$
\begin{aligned}
B_g(m) &= E\{g(n)g(n+m)\} = \\
&= E\left\{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) f(n-k) + v(n)\right] \times \right. \\
&\left. \times \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) f(n+m-l) + v(n+m)\right]\right\} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l) E\{f(n-k) f(n+m-l)\} + \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) E\{f(n-k) v(n+m)\} + \\
&+ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) E\{f(n+m-l) v(n)\} + E\{v(n) v(n+m)\} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l) B_f(n+m-l) + B_v(m) = \\
&= h(m) * h(-m) * B_f(m) + B_v(m).
\end{aligned}
$$

Соответственно, для z-преобразований записанных последовательностей:

$$\Phi_g(z) = H(z) H\left(z^{-1}\right) \Phi_f(z) + \Phi_v(z) \ . \qquad (6.22)$$

Взаимная корреляционная функция полезного и наблюдаемого сигнала получается в результате аналогичных, но более простых преобразований:

$$B_{fg}(m) = E\{f(n)g(n+m)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) B_f(m-k) = h(m) * B_f(m) \ ,$$

то есть

$$\Phi_{fg}(z) = H(z) \Phi_f(z) \ . \qquad (6.23)$$

Подставив (6.22) и (6.23) в (6.18), получаем передаточную функцию фильтра Винера-Колмогорова:

$$H_{восст}(z)=\frac{H\left(z^{-1}\right)\Phi_f(z)}{H(z)H\left(z^{-1}\right)\Phi_f(z)+\Phi_v(z)} \qquad (6.24)$$

(в этой формуле дополнительно учтено, что $\Phi_f\left(z^{-1}\right)=\Phi_f(z)$).

Фильтр Винера-Колмогорова обеспечивает минимальную среднеквадратичную ошибку восстановления сигнала при линейной модели наблюдения и отсутствии корреляции между полезным сигналом и шумом. Энергетический спектр этой ошибки можно найти подстановкой (6.23) и (6.24) в (6.21):

$$\Phi_\varepsilon(z)==\frac{\Phi_v(z)\Phi_f(z)}{H(z)H\left(z^{-1}\right)\Phi_f(z)+\Phi_v(z)}, \qquad (6.25)$$

а сама ошибка определяется отсюда известными двумя путями, описанными выше.

Рассмотрим некоторые частные случаи применения фильтра Винера-Колмогорова.

1) Пусть имеется упрощенная модель наблюдения без "линейных" искажений:

$$g(n)=f(n)+v(n). \qquad (6.26)$$

Здесь $h(n)=\delta(n)$, $H(z)=1$ и поэтому из (6.24), (6.25) получаем:

$$H_{восст}(z)=\frac{\Phi_f(z)}{\Phi_f(z)+\Phi_v(z)}, \qquad (6.27)$$

$$\Phi_\varepsilon(z)=\frac{\Phi_v(z)\Phi_f(z)}{\Phi_f(z)+\Phi_v(z)}=\Phi_v(z)H_{восст}(z). \qquad (6.28)$$

Нетрудно заметить, что в данном случае, поскольку

$$\Phi_f(z)=\Phi_f\left(z^{-1}\right);\ \Phi_v(z)=\Phi_v\left(z^{-1}\right),$$

то и

$$H_{восст}(z)=H_{восст}\left(z^{-1}\right),$$

а это означает, что

$$h_{восст}(n)=h_{восст}(-n)$$

– импульсная характеристика фильтра является четной последовательностью. Такой фильтр является физически нереализуемым, за исключением единственного вырожденного случая, рассматриваемого ниже.

2) Пусть, кроме того, шум – белый, то есть

$$B_v(m) = \sigma_v^2 \delta(m) \; ; \; \Phi_v(z) = \sigma_v^2 \; .$$

Тогда из (6.27), (6.28) имеем:

$$H_{восст}(z) = \frac{\Phi_f(z)}{\Phi_f(z) + \sigma_v^2} \; , \tag{6.29}$$

$$\Phi_\varepsilon(z) = \frac{\sigma_v^2 \, \Phi_f(z)}{\Phi_f(z) + \sigma_v^2} \, . \tag{6.30}$$

3) Пусть, наконец, и полезный сигнал также является белым шумом (этот случай, как мы увидим ниже, имеет определенный практический смысл). Теперь

$$B_f(m) = \sigma_f^2 \delta(m) \; ; \; \Phi_f(z) = \sigma_f^2 \tag{6.31}$$

и, следовательно,

$$H_{восст}(z) = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_v^2} \; ; \; \Phi_\varepsilon(z) = \frac{\sigma_v^2 \sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_v^2} \, . \tag{6.32}$$

От (6.31) можно очень просто перейти во временную область:

$$h_{восст}(n) = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_v^2} \delta(n) \; ,$$

и далее записать:

$$\hat{f}(n) = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_v^2} g(n) \; ,$$

то есть фильтрация заключается в простом умножении наблюдаемого сигнала на коэффициент (это так называемая “точечная” оценка сигнала).

Ошибки восстановления в соответствии с (6.32):

$$B_\varepsilon(m)=\frac{\sigma_v^2\sigma_f^2}{\sigma_f^2+\sigma_v^2}\delta(m);\quad \overline{\varepsilon}^2=B_\varepsilon(0)=\frac{\sigma_v^2\sigma_f^2}{\sigma_f^2+\sigma_v^2},$$

то есть дисперсия входного шума σ_v^2 здесь умножается на коэффициент $\frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2+\sigma_v^2}<1$ – шум убывает в максимально достижимой степени.

4) Еще один частный случай – отсутствие шума. При этом из (6.24) получаем:

$$H_{восст}(z)=\frac{H\left(z^{-1}\right)\Phi_f(z)}{H(z)H\left(z^{-1}\right)\Phi_f(z)}=\frac{1}{H(z)}$$

– так называемый *обратный (инверсный) фильтр*. В идеале такой фильтр обеспечивает абсолютно точное восстановление сигнала. Однако в большинстве практически интересных случаев он оказывается неустойчивым: бесконечно малым отклонениям входного сигнала обратного фильтра могут соответствовать бесконечно большие отклонения выходного сигнала, то есть *задача восстановления относится к числу некорректных*. Для получения устойчивого фильтра используются различные *методы регуляризации*.

Пример 6.1. Пусть модель наблюдения сигнала имеет вид (6.26), полезный сигнал имеет экспоненциальную корреляционную функцию:

$$B_f(m)=\sigma_f^2\rho^{|m|},$$

где ρ – коэффициент корреляции между соседними отсчетами, и наблюдается на фоне белого шума:

$$B_v(m)=\sigma_v^2\,\delta(m).$$

Определим передаточную функцию фильтра Винера. В данном случае:

$$\Phi_f(z)=\frac{\sigma_f^2\left(1-\rho^2\right)}{\left(1-\rho z^{-1}\right)(1-\rho z)},\quad \Phi_v(z)=\sigma_v^2$$

и, подставив эти величины в (6.27), после преобразований получаем:

$$H_{восст}(z)=\frac{d^2\left(1-\rho^2\right)}{d^2\left(1-\rho^2\right)+\left(1+\rho^2\right)-\rho\left(z+z^{-1}\right)}\ , \qquad (6.33)$$

где обозначено $d^2=\dfrac{\sigma_f^2}{\sigma_v^2}$ – отношение сигнал/шум по мощности.

Поскольку фильтр должен быть устойчивым, область сходимости данного z-преобразования должна включать в себя единичную окружность.

Из (6.33), основываясь на свойствах z-преобразования, можно определить импульсную характеристику фильтра Винера-Колмогорова:

$$h_{восст}(n)=A\alpha^{|n|}\ , \qquad (6.34)$$

где

$$A=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{d^2}\right)^2+\dfrac{4\rho^2}{d^2\left(1-\rho^2\right)}}},$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)+d^2\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{d^2}\right)^2+\frac{4\rho^2}{d^2\left(1-\rho^2\right)}}\right]\right\}.$$

Можно показать, что всегда $A>0$; $|\alpha|<1$.

Фильтр с импульсной характеристикой вида (6.34), очевидно, является физически нереализуемым. Поэтому вопрос его практического использования пока остается открытым. Ответ на него мы получим позже. А пока определим ошибку восстановления. В нашем случае линейных искажений сигнала нет и шум белый, поэтому сразу можно воспользоваться формулой (6.16):

$$\overline{\varepsilon}^2=\sigma_v^2 h_{восст}(0)=\frac{\sigma_v^2}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{d^2}\right)^2+\dfrac{4\rho^2}{d^2\left(1-\rho^2\right)}}}\ . \qquad (6.35)$$

Выражение (6.35) имеет смысл проанализировать. При $\rho \to 1$, то есть при увеличении коррелированности полезного сигнала, $\varepsilon^2 \to 0$ и возможность фильтрации шума возрастает. При увеличении отношения сигнал/шум ($d^2 \to \infty$) отношение $\dfrac{\varepsilon^2}{\sigma_v^2} \to 1$ и относительная эффективность фильтрации (коэффициент подавления шума) стремится к единице. Иллюстрация к сказанному дана на рис. 6.3.

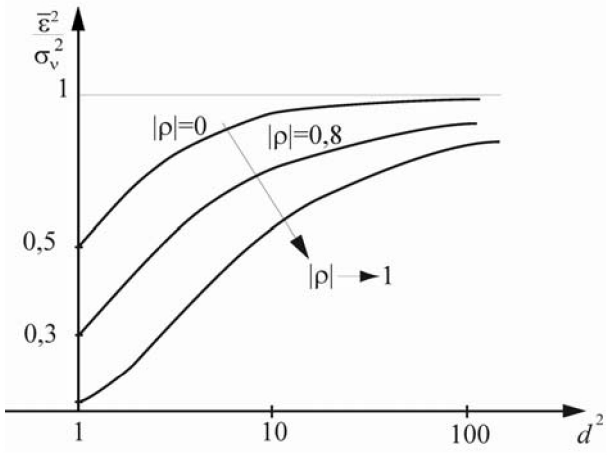


Рис. 6.3. Зависимость качества восстановления от параметров искажения

6.3 Реализация оптимального фильтра обработкой "в прямом и обратном времени"

Оптимальный линейный восстанавливающий фильтр, как правило, не отвечает требованию физической реализуемости. Поэтому оценка сигнала (6.2) не может быть вычислена впрямую. Для того, чтобы практически воспользоваться процедурой оптимального восстановления, есть два основных способа. В данном параграфе мы рассмотрим один из них, заключающийся в *обработке сигнала "в прямом и обратном времени"*.

Этот способ обработки применяется в тех случаях, когда есть возможность сразу ввести в компьютер достаточно длинную реализацию сигнала. Когда отсчеты последовательности записаны в память компьютера, понятия “прошлого” и “будущего” становятся ус-

ловными: по сигналу (то есть по массиву отсчетов) можно двигаться как в направлении возрастания аргумента (индекса), то есть в "*прямом времени*", так и в направлении убывания – *"в обратном времени"*. Этот факт и позволяет реализовать оптимальный фильтр.

Ниже будем считать, что характеристики обрабатываемых сигналов таковы, что передаточная функция оптимального фильтра $H_{восст}(z)$ является дробно-рациональной. Она соответствует *устойчивой, но физически нереализуемой системе*, то есть взаимное расположение полюсов и области сходимости на z-плоскости имеет примерно такой вид, как изображено на рис. 6.4.

Областью сходимости $H_{восст}(z)$ является кольцо, включающее единичную окружность:

$$R_- < |z| < R_+ \text{ при } R_- < 1; \quad R_+ > 1 .$$

Дробно-рациональную передаточную функцию согласно формуле (3.10) можно записать через нули и полюсы:

$$H_{восст}(z) = A \frac{\prod_{j=1}^{N}\left(1 - q_j z^{-1}\right)}{\prod_{j=1}^{M}\left(1 - p_j z^{-1}\right)} \cdot z^k , \qquad (6.36)$$

где A, k – некоторые константы (k – целое). Часть полюсов в (6.36) имеет модуль меньше единицы, а часть – больше единицы.

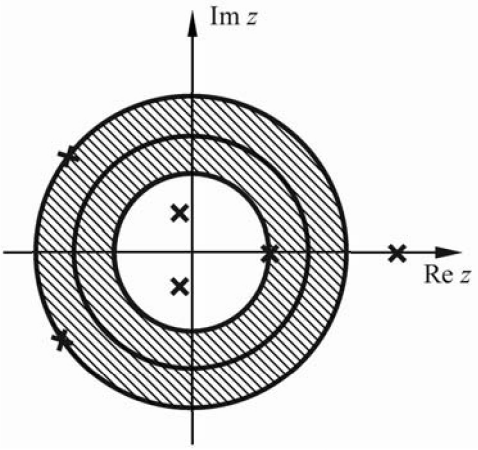


Рис. 6.4. Расположение полюсов в устойчивой физически реализуемой системе

Представим передаточную функцию в следующей форме:

$$H_{восст}(z) = H^{+}_{восст}(z) H^{-}_{восст}(z) \ , \qquad (6.37)$$

где к сомножителю $H^{+}_{восст}(z)$ отнесем часть знаменателя с полюсами, лежащими внутри единичной окружности, а к $H^{-}_{восст}(z)$ – с полюсами вне единичной окружности. Распределение нулей и коэффициента A, в принципе, произвольно. Очевидно, что здесь мы снова решаем задачу факторизации (см. парагр. 5.3), но уже в более общей, "несимметричной" постановке.

Составляющая $H^{+}_{восст}(z)$ будет иметь область сходимости

$$|z| > R_{-} \quad (R_{-} < 1)$$

то есть соответствовать передаточной функции некоторой устойчивой системы. Эта система физически реализуема, так как ее импульсная характеристика $h^{+}_{восст}(n)$, соответствующая передаточной функции $H^{+}_{восст}(z)$, является правосторонней последовательностью.

Аналогично, сомножитель $H^{-}_{восст}(z)$ в (6.37) имеет область сходимости

$$|z| < R_{+} \quad (R_{+} > 1),$$

и соответствует передаточной функции устойчивой системы, реализуемой в обратном времени (ее импульсная характеристика $h^{-}_{восст}(n)$ будет левосторонней последовательностью).

Произведение передаточных функций соответствует каскадному (последовательному) соединению систем. То есть мы имеем здесь "двухпроходную" процедуру восстановления, заключающуюся в последовательной обработке сигнала в прямом, и затем в обратном времени.

С другой стороны, можно представить передаточную функцию $H_{восст}(z)$ в виде суммы, используя разложение (6.36) на простые дроби:

$$H_{восст}(z) = \sum_{j=1}^{M} \frac{C_j}{1 - p_j z^{-1}} \qquad (6.38)$$

(выражение (6.38) записано для случая правильной дроби и простых полюсов, более общей формулой является (3.34)).

В данном случае получаем

$$H_{восст}(z) = H^{+}_{восст}(z) + H^{-}_{восст}(z) , \qquad (6.39)$$

где слагаемые формируются по тому же принципу, что и раньше (см. формулу (3.34)). Формула (6.39) задает двухпроходную процедуру параллельной обработки сигнала.

Пример 6.2. В предыдущем параграфе мы получали, что для восстановления сигнала с экспоненциальной автокорреляционной функцией из его смеси с независимым белым шумом импульсная характеристика оптимального (винеровского) фильтра имеет вид:

$$h_{восст}(n) = A\alpha^{|n|} ,$$

где $A > 0$, $|\alpha| < 1$ – величины, рассчитываемые через характеристики сигнала и шума.

Передаточная функция этого фильтра:

$$H_{восст}(z) = \frac{A\left(1-\alpha^2\right)}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)\left(1-\alpha z\right)}$$

с полюсами $p_1 = \alpha, \quad p_2 = \frac{1}{\alpha}$. Построим двухпроходный последовательный алгоритм обработки. В данном случае передаточная функция легко факторизуется к виду (6.37), где

$$H^{+}_{восст}(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} ; \; H^{-}_{восст}(z) = \frac{A\left(1-\alpha^2\right)}{1-\alpha z} .$$

По этим передаточным функциям легко строятся разностные уравнения. На первом шаге обработки (в прямом времени) из искаженного сигнала $g(n)$ получаем промежуточную последовательность $w(n)$:

$$w(n) = \alpha w(n-1) + g(n) .$$

На втором шаге обработки (в обратном времени) получаем искомую оценку сигнала:

$$\hat{f}(n) = \alpha \hat{f}(n+1) + w(n) A\left(1-\alpha^2\right) .$$

Можно построить и двухпроходный параллельный алгоритм. Для этого, вообще говоря, нужно разложить передаточную функцию $H_{восст}(z)$ на простые дроби. Но в данном конкретном случае поступим проще и представим импульсную характеристику фильтра в следующем виде:

$$h_{восст}(n) = A\alpha^{|n|} = A\left[\alpha^{n} u(n) + \alpha^{-n} u(-n) - \delta(n)\right],$$

то есть

$$H_{восст}(z) = A\left[\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z} - 1\right] = H^{+}_{восст}(z) + H^{-}_{восст}(z),$$

где

$$H^{+}_{восст}(z) = A\left[\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} - 1\right] = \frac{A\alpha z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}},$$

$$H^{-}_{восст}(z) = \frac{A}{1-\alpha z}.$$

В соответствии с полученными соотношениями, при обработке в прямом времени формируется последовательность $\hat{f}^{+}(n)$:

$$\hat{f}^{+}(n) = \alpha\, \hat{f}^{+}(n-1) + A\alpha\, g(n-1),$$

а при обработке в обратном времени – $\hat{f}^{-}(n)$:

$$\hat{f}^{-}(n) = \alpha\, \hat{f}^{-}(n+1) + g(n)$$

Далее для получения результата восстановления эти последовательности суммируются:

$$\hat{f}(n) = \hat{f}^{+}(n) + \hat{f}^{-}(n).$$

6.4 Реализация оптимального фильтра при помощи ДПФ

Оптимальный линейный фильтр физически реализуем и притом чрезвычайно прост в ситуации восстановления белого шума на фоне белого шума, сводящегося, как мы видели, к точечной оценке (6.32). В общем случае сигналы не являются белым шумом, в них наблюдается статистическая связь между отсчетами, и при решении задачи восстановления мы приходим к уравнению Винера-Хопфа. Однако есть и другая возможность построения процедуры оптимального

восстановления. Можно произвести над сигналом некоторое обратимое преобразование, которое произвело бы декорреляцию сигнала. К декоррелированному сигналу можно применить процедуру точечной оценки, которая для такой ситуации является оптимальной. Затем после обратного преобразования получим искомую оценку сигнала.

Требуемым декоррелирующим свойством при определенных условиях обладает ДПФ, задаваемое соотношениями (4.24) и (4.30). Рассмотрим более подробно процедуру оптимального восстановления в спектральной области на примере, когда имеется модель наблюдения без динамических искажений, заданная соотношением (6.26).

Поскольку ДПФ предполагает работу с последовательностями конечной длины, наблюдаемый сигнал разбивается на отрезки длиной по N отсчетов. Рассмотрим один из таких отрезков при $0 \le n \le N-1$. После применения ДПФ к (6.26) получаем уравнение наблюдения для дискретных спектров:

$$G(m) = F(m) + V(m), \qquad 0 \le m \le N-1. \tag{6.40}$$

Поскольку последовательности в исходной модели наблюдения считаются случайными, их ДПФ тоже являются случайными последовательностями. И для восстановления сигнала нам нужно знать их статистические характеристики.

Далее все количественные соотношения и формулы получим для нашего сквозного примера из парагр. 6.2 и 6.3: будем считать, что экспоненциально коррелированный сигнал наблюдается на фоне белого шума, то есть

$$B_f(k) = \sigma_f^2 \rho^{|k|}, \tag{6.41}$$

$$B_v(k) = \sigma_v^2 \delta(k). \tag{6.42}$$

Определим корреляционную функцию ДПФ полезного сигнала. По определению, для нестационарной комплексной случайной последовательности ($0 \le k, l \le N-1$)

$$B_F(k,l) = E\left\{F(k)F^*(l)\right\}, \tag{6.43}$$

где * – знак комплексного сопряжения. Подставив в (6.43) сначала (4.24), а затем (6.41), после выполнения ряда преобразований получаем:

$$B_F(k,l) = E\left\{\sum_{p=0}^{N-1} f(p) W_N^{pk} \sum_{r=0}^{N-1} f(r) W_N^{-rl}\right\} =$$

$$= \sum_{p=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} B_f(r-p) W_N^{(pk-rl)} = \sum_{p=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} \sigma_f^2 \rho^{|r-p|} W_N^{(pk-rl)} =$$

(6.44)

$$= \sigma_f^2 N\delta(k-l)\left[-\frac{\rho^{-1}W_N^k}{1-\rho^{-1}W_N^k} - \frac{1}{1-\rho^{-1}W_N^{-l}}\right] +$$

$$+ \sigma_f^2\left[\frac{1}{\left(1-\rho^{-1}W_N^k\right)\left(1-\rho W_N^{-l}\right)} + \frac{1}{\left(1-\rho^{-1}W_N^{-l}\right)\left(1-\rho W_N^k\right)}\right]\times(1-\rho).$$

Первое слагаемое в (6.44) отлично от нуля только при $k = l$, то есть тогда, когда АКФ превращается в дисперсию. По сравнению с этой дисперсией при $N >> 1$ вторым слагаемым можно пренебречь, то есть

$$B_F(k,l) \approx \sigma_f^2 N\delta(k-l)\left[-\frac{\rho^{-1}W_N^k}{1-\rho^{-1}W_N^k} - \frac{1}{1-\rho^{-1}W_N^{-l}}\right] \qquad (6.45)$$

– единичный импульс с коэффициентом. То есть ДПФ сигнала является дискретным "почти" белым шумом. Положив в (6.45) $k = l = m$, определим его дисперсию в каждой точке:

$$\sigma_F^2(m) = B_F(m,m) = \sigma_f^2 N\left[-\frac{\rho^{-1}W_N^k}{1-\rho^{-1}W_N^m} - \frac{1}{1-\rho^{-1}W_N^{-m}}\right] =$$

$$= \sigma_f^2 N\frac{\rho^{-2}-1}{1+\rho^{-2}-\rho^{-1}\left(W_N^m + W_N^{-m}\right)} = \sigma_f^2 N\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\frac{2\pi}{N}m}. \qquad (6.46)$$

Видно, что дисперсия каждой спектральной компоненты $F(m)$ зависит от ее номера m, длины последовательности N и корреляционных свойств сигнала ρ.

Аналогичным путем можно вычислить и дисперсии ДПФ шума. Однако в нашем случае нет необходимости повторять весь ход пре-

образований. С учетом (6.42) можно, положив в (6.44) $\rho = 0$ и заменив индексы сигнала на индексы шума, сразу получить:

$$B_V(k,l) = N\sigma_v^2\,\delta(k-l)$$

– белый шум во временной области переходит в белый же шум в спектральной области. В отличие от дисперсии (6.40), дисперсия спектральных компонент шума не зависит от m:

$$\sigma_V^2(m) = \sigma_V^2 = N\sigma_v^2 \ . \qquad (6.47)$$

Таким образом, для модели наблюдения в спектральной области задача сводится к оценке белого шума с дисперсией (6.46) на фоне белого шума с дисперсией (6.47). Восстановление заключается в точечной оценке, то есть в умножении каждого спектрального отсчета на коэффициент λ_m :

$$\hat{F}(m) = \lambda_m G(m), \qquad 0 \le m \le N-1 \ , \qquad (6.48)$$

где

$$\lambda_m = \frac{\sigma_F^2(m)}{\sigma_F^2(m)+\sigma_V^2} = \frac{d^2\left(1-\rho^2\right)}{d^2\left(1-\rho^2\right)+\left(1+\rho^2\right)-2\rho\cos\dfrac{2\pi}{N}m} \ . \qquad (6.49)$$

Далее полученная по (6.48) оценка $\hat{F}(m)$ переводится во временную область при помощи обратного ДПФ (4.30). Схема всей процедуры восстановления показана на рис. 6.5. Такая процедура восстановления является асимптотически оптимальной при $N \to \infty$.

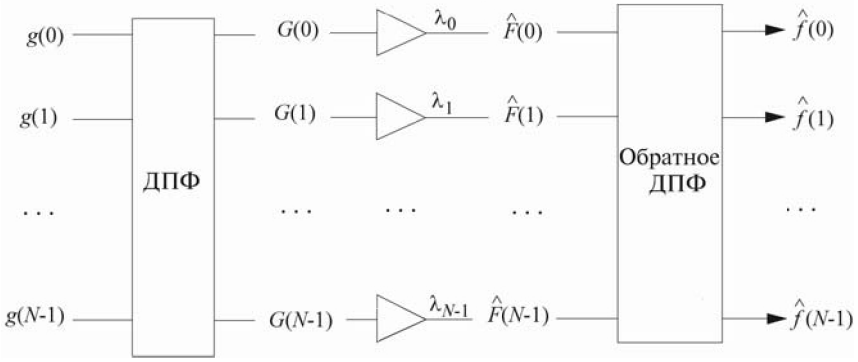


Рис. 6.5. Схема процедуры восстановления сигнала с использованием ДПФ

6.5 Восстановление сигнала физически-реализуемым БИХ-фильтром

Рассмотренные выше способы реализации оптимального фильтра позволяют на практике воспользоваться результатами теории оптимального восстановления сигналов. Однако в некоторых случаях эти способы все же оказываются неприменимы. Например, при обработке сигналов в темпе процессов измерений не всегда имеется возможность обрабатывать его в "обратном" времени. Использование ДПФ при больших N оказывается для некоторых применений чрезмерно сложным, несмотря на наличие быстрых алгоритмов преобразования. В этой связи наряду с оптимальными фильтрами получили распространение *субоптимальные* (*квазиоптимальные*) *процедуры восстановления*, имеющие более простую реализацию.

Ниже рассмотрим восстановление сигнала БИХ-фильтром с импульсной характеристикой, удовлетворяющей условию:

$$h_{восст}(n) = 0 \text{ при } n < N_1 \ . \qquad (6.50)$$

Если отсчеты этой импульсной характеристики выбраны исходя из минимизации ошибки восстановления (6.7), то такой фильтр называется *физически реализуемым оптимальным фильтром* или, в случае независимости сигнала и шума в модели наблюдения, физически реализуемым фильтром Винера. Очевидно, что он будет работать несколько хуже, чем оптимальная восстанавливающая система, так как на часть отсчетов $h_{восст}(n)$ наложено сформулированное выше ограничение.

В зависимости от значения постоянной N_1 в условии (6.50) здесь возможны варианты, показанные на рис. 6.6.

В первом случае осуществляется восстановление без задержки, оценка строится на основании наблюдаемого сигнала в текущий и предыдущие моменты времени. Во втором случае (рис. 6.6,*б*) восстановление производится только по "прошлым" значениям наблюдаемого (искаженного) сигнала, то есть имеет место предсказание (экстраполяция) сигнала. В третьем случае (рис. 6.6,*в*) фильтр является уже физически нереализуемым, здесь восстановление производится с учетом некоторого числа "будущих" отсчетов сигнала. Такой фильтр может быть сведен к физически реализуемому, если допустить задержку в получении выходного сигнала. Здесь мы имеем процедуру восстановления с задержкой (интерполяции).

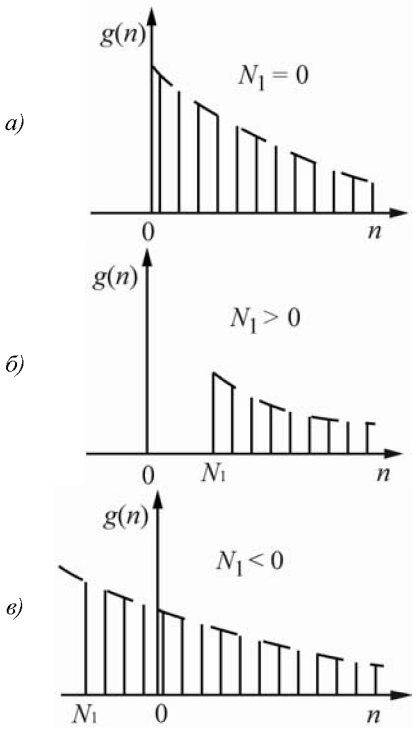


Рис. 6.6. Различные варианты ИХ квазиоптимального восстанавливающего БИХ-фильтра

Ниже мы ограничимся рассмотрением только первого случая.

Итак, построим физически реализуемый БИХ-фильтр, осуществляющий оптимальное (квазиоптимальное) восстановление сигнала без задержки. Для него с учетом (6.50) система уравнений (6.12) может быть переписана в более конкретном виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} h_{восст}(k) B_g(m-k) = B_{fg}(-m) & m \geq 0, \\ h_{восст}(m) = 0 & m < 0. \end{cases} \tag{6.51}$$

Рассмотрим сначала простой (но далекий от практики) случай, когда искаженный сигнал $g(n)$ является белым шумом с единичной дисперсией:

$$B_g(m) = \delta(m), \tag{6.52}$$

то есть представляет собой последовательность из некоррелированных отсчетов. Тогда, подставив (6.52) в (6.51), сразу получаем:

$$h_{восст}(m) = \begin{cases} B_{fg}(-m) & m \geq 0, \\ 0 & m < 0. \end{cases} \tag{6.53}$$

Соответственно передаточная функция искомого фильтра:

$$H_{восст}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{fg}(-m) z^{-m} . \tag{6.54}$$

Здесь необходимо сделать небольшое отступление и ввести понятие (и обозначение) "*реализуемой части последовательности*" (или ее *z*-преобразования). Для произвольной последовательности $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$:

$$\left[f(n)\right]_R = f(n)u(n), \tag{6.55}$$

$$\left[F(z)\right]_R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f(n)\right]_R z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n} . \tag{6.56}$$

Если известно *z*-преобразование $F(z)$, то $\left[F(z)\right]_R$ можно найти двумя способами.

Первый способ универсален, но всегда удобен в практическом применении. В соответствии с ним нужно взять обратное *z*–преобразование, полученную последовательность умножить на функцию единичного скачка (выполнить операцию (6.55)), и затем снова взять *z*-преобразование (выполнить (6.56)).

Второй способ специфичен для дробно-рациональных *z*–преобразований. Если $F(z)$ – такое *z*-преобразование, сходящееся в кольце

$$R_- < |z| < R_+ ,$$

то можно вычислить реализуемую часть, разложив его на простые дроби. Действительно, в общем случае (см. формулу (6.34)):

$$F(z) = \sum_k d_k z^{-k} + \sum_l \sum_{j=1}^{N_l} \frac{C_{jl}}{\left(1 - p_l z^{-1}\right)^j} ,$$

где k, l – индексы, принадлежащие некоторым конечным множествам, по которым производится суммирование; p_l – полюсы кратности N_l. Реализуемая часть получится, если взять из этого разложения только те слагаемые, которые соответствуют последовательностям, отличным от нуля при $n \geq 0$:

$$\left[X(z)\right]_R = \sum_{k\geq 0} d_k\, z^{-k} + \sum_{l:|p_l|\leq R_-} \sum_{j=1}^{N_l} \frac{C_{jl}}{\left(1 - p_l\, z^{-1}\right)^j},$$

– то есть часть дельта-импульсов и правосторонние экспоненты.

Итак, возвращаясь к задаче восстановления, если наблюдаемый сигнал $g(n)$ – белый шум с единичной дисперсией, то характеристики оптимального БИХ-фильтра, заданные соотношениями (6.53) и (6.54), могут быть записаны в форме:

$$h_{восст}(n) = \left[B_{fg}(-n)\right]_R, \tag{6.57}$$

$$H_{восст}(z) = \left[\Phi_{fg}\left(z^{-1}\right)\right]_R. \tag{6.58}$$

На практике, как уже говорилось, наблюдаемый сигнал $g(n)$ не является белым шумом. Но мы можем превратить его в таковой, пропустив через специально рассчитанную ЛИС-систему – "*отбеливающий*" *фильтр*. При этом вся процедура восстановления приобретает вид, показанный на рис. 6.7, то есть будет представлять собой последовательное соединение отбеливающего и восстанавливающего фильтров.

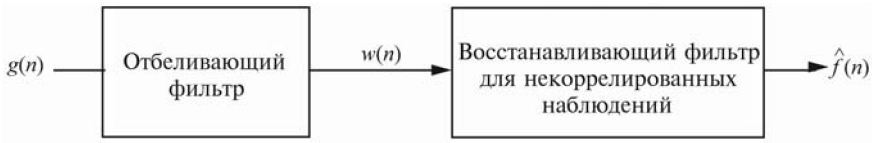


Рис. 6.7. Физически реализуемый оптимальный восстанавливающий фильтр $H_{восст}(z)$

Пусть $H_{отб}(z)$ – передаточная функция отбеливающего фильтра, а $w(n)$ – последовательность на его выходе. Тогда

$$H_{восст}(z) = H_{отб}(z)\left[\Phi_{fw}\left(z^{-1}\right)\right]_R . \qquad (6.59)$$

Выразим входящие в (14.58) z-преобразования через известные нам характеристики. Во-первых, определим передаточную функцию отбеливающего фильтра. По смыслу его применения должно быть:

$$\Phi_w(z) = H_{отб}(z)H_{отб}\left(z^{-1}\right)\Phi_g(z) = 1$$

или

$$H_{отб}(z)H_{отб}\left(z^{-1}\right) = \frac{1}{\Phi_g(z)} . \qquad (6.60)$$

Здесь необходимо решить задачу факторизации функции $\Phi_g(z)$ (см. парагр.5.3), то есть представить ее в виде

$$\Phi_g(z) = \Phi_g^+(z)\,\Phi_g^+\left(z^{-1}\right), \qquad (6.61)$$

где $\Phi_g^+(z)$ – передаточная функция физически реализуемой ЛИС-системы, имеющая нули, расположенные внутри единичной окружности. Последнее требование обусловлено тем, что из (6.60) и (6.61) мы получаем:

$$H_{отб}(z) = \frac{1}{\Phi_g^+(z)} . \qquad (6.62)$$

и упомянутые нули (ставшие теперь полюсами) обеспечат устойчивость отбеливающего фильтра.

Во-вторых, вычислим взаимный энергетический спектр последовательностей на входе и на выходе второго блока процедуры, показанной на рис. 6.7. В соответствии с (3.62),

$$\Phi_{fw}(z) = \Phi_{fg}(z)H_{отб}(z) = \frac{\Phi_{fg}(z)}{\Phi_g^+(z)} . \qquad (6.63)$$

Подставив (6.62) и (6.63) в (6.59), окончательно получаем:

$$H_{восст}(z) = \frac{1}{\Phi_g^+(z)}\left[\frac{\Phi_{fg}\left(z^{-1}\right)}{\Phi_g^+\left(z^{-1}\right)}\right]_R . \qquad (6.64)$$

Пример 6.3. Построим физически реализуемый восстанавливающий БИХ-фильтр для экспоненциального коррелированного сигнала, искаженного статистически независимым белым шумом, то есть для модели наблюдения.

В силу независимости последовательностей в модели наблюдения имеем:

$$B_g(m) = B_f(m) + B_v(m) .$$

Отсюда, переходя к z-преобразованиям, получаем:

$$\Phi_g(z) = \Phi_f(z) + \Phi_v(z) =$$

$$= \frac{\sigma_f^2\left(1-\rho^2\right)}{\left(1-\rho z^{-1}\right)\left(1-\rho z\right)} + \sigma_v^2 = \sigma_v^2 \frac{\frac{1}{\alpha}+\alpha-\left(z+z^{-1}\right)}{\frac{1}{\rho}+\rho-\left(z+z^{-1}\right)},$$

$$|\rho| < |z| < \frac{1}{|\rho|} , \qquad (6.65)$$

где значение параметра α определяется из уравнения

$$\frac{1}{\alpha}+\alpha = d^2\left(\frac{1}{\rho}-\rho\right)+\left(\frac{1}{\rho}+\rho\right)$$

с условием $|\alpha|<1$. Решение этого уравнения дает:

$$\alpha = \frac{1}{2\rho}\left\{1+\rho^2+d^2\left(1-\rho^2\right)\left[1-\sqrt{\left(1+\frac{1}{d^2}\right)^2+\frac{4\rho^2}{d^2\left(1-\rho^2\right)}}\right]\right\} . \qquad (6.66)$$

Формулу (6.65) можно представить в виде "симметричных" сомножителей:

$$\Phi_g(z) = \sigma_v^2 \frac{\rho}{\alpha} \frac{\left(1-\alpha z^{-1}\right)\left(1-\alpha z\right)}{\left(1-\rho z^{-1}\right)\left(1-\rho z\right)}, \quad |\rho| < |z| < \frac{1}{|\rho|} ,$$

после чего решение задачи факторизации становится очевидным:

$$\Phi_g^+(z) = \sqrt{\frac{\rho}{\alpha}}\sigma_v \frac{1-\alpha z^{-1}}{1-\rho z^{-1}} , \qquad |\alpha|<1,\ |\rho|<1 . \qquad (6.67)$$

Передаточная функция (6.62) отбеливающего фильтра здесь равна:

$$H_{отб}(z)=\frac{1}{\Phi_g^+(z)}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho}\,\sigma_v}\cdot\frac{1-\rho z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}},\qquad |z|>|\alpha|.$$

Далее определим взаимный энергетический спектр последовательностей:

$$\Phi_{fg}(z)=\Phi_f(z)=\frac{\left(1-\rho^2\right)\sigma_f^2}{\left(1-\rho z^{-1}\right)(1-\rho z)},\qquad |\rho|<|z|<\frac{1}{|\rho|}$$

и физически реализуемую часть z-преобразования, входящую как сомножитель в формулу (6.64):

$$\frac{\Phi_{fg}(z)}{\Phi_g^+(z)}=\frac{\left(1-\rho^2\right)\sigma_f^2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho}\,\sigma_v}\frac{1}{(1-\rho z)\left(1-\alpha z^{-1}\right)},\quad |\alpha|<|z|<\frac{1}{|\rho|};$$

$$\frac{\Phi_{fg}\left(z^{-1}\right)}{\Phi_g^+\left(z^{-1}\right)}=\frac{\left(1-\rho^2\right)\sigma_f^2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho}\,\sigma_v}\frac{1}{\left(1-\rho z^{-1}\right)(1-\alpha z)},\quad |\rho|<|z|<\frac{1}{|\alpha|}. \qquad (6.68)$$

Для отыскания реализуемой части разложим z-преобразование (6.68) на простые дроби (при этом коэффициент пока оставим в стороне), а область сходимости будем указывать непосредственно под формулами:

$$\underset{|\rho|<|z|<\frac{1}{|\alpha|}}{\frac{1}{\left(1-\rho z^{-1}\right)(1-\alpha z)}}=\frac{1}{1-\alpha\rho}\times\underset{|z|>|\rho|}{\frac{1}{1-\rho z^{-1}}}\times\underset{|z|<1/|\alpha|}{\frac{1}{1-\alpha\rho}\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}z^{-1}}}.$$

Реализуемой части соответствует первое слагаемое, то есть с учетом коэффициента в (6.68) имеем:

$$\left[\frac{\Phi_{fg}\left(z^{-1}\right)}{\Phi_g^+\left(z^{-1}\right)}\right]_R=\frac{\left(1-\rho^2\right)\sigma_f^2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho}\,\sigma_v(1-\alpha\rho)}\frac{1}{1-\rho z^{-1}}. \qquad (6.69)$$

Передаточная функция всего восстанавливающего фильтра получается подстановкой (14.66) и (14.68) в (14.63):

$$H_{восст}(z)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho}\,\sigma_v}\frac{1-\rho z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}\frac{\left(1-\rho^2\right)\sigma_f^2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho}\,\sigma_v(1-\alpha\rho)}\frac{1}{1-\rho z^{-1}}= \\ =\frac{C}{1-\alpha z^{-1}}, \tag{6.70}$$

где на последнем шаге обозначено $C=\frac{\left(1-\rho^2\right)\alpha d^2}{\rho(1-\alpha\rho)}$, α – определяется соотношением (6.66). Из (6.70) легко строится разностное уравнение, задающее рекуррентный алгоритм фильтрации сигнала:

$$\hat{f}(n)=\alpha\,\hat{f}(n-1)+C\,g(n)\,. \tag{6.71}$$

Простая структурная схема ЛИС-системы, соответствующей уравнению (6.71), показана на рис. 6.8.

Импульсная характеристика восстанавливающего БИХ-фильтра:

$$h_{восст}(n)=C\,\alpha^n\,u(n)\,.$$

В соответствии с формулой (6.16) ошибка восстановления сигнала здесь равна:

$$\overline{\varepsilon}^2=\sigma_v^2\,h_{восст}(0)=\sigma_v^2\,C=\frac{\sigma_v^2\left(1-\rho^2\right)\alpha d^2}{\rho(1-\alpha\rho)}\,.$$

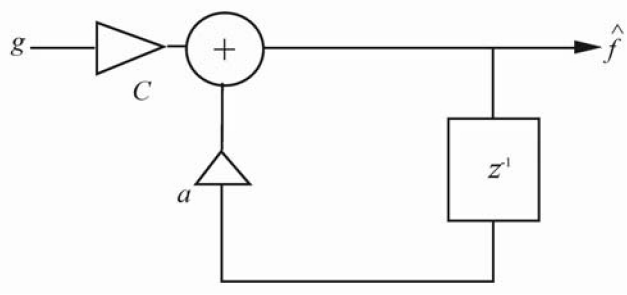


Рис. 6.8. Структурная схема ЛИС-системы, реализующей рекуррентное восстановление сигнала

6.6 Восстановление сигнала КИХ-фильтром

Построим теперь субоптимальный восстанавливающий КИХ-фильтр. В этом случае за оценку сигнала $\hat{f}(n)$ принимается взвешенная сумма конечного числа отсчетов наблюдаемого сигнала $g(n)$, то есть здесь оценка строится нерекурсивно, как результат непосредственного вычисления свертки

$$\hat{f}(n) = \sum_{k \in D} h_{восст}(k)\, g(n-k)\,, \qquad (6.71)$$

где D – конечное множество отсчетов, задающее "окно" обработки.

Выбрав область D вокруг восстанавливаемого отсчета достаточно большого размера и рассчитав оптимальные коэффициенты КИХ-фильтра, можно получить среднеквадратичную погрешность восстановления, очень близкую к минимально достижимой, обеспечиваемой оптимальным физически нереализуемым линейным фильтром. Более того, даже при относительно небольших размерах окна обработки ошибка получается, как правило, меньше, чем у физически реализуемого восстанавливающего БИХ-фильтра. Это происходит благодаря тому, что в данном случае формируется "двусторонняя" (интерполяционная) оценка, в которой учтены не только "прошлые", но и некоторое число "будущих" отсчетов наблюдаемого сигнала. Естественно, в этом случае восстановление реализуется с некоторой задержкой.

Задача синтеза субоптимального восстанавливающего КИХ-фильтра заключается в определении значений $h_{восст}(n)$ в пределах окна обработки, обеспечивающих минимум среднеквадратичной ошибки восстановления. Как и ранее, они определяются из системы уравнений (6.12). Отличие от предыдущих случаев состоит в том, что теперь область D содержит конечное число элементов – N_D. Поэтому уравнение Винера-Хопфа (первая строка системы (6.12)) определяет систему из N_D линейных алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных – значений искомой импульсной характеристики. Методы решений таких систем хорошо известны.

Пример 6.4. Построим простейший КИХ-фильтр вида (6.71) – процедуру восстановления сигнала по трем точкам:

$$\widehat{f}(n)=\sum_{k=-1}^{1}h_{восст}(k)\,g(n-k)=$$
$$=h_{восст}(-1)\,g(n+1)+h_{восст}(0)\,g(n)+h_{восст}(1)\,g(n-1)$$

для экспоненциально коррелированного сигнала, искаженного статически независимым белым шумом (для модели наблюдения (6.26)). Здесь $D=\{-1,\,0,\,1\}$. Из уравнения Винера-Хопфа получаем:

$$\begin{cases}B_g(0)h_{восст}(-1)+B_g(-1)h_{восст}(0)+B_g(-2)h_{восст}(1)=B_{fg}(1),\\ B_g(1)h_{восст}(-1)+B_g(0)h_{восст}(0)+B_g(-1)h_{восст}(1)=B_{fg}(0),\\ B_g(2)h_{восст}(-1)+B_g(1)h_{восст}(0)+B_g(0)h_{восст}(1)=B_{fg}(-1).\end{cases}$$

В данном случае

$$B_g(m)=B_f(m)+B_v(m)=\sigma_f^2\,\rho^{|m|}+\sigma_v^2\,\delta(m),$$
$$B_{fg}(-m)=B_f(-m)=B_f(m)=\sigma_f^2\,\rho^{|m|},$$

поэтому записанная система уравнений конкретизируется:

$$\begin{cases}\left(\sigma_f^2+\sigma_v^2\right)h_{восст}(-1)+\sigma_f^2\,\rho\,h_{восст}(0)+\sigma_f^2\,\rho^2\,h_{восст}(1)=\sigma_f^2\,\rho,\\ \sigma_f^2\,\rho\,h_{восст}(-1)+\left(\sigma_f^2+\sigma_v^2\right)h_{восст}(0)+\sigma_f^2\,\rho\,h_{восст}(1)=\sigma_f^2,\\ \sigma_f^2\,\rho^2\,h_{восст}(1)+\sigma_f^2\,\rho\,h_{восст}(0)+\left(\sigma_f^2+\sigma_v^2\right)h_{восст}(1)=\sigma_f^2\,\rho.\end{cases}\qquad(6.72)$$

Решение системы (6.72) имеет вид:

$$h_{восст}(0)=\frac{1+\dfrac{1}{d^2}-\rho^2}{\left(1+\dfrac{1}{d^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{d^2}+\rho^2\right)-2\rho^2},$$

$$h_{восст}(-1)=h_{восст}(1)=\frac{\dfrac{1}{d^2}\rho}{\left(1+\dfrac{1}{d^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{d^2}+\rho^2\right)-2\rho^2},$$

где, как и раньше, использовано обозначение $d^2 = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_v^2}$.

Полученный КИХ-фильтр может быть реализован с задержкой на один шаг в форме прямой свертки так, как показано на рис. 6.9. Ошибка восстановления сигнала здесь опять определяется по формуле (6.16):

$$\overline{\varepsilon}^2 = \sigma_v^2 h_{восст}(0) = \sigma_v^2 \frac{1 + \frac{1}{d^2} - \rho^2}{\left(1 + \frac{1}{d^2}\right)\left(1 + \frac{1}{d^2} + \rho^2\right) - 2\rho^2}.$$

Достоинство нерекурсивных процедур восстановления состоит в простоте их расчета. Для построения восстанавливающего КИХ-фильтра достаточно решить систему линейных уравнений, а не решать сложную задачу факторизации энергетических спектров. Кроме того, как уже отмечалось, КИХ-фильтр может обеспечить качество восстановления более близкое к оптимальному, чем физически реализуемый винеровский фильтр.

Еще одно достоинство заключается в том, что данная методика расчета процедур восстановления легко обобщается на случай обработки двумерных сигналов.

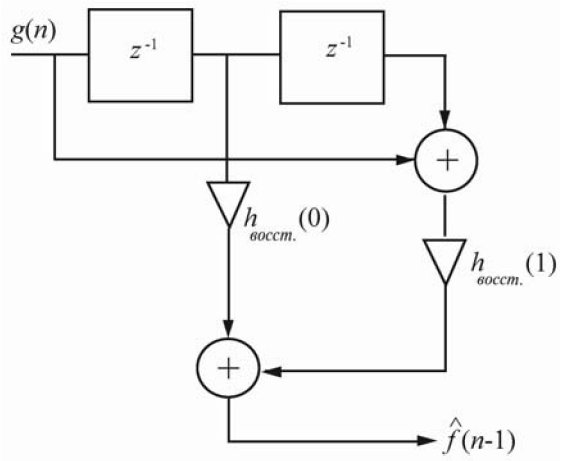


Рис. 6.9. КИХ-фильтр, реализованный в форме прямой свертки с задержками

6.7 Практические задания к главе 6

Квазиоптимальное восстановление сигналов (КИХ-фильтр)

6.7.1. Модель наблюдения:

$$y(m) = x(m) + v(m),$$

$x(m)$ - полезный сигнал с корреляционной функцией $R_x(n) = 0,8^{|n|}$;
$v(m)$ - белый шум с единичной дисперсией, не зависящий от полезного сигнала.

Построить квазиоптимальный КИХ-фильтр для области наблюдения $D = \{-1; 1\}$. Записать уравнение оценивания. Рассчитать среднеквадратичную погрешность.

6.7.2. Дана модель наблюдения:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + v(n),$$

где $x(n)$ – полезный сигнал с корреляционной функцией $R_x(m) = \delta(m)$; $v(n)$ – помеха, белый шум с дисперсией **0,5**, независимый от полезного сигнала.

Определить импульсную характеристику и построить структурную схему квазиоптимального КИХ-фильтра с областью наблюдения $D = \{-1; 0\}$. Определить среднеквадратичную ошибку оценивания полезного сигнала.

6.7.3. Дана модель наблюдения сигнала:

$$y(n) = h(n) * x(n) + v(n),$$

где $h(n) = \alpha^{n-1}u(n-1)$, $|\alpha| < 1$ – импульсная характеристика искажающей системы; $x(n)$ – полезный сигнал, белый шум с дисперсией D_x; $v(n)$ – помеха, белый шум с дисперсией D_v, независимый от сигнала.

Построить квазиоптимальный восстанавливающий КИХ-фильтр с «окном» $D = \{-1; 0; 1\}$. Определить среднеквадратичную ошибку оценивания полезного сигнала.

6.7.4. Модель наблюдения:

$$y(m) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x(m-k) + v(m).$$

Полезный сигнал $x(m)$ – некоррелированный с единичной дисперсией. Аддитивный шум $v(m)$ – белый с дисперсией **3/5**, статистически независимый от полезного сигнала.

Построить квазиоптимальный КИХ-фильтр для восстановления сигнала $x(m)$. Область наблюдения $D=\{-1;0;1\}$.

6.7.5. Дана модель наблюдения:

$$y(n)=x(n)+x(n-1)+v(n),$$

где $x(n)$ – полезный сигнал с корреляционной функцией $R_x(m)=\delta(m)$; $v(n)$ – помеха, белый шум с дисперсией 0,5, независимый от полезного сигнала.

Определить импульсную характеристику и построить структурную схему квазиоптимального КИХ-фильтра с областью наблюдения $D=\{-1;0\}$. Определить среднеквадратичную ошибку оценивания полезного сигнала.

6.7.6. Полезный сигнал с корреляционной функцией $R_x(m)=0,5^{|m|}$ регистрируется измерительной системой с импульсной характеристикой $h(n)=\delta(n)-0,5\delta(n-1)$. Аддитивный белый шум имеет дисперсию $0,5$ и независим от полезного сигнала.

Построить квазиоптимальный КИХ-фильтр для области наблюдения $D=\{1;0\}$. Записать уравнение оценивания. Рассчитать среднеквадратичную погрешность.

6.7.7. Дана модель наблюдения сигнала:

$$y(n)=h(n)*x(n)+v(n),\ \text{где}\ h(n)=2^{-n+1}u(n-1),$$

$x(n)$ – полезный сигнал, белый шум с единичной дисперсией; $v(n)$ – помеха, белый шум с дисперсией 0,5, независимый от сигнала.

Построить квазиоптимальный восстанавливающий КИХ-фильтр с областью наблюдения $D=\{-1;0;1\}$. Определить среднеквадратичную ошибку оценивания полезного сигнала.

Оптимальное восстановление сигналов

6.7.8. Модель наблюдения:

$$y(m)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}x(m-k)+v(m).$$

Полезный сигнал $x(m)$ – некоррелированный с единичной дисперсией. Аддитивный шум $v(m)$ – белый с дисперсией 3/5, статистически независимый от полезного сигнала.

Построить двухпроходный алгоритм оптимального восстановления. Рассчитать среднеквадратичную погрешность восстановления.

6.7.9. Дана модель наблюдения

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + v(n),$$

где полезный сигнал $x(n)$ – некоррелированный с единичной дисперсией; аддитивный шум $v(n)$ – белый с единичной дисперсией, статистически независимый от полезного сигнала.

Построить двухпроходный алгоритм оптимального восстановления. Рассчитать среднеквадратичную погрешность восстановления.

6.7.10. Дана модель наблюдения:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + v(n),$$

где $x(n)$ – полезный сигнал с корреляционной функцией $R_x(m) = \delta(m)$; $v(n)$ – помеха, белый шум с дисперсией **0,5**, независимый от полезного сигнала.

Построить двухпроходный алгоритм оптимального восстановления и определить среднеквадратичную ошибку оценивания сигнала.

6.7.11. Дана модель наблюдения сигнала:

$$y(n) = h(n) * x(n) + v(n),$$

где $h(n) = \alpha^n u(n), |\alpha| < 1$ – импульсная характеристика искажающей системы; $x(n)$ – полезный сигнал, белый шум с дисперсией 1; $v(n)$ – помеха, белый шум с дисперсией 1/2, независимый от сигнала.

Определить передаточную функцию оптимального восстанавливающего фильтра и ошибку оптимального восстановления.

Квазиоптимальное восстановление сигналов (БИХ-фильтр)

6.7.12. Задана модель наблюдения:

$$y(m) = \sum_{k=0}^{\infty} 0.5^k x(m-k) + v(m).$$

Полезный сигнал $x(m)$ – некоррелированный с единичной дисперсией; аддитивный шум $v(m)$ – белый с дисперсией **12/5**, статистически независимый от полезного сигнала.

Построить физически реализуемый квазиоптимальный БИХ-фильтр.

6.7.13. Дана модель наблюдения:

$$y(n) = x(n) + v(n),$$

где $x(n)$ – полезный сигнал, последовательность с корреляционной функцией:

$$R_x(k) = \delta(k) + 0,5\delta(k-1) + 0,5\delta(k+1),$$

$v(n)$ – помеха, белый шум с единичной дисперсией, независимый от сигнала.

Определить передаточную функцию и построить структурную схему квазиоптимального физически реализуемого БИХ-фильтра. Определить среднеквадратичную ошибку оценивания полезного сигнала.

6.7.14. Задана модель наблюдения:

$$y(m) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x(m-k) + v(m).$$

Полезный сигнал $x(m)$ - некоррелированный с единичной дисперсией; аддитивный шум $v(m)$ – белый с дисперсией 12/5, статистически независимый от полезного сигнала.

Построить физически реализуемый квазиоптимальный БИХ-фильтр.

6.7.15. Дана модель наблюдения сигнала:

$$y(n) = x(n) + v(n),$$

где $x(n)$ – полезный сигнал, последовательность с корреляционной функцией:

$$R_x(k) = D[\delta(k) + 0,5\delta(k-1) + 0,5\delta(k-1)],$$

$v(n)$ – помеха, белый шум с дисперсией D, независимый от сигнала.

Определить передаточную функцию и построить структурную схему квазиоптимального физически реализуемого БИХ-фильтра. Определить среднеквадратичную ошибку оценивания полезного сигнала.

7 ДВУМЕРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

7.1 Двумерные последовательности

Обобщим все изложенное выше на случай двумерных сигналов.

Двумерный дискретный сигнал (последовательность) может быть получен из двумерного непрерывного сигнала $f(x_1, x_2)$ путем его дискретизации по аргументам. Пусть интервалы между отсчетами сигнала (шаги дискретизации) по каждой координате плоскости аргументов постоянны и равны Δ_1, Δ_2, то есть двумерная последовательность задается выражением

$$f(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2) = f(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1 = n_1\Delta_1 \\ x_2 = n_2\Delta_2}} \qquad (7.1)$$

при целочисленных n_1, n_2. Формула (7.1) определяет последовательность $f = \{f(n_1\Delta_1, n_2\Delta_2)\}$ через значения непрерывного сигнала в дискретных точках плоскости аргументов, то есть непосредственно отражает процесс дискретизации сигнала. В тех случаях, когда "привязка" отсчетов к физической шкале непрерывных координат не играет роли, можно воспользоваться более кратким и удобным обозначением последовательности: $f = \{f(n_1, n_2)\}$, где n_1, n_2 приобретают смысл порядковых номеров отсчетов по координатам.

Следует заметить, что термин "последовательность" формально перенесен сюда из теории одномерных сигналов и в данном контексте не вполне корректен. Действительно, для отсчетов на плоскости нет объективно существующего "следования" (то есть отношения порядка, описываемого понятиями "раньше" – "позже"), а имеется просто их двумерная совокупность или, как говорят, решетка отсчетов.

Заметим также, что, если в одномерном случае существовал единственный способ дискретизации с постоянным шагом, то для двумерного мы имеем бесконечное множество ее вариантов, отличающихся наклоном прямых, "вдоль" которых берутся отсчеты сигнала. Записанная выше процедура формирования двумерной последовательности соответствует так называемой прямоугольной решетке (см. рис. 7.1,*а*). В некоторых системах ввода изображений ис-

пользуется дискретизация по треугольной решетке (см. рис. 7.1,*б*), которая, как показывают исследования, обеспечивает определенные преимущества при обработке двумерных сигналов. Ниже мы будем рассматривать только двумерные последовательности, заданные на прямоугольной решетке, поскольку этот случай наиболее распространен на практике.

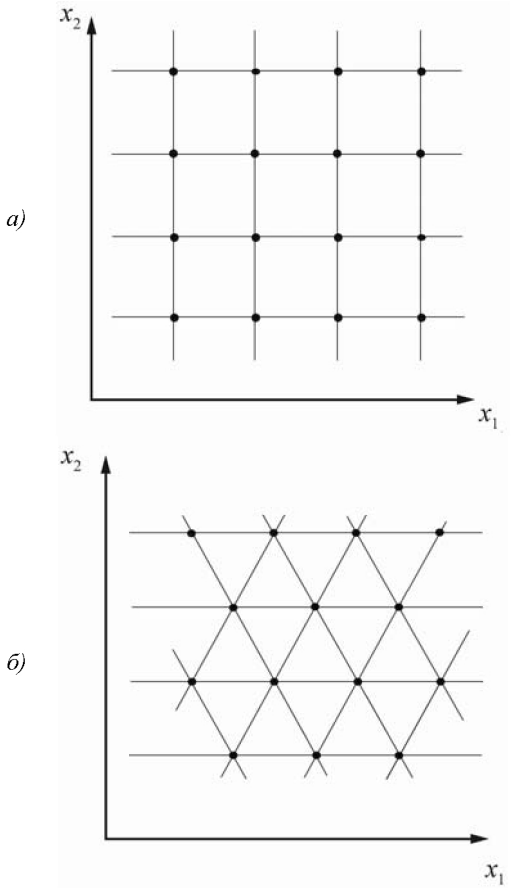


Рис. 7.1. Положение отсчетов двумерной последовательности на плоскости аргументов непрерывного сигнала: а) прямоугольная решетка; б) треугольная решетка

Рассмотрим некоторые важнейшие двумерные последовательности.

Двумерный единичный импульс:

$$\delta(n_1,n_2)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad n_1=n_2=0\\ 0 & \text{при} \quad n_1\neq 0 \text{ или } n_2\neq 0.\end{cases} \tag{7.2}$$

Графическое изображение единичного импульса представлено на рис. 7.2.

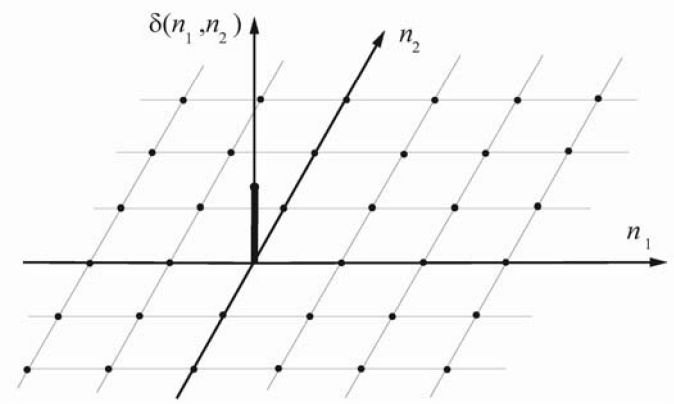


Рис. 7.2. Двумерный единичный импульс

Двумерный единичный скачок:

$$u(n_1,n_2)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad n_1\geq 0 \quad \text{и} \quad n_2\geq 0,\\ 0 & \text{при} \quad n_1<0 \quad \text{и} \quad n_2<0.\end{cases} \tag{7.3}$$

Эта последовательность изображена на рис. 7.3. Приведенные обозначения двумерных единичных импульсов и скачка будем использовать далее везде.

Двумерная экспоненциальная функция первого квадранта:

$$f(n_1,n_2)=a^{n_1}b^{n_2}u(n_1,n_2)\,. \tag{7.4}$$

Изображение этой последовательности для $0<a$, $b<1$ дано на рис. 7.4.

Двумерная дискретная комплексная экспонента задается выражением

$$f(n_1,n_2)=e^{i(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)}\,, \tag{7.5}$$

где i – мнимая единица; ω_1, ω_2 – вещественные константы, имеющие смысл безразмерных пространственных частот (см. п. 2.1).

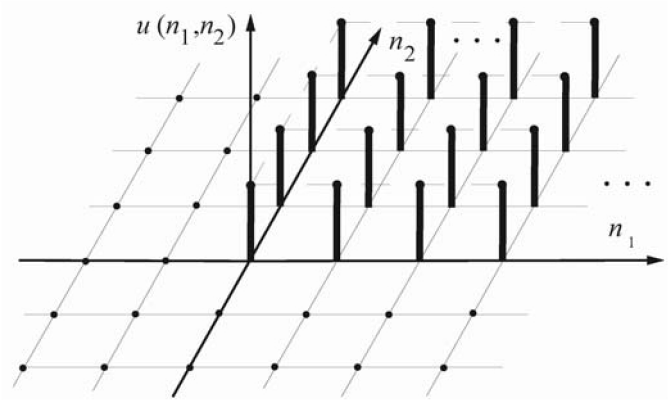


Рис. 7.3. Двумерный единичный скачок

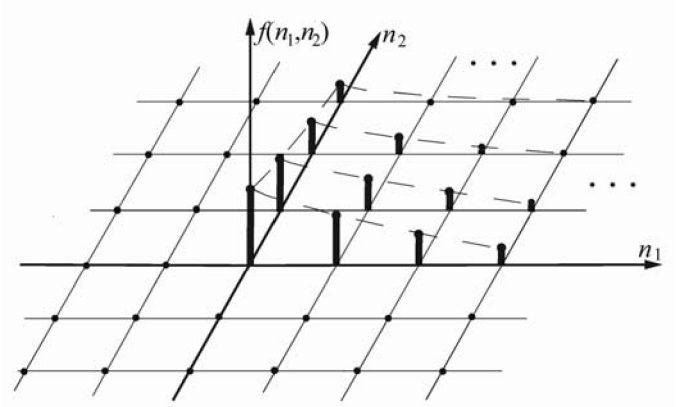


Рис. 7.4. Двумерная экспоненциальная функция первого квадранта

Важный класс двумерных последовательностей составляют разделимые (факторизуемые) последовательности, которые можно представить в виде

$$f(n_1, n_2) = f_1(n_1) f_2(n_2). \qquad (7.6)$$

Для разделимых последовательностей многие задачи анализа и синтеза двумерных сигналов и систем решаются наиболее просто, так как сводятся к решению соответствующих "одномерных" задач. Все рассмотренные выше двумерные последовательности являются разделимыми. Например,

$$\delta(n_1,n_2)=\delta(n_1)\delta(n_2),\quad u(n_1,n_2)=u(n_1)\,u(n_2),$$

где $\delta(n_1),\delta(n_2),u(n_1),u(n_2)$ – одномерные единичные импульсы и скачки.

Как и в одномерном случае, можно дать классификацию двумерных последовательностей по форме области ненулевых значений отсчетов. Правда, здесь вместо четырех классов последовательностей (конечной длины, бесконечных, право- и левосторонних) мы будем иметь гораздо большее многообразие. Так, только для разделимых последовательностей, опираясь на классификацию одномерных последовательностей, входящих в (7.6), можно указать 16 классов. Столь громоздкая классификация не очень удобна для анализа, поэтому мы ограничимся разделением двумерных последовательностей всего на два класса: на последовательности *конечной длины*:

$$f(n_1,n_2)=0 \qquad \begin{array}{l}\text{при}\quad n_1\in[M_1,N_1]\\ \text{или}\quad n_2\in[M_2,N_2],\end{array} \tag{7.7}$$

где M_1,M_2,N_1,N_2 – целые константы $(M_1\le N_1,M_2\le N_2)$, и на последовательности *бесконечной длины*, для которых записанное условие не выполняется. Детализацию второго класса будем вводить по мере необходимости.

7.2 Двумерные дискретные ЛИС-системы

Двумерной дискретной системой будем называть правило $\mathcal{L}$, ставящее в соответствие входной двумерной последовательности f выходную двумерную последовательность g. В общем виде это соответствие (преобразование) записывается в виде

$$\{g(n_1,n_2)\}=\mathcal{L}\left[\{f(n_1,n_2)\}\right]. \tag{7.8}$$

Определение двумерных дискретных линейных систем с постоянными параметрами (ЛИС-систем) аналогично определению одномерных: для них должен соблюдаться принцип суперпозиции:

$$\mathcal{L}\left[\left\{af_1(n_1,n_2)+bf_2(n_1,n_2)\right\}\right]= \\ =a\mathcal{L}\left[\left\{f_1(n_1,n_2)\right\}\right]+b\mathcal{L}\left[\left\{f_2(n_1,n_2)\right\}\right] \tag{7.9}$$

для любых f_1, f_2 и постоянных a, b, и они должны обладать свойством инвариантности к сдвигу сигнала по каждой координате, то есть

$$\left\{g(n_1-m_1,n_2-m_2)\right\}=\mathcal{L}\left[\left\{f(n_1-m_1,n_2-m_2)\right\}\right] \tag{7.10}$$

при любых целых m_1, m_2 . Двумерные системы, для которых выполняется условие (7.10), называются также *пространственно-инвариантными* или *изопланатичными*.

Импульсная характеристика h двумерной дискретной ЛИС-системы определяется как реакция системы на входное воздействие в форме двумерного единичного импульса:

$$\left\{h(n_1,n_2)\right\}=\mathcal{L}\left[\left\{\delta(n_1,n_2)\right\}\right]. \tag{7.11}$$

Импульсная характеристика исчерпывающим образом описывает двумерную ЛИС-систему с точки зрения преобразования сигналов. Выходная последовательность определяется через *двумерную дискретную свертку* импульсной характеристики и входной последовательности:

$$g(n_1,n_2)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}h(m_1,m_2)\,f(n_1-m_1,n_2-m_2)\,. \tag{7.12}$$

Здесь и далее полагаем, что последовательность, входящая в выражения вида (7.12), такова, что эта сумма сходится при любых конечных n_1, n_2 .

Ниже наряду с (7.12) будем использовать краткую символическую запись двумерной свертки:

$$g(n_1,n_2)=h(n_1,n_2)**f(n_1,n_2)\,. \tag{7.13}$$

Двумерная свертка обладает всеми свойствами одномерной свертки: коммутативностью, дистрибутивностью (см. парагр. 1.2) и, кроме того, рядом дополнительных свойств, вытекающих именно из двумерности рассматриваемых последовательностей. Так, если h и f – разделимые последовательности, то и выходная последовательность также разделима. Действительно, при выполнении соотношений (7.6) и

$$h(n_1,n_2)=h_1(n_1)\,h_2(n_2) \tag{7.14}$$

из (7.12) получаем:

$$g(n_1,n_2)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}h_1(m_1)\,h_2(m_2)\,f_1(n_1-m_1)\,f_2(n_2-m_2)=$$

$$=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}h_1(m_1)\,f_1(n_1-m_1)\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}h_2(m_2)\,f_2(n_2-m_2)=g_1(n_1)\,g_2(n_2),$$

где обозначено

$$g_1(n_1)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}h_1(m_1)\,f_1(n_1-m_1),$$

$$g_2(n_2)=\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}h_2(m_2)\,f_2(n_2-m_2).$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned}&\left[h_1(n_1)\,h_2(n_2)\right]**\left[f_1(n_1)\,f_2(n_2)\right]=\\&=\left[h_1(n_1)*f_1(n_1)\right]\times\left[h_2(n_2)*f_2(n_2)\right],\end{aligned} \tag{7.15}$$

то есть для разделимых последовательностей двумерная свертка вычисляется через произведение одномерных.

Если импульсная характеристика двумерной ЛИС-системы факторизуема, то для произвольного входного сигнала

$$\begin{aligned}g(n_1,n_2)&=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}h_1(m_1)\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}h_2(m_2)\,f(n_1-m_1,n_2-m_2)=\\&=h_1(n_1)*h_2(n_2)*f(n_1,n_2),\end{aligned} \tag{7.16}$$

то есть операция двумерной свертки сводится к последовательному выполнению двух одномерных сверток. Это означает, что преобразование сигнала двумерной ЛИС-системой с разделимой импульсной характеристикой эквивалентно его последовательному преобразованию двумя одномерными системами: с импульсной характеристикой $h_1(n_1)$ по координате n_1 и с импульсной характеристикой $h_2(n_2)$ по координате n_2.

Развивая аналогию между одномерными и двумерными системами, отметим, что, как и в одномерном случае, двумерные ЛИС-системы могут характеризоваться фундаментальными свойствами *физической реализуемости* и *устойчивости*. Двумерная система называется устойчивой, если любому ограниченному входному сигналу соответствует ограниченный выходной сигнал, то есть при

$$\left|f\left(n_1,n_2\right)\right|\le M_f$$

выполняется

$$\left|g\left(n_1,n_2\right)\right|\le M_g\ ,$$

где M_f, M_g – некоторые положительные константы. Необходимым и достаточным условием устойчивости двумерной дискретной ЛИС-системы является абсолютная суммируемость импульсной характеристики:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\left|h\left(n_1,n_2\right)\right|<\infty\ . \qquad (7.17)$$

Доказательство этого факта такое же, как и в одномерном случае. С понятием физической реализуемости двумерных систем дело обстоит сложнее, этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

7.3 Физическая реализуемость двумерных систем

Вспомним, что мы называли физически реализуемой такую одномерную систему, у которой выходной сигнал не зависел от входного сигнала в опережающие моменты времени, то есть от его "будущих" значений. Однако, как уже отмечалось, в двумерной последовательности аргументы являются не временными, а пространственными, для ее отсчетов не определено отношение порядка типа "прошлое" – "будущее", и поэтому, строго говоря, понятие физической реализуемости системы не имеет смысла. Тем не менее на практике обычно приходится искусственно вводить указанное отношение для двумерного сигнала, задавая некоторое правило его *развертки* (упорядочения отсчетов) в одномерную последовательность. При этом понятие физической реализуемости вновь приобретает смысл, но оказывается жестко связанным с конкретным видом развертки.

Известны различные, в том числе и довольно сложные способы развертки, используемые в устройствах ввода и обработки двумер-

ных сигналов. Наибольшее распространение получила *развертка телевизионного типа*. Пусть имеется двумерная последовательность конечной длины, отвечающая условию (7.7). Представим прямоугольную область ее ненулевых отсчетов в виде матрицы размерами $(N_1 - M_1 + 1) \times (N_2 - M_2 + 1)$:

$$\{f(n_1, n_2)\} = \begin{pmatrix} f(M_1, M_2) & f(M_1, M_2+1) & \dots & f(M_1, N_2) \\ f(M_1+1, M_2) & f(M_1+1, M_2+1) & \dots & f(M_1+1, N_2) \\ & \dots & & \\ f(N_1, M_2) & f(N_1, M_2+1) & \dots & f(N_1, N_2) \end{pmatrix}.$$

Развертка телевизионного типа заключается в последовательном упорядочении строк или столбцов этой матрицы. Очевидно, существует восемь вариантов такой развертки: начиная с каждого из четырех углов матрицы, по ее строкам и столбцам. Мы ограничимся рассмотрением лишь одного, наиболее часто используемого варианта – строчной развертки в направлении возрастания аргументов. В этом случае осуществляется так называемое *лексикографическое упорядочение отсчетов*, в результате которого они выстраиваются в одномерную последовательность вида

$$f(M_1, M_2), f(M_1, M_2+1), \dots, f(M_1, N_2),$$
$$f(M_1+1, M_2), f(M_1+1, M_2+1), \dots, f(M_1+1, N_2), \dots, f(N_1, N_2).$$

Для простоты изложения далее будем считать, что размеры матрицы отсчетов достаточно велики, чтобы не обращать внимание на нерегулярность строчной развертки, то есть на ее скачки с конца каждой строки на начало следующей. С учетом этой оговорки для строчной развертки области “прошлого” и “будущего”, заданные относительно некоторого отсчета $f(n_1, n_2)$, на плоскости аргументов выглядят так, как показано на рис. 7.5. При этом из соотношения свертки (7.2) следует, что независимость выходных отсчетов $g(n_1, n_2)$ от будущих (в принятом смысле) значений входного сигнала обеспечивается, если

$$\begin{aligned} h(m_1, m_2) = 0 \quad & \text{при} \quad m_1 = 0, \quad m_2 < 0 \\ \text{и} \quad & \text{при} \quad m_1 < 0 \text{ и любых } m_2. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Условие (7.18) является необходимым и достаточным для физической реализуемости двумерной ЛИС-системы при строчной развертке сигнала, его графическая иллюстрация дана на рис. 7.6, *а*.

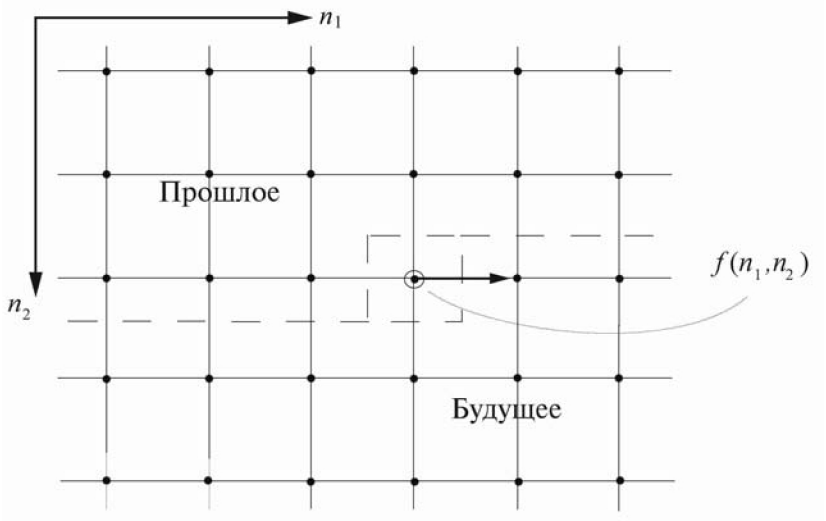


Рис. 7.5. Области "прошлого" и "будущего" при строчной развертке

Часто к двумерной системе предъявляется более жесткое требование физической реализуемости при любом порядке возрастания аргументов n_1, n_2 выходного сигнала, то есть и при строчной развертке, и при ее транспонированном варианте – развертке по столбцам. В этом случае приходим к следующему необходимому и достаточному условию реализуемости:

$$h(m_1,m_2)=0 \qquad \text{при} \quad m_1<0 \text{ и любом } m_2, \quad \text{и при любом } m_1 \text{ и } m_2<0. \tag{7.19}$$

Двумерная ЛИС-система, для которой выполняется это условие, называется *каузальной*, иллюстрация для ее импульсной характеристики дана на рис. 7.6,*б*.

Наряду с каузальными системами иногда приходится рассматривать и *полукаузальные* ЛИС-системы, для которых

$$h(m_1,m_2)=0 \quad \text{при} \quad m_1<0 \quad \text{или} \quad m_2<0 \tag{7.20}$$

(см. рис. 7.6,*в*, *г*). Для таких двумерных систем считается, что вся строка (или столбец) матрицы отсчетов сигнала соответствует одному и тому же моменту времени. Соответственно есть “прошлые” и ”будущие” строки (столбцы), но отсчеты внутри каждой строки (столбца) поступают на обработку одновременно (параллельно).

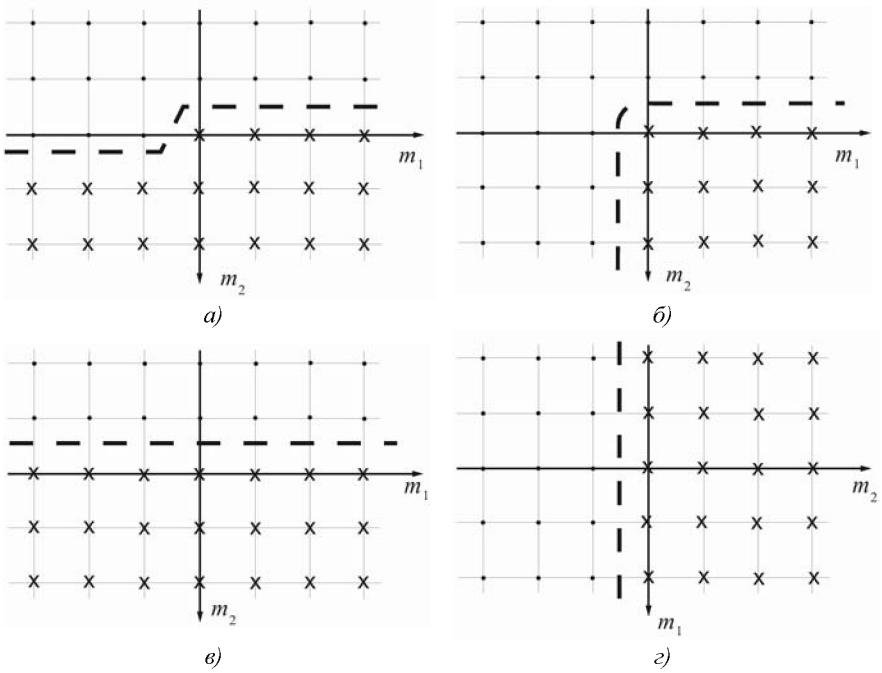


Рис. 7.6. Области потенциально ненулевых значений импульсных характеристик двумерных ЛИС-систем (отмечены крестиками): а) система, физически реализуемая при строчной развертке; б) каузальная система; в) каузальная система; г) полукаузальные системы.

И, наконец, существуют *некаузальные* двумерные ЛИС-системы, то есть такие, для которых не налагается никаких ограничений на область ненулевых значений импульсной характеристики. Их одномерными аналогами являются физически нереализуемые ЛИС-системы.

Заметим, что, если импульсная характеристика двумерной системы является факторизуемой (см. (7.4)), то прослеживается простая

связь между физической реализуемостью составляющих ее одномерных систем и каузальностью. Если одномерные ЛИС-системы с импульсными характеристиками h_1 и h_2 обе физически реализуемы, то двумерная система является каузальной, если физически реализуема лишь одна из одномерных систем, то двумерная система полукаузальна, если обе одномерные физически нереализуемы, то двумерная некаузальна.

В заключение параграфа отметим, что, как и в одномерном случае, можно выделить двумерные ЛИС-системы с конечной и бесконечной импульсной характеристикой (КИХ- и БИХ-системы). У двумерной КИХ-системы импульсная характеристика – двумерная последовательность конечной длины. Такая система либо является каузальной, либо может быть приведена к каузальной системе введением задержки по строкам и столбцам при получении выходного отсчета. Как следует из (7.17), двумерная КИХ-система всегда устойчива.

Двумерная БИХ-система, как и ее одномерный аналог, в общем случае может быть и физически нереализуемой (некаузальной), и неустойчивой.

7.4 Двумерные разностные уравнения

Двумерные системы, обладающие свойством физической реализуемости при заданной развертке сигнала, во многих случаях можно описать, указав способ рекурсивного вычисления отсчетов выходной последовательности. Для двумерной ЛИС-системы такое описание дается в форме двумерного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$g(n_1,n_2)=\sum_{(m_1,m_2)\in Q_g}\sum a_{m_1,m_2}\,g(n_1-m_1,n_2-m_2)+ \\ +\sum_{(m_1,m_2)\in Q_f}\sum b_{m_1,m_2}\,f(n_1-m_1,n_2-m_2), \tag{7.21}$$

где $\{a_{m_1,m_2}\}$, $\{b_{m_1,m_2}\}$ – коэффициенты уравнения; Q_f, Q_g – конечные множества индексов, по которым производится суммирование отсчетов входной (f) и выходной (g) последовательностей.

Множества Q_f и Q_g должны выбираться так, чтобы при заданном способе развертки двумерных сигналов используемые в (7.21) отсчеты входной последовательности не были “будущими” по отношению к текущему моменту (точке (n_1,n_2) на плоскости аргументов), а отсчеты выходной последовательности были строго “прошлыми”. Так, например, для каузальной двумерной ЛИС-системы уравнение (7.21) записывается в виде:

$$g(n_1,n_2)=\sum_{\substack{m_1=0\\(m_1,m_2)\neq(0,0)}}^{M_1}\sum_{m_2=0}^{M_2} a_{m_1,m_2}\,g(n_1-m_1,n_2-m_2)+ \\ +\sum_{m_1=0}^{N_1}\sum_{m_2=0}^{N_2} b_{m_1,m_2}\,f(n_1-m_1,n_2-m_2), \tag{7.22}$$

где M_1,M_2,N_1,N_2 – целые константы, характеризующие сложность системы.

Пара значений (M_1,M_2) при

$$\max_{0\le m_2\le M_2}\left|a_{M_1m_2}\right|>0 \quad \text{и} \quad \max_{0\le m_1\le M_1}\left|a_{m_1M_2}\right|>0$$

определяет порядок разностного уравнения (7.22) (каузальной ЛИС-системы) по каждой из координат. Для БИХ-систем хотя бы одна из величин M_1 и M_2 положительна, такие системы являются рекурсивными: в них каждый следующий отсчет выходной двумерной последовательности вычисляется через $(M_1+1)(M_2+1)-1$ предыдущих. В частном случае, когда все $\{a_{m_1,m_2}\}$ равны нулю, уравнения (7.21) и (7.22) описывают нерекурсивную КИХ-систему порядка (0,0). Для нее, очевидно, имеет место совпадение разностного уравнения со сверткой (7.21) при конечной импульсной характеристике

$$h(m_1,m_2)=\begin{cases} b_{m_1m_2} & \text{при} \quad (m_1,m_2)\in Q_f,\\ 0 & \text{при} \quad (m_1,m_2)\notin Q_f. \end{cases}$$

Как средство описания ЛИС-системы разностное уравнение имеет очевидное преимущество перед сверткой: в нем каждый отсчет выходной последовательности может вычисляться за конечное число

операций сложения и умножения. В то же время следует иметь в виду, что представление в виде разностного уравнения удается применить далеко не к каждой двумерной ЛИС-системе. Во-первых, еще раз напомним, что такое представление имеет практический смысл, только если ЛИС-система физически реализуема и, следовательно, ее импульсная характеристика удовлетворяет рассмотренным ограничениям. Во-вторых, импульсная характеристика даже физически реализуемой системы может быть такова, что в разностном уравнении (7.21) потребуется использовать бесконечные множества Q_f , Q_g (для каузальной системы уравнение (7.22) будет иметь бесконечный порядок). На вопросах переходов от импульсной характеристики двумерной ЛИС-системы к разностному уравнению (в случае, когда это возможно) и обратно мы остановимся ниже.

Разностное уравнение (7.21) непосредственно определяет алгоритм преобразования двумерного сигнала дискретной физически реализуемой ЛИС-системой. Для иллюстрации такого преобразования часто используется условная схема вычисления отсчетов выходной последовательности, общий вид которой представлен на рис. 7.7. Для осуществления рекурсивных вычислений по разностному уравнению необходимо задать довольно много *начальных условий*. Так, в случае каузальной ЛИС-системы, описываемой разностным уравнением (7.22), для получения отсчетов выходной последовательности в первом квадранте (при $n_1 \geq 0$ и $n_2 \geq 0$) требуется указать значения $g(n_1, n_2)$ при

$$-M_1 \leq n_1 < 0 \text{ и } n_2 \geq -M_2 ,$$
$$n_1 \geq 0 \text{ и } -M_2 \leq n_2 < 0 ,$$

а также рассматривать входной сигнал $f(n_1, n_2)$ не только в первом квадранте, но и при

$$-N_1 \leq n_1 < 0 \text{ и } n_2 \geq -N_2 ,$$
$$n_1 \geq 0 \text{ и } -N_2 \leq n_2 < 0 .$$

Ниже при использовании разностных уравнений мы будем считать, что входные и выходные сигналы заданы на всей плоскости аргументов, поэтому указывать начальные условия нам не потребуется.

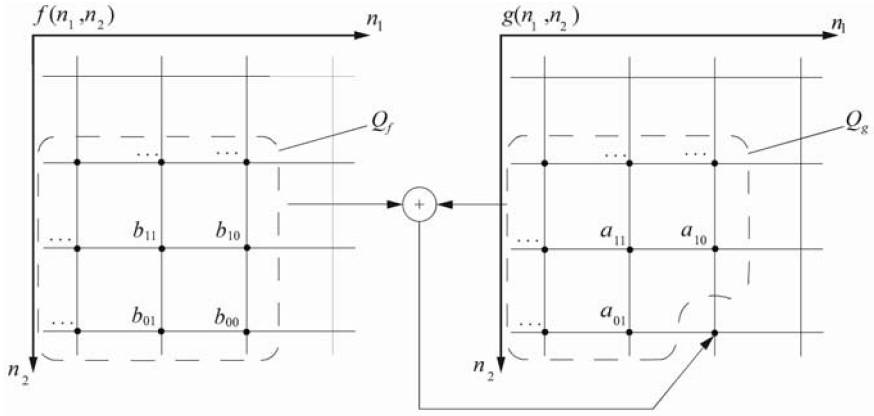


Рис. 7.7. Схемы вычисления отсчетов двумерной выходной последовательности по разностному уравнению (7.21)

7.5 Описание двумерных дискретных сигналов и систем в частотной области

Пусть на вход двумерной ЛИС-системы подается двумерная дискретная экспонента (7.5). При условии сходимости суммы (7.12) для данного входного сигнала на выходе системы имеем выходную двумерную последовательность

$$g(n_1,n_2)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}h(m_1,m_2)e^{i\left[\omega_1(n_1-m_1)+\omega_2(n_2-m_2)\right]}=$$

$$=e^{i(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)}\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}h(m_1,m_2)e^{-i(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)},$$

совпадающую с входной с точностью до множителя, зависящего от пространственных частот ω_1 , ω_2 . Этот множитель

$$H\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}h(m_1,m_2)e^{-i(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)} \qquad (7.23)$$

называется *частотной характеристикой* двумерной дискретной ЛИС-системы. Частотная характеристика задает коэффициент передачи ЛИС-системы при входном сигнале – двумерной комплексной экспоненте для каждого значения параметров ω_1 и ω_2 . Выражение (7.23) задает *прямое преобразование Фурье* двумерной последовательности, которое также называется двумерным (пространствен-

ным) спектром. Частотная характеристика двумерной ЛИС-системы есть пространственный спектр ее импульсной характеристики.

По формуле (7.23) можно установить и правило обратного перехода, то есть выразить импульсную характеристику двумерной системы через частотную:

$$h(m_1,m_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)e^{i(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)}d\omega_1\,d\omega_2\ , \quad (7.24)$$

данное соотношение определяет обратное преобразование Фурье двумерной последовательности h.

Преобразования Фурье по аналогии с (7.23) можно записать для произвольного двумерного дискретного сигнала f:

$$F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}f(n_1,n_2)e^{-i(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)}\ , \quad (7.25)$$

$$f(n_1,n_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)e^{i(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)}d\omega_1\,d\omega_2\ . \quad (7.26)$$

Выражение (7.25) определяет пространственный спектр двумерной последовательности, а выражение (7.26) – представление двумерной последовательности через пространственный спектр.

Представления двумерных дискретных сигналов и ЛИС-систем в частотной области (то есть с помощью преобразования Фурье) широко применяются при их анализе и синтезе, поскольку во многих случаях проще и удобнее соответствующих представлений в области пространственных аргументов.

Перечислим некоторые важнейшие свойства спектров последовательностей (их более простые "одномерные" аналоги изложены в парагр. 2.2).

Свойство 1. Достаточным условием существования спектра двумерной последовательности f является ее абсолютная суммируемость:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\left|f(n_1,n_2)\right|<\infty\ . \quad (7.27)$$

Из сопоставления условий (7.17) и (7.27) следует, что для существования частотной характеристики двумерной ЛИС-системы достаточно, чтобы система была устойчивой.

Свойство 2. Двумерное преобразование Фурье линейно. Это означает, что для любых последовательностей f_1, f_2 и постоянных a, b из соотношения

$$f(n_1,n_2)=a\,f_1(n_1,n_2)+b\,f_2(n_1,n_2)$$

следует

$$F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=a\,F_1\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)+b\;F_2\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right).$$

Свойство 3. Если двумерная последовательность разделима, то есть для нее выполняется соотношение (7.6), то ее спектр также является разделимым:

$$F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=F_1\left(e^{i\omega_1}\right)F_2\left(e^{i\omega_1}\right). \qquad (7.28)$$

Свойство 4. Спектр двумерной последовательности f – периодическая функция пространственных частот ω_1, ω_2. Его период по этим переменным равен 2π, то есть

$$F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=F\left[e^{i(\omega_1+2\pi k_1)},e^{i(\omega_2+2\pi k_2)}\right]$$

при любых целых k_1, k_2.

Свойство 5. Если двумерная последовательность f вещественна, то ее спектр обладает следующими свойствами центральной симметрии:

$$\operatorname{Re}F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=\operatorname{Re}F\left(e^{-i\omega_1},e^{-i\omega_2}\right),$$

$$\operatorname{Im}F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=-\operatorname{Im}F\left(e^{-i\omega_1},e^{-i\omega_2}\right),$$

$$\left|F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)\right|=\left|F\left(e^{-i\omega_1},e^{-i\omega_2}\right)\right|,$$

$$\arg F\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=-\arg F\left(e^{-i\omega_1},e^{-i\omega_2}\right).$$

В соответствии со свойствами 4 и 5 линии равных значений вещественной части (или модуля) и мнимой части (или аргумента) спектра двумерной последовательности в плоскости переменных ω_1, ω_2 могут выглядеть, например так, как показано на рис. 7.8. Очевидно, чтобы полностью описать такой спектр, достаточно задать его на периоде по одной пространственной частоте и на поло-

вине периода по другой, то есть, например, на двумерном "прямоугольном" интервале:

$$-\pi_1 < \omega_1 \le \pi\,, \quad 0 \le \omega_2 \le \pi\,.$$

Если вещественная последовательность разделима, то свойства симметрии ее спектра усиливаются, поскольку симметричным является каждый из двух одномерных спектров, входящих как сомножители в (7.28). При этом достаточно рассматривать двумерный спектр на одном квадрате шириной в половину периода, то есть, например, при

$$0 \le \omega_1 \le \pi\,,\ 0 \le \omega_2 \le \pi\,.$$

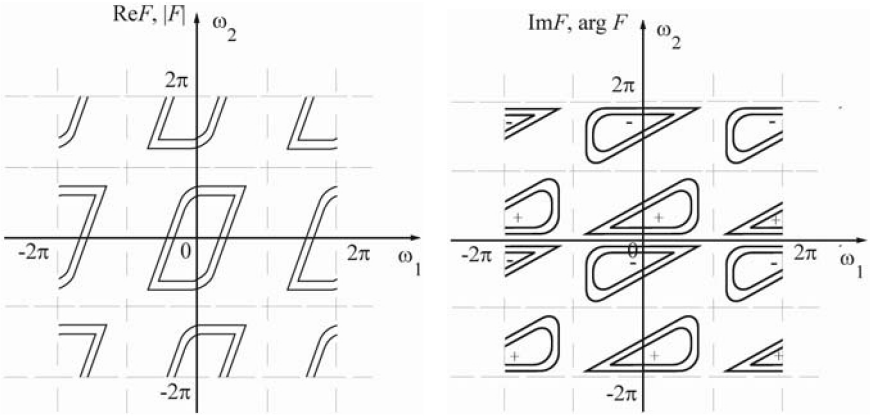


Рис. 7.8. Линии равных уровней спектров двумерной вещественной последовательности

Свойство 6. Свертка двумерных последовательностей соответствует произведению их спектров, то есть последовательность (7.13) имеет спектр

$$G\left(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}\right) = H\left(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}\right) F\left(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}\right)\,.$$

Из последнего свойства следует, что, как и в одномерном случае, частотная характеристика $H\left(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}\right)$ полностью определяет ЛИС-систему, то есть однозначно задает правило преобразования

входной двумерной последовательности в выходную (при их описании в частотной области).

Остановимся на важном вопросе *соответствия между спектром двумерной последовательности и спектром непрерывной двумерной функции*, из которой эта последовательность получена. Прямое и обратное преобразования Фурье (переход к спектру и обратно) для непрерывной функции f пространственных переменных x_1 , x_2 задаются соотношением:

$$F_{\text{н}}(\Omega_1,\Omega_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)e^{-i(\Omega_1 x_1+\Omega_2 x_2)}dx_1\,dx_2\ , \qquad (7.29)$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}(\Omega_1,\Omega_2)e^{i(\Omega_1 x_1+\Omega_2 x_2)}dx_1\,dx_2\ , \qquad (7.30)$$

где Ω_1 , Ω_2 – угловые пространственные частоты, имеющие размерность радиан/единица длины. Из (7.1) и (7.30) выразим двумерную последовательность, полученную в результате пространственной дискретизации непрерывной функции, через спектр $F_{\text{н}}$ этой функции:

$$f(n_1,n_2)=f(n_1\Delta_1,n_2\Delta_2)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}(\Omega_1,\Omega_2)e^{i(\Omega_1\Delta_1 n_1+\Omega_2\Delta_2 n_2)}d\Omega_1\,d\Omega_2\ . \qquad (7.31)$$

С учетом значений шагов дискретизации произведем замену размерных пространственных частот на безразмерные $\omega_1=\Omega_1\Delta_1$, $\omega_2=\Omega_2\Delta_2$ и выполним несложные преобразования выражения (7.31), заключающиеся в разбиении интегрирования, замене переменных и порядка выполнения и суммирования:

$$f(n_1,n_2)=f(n_1\Delta_1,n_2\Delta_2)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\Delta_1\Delta_2}F_{\text{н}}\left(\frac{\omega_1}{\Delta_1},\frac{\omega_2}{\Delta_2}\right)e^{i(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2)}d\omega_1\,d\omega_2=$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \int_{(2k_1-1)\pi}^{(2k_1+1)\pi} \int_{(2k_2-1)\pi}^{(2k_2+1)\pi} \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \times$$

$$\times F_{\text{н}}\left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2}{\Delta_2}\right) e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 \, d\omega_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}\left(\frac{\omega_1 + 2\pi k_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2 + 2\pi k_2}{\Delta_2}\right) \right] \times$$

$$\times e^{i(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} d\omega_1 \, d\omega_2 .$$

Сопоставление последнего выражения с формулой (7.26) выявляет искомое соотношение между спектрами:

$$F\left(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}\right) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} F_{\text{н}}\left(\frac{\omega_1 + 2\pi k_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2 + 2\pi k_2}{\Delta_2}\right) . \quad (7.32)$$

Таким образом, спектр двумерной последовательности формируется как сумма бесконечного числа спектров исходной непрерывной функции, сдвинутых друг относительно друга по переменным ω_1, ω_2 на интервалы, кратные 2π. Данное суммирование и определяет периодичность спектра последовательности (см. свойство 4).

Если спектр непрерывной функции ограничен, а именно:

$$F_{\text{н}}(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \;\text{ при }\; |\Omega_1| \geq \frac{\pi}{\Delta_1} \;\text{ или }\; |\Omega_2| \geq \frac{\pi}{\Delta_2} , \quad (7.33)$$

то на интервале $|\omega_1| < \pi, |\omega_2| < \pi$, определяющем период спектра последовательности,

$$F\left(e^{i\omega_1}, e^{i\omega_2}\right) = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} F_{\text{н}}\left(\frac{\omega_1}{\Delta_1}, \frac{\omega_2}{\Delta_2}\right) .$$

В этом случае можно однозначно восстановить спектр непрерывного двумерного сигнала по спектру последовательности, а сам непрерывный сигнал – по дискретному.

Если ограничение (7.33) не выполняется, то наблюдается *эффект наложения спектров*, выражающийся в том, что высокочастотные составляющие спектра непрерывной функции попадают в область более низких частот в спектре последовательности. Такое

наложение нарушает взаимно однозначное соответствие спектров непрерывного и дискретного двумерных сигналов и исключает возможность безошибочного восстановления непрерывной функции по ее отсчетам. Чтобы не допустить эффекта наложения, нужно выбрать шаги дискретизации из условий

$$\Delta_1 < \frac{\pi}{\Omega_{1\max}}, \quad \Delta_2 < \frac{\pi}{\Omega_{2\max}},$$

где $\Omega_{1\max}$, $\Omega_{2\max}$ – максимальные (граничные) пространственные частоты спектра непрерывного двумерного сигнала:

$$F_{\text{н}}(\Omega_1, \Omega_2) = 0 \text{ при } |\Omega_1| \geq \Omega_{1\max} \text{ или } |\Omega_2| \geq \Omega_{2\max}.$$

7.6 Двумерное *z*-преобразование

Прямым *z*-преобразованием двумерной последовательности f называется комплексная функция

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}, \tag{7.34}$$

где z_1, z_2 – комплексные переменные. Ниже иногда будем использовать сокращенную запись (7.34) в форме

$$f(n_1, n_2) \xrightarrow{z} F(z_1, z_2).$$

Естественно, данное "двумерное" z-преобразование имеет смысл только в своей области сходимости, то есть на множестве таких значений z_1 и z_2, при которых сумма (7.34) существует и является конечной. Достаточным условием этого является абсолютная сходимость записанного двойного ряда:

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left| f(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \right| = \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |f(n_1, n_2)| |z_1|^{-n_1} |z_2|^{-n_2} < \infty. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Из этой формулы следует важный вывод о том, что область сходимости определяется только абсолютными значениями комплексных переменных z_1, z_2, а значит, может быть задана на плоскости в координатах ($|z_1|$, $|z_2|$). Речь идет о внутренних точках области

сходимости z-преобразования. На границах области условие (7.35) может не выполняться, но ряд (7.34) сходится неабсолютно (условно). Вопрос о существовании z-преобразования в каждой точке границы области должен исследоваться дополнительно для конкретного ряда. Рассмотрим частные случаи.

Пусть f – двумерная последовательность конечной длины, удовлетворяющая условию (7.7). Тогда ее z-преобразование будет вычисляться как сумма конечного числа слагаемых:

$$F(z_1,z_2)=\sum_{n_1=M_1}^{N_1}\sum_{n_2=M_2}^{N_2} f(n_1,n_2)z_1^{-n_1}z_2^{-n_2}\ . \qquad (7.36)$$

Очевидно, что область сходимости такого z-преобразования включает в себя те значения переменных z_1 , z_2 , при которых все слагаемые в сумме (7.36) конечны, то есть все точки плоскости ($|z_1|$, $|z_2|$) за исключением, возможно, некоторых: точки $z_1=0$, если $N_1>0$, точки $|z_1|=\infty$, если $M_1<0$, точки $z_2=0$, если $N_2>0$ и точки $|z_2|=\infty$, если $M_2<0$.

Этот факт иллюстрирует рис. 7.9,*а*, на котором область сходимости *z*-преобразования отмечена штриховкой.

Пусть двумерная последовательность f разделима (для нее выполняется условие (7.16)). При этом ее двумерное *z*-преобразование также является разделимым:

$$\begin{aligned} F(z_1,z_2)&=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} f_1(n_1)\,z_1^{-n_1}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f_2(n_2)z_2^{-n_2}= \\ &=F_1(z_1)F_2(z_2). \end{aligned} \qquad (7.37)$$

и, следовательно, область сходимости можно определить по каждой переменной. Известно что одномерное *z*-преобразование общего вида сходится в кольце, то есть для $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$ области сходимости записываются соответственно в форме двойных неравенств:

$$\begin{cases} R_-^{(1)}<|z_1|<R_+^{(1)}, \\ R_-^{(2)}<|z_2|<R_+^{(2)}, \end{cases} \qquad (7.38)$$

где $R_{-}^{(1)}$, $R_{+}^{(1)}$, $R_{-}^{(2)}$, $R_{+}^{(2)}$ – некоторые постоянные, характеризующие границы области сходимости. Система неравенств (7.38) определяет область сходимости разделимого двумерного z-преобразования (7.37). В общем случае эта область имеет прямоугольную форму, (см. рис. 7.9,*б*). С конкретизацией одномерных последовательностей, входящих в (7.16), конкретизируется и форма области сходимости z-преобразования. Так, если f_1 и f_2 – правосторонние последовательности (в частности, если ненулевые отсчеты f лежат в первом квадранте), то область сходимости двумерного z-преобразования (7.37) определяется системой неравенств

$$\begin{cases} |z_1| > R_{-}^{(1)}, \\ |z_2| > R_{-}^{(2)} \end{cases} \tag{7.39}$$

и, следовательно, имеет вид, показанный на рис. 7.9,*в*.

Если f – двумерная неразделимая бесконечная последовательность, то область сходимости ее z-преобразования уже не выражается независимо по переменным $|z_1|$ и $|z_2|$. Так, можно показать, что, если ненулевые отсчеты последовательности сосредоточены только в первом квадранте плоскости аргументов (то есть при $n_1 \geq 0$ и $n_2 \geq 0$), то область сходимости z-преобразования опять задается системой неравенств типа (7.39), однако граница области по каждой переменной зависит от другой переменной:

$$\begin{cases} |z_1| > R_{-}^{(1)}(|z_2|), \\ |z_2| > R_{-}^{(2)}(|z_1|). \end{cases} \tag{7.40}$$

Функции $R_{-}^{(1)}(\cdot)$ и $R_{-}^{2}(\cdot)$ здесь являются взаимообратными, они определяют границу области сходимости в плоскости ($|z_1|$, $|z_2|$). В соответствии с (7.40) эта граница не может иметь участков с положительным наклоном, то есть ограничивает область сходимости снизу и слева (см. рис. 7.9,*г*). Здесь и далее условие взаимообратности позволяет на практике ограничиться использованием любого одного из двух записанных неравенств.

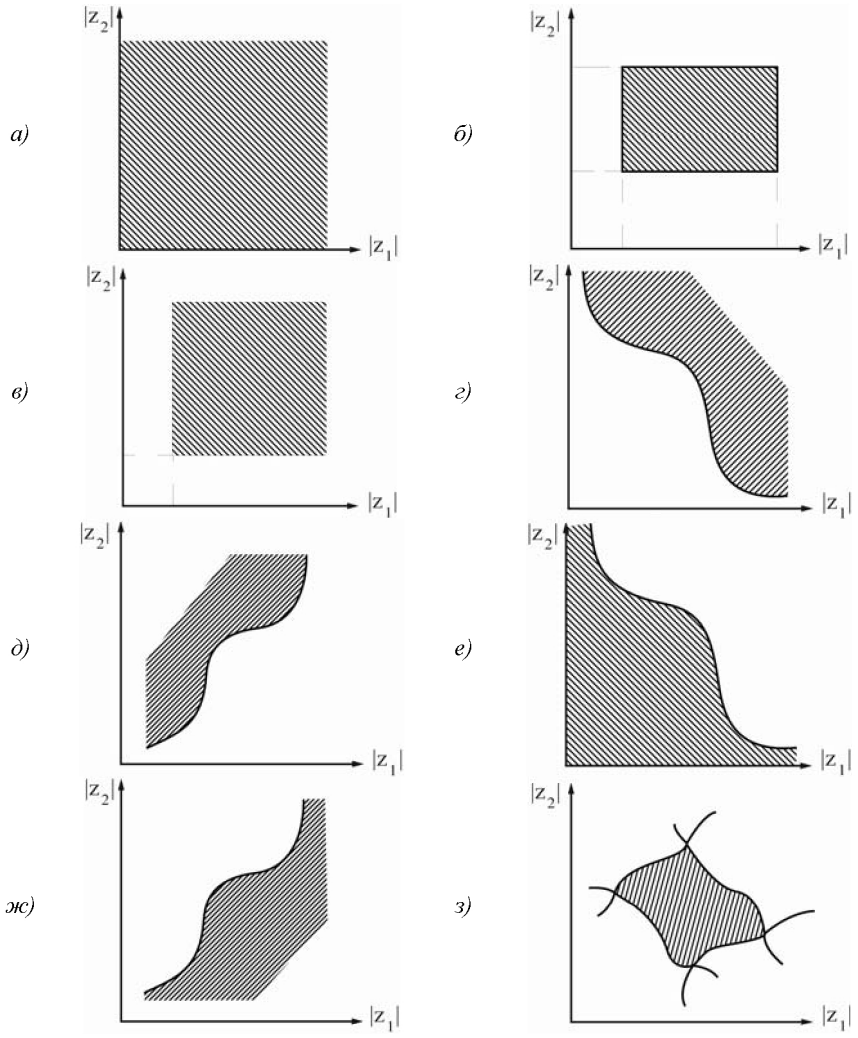


Рис. 7.9. Формы области сходимости двумерного z-преобразования: а) последовательность конечной длины; б) разделимая бесконечная последовательность (общий случай); в) разделимая бесконечная последовательность (правосторонние составляющие); г) произвольная бесконечная последовательность первого квадранта; д) произвольная бесконечная последовательность второго квадранта; е) произвольная бесконечная последовательность третьего квадранта; ж) произвольная бесконечная последовательность четвертого квадранта; з) последовательность, отличная от нуля на всей плоскости аргументов

Аналогично, для бесконечной последовательности с ненулевыми отсчетами во втором квадранте (при $n_1 \le 0$, $n_2 \ge 0$) область сходимости определяется системой неравенств

$$\begin{cases} |z_1| < R_+^{(1)}(|z_2|), \\ |z_2| > R_-^{(2)}(|z_1|) \end{cases} \tag{7.41}$$

при взаимообратных функциях $R_+^{(1)}(\cdot)$ и $R_-^{2}(\cdot)$. Здесь граница области сходимости имеет неотрицательный наклон и ограничивает область снизу и справа (см. рис. 7.9,*д*).

Для последовательности, расположенной в третьем квадранте (при $n_1 \le 0$, $n_2 \le 0$), имеем

$$\begin{cases} |z_1| < R_+^{(1)}(|z_2|), \\ |z_2| < R_+^{(2)}(|z_1|) \end{cases} \tag{7.42}$$

при взаимообратных $R_+^{(1)}(\cdot)$ и $R_+^{(2)}(\cdot)$, область сходимости ограничена сверху и справа (см. рис. 7.9,*е*).

Для последовательности в четвертом квадранте (при $n_1 \ge 0$, $n_2 \le 0$)

$$\begin{cases} |z_1| > R_-^{(1)}(|z_2|), \\ |z_2| < R_+^{(2)}(|z_1|) \end{cases} \tag{1.43}$$

при взаимообратных $R_-^{(1)}(\cdot)$ и $R_+^{(2)}(\cdot)$, область сходимости ограничена сверху и слева (см. рис. 7.9,*ж*).

В самом общем случае, когда двумерная последовательность f рассматривается как отличная от нуля на всей плоскости аргументов, ее всегда можно представить в виде четырех составляющих:

$$f(n_1,n_2) = f_1(n_1,n_2) + f_2(n_1,n_2) + f_3(n_1,n_2) + f_4(n_1,n_2), \tag{7.44}$$

где f_i – последовательности с ненулевыми отсчетами только в i-м квадранте ($i = 1, 2, 3, 4$). Слагаемые в (7.44) имеют z-преобразования с областями сходимости (7.40) – (7.43). Если эти области имеют об-

щее пересечение, то существует и z-преобразование всей последовательности f, область сходимости которого может быть записана в виде обобщения системы двойных неравенств (7.38):

$$\begin{cases} R_{-}^{(1)}\left(|z_2|\right) < |z_1| < R_{+}^{(1)}\left(|z_2|\right), \\ R_{-}^{(2)}\left(|z_1|\right) < |z_2| < R_{+}^{(2)}\left(|z_1|\right). \end{cases} \tag{7.45}$$

В соответствии с (7.45) любое сечение области сходимости при $|z_1| = \text{const}$ или $|z_2| = \text{const}$ является односвязным, граница области в общем случае замкнута и состоит из четырех сегментов, два из которых имеют неотрицательный наклон, а два – неположительный. Возможный вид такой области дан на рис. 7.9,*з*. Для иллюстрации к сказанному рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 7.1. Вычислим z-преобразование двумерной экспоненты первого квадранта (7.4):

$$f\left(n_1, n_2\right) = a^{n_1} b^{n_2} u\left(n_1, n_2\right).$$

Данная двумерная последовательность является разделимой, соотношение (7.6) для нее выполняется при

$$f_1\left(n_1\right) = a^{n_1}\ u\left(n_1\right),\ \ f_2\left(n_2\right) = b^{n_2}\ u\left(n_2\right).$$

z-преобразования и области сходимости приведенных одновременных последовательностей записываются в виде (см. табл. в парагр. 3.1):

$$F_1\left(z_1\right) = \frac{1}{1 - az_1^{-1}}, \qquad |z_1| > |a|,$$

$$F_2\left(z_2\right) = \frac{1}{1 - bz_2^{-1}}, \qquad |z_2| > |b|.$$

В соответствии с (7.37) для рассматриваемой двумерной последовательности получаем

$$F\left(z_1, z_2\right) = F_1\left(z_1\right) F_2\left(z_2\right) = \frac{1}{\left(1 - az_1^{-1}\right)\left(1 - bz_2^{-1}\right)}.$$

Область сходимости этого двумерного z-преобразования:

$$\begin{cases} |z_1| > |a|, \\ |z_2| > |b|, \end{cases}$$

она имеет вид, показанный на рис. 7.9,*в*.

Пример 7.2. Вычислим z-преобразование двумерной последовательности

$$f(n_1, n_2) = a^{n_1}\, u(n_1)\delta(n_1 - n_2)\ ,$$

(a – постоянная), представляющей собой "одномерную" экспоненту, расположенную на биссектрисе первого квадранта (см. рис. 7.10,*а*). Очевидно, данная последовательность не является разделимой, поэтому произведем вычисления по общей формуле (7.34):

$$F(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} a^{n_1} u(n_1)\, \delta(n_1 - n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} =$$

$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} a^{n_1} u(n_1)\ z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left(a z_1^{-1}\, z_2^{-1}\right)^{n_1}.$$

Если полученный ряд (сумма геометрической прогрессии) сходится, то

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{1 - a z_1^{-1}\, z_2^{-1}}\ .$$

Условие сходимости ряда:

$$\left| a z_1^{-1}\, z_2^{-1} \right| < 1\ ,$$

его можно переписать в форме неравенств (7.40):

$$\begin{cases} |z_1| > |a| \big/ |z_2|, \\ |z_2| > |a| \big/ |z_1|. \end{cases}$$

Вид этой области сходимости в плоскости ($|z_1|$, $|z_2|$) показан на рис. 7.10,*б*.

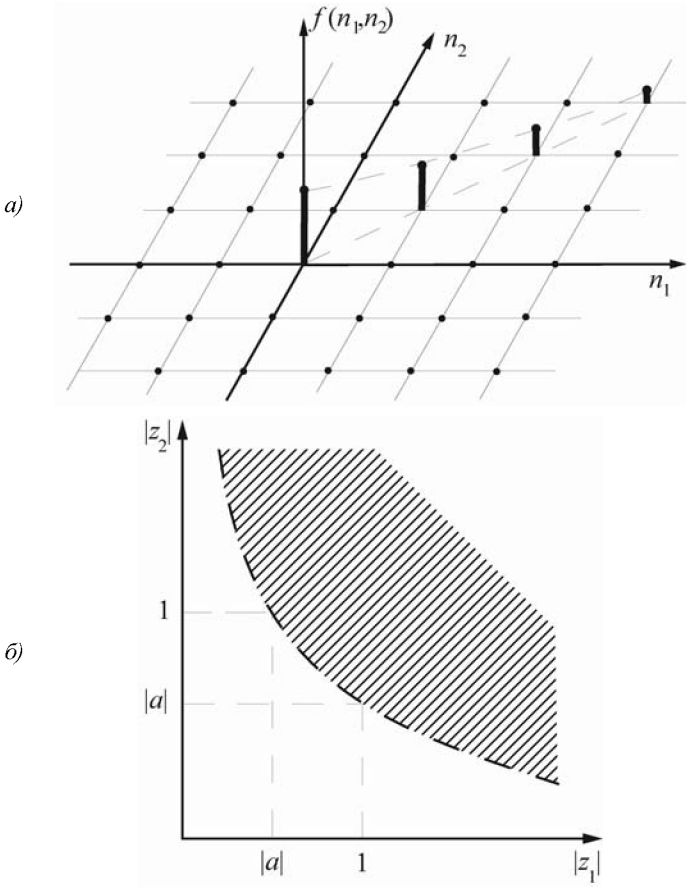


Рис. 7.10. Импульсная характеристика и область сходимости её двумерного z-преобразования: а) одномерная экспонента, расположенная по биссектрисе первого квадранта; б) область сходимости двумерного z-преобразования одномерной экспоненты.

Пример 7.3. Вычислим z-преобразование двумерной последовательности

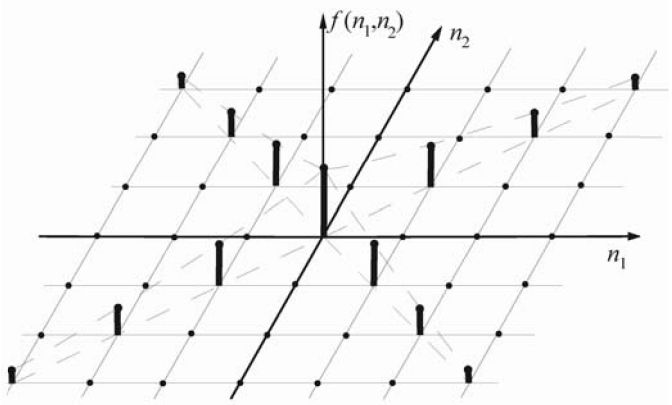
$$f(n_1,n_2)=\begin{cases} a^{|n_1|} & при \quad |n_1|=|n_2|, \\ 0 & при \quad |n_1|\neq|n_2|, \end{cases}$$

где a – постоянная ($|a|<1$). Данная неразделимая последовательность представляет собой “крест” из одинаковых экспонент, “разбе-

гающихся" по биссектрисам четырех квадрантов (рис. 7.11,*а*). Запишем ее через функции единичных импульсов и скачков в виде четырех составляющих по квадрантам:

$$f(n_1,n_2) = a^{n_1}\ u(n_1)\delta(n_1-n_2) + a^{-n_1}\ u(-n_1-1)\delta(n_1+n_2) +$$
$$+a^{-n_1}\ u(-n_1-1)\delta(n_1-n_2) + a^{n_1}\ u(n_1-1)\delta(n_1+n_2).$$

а)



б)

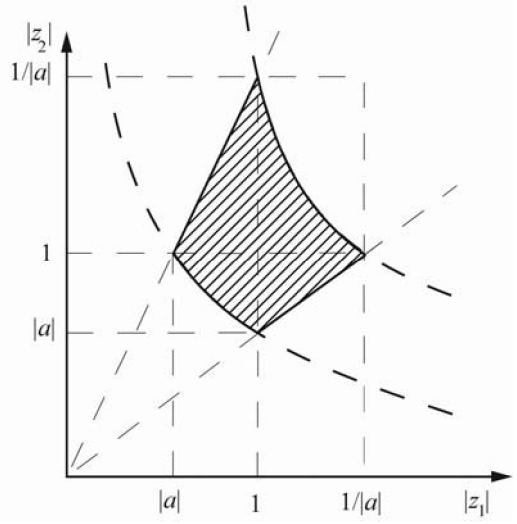


Рис. 7.11. Импульсная характеристика и область сходимости ее двумерного z-преобразования: а) иллюстрация "креста" из экспонент по биссектрисам квадрантов; б) область сходимости двумерного z-преобразования

Для первой составляющей мы уже вычислили z-преобразование в предыдущем примере:

$$a^{n_1}\,u(n_1)\delta(n_1-n_2)\xrightarrow{z}\frac{1}{1-az_1^{-1}z_2^{-1}},\qquad \begin{cases}|z_1|>|a|/|z_2|,\\ |z_2|>|a|/|z_1|.\end{cases}$$

Производя аналогичные вычисления для остальных слагаемых, несложно получить:

$$a^{-n_1}\,u(-n_1-1)\delta(n_1+n_2)\xrightarrow{z}\frac{a\,z_1\,z_2^{-1}}{1-a\,z_1\,z_2^{-1}},\qquad \begin{cases}|z_1|<|z_2|/|a|,\\ |z_2|>|a||z_1|;\end{cases}$$

$$a^{-n_1}\,u(-n_1-1)\delta(n_1-n_2)\xrightarrow{z}\frac{a\,z_1\,z_2}{1-az_1\,z_2},\qquad \begin{cases}|z_1|<1/|a||z_2|,\\ |z_2|<1/|a||z_1|;\end{cases}$$

$$a^{n_1}\,u(n_1-1)\delta(n_1+n_2)\xrightarrow{z}\frac{a\,z_1^{-1}\,z_2}{1-a\,z_1^{-1}\,z_2},\qquad \begin{cases}|z_1|>|a||z_2|,\\ |z_2|<|z_1|/|a|.\end{cases}$$

Для точек пересечения областей сходимости этих z-преобразований можно записать:

$$F(z_1,z_2)=\frac{1}{1-a\,z_1^{-1}\,z_2^{-1}}+\frac{a\,z_1\,z_2^{-1}}{1-a\,z_1\,z_2^{-1}}+\frac{a\,z_1\,z_2}{1-a\,z_1\,z_2}+\frac{a\,z_1^{-1}\,z_2}{1-a\,z_1^{-1}\,z_2}=$$

$$=\frac{\left(1+a^2\right)\left(1-3a^2\right)+2a^3\left(z_1^{-1}+z_1\right)\left(z_2^{-1}+z_2\right)-a^2\left(z_1^{-2}+z_1^2+z_2^{-2}+z_2^2\right)}{\left(1+a^2\right)^2-a\left(1+a^2\right)\left(z_1^{-1}+z_1\right)\left(z_2^{-1}+z_2\right)+a^2\left(z_1^{-2}+z_1^2+z_2^{-2}+z_2^2\right)}.$$

Указанное пересечение (область сходимости искомого z-преобразования) существует при $|a|<1$, может быть представлено в виде системы неравенств (7.45), в которой

$$R_{-}^{(1)}\left(|z_2|\right)=\begin{cases}\dfrac{|a|}{|z_2|} & \text{при}\quad |a|<|z_2|\le 1,\\ |a||z_2| & \text{при}\quad 1<|z_2|<1/|a|,\end{cases}$$

$$R_{+}^{(1)}\left(|z_2|\right)=\begin{cases}\dfrac{|z_2|}{|a|} & \text{при} \quad |a|<|z_2|\le 1,\\ \dfrac{1}{|a||z_2|} & \text{при} \quad 1<|z_2|<1/|a|,\end{cases}$$

$$R_{-}^{(2)}\left(|z_1|\right)=\begin{cases}\dfrac{|a|}{|z_1|} & \text{при} \quad |a|<|z_1|\le 1,\\ |a||z_1| & \text{при} \quad 1<|z_1|<1/|a|,\end{cases}$$

$$R_{+}^{(2)}\left(|z_1|\right)=\begin{cases}\dfrac{|z_1|}{|a|} & \text{при} \quad |a|<|z_1|\le 1,\\ \dfrac{1}{|a||z_1|} & \text{при} \quad 1<|z_1|<1/|a|.\end{cases}$$

Форму данной области иллюстрирует рис. 7.11,*б*.

Если двумерное *z*-преобразование сходится при $|z_1|=|z_2|=1$, то, положив

$$z_1=e^{i\omega_1}, \qquad z_2=e^{i\omega_2}$$

при вещественных ω_1, ω_2, из формулы (7.34) получаем спектр Фурье (7.25) двумерной последовательности. Таким образом, как и в одномерном случае, преобразование Фурье есть частный случай *z*-преобразования, который находит применение при анализе двумерных абсолютно суммируемых сигналов и устойчивых ЛИС-систем (при выполнении условий (7.27) и (7.17)). Само же *z*-преобразование является более общим средством двумерных последовательностей и применяется значительно шире.

Важный класс двумерных *z*-преобразований образуют дробно-рациональные функции двух переменных, представляющие собой отношения полиномов от z_1 и z_2. Если использовать запись полиномов по отрицательным степеням переменных, то двумерное дробно-рациональное *z*-преобразование имеет общий вид

$$F\left(z_1,z_2\right)=\frac{\sum\limits_{m_1=0}^{N_1}\sum\limits_{m_2=0}^{N_2}b_{m_1m_2}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}}{\sum\limits_{m_1=0}^{M_1}\sum\limits_{m_2=0}^{M_2}C_{m_1m_2}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}}. \qquad (7.46)$$

В одномерном случае подобные z-преобразования было удобно описывать своими нулями и полюсами, которые определялись в результате разложения полиномов числителя и знаменателя на простые множители. Такое разложение опиралось на основную теорему алгебры, согласно которой степенной полином одной переменной всегда может быть представлен через свои корни. Однако для полинома от нескольких переменных аналогичной теоремы в общем случае не существует, и подобное разложение невыполнимо. Многомерный полином, как правило, не имеет конечного числа корней, он равен нулю на непрерывных множествах значений переменных. В этом заключается главное качественное отличие одномерных и многомерных (в частности, двумерных) сигналов и систем, серьезно усложняющее их анализ.

7.7 Основные свойства двумерного z-преобразования

При работе с двумерным z-преобразованием полезно учитывать его свойства, которые перечисляются ниже. Некоторые из них достаточно очевидны или легко доказываются, другие – уже обсуждались в предыдущем параграфе.

Свойство 1. Если z-преобразование двумерной последовательности f существует, то ряд (7.34) абсолютно сходится во внутренних точках односвязной области сходимости, в общем случае определяемой системой двойных неравенств (7.45). В точках границы области ряд, соответствующий z-преобразованию, может как сходиться, так и расходиться. Область дробно-рационального двумерного z-преобразования всегда является открытой (не включает границы).

Свойство 2. Двумерное z-преобразование линейно, то есть если

$$f_1(n_1,n_2) \overset{z}{\to} F_1(z_1,z_2)\,,\ f_2(n_1,n_2) \overset{z}{\to} F_2(z_1,z_2)\,,$$

то при любых постоянных a, b

$$a f_1(n_1,n_2) + b f_2(n_1,n_2) \overset{z}{\to} aF_1(z_1,z_2) + bF_2(z_1,z_2)\,.$$

Областью сходимости этого суммарного z-преобразования в общем случае является пересечение областей сходимости слагаемых.

Свойство 3. Если двумерная последовательность разделима, то ее z-преобразование также является разделимым, то есть из соотношения

$$f(n_1,n_2) = f_1(n_1)\, f_2(n_2)$$

следует

$$F(z_1, z_2) = F_1(z_1) F_2(z_2) .$$

Свойство 4. Сдвиг двумерной последовательности по каждой координате выражается в умножении ее z-преобразования на целую степень соответствующей переменной, а именно, если

$$f_2(n_1, n_2) = f_1(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

при целых k_1 , k_2 , то

$$F_2(z_1, z_2) = z_1^{-k_1} z_2^{-k_2} F_1(z_1, z_2) \quad . \tag{7.47}$$

При сдвиге последовательности область сходимости двумерного z-преобразования не меняется за исключением, возможно точек

$$z_1 = 0 \ , \ z_2 = 0 \ , \ |z_1| = \infty \ \text{ и } \ |z_2| = \infty \ .$$

Свойство 5. Умножение двумерной последовательности на аргумент выражается в дифференцировании ее z-преобразования по соответствующей переменной, если, например,

$$f_2(n_1, n_2) = n_1 f_1(n_1, n_2) \ ,$$

то

$$F_2(z_1, z_2) = -z_1 \frac{\partial F_1(z_1, z_2)}{\partial z_1} \ . \tag{7.48}$$

При умножении последовательности на аргумент область сходимости двумерного z-преобразования не меняется за исключением, возможно, точек границ области.

Свойство 6. Умножение двумерной последовательности на экспоненту изменяет масштаб аргумента в z-преобразовании. Если

$$f_1(n_1, n_2) \xrightarrow{z} F_1(z_1, z_2)$$

с областью сходимости общего вида (7.45), и

$$f_2(n_1, n_2) = a^{n_1} b^{n_2} f_1(n_1, n_2) \ ,$$

где a, b – произвольные постоянные, то

$$F_2(z_1, z_2) = F_1\left(\frac{z_1}{a}, \frac{z_2}{b}\right) \tag{7.49}$$

с областью сходимости, выражаемая системой неравенств

$$\begin{cases} |a| R_{-}^{(1)}\left(\frac{|z_2|}{|b|}\right) < |z_1| < |a| R_{+}^{(1)}\left(\frac{|z_2|}{|b|}\right), \\ |b| R_{-}^{(2)}\left(\frac{|z_1|}{|a|}\right) < |z_2| < |b| R_{+}^{(2)}\left(\frac{|z_1|}{|a|}\right). \end{cases}$$

Свойство 7. Инверсия (изменение знака) аргумента последовательности приводит к замене соответствующей переменной в z-преобразовании на обратную величину, если, например,

$$f_2(n_1, n_2) \overset{z}{\rightarrow} F_1(z_1, z_2)$$

с областью сходимости общего вида (7.45), и

$$f_2(n_1, n_2) = f_1(-n_1, n_2) \ ,$$

то

$$F_2(z_1, z_2) = F_1\left(z_1^{-1}, z_2\right) \tag{7.50}$$

с областью сходимости, выражаемой системой неравенств:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_{+}^{(1)}(|z_2|)} < |z_1| < \frac{1}{R_{-}^{(1)}(|z_2|)}, \\ R_{-}^{(1)}\left(\frac{1}{|z_1|}\right) < |z_2| < R_{+}^{(2)}\left(\frac{1}{|z_1|}\right). \end{cases}$$

Свойство 8. Свертка двумерных последовательностей соответствует произведению их z-преобразований. Если

$$g(n_1, n_2) = h(n_1, n_2) ** f(n_1, n_2) \ ,$$

то

$$G(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) F(z_1, z_2) \ . \tag{7.51}$$

Областью сходимости двумерного z-преобразования $G(z_1, z_2)$ является, как правило, пересечение областей сходимости $H(z_1, z_2)$ и $F(z_1, z_2)$.

7.8 Анализ и синтез двумерных ЛИС-систем с использованием z-преобразования

Введем понятие *передаточной функции* двумерной дискретной ЛИС-системы $H(z_1, z_2)$ – z-преобразования ее импульсной характе-

ристики $h(n_1,n_2)$. Передаточная функция исчерпывающим образом описывает систему, так как с учетом соответствия (7.13) и (7.51) однозначно определяет преобразование входной двумерной последовательности в выходную.

Передаточная функция может быть получена непосредственно из разностного уравнения, описывающего двумерную ЛИС-систему. Действительно, используя сформулированные в предыдущем параграфе свойства z-преобразования, уравнение (7.21) можно записать в преобразованной форме:

$$G(z_1,z_2)=\sum_{(m_1,m_2)}\sum_{\in Q_g} a_{m_1,m_2}\,G(z_1,z_2)\,z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}+$$
$$+\sum_{(m_1,m_2)}\sum_{\in Q_f} b_{m_1,m_2}\,F(z_1,z_2)\,z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}$$

Отсюда

$$G(z_1,z_2)=\frac{\sum\limits_{(m_1,m_2)}\sum\limits_{\in Q_f} b_{m_1m_2}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}}{1-\sum\limits_{(m_1,m_2)}\sum\limits_{\in Q_g} a_{m_1m_2}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}}\,F(z_1,z_2)\,. \qquad (7.52)$$

Сопоставляя выражения (7.52) и (7.51) видим, что

$$H(z_1,z_2)=\frac{\sum\limits_{(m_1,m_2)}\sum\limits_{\in Q_f} b_{m_1m_2}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}}{1-\sum\limits_{(m_1,m_2)}\sum\limits_{\in Q_g} a_{m_1m_2}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}}\,. \qquad (7.53)$$

Аналогично, для каузальной ЛИС-системы, описываемой разностным уравнением (7.22), имеем

$$H(z_1,z_2)=\frac{\sum\limits_{m_1=0}^{N_1}\sum\limits_{m_2=0}^{N_2} b_{m_1m_2}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}}{1-\sum\limits_{\substack{m_1=0\\(m_1,m_2)}}^{M_1}\sum\limits_{\substack{m_2=0\\\neq(0,0)}}^{M_2} a_{m_1m_2}z_1^{-m_1}z_2^{-m_2}}\,. \qquad (7.54)$$

Передаточные функции (7.53), (7.54) представляют собой частные случаи записи выражения вида (7.46), то есть являются дробно-рациональными. Несложно показать, что двумерные ЛИС-системы, представляемые разностными уравнениями конечного порядка, всегда имеют дробно-рациональные передаточные функции.

Важной для практики является и возможность обратного перехода от передаточных функций (7.53), (7.54) через соотношение (7.52) к разностным уравнениям (7.21), (7.22). Такой переход позволяет решить задачу синтеза и реализации двумерной ЛИС-системы с требуемой импульсной характеристикой.

Пример 7.4. Построим разностное уравнение для каузальной ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(n_1,n_2)=u(n_1,n_2)-u(n_1-1,n_2-1).$$

Графическое изображение этой импульсной характеристики дано на рис. 7.12,*а*. Вычисление *z*-преобразования от представленной двумерной последовательности (переход к передаточной функции) дает:

$$H(z_1,z_2)=\frac{1-z_1^{-1}z_2^{-1}}{\left(1-z_1^{-1}\right)\left(1-z_2^{-1}\right)}=\frac{1-z_1^{-1}z_2^{-1}}{1-z_1^{-1}-z_2^{-1}+z_1^{-1}z_2^{-1}},\qquad \begin{cases}|z_1|>1,\\ |z_2|>1.\end{cases}$$

Связь *z*-преобразований входного и выходного сигналов задается выражением:

$$G(z_1,z_2)=H(z_1,z_2)F(z_1,z_2)=\frac{1-z_1^{-1}z_2^{-1}}{1-z_1^{-1}-z_2^{-1}+z_1^{-1}z_2^{-1}}F(z_1,z_2).$$

Отсюда получаем

$$\left(1-z_1^{-1}-z_2^{-1}+z_1^{-1}z_2^{-1}\right)G(z_1,z_2)=\left(1-z_1^{-1}z_2^{-1}\right)F(z_1,z_2),$$

или

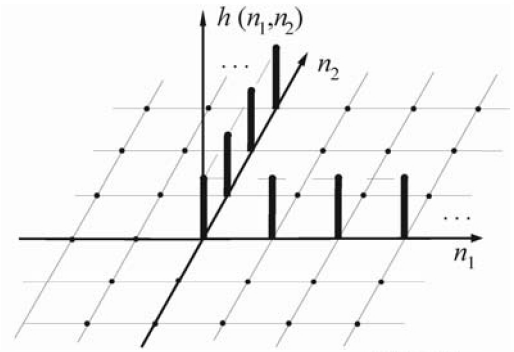
$$G(z_1,z_2)=z_1^{-1}G(z_1,z_2)+z_2^{-1}G(z_1,z_2)-z_1^{-1}z_2^{-1}G(z_1,z_2)+$$
$$+F(z_1,z_2)-z_1^{-1}z_2^{-1}F(z_1,z_2).$$

Последнему соотношению в области пространственных аргументов соответствует двумерное разностное уравнение

$$g(n_1,n_2)=g(n_1-1,n_2)+g(n_1,n_2-1)-g(n_1-1,n_2-1)+$$
$$+f(n_1,n_2)-f(n_1-1,n_2-1).$$

Построенная на базе этого уравнения схема вычисления отсчетов двумерного выходного сигнала представлена на рис. 7.12,*б*.

а)



б)

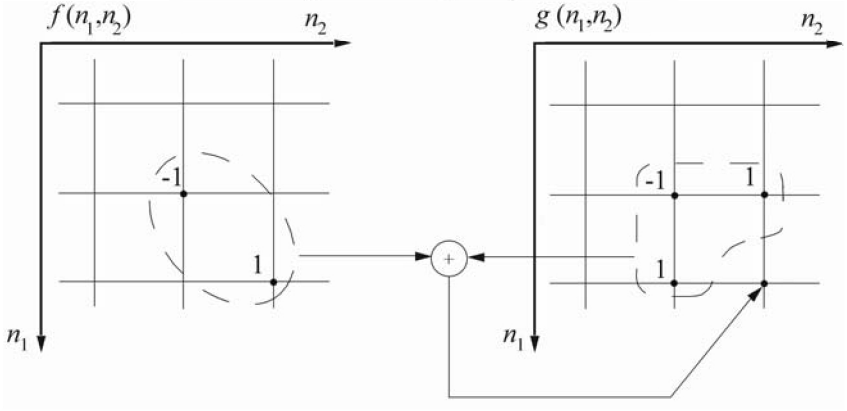


Рис. 7.12. Импульсная характеристика и соответствующая ей схема вычисления выходных отсчето:, а) импульсная характеристика двумерной ЛИС-системы; б) схема вычисления выходных отсчетов.

Аппарат *z*-преобразования весьма эффективен при решении задачи синтеза двумерной ЛИС-системы, осуществляющей заданное преобразование сигналов, то есть при конструировании передаточной функции системы по соотношению

$$H(z_1,z_2)=\frac{G(z_1,z_2)}{F(z_1,z_2)}\,. \qquad (7.55)$$

Следует, однако, иметь в виду, что результатами такого синтеза удается воспользоваться на практике только тогда, когда z-преобразования входного и выходного сигналов являются дробно-рациональными, поскольку только в этом случае ЛИС-системе соответствует разностное уравнение конечного порядка.

Пример 7.5. Построим разностное уравнение для каузальной ЛИС-системы, преобразующей последовательность

$$f(n_1,n_2)=u(n_1,n_2)-u(n_1-1,n_2-1)$$

в единичный импульс:

$$g(n_1,n_2)=\delta(n_1,n_2)\ .$$

Для z-преобразования входного сигнала имеем (см. предыдущий пример)

$$F(z_1,z_2)=\frac{1-z_1^{-1}z_2^{-1}}{1-z_1^{-1}-z_2^{-1}+z_1^{-1}z_2^{-1}}\ , \qquad \begin{cases}|z_1|>1,\\ |z_2|>1,\end{cases}$$

а для выходного сигнала

$$G(z_1,z_2)=1 \ \text{ при любых } |z_1|,|z_2|\ .$$

Следовательно, по (7.55) можно записать

$$H(z_1,z_2)=\frac{1-z_1^{-1}-z_2^{-1}+z_1^{-1}z_2^{-1}}{1-z_1^{-1}z_2^{-1}}$$

и далее перейти от передаточной функции к искомому разностному уравнению (см. также рис. 7.13)

$$g(n_1,n_2)=g(n_1-1,n_2-1)+f(n_1,n_2)-f(n_1-1,n_2)-$$
$$-f(n_1,n_2-1)+f(n_1-1,n_2-1).$$

При решении подобных задач, когда числитель и знаменатель дробно-рациональной функции меняются местами, возникает вопрос определения области сходимости z-преобразования. В рассмотренном примере ответ на него достаточно прост и однозначен. Область сходимости записанной дробно-рациональной передаточной функции ограничивается такими значениями z_1 , z_2 , при которых ее знаменатель обращается в нуль, то есть выполняется равенство

$$1-z_1^{-1}z_2^{-1}=0 \ \text{ или } \ z_1=\frac{1}{z_2}\ .$$

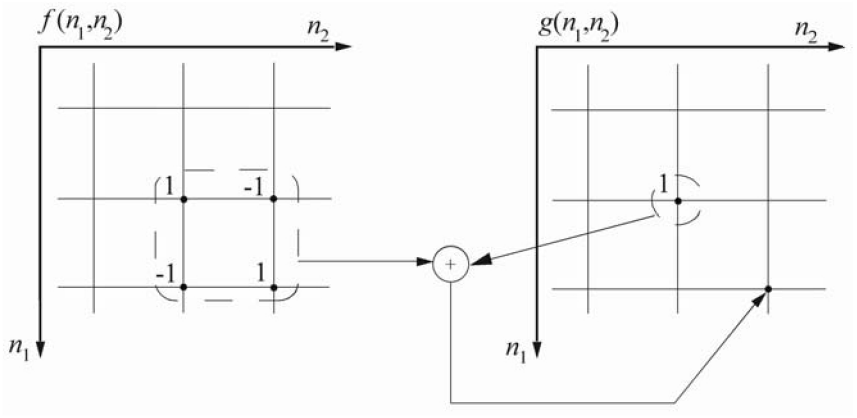


Рис. 7.13. Схема вычисления выходных отсчетов для ЛИС-системы, преобразующей последовательность вида $u(n_1,n_2)-u(n_1-1,n_2-1)$ *в единичный импульс*

Соответственно, для абсолютных значений комплексных переменных имеем

$$|z_1|=\frac{1}{|z_2|}\ .$$

Последнее соотношение задает гиперболическую границу области сходимости в координатах ($|z_1|$, $|z_2|$). Форма границы позволяет рассматривать два варианта самой области:

$$\begin{cases}|z_1|>\dfrac{1}{|z_2|},\\ |z_2|>\dfrac{1}{|z_1|},\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}|z_1|<\dfrac{1}{|z_2|},\\ |z_2|<\dfrac{1}{|z_1|}.\end{cases}$$

Поскольку ЛИС-система полагается каузальной (с импульсной характеристикой в первом квадранте), то необходимо принять первый вариант. Для нашего примера решение оказалось очевидным, однако в общем случае назначение области сходимости “синтезированному” двумерному *z*-преобразованию может оказаться сложной процедурой с неоднозначным ответом.

Еще более сложным (а иногда и невозможным) является обратный переход от *z*-преобразования к исходной двумерной последова-

тельности. Существует общий метод вычисления обратного двумерного z-преобразования, но он имеет весьма ограниченное применение из-за громоздкости вычислений, связанной, в частности, с невозможностью представления произвольных двумерных дробно-рациональных функций в виде суммы простых составляющих. Обычно реконструкция двумерной последовательности осуществима лишь тогда, когда z-преобразование с учетом его свойств удается свести к совокупности "табличных" формул, для которых указанный переход заранее известен.

Как и в одномерном случае, важным применением z-преобразования к анализу двумерных ЛИС-систем является проверка устойчивости системы по передаточной функции. Из сравнения основного критерия устойчивости (7.17) с условием сходимости z-преобразования (7.35) следует, что для устойчивости двумерной ЛИС-системы необходимо и достаточно, чтобы область сходимости передаточной функции включала в себя значения ее комплексных аргументов, для которых $|z_1|=1$, $|z_2|=1$. Это условие выглядит простым, однако его выполнение обычно трудно проверить на практике. Для анализируемой ЛИС-системы, как правило, известно разностное уравнение, по которому можно легко построить саму дробно-рациональную передаточную функцию, но чрезвычайно сложно в явном виде выразить ее область сходимости. По этой причине находят применение косвенные тесты устойчивости, не требующие определения всей области сходимости и проверки охвата ею точки $|z_1|=1$, $|z_2|=1$. Более подробное рассмотрение вопросов анализа устойчивости двумерных ЛИС-систем выходит за рамки данного учебника.

7.9 Двумерные случайные последовательности, их характеристики и прохождение через ЛИС-системы

Так же, как и в одномерном случае, под двумерной случайной последовательностью или случайным полем будем понимать последовательность, элементы которой являются случайными величинами. Остановимся кратко на характеристиках двумерных случайных последовательностей.

Вместо термина "стационарный процесс" в двумерном случае используется термин "однородное поле", корреляционная функция которого зависит от двух аргументов:

$$B_f(t_1,t_2,\tau_1,\tau_2)=B_f(t_1-\tau_1,t_2-\tau_2).$$

Выражения для оценок математического ожидания и корреляционной функции выглядят следующим образом:

$$\hat{\mu}_f \approx \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} f(t_1,t_2)\,dt_1dt_2\ ,$$

$$\hat{B}_f(\tau_1,\tau_2)\approx\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\left(f(t_1,t_2)-\mu_f\right)\left(f(t_1+\tau_1,t_2+\tau_2)-\mu_f\right)dt_1dt_2\ . \tag{7.56}$$

Оценки числовых характеристик случайной последовательности в двумерном случае также определяются с использованием свойства эргодичности и имеют следующий вид для $(1\le n_1\le N_1, 1\le n_2\le N_2)$:

$$\hat{\mu}_f \approx \frac{1}{N_1N_2}\sum_{k_1=1}^{N_1}\sum_{k_2=1}^{N_2} f(k_1,k_2), \tag{7.57}$$

$$\hat{B}_f(n_1,n_2)\approx\frac{1}{(N_1-n_1)(N_2-n_2)}\times \times\sum_{k_1=1}^{N_1-n_1}\sum_{k_2=1}^{N_2-n_2}\left(f(k_1,k_2)-\mu_f\right)\left(f(n_1+k_1,n_2+k_2)-\mu_f\right). \tag{7.58}$$

Связь корреляционной функции и спектральной плотности мощности определяется уравнением:

$$\Phi_f\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}B_f(n_1,n_2)e^{i\omega_1n_1-i\omega_2n_2}\ , \tag{7.59}$$

$$B_f(n_1,n_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_f\left(e^{i\omega_1}e^{i\omega_2}\right)e^{i\omega_1n_1+i\omega_2n_2}d\omega_1d\omega_2\ . \tag{7.60}$$

Прохождение двумерной последовательности через ЛИС-систему описывается теми же соотношениями, что и в одномерном случае, с обобщением на две координаты.

Общего подхода к факторизации энергетического спектра в двумерном случае не существует.

7.10 Практические задания к главе 7

Двумерные дискретные последовательности и системы. Двумерная свертка, двумерный спектр и двумерное z-преобразование

7.10.1. Вычислить свертку двух последовательностей:

$$x(m,n)=\alpha^{m}u(m)\delta(m-n)$$

и

$$h(m,n)=u(m)\delta(n)+u(n)\delta(m)-\delta(m,n)\,.$$

7.10.2. На вход двумерной ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(m,n)=\alpha^{m+n}u(m,n)$$

подается последовательность

$$x(m,n)=\alpha^{m+n}u(m,n)\,.$$

Определить выходную последовательность $y(m,n)$.

7.10.3. Доказать, что двумерный спектр $X(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2})$ вещественной симметричной последовательности $x(-m,-n)=x(m,n)$ является вещественным.

7.10.4. Доказать равенство Парсеваля для двумерного преобразования Фурье:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(m,n)\right|^2=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2})\right|^2 d\omega_1 d\omega_2\,.$$

7.10.5. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(m,n)=\alpha^{m+n}u(m,n),\quad |\alpha|<1$$

подаётся последовательность

$$x(m,n)=\frac{1+(-1)^{m+n}}{2}\,.$$

Определить выходную последовательность $y(m,n)$.

Указание: Использовать частотную характеристику.

7.10.6. На вход двумерной каузальной ЛИС-системы, описываемой разностным уравнением

$$y(m,n)=\alpha y(m,n-1)+\alpha y(m-1,n)-\alpha^2 x(m-1,n-1)+x(m,n),$$

подаётся последовательность

$$x(m,n)=\frac{1+(-1)^{m+n}}{2}.$$

Определить выходную последовательность $y(m,n)$.

Указание: Использовать частотную характеристику.

7.10.7. Дан спектр ***вещественной*** последовательности $x(m,n)$:

$$X\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=\begin{cases}1, & 0\le\omega_1\le\pi/2,\ 0\le\omega_2\le\pi/2,\\ -1, & 0\le\omega_1\le\pi/2,\ -\pi/2\le\omega_2<0,\\ 0, & \pi/2<\omega_1\le\pi \text{ или } \pi/2<|\omega_2|\le\pi.\end{cases}$$

Определить последовательность $x(m,n)$.

7.10.8. Дан спектр последовательности $x(m,n)$:

$$X\left(e^{i\omega_1},e^{i\omega_2}\right)=\begin{cases}1, & |\omega_1|+|\omega_2|\le\pi/2,\\ 0, & |\omega_1|+|\omega_2|>\pi/2,\quad |\omega_1|\le\pi,\quad |\omega_2|\le\pi.\end{cases}$$

Определить последовательность $x(m,n)$.

7.10.9. Вычислить z-преобразование последовательности $x(m,n)=\alpha^{|n|}\delta(m-n)$. При каких значениях параметра α z-преобразование существует? Указать область сходимости.

7.10.10. Вычислить z-преобразование последовательности $x(m,n)=\alpha^{|n|}\delta(m+n)$. При каких значениях параметра α z-преобразование существует? Указать область сходимости.

7.10.11. Вычислить обратное z-преобразование от

$$X(z_1,z_2)=\frac{z_1^{-1}}{1-az_1^{-1}z_2^{-2}},\quad |z_1|\cdot|z_2|^2>|a|.$$

7.10.12. Вычислить обратное z-преобразование от

$$X(z_1,z_2)=\frac{z_1^{-1}}{1-az_1^{-1}z_2^{-2}},\ |z_1|\cdot|z_2|^2<|a|.$$

7.10.13. Вычислить z-преобразование последовательности

$$x(m,n)=a^{|m+n|+|m-n|},\quad |a|<1.$$

Указать область сходимости.

7.10.14. Вычислить z-преобразование последовательности

$$x(m,n)=a^{\|m+n|-|m-n\|},\quad |a|<1.$$

Указать область сходимости.

Синтез и анализ двумерных ЛИС-систем

7.10.15. Записать разностное уравнение каузальной ЛИС-системы, выполняющей преобразование входной последовательности $x(m,n)$ в выходную последовательность $y(m,n)$ по формуле:

$$y(m,n)=\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{M-1}a^{k+l}x(m-k,n-l).$$

При каком значении параметра a система является устойчивой? Зарисовать структурную схему для рекурсивной реализации.

7.10.16. Записать разностное уравнение и построить структурную схему каузальной ЛИС-системы, осуществляющей преобразование последовательности

$$x(m,n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(m+n)\right)u(m,n)$$

в последовательность

$$y(m,n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}(m+n)\right)u(m,n).$$

Является ли эта система устойчивой?

7.10.17. Построить двумерную ЛИС-систему, осуществляющую преобразование последовательности

$$x(m,n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}m\right)u(m,n)$$

в последовательность

$$y(m,n)=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(m,n).$$

Является ли эта система устойчивой?

7.10.18. Записать разностное уравнение каузальной ЛИС-системы, выполняющей преобразование входной последовательности $x(m,n)$ в выходную последовательность $y(m,n)$ по формуле:

$$y(m,n)=\sum_{k=0}^{4M-1}\sum_{l=0}^{4M-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}l\right)x(m-k,n-l).$$

Зарисовать структурную схему. Является ли эта система устойчивой?

7.10.19. Записать разностное уравнение каузальной ЛИС-системы, выполняющей преобразование входной последовательности $x(m,n)$ в выходную последовательность $y(m,n)$ по формуле:

$$y(m,n)=\sum_{k=0}^{4M-1}\sum_{l=0}^{4M-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}(k+l)\right)x(m-k,n-l).$$

Зарисовать структурную схему.

7.10.20. Записать разностное уравнение ЛИС-системы, выполняющей преобразование входной последовательности $x(m,n)$ в выходную последовательность $y(m,n)$ по формуле:

$$y(m,n)=\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}klx(m-k,n-l).$$

Найти частотную характеристику ЛИС-системы. Зарисовать структурную схему.

7.10.21. При каких значениях параметра α двумерная ЛИС-система, осуществляющая преобразование последовательности $x(m,n)=\alpha^{|n|}\delta(m-n)$ в последовательность $y(m,n)=\alpha^{|n|}\delta(m+n)$, является устойчивой? Определить частотную характеристику этой ЛИС-системы.

7.10.22. Какую последовательность надо подать на вход двумерной ЛИС-системы с импульсной характеристикой $h(m,n)=\alpha^{|m|+|n|}$, чтобы получить на выходе последовательность $y(m,n)=\alpha^{m+n}u(m,n)$?

7.10.23. Вычислить импульсную характеристику каузальной ЛИС-системы, заданной разностным уравнением

$$y(m,n)=ay(m,n-1)+by(m-1,n)+x(m,n).$$

7.10.24. Записать разностное уравнение ЛИС-системы, выполняющей преобразование входной последовательности $x(m,n)$ в выходную последовательность $y(m,n)$ по формуле:

$$y(m,n)=\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=-M}^{M}x(m-k,n-l).$$

Зарисовать структурную схему.

7.10.25. На вход ЛИС-системы с импульсной характеристикой

$$h(m,n)=\alpha^{m+n}u(m,n),\quad |\alpha|<1$$

подаётся последовательность

$$x(m,n)=\frac{1+(-1)^{m+n}}{2}.$$

Определить выходную последовательность $y(m,n)$.

Указание: Использовать частотную характеристику.

Исследование устойчивости двумерных систем

7.10.26. При каких значениях параметра a система, описываемая разностным уравнением

$$y(m,n)=ay(m,n-1)+ay(m-1,n)+ay(m-1,n-1)+x(m,n),$$

будет устойчивой?

7.10.27. При каких значениях параметров (a,b) система, описываемая разностным уравнением:

$$y(m,n)=ay(m,n-1)+ay(m-1,n)+by(m-1,n-1)+x(m,n),$$

будет устойчивой? Изобразить графически область устойчивости в координатах (a,b).

7.10.28. При каких значениях параметров (a,b) система, описываемая разностным уравнением

$$y(m,n)=ay(m,n-1)+by(m-1,n)+x(m,n),$$

будет устойчивой? Изобразить графически область устойчивости в координатах (a,b).

7.10.29. При каких значениях параметра a система, описываемая разностным уравнением

$$y(m,n)=ay(m-1,n-1)+x(m,n),$$

будет устойчивой?

7.10.30. При каких значениях параметров (a,b,c) система, описываемая разностным уравнением

$$y(m,n)=ay(m,n-1)+by(m-1,n)+cy(m-1,n-1)+x(m,n),$$

будет устойчивой? Изобразить графически область устойчивости в координатах (a,b,c).

Учебное издание

Сергеев Владислав Викторович,
Чичева Марина Александровна

ТЕОРИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Учебник

Редакторская обработка Н.С. Куприянова
Компьютерная доверстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 15.03.2013 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 13,0.
Тираж 20 экз. Заказ . Арт. - 5/2013.

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.