

Е. К. Башкиров

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА
ПРОЕКЦИОННОГО ОПЕРАТОРА
В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ**

Самара
2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра общей и теоретической физики

Е. К. Башкиров

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОЕКЦИОННОГО ОПЕРАТОРА
В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ**

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Самара
Издательство «Самарский университет»
2014

УДК 535.14
ББК 22.31
Б33

Рецензент канд. физ.-мат наук, с.н.с. С. Ю. Пичугин

Башкиров, Е. К.

Б33 Применение метода проекционного оператора в квантовой оптике: учебное пособие / Е. К. Башкиров. – Самара : Изд-во «Самарский университет», 2014. – 36 с.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой курса «Теория неравновесных процессов», который читается студентам и магистрантам физического факультета СамГУ.

Основное внимание уделено изложению основ метода проекционного оператора и его приложений в квантовой оптике.

Предназначено бакалаврам и магистрантам физических специальностей университетов, а также может быть интересным аспирантам, научным работникам и преподавателям вузов.

УДК 535.14
ББК 22.31

- © Башкиров Е. К., 2014
- © Самарский государственный университет, 2014
- © Оформление. Издательство «Самарский университет», 2014

Оглавление

Введение	4
1. Основное кинетическое уравнение Цванцига	6
2. Уравнение Паули	9
3. Энтропия неравновесного состояния	17
4. Сверхизлучение Дикке	20
5. Динамика моды квантового электромагнитного поля в неидеальном резонаторе	27
Заключение	34
Библиографический список	35

Введение

Статистическая теория неравновесных процессов интенсивно развивается, начиная с 50-х годов, хотя некоторые важнейшие проблемы неравновесных состояний обсуждались и ранее, в частности проблема необратимости впервые была осознана около ста лет назад, когда Людвиг Больцман попытался обосновать статистическое описание временной эволюции систем, состоящих из большого числа частиц. Несмотря на значительные усилия проблема так и осталась нерешенной. Ее суть состоит в следующем: как на основе обратимых уравнений движения вывести необратимые во времени кинетические уравнения или уравнения неравновесной термодинамики и на их основе объяснить наблюдаемую необратимость процессов. Первой идеей решения этой проблемы в рамках кинетической теории газа стала H - теорема Больцмана [1]. Попытки ее решения делались также Гиббсом, который обсуждал возможность возрастания энтропии в связи с перемешиванием в фазовом пространстве, и Эренфестом [1], который предлагал в качестве возможного решения парадокса описание неравновесных процессов с помощью крупноструктурной функции распределения, усредненной по малой ячейке фазового пространства.

Принципиально новое осмысление проблем необратимости было сделано Н.Н.Боголюбовым [2], который понял, что для перехода от обратимого уравнения Лиувилля к необратимым кинетическим уравнениям необходимо отказаться от полноты описания, заложенной в функции распределения или статистическом операторе и перейти к сокращенному описанию. Н.Н.Боголюбовым было введено важнейшее понятие об иерархии релаксационных процессов в статистических системах и возможности введения для их описания последовательности временных шкал и масштабов ("иерархии времен"). Им было также показано, что для случая газа малой плотности сокращенное описание на кинетическом этапе эволюции может быть реализовано на основе одночастичной функции распределения, замкнутое уравнение для ко-

торой получается из цепочки уравнений Боголюбова с использованием условия ослабления корреляций в качестве граничного.

Все современные теории неравновесных процессов используют общий подход Н.Н.Боголюбова, основанный на сокращенном описании неравновесного состояния, причем переход к сокращенному описанию осуществляется путем усреднения функций распределения по времени или фазовым переменным с использованием тех или иных предположений, эквивалентных условиям ослабления корреляций. Однако, хотя основные идеи, заложенные в разных теориях близки, конкретные методы и подходы, используемые в них весьма разнообразны, что свидетельствует о незавершенности неравновесной статистической физики (в отличие от равновесной теории, идейно подчиненной авторитету гиббсовской статистики).

Среди наиболее разработанных подходов к теории неравновесных состояний отметим метод проекционного оператора Цванцига, метод функций Грина, метод статистического оператора Зубарева, метод Мори, метод неравновесных функций Грина [5], метод исключения бозонных переменных [6] и др.

В настоящем пособии рассматривается метод проекционного оператора, который выражает идею сокращенного описания в наиболее общей форме и поэтому позволяет наиболее наглядно продемонстрировать основные идеи теории необратимых процессов. Метод проекционного оператора успешно применялся при описании широкого класса необратимых явлений в различных физических системах [4-7].

Пособие имеет следующую структуру. Во Введении обсуждаются общие проблемы описания неравновесных состояний. В первом разделе изложены основы метода и получено обобщенное кинетическое уравнение для релевантной части статистического оператора. В разделе 2 показано, что обобщенное кинетическое уравнение с точностью до членов второго порядка по взаимодействию и в марковском приближении совпадает с уравнением Паули. В разделе 3 обсуждается проблема введения энтропии для неравновесного состояния. В последующих разделах рассмотрены приложения метода в квантовой оптике.

1. Основное кинетическое уравнение Цванцига

Рассмотрим квантовомеханическую систему со слабым взаимодействием с гамильтонианом вида $H = H_0 + H_1$, где H_1 - слабое возмущение. Диагональные элементы оператора ρ в представлении по собственным функциям H_0 изменяются со временем медленно, по сравнению с его недиагональными элементами

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \rho_{nn}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle n | \rho(t) | n \rangle = \langle n | [H, \rho] | n \rangle = \\ &= \langle n | [H_0 + H_1, \rho] | n \rangle = \langle n | [H_1, \rho] | n \rangle, \\ i\hbar \frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle n | \rho(t) | m \rangle = \langle n | [H, \rho] | m \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку H_1 - мало, то выполняется соотношение

$$\left| \frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\partial \rho_{nn}}{\partial t} \right|.$$

Таким образом разделение оператора ρ на диагональную и недиагональную части есть разделение его на медленно и быстро меняющиеся части. Можно считать, что ограничение диагональной частью статистического оператора есть переход к сокращенному описанию.

Если выделение диагональной части рассматривать как оператор, то, очевидно, что это проекционный оператор, так как квадрат его равен самому оператору:

$$P\rho = \rho_1, \quad P^2\rho = P\rho_1 = \rho_1.$$

и следовательно

$$P^2 = P.$$

Таким образом, с помощью оператора проектирования мы можем выделить медленно меняющуюся часть статистического оператора, соответствующую сокращенному описанию.

Следуя Цванцигу, введем теперь проекционный оператор P , который выделяет медленно меняющуюся (или релевантную) часть статистического оператора, соответствующую сокращенному описанию

$$\rho_1 = P\rho,$$

где $P^2 = P$.

Полный статистический оператор можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\rho = \rho_1 + \rho_2,$$

где $\rho_2 = (1 - P)\rho$ - быстро меняющаяся (нерелевантная) или корреляционная часть статистического оператора.

Предположим, что P - линейный, не зависящий от времени оператор, коммутирующий с $\frac{\partial}{\partial t}$ (явный вид оператора необходимо конкретизировать в каждой конкретной модели, причем конкретизация этого оператора представляет собой во многих случаях нетривиальную задачу). В частности, оператор P может означать выделение диагональной части.

Статистический оператор ρ удовлетворяет квантовому уравнению Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho].$$

Перепишем уравнение Лиувилля в более удобной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + iL\rho = 0. \quad (1)$$

Здесь L - оператор Лиувилля, определяемый как $L\rho = [H, \rho]/\hbar$.

Будем искать формальное решение уравнения Лиувилля (1) с начальным условием отсутствия корреляций при $t = 0$

$$\rho(t)|_{t=0} = \rho_1(0) = P\rho(0),$$

или $\rho_2(0) = 0$.

Поддействуем на уравнение Лиувилля (1) слева операторами P и $(1 - P)$. В результате получим систему замкнутых уравнений для ρ_1 и ρ_2

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + iPL(\rho_1 + \rho_2) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + i(1 - P)L(\rho_1 + \rho_2) = 0, \quad (3)$$

с начальным условием

$$\rho_2(0) = 0. \quad (4)$$

Формальное решение уравнения (3) с учетом начального условия (4) можно представить в виде

$$\rho_2(t) = - \int_0^t \exp[(t_1 - t)(1 - P)iL](1 - P)iL\rho_1(t_1)dt_1. \quad (5)$$

Тогда искомый статистический оператор равен

$$\rho(t) = \rho_1(t) - \int_0^t \exp[(t_1 - t)(1 - P)iL](1 - P)iL\rho_1(t_1)dt_1.$$

Подставляя решение (5) в уравнение (2), получим замкнутое уравнение для оператора $\rho_1(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + iPL\rho_1 &= \\ &= - \int_0^t PL \exp[(t_1 - t)(1 - P)iL](1 - P)L\rho_1(t_1)dt_1 = \\ &= - \int_0^t PL \exp[-is(1 - P)L](1 - P)L\rho_1(t - s)ds. \end{aligned} \quad (6)$$

- основное кинетическое уравнение Цванцига.

Формально основное кинетическое уравнение (6) справедливо при любом t и для любого взаимодействия, поскольку при его выводе не делалось никаких приближений. На самом деле оно справедливо лишь при достаточно больших t , значительно больших времени восстановления корреляций, так как мы исходили из начального условия отсутствия их при $t = 0$.

Основное кинетическое уравнение имеет немарковский характер, т.е. обладает памятью, так как интегрирование совершается по прошедшему времени.

2. Уравнение Паули

Покажем в этом разделе, что из обобщенного уравнения Цванцига можно получить уравнение Паули (master equation). Пусть для рассматриваемой системы в начальный момент времени матрица плотности диагональна $\rho(0) = \rho_1(0)$. Такой выбор начального условия эквивалентен введению оператора проектирования P

$$P\rho = \rho_1$$

или

$$(P\rho)_{nm} = \rho_{nn}\delta_{nm}.$$

Уравнение Лиувилля в матричной форме

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{nm}}{\partial t} = \sum_l (H_{nl}\rho_{lm} - \rho_{nl}H_{lm}). \quad (7)$$

удобно записать, используя так называемое тетрадное представление. Супероператоры или тетрады были введены в 1958 году Накадзимой [4]). Сопоставление некоторого оператора другому оператору можно рассматривать как отображение. Оператор тогда будет представляться матричными элементами с двумя индексами, а линейное преобразование операторов - матрицей с четырьмя индексами, т.е. супероператором или тетрадой (тетрадиком). Задаваемое тетрадой отображение действует уже не в пространстве состояний, а в пространстве операторов. Алгебра тетрад изоморфна алгебре матриц.

Примером супероператора может служить оператор выделения диагональной части

$$P\rho = \rho_1$$

или

$$\sum_{m'n'} P_{mnm'n'} \rho_{m'n'} = \rho_{nn} \delta_{mn},$$

где

$$P_{mnm'n'} \rho_{m'n'} = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{nm}.$$

Другой пример супероператора - оператор Лиувилля (матричный элемент для этого оператора приведен ниже).

Единичная матрица в тетрадном представлении равна

$$(1)_{mm'n'n'} = \delta_{mm'}\delta_{nn'}.$$

Уравнения Лиувилля

$$i\frac{\partial\rho}{\partial t} = L\rho$$

в матричной тетрадной форме имеет вид

$$i\frac{\partial\rho_{nm}}{\partial t} = \sum_{m'n'} L_{mm'n'n'}\rho_{m'n'}, \quad (8)$$

где $L_{mm'n'n'}$ - матрица с удвоенными индексами или тетрада. Сравнивая (8) с (7), найдем, что (для сокращения записей будем везде в дальнейшем полагать $\hbar = 1$)

$$L_{mm'n'n'} = H_{mm'}\delta_{nn'} - H_{n'n}\delta_{mm'}. \quad (9)$$

Основное кинетическое уравнение в тетрадной форме примет вид

$$\frac{\partial\rho_{mm}}{\partial t} + i(PL\rho_1)_{mm} = \int_0^t [\mathcal{H}(s)\rho_1(t-s)]_{mm} ds, \quad (10)$$

где

$$\mathcal{H}(s) = -PLe^{-is(1-P)L}(1-P)L \quad (11)$$

и $\rho_{mm} = (\rho_1)_{mm}$. Нетрудно показать, что второе слагаемое в левой части уравнения (10) равно нулю. Для этого достаточно убедиться, что

$$PLP = 0.$$

Действительно, в тетрадном представлении имеем

$$(PLP)_{mm'n'n'} = (LP)_{mmnn'}\delta_{mm'},$$

$$(LP)_{mmnn'} = L_{mmnn}\delta_{nn'}.$$

В результате получаем

$$(PLP)_{mm'n'n'} = L_{mmnn}\delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Учитывая, что

$$L_{mmnn} = H_{mm}\delta_{nn} - H_{nn}\delta_{mm} = 0,$$

получаем необходимое соотношение.

В результате уравнение (10) примет вид

$$\frac{\partial \rho_{mm}}{\partial t} = \int_0^t [\mathcal{H}(s)\rho_1(t-s)]_{mm} ds. \quad (12)$$

Учитывая, что оператор ρ_1 диагонален, запишем уравнение (12) в виде

$$\frac{\partial \rho_{mm}}{\partial t} = \int_0^t \sum_n \mathcal{H}_{mmnn}(s)\rho_{nn}(t-s)ds, \quad (13)$$

где

$$\mathcal{H}_{mmnn}(s) = - \left[P L e^{-is(1-P)L} (1-P)L \right]_{mmnn} = - \left[L e^{-is(1-P)L} (1-P)L \right]_{mmnn}$$

(где мы учли, что $(PL)_{mmlp} = L_{mmlp}$). Ядро интегрального уравнения (13) удовлетворяет правилу сумм

$$\sum_n \mathcal{H}_{mmnn}(s) = 0. \quad (14)$$

Для доказательства соотношения (14) распишем его в явном виде

$$\begin{aligned} \sum_n \mathcal{H}_{mmnn}(s) &= - \sum_n \left[L e^{-is(1-P)L} (1-P)L \right]_{mmnn} = \\ &= - \sum_n \sum_{abcd} L_{mmab} \left[e^{-is(1-P)L} \right]_{abcd} [(1-P)L]_{cdnn} \cdot \\ &= - \sum_n \sum_{abcd(c \neq d)} L_{mmab} \left[e^{-is(1-P)L} \right]_{abcd} L_{cdnn}. \end{aligned}$$

(оператор P выделяет диагональную часть, а $(1-P)$ - недиагональную часть любого оператора).

Теперь выполняя суммируя по n , имеем

$$\begin{aligned} \sum_n L_{cdnn} &= \sum_n H_{cn} \delta_{dn} - \sum_n H_{nd} \delta_{nc} = \\ &= H_{cd} - H_{cd} = 0. \end{aligned}$$

Используя правило сумм (14), получаем

$$\sum_{n \neq m} \mathcal{H}_{mmnn}(s) = -\mathcal{H}_{mmmm}(s). \quad (15)$$

Соотношение (15) позволяет записать основное кинетическое уравнение

(13) в следующем виде

$$\frac{\partial \rho_{mm}}{\partial t} = \int_0^t \sum_{n \neq m} \mathcal{H}_{mmnn}(s) [\rho_{nn}(t-s) - \rho_{mm}(t-s)] ds, \quad (16)$$

Уравнение (16) представляет собой точное уравнение. Уравнение Паули можно получить из (16), если ограничиться в интегральном ядре членами второго порядка малости по взаимодействию. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид $H = H_0 + H_1$, где H_1 - малое возмущение. Тогда и оператор Лиувилля можно представить в аналогичном виде

$$L = L_0 + L_1.$$

Теперь ядро уравнения (16) мы можем представить как

$$\mathcal{H}_{mmnn}(s) = - \left[(L_0 + L_1) e^{-is(1-P)(L_0+L_1)} (1-P)(L_0 + L_1) \right]_{mmnn} \quad (17)$$

Учитывая явный вид оператора L_0 , формулу (17) можно упростить. Имеем

$$\begin{aligned} (L_0)_{mmm'n'} &= (H_0)_{mm'} \delta_{nn'} - (H_0)_{nn'} \delta_{mm'} = \\ &= E_m \delta_{mm'} \delta_{nn'} - E_m \delta_{nn'} \delta_{mm'} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где E_m - собственные значения невозмущенного гамильтониана:

$$H_0 |m\rangle = E_m |m\rangle.$$

Аналогично показывается, что

$$(L_0)_{mm'nn} = 0.$$

Тогда ядро $\mathcal{H}_{mmnn}(s)$ примет вид

$$\mathcal{H}_{mmnn}(s) = - \left[L_1 e^{-is(1-P)(L_0+L_1)} (1-P)L_1 \right]_{mmnn}. \quad (19)$$

Поскольку ядро (19) уже содержит множители второго порядка по взаимодействию, в операторе

$$T(s) = e^{-is(1-P)(L_0+L_1)}$$

можно пренебречь взаимодействием в экспоненте, положив его равным

$$T^0(s) = e^{-is(1-P)L_0}. \quad (20)$$

Кроме того нетрудно доказать следующие соотношения

$$PL_0 = L_0P = 0.$$

В тетрадном представлении произвольный матричный элемент оператора PL_0 можно записать как

$$(PL_0)_{mnm'n'} = (L_0)_{mmm'n'} = 0$$

в соответствие с формулой (18). Аналогично показывается, что и $L_0P = 0$.

Теперь оператор $T^0(s)$ примет вид

$$T^0(s) = e^{-isL_0}. \quad (21)$$

Как обычно операторное выражение (21) понимается в смысле разложения в ряд Тейлора

$$T^0(s) = e^{-isL_0} = 1 - isL_0 - \frac{(sL_0)^2}{2!} + \dots$$

Принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} (L_0)_{mnm'n'} &= (E_m - E_n)\delta_{mm'}\delta_{nn'}, \\ (L_0)_{mnm'n'}^2 &= \sum_{ab} L_{0mnab} L_{0abm'n'} = \\ &= \sum_{ab} (E_m - E_n)\delta_{ma}\delta_{nb}(E_a - E_b)\delta_{m'a}\delta_{n'b} = (E_m - E_n)^2\delta_{mm'}\delta_{nn'}, \end{aligned}$$

можно записать произвольный матричный элемент оператора $T^0(s)$ в тетрадном представлении

$$(T^0)_{mnm'n'} = e^{-is\omega_{mn}}\delta_{mm'}\delta_{nn'}, \quad (22)$$

где $\omega_{mn} = E_m - E_n$.

Тогда ядро интегрального уравнения (16) во втором порядке по взаимодействию принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{mnmn}^0 &= -[L_1 T^0(s)(1 - P)L_1]_{mnmn} = \\ &= -\sum_{abcd} (L_1)_{mmab} (T^0)_{abcd} [(1 - P)L_1]_{cdnn} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{abcd(c \neq d)} (L_1)_{mmab} (T^0)_{abcd} (L_1)_{cdnn} = \\
&= - \sum_{abcd(c \neq d)} (H_{ma}^1 \delta_{mb} - H_{bm}^1 \delta_{ma}) e^{-is\omega_{ab}} \delta_{ac} \delta_{bd} (H_{cn}^1 \delta_{dn} - H_{nd}^1 \delta_{cn}) = \\
&= - \sum_{ab(a \neq b)} (H_{ma}^1 \delta_{mb} - H_{bm}^1 \delta_{ma}) e^{-is\omega_{ab}} (H_{an}^1 \delta_{bn} - H_{nb}^1 \delta_{an}). \quad (23)
\end{aligned}$$

В правой части уравнения (16) суммирование производится при условии $m \neq n$. В этом случае для ядра интегрального уравнения $\mathcal{H}_{mmnn}^0$ из (23) получаем

$$\mathcal{H}_{mmnn}^0 = |H_{mn}^1|^2 (e^{-is\omega_{nm}} + e^{is\omega_{nm}}) \quad (p \quad m \neq n). \quad (24)$$

В результате основное кинетическое уравнение приводится к следующему

$$\frac{\partial \rho_{mm}}{\partial t} = \sum_{n \neq m} \int_0^t |H_{mn}^1|^2 (e^{-is\omega_{nm}} + e^{is\omega_{nm}}) \{\rho_{nn}(t-s) - \rho_{mm}(t-s)\} ds. \quad (25)$$

При $n = m$ в правой части уравнения (25) выражение в фигурных скобках равно нулю, поэтому мы можем без всякого ущерба при суммировании по n включить в сумму слагаемое с $n = m$.

Работая во втором приближении по взаимодействию, мы можем заменить в подынтегральном выражении в правой части уравнения (25) диагональные элементы матрицы плотности медленно меняющимися амплитудами:

$$\rho_{nn}(t-s) \cong \rho_{nn}(t), \quad \rho_{mm}(t-s) \cong \rho_{mm}(t).$$

С учетом сделанных упрощений для уравнения (25) получаем

$$\frac{\partial \rho_{mm}}{\partial t} = \sum_n |H_{mn}^1|^2 \{\rho_{nn}(t) - \rho_{mm}(t)\} \int_0^t (e^{-is\omega_{nm}} + e^{is\omega_{nm}}) ds. \quad (26)$$

Теперь интеграл по времени в правой части уравнения (26) легко вычисляется

$$\int_0^t (e^{-is\omega_{nm}} + e^{is\omega_{nm}}) ds = - \int_{-t}^t e^{-is\omega_{mn}} ds = \frac{\sin \omega_{mn} t}{\omega_{mn}}.$$

Введем вероятность перехода в единицу времени

$$\Gamma_{mn}(t) = |H_{mn}^1|^2 \frac{2 \sin \omega_{mn} t}{\omega_{mn}}.$$

При $t \rightarrow \infty$ вероятность перехода становится не зависящей от времени, принимая вид

$$\Gamma_{mn}(t) = 2\pi |H_{mn}^1|^2 \delta(E_m - E_n),$$

или с учетом постоянной Планка

$$\Gamma_{mn}(t) = \frac{2\pi}{\hbar^2} |H_{mn}^1|^2 \delta\left(\frac{E_m - E_n}{\hbar}\right).$$

Теперь уравнение (26) окончательно принимает вид уравнения Паули

$$\frac{\partial \rho_{mm}}{\partial t} = \sum_n \Gamma_{mn} (\rho_{nn}(t) - \rho_{mm}(t)). \quad (27)$$

В качестве иллюстрации решения уравнения Паули рассмотрим два простых примера:

1. Спиновая релаксация.

Пусть в фиксированных точках находятся N электронов, для которых допускаются оба спиновых состояния: $\uparrow$ и $\downarrow$. Пусть $N_\uparrow$ - число электронов со спином $\uparrow$, а $N_\downarrow$ - число электронов со спином $\downarrow$. Допустим, что в момент времени $t = 0$ на систему накладывается сильное магнитное поле, так что все спины ориентируются в одном направлении:

$$N_\uparrow(0)/N = p_\uparrow(0) = 1, \quad N_\downarrow(0)/N = p_\downarrow(0) = 0.$$

После выключения магнитного поля происходит переориентация спинов, причем частоты переходов $\Gamma_{\uparrow\downarrow} = \Gamma_{\downarrow\uparrow} = w$ определяются микроскопическими характеристиками, например спин-решеточным взаимодействием. Из уравнения Паули

$$\frac{\partial p_\uparrow(t)}{\partial t} = w p_\downarrow(t) - w p_\uparrow(t), \quad \frac{\partial p_\downarrow(t)}{\partial t} = w p_\uparrow(t) - w p_\downarrow(t)$$

следуют уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_\uparrow + p_\downarrow) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(p_\uparrow - p_\downarrow) = -2w(p_\uparrow - p_\downarrow),$$

из которых получаем

$$p_{\uparrow}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2wt}, \quad p_{\downarrow}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2wt}.$$

Конечное состояние соответствует равновесному распределению $p_{\uparrow}(\infty) = p_{\downarrow}(\infty) = 1/2$, при котором намагниченность обращается в нуль. Время релаксации равно $1/2w$.

2. Двухуровневая система, находящаяся в контакте с термостатом

Частоты переходов Γ_{12} и Γ_{21} между двумя уровнями, разделенными энергетическим интервалом ε , пропорциональны числу имеющихся конечных состояний, причем конечное состояние определяется микросостоянием полной системы, состоящей из рассматриваемой двухуровневой системы и термостата. Число состояний термостата задается статистическим весом $\Omega(E)$. При переходе энергия термостата меняется на ε

(от E_0 до $E_0 - \varepsilon$). Считая, что $\varepsilon \ll E_0$, получаем с учетом формулы Планка для энтропии $S = k \ln \Omega$

$$\begin{aligned} \ln \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{21}} &= \ln \frac{\Omega(E_0)}{\Omega(E_0 - \varepsilon)} = \ln \Omega(E_0) - \ln \Omega(E_0 - \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial E} \ln \Omega(E) \big|_{E_0} \varepsilon = \\ &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{S}{k} \right)_{E_0} = \frac{\varepsilon}{kT}, \quad \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{21}} = e^{\varepsilon/kT}. \end{aligned}$$

Частоты переходов не равны, поскольку учитываются степени свободы термостата.

Равновесие ($dp_1/dt = -dp_2/dt = 0$) имеет место, когда

$$\Gamma_{12} p_2^0 - \Gamma_{21} p_1^0 = 0, \quad \frac{p_1^0}{p_2^0} = \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{21}} = e^{\varepsilon/kT}$$

(каноническое распределение),

$$p_1^0 = \left[e^{-\varepsilon/kT} + 1 \right]^{-1}, \quad p_2^0 = \left[e^{\varepsilon/kT} + 1 \right]^{-1}.$$

При $\varepsilon \gg kT$ приближение к равновесию ($\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = w$) описывается экспоненциальной функцией

$$p_1(t) - p_2(t) = p_1^0 - p_2^0 + \Delta p(t),$$

$$\Delta p(t) = \Delta p(0) e^{-2wt}.$$

3. Энтропия неравновесного состояния

Переход к сокращенному описанию неравновесных состояний позволяет ввести соответствующую им энтропию. Полный статистический оператор ρ не может быть использован для определения энтропии (как это принято в теории равновесного состояния $S = -\langle k \ln \rho \rangle$), т.к. среднее значение логарифма полного статистического оператора $\langle \ln \rho \rangle$ не будет изменяться со временем.

Действительно, если гамильтониан H_t системы явно зависит от времени, то уравнение Лиувилля допускает формальное интегрирование с помощью оператора эволюции $U(t, 0)$ - унитарного оператора, удовлетворяющего уравнению

$$i\hbar \frac{\partial U(t, 0)}{\partial t} = H_t U(t, 0),$$

где

$$U^+(t_1, t_2) = U^{-1}(t_1, t_2),$$

и начальному условию

$$U(0, 0) = 1.$$

Полный статистический оператор в момент времени t имеет вид

$$\rho(t) = U(t, 0) \rho(0) U^{-1}(t, 0).$$

Тогда для энтропии имеем

$$\begin{aligned} S(t) &= -sp \{ \rho(t) \ln \rho(t) \} = \ln (U(t, 0) \rho(0) U^{-1}(t, 0)) \\ &= -sp \{ U(t, 0) \rho(0) U^{-1}(t, 0) U(t, 0) \ln (\rho(0) U^{-1}(t, 0)) \}, \end{aligned}$$

так как

$$\ln (U(t, 0) \rho(0) U^{-1}(t, 0)) = U(t, 0) \ln (\rho(0)) U^{-1}(t, 0),$$

что справедливо вообще для любой функции от оператора и может быть доказано разложением в ряд Тейлора. Учитывая, что

$$U(t, 0) U(t, 0)^{-1} = 1$$

и что операторы под знаком шпура допускают циклические перестановки, получим

$$S(t) = -sp \{ \rho(0) \ln \rho(0) \} = S(0).$$

Однако, если принять за энтропию неравновесного состояния среднее значение логарифма его медленно меняющейся или релевантной части $P\rho(t)$, представляющей сокращенное описание

$$S(t) = -\langle \ln \rho_1(t) \rangle = -\langle \ln P\rho(t) \rangle,$$

то такая энтропия уже может возрасть, поскольку ρ_1 удовлетворяет обобщенному кинетическому уравнению, а не уравнению Лиувилля.

В частном случае, когда проектирование означает взятие диагонального элемента в представлении гамильтониана без взаимодействия, энтропия равна

$$S(t) = -\langle \ln P\rho(t) \rangle = -sp \rho(t) \ln P\rho(t) = -\sum_n \rho_{nn}(t) \ln \rho_{nn}(t), \quad (28)$$

$$sp \rho(t) = \sum_n \rho_{nn}(t) = 1. \quad (29)$$

Покажем, что если ρ_{nn} удовлетворяет уравнению Паули, то энтропия (28) может только возрасть, и лишь в случае равновесия оставаться постоянной.

Продифференцируем (28) по времени

$$\dot{S} = -\sum_n (\ln \rho_{nn} + 1) \dot{\rho}_{nn} = -\sum_n \ln \rho_{nn} \dot{\rho}_{nn}, \quad (30)$$

так как второй член обращается в нуль вследствие условия нормировки (29).

Подставляя в (30) ρ_{nn} из уравнения Паули (27), получим

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{mn} \frac{2\pi}{\hbar^2} |H_{nm}^1|^2 \delta\left(\frac{E_n - E_m}{\hbar}\right) \ln \rho_{nn} (\rho_{mm} - \rho_{nn}). \quad (31)$$

Используя симметрию коэффициентов под знаком суммы и переставляя индексы суммирования, запишем (31) в виде

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{mn} \frac{2\pi}{\hbar^2} |H_{nm}^1|^2 \delta\left(\frac{E_n - E_m}{\hbar}\right) (\ln \rho_{nn} - \ln \rho_{mm}) (\rho_{mm} - \rho_{nn}).$$

Каждое из слагаемых этой суммы положительно или равно нулю (т.к. $\ln(x/y)(x - y) \geq 0$). Таким образом

$$\frac{dS}{dt} \geq 0,$$

т.е. энтропия возрастает (или остается постоянной).

Сделаем также еще одно замечание. Введенный нами ранее проекционный оператор P соответствует разбиению ρ на сумму двух членов, один из которых изменяется медленно, а другой - быстро. Можно также разбить ρ на произведение двух множителей, один из которых ρ_1 изменяется медленно, а другой ρ_2 - быстро:

$$\rho = \rho_1 \rho_2, \tag{32}$$

где ρ_1 представляет сокращенное описание неравновесного состояния, а ρ_2 содержит остальную несущественную информацию, т.е. описывает корреляции (аналогично в нелинейной механике колебание разбивается на произведение медленно меняющейся амплитуды и быстро меняющегося фазового множителя).

Разбиение (32) означает, что

$$\ln \rho = \ln \rho_1 + \ln \rho_2.$$

Если ввести не зависящий от времени проекционный оператор $\mathcal{P}$ то

$$\ln \rho_1 = \mathcal{P} \ln \rho, \quad \ln \rho_2 = (1 - \mathcal{P}) \ln \rho,$$

и

$$\ln \rho = \mathcal{P} \ln \rho + (1 - \mathcal{P}) \ln \rho.$$

Поскольку логарифм статистического оператора удовлетворяет тому же уравнению Лиувилля, что и сам ρ , нетрудно для $\mathcal{P} \ln \rho$, соответствующего сокращенному описанию, получить точно такое же обобщенное кинетическое уравнение Цванцига как и для $\rho_1 = P\rho$.

4. Сверхизлучение Дикке

Рассмотрим макроскопическую систему двухуровневых атомов, взаимодействующих с квантовым электромагнитным полем. Ограничимся рассмотрением случая, когда длина волны излучения двухуровневых атомов значительно превосходит размеры образца, в котором находятся излучатели (так называемая точечная модель Дикке). Рассмотрение упрощенной модели позволит не принимать во внимание эффектов распространения излучения по образцу, а также интерференции и дифракции излучения отдельных атомов. Учет указанных эффектов принципиально не изменяет самого процесса коллективного спонтанного излучения или сверхизлучения, а для образцов типа "карандаша" у которых поперечные размеры гораздо меньше длины (а именно такие образцы использовались и в многочисленных экспериментах), может быть сведен, как было показано Ресауэром и Таллетом (см. [8]), к эффективному уменьшению числа излучателей. Гамильтониан рассматриваемой модели можно записать в виде [8]

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, \quad (33)$$

$$H_A = \hbar\Omega \sum_f R_f^z$$

– гамильтониан системы свободных двухуровневых атомов (без учета кинетической энергии центров масс излучателей);

$$H_F = \sum_k \hbar\omega_k a_k^+ a_k$$

– гамильтониан свободного электромагнитного поля;

$$H_{AF} = \sum_{k,f} g_k (a_k R_f^+ + a_k^+ R_f^-)$$

– гамильтониан взаимодействия излучателей с квантовым электромагнитным полем в дипольном приближении.

Здесь $R_f^z = 1/2\sigma_f^z$ и $R_f^\pm = 1/2(\sigma_f^x \pm i\sigma_f^y)$ – квазиспиновые операторы

для f -го атома, выражающиеся через матрицы Паули и удовлетворяющие коммутационным соотношениям паулевского типа

$$[R_f^\pm, R_{f'}^\mp] = \pm \delta_{ff'} 2R_f^z,$$

$$[R_f^\pm, R_{f'}^z] = \mp \delta_{ff'} R_f^\pm;$$

$a_k^+(a_k)$ - операторы рождения (уничтожения) фотона моды k (с волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией λ); g_k - константа диполь-фотонного взаимодействия.

Пусть ρ – статистический оператор всей системы, удовлетворяющий уравнению Лиувилля (1) с гамильтонианом (33). Введем редуцированные статистические операторы атомной подсистемы и электромагнитного поля $\rho_A = sp_F \rho$, $\rho_F = sp_A \rho$. Ограничимся рассмотрением проблемы спонтанного излучения системы при отсутствии в начальный момент времени макроскопической поляризации в атомной подсистеме. Тогда начальное состояние можно выбрать в следующем виде

$$\rho(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_F(0),$$

где $\rho_F(0) = |0\rangle \langle 0|$. Перейдем к представлению взаимодействия с помощью унитарного преобразования

$$U = \exp[-i(H_A + H_F)t/\hbar].$$

В представлении взаимодействия уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + i\tilde{L}(t)\tilde{\rho} = 0,$$

где $\tilde{L}(t)\tilde{\rho} = [\tilde{H}_{A,F}, \tilde{\rho}]/\hbar$ и

$$\tilde{H}_{AF} = \sum_{k,f} g_k (a_k R_f^+ e^{i\kappa_k^- t} + a_k^+ R_f^- e^{i\kappa_k^+ t}), \quad (34)$$

и $\kappa_k^\pm = \Omega \pm \omega_k$ и $\tilde{X}(t) = U^{-1}(t) X U(t)$ - оператор в представлении взаимодействия.

При записи формулы (34) мы учли, что

$$e^{i\hbar\omega_k a_k^+ a_k} a_k^+ e^{-i\hbar\omega_k a_k^+ a_k} = e^{i\hbar\omega_k} a_k^+,$$

$$e^{i\hbar\Omega R_f^z} R_f^+ e^{-i\hbar\Omega R_f^z} = e^{i\hbar\Omega} R_f^+.$$

Вводя проекционный оператор P , мы можем переписать обобщенное уравнение Цванцига (6) в представлении взаимодействия

$$\begin{aligned} \frac{\partial(P\tilde{\rho})}{\partial t} = & -iP\tilde{L}(t)P\tilde{\rho} - \\ & -P\tilde{L}(t) \int_0^t ds \exp \left[i(1-P) \int_{t-s}^t \tilde{L}(t') dt' \right] (1-P)\tilde{L}(t-s)P\tilde{\rho}(t-s). \end{aligned} \quad (35)$$

Выберем проекционный оператор в виде $P = |0\rangle\langle 0| sp_F$. Нетрудно заметить, что этот оператор действительно является проекционным оператором, т.е. $P^2 = P$. При вычислении операции sp_F по полевым переменным от статистического оператора полной системы мы получаем редуцированный статистический оператор атомной подсистемы ρ_A

$$\rho_A = sp_F \rho,$$

который позволяет вычислять средние значения для операторов, действующих на переменные атомной подсистемы

$$\begin{aligned} \langle X_A(t) \rangle &= sp_{A,F} X_A \rho(t) = sp_A X_A sp_F \rho(t) = \\ &= sp_F X_A \rho_A(t) = sp_F \tilde{X}_A(t) \tilde{\rho}_A(t). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $P\tilde{L}(t)P = 0$. Тогда обобщенное кинетическое уравнение в представлении взаимодействия примет вид

$$\begin{aligned} & |0\rangle\langle 0| \frac{\partial \tilde{\rho}_A}{\partial t} \\ = & -|0\rangle\langle 0| \int_0^t ds \quad sp_F \tilde{L}(t) \exp \left[i(1-P) \int_{t-s}^t \tilde{L}(t') dt' \right] \tilde{L}(t-s) |0\rangle\langle 0| \tilde{\rho}_A(t-s). \end{aligned} \quad (36)$$

Будем искать решение уравнения (36) с точностью до членов второго порядка малости по взаимодействию. Подинтегральное выражение уже содержит в качестве множителей операторы $\tilde{L}(t)$ и $\tilde{L}(t-s)$, пропорциональные малой константе взаимодействия. Поэтому в разложении

$$\exp \left[i(1-P) \int_{t-s}^t \tilde{L}(t') dt' \right]$$

по малой константе взаимодействия мы оставим только первое слагаемое, т.е. 1.

Теперь мы можем вычислить подинтегральное выражение в правой части уравнения (36). Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{L}(t-s) |0\rangle \langle 0| \tilde{\rho}_A(t-s) &= [\tilde{H}_{A,F}(t-s), |0\rangle \langle 0| \tilde{\rho}_A(t-s)]/\hbar = \\ &= \left\{ \tilde{H}_{A,F}(t-s) |0\rangle \langle 0| \tilde{\rho}_A(t-s) - \tilde{\rho}_A(t-s) |0\rangle \langle 0| \tilde{H}_{A,F}(t-s) \right\} / \hbar \end{aligned}$$

(мы учли, что редуцированный статистический оператор $\tilde{\rho}_A(t-s)$ коммутирует с оператором $|0\rangle \langle 0|$, действующим лишь на переменные поля).

Учитывая известные свойства операторов рождения и уничтожения фотонов

$$a_k^+ |0\rangle = |1_k\rangle, \quad a_k |0\rangle = 0,$$

где $|1_k\rangle$ - состояние электромагнитного поля с одним фотоном в моде k , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{L}(t-s) |0\rangle \langle 0| \tilde{\rho}_A(t-s) &= \sum_k g_k / \hbar \left\{ e^{-i\kappa_k(t-s)} R^- |1_k\rangle \langle 0| \tilde{\rho}_A(t-s) - \right. \\ &\quad \left. - e^{i\kappa_k(t-s)} \tilde{\rho}_A(t-s) |0\rangle \langle 1_k| R^+ \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь мы ввели коллективные атомные операторы

$$R^\pm = \sum_f R_f^\pm, \quad R^z = \sum_f R_f^z.$$

Поддействуем теперь на выражение (37) оператором $\tilde{L}(t)$

$$\begin{aligned} \tilde{L}(t) \tilde{L}(t-s) |0\rangle \langle 0| \tilde{\rho}_A(t-s) &= \\ &= \sum_{kk'} g_k g_{k'} / \hbar^2 \left\{ e^{i\kappa_k t} e^{-i\kappa_{k'}(t-s)} |0\rangle \langle 0| R^+ R^- \tilde{\rho}_A(t-s) \delta_{kk'} + \right. \\ &\quad + e^{i\kappa_k t} e^{-i\kappa_{k'}(t-s)} R^- R^- \tilde{\rho}_A(t-s) [|2_k\rangle \langle 0| \delta_{kk'} + \\ &\quad + | \dots, 1_k, \dots, 1_{k'}, \dots \rangle \langle 0| (1 - \delta_{kk'})] - \\ &\quad - e^{-i\kappa_k t} e^{i\kappa_{k'}(t-s)} R^- \tilde{\rho}_A(t-s) R^+ |1_k\rangle \langle 1_{k'}| \delta_{kk'} - \\ &\quad - e^{i\kappa_k t} e^{-i\kappa_{k'}(t-s)} R^- \tilde{\rho}_A(t-s) R^+ |1_{k'}\rangle \langle 1_k| \delta_{kk'} + \\ &\quad + e^{i\kappa_k t} e^{-i\kappa_{k'}(t-s)} \tilde{\rho}_A(t-s) R^+ R^- [|0\rangle \langle 2_k| \delta_{kk'} + \end{aligned}$$

$$+ |0\rangle\langle\ldots, 1_k, \ldots, 1_{k'}, \ldots| (1 - \delta_{kk'}) + \\ + e^{-i\kappa_k t} e^{i\kappa_{k'}(t-s)} \tilde{\rho}_A(t-s) R^+ R^- |0\rangle\langle 0| \delta_{kk'} \}.$$

При вычислении операции sp_F по переменным поля отличный от нуля вклад дадут лишь слагаемые, содержащие диагональные проекторы $|0\rangle\langle 0|$ и $|1_k\rangle\langle 1_k|$.

В результате имеем

$$sp_A \tilde{L}(t) \tilde{L}(t-s) |0\rangle\langle 0| \tilde{\rho}_A(t-s) = \\ = \sum_k g_k^2 / \hbar^2 \{ e^{i\kappa_k s} R^+ R^- \tilde{\rho}_A(t-s) - e^{-i\kappa_k s} R^- \tilde{\rho}_A(t-s) R^+ + \\ + e^{-i\kappa_k s} \tilde{\rho}_A(t-s) R^+ R^- e^{i\kappa_k s} R^- \tilde{\rho}_A(t-s) R^+ \\ = D^+(s) [R^+, R^- \tilde{\rho}_A(t-s)] + D^-(s) [\tilde{\rho}_A(t-s), R^+ R^-],$$

где

$$D^\pm(s) = \sum_k g_k^2 / \hbar^2 e^{\pm i\kappa_k s}.$$

Тогда обобщенное кинетическое уравнение для редуцированного статистического оператора примет вид

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_A(t)}{\partial t} = \int_0^t ds \{ D^+(s) [R^+, R^- \tilde{\rho}_A(t-s)] + D^-(s) [\tilde{\rho}_A(t-s), R^+ R^-] \}. \quad (38)$$

Для вычисления в явном виде интеграла по времени в правой части уравнения (38) во втором порядке по взаимодействию воспользуемся марковским приближением

$$\tilde{\rho}_A(t-s) \approx \tilde{\rho}_A(t),$$

т.е. заменим статистический оператор на его медленно меняющуюся амплитуду.

В марковском приближении уравнение (38) есть

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_A(t)}{\partial t} = \Gamma/2 [R^+, R^- \tilde{\rho}_A(t)] + \Gamma/2 [\tilde{\rho}_A(t), R^+ R^-], \quad (39)$$

где

$$\Gamma = 2 \int_0^\infty D^\pm(s) ds = \sum_k g_k^2 / \hbar^2 \delta(\omega_k - \Omega)$$

(для времен $t \gg 1/\Omega$, для которых только и справедливо обобщенное уравнение Цванцига, верхний предел в интеграле по s можно заменить на ∞). Коэффициент $\Gamma = 1/\tau_0$ совпадает с вероятностью спонтанного излучения изолированного двухуровневого атома [16] (τ_0 - время спонтанного излучения изолированного атома).

Перейдем в уравнении (39) к представлению Шредингера. Воспользовавшись очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_A(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ e^{-i H_A t/\hbar} \tilde{\rho}(t) e^{i H_A t/\hbar} \right\} = \\ &= i/\hbar [H_A, \rho_A(t)] + e^{i H_A t/\hbar} \frac{\partial \tilde{\rho}_A(t)}{\partial t} e^{i H_A t/\hbar}, \end{aligned}$$

получаем

$$\frac{\partial \rho_A(t)}{\partial t} = i \Omega [R^z, \rho_A(t)] + \Gamma/2 [R^+, R^- \rho_A(t)] + \Gamma/2 [\rho_A(t), R^+ R^-]. \quad (40)$$

Исследуем теперь с помощью уравнения (40) кинетику атомной подсистемы. Вычислим среднюю полуразность населенностей $\langle R^z(t) \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \dot{R}^z(t) \rangle &= sp_A \{ R^z \dot{\rho}_A(t) \} = -\Gamma sp_A \{ R^+ R^- \dot{\rho}_A(t) \} = \\ &= -\Gamma sp_A \{ R^+(t) R^-(t) \rho_A(0) \} = -\Gamma \langle R^+(t) R^-(t) \rangle = \\ &= -\Gamma \left(\frac{N}{2} + R^z(t) \right) - \Gamma S(t), \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$\langle \dots \rangle = sp(\dots \rho_A(0)), \quad S(t) = \sum_{f \neq f'} \langle R_f^+(t) R_{f'}^-(t) \rangle.$$

Уравнение для $\langle R^z(t) \rangle$ получилось незамкнутым. Для коррелятора второго порядка из (40) можно получить следующее уравнение

$$\dot{S}(t) = 2\Gamma \sum_{f, f', f'' (f \neq f')} \langle R_f^z(t) R_{f'}^+(t) R_{f''}^-(t) \rangle.$$

Для тройного коррелятора с использованием (40) можно получить новое уравнение и т.д. Обычно в теории сверхизлучения используют расщепления корреляторов второго порядка вида

$$\langle R_f^z R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle = \langle R_f^z \rangle \langle R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle. \quad (42)$$

В рамках расщепления (42) для корреляторов первого и второго порядков получаем замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} \langle \dot{R}^z(t) \rangle &= -\Gamma \left(\frac{N}{2} + R^z(t) \right) - \Gamma S(t), \\ \dot{S}(t) &= 2\Gamma S. \end{aligned} \quad (43)$$

Найдем приближенное решение системы уравнений (43). Предположим, что в начальном состоянии все атомы возбуждены ($\langle R^z(0) \rangle = N/2$), но макроскопическая поляризация отсутствует, т.е. дипольные моменты атомов не скоррелированы ($S(0) = 0$). В этом случае второе слагаемое будет давать вклад в уравнение (43) только на достаточно больших временах $t \sim t_D$, где t_D - называется временем задержки. Коррелятор S на временах порядка времени задержки пропорционален квадрату числа излучателей N^2 , в то время как $\langle R^z \rangle$ пропорционально N . Тогда для времен $t \sim t_D$ система уравнений (43) принимает вид

$$\langle \dot{R}^z \rangle \approx -\Gamma S, \quad \dot{S} = 2\Gamma S.$$

Откуда $\langle R^z \rangle^2 + S = \text{const} = N^2/4$ и $S = N^2/4 - \langle R^z \rangle^2$. Тогда для $\langle R^z \rangle$ кинетическое уравнение превращается в замкнутое уравнение

$$\langle \dot{R}^z \rangle = -\Gamma (N^2 + \langle R^z \rangle) - \Gamma (N^2/4 - \langle R^z \rangle^2). \quad (44)$$

Решение уравнения (44) есть

$$\langle R^z(t) \rangle = N/2 [1/N - (1 + 1/N) \tanh \{(t - t_D)/2\tau_R\}]. \quad (45)$$

где $\tau_R = 1/\Gamma(1 + N)$ - время коллективного излучения (сверхизлучения) сверхизлучательного импульса. Имея решение (45), нетрудно вычислить интенсивность сверхизлучательного импульса $I(t)$. Действительно, из закона сохранения энергии полной системы (атомы + фотоны):

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{d}{dt} \sum_k \hbar \omega_k \langle a_k^+ a_k \rangle = -\hbar \Omega \langle \dot{R}^z(t) \rangle = \\ &= \frac{\hbar \Omega}{4\tau_R} (N^2 + 1)^2 \text{sech}^2 \frac{t - t_D}{2\tau_R}. \end{aligned}$$

Главной особенностью интенсивности является то, что на временах $t \sim t_D$ она пропорциональна не числу излучателей N (как при обычном спонтанном излучении), а квадрату числа излучателей N^2 , что свидетельствует о коллективном когерентном характере излучения. Такое явление получило название сверхизлучения Дикке.

5. Динамика моды квантового электромагнитного поля в неидеальном резонаторе

Рассмотрим теперь квантовую систему, которая состоит из подсистемы с небольшим числом степеней свободы (статистический оператор ρ_S) и термостата в состоянии термодинамического равновесия с чрезвычайно большим числом степеней свободы (статистический оператор ρ_T). Между подсистемами существует слабое взаимодействие. Если такая система выведена из положения равновесия, то можно считать, что в процессе эволюции состояние термостата не изменяется, т.е.

$$\rho_T(t) = \rho_T(0).$$

В качестве примера указанной системы можно рассмотреть моду квантового (лазерного) электромагнитного излучения в неидеальном резонаторе, который выступает в качестве термостата. Гамильтониан такой модели имеет вид

$$H = H_S + H_T + H_{ST}. \quad (46)$$

Здесь $H_S = \hbar\Omega a^+ a$ - гамильтониан моды поля в резонаторе с собственной частотой Ω , $a^+(a)$ - оператор рождения (уничтожения) фотона моды поля.

H_B - гамильтониан термостата (резонатора), явный вид которого знать нет необходимости (вид гамильтониана будет определять значение константы затухания в кинетическом уравнении для статистического оператора поля).

Пусть известны собственные значения гамильтониана H_B

$$H_B |n\rangle = E_n |n\rangle$$

и пусть статистический оператор термостата в равновесном состоянии соответствует каноническому распределению Гиббса

$$\rho_T = Q^{-1} e^{-H_B/kT}, \quad (47)$$

где статистическая сумма

$$Q = \text{sp}_T e^{-H_B/kT} = \sum_n e^{-E_n/kT}.$$

Слабое взаимодействие между подсистемой и термостатом выберем в виде

$$H_{ST} = \lambda(a^+ + a) B,$$

где B - оператор, действующий только на переменные термостата и коммутирующий с операторами a^+ и a , а λ - малая константа взаимодействия.

Введем для подсистемы S редуцированный статистический оператор

$$\rho_S(t) = \text{sp}_T \rho(t),$$

где операция sp_T берется по переменным термостата. Статистический оператор $\rho_S(t)$ позволяет вычислить среднее значение для любого оператора, зависящего от переменных подсистемы S

$$\langle X_S \rangle = \text{sp}_{S,T} X_S \rho(t) = \text{sp}_S X_S \rho_S(t).$$

Начальное состояние рассматриваемой системы описывается статистическим оператором $\rho(0)$

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_T,$$

где ρ_T имеет вид (47).

Перейдем для описания динамики системы как и в предыдущем примере к представлению взаимодействия, вводя унитарный оператор $U(t)$

$$U(t) = \exp[-i(H_S + H_T)t].$$

В представлении взаимодействия гамильтониан системы (46) примет вид

$$\tilde{H}_{ST} = \lambda (e^{i\Omega t} a^+ + e^{-i\Omega t} a) \tilde{B}(t). \quad (48)$$

Здесь мы учли, что

$$e^{i\hbar\Omega a^+ a} a^+ e^{-i\hbar\Omega a^+ a} = e^{i\hbar\Omega} a^+$$

и ввели обозначение

$$\tilde{B}(t) = e^{iH_T/\hbar t} B e^{-iH_T/\hbar t}.$$

Матричные элементы оператора $\tilde{B}(t)$ имеют вид

$$\tilde{B}(t)_{mn} = e^{i\omega_{mn} t} B_{mn}, \quad (49)$$

где $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$.

Обобщенное кинетическое уравнение для рассматриваемой системы в представлении взаимодействия можно записать в виде (35). Выберем проекционный оператор

$$P = \rho_T sp_T = Q^{-1} \exp(-H_T/kT) sp_T$$

Тогда уравнение (35) во втором порядке по взаимодействию для рассматриваемой модели примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_S}{\partial t} &= - \int_0^t ds sp_T \tilde{L}(t) \tilde{L}(t-s) \rho_T \tilde{\rho}_S(t-s) = \\ &= - \int_0^t dt_1 sp_T \tilde{L}(t) \tilde{L}(t_1) \rho_T \tilde{\rho}_S(t_1). \end{aligned} \quad (50)$$

где $\tilde{L}(t) = [\tilde{H}_{ST}, \dots] / \hbar$ - оператор Лиувилля в представлении взаимодействия.

Для $\rho(t)$ мы имеем задачу Коши с начальным условием при $t_0 = 0$ следующего вида $\rho(t_0) = \rho_1(t_0)$. При такой постановке задачи выделяется некоторый начальный момент времени t_0 для которого отсутствуют корреляции. От такого произвольно выделенного начального момента времени можно избавиться переходя к пределу $t_0 \rightarrow -\infty$. Предполагается, что в этом пределе влияние начального момента времени t_0 , а именно влияние специального выбора $\rho(t)$ в момент t_0 ($\rho(t_0) = \rho_1(t_0)$), на статистический оператор исключается.

Если нижеследующие пределы существуют, справедливо соотношение

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} f(t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon t'} f(t') dt' = f(0) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon t'} f'(t') dt'$$

или более слабое соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon t'} f'(t') dt' = f(0) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon t'} f''(t') dt'$$

(теорема Абеля). Переходя в обобщенном кинетическом уравнении (50) к пределу $t_0 \rightarrow -\infty$ с учетом этих соотношений, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}_S}{\partial t} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^t dt_1 e^{\varepsilon(t_1-t)} sp_T \tilde{L}(t) \tilde{L}(t_1) \rho_T \tilde{\rho}_S(t_1) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty ds e^{-\varepsilon s} sp_T \tilde{L}(t) \tilde{L}(t-s) \rho_T \tilde{\rho}_S(t-s). \end{aligned} \quad (51)$$

Теперь вычислим подинтегральное выражение в правой части уравнения (51). Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{L}(t) \tilde{L}(t-s) \rho_T \tilde{\rho}_S(t-s) &= \left\{ \tilde{H}_S(t) \tilde{H}_{S,F}(t-s) \rho_S \tilde{\rho}_S(t-s) - \right. \\ &- \tilde{H}_{S,T}(t-s) \rho_T \tilde{\rho}_S(t-s) \tilde{H}_{S,T} - \tilde{H}_{S,T}(t) \tilde{\rho}_T \tilde{\rho}_A(t-s) \tilde{H}_{S,T}(t-s) + \\ &\left. + \rho_T \tilde{\rho}_S(t-s) \tilde{H}_{S,T}(t-s) \tilde{H}_{S,T}(t) \right\} / \hbar^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Подставляя в формулу (52) явный вид гамильтониана взаимодействия (48), мы получим в результирующем выражении два типа слагаемых, содержащих произведения бозевских операторов $a^+ a$ ($a a^+$) и $a a$ ($a^+ a^+$). Слагаемые, содержащие произведения типа $a^+ a^+$ или $a a$ являются быстро осциллирующими во времени и называются нерезонансными членами, а слагаемые типа $a^+ a$ или $a a^+$ являются медленно меняющимися функциями времени и называются резонансными членами. В этом свойстве резонансных и нерезонансных членов легко можно убедиться, если использовать представление Гейзенберга. В этом представлении операторы являются функциями времени, а статистические операторы от времени не зависят. В нулевом по взаимодействию приближении операторы a^+ и a осциллируют на частоте Ω

$$a(t) = a(0)e^{-i\Omega t}, \quad a^+(t) = a^+(0)e^{i\Omega t}.$$

Тогда в нулевом приближении произведения $a^+ a$ и $a a^+$ вообще от времени не зависят, а произведения $a^+ a^+$ и $a a$ - осциллируют на удвоенной частоте 2Ω . При учете взаимодействия резонансные члены будут медленно меняющимися функциями времени, а нерезонансные по прежнему останутся быстроосциллирующими.

Вычисление интеграла в правой части уравнения (51) производится по временам большим времени осцилляций моды $\sim 1/\Omega$ и поэтому вклад в интеграл нерезонансных слагаемых будет равен нулю.

Оставляя в (52) лишь резонансные слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} & \tilde{L}(t) \tilde{L}(t-s) \rho_T \tilde{\rho}_S(t-s) = \\ & = \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \left\{ \tilde{B}(t) \tilde{B}(t-s) \rho_T [e^{i\Omega s} a^+ a + e^{-i\Omega s} a a^+] \tilde{\rho}_S(t-s) - \right. \\ & \tilde{B}(t-s) \rho_T \tilde{B}(t) [e^{-i\Omega s} a^+ \tilde{\rho}_S(t-s) a + e^{i\Omega s} a \tilde{\rho}_S(t-s) a^+] - \\ & - \tilde{B}(t) \rho_T \tilde{B}(t-s) [e^{i\Omega s} a^+ \tilde{\rho}_S(t-s) a + e^{-i\Omega s} a \tilde{\rho}_S(t-s) a^+] + \\ & \left. + \rho_T \tilde{B}(t-s) \tilde{B}(t) \tilde{\rho}_S(t-s) [e^{-i\Omega s} a^+ a + e^{i\Omega s} a a^+] \right\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Вычислим теперь sp по переменным термостата от выражения (53). Учитывая, что под a также принимая во внимание формулу (49) для матричных элементов оператора B , получим

$$\begin{aligned} & sp_T \tilde{B}(t) \tilde{B}(t-s) \rho_T = sp_T \tilde{B}(t-s) \rho_T \tilde{B}(t) = \\ & = \sum_{mn} |B_{nm}|^2 e^{i\omega_{mn}s} Q^{-1} e^{-E_n/kT}, \\ & sp_T \rho_T \tilde{B}(t-s) \tilde{B}(t) = sp_T \tilde{B}(t) \rho_T \tilde{B}(t-s) = \\ & = \sum_{mn} |B_{nm}|^2 e^{-i\omega_{mn}s} Q^{-1} e^{-E_n/kT}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & sp_T \tilde{L}(t) \tilde{L}(t-s) \rho_T \tilde{\rho}_S(t-s) = \\ & = \sum_{mn} \frac{\lambda^2}{\hbar^2} |B_{nm}|^2 Q^{-1} e^{-E_n/kT} \left\{ e^{-i(\omega_{mn}+\Omega)s} [a^+, a \tilde{\rho}_S(t-s)] + \right. \\ & + e^{i(\omega_{mn}-\Omega)s} [a, a^+ \tilde{\rho}_S(t-s)] + e^{-i(\omega_{mn}-\Omega)s} [\tilde{\rho}_S(t-s) a, a^+] + \\ & \left. + e^{-i(\omega_{mn}+\Omega)s} [\tilde{\rho}_S(t-s) a^+, a] \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение в кинетическое уравнение (51), получим окончательно с учетом формулы Сохоцкого

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty ds e^{-\varepsilon s} e^{-i(\omega_{mn} + \Omega)s} = i \mathcal{P} \frac{1}{\omega_{mn} + \Omega} + \pi \delta(\omega_{mn} + \Omega)$$

в представлении Шредингера (переход от представления взаимодействия выполняется аналогично (40)) кинетическое уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_S}{\partial t} - \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho_S] = & -\nu [\rho_S a^+, a] - \nu [a^+, a \rho_S] - \\ & -\delta [\rho_S a, a^+] - \delta [a, a^+ \rho_S]. \end{aligned} \quad (54)$$

При вычислении коэффициентов ν и δ в уравнении (54) суммирование по n, m можно провести путем перехода к интегрированию с использованием плотности состояний термостата $D(E)$:

$$\begin{aligned} \sum_{mn} (...) = & \int_0^\infty dE_n D(E_n) \int_0^\infty dE_m D(E_m) (...) = \\ & \int_0^\infty d(\hbar\omega) \int_{\hbar\omega/2}^\infty dE D(E + \hbar\omega/2) d(E - \hbar\omega/2) (...) + \\ & + \int_{-\infty}^0 d(\hbar\omega) \int_{-\hbar\omega/2}^\infty dE D(E + \hbar\omega/2) d(E - \hbar\omega/2) (...) \end{aligned}$$

С учетом того, что

$$\mathcal{P} \int_0^\infty d\omega \omega C(\omega) \frac{e^{-\hbar\omega/kT}}{\omega^2 - \Omega^2} 2\hbar \left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^2 / Q \approx 0,$$

где

$$\begin{aligned} C(\omega) = & e^{\hbar\omega/2kT} \int_{\hbar\omega/2}^\infty dE D(E + \hbar\omega/2) d(E - \hbar\omega/2) \times \\ & \times |B(E + \hbar\omega/2, E - \hbar\omega/2)|^2 e^{-E/kT}, \end{aligned}$$

получаются следующие выражения для коэффициентов ν и δ

$$\begin{aligned} \nu = & Q^{-1} \pi \hbar \left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^2 C(\Omega), \\ \delta = & e^{-\hbar\Omega/kT} \nu. \end{aligned}$$

Правую часть уравнения (54) для ρ_S , которая называется диссипативным членом, нельзя представить в форме $[H, \rho_S]$, так что влияние

термостата не может быть выражено через некоторый эффективный гамильтониан. Из-за наличия диссипативного члена уравнение для ρ_S оказывается неинвариантным относительно обращения времени и, следовательно, описывает необратимый процесс.

Исследуем на основе уравнения (54) кинетику средних

$$\langle a^+(t) \rangle = \text{sp}_S \{ \rho_S(t) a^+ \}$$

и

$$\langle n(t) \rangle = \text{sp}_S \{ \rho_S(t) a^+ a \},$$

где $n = a^+ a$ – оператор числа фотонов в моде квантового поля.

Уравнения для этих величин легко получаются из (54)

$$\begin{aligned} \frac{d \langle a^+(t) \rangle}{dt} &= (i\Omega - (\nu - \delta)) \langle a^+(t) \rangle, \\ \frac{d \langle n(t) \rangle}{dt} &= 2\delta - 2(\nu - \delta) \langle n(t) \rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

Решения уравнений (100) есть

$$\begin{aligned} \langle a^+(t) \rangle &= \langle a^+(0) \rangle e^{i\Omega t - (\nu - \delta)t}, \\ \langle n(t) \rangle &= \langle n(0) \rangle e^{-2(\nu - \delta)t} + \frac{\delta}{\nu - \delta} \left(1 - e^{-2(\nu - \delta)t} \right). \end{aligned}$$

Постоянные, характеризующие влияние термостата, можно интерпретировать следующим образом. Величина $\nu - \delta$ соответствует коэффициенту поглощения фотонов, а функция

$$\frac{\nu}{\nu - \delta} = \left[e^{\hbar\Omega/kT} - 1 \right]^{-1} = n_B(T)$$

представляет собой распределение Бозе.

Заключение

Метод проекционного оператора, как показано в пособии, представляет собой эффективный способ описания неравновесных состояний в макроскопических системах. На его основе удастся успешно решать различные задачи неравновесной статистической механики, квантовой оптики и др. В настоящем пособии рассмотрен достаточно широкий круг проблем, касающихся как основ, так и конкретной техники применения метода проекционного оператора в различных задачах. Вместе с тем в силу ограниченности объема пособия остались почти не затронутыми некоторые важные вопросы, в частности проблема выбора начальных условий для обобщенного кинетического уравнения. Указанная проблема кратко обсуждалась в Разделе 6 при выводе кинетического уравнения для фотонной моды. Подробное обсуждение данного вопроса можно найти в Сделаем еще ряд замечаний, касающихся данного вопроса (см.[1]).

В настоящем пособии нами не рассматривался также и вопрос о связи метода проекционного оператора с другими подходами, используемыми при описании неравновесных процессов. Обсуждению указанного вопроса будет посвящена вторая часть пособия.

Библиографический список

1. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
2. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Избранные труды. Т.2. Киев: Наукова Думка, 1970. 522 с.
3. Zwanzig R. Ensemble Method in the Theory of Irreversibility // Journ. Chem. Phys. 1960. V.33. N 5. P.1338.
4. Зубарев Д.Н. Современные методы статистической теории неравновесных процессов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т.15. М.: ВИНТИ, 1980. С.131.
5. Зубарев Д.Н. Двухвременные температурные функции Грина в статистической физике // УФН. 1960. Т.71. С.71.
6. Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. М.: Наука, 1975. 546 с.
7. Репке Г. Неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1990. 320 с.
8. Боголюбов Н.Н.(мл.), Шумовский А.С. Сверхизлучение. Дубна: ОИЯИ, 1987. 185 с.

Учебное издание

Башкиров Евгений Константинович

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРОЕКЦИОННОГО ОПЕРАТОРА В КВАНТОВОЙ ОПТИКЕ

Публикуется в авторской редакции

Титульное редактирование *Т. И. Кузнецовой*

Компьютерная верстка, макет *Н. П. Бариновой, Е. К. Башкирова*

Подписано в печать 01.10.2014. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Усл. печ. л. 2; уч.-изд.л. 2,25. Гарнитура Times. Тираж 100 экз. Заказ № 2540.

Издательство «Самарский университет» 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Тел. 8(846) 334-54-23

Отпечатано на УОП СамГУ