

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

В.Н. БЕЛОЗЕРЦЕВ, Е.В. БЕЛЯЕВА, В.В. БИРЮК

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2006

УДК 532.533

ББК 22.25

Б43



**Инновационная образовательная программа
«Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных технологий»**

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. П. Данильченко,
д-р техн. наук, проф. А. Н. Первышин

Авторы: *В.Н. Белозерцев, Е.В. Беляева, В.В. Бирюк, А.А. Диденко, А.Д. Кленина,
С.В. Лукачев, С.Г. Матвеев, И.В. Рабкесов, А.П. Толстоногов, А.М. Цыганов,
И.В. Чет, С.Ю. Чичкин*

Белозерцев В.Н.

Б43 **Основы механики жидкости** : учеб. пособие / *В.Н. Белозерцев и др.*
– Самара : Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2006. – 324 с : ил.

ISBN 5-7883-0481-4

Изложены основы механики жидкости, лабораторный практикум, в том числе и с использованием информационных технологий, приведен краткий сборник типовых задач, что позволяет изучать данную дисциплину, или ее отдельные размеры, как традиционным путем, так и самостоятельно. Содержание пособия соответствует курсу лекций, читаемому авторами в СГАУ им. С.П. Королева, включает в себя элементы модульно-рейтинговой системы обучения.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям 160301 - Авиационные двигатели и установки, 160302 - Ракетные двигатели, 140501 - Двигатели внутреннего сгорания, 200202 - Лазерные системы в ракетной технике и космонавтике. Может быть полезно аспирантам, инженерам и научным работникам.

УДК 532.533

ББК 22.25

ISBN 5-7883-0481-4

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения и сокращения	6
Предисловие	8
Введение	10
Глава 1. Основные понятия и определения	15
1.1. Структура дисциплины	15
1.2. Общая постановка задач	15
1.3. Основные физические свойства жидкостей и газов	17
1.4. Модели жидкостей и газов	19
1.5. Силы и напряжения, действующие на жидкий объем	21
1.6. Режимы течения	23
1.7. Динамический пограничный слой	24
Глава 2. Гидростатика	25
2.1. Абсолютное и относительное равновесие жидкости	25
2.2. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости в форме Эйлера	27
2.3. Основное дифференциальное уравнение статики жидкостей и газов	30
2.4. Основная формула гидростатики	31
2.5. Сила давления жидкости на плоскую стенку	33
2.6. Закон Архимеда	35
2.7. Равновесие газов. Международная стандартная атмосфера	36
Глава 3. Кинематика	38
3.1. Основные определения кинематики	38
3.2. Методы исследования движения жидкости и газа	39
3.3. Уравнение неразрывности потока	41
3.4. Скорость движения жидкой частицы	45
Глава 4. Гидродинамика	50
4.1. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости в форме Эйлера	50
4.2. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в форме Навье–Стокса	54
4.3. Уравнение количества движения	57
4.4. Уравнение момента количества движения	60
4.5. Уравнение Бернулли	62

4.6. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости	67
Глава 5. Гидравлические потери. Истечение жидкости из отверстий и насадков	73
5.1. Потери на трение (потери по длине)	74
5.2. Местные гидравлические сопротивления	75
5.3. Истечение жидкости из отверстий и насадков	77
5.3.1. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре	77
5.3.2. Истечение жидкости через затопленное отверстие (истечение под уровень)	80
5.3.3. Струйная форсунка	82
5.4. Гидравлический расчет трубопроводов	83
5.4.1. Простой трубопровод	84
5.4.2. Сложные трубопроводы	86
5.4.3. Трубопровод с насосной подачей жидкости	88
Глава 6. Анализ размерностей и методы подобия	91
6.1. Анализ размерностей	91
6.2. Физическое подобие. Критерии подобия	96
Глава 7. Модели турбулентности	105
7.1. Механизм потери устойчивости ламинарного течения	105
7.2. Пульсационное и осредненное движение потока	106
7.3. Дополнительные (кажущиеся) турбулентные напряжения	109
7.4. Полуэмпирическая теория пути перемешивания	112
Глава 8. Математическое моделирование	119
8.1. Анализ уравнений движения жидкости и методов их решения	119
8.2. Численный эксперимент	128
8.3. Математическое моделирование и программное обеспечение	132
Список использованной литературы	141
Приложение А. Лабораторный практикум (физический)	143
<i>Лабораторная работа № 1</i>	
Конструкция, принцип работы и система измерений гидростенда. Режимы течения жидкости в трубе	143
<i>Лабораторная работа № 2</i>	
Движение жидкости в канале переменного сечения	164

<i>Лабораторная работа № 3</i>	
Кавитация в потоке жидкости	171
<i>Лабораторная работа № 4</i>	
Определение коэффициентов сопротивления трения и местных гидравлических сопротивлений в трубе	179
<i>Лабораторная работа № 5</i>	
Истечение жидкости из отверстия и насадков при постоянном напоре ..	190
<i>Лабораторная работа № 6</i>	
Градуировка диафрагмы	199
<i>Лабораторная работа № 7</i>	
Совместная работа центробежного насоса и трубопровода с переменным гидравлическим сопротивлением	210
<i>Лабораторная работа № 8</i>	
Исследование особенностей течения и энергообмена вихревых потоков жидкости в гидравлическом генераторе тепла	221
Приложение Б. Лабораторный практикум (численный)	
<i>Электронные тесты к лабораторным работам № 2... 5</i>	240
Приложение В. Лабораторный практикум с использованием компьютерных технологий	247
<i>Лабораторная работа № 9</i>	
Исследование течения жидкости в трубе постоянного сечения	247
<i>Лабораторная работа № 10</i>	
Моделирование течения двухфазного потока в канале переменного сечения. Явление кавитации	257
Приложение Г. Сборник типовых задач (для самоконтроля)	305
Приложение Д. Контрольные вопросы (для самоподготовки)	319
Приложение Е. Рейтинг по основам механики жидкости	327

Условные обозначения и сокращения

x, y, z – координаты, м
 X, Y, Z – напряжения массовой силы, соответственно вдоль оси x, y, z , м/с²
 g – ускорение свободного падения, м/с²
 c – скорость, м/с
 a – местная скорость звука, м/с
 l – длина, м
 L – работа, Дж
 d – диаметр, м
 H, h – высота (напор), м
 r – радиус, м
 δ – толщина, м
 S – площадь, м²
 V – объём, м³
 t – время, с
 T – температура, К
 m – масса, кг
 ρ – плотность, кг/м³
 p – давление, Па
 σ, τ – напряжение, соответственно нормальное и касательное, Па
 G – массовый расход, кг/с
 G_v – объёмный расход, м³/с
 F – сила, Н
 M – момент силы, Н·м
 E – энергия, Дж
 Q – теплота, Дж
 C_p, C_v – теплоёмкость, соответственно при постоянном давлении и объёме Дж / (кг · К)
 R – удельная газовая постоянная, Дж/(кг·К)
 i – энтальпия, Дж/кг
 μ – коэффициент динамической вязкости, Н·с/м²

6

ν – коэффициент кинематической вязкости, $\text{м}^2/\text{с}$
 ω – угловая скорость, $\text{рад}/\text{с}$ ($1/\text{с}$)
 k – показатель адиабаты (изоэнтропы)
 M – число Маха
 Re – число Рейнольдса
 σ^* – коэффициент сохранения давления торможения
 $\xi_r, \xi_{тр}, \xi_m$ – коэффициенты гидравлических потерь, соответственно общих, на трение, местных
 ϵ, φ, ψ – коэффициенты, соответственно сужения струи, скорости, расхода
 ϵ_t – степень турбулентности
* – параметры заторможенного потока
 v – воздух
 o – отверстие
 n – параметры окружающей среды (невозмущённого потока)
 y – узкое (сечение)
 $тр$ – трение
 $_{мех}$ – механическая (работа)
МЖГ – механика жидкости и газа
МЖ – механика жидкости
МГ – механика газа
ГГД – гидрогазодинамика
ВРД – воздушно-реактивный двигатель
ГТД – газотурбинный двигатель
РкД – ракетный двигатель
МСА – международная стандартная атмосфера

ПРЕДИСЛОВИЕ

Механика жидкости и газа является одной из основных наук, с помощью которой находятся наиболее эффективные пути создания аэрокосмических двигателей и энергетических установок. Интенсивный путь развития двигателестроения для летательных аппаратов позволяет распространять полученные разработки в других областях народного хозяйства и в военных технологиях: на транспорте – автомобильном, железнодорожном, водном, воздушном, – на топливоиспользующих электростанциях, при газоперекачке, в энерготехнологических и энергоутилизационных установках. Разработка энергоресурсосберегающих, экологически чистых устройств невозможна без твердого знания основ механики жидкости и газа.

Основу учебного пособия составляют материалы курса «Механика жидкости и газа», читаемого преподавателями кафедры теплотехники и тепловых двигателей СГАУ более 36 лет для студентов факультета двигателей летательных аппаратов СГАУ им. академика С.П. Королева.

Курс разбивается на две части: механика жидкости и газовая динамика. Настоящее учебное пособие является первой частью курса механики жидкости и газа. В ней рассмотрены вопросы теории, приведены лабораторные работы, задачи, описывающие течение в элементах энергетических установок. Многие лабораторные работы являются уникальными. В частности, гидростенд, разработанный под руководством профессора А.П. Меркулова, был использован в учебном процессе вузов стран СНГ и дальнего зарубежья. Большую роль в создании учебно-методического комплекса МЖГ внесли профессора кафедры теплотехники КуАИ–СГАУ А.П. Меркулов, А.С. Наталевич, Е.Д. Стенькин, доценты В.Т. Шестаков, В.А. Курочкин, заведующий учебной лабораторией А.В. Иванов.

Вклад авторов в подготовку учебного пособия:

- Белозерцев Виктор Николаевич – постановка работы № 8;
Беляева Екатерина Владимировна – глава 1;
Бирюк Владимир Васильевич – главы 2, 3, переработка лабораторных работ № 1...3, постановка работ № 7, 8;
Диденко Алексей Александрович – глава 7;
Кленина Алла Дмитриевна – введение, главы 6, 8, переработка работ № 5, 6, подготовка сборника задач и контрольных вопросов;
Лукачев Сергей Викторович – введение, главы 4,7;
Матвеев Сергей Геннадьевич – главы 4, 7;
Рабкесов Иван Владимирович – постановка работы № 10;
Толстоногов Арлен Петрович – подготовка сборника задач;
Цыганов Александр Михайлович – главы 4, 5, переработка работ № 4, 5, постановка работ № 7, 9, 10;
Чечет Иван Викторович – главы 1, 4, подготовка электронных тестов к работам № 2...5;
Чичкин Сергей Юрьевич – постановка работы № 9.

ВВЕДЕНИЕ

Механика жидкости и газа – наука, изучающая законы равновесия и движения жидких и газообразных тел, а также применение этих законов для решения технических задач. Дисциплина базируется на высшей математике (теория поля, дифференциальные уравнения), физике (механика, свойства жидкостей и газов), теоретической механики и других дисциплинах естественно-научного и общепрофессионального блоков учебного плана.

Особенность механики жидкости и газа (МЖГ) обусловлена легкой деформируемостью сред, являющихся объектом изучения. Отсюда следует специфическая форма записи общих законов сохранения массы, импульса, энергии и соответствующие методы их решения. Эти методы требуют целесообразного выбора конфигурации контрольного объема рабочего тела, формирования начальных и граничных условий (часто с привлечением экспериментальных данных) и корректной постановки математической задачи. Многие численные методы решения нелинейных уравнений в частных производных разработаны и разрабатываются применительно к задачам МЖГ. Для получения практически приемлемых результатов необходимо зачастую также привлечение опытных данных и допустимое упрощение исходных уравнений.

Важнейшей частью МЖГ является эксперимент, который служит как для первичного изучения элемента, так и для создания адекватных расчетных схем, причем одним из важнейших объектов эксперимента являются поля скоростей и давлений. Развитие дисциплины связано с использованием численных методов для определения влияния диссипативных процессов и нелинейных эффектов, являющихся наиболее существенными чертами предмета, а также с включением задач течения жидкости с физическими и хи-

мическими эффектами, которые могут послужить основой создания новых высоких технологий.

Долгое время МЖГ развивалась как две науки: гидравлика и гидромеханика. Зарождение отдельных представлений из области гидравлики следует отнести к глубокой древности на основе практических сведений, накопленных в Египте, Месопотамии, Греции и Китае в результате гидротехнических работ. Устройства и машины, созданные Ктесибием и Героном в Александрии, были образцами для подражания в течение многих столетий. В Древнем Риме сооружались сложные системы водоснабжения. В Древней Греции появился впервые термин «ГИДРАВЛИКА», первоначально обозначающий «искусство сооружения музыкальных инструментов типа органов, использующих вертикальные трубы, частично заполненные водой». Этимология термина связана с двумя греческими словами: «гидр» – вода, «авлос» – труба, трубка.

В период Средневековья были созданы универсальные энергетические машины – водяные колеса различных типов и размеров, послуживших основой промышленной революции нового времени.

Эпоха Возрождения неразрывно связана прежде всего с именем Леонардо да Винчи (1452–1519), явившимся основоположником гидравлики как науки. Леонардо да Винчи обладал обширнейшими знаниями и достижениями в живописи, музыке, скульптуре, физике, анатомии, биологии, архитектуре и строительстве. Многие труды великого Леонардо стали известны сравнительно недавно, однако некоторые достижения в механике и гидротехнике (например, улучшение конструкции шлюзовых ворот) влияли на развитие европейской техники и при его жизни. Голландский инженер и математик Симон Стевин (1548–1620) решил задачу об определении силы давления, действующей на плоскую фигуру. Он также впервые объяснил гидростатический парадокс. Великий итальянский физик Галилео Галилей (1564–1642) опубликовал трактат по гидростатике. Он также показал, что сила гидравлического сопротивления

ния возрастает с увеличением скорости движущегося в жидкости твердого тела и с ростом плотности жидкой среды.

Период с начала XVII до конца XVIII вв. является временем формирования теоретических основ механики жидкости и газа. Бенедитто Кастелли (1577–1644), преподаватель математики в городах Пиза и Рим, четко изложил принцип неразрывности движения жидкости (уравнение расхода). Эванджелист Торричелли, выдающийся математик и физик, изобрел ртутный барометр и установил формулу для истечения жидкости в виде закона подобия. Блез Паскаль (1623–1662) сформулировал основной закон гидростатики о независимости значения гидростатического давления от ориентировки поверхности в рассматриваемой точке. Он же показал возможность применения для измерения атмосферного давления различных жидкостей. Исаак Ньютон (1643–1727) установил квадратичный закон «сопротивление при обтекании» и дал описание закона вязкого трения в жидкости. Важный этап в становлении инженерного образования связан с созданием Леонардом Эйлером (1707–1783), Д'Аламбером (1717–1783) и Лагранжем (1736–1813) аналитической механики. Постепенно именно эта дисциплина стала основой инженерного образования. Первоначально единый курс распался на теоретическую механику, сопротивление материалов и гидравлику. Даниил Бернулли (1700–1782) впервые в 1738 году ввел термин «гидродинамика». Так был назван и его знаменитый труд, изданный в Страсбурге. Его отец, Иоганн Бернулли (1667–1748), опубликовал в 1743 году трактат под названием «Гидравлика». основополагающая работа Эйлера с выводом системы уравнений движения идеальной жидкости увидела свет в 1755 году.

Наибольшие успехи, в рамках модели идеальной жидкости, были достигнуты Гельмгольцем и Кирхгофом, разработавшими методы теории функций комплексной переменной. Дальнейшее развитие эти методы получили в работах Н.Е. Жуковского, С.А. Чаплыгина и их учеников.

Основы учения о движении вязкой жидкости были заложены Луи Мари Анри Навье (1785–1836). Джордж Габриель Стокс (1819–1903) дал вывод уравнения движения вязкой жидкости в современной форме и опубликовал ряд точных решений. Осборн Рейнольдс (1842–1912) распространил уравнения Навье–Стокса на случай турбулентного движения, сформулировал условия перехода от ламинарного режима течения к турбулентному, объяснил явление кавитации, дал систему уравнений смазочного слоя.

Слово «турбулентность», по всей вероятности, впервые ввел в 1887 году выдающийся английский физик Уильям Томсон, лорд Кельвин (1824–1907). Немецкий механик Людвиг Прандтль сформулировал основные понятия теории пограничного слоя, развитые в дальнейшем Теодором фон Карманом, Карлом Польгаузенем, Л.И. Седовым, Л.Г. Лойцянским, В.С. Авдуевским, В.М. Исвлевым. Первые работы по расчету турбулентного пограничного слоя с привлечением полуэмпирических гипотез А.Н. Колмогорова были выполнены В.П. Глушко. Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах Сполдинга и Патанкара.

На основе вышеизложенного следует, что механика жидкости и газа как наука делилась на теоретическую (гидромеханику) и экспериментальную (гидравлику). Примерно с середины 60-х годов XX века появилась новая ветвь, которую называют вычислительной механикой жидкости и газа. В ней изучают и применяют методы математического моделирования законов движения деформируемой сплошной среды. Затем с помощью ЭВМ проводят численный эксперимент.

Основоположником численного анализа дифференциальных уравнений в частных производных следует считать Ричардсона (1910). Первое численное решение уравнений в частных производных для задач гидродинамики вязкой жидкости дано Томом в 1933 году. Очень важным этапом для дальнейшего развития вычислительной механики жидкости и газа стала работа Алена и Саусвелла, выполненная вручную, по расчету обтекания цилинд-

ра вязкой несжимаемой жидкостью. Развитие ЭВМ придало применению численных методов в механике жидкости и газа лавиноподобный характер.

Важный вклад в развитие этого перспективного направления механики жидкости и газа внесли работы фон Неймана, Харлоу, Фромма, Д. Сполдинга, С. Патанкара, О.М. Белоцерковского, А.А. Самарского, С.К. Годунова и других ученых.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Структура дисциплины

Механика жидкости и газа – наука, изучающая законы движения жидкостей и газов при их взаимодействии между собой или с твердыми телами, при скоростях, когда справедливы законы классической механики Ньютона.

В состав МЖГ входят следующие разделы:

- *гидростатика* – изучается равновесие жидкостей и тел, в них погруженных;
- *кинематика* – изучается движение жидкостей без учета взаимодействий, определяющих это движение;
- *динамика* – изучается движение жидкостей при их взаимодействии с твердыми телами и с жидкостями.

В свою очередь динамика делится на два раздела:

- *гидродинамика* – изучаются законы движения несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$);
- *газовая динамика* – изучаются законы движения газа при существенном изменении его плотности, которое может иметь место при подводе (отводе) к газу теплоты или совершения над ним механической работы.

1.2. Общая постановка задач

Обычно задаются:

1. Область течения жидкости и ее свойства.
2. Твёрдые тела, обтекаемые жидкостью или канал, по которому она движется.
3. Энергетическое воздействие на поток.
4. Значение параметров жидкости на границе области в начальный момент времени.

Требуется определить: поля параметров жидкости или газа, текущих в пространстве и во времени. Параметрами являются поля скоростей, плотности, давления, температуры. В результате решения поставленной задачи определяется *силовое* и *тепловое* взаимодействие между потоком жидкости и твёрдыми телами.

В механике жидкости и газа различают следующие группы задач:

- *внутренние* – связаны с течением рабочего тела в различных каналах, например в соплах реактивных двигателей;
- *внешние* – рассматривается обтекание твердых тел, например, крыла летательного аппарата;
- *струйные* – изучается течение струй жидкостей или газов, вытекающих из отверстий и насадков в пространство, не ограниченное твердыми стенками, например, взаимодействие струи выхлопных газов реактивного двигателя с воздухом.

Практические задачи бывает трудно разделить и в этом случае решается *смешанный* тип.

Каждая из рассмотренных задач может быть как прямой, так и обратной. Если заданы невозмущенный поток, форма, положение, размеры обтекаемого тела и требуется определить поля параметров, то в этом случае задача – *прямая*. В противном случае задача *обратная*.

В механике жидкости и газа анализ всех течений и решения всех задач базируется на четырех основных законах физики и шести основных уравнениях МЖГ, выражающих эти законы в математической форме.

Таблица 1.1. Основные законы физики и основные уравнения МЖГ

Основные законы физики	Основные уравнения МЖГ
1. Закон сохранения массы 2. Закон сохранения импульса (Второй закон Ньютона о движении) 3. Закон сохранения и превращения энергии 4. Второй закон термодинамики	1. Уравнение неразрывности (сплошности) потока 2. Уравнения количества движения 3. Уравнение момента количества движения 4. Уравнение энергии в механической форме (уравнение Бернулли) 5. Уравнение энергии в тепловой форме (уравнение энтальпии) 6. Уравнение изменения энтропии газа Дополнительно используется уравнение состояния идеального газа $p = \rho RT$

1.3. Основные физические свойства жидкостей и газов

Плотность ρ – масса жидкости (газа), заключенная в единице

объема, $\rho = \frac{m}{V}$ – для однородной жидкости; $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$ –

для неоднородной жидкости.

Таблица 1.2. Плотность некоторых газов и жидкостей

Вещество	$\rho, \frac{г}{л}$
Вода	1000
Ртуть	13600
Авиакеросин	819
Воздух	1,23
Водород	0,085

Давление p характеризует силу, приложенную к единице поверхности перпендикулярно поверхности: $p = F/S$

Сжимаемость – свойство жидкости (газа) изменять свой объем (плотность) при изменении давления и температуры. Сжимаемость жидкостей мала; газов – велика. Для качественной оценки сжимаемости пользуются понятием *модуля упругости* ε , представляющим собой отношение изменения давления к относительному изменению плотности:

$$\varepsilon = \frac{\Delta p}{\rho} = \rho \frac{d\rho}{dp}$$

Таблица 1.3. Значение модуля упругости некоторых жидкостей

Вещество	$\varepsilon, \frac{л}{л}$
Вода	$2,0 \cdot 10^9$
Ртуть	$3,3 \cdot 10^9$
Авиакеросин	$1,3 \cdot 10^9$

Изменение плотности наблюдается при распространении возмущений давления как в покоящейся, так и в движущейся среде и является следствием ее сжимаемости. Сжимаемость движущейся среды заметно проявляется при больших скоростях течения.

Вязкость (динамическая μ , кинематическая ν) - свойство жидкости или газа сопротивляться сдвигу (скольжению). Вязкость, свойство противоположное текучести. В вязких течениях возникают касательные напряжения (напряжение трения). При ламинарном течении они зависят от рода жидкости μ и прямо пропорциональны поперечному градиенту скорости:

$$\tau = \mu \left(\frac{dc}{dy} \right)$$

– закон Ньютона о молекулярном трении,

Вязкость становится существенной при движениях среды со значительными скоростями ее деформации.

Теплоёмкость (при постоянном давлении – C_p ; при постоянном объеме – C_v) – количество теплоты, необходимое для изменения температуры 1 кг газа на один градус.

Энтальпия газа:

$$i = C_p \cdot T$$

Показатель адиабаты – определяется как отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме: $k = C_p/C_v$.

Удельная газовая постоянная $R = C_p - C_v = 8320/M_r$,

где 8320 Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная;

M_r – масса моля газа, кг/моль.

Скорость звука (a) – скорость распространения малых возмущений давления в данной среде:

$$a = \sqrt{\frac{d\delta}{d\rho}} = \sqrt{kRT}$$

Число Маха (M) – отношение скорости газа c к местной скорости звука:

$$M = \frac{\tilde{v}}{a}.$$

Число Маха является важнейшим критерием сжимаемости движущегося газа. Газ можно рассматривать как несжимаемую жидкость при течениях, когда $M \leq 0,3 \dots 0,4$.

Молекулярные теплопроводность λ и диффузия D . При существенных поперечных градиентах температур $\frac{dT}{dy} \neq 0$ и концентрации избыточной примеси $\frac{dc}{dy} \neq 0$ в жидкости и газе наблюдаются

теплопроводность и диффузия. По аналогии с $\tau = -\mu \left(\frac{d\tilde{v}}{dy} \right)$,

можно записать $q = -\lambda \left(\frac{dT}{dy} \right)$ – закон Фурье. $G = -D \left(\frac{dc}{dy} \right)$ – за-

кон Фика.

Механизм молекулярного переноса количества движения (трение), теплоты (теплопроводность) и вещества (диффузия) в газах одинаковый – тепловое хаотическое движение молекул, – следовательно, и структура этих формул также одинаковая.

1.4. Модели жидкостей и газов

Жидкостью называется, вещество, которое обладает свойством текучести. **Текучесть** – свойство жидкости непрерывно и сколь угодно сильно деформироваться под действием минимального срезающего напряжения.

Идеальная (совершенная) жидкость – условная жидкость, которая считается абсолютно несжимаемой, невязкой и не имеющей молекулярного строения (т.е. силы внутреннего трения в ней

отсутствуют, и она воспринимает только усилия сжатия). Допущение идеальности жидкости дает точные результаты при решении задач для реальной жидкости, находящейся в покое, т.е. в гидростатике (когда силы внутреннего трения отсутствуют).

Идеальный (совершенный) газ отличается от идеальной жидкости тем, что он сжимаемый, но невязкий; подчиняется *уравнению состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона)*

$$p = \rho RT.$$

Используя понятие энтальпии $i = C_p \cdot T$ и теплоемкости $C_p = \frac{k}{k-1}R$, можно получить так называемое калорическое уравнение состояния идеального газа:

$$i = \tilde{N}_\delta \cdot \dot{O} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{\delta}{\rho}.$$

Капельные жидкости принимают сферическую форму в малых объемах и образуют свободную поверхность в больших объемах.

Свободная поверхность – это поверхность, которая отделяет жидкость от атмосферы и является поверхностью с постоянной величиной давления. *Газы* характеризуются большей сжимаемостью и неограниченно расширяются при отсутствии давления.

Континуум – модель жидкости, которая считается сплошной однородной средой, не имеющей молекулярного строения. Континуумом является не только идеальная жидкость, но и вязкая жидкость. Эта гипотеза применима для жидкостей и сравнительно плотных газов, у которых в единице объема находится так много молекул, что большинство из них имеют параметры (например, скорость), примерно одинаковые и равные средневероятным значениям.

1.5. Силы и напряжения, действующие на жидкий объем

Внешние силы, действующие на жидкий объем и определяющие его движение, подразделяются на *массовые* (объемные) и *поверхностные*.

Массовые силы F_m приложены ко всем жидким частицам, составляющим жидкий объем. К ним относятся силы тяжести и силы инерции. Кроме того, к массовым силам относятся силы взаимодействия частиц токопроводящей жидкости с электромагнитными полями.

Напряжением J массовой силы называется отношение вектора массовой силы $\Delta F_m^{\text{в}}$ к массе Δm жидкой частицы, на которую она действует:

$$J = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} (\Delta F_m^{\text{в}} / \Delta m).$$

В соответствии со вторым законом Ньютона, массовая сила равна произведению массы на ее ускорение, вызванное этой силой. Поэтому напряжение массовой силы численно равно ускорению центра масс частицы, проходящей в данный момент времени через данную точку, и характеризует распределение массовых сил в пространстве, занятом жидкостью. Проекция напряжения массовой силы на оси координат x, y, z обозначим X, Y, Z , тогда напряжение массовой силы в векторной и скалярной форме записываются в следующем виде:

$$J = iX + jY + kZ; \quad J = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

где i, j, k – орты.

Поверхностные силы F_s представляют собой воздействие внешней среды на поверхность выделенного объема. Это воздействие распределено по поверхности непрерывно. Выберем на плоскости S , рассекающей некоторую массу жидкости на части 1 и 2 (рис. 1.1), элементарную площадку ΔS , на которой лежит точка $A(x, y, z)$. Отбросим часть 2 и заменим ее действие на площадку ΔS

части 1 равнодействующей поверхностных сил ΔF_s^{II} . В общем случае величина ΔF_s^{II} зависит от ориентировки площадки ΔS и направлена под углом γ . Ориентация площадки ΔS определяется единичным вектором внешней нормали \vec{n} .

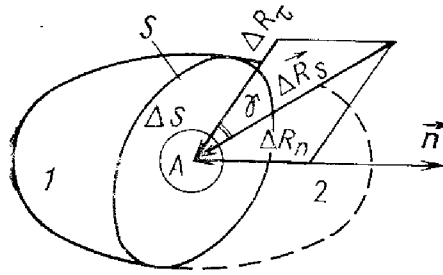


Рис. 1.1. Поверхностные силы

Нормальная составляющая ΔF_n^{II} поверхностной силы ΔF_s^{II} действует по нормали к поверхности ΔS противоположно \vec{n} .

Сила трения, или тангенциальная составляющая $\Delta F_\tau^{\text{II}}$, действует в плоскости ΔS .

Напряжения поверхностных сил в точке $A(x, y, z)$ – это пределы отношений соответствующих сил к площадке ΔS при стягивании ее в точку. Различают следующие напряжения.

Напряжение равнодействующей поверхностной силы, Н/м²

$$r = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta F_s^{\text{II}} / \Delta S).$$

Нормальное напряжение, Н/м²

$$\sigma = - \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta F_n^{\text{II}} / \Delta S).$$

Знак минус показывает, что за положительное принято растягивающее нормальное напряжение.

Напряжение трения, или касательное напряжение, Н/м²

$$\tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} (\Delta R_\tau^{\text{II}} / \Delta S).$$

1.6. Режимы течения

Ламинарное (слоистое) – это упорядоченное течение жидкости без перемешивания соседних слоев, без пульсации скорости и давления. При таком течении в трубе постоянного сечения все линии тока параллельны её оси, однако возможно упорядоченное вихревое движение вокруг линий тока.

Турбулентное (бурное, возмущенное) – сопровождается интенсивным перемешиванием и пульсациями скорости и других параметров. Имеет место поперечное перемещение отдельных частиц жидкости и их вращение вокруг собственных осей.

В 1883 году Рейнольдс доказал существование двух качественно различных режимов течения в трубах. Переход от ламинарного к турбулентному режиму течения осуществляется внезапно, сопровождается усилением теплопередачи, увеличением потерь на трение. Из опытов при различных параметрах (μ , ρ , c , d) он установил для круглых труб, что этот переход определяется их комплексом и называется критическим числом Рейнольдса

$$Re_{\epsilon\delta} = \frac{\rho c d}{\mu} \approx 2320.$$

При $Re < Re_{\epsilon\delta}$ – режим течения ламинарный; при $Re > Re_{\epsilon\delta}$ – турбулентный. В области $Re_{\epsilon\delta}$ имеет место узкая переходная зона $2200 \leq Re_{\epsilon\delta} \leq 2500$, течение в которой называется *переходным*.

С учетом $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ и замены μ на ν получим самую простую формулу для расчета числа Рейнольдса

$$Re = \frac{c \cdot d}{\nu}.$$

1.7. Динамический пограничный слой

С вязкостью связано возникновение пограничного слоя при обтекании жидкостями твердых тел. Всю область течения жидкости около твердого тела можно разбить на две качественно различные зоны:

1. Пограничный слой толщиной $\delta(x)$. Это относительно тонкий слой $\delta/x \leq 1$, примыкающий к поверхности твердого тела. В этом слое существенно изменяется скорость и $\partial u/\partial y > 0$. Поэтому только внутри пограничного слоя проявляется вязкость жидкости и ее необходимо учитывать в расчетах.

2. Набегающий невозмущенный поток и область, лежащая над пограничным слоем, в которых $\partial u/\partial y \approx 0$. Поэтому жидкость, текущая над пограничным слоем, можно считать идеальной ($\tau = 0$) и анализировать ее движение по более простым законам движения идеальной жидкости. Пограничный слой возникает при всех реальных течениях в лопаточных машинах и двигателях и существенно влияет на их работу.

Глава 2. ГИДРОСТАТИКА

2.1. Абсолютное и относительное равновесие жидкости

В гидростатике изучаются закономерности, при которых жидкость находится в состоянии равновесия. Для гидростатики характерно постоянство формы и объема рассматриваемой жидкости и, как следствие, – отсутствие касательных напряжений. На элемент жидкости действуют только массовые силы, которые нормальны к поверхности. Общим условием равновесия жидкости или газа является равенство нулю равнодействующей всех сил и суммы всех моментов, приложенных к любому элементу жидкости, относительно любой оси. Различают абсолютное и относительное равновесие жидкости (см. рис. 2.1), при этом свободные поверхности имеют различный вид. Поверхность постоянного давления обладает следующими свойствами:

1. Две различные поверхности не пересекаются между собой. В противном случае в точке пересечения было бы два значения давления;

2. Внешние массовые (объемные) силы, проекциями напряжений которых являются X , Y , Z , направлены по нормали в каждой точке поверхности постоянного давления.

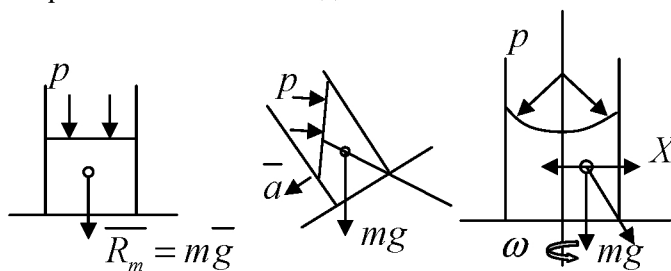


Рис. 2.1. Абсолютное и относительное равновесие жидкости

На рис. 2.1 приведены примеры *абсолютного равновесия* (жидкость находится в сосуде только под действием силы тяжести) и *относительного равновесия* (сосуд движется равноускоренно

вниз по наклонной плоскости); жидкость вращается в цилиндрическом сосуде с постоянной угловой скоростью.

Свойства гидростатического давления в точке:

1. Гидростатическое давление есть давление сжатия, направленное по нормали к площадке.
2. Гидростатическое давление в точке жидкости не зависит от направления.

Согласно условиям равновесия сумма проекций всех сил на соответствующие оси координат, а также сумма проекций моментов этих сил относительно осей координат должна равняться нулю.

Выделим в жидкости элементарный объем в форме тетраэдра с ребрами dx , dy , dz соответственно расположенными на координатных осях Ox , Oy , Oz (рис. 2.2). На выделенный элемент жидкости действуют силы давления окружающей жидкости и массовые силы.

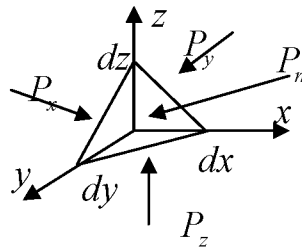


Рис. 2.2. Элементарный объем

Силы давления на грани будут равны:

$$F_x = p_x \cdot \Delta S_x, \quad \Delta S_x = \frac{1}{2} dydz$$

$$F_y = p_y \cdot \Delta S_y, \quad \Delta S_y = \frac{1}{2} dxdz$$

$$F_z = p_z \cdot \Delta S_z, \quad \Delta S_z = \frac{1}{2} dydx$$

$$F_n = p_n \cdot \Delta S_n,$$

где $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z, \Delta S_n$ – площади соответствующих граней; p_x, p_y, p_z – средние гидростатические давления на гранях тетраэдра; p_n – давление на наклонной грани.

Составим условия равновесия выделенного объема жидкости относительно каждой из координатных осей:

$$p_x \Delta S_x - p_n \Delta S_n \cdot \cos(\alpha_x) = 0$$

$$p_y \Delta S_y - p_n \Delta S_n \cdot \cos(\alpha_y) = 0$$

$$p_z \Delta S_z - p_n \Delta S_n \cdot \cos(\alpha_z) = 0$$

Так как нас интересует давление в точке, будем стягивать тетраэдр в точку.

$$p_x - p_n = 0, p_y - p_n = 0, p_z - p_n = 0;$$

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p = f(x, y, z).$$

Итак, гидростатическое давление в точке не зависит от направления, т.е. остается одинаковым по всем направлениям. Когда объем тетраэдра приближается к нулю, векторы силы приближаются к началу координат, а моменты сил относительно осей обращаются в нуль. В итоге второе условие равновесия автоматически выполняется. Очевидно, что для различных точек в жидкости величина гидростатического давления может быть различной, т.е. гидростатическое давление в точке является функцией только координат $p = f(x, y, z)$.

2.2. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости в форме Эйлера

Рассмотрим условия равновесия частицы покоящейся жидкости или газа в объеме элементарного параллелепипеда с ребрами dx, dy, dz , соответственно параллельными координатным осям Ox, Oy, Oz . Будем считать, что находящаяся в равновесии частица жидкости отвердела. Элементарный параллелепипед жидкости находится в равновесии под действием поверхностных и массовых (объемных) сил (рис. 2.3). Пусть p_x, p_y, p_z – средние гидростатические давления на грани параллелепипеда, перпендикулярные со-

ответствующим осям координат. При переходе от одной грани к другой давление в общем случае должно измениться, так как $p = f(x, y, z)$. Тогда на противоположные грани параллелепипеда, соответственно, будут действовать противодействия

$$(p_x + \Delta p_x), (p_y + \Delta p_y), (p_z + \Delta p_z), \text{ или иначе}$$

$$\left(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right), \left(p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy \right), \left(p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \right).$$

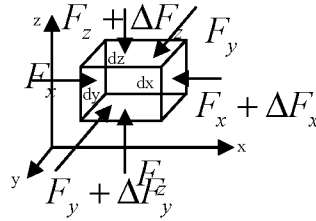


Рис. 2.3. Элементарный объем

Поверхностные силы, действующие по граням параллелепипеда, равны произведению среднего гидростатического давления на площадь соответствующей грани и будут иметь вид:

$$F_x = p_x \cdot dy \cdot dz; F_y = p_y \cdot dx \cdot dz; F_z = p_z \cdot dx \cdot dy;$$

$$F_x + \Delta F_x = \left(p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz;$$

$$F_y + \Delta F_y = \left(p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy \right) \cdot dx \cdot dz;$$

$$F_z + \Delta F_z = \left(p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \right) \cdot dx \cdot dy.$$

Кроме поверхностных сил, на частицу жидкости будут действовать массовые (объемные) силы, распределенные по всему ее объему, то есть действующие на каждую точку внутри элементар-

ного параллелепипеда (например, сила тяжести, сила инерции переносного движения).

Обозначим через X , Y , Z проекции напряжения массовых сил. Тогда проекции массовых сил могут быть написаны в виде Xdm , Ydm , Zdm . Учитывая, что элементарная масса частицы жидкости или газа в объеме элементарного параллелепипеда равна $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$, проекции массовой силы на соответствующие оси координат можно записать в виде:

$$\begin{aligned} dm \cdot X &= \rho \cdot dV \cdot X = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X; \\ dm \cdot Y &= \rho \cdot dV \cdot Y = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot Y; \\ dm \cdot Z &= \rho \cdot dV \cdot Z = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot Z. \end{aligned}$$

Выделенный параллелепипед будет в равновесии в том случае, если сумма проекций всех действующих сил на любую из координатных осей будет равна нулю. Составим уравнение проекций сил на ось Ox , считая, что положительное направление сил совпадает с положительным направлением осей координат:

$$P_x \cdot dy \cdot dz - \left(px + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X = 0$$

или

$$-\frac{\partial p_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X = 0$$

Разделим каждый член уравнения на произведение $dx \cdot dy \cdot dz = dV$, тогда получим: $-\frac{\partial p_x}{\partial x} + \rho X = 0$.

Исключение из уравнения dV означает, что вывод уравнения не зависит от объема выделенного элемента. Два другие уравнения, соответствующие условию равновесия по осям Oy и Oz , напомним по аналогии.

В результате получим следующую систему уравнений статического равновесия жидкости или газа в форме Эйлера:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X &= 0; \\
-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y &= 0; \\
-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

Эти уравнения справедливы как для капельных жидкостей ($\rho = \text{const}$), так и для газов ($\rho \neq \text{const}$). В частном случае, когда массовой силой является только сила тяжести и $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -g$, уравнения (2.1) примут вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0.$$

2.3. Основное дифференциальное уравнение статики жидкостей и газов

Произведем преобразование системы дифференциальных уравнений Эйлера. Умножив каждое из уравнений (2.1) соответственно на dx , dy , dz , получим:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial p}{\partial x} dx + \rho X dx &= 0, \\
-\frac{\partial p}{\partial y} dy + \rho Y dy &= 0, \\
-\frac{\partial p}{\partial z} dz + \rho Z dz &= 0.
\end{aligned}$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (X dx + Y dy + Z dz)$$

Трехчлен в левой части уравнения представляет собой полный дифференциал давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp.$$

Поэтому уравнение можно записать так

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2.2)$$

Это уравнение называют *основным дифференциальным уравнением статики жидкостей и газов*.

В случае капельной жидкости ($\rho = \text{const}$) оно легко интегрируется. В случае сжимаемой жидкости ($\rho \neq \text{const}$) надо знать еще зависимость плотности от давления и температуры, которой может служить уравнение состояния идеального газа:

$$\rho = \frac{p}{gRT}.$$

Уравнение поверхности постоянного давления.

Составим уравнение поверхности равного давления. Так как в этом случае $p = \text{const}$, следовательно, $dp = 0$. Тогда уравнение (2.2) примет вид:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

На поверхности уровня давление и плотность постоянны, следовательно, неоднородная капельная жидкость при равновесии располагается слоями одинаковой плотности: большим значениям плотности соответствуют большие значения давлений. Поверхность уровня всегда нормальна к напряжению суммарной массовой силы, действующей на жидкость при равновесии.

2.4. Основная формула гидростатики

Определим гидростатическое давление p в произвольной точке $A(x, y, z)$ жидкости с постоянной плотностью и давлением на свободной поверхности p_0 (рис. 2.4).

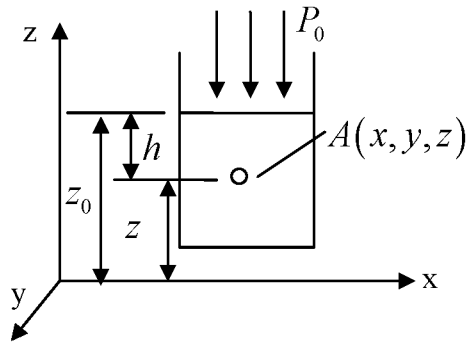


Рис. 2.4. Давление на свободной поверхности

Для этого случая: $X = Y = 0, Z = -g$;

Уравнение равновесия в дифференциальной форме (2.2) примет вид: $dp = -\rho g dz$.

$$p = -\rho g z + C, z = z_0, p = p_0, C = p + \rho g z_0$$

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 + \rho g h$$

В результате основная формула гидростатики записывается в следующем виде:

$$p = p_0 + \rho g h \quad \text{или} \quad \frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_0.$$

В ы в о д ы. Давление, с которым внешние силы действуют на граничной поверхности жидкости, передается всем частицам этой жидкости по всем направлениям без изменения величины передаваемого давления (то есть давление жидкости не теряется в пути). Давление в любой точке складывается из давления на свободной поверхности p_0 и давления столба вышележащей жидкости $\rho g h$. Поверхности уровня $p = \text{const}$ параллельны свободной поверхности $z_0 = \text{const}$.

ρgh – давление столба жидкости высотой h с плотностью ρ на площадку в 1 м^2 ; z – геометрическая высота; $p + \rho gh$ – гидростатическое давление, Па , $\frac{p}{\rho g} + z$ – гидростатическая высота, м ; $\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрическая высота, м .

Измерение давления при помощи пьезометра

Пьезометрическую высоту можно наблюдать в простейшем устройстве для измерения давления – в пьезометре. **Пьезометр** – вертикальная трубка, один конец которой связан с атмосферой, а другой присоединен к объему, в котором измеряется давление. При $p_0 > p_n$ измеряется избыточное давление, а при $p_0 < p_n$ – разреженное или вакуум.

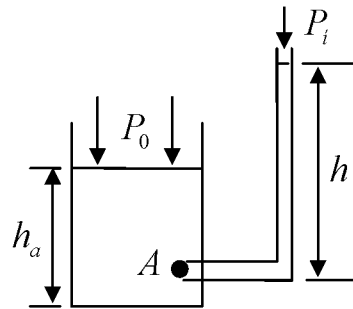


Рис. 2.5. Измерение давления при помощи пьезометра

Барометр – прибор для измерения атмосферного давления. Для измерения малых перепадов давления (до 1000 Па) применяется **микроманометр** – пьезометр с наклонной трубкой.

2.5. Сила давления жидкости на плоскую стенку

Определим силу F давления капельной жидкости на площадь S плоской стенки, расположенной под углом α к свободной поверхности (рис. 2.6). Ось x совместим с линией пересечения свобод-

ной поверхности и стенки. Для того чтобы на чертеже изобразить площадь S в двух проекциях, ось x и стенка повернуты около оси y на 90° . Обозначим центр тяжести площади S буквой C , центр давления или точку приложения равнодействующей сил давления – D , площадь произвольной элементарной площадки – dS . Сила давления на элементарную площадку равна $dF = pdS = (p_0 + \rho gh)dS$, где $h = y \sin \alpha$ – глубина погружения dS . Силу F давления на площадь S получим в результате интегрирования

$$F = \int_S dF = p_0 S + \rho g \sin \alpha \int_S y dS .$$

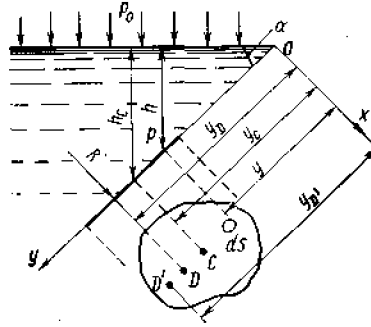


Рис. 2.6. Определение давления на плоскую стенку

Учтем, что $\int_S y dS$ есть статический момент площади S относительно оси Ox , равный произведению площади S на координату центра тяжести y_c , тогда

$$F = p_0 S + \rho g y_c \sin \alpha S = p_0 S + \rho g h_c S = p_c S,$$

где $p_c = p_0 + \rho g h_c$ – давление жидкости в центре тяжести площади S . Сила F не зависит ни от угла наклона стенки α , ни от формы сосуда, содержащего жидкость. Составив уравнения моментов

сил относительно оси Ox , можно получить формулы для расчета ординат точек D' и D

$$y_D = y_C + J_C / y_C S$$

$$y_D = (F_{из} y_{D'} + p_0 S y_C) / F,$$

где J_C – момент инерции площади S относительно оси, проходящей через центр тяжести параллельно оси Ox . Для определения $x_{D'}$ и x_D необходимо составить уравнение моментов относительно оси y

2.6. Закон Архимеда

В покоящейся жидкости мысленно выделим произвольный объем жидкости V . Он находится в равновесии, следовательно, поддерживающая его сила равна и противоположна силе тяжести $F_{\Pi} = -F_T = -\rho_{ж} g V$. Очевидно, что любое тело того же объема будет испытывать со стороны жидкости ту же поддерживающую силу. Это рассуждение доказывает *закон Архимеда* – *тело, погруженное в жидкость, испытывает поддерживающую силу, равную силе тяжести вытесненной им жидкости* (рис. 2.7).

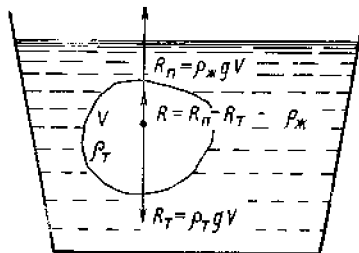


Рис. 2.7. Равновесие тела, погруженного в жидкость

Равнодействующая F сил, приложенных к телу, равна разности этих сил

$$F = F_{\Pi} - F_T = -gV(\rho_{ж} - \rho_{т}).$$

2.7. Равновесие газов. Международная стандартная атмосфера

Параметры воздуха зависят от многих характеристик – высоты, широты местности, погоды, времени года и т.д. Такие характеристики, как мощность, тяга двигателей, существенно зависят от параметров воздуха. Для сравнения характеристик при различных атмосферных условиях была принята международная стандартная атмосфера (МСА) – единый, условный закон изменения давления, температуры, плотности, которая отсчитывается от уровня океана ($h = 0$ км). Общеприняты так называемые нормальные атмосферные условия: $p_0 = 101330$ Па (760 мм рт. ст.), $T_0 = 288$ К (15° С), $\rho_0 = 1,23$ кг/м³.

В зависимости от осредненного состава и закона изменения температуры по высоте, атмосферу принято делить на следующие зоны:

- тропосфера – $h = 0 \div 11$ км, $T = T_0 - 6,5h$;
- стратосфера – $h = 11 \div 25$ км, $T \approx 217$ К = const;
- химосфера – $h = 25 \div 80$ км, состав газа изменяется незначительно;
- ионосфера – $h = 80 \div 400$ км, содержит ионизированный электропроводящий газ.

При равновесии в атмосфере действует только сила тяжести, следовательно, $X = Y = 0$, $Z = -g$, тогда дифференциальное уравнение равновесия

$$dp + \rho g dh = 0, \quad \rho = \frac{P}{RT}, \quad T = T_0 - 6,5h.$$

После преобразования получим формулы Беркенса для расчета параметров при изменении высоты в тропосфере:

$$\frac{\partial}{\partial_0} = \left(1 - \frac{6,5h}{\partial_0} \right)^{\frac{T_0 \rho_0 g}{6,5 \partial_0}},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{6,5h}{\dot{O}_0}\right)^{\frac{T_0 \rho_0 g}{0,5 \dot{O}_0} - 1},$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{6,5h}{T_0}.$$

Для стратосферы пользуются формулой Галлея:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{\rho_0 g h}{p}}, T \approx 217 K = \text{const.}$$

Если задана высота h , то этим по МСА однозначно задаются параметры воздуха (p , ρ , T). Если же задаются параметры воздуха, то по МСА однозначно определяется высота и недостающие параметры воздуха (см. табл. МСА в [1, 2]).

Глава 3. КИНЕМАТИКА

3.1. Основные определения кинематики

Движение жидкости определено только в том случае, если в любой момент времени известно пространственно-временное поле скоростей. Определение этого поля и является предметом кинематики жидкости.

Линия тока – это линия в пространстве, в каждой точке которой, в данный момент времени, векторы скорости частиц касательны.

Элементарная струйка – объемный пучок линий тока, проходящих через элементарную площадку.

Трубка ток – боковая поверхность элементарной струйки.

Объемный расход G_v – объем жидкости, протекающий через данную поверхность в единицу времени. Из курса векторного анализа следует, что объемный расход через произвольную поверхность S равен потоку вектора скорости

$$G_v = \int_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_S \vec{v} \cos \alpha ds = \int_S (u dy dz + v dx dz + w dx dy),$$

где α – угол между вектором скорости \vec{v} и ортом внешней нормали \vec{n} к элементарной площадке dS .

Массовый расход G – масса жидкости, протекающая через данное сечение в единицу времени.

Среднерасходная скорость c_{cp} – постоянная для всего поперечного сечения потока скорость, при которой расход равен действительному.

$$\text{Плотность тока } \rho c = \frac{|G|}{|S|} - \text{масса жидкости, протекающая}$$

через квадратный метр сечения в единицу времени.

3.2. Методы исследования движения жидкости и газа

Изучение движения жидкости и газа можно вести двумя методами: методом Эйлера и методом Лагранжа. В обоих методах жидкость рассматривается как непрерывная среда, сплошь занимающая рассматриваемое пространство. В качестве мельчайшего элемента жидкости принимается «частица» бесконечно малых размеров, но не отождествляемая с молекулой или атомом. Вследствие этого рассматриваемая схема неприменима к изучению молекулярных движений.

Метод Эйлера применяется для плотных жидкостей. Объектом изучения является, строго говоря, не сама жидкость, а неподвижное пространство, заполненное движущейся жидкостью; изучается изменение различных параметров, характеризующих движение в фиксированных точках пространства с течением времени, а также изменение этих параметров при переходе к другим точкам пространства. Таким образом, параметры, характеризующие движение, рассматриваются как функции координат точки и времени x, y, z, t , называемых переменными Эйлера. Например, рассматривается скорость в точке пространства, занятого движущейся жидкостью. Обозначим проекции скорости на оси координат, и для неустановившегося движения будем иметь:

$$c_x = f_1(x, y, z, t);$$

$$c_y = f_2(x, y, z, t);$$

$$c_z = f_3(x, y, z, t),$$

где x, y, z, t – переменные Эйлера.

Если движение жидкости непрерывное, то для нахождения траектории жидкой частицы следует иметь в виду:

$$c_x = \frac{dx}{dt}, \quad c_y = \frac{dy}{dt}, \quad c_z = \frac{dz}{dt},$$

где dx, dy, dz – проекции элементарного перемещения на соответствующие оси координат.

Проинтегрировав эти уравнения, получим уравнения траектории $x = \varphi_1(a, b, c, t)$ и т.д., где a, b, c – начальные координаты частицы.

При неустановившемся движении все поле скоростей изменяется во времени.

Таким образом, в методе Эйлера объектами изучения являются поля, характеризующие движение (поле скоростей, поле ускорений, поле плотностей и др.).

По *методу Лагранжа* объектом изучения является сама движущаяся жидкость, т.е. отдельные ее частицы, рассматриваемые как материальные точки, которые сплошь заполняют некоторый движущийся объем, и изучается движение отдельных частиц жидкости вдоль их траекторий. Пусть в начальный момент $t = 0$ координаты некоторой частицы жидкости a, b, c . У других частиц начальные координаты другие. Затем каждая частица движется по своей траектории. Текущие координаты x, y, z некоторой частицы являются функциями четырех переменных: времени t и начальных координат a, b, c . Эти переменные называются переменными Лагранжа:

$$x = f_1(a, b, c, t); y = f_2(a, b, c, t); z = f_3(a, b, c, t).$$

Движение жидкости вполне определено, если эта система уравнений известна. Задаваясь начальными координатами a, b, c , получим текущие координаты для выбранной частицы. Скорости частицы определяются как первые производные координаты по времени от координат x, y, z . Проекции скорости находятся из условия:

$$c_x = \frac{\partial x}{\partial t}, c_y = \frac{\partial y}{\partial t}, c_z = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Ускорения определяются как вторые производные по времени. Направления векторов скорости и ускорения находятся при помощи направляющих косинусов. Траектория любой частицы определяется непосредственно из системы уравнений путем вычисления

координат x, y, z выбранной частицы для ряда моментов времени. Итак, по методу Лагранжа берется частица жидкости и исследуется движение этой частицы за промежуток времени t_0, t .

Метод Лагранжа применяется в динамике разреженных сред, например в космическом пространстве, где расстояние между молекулами газа соизмеримо с размерами летательных аппаратов и необходимо изучать движение каждой частицы в отдельности.

В МЖГ плотных сред в большинстве случаев применяется более простой метод Эйлера.

3.3. Уравнение неразрывности потока

Движение жидкости, при котором внутри потока не образуется пустот, т.е. нет разрывов струй, называется сплошным, или неразрывным. Найдем аналитическое выражение условия неразрывности течения жидкости, полагая плотность ρ непостоянной. Плотность тока $m_{x/F} = \rho \cdot c_x$, $\rho = f(x, y, z, t)$; $c_x = \varphi(x, y, z, t)$.

Пусть гранями бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz (рис. 3.1) ограничивается некоторое неподвижное относительно координатных осей пространство, через которое протекает жидкость.

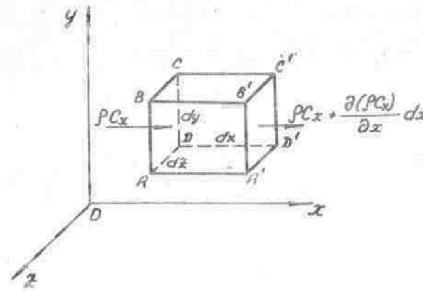


Рис. 29.

Рис. 3.1. Бесконечно малый объем жидкости

За время dt через грань ABCD внутрь параллелепипеда втекает масса жидкости $dm'_x = \rho c_x dydzdt$, а вытекает через грань A'B'C'D' масса $dm''_x = \rho' c'_x dydzdt$. Плотность ρ и скорость c_x на входе (в плоскости грани ABCD) в общем случае сжимаемой жидкости не равны плотности ρ' и скорости c'_x на выходе (в плоскости грани A'B'C'D'). При этом изменение ρ и c_x обуславливается только тем, что при переходе от одной грани к другой для сходственных точек этих граней меняется лишь координата x независимо от времени, так как втекание происходит одновременно. Поэтому:

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx; \quad c'_x = c_x + \frac{\partial c_x}{\partial x} dx;$$

$$dm''_x = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right) \left(c_x + \frac{\partial c_x}{\partial x} dx \right) dydzdt$$

После преобразований получим

$$dm''_x = \left(\rho c_x + \frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} dx \right) dydzdt$$

Если за время dt масса жидкости внутри параллелепипеда увеличилась за счет притока на величину dm'_x , а уменьшилась за счет вытекания на величину dm''_x , то изменение массы в этом движении вдоль координатной оси Ox равняется:

$$dm_x = dm' - dm'' = \rho c_x dydzdt - \left(\rho c_x + \frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} dx \right) dydzdt =$$

$$= - \frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} dx dydzdt$$

Аналогично найдем, что изменение массы в итоге движения вдоль осей Oy и Oz равняется:

$$dm_y = -\frac{\partial(\rho c_y)}{\partial y} dy dx dz dt; \quad dm_z = -\frac{\partial(\rho c_z)}{\partial z} dz dy dx dt.$$

Общее изменение массы за время dt равно:

$$dm = dm_x + dm_y + dm_z = \left(\frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt.$$

С другой стороны, изменение массы жидкости в объеме $(dx dy dz)$ параллелепипеда можно рассматривать как изменение массы в зависимости от времени. Ввиду постоянства координат x , y , z (так как параллелепипед неподвижен) изменение массы в нем обусловлено изменением плотности во времени, так как в этом случае $\rho = f(t)$. В начальный момент времени t масса внутри параллелепипеда равна $dM' = \rho dx dy dz$. По прошествии промежутка времени dt средняя для объема параллелепипеда плотность ρ изменится и будет равна ρ'

$$\rho' = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt.$$

В момент времени $t + dt$ масса жидкости в объеме параллелепипеда равняется

$$dM'' = \rho' dx dy dz = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz.$$

Таким образом, изменение массы за время dt будет равно

$$dM = dM'' - dM' = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

Выражения dm и dM в условиях сплошности течения представляют одно и то же изменение массы в объеме параллелепипеда, поэтому $dm = dM$ или

$$\left(\frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt.$$

Сократив это уравнение на величину объема параллелепипеда (dx, dy, dz) (это сокращение указывает на независимость результата от объема), получим

$$\frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.1)$$

Это и есть уравнение неразрывности. Оно одинаково справедливо как для капельной несжимаемой ($\rho = \text{const}$), так и газообразной сжимаемой ($\rho \neq \text{const}$) жидкости. В частном случае установившегося движения плотность (как и все остальные параметры движения) от времени не зависит и, следовательно, $\partial \rho / \partial t = 0$. Поэтому уравнение неразрывности в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c_z)}{\partial z} = 0.$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), как при установившемся, так и при неустановившемся движении, уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial(c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(c_z)}{\partial z} = 0.$$

Уравнение неразрывности для установившегося двухмерного (плоского) движения и одномерного движения имеет, соответственно, вид:

$$\frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_y)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} = 0.$$

Для частного случая одномерного установившегося движения несжимаемой жидкости из уравнения неразрывности (3.1) можно получить формулу расхода жидкости для элементарной струйки:

$$\frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} = 0 \text{ или } \partial(\rho c_x) = 0, \text{ т.е. } \rho c_x = \text{const.}$$

Умножив на постоянную величину dS , где dS – площадь поперечного сечения элементарной струйки, получим $\rho c_x dS = \text{const}$, то есть $G_x = \text{const}$, кг/с или $c_x dS = \text{const}$, то есть $Q_x = \text{const}$, $\text{м}^3/\text{с}$.

Дифференциальное уравнение неразрывности течения (3.1) можно представить и в другом виде, учитывая что:

$$\frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} = \rho \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \text{ справедливо и для других осей координат.}$$

Запишем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} c_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} c_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} c_z + \rho \left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Записав проекции скорости как

$$c_x = \frac{dx}{dt}; c_y = \frac{dy}{dt}, c_z = \frac{dz}{dt}, \text{ получим:}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \rho \left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) = 0$$

$$\rho = f(x, y, z, t), \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

поэтому

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) = 0.$$

3.4. Скорость движения жидкой частицы

Для выяснения кинематических особенностей движения жидкости необходимо общее движение с «абсолютной» скоростью $c = c(r, t)$ разложить на простейшие.

Как известно, скорость произвольной точки твердого тела c всегда может быть представлена как векторная сумма скорости c_0 поступательного движения полюса O и скорости вращения $(\vec{\omega} \times \vec{r}_0)$ вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс:

$$\vec{c} = \vec{c}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_0).$$

Движение жидкой частицы является более сложным и определяется *теоремой Коши–Гельмгольца*, согласно которой скорость движения c любой точки жидкой частицы в данное мгновение можно рассматривать как результат сложения векторов скоростей трех более простых движений:

- 1) скорость квазитвердого поступательного движения произвольного полюса O , находящегося в самой частице;
- 2) скорость вращения частицы $(\vec{\omega} \times \vec{r}_0)$ около собственной оси, то есть оси, проходящей через полюс O ;
- 3) скорость c_D деформационного движения, изменяющего форму и размеры частицы.

В результате:
$$\vec{c} = \vec{c}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_0) + \vec{c}_D$$

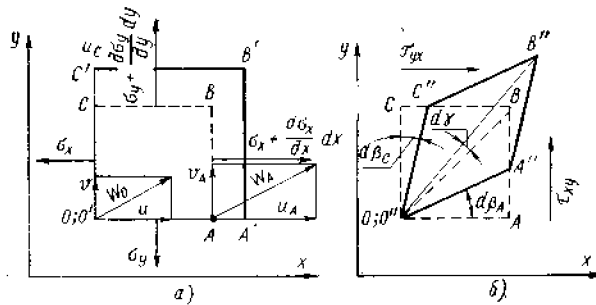


Рис. 3.2. Деформация элемента жидкости

Наличие или отсутствие деформационного и вращательного движения жидких частиц определяет качественно отличные модели движения жидкости.

На рис. 3.2 совмещены в полюсе O две проекции на плоскость xOy элементарного жидкого параллелепипеда с ребрами dx , dy , dz в начальный момент движения t и в момент $t + dt$ после перемещения в пространстве, деформаций и вращения. Для наглядности на рис. 3.2, *а* представлен результат лишь линейной деформации удлинения ребер, а на рис. 3.2, *б* только деформации сдвига ребер и вращения элемента.

Пусть проекции скорости полюса O в начальный момент времени u и v . Проекции скоростей точек A и C в общем случае будут

$$u_A = u + (\partial u / \partial x) dx, \quad v_A = v + (\partial v / \partial x) dx,$$

$$u_C = u + (\partial u / \partial y) dy, \quad v_C = v + (\partial v / \partial y) dy.$$

Скорости относительной линейной деформации. Точка A движется относительно полюса O вдоль оси x со скоростью $(\partial u / \partial x) dx$. Это вызывает линейную деформацию удлинения или укорочения ребра OA , равную $AA' = (\partial u / \partial x) dx dt$. Аналогичное рассмотрение линейных деформаций вдоль осей y и z позволяет рассчитать величины линейных деформаций, отнесенных к длине ребер, в единицу времени, т. е. *скоростей линейных деформаций* ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z вдоль соответствующих осей координат:

$$\epsilon_x = AA' / dx dt = \partial u / \partial x; \quad \epsilon_y = \partial v / \partial y;$$

$$\epsilon_z = \partial \omega / \partial z.$$

Объемная деформация состоит в изменении объема $dV = dx dy dz$ параллелепипеда на величину $\partial V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$ за счет удаления или сближения противоположных граней. Учтем, что $AA' = (\partial u / \partial x) dx dt$, и подсчитаем составляющую объемной деформации за счет изменения длины ребра dx по очевидной формуле, а для ребер dy и dz – по аналогии

$$\delta V_x = AA' dy dz = (\partial u / \partial x) dV dt;$$

$$\delta V_y = (\partial v / \partial y) dV dt; \quad \delta V_z = (\partial \omega / \partial z) dV dt.$$

Скорость относительной объемной деформации e представляет изменение объема частицы, отнесенное к ее первоначальному объему и времени деформации:

$$e = \delta V / (dV dt) = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial \omega / \partial z = \operatorname{div} \mathbf{v} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Для несжимаемой жидкости $e = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Скорость относительной деформации сдвига и угол поворота частицы (рис. 3.2). Движение точки A параллельно оси y со скоростью $v + (\partial v / \partial x) dx$ можно представить как движение вместе с полюсом O со скоростью v и относительно полюса со скоростью $(\partial v / \partial x) dx$. В результате относительного движения ребро OA за время dt повернется на бесконечно малый угол

$$d\beta_A \approx \operatorname{tg} d\beta_A = AA'' / dx = (\partial v / \partial x) dx dt / dx = (\partial v / \partial x) dt.$$

Аналогично ребро OC повернется на угол

$$d\beta_C \approx \operatorname{tg} d\beta_C = CC'' / dy = (\partial u / \partial y) dt.$$

Общая относительная деформация сдвига частицы или деформация скашивания прямого угла AOC в угол $A''OC''$ происходит в одинаковой степени под действием тангенциального напряжения τ_{xy} и τ_{yx} и равна $d\beta_A + d\beta_C = (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) dt$. Обозначив скорость суммарной относительной деформации сдвига, вызванной τ_{xy} , через $\theta_{xy} = (d\beta_A + d\beta_C) dt$, а вызванной τ_{yx} — через $\theta_{yx} = (d\beta_C + d\beta_A) dt$, приходим к заключению, что они равны $\theta_{xy} = \theta_{yx}$. Рассуждая аналогично, найдем скорости относительных деформаций сдвига в плоскостях xz и yz :

$$\theta_{xy} = \theta_{yx} = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y; \quad \theta_{xz} = \theta_{zx} = \partial \omega / \partial x + \partial u / \partial z;$$

$$\theta_{yz} = \theta_{zy} = \partial \omega / \partial y + \partial v / \partial z.$$

Итак, получены девять скоростей относительных деформаций, из которых шесть тангенциальных попарно равны

$$\theta_{xy} = \theta_{yx}; \quad \theta_{xz} = \theta_{zx}; \quad \theta_{yz} = \theta_{zy}.$$

Вращение частицы около собственной оси. Определим угол $d\gamma_z$ поворота частицы в плоскости xOy около собственной оси, проходящей через точку O параллельно оси z . Совместим на рис. 3.2 параллелограммы по диагоналям OB и OB'' и запишем очевидное равенство

$$d\beta_C + d\gamma_z = d\beta_A - d\gamma_z,$$

отсюда

$$d\gamma_z = 0,5(d\beta_A - d\beta_C) = 0,5(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)dt$$

По аналогии для вращения около осей, параллельных осям x и y , получим

$$d\gamma_x = 0,5(\partial \omega / \partial y - \partial v / \partial z)dt;$$

$$d\gamma_y = 0,5(\partial u / \partial y - \partial \omega / \partial x)dt.$$

Глава 4. ГИДРОДИНАМИКА

4.1. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости в форме Эйлера

В потоке идеальной жидкости возьмем произвольную точку с координатами x, y, z и выделим элемент жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда так, чтобы точка M была одной из его вершин. Ребра параллелепипеда параллельны координатным осям и соответственно равны dx, dy, dz . Составим уравнения движения выделенного элемента жидкости, масса которого равна $\rho dx dy dz$ в проекции на оси координат. При этом используем принцип Д'Аламбера: силы, действующие на элемент жидкости в каждый момент времени, уравновешиваются силами инерции.

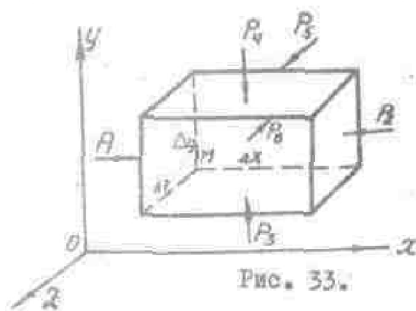


Рис. 4.1. Элементарный объем

На элемент жидкости действуют массовые и поверхностные силы. Положительное направление сил совпадает с положительным направлением осей координат. На выделенный элементарный объем жидкости действует результирующая массовая сила, составляющие напряжения которой равны X, Y, Z . Тогда массовые силы, действующие на выделенный объем в направления координатных осей, будут соответственно равны: $X \cdot \rho dx dy dz$; $Y \cdot \rho dx dy dz$; $Z \cdot \rho dx dy dz$. Из поверхностных сил, которые заменяет собой действие окружающей среды на выделенный элемент, нужно учитывать только

нормальные силы давления, так как жидкость идеальная. При вычислении сил давления, действующих на отдельные грани параллелепипеда, следует иметь в виду, что давления по трем взаимно ортогональным бесконечно малым площадкам, проходящим через одну и ту же точку M , равны $p_1 = p_2 = p_3 = p$. Тогда на противоположные грани действуют давления, отличающиеся на величину приращения давления вдоль соответствующей координатной оси. Так, например, поскольку

$$\delta_2 = \delta + \frac{\partial \delta}{\partial x} dx,$$

тогда разность сил давления на левую и правую грань (вдоль оси Ox) равна

$$(\delta_1 - \delta_2) dz dy = -\frac{\partial \delta}{\partial x} dx dz dy.$$

Аналогично находим результирующие силы давления на оси y и z . Они будут соответственно равны

$$-\frac{\partial \delta}{\partial y} dy dz dx; \quad -\frac{\partial \delta}{\partial z} dz dy dx.$$

Скорость движения жидкости $c = f(x, y, z, t)$ в точке M и ее компоненты c_x, c_y, c_z изменяются с изменением координат и времени. Тогда проекции ускорения выделенного объема жидкости равны $\frac{dc_x}{dt}, \frac{dc_y}{dt}, \frac{dc_z}{dt}$, а силы инерции определяются как произведения этих ускорений на массу параллелепипеда:

$$\frac{dc_x}{dt} \rho dx dy dz; \quad \frac{dc_y}{dt} \rho dx dy dz; \quad \frac{dc_z}{dt} \rho dx dy dz.$$

Уравнения движения выделенного объема жидкости в проекциях на координатные оси теперь запишутся в следующем виде:

$$\rho dx dy dz \frac{dc_x}{dt} = X \rho dx dy dz - \frac{d\delta}{dx} dx dy dz;$$

$$\rho dx dy dz \frac{dc_y}{dt} = Y \rho dx dy dz - \frac{d\delta}{dy} dy dz dx;$$

$$\rho dx dy dz \frac{dc_z}{dt} = Z \rho dx dy dz - \frac{d\delta}{dz} dz dx dy.$$

Разделив эти уравнения почленно на массу элемента $\rho dx dy dz$, получим уравнения движения жидкости, отнесенные к единице массы:

$$\begin{aligned} \frac{dc_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}; \\ \frac{dc_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy}; \\ \frac{dc_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Полученная система дифференциальных уравнений носит название уравнений движения идеальной жидкости в форме Эйлера. Члены этих уравнений представляют собой соответствующие ускорения. Смысл каждого из уравнений заключается в следующем: полное ускорение частицы вдоль координатной оси складывается из ускорения от массовых сил и ускорения от сил давления. Уравнения Эйлера в таком виде справедливы как для несжимаемой, так и для сжимаемой жидкости, то есть газа, а также для случая установившегося движения. Уравнения движения в форме Эйлера недостаточны для решения гидродинамических задач, так как число уравнений три, а число неизвестных – пять (c_x, c_y, c_z, p, ρ). К этим уравнениям необходимо добавить уравнение неразрывности движения

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \quad (4.2)$$

и так называемое характеристическое уравнение, которое устанавливает зависимость между плотностью жидкости, давлением и

температурой: $\rho = f(p, T)$ для случая несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$.

Для случая газообразной идеальной жидкости характеристическим уравнением является уравнение: $\rho = \frac{\delta}{gRT}$.

Для некоторых случаев движения предполагают, что плотность рассматриваемой среды зависит только от давления и не зависит от температуры $\rho = f(p)$, такая среда называется баротропной.

Граничные и начальные условия

При решении конкретных задач гидрогазодинамики приходится интегрировать дифференциальные уравнения движения (4.1). Этим уравнениям удовлетворяет бесчисленное множество искомым функций $c = f(x, y, z, t)$ и постоянных интегрирования. Чтобы выбрать из них те, которые соответствуют конкретной задаче, необходимо знать начальные и граничные условия.

Начальные условия заключаются в том, что задается состояние движения, т.е. поле скоростей и давлений, в начальный момент времени $t = t_0$. Начальные условия имеют значение лишь при решении задач, относящихся к неустановившемуся движению.

Граничные условия могут быть весьма разнообразными и необходимы при решении задач с установившимся и неустановившимся движением. Граничные условия делятся на кинематические и динамические.

Кинематические граничные условия сводятся к заданию скорости (по величине или направлению) или ее производных на внешней границе рассматриваемого объема жидкости.

Динамические граничные условия сводятся к заданию давлений на внешней границе рассматриваемого движущегося объема жидкости (газа). В частности, если жидкость имеет свободную поверхность раздела в атмосфере, то во всех точках свободной поверхности давление должно равняться атмосферному. Это условие служит для определения формы свободной поверхности жидкости.

4.2. Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости в форме Навье–Стокса

Дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости значительно сложнее уравнений движения идеальной жидкости, так как влияние вязкости сказывается не только в появлении касательных напряжений, но и в изменении величины нормального давления. Для их составления выделим в прямоугольной системе координат в потоке жидкости у точки $M(x, y, z)$ элемент жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда так, чтобы точка M была одной из его вершин.

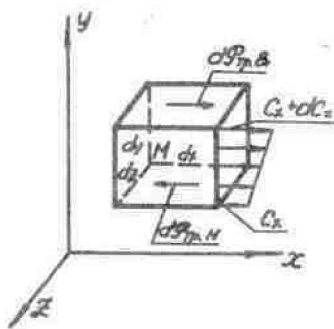


Рис. 35.

Рис. 4.2. Элементарный объем

Выражения для массы элемента, проекций его ускорения на оси координат, проекций объемных сил запишутся здесь так же, как и при выводе уравнений движения идеальной жидкости в форме Эйлера (см. рис. 4.2). Отличие будет только в выражениях для поверхностных сил. В случае вязкой жидкости на грани параллелепипеда будут действовать не только нормальные напряжения давления p_x, p_y, p_z , но и касательные, потому что поверхностные силы в вязкой жидкости не ортогональны к рассматриваемой поверхности. В уравнения движения вязкой жидкости, помимо ускорений, учитываемых при движении идеальной жидкости, должны войти

еще и ускорения от сил трения. Посмотрим сначала, как следует учитывать ускорения от сил трения при плоскопараллельном движении жидкости вдоль оси x с градиентом скорости только в направлении оси y .

Согласно гипотезе Ньютона, при слоистом (ламинарном) течении жидкости сила трения между ее слоями равна

$$F_{\partial\partial} = -\mu S \frac{dc}{dy}.$$

Напряжение трения

$$\tau = \frac{F_{\partial\partial}}{S} = -\mu \frac{dc}{dy}.$$

При наличии градиента скорости вдоль оси y силы трения на верхнюю и нижнюю грани параллелепипеда действуют в противоположных направлениях. Сила трения на нижней грани элемента определяется как

$$dF_{\partial\partial.i} = -\tau_x dS = -\tau_x dx dz;$$

на верхней грани элемента, где напряжение трения τ_x получило приращение $\frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy$, она равна

$$dF_{\partial\partial.a} = \left(\tau_x + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} dy \right) dx dz.$$

Равнодействующая силы трения, действующая на жидкий элемент в направлении оси x , будет определяться разностью сил, действующих на нижнюю и верхнюю грани элемента:

$$d(F_{\partial\partial})_x = dF_{\partial\partial.a} - dF_{\partial\partial.i} = -\frac{\partial \tau_x}{\partial y} dx dy dz.$$

Так как согласно гипотезе Ньютона $\tau_x = \mu \frac{dc_x}{dy}$ и $\frac{\partial \tau_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2}$,

то

$$d(F_{\delta\delta})_x = \mu \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} dx dy dz.$$

Соответствующее ускорение, т.е. силу трения, приходящуюся на единицу массы элемента $dm = \rho dx dy dz$, можно выразить как

$$\frac{d(F_{\delta\delta})_x}{dm} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2}.$$

В трехмерном потоке, когда градиенты скорости могут существовать в направлении всех трех координатных осей, ускорение от сил трения в проекциях на оси x , y , z , выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d(F_{\delta\delta})_x}{dm} &= \nu \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{d(F_{\delta\delta})_y}{dm} &= \nu \left(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2} \right); \\ \frac{d(F_{\delta\delta})_z}{dm} &= \nu \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Эти проекции ускорений от сил трения следует ввести в дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости помимо ускорений, действующих на частицу идеальной жидкости. Тогда дифференциальные уравнения движения вязкой жидкости запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dc_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{d\delta}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{dc_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{d\delta}{dy} + \nu \left(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2} \right), \\ \frac{dc_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{d\delta}{dz} + \nu \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Уравнения движения, записанные в такой форме (4.3), называются уравнениями Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости. Если при изучении движения вязкой жидкости одновременно учитывать и сжимаемость, то уравнения движения будут более сложными.

При движении вязкой (реальной) жидкости за гидростатическое давление в точке принимают среднее арифметическое значение давлений по трем произвольным, проходящим через данную точку, взаимно перпендикулярным площадкам, т.е.

$$\bar{p} = \frac{\partial_x + \partial_y + \partial_z}{3}.$$

Все слагаемые в уравнениях Навье–Стокса, так же как и в уравнениях Эйлера, имеют размерность ускорения. В левую часть уравнений входит проекция полного ускорения частицы, в правую часть – проекции ускорения от объемных сил, от сил давления и от сил вязкости (трения). Неизвестными величинами являются скорости c_x, c_y, c_z , давление p и в общем случае течения сжимаемой жидкости плотность ρ . Зависимость μ от температуры считается известной. Для того чтобы получилась замкнутая система уравнений, в которой число уравнений равнялось числу неизвестных, необходимо к уравнениям Навье–Стокса присоединить уравнение неразрывности движения

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0,$$

а в случае сжимаемой жидкости еще и характеристическое уравнение $\rho = f(p, T)$.

4.3. Уравнение количества движения

При решении некоторых задач МЖГ используется уравнение количества движения. Важнейшей особенностью этого уравнения является то, что для определения действующих сил не нужно знать существа процессов, происходящих внутри выделенного участка потока жидкости, нужно знать только параметры жидкости на гра-

ницах участка. В механике твердого тела известна теорема об изменении количества движения. Она гласит: элементарное изменение количества движения некоторой массы m по какому-либо направлению равно элементарному импульсу равнодействующей сил, приложенных к этой массе в том же направлении, т.е. $d(m\vec{v}) = \vec{F} dt$, где F – проекция равнодействующей всех сил, приложенных к массе m , на какую-либо ось; v – проекция скорости на ту же ось; dt – время действия силы F ; $F \cdot dt$ – импульс силы; $d(mv)$ – изменение количества движения. Применительно к потокам жидкостей и газов более удобна несколько иная (гидродинамическая) форма теоремы об изменении количества движения.

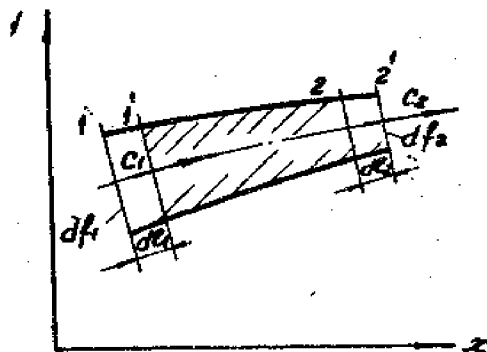


Рис. 4.3. Струйка тока

Рассмотрим установившееся движение элементарной струйки жидкости (рис. 4.3). Проведем два нормальных к ее оси сечения 1 и 2 и обозначим массу жидкости, заключенную в объеме 1–2, через m_{1-2} . За время dt выделенная масса жидкости переместится в положение 1'–2'. Изменение количества движения выделенной массы жидкости за dt будет определяться только разностью количества движения в элементарных объемах 2–2' и 1–1', так как при установившемся движении масса жидкости в замкнутом объеме 1'–2 остается неизменной.

В случае неустановившегося движения количество движения заштрихованного объема 1'–2 с течением времени изменяется.

В пределах элементарных объемов 2-2' и 1-1' параметры равны соответственно:

$$c_{1-1'} = c_1; \quad c_{2-2'} = c_2; \quad m_{1-1'} = m_{2-2'} = m;$$

поэтому $d(mc) = m(c_2 - c_1)$, тогда имеем, что $m(c_2 - c_1) = Fdt$ или, разделив уравнение на dt , получим

$$\frac{m}{dt}(c_2 - c_1) = F, \quad \text{где } \frac{m}{d\tau} = G.$$

Тогда

$$F = G(c_2 - c_1). \quad (4.4)$$

При выводе уравнения (4.4) предполагалось, что F , c_2 , c_1 имеют одинаковое направление. В проекциях на оси координат Ox и Oy уравнение (4.4) примет вид:

$$\begin{aligned} F_x &= G(c_{2x} - c_{1x}) \\ F_y &= G(c_{2y} - c_{1y}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

где G – массовый расход жидкости через площадь сечения струйки, перпендикулярную к направлению скорости; F_x , F_y – соответствующие проекции на оси координат равнодействующей всех внешних сил, приложенных к струйке жидкости на участке 1-2.

Из уравнений (4.5) следует, что проекция равнодействующей всех сил, приложенных к рассматриваемой массе жидкости, на некоторое направление равна секунднему изменению количества движения ($\Delta G \cdot c$) этой массы жидкости в том же направлении. Эта теорема известна под названием теоремы Эйлера об изменении количества движения и предложена им в 1754 году. В общем случае внешними силами, приложенными к жидкости на рассматриваемом участке, являются поверхностные нормальные (силы давления, действующие в пределах замкнутого контура между сечениями 1 и 2); поверхностные касательные (силы трения, действующие в направлении, противоположном движению потока); массовые (силы тяжести).

Теорема Эйлера может быть распространена и на случай, когда внутри потока жидкости имеется твердое тело или жидкость ограничена поверхностью твердой стенки. Тогда необходимо учитывать, кроме перечисленных сил, еще силы воздействия на жидкость поверхностей твердых стенок, охватывающих поток или находящихся внутри его. В зависимости от конкретных условий задачи тот или иной вид сил может исключаться. Например, в случае применения уравнения Эйлера к движению идеальной жидкости силы трения исключаются; в случае движения жидкости в прямолинейном канале постоянного сечения проекция на ось канала равнодействующей сил давления на боковую поверхность канала равна 0.

4.4. Уравнение момента количества движения

Уравнение момента количества движения не является новым независимым уравнением гидрогазодинамики. Оно представляет новую форму уравнения движения, членами которого являются не силы и не количество движения, а моменты сил и моменты количества движения. Это уравнение широко используется при исследовании вращательного движения жидкости, является основным в теории турбомашин.

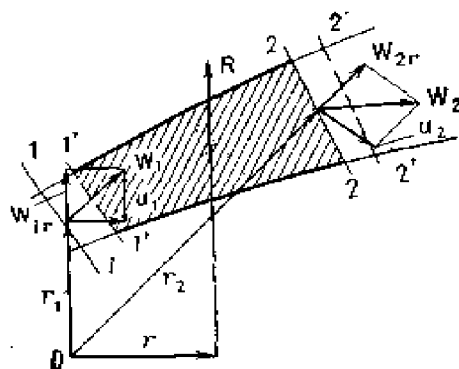


Рис. 4.4. Вывод уравнения момента количества движения

Уравнение момента количества движения для жидкого объема так же, как и для твердого тела, устанавливает, что момент равнодействующей внешних сил относительно произвольной оси равен полной производной по времени от суммарного момента количества движения относительно той же оси, т. е.

$$\sum \vec{F} \times \vec{r} = \frac{d}{dt} (\sum m \vec{c} \times \vec{r}), \quad (4.6)$$

где \vec{F} – радиусы векторы внешних сил и элементарных масс, имеющих скорости \vec{c} ; $m \vec{c} \times \vec{r}$ – момент количества движения элементарной массы m .

Расчетная форма уравнения может быть получена с помощью предельного перехода ($\Delta t \rightarrow 0$) от рассмотрения движения жидкого объема к контрольному объему. Получим уравнение момента количества движения для контрольного объема в векторной форме

$$\sum \vec{F} \times \vec{r} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{c} \times \vec{r}) dV + \int_{S_{\text{вх}}} \rho c_n (\vec{c} \times \vec{r}) dS - \int_{S_{\text{вых}}} \rho \vec{n} (\vec{c} \times \vec{r}) dS, \quad (4.7)$$

устанавливающее, что сумма моментов всех внешних сил, приложенных к жидкости в контрольном объеме относительно произвольной оси, равна частной производной по времени суммарного момента количества движения этой жидкости плюс разность суммарных секундных моментов количества движения на выходе из контрольного объема и на входе в него относительно той же оси.

Уравнение момента количества движения для плоскопараллельного движения жидкости. Спроектируем равнодействующую всех внешних сил, действующих на жидкость в контрольном объеме 1–2, и скорости на входе в контрольный объем и на выходе из него на плоскость xOy . Получим эквивалент плоского течения (рис. 4.4). Разложим скорости на радиальные – c_r и окружные – c_θ составляющие. Моменты количества движения от радиальных составляющих равны нулю ($r = 0$) и уравнение (4.7) принимает простейшую и наиболее часто употребляемую в теории лопаточных машин форму:

$$M_z = Fr = G(c_{u2} r_2 - c_{u1} r_1). \quad (4.8)$$

В соответствии с (4.8), момент равнодействующей внешних сил относительно произвольной оси равен приращению момента секундного количества движения жидкости $\Delta Gc_u r$ на участке струйки 1-2 относительно той же оси.

Вращение жидкости по инерции. Если момент внешних сил относительно данной оси равен нулю ($M_z = 0$), то момент секундного количества движения сохраняет постоянное значение и жидкость вращается по инерции

$$W_{u2} r_2 = W_{u1} r_1 = W_u r = \text{const}; \quad W_u = \text{const}/r.$$

Вращение жидкости по инерции подчиняется закону потенциального вихря и имеет место в идеальной центробежной форсунке.

4.5. Уравнение Бернулли

Выделим мысленно в идеальной жидкой среде элементарный объем и сформулируем для него закон сохранения энергии.

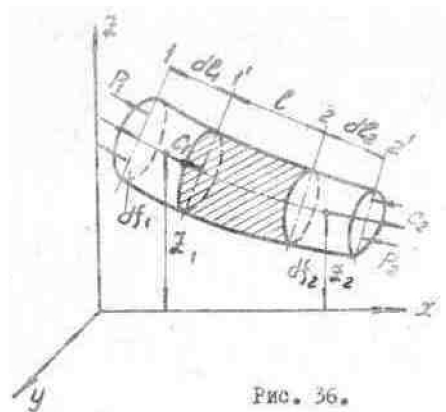


Рис. 36.

Рис. 4.5. Элементарный объем

Движение элемента жидкости совершается под воздействием внешних (поверхностных) и массовых сил. В процессе движения элемента жидкости изменяется его кинетическая и потенциальная энергия, а силы совершают работу. В общем случае при наличии теплообмена с окружающей средой закон сохранения энергии гласит: изменение всех видов энергии (кинетической и внутренней) выделенного элемента жидкости за некоторый промежуток времени dt равно количеству теплоты, сообщенного элементу, сложенному с работой, которую произвели за то же время приложенные к элементу внешние силы. Внешними силами являются поверхностные силы, действующие нормально к поверхности струйки, и массовые силы – силы тяжести. Рассмотрим частный случай установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости без теплообмена с окружающей средой. Выведем уравнение сохранения энергии, называемое в этом случае уравнением Бернулли для элементарной струйки идеальной несжимаемой жидкости. Выделим в движущейся жидкости элементарную струйку, ограниченную сечениями 1 и 2, имеющими площадь dS_1 , dS_2 . К массе жидкости m_{1-2} элементарной струйки применим закон сохранения энергии. За бесконечно малый промежуток времени dt выделенный объем жидкости под воздействием внешних сил переместится из положения 1–2 в положение 1'–2'. Расстояния 1–1' и 2–2' есть бесконечно малые величины. Так как движение установившееся, то есть параметры жидкости в любой точке с течением времени не изменяются, то в заштрихованной части 1'–2, общей для обоих положений массы m_{1-2} , изменение скорости и энергии равно нулю. Поэтому при вычислении изменения энергии массы m_{1-2} (например, кинетической) энергия заштрихованного объема 1'–2, входящая в энергию массы m_{1-2} , в первоначальный и конечный моменты времени сократится.

Таким образом, изменение кинетической энергии за время dt всей массы жидкости m_{1-2} равно разности кинетических энергий объема 2–2' вытекающей и объема 1–1' втекающей жидкости. То же относится и к изменению других видов энергии (потенциальной и

энергии сил давления). При установившемся движении изменение этих видов энергии для всей массы m_{1-2} равно разности энергии объемов 2–2' и 1–1'. Важно отметить, что в случае неустановившегося движения кинетическая энергия заштрихованного объема 1–2 в начальный и конечный моменты времени неодинакова и в уравнении не сокращается. Так как параметры жидкости в пределах бесконечно малых объемов 1–1' и 2–2' постоянны, то индекс 1–1' заменим на 1, а 2–2' – на 2, то есть

$$dm_{1-1'} = dm_1; dm_{2-2'} = dm_2; c_{1-1'} = c_1; c_{2-2'} = c_2.$$

На основании условия неразрывности течения массовый расход жидкости через любое поперечное сечение элементарной струйки остается постоянным, отсюда $dm_1 = dm_2$

При движении элемента жидкости вдоль оси элементарной струйки масса его остается постоянной, но параметры (давление, скорость) изменяются. В результате изменяются как кинетическая и потенциальная энергия, так и энергия сил давления. Подсчитаем приращение кинетической энергии рассматриваемой массы жидкости за время dt :

$$\Delta E_k = \left(\frac{dmc^2}{2} \right)_2 - \left(\frac{dmc^2}{2} \right)_1 = \frac{dm(c_2^2 - c_1^2)}{2} \quad (4.9)$$

Изменение кинетической энергии движущейся массы жидкости происходит под действием работы внешних сил, ибо внутренняя энергия несжимаемой жидкости практически не изменяется. Внешними силами в данном случае являются поверхностные – силы давления и массовые – силы тяжести. Подсчитаем работу сил давления и сил тяжести. Работа сил давления, приложенных к боковой поверхности струйки жидкости, равна нулю, так как эти силы перпендикулярны линиям тока, вдоль которых происходит перемещение частиц. Поэтому следует определить лишь работу сил давления, приложенных к торцам элемента. Работа dL_1 сил давления p_1 в сечении 1–1 будет положительна, так как направление силы совпадает с направлением перемещения, и выразится как произ-

ведение силы $dF_1 = p_1 dS$ на путь $dl_1 = c_1 dt$, проходимый частицами жидкости за dt , то есть

$$dL_1 = dF_1 dl_1 = p_1 dS_1 c_1 dt.$$

Работа сил противодействия в сечении 2–2 отрицательна, так как направление сил противоположно направлению перемещения, и определится выражением $dL_2 = p_2 dS_2 c_2 dt$. Итак, силы давления по всей поверхности элементарной струйки производят работу

$$\Delta E_{\text{давл}} = dL_1 - dL_2 = (p_1 dS_1 c_1 - p_2 dS_2 c_2) dt = (p_1 - p_2) dG_v,$$

где dG_v – объемный расход жидкости, m^3/c .

Определим работу массовых сил, т.е. сил тяжести. Поскольку при установившемся движении работа сил тяжести заштрихованного объема не изменяется, то работа сил тяжести всей элементарной струйки за время dt будет равна работе силы тяжести жидкости объема 1–1' при перемещении ее из положения 1–1' в положение 2–2'. Иначе говоря,

$$\Delta E_{\text{тяж}} = dm(z_1 - z_2)g,$$

где z_1 и z_2 – расстояния центров тяжести объемов 1–1' и 2–2' от некоторой горизонтальной плоскости сравнения, или иначе – ординаты центров тяжести этих объемов. Таким образом, уравнение энергии для элементарной струйки идеальной жидкости приобретает вид

$$\Delta E_k = \Delta E_{\text{давл}} + \Delta E_{\text{тяж}}. \quad (4.10)$$

При теплообмене между струйкой и окружающей средой, в результате которого жидкость нагревается или охлаждается, в уравнение (4.10) справа надо ввести внешнюю теплоту $\pm \Delta Q_{\text{пар}}$, а слева – изменение внутренней энергии жидкости $\pm \Delta U = dm \cdot C \cdot \Delta T$, где C – теплоемкость жидкости, а ΔT – изменение температуры жидкости. После подстановки ΔE_k , $\Delta E_{\text{давл}}$ и $\Delta E_{\text{тяж}}$ в (4.10) получим

$$dm \frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2g} = dG_v (p_1 - p_2) dt + dm (z_1 - z_2) g. \quad (4.11)$$

Поделим на $dm = \rho dG_v dt$, т.е. отнесем уравнение к единице веса жидкости, тогда

$$\frac{(c_2^2 - c_1^2)}{2g} = \frac{(p_1 - p_2)}{\rho g} + (z_1 - z_2). \quad (4.12)$$

Сгруппируем члены, относящиеся к сечению 1-1, в левой части, а относящиеся к сечению 2-2 - в правой части уравнения

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g}. \quad (4.13)$$

Это и есть уравнение Бернулли, записанное для элементарной струйки идеальной несжимаемой жидкости. Если неограниченно сближать между собой сечения 1-1 и 2-2, то получим уравнение Бернулли в дифференциальной форме

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + \frac{d(c^2)}{2g} = 0. \quad (4.14)$$

Так как сечения 1-1 и 2-2 были взяты произвольно, то уравнение Бернулли можно записать в виде

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{c^2}{2g} = H^0 = const \quad (4.15)$$

Формула (4.15) является теоремой трех высот.

Рассмотрим физический, а точнее, энергетический смысл уравнения Бернулли. Условимся называть удельной энергией, отнесенную к единице массы жидкости, т.е. $E_{уд} = E/m$. Нетрудно убедиться, что члены уравнения Бернулли являются различными формами удельной механической энергии жидкости, а именно: z – удельная потенциальная энергия положения, геометрический напор; $p/\rho g$ – удельная потенциальная энергия давления, пьезометрический напор; $z + p/\rho g$ – удельная потенциальная энергия, гидростатический напор; $c^2/2g$ – удельная кинетическая энергия,

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{c^2}{2g} \quad - \text{ полная удельная энергия, полный напор.}$$

Энергетический смысл уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости заключается в постоянстве вдоль струйки полной удельной энергии. Уравнение Бернулли представляет собой закон сохранения механической энергии при установившемся движении идеальной жидкости.

Давление торможения. Запишем уравнение Бернулли для горизонтальной элементарной струйки ($z_1 = z_2$):

$$p_1 + \rho \frac{c_1^2}{2g} = p_2 + \rho \frac{c_2^2}{2g} = p + \rho \frac{c^2}{2g} = p^* = const, \quad (4.16)$$

где p^* – давление торможения; p – давление в потоке.

Из (4.16) следует важный практический вывод о том, что по измерениям p и p^* , например, при помощи трубки Пито–Прандтля, можно определить локальную скорость жидкости или газа по следующей формуле

$$c = \sqrt{\frac{2(p^* - p)}{\rho}}.$$

Подробнее см. лабораторные работы № 1 и 2 в Приложении А.

4.6. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости

Применим теперь закон сохранения энергии к элементарной струйке реальной (вязкой) жидкости. Допустим, что жидкость несжимаемая и теплообмен выделенной струйки с окружающей средой отсутствует. Движение жидкости установившееся. Выделим в движущейся жидкости элементарную струйку, ограниченную сечениями 1–1 и 2–2. При движении идеальной жидкости от сечения 1 к сечению 2 полная удельная механическая энергия является величиной постоянной:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g}.$$

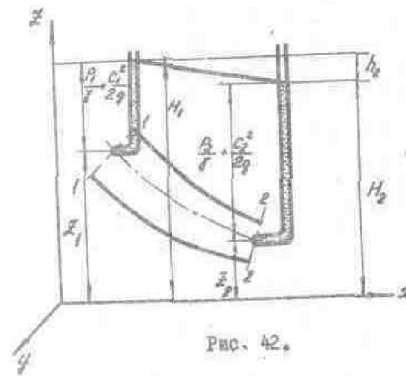


Рис. 4.6. Схема замера давлений

При движении вязкой жидкости полная удельная механическая энергия не остается постоянной вдоль струйки: в первом сечении она больше, чем во втором, т.е. $H_1^0 > H_2^0$. Запас полной энергии уменьшился, так как часть ее затрачена на преодоление сил трения: $H_1 - H_2 = h_{тр}$, в свою очередь $h_{тр} = L_{тр}/dm$, где $L_{тр}$ – работа сил трения. Энергия потока, израсходованная на преодоление сил трения, превращается в тепловую энергию, рассеивается и не может быть полностью восстановлена в механическую энергию в результате необратимости процесса. В этом смысле израсходованная на преодоление сил трения энергия называется потерянной. Тогда уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой несжимаемой жидкости примет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g} + h_{од}, \quad (4.17)$$

где $h_{тр}$ – удельная энергия, потерянная на преодоление трения (напор). Таким образом, при установившемся движении вязкой несжимаемой жидкости без теплообмена с окружающей средой раз-

ность полных напоров в двух сечениях одной и той же струйки равна напору, потерянному на трение между этими сечениями. Линия полного напора располагается не в горизонтальной плоскости, а снижается в направлении течения. Чем больше наклон этой линии, тем интенсивнее потери на трение в струйке между сечениями 1 и 2. В потоке реальной жидкости, кроме сопротивления трения, существуют и другие сопротивления, так называемые местные сопротивления, например, сопротивление при внезапном сужении и расширении потока, при резком изменении направления скорости и др., на преодоление которых, естественно, также затрачивается часть напора жидкости. В этом случае уравнение Бернулли записывается в виде

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g} + \sum h,$$

где $\sum h$ – суммарная потерянная энергия на преодоление всех сопротивлений, имеющих место между сечениями 1–2.

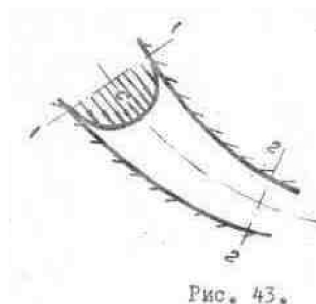


Рис. 4.7. Эпюры скорости

Вывод уравнения Бернулли для несжимаемой вязкой жидкости можно получить путем интегрирования уравнений движения в форме Навье–Стокса. Уравнение Бернулли, составленное для элементарной струйки, можно распространить на поток с поперечным

сечением конечных размеров, но при этом необходимо учесть неравномерность распределения скоростей по сечению вследствие вязкости жидкости. При движении вязкой жидкости вдоль твердой стенки, например в трубе, происходит неравномерное торможение потока в сечении под влиянием вязкости и сил молекулярного сцепления между жидкостью и стенками (у стенки торможение потока максимальное). Поэтому наибольшей величины скорость достигает в центральной части потока, а по мере приближения к стенке уменьшается практически до нуля. Получается распределение скорости в сечении. В неравномерном потоке имеет место сдвиг одних слоев жидкости относительно других, вследствие чего возникают касательные напряжения трения. Кроме того, движение вязкой жидкости сопровождается вращением частиц, вихреобразованием и перемешиванием. Для того чтобы одномерные уравнения элементарной струйки было можно применить к неравномерным потокам, вводится понятие средней скорости. Кинетическая энергия $A_{e_{\tilde{n}\delta}}$, вычисленная по средней скорости, не равна, а всегда меньше действительной величины кинетической энергии неравномерного потока E_k .

$$\text{Здесь } A_{e_{\tilde{n}\delta}} = \frac{\int \frac{\tilde{n}^2}{2} u dS}{Q} = \frac{\int \frac{\tilde{n}^3}{2} dS}{c_{\tilde{n}\delta} \cdot S}, \quad (4.18)$$

умножив и разделив в (4.18) на c_{cp}^2 , получим

$$A_{e_{\tilde{n}\delta}} = \frac{\int \tilde{n}^3 dS}{c_{\tilde{n}\delta}^3 \cdot S} \cdot \frac{c_{\tilde{n}\delta}^2}{2} = \alpha \cdot \frac{c_{\tilde{n}\delta}^2}{2},$$

$$\text{где } \alpha = \frac{A_{\dot{e}}}{A_{\dot{e}_{\text{н\ddot{o}}}}} = \frac{\int \dot{n}^3 dS}{c_{\text{н\ddot{o}}}^3 \cdot S} - \text{коэффициент неравномерности поля скорости}$$

(коэффициент Кориолиса). Он представляет собой отношение действительной кинетической энергии потока к кинетической энергии потока с тем же расходом, но имеющего равномерное поле скоростей в том же сечении.

Таким образом, в уравнении Бернулли применительно к неравномерному потоку, слагаемое кинетической энергии должно быть записано в виде $\alpha c_{\text{н\ddot{o}}}^2 / 2g$. Для ламинарного движения $\alpha = 2$, для турбулентного $\alpha = 1,02 \div 1,04$. В большинстве практических задач движение турбулентное, и принимают $\alpha = 1$. Допустим, что в поперечных сечениях неравномерного потока гидростатический напор остается постоянным для всех точек данного сечения:

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const}. \text{ Тем самым предполагается, что при движении}$$

жидкости отдельные струйки, в поперечном направлении, оказывают друг на друга такое же давление, как слои жидкости в неподвижном состоянии. В действительности это имеет место только в параллельно-струйных потоках, а в остальных случаях это условие приближенно.

С учетом сказанного уравнение Бернулли для неравномерного потока вязкой несжимаемой жидкости будет иметь вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{c_{\text{н\ddot{o}1}}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{c_{\text{н\ddot{o}2}}^2}{2g} + \sum h,$$

где $c_{\text{ср}}$ – средняя по сечению скорость (обычно индекс «ср» опускается), не реально существующая, а условная скорость;

$\sum h$ – суммарная потеря удельной энергии (напора) на преодоление различных гидравлических сопротивлений на участке между рассматриваемыми сечениями;

α – безразмерный коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей.

Глава 5. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

Гидравлические потери это потери удельной энергии (напора). Они зависят от шероховатости, формы и размеров канала, а также от скорости течения и вязкости жидкости и практически не зависят от абсолютного давления в жидкости. Опытами установлено, что гидравлические потери Δp_r пропорциональны кинетической энергии потока и определяются формулой Вейсбаха:

$$\Delta \delta_{\alpha} = \xi_{\alpha} \frac{\rho c^2}{2}, \quad (5.1)$$

где ξ_2 – коэффициент гидравлических потерь. Он характеризует отношение потерянного к скоростному напору.

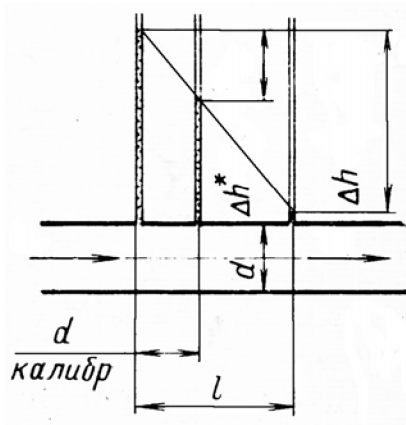


Рис. 5.1. Гидравлические потери

Гидравлические потери подразделяются на *потери на трение (потери по длине)* и *местные гидравлические потери*.

При течении несжимаемой жидкости в каналах постоянного сечения $S = \text{const}$, несмотря на наличие гидравлических сопротивлений и связанного с этим потерь напора, сохраняется постоянным значение среднерасходной скорости по длине трубы:

$$c = G_v/S = \text{const.} \quad (5.2)$$

Расчёт гидравлических сопротивлений (потерь) различных устройств пневмо-гидравлических систем является одним из основных вопросов гидравлики.

5.1. Потери на трение (потери по длине)

В чистом виде потери на трение можно наблюдать в прямом горизонтальном трубопроводе постоянного сечения (см. рис. 5.1). Эти потери обусловлены внутренним трением в жидкости, возрастают пропорционально длине трубопровода. Структура формулы для определения потерь на трение аналогична (5.1) и в метрах столба соответствующей жидкости имеет вид:

$$\Delta h_{\delta} = \xi_{\delta} \frac{c^2}{2g}, \quad (5.3)$$

где ξ_{mp} – коэффициент гидравлических потерь на трение, c – среднерасходное значение скорости, которое можно определить по формуле (5.2).

Коэффициент гидравлических потерь на трение удобнее представить в следующем виде:

$$\xi_{\delta} = \lambda_{\delta} \frac{l}{d}, \quad (5.4)$$

где λ_{mp} – коэффициент сопротивления трению трубы длиной в один калибр, то есть трубы с $l/d = 1$.

Физический смысл коэффициента трения λ_{mp} найдём из равенства нулю суммы двух сил, действующих на выделенный объём жидкости между сечениями 1 и 2:

$$\Delta p_{\delta} \frac{\pi d^2}{4} - \pi dl \tau = 0, \quad (5.5)$$

где τ – напряжение трения на стенке трубы.

После подстановки в (5.5) $\Delta p_{\delta\delta} = \lambda_{\delta\delta} \frac{l}{d} \frac{\rho c^2}{2}$ и сокращений

получаем

$$\lambda_{\delta\delta} = \frac{4\tau_{\delta\delta}}{\frac{\rho c^2}{2}},$$

то есть λ_{mp} – величина, пропорциональная отношению напряжения трения на стенке трубы к динамическому (скоростному) напору.

Значение λ_{mp} сложным образом зависит от режима течения (ламинарный, турбулентный), критерия Рейнольдса, относительной шероховатости стенки канала. Подробнее этот вопрос изложен в лабораторной работе № 4 (см. приложение А).

5.2. Местные гидравлические сопротивления

Этот вид потерь возникает за счёт местного изменения скорости, вихреобразования, связанного с местным отрывом потока от стенки канала или преграды на пути потока. Примеры наиболее распространённых местных гидравлических сопротивлений представлены на рис. 5.2-5.4. Структура формулы для расчёта местных гидравлических сопротивлений аналогична (5.1), в которой индекс z – «гидравлические» заменен на индекс m – «местные»:

$$\Delta p_m = \xi_m \frac{\rho c^2}{2}$$

Для большинства встречающихся в технике местных гидравлических сопротивлений значения ξ_m определены теоретически либо экспериментально и представлены в справочной литературе. Характерные сечения 1 и 2 до и после местного гидравлического сопротивления необходимо выбирать там, где параметры потока жидкости выровнялись. Важно отметить, что если площади характерных сечений у одного местного гидравлического сопротивления различны (см. канал с внезапным расширением на рис. 5.2), то в

расчёте гидравлических потерь участвует меньшая площадь (диаметр), то есть в гидравлический расчет закладывается большее значение скорости.

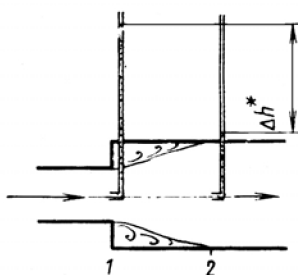


Рис. 5.2. Расширение канала

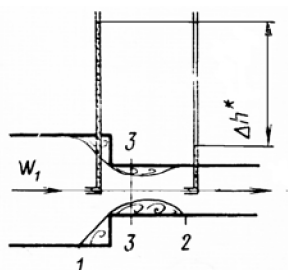


Рис. 5.3. Сужение канала

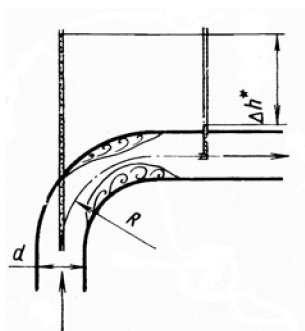


Рис. 5.4. Поворот канала

5.3. Истечение жидкости из отверстий и насадков

Этот процесс реализуется при подаче топлива через форсунки в камерах сгорания авиационных, ракетных, автомобильных двигателей и других топливосжигающих установок; при подаче воды через сопла на лопасти гидротурбин, для получения реактивной тяги водомётных судов; при перетекании жидкости через *жиклёры* в системах регулирования двигателей.

В процессе истечения потенциальная энергия жидкости частично превращается в кинетическую энергию струи, а частично затрачивается на преодоление *гидравлических сопротивлений*.

В общем случае решение поставленной задачи состоит в определении скорости истечения жидкости; её расхода; *гидравлических потерь* при заданных условиях как в прямой, так и в обратной постановке.

5.3.1. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре

На рис. 5.5 показана расчётная схема, применительно к которой сформулированы следующие основные и дополнительные условия.

Основные условия:

1. Сосуд неограниченной ёмкости (размеров).
2. Заданы свойства жидкости (плотность ρ , вязкость ν).
3. Истечение жидкости происходит в газообразную среду.
4. Отверстие находится под постоянным перепадом давления ($p_1 + \rho g z_1 - p_2 = \text{const}$).

Дополнительные условия:

1. $\frac{d_o}{\frac{p_1}{\rho g} + z_1} < 0,1$ - отверстие мало, следовательно, можно принять

напор постоянным для любой его точки по высоте;

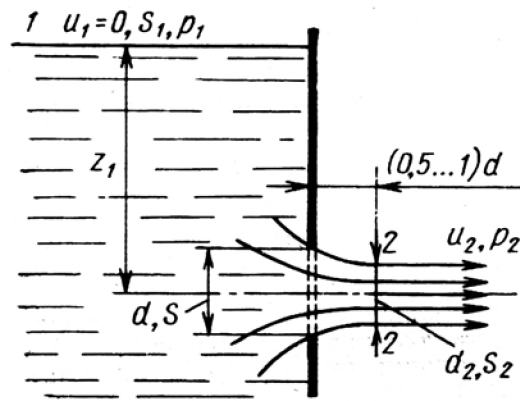


Рис. 5.5. Истечение жидкости

2. Стенка тонкая либо имеет острую кромку. В результате потери на трение по длине отверстия отсутствуют ($\xi_{\text{тр}} = 0$), несмотря на наличие местного гидравлического сопротивления ($\xi_{\text{м}} > 0$).

3. Отверстие достаточно удалено от свободной поверхности 1-1 и боковых стенок сосуда. В результате струйки жидкости подтекают к отверстию свободно, криволинейно и симметрично со всех сторон.

Требуется определить скорость истечения, расход жидкости и местное гидравлическое сопротивление отверстия в тонкой стенке.

Коэффициент сужения струи (ϵ). Траектории частиц жидкости перед отверстием криволинейны. В результате возникают центробежные силы, направленные к оси отверстия, что приводит к сужению струи до своего минимального значения ($d_{2 \text{ min}}$) в характерном сечении 2-2, расположенном на расстоянии $(0,5 \dots 1,0)d_0$ от отверстия. В сечении 2 давление в струе жидкости равно давлению газовой среды, в которую происходит истечение. Этот процесс оценивается коэффициентом сужения струи, представляющим собой отношение минимальной площади струи жидкости к площади отверстия через которое происходит истечение:

$$\varepsilon = \frac{S_2}{S_0} = \left(\frac{d_2}{d_0} \right)^2$$

$$\varepsilon = \frac{S_2}{S_0} = \left(\frac{d_2}{d_0} \right)^2.$$

Коэффициент скорости (φ). Запишем уравнение Бернулли для участка 1–2. Исходя из основных и дополнительных условий: $c_1 = 0$; $c_2 = \text{const}$ по сечению 2; нивелирная плоскость проходит через ось струи; $L_{\text{мех}} = L_{\text{тр}} = 0$. В результате

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g} + \xi_i \frac{c_2^2}{2g}.$$

После преобразований

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_i}} \cdot \sqrt{2g(z_1 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g})} = \varphi \cdot \sqrt{2gH},$$

где $\varphi = \frac{c_2}{c_{2\delta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_i}}$ – коэффициент скорости, представляющий

собой отношение реальной скорости истечения жидкости из отверстия к теоритической.

Отличие коэффициента скорости от единицы связано с вязкостью жидкости и другими причинами, вызывающими неравномерность профиля скорости по высоте отверстия.

Коэффициент расхода (ψ). Расход жидкости через отверстие определяется по параметрам в сечении 2: $G_2 = \rho S_2 \cdot c_2$.

Используя коэффициенты сужения струи (ε) и скорости (φ) этот расход записывается через площадь отверстия и идеальную скорость истечения: $G_2 = \rho \cdot \varepsilon \cdot S_0 \cdot \varphi \cdot w_{2m}$.

Обозначим через коэффициент расхода Ψ $\psi = \frac{G_2}{G_{2\delta}}$ – отноше-

ние фактического расхода к теоритическому. Учтем, что $\Psi = \varepsilon \cdot \varphi$.

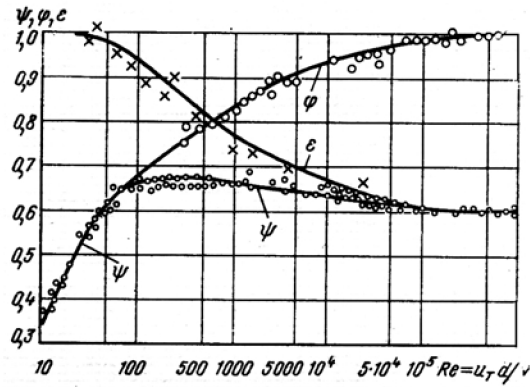


Рис. 5.6. Зависимость коэффициента расхода от числа Рейнольдса

Тогда
$$G_2 = \psi \cdot \rho \cdot S_0 \cdot c_{2m..}$$

Значения коэффициентов ϵ , ϕ , ψ в значительной степени зависят от числа Re (см. рис. 5.6). При $Re > 10^5$ наступает автомодельность течения и реальная жидкость практически соответствует идеальной ($\phi \rightarrow 1$, а $\xi_m \rightarrow 0$). Для отверстия в тонкой стенке при истечении маловязких жидкостей (вода, бензин, керосин, кислоты жидкого кислорода и водорода) можно принимать $\epsilon = 0,63$, $\phi = 0,97$, $\psi = 0,61$. На рис. 5.6 показаны графики изменения ϵ , ϕ , $\psi = f(Re)$.

5.3.2. Истечение жидкости через затопленное отверстие (истечение под уровень)

Этот процесс наблюдается при перетекании жидкости через малое отверстие из одного сосуда в другой, заполненный той же жидкостью. В этом случае гидравлические сопротивления состоят из местного сопротивления затопленного отверстия $\xi_i \frac{\rho c^2}{2}$ и «удара Борда-Карно» на который затрачивается вся кинетическая энергия струи $\frac{\rho \cdot c_2^2}{2}$.

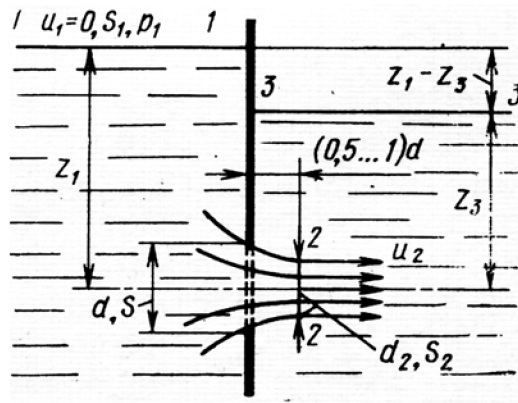


Рис. 5.7. Истечение из жидкости в жидкость

Уравнение Бернулли для течения жидкости между сечениями 1 и 3 (см. рис. 5.7) в условиях $c_1 = c_3 = 0$ и $c_2 = \text{const}$ по сечению отверстия записывается так:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = gz_3 + \frac{p_3}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + \xi_i \frac{c_2^2}{2} = gz_3 + \frac{p_3}{\rho} + (1 + \xi_i) \frac{c_2^2}{2} \quad (5.6)$$

Откуда скорость истечения

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_i}} \sqrt{2g \left[(z_1 - z_3) + \left(\frac{p_1 - p_3}{\rho} \right) \right]} = \varphi \sqrt{2gH},$$

$$\text{где } H = (z_1 - z_3) + \left(\frac{p_1 - p_3}{\rho g} \right) = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_3 + \frac{p_3}{\rho g} \right) -$$

разность (перепад) гидростатических напоров на оси отверстия до него и за ним, p_1 и p_3 - давление на свободную поверхность 1 и 3. Видно, что скорость истечения и расход жидкости не зависят от глубины погружения отверстия. Значения коэффициентов ϵ , φ , ψ определяются так же, как и при истечении в газообразную среду (см. раздел 5.3.1).

Уравнение Бернулли для случая истечения под уровень можно записать в более простом виде. Перепишем (5.6) в Pa :

$$p_1 + gz_1\rho = gz_3\rho + p_3 + \frac{\rho c_2^2}{2} + \xi_i \frac{\rho c_2^2}{2}.$$

Введем следующие замены:

$p_{до} = p_1 + gz_1\rho$ - гидростатическое давление до отверстия;

$p_{за} = p_3 + gz_3\rho$ - гидростатическое давление за отверстием;

$p_{за}^* = p_{за} + \frac{\rho c_2^2}{2}$ - давление торможения за отверстием;

$\Delta p_{м} = \xi_{м} \frac{\rho c_2^2}{2}$ - местные гидравлические потери.

В результате $p_{до} = p_{за}^* + \Delta p_{м}$.

5.3.3. Струйная форсунка

Простейшая струйная форсунка представляет собой трубку 1, заканчивающуюся днищем 2 в виде отверстия в тонкой стенке (см. рис. 5.8).

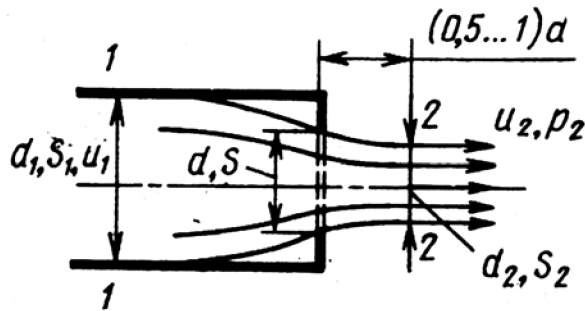


Рис. 5.8. Струйная форсунка

При течении жидкости в такой форсунке струя жидкости сужается в меньшей степени по сравнению с истечением жидкости из неограниченного объема, и коэффициент так называемого несовершенного сужения струи рассчитывается по следующей эмпирической формуле:

$$\varepsilon_i = \varepsilon + 0,37m^2,$$

где $m = \frac{S_0}{S_1}$ - отношение площади отверстия к площади сечения трубки;

ε - определяется в соответствии с рекомендациями разд. 5.3.1.

Скорость истечения жидкости из струйной форсунки определяется по уравнению Бернулли с учетом кинетической энергии жидкости в трубке:

$$p_1 + \frac{\rho c_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho c_2^2}{2} + \xi_i \frac{\rho c_2^2}{2},$$

или

$$p_1^* = p_2 + \frac{\rho c_2^2}{2} + \xi_i \frac{\rho c_2^2}{2},$$

откуда

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_i}} \sqrt{\frac{2(p_1^* - p_2)}{\rho}} = \varphi \sqrt{\frac{2(p_1^* - p_2)}{\rho}}.$$

Расход жидкости через струйную форсунку

$$G = \psi \cdot S_0 \cdot \rho \sqrt{\frac{2(p_1^* - p_2)}{\rho}} = \psi \cdot S_0 \cdot \sqrt{2\rho(p_1^* - p_2)}.$$

5.4. Гидравлический расчет трубопроводов

Жидкость движется по трубопроводу вследствие того, что ее потенциальная энергия в начале трубопровода больше, чем в конце. Располагаемая разность потенциальных энергий затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений между рассматриваемыми сечениями трубопровода, а в случае изменения площади проходного сечения трубопровода еще и на изменение кинетической энергии жидкости. Повышенный запас потенциальной энергии в начале трубопровода может создаваться за счет работы насоса - насосная подача; повышенного давления газа на свободную

поверхность жидкости в баке - вытеснительная или баллонная подача; разности уровней жидкости - самотечная подача.

Методика гидравлического расчета трубопроводов одинаковая для всех видов подач.

Трубопроводы подразделяются на простые и сложные. Простые - постоянного сечения и без разветвлений; сложные - переменного сечения или(и) с разветвлениями.

При гидравлическом расчете трубопроводов используются уравнения неразрывности потока, Бернулли, формулы для расчета гидравлических сопротивлений, а также экспериментальные данные.

5.4.1. Простой трубопровод

Рассмотрим простой трубопровод, расположенный произвольным образом в пространстве, имеющий общую длину l , постоянный диаметр d , содержащий n местных гидравлических сопротивлений и передающий жидкость с параметрами ρ , v .

Запишем уравнение Бернулли для участка 1-2 трубопровода при условии $L_{\text{мех}} = 0$, $c_1 = c_2 = c$ с учетом $\rho L_{\text{а}} = \Delta p_i^* + \Delta p_{\text{о.д}}$;

$$p_i^* = \xi_i \frac{\rho c^2}{2}, \quad \Delta p_{\text{о.д}} = \lambda_{\text{о.д}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho c^2}{2}.$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = (z_2 - z_1) + \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \xi_{i i} \right) \cdot \frac{c^2}{2g} = \Delta z + \xi_{\text{а}\Sigma} \cdot \frac{c^2}{2g},$$

где $\xi_{\text{а}\Sigma} = \lambda_{\text{мп}} \cdot \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \xi_{mi}$ - суммарный коэффициент последовательно соединенных гидравлических сопротивлений трубопровода;

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = H_{i\text{о.д}} - \text{потребный напор, если он подлежит определению в результате расчета;}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = H_{\text{ддт}} - \text{располагаемый напор, в случае когда эта величина задана.}$$

личина задана.

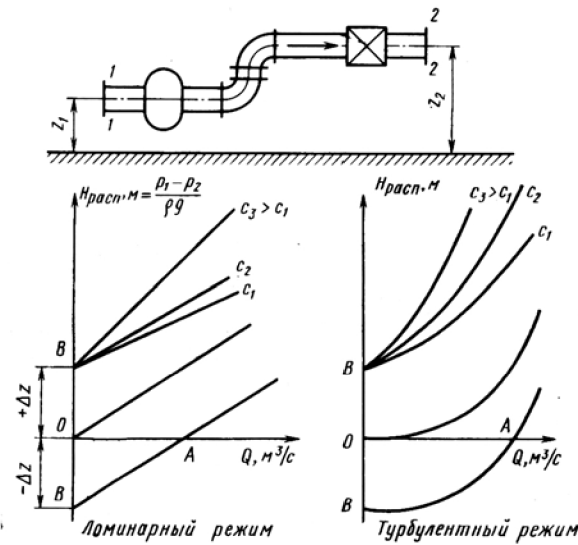


Рис. 5.9. Режимы течения в простых трубах

С учетом введенных обозначений, а также выражая скорость c через объемный расход G_v , можно получить *характеристику трубопровода* – зависимость потребного напора от расхода жидкости в виде

$$H_{\text{ддт}} = \pm \Delta z + C G_v^m,$$

где $m \cong 1$ – для ламинарных режимов течения жидкости; $m \cong 2$ – для турбулентных режимов.

Чем больше гидравлическое сопротивление, тем больше величина c и тем круче характеристика $H_{\text{потр}} = f(G_v)$.

Точка А на характеристике трубопровода (см. рис. 5.9) определяет объемный расход при движении жидкости самотеком за

счет разности нивелирных высот $z_2 - z_1 < 0$. В этом случае $H_{\text{пот } p} = 0$ и $p_1 = p_2$. Точка B соответствует покою жидкости и отрицательному потребному напору $p_1 > p_2$.

5.4.2. Сложные трубопроводы

Последовательное соединение простых трубопроводов.

Рассмотрим последовательное соединение трех простых трубопроводов различного диаметра (см. рис. 5.10). В этом случае расход жидкости через все простые трубопроводы постоянен, а гидравлическое сопротивление всего трубопровода равно сумме гидравлических сопротивлений отдельных участков, т.е.:

$$G_{v1} = G_{v2} = G_{v3} = G_v, \quad \xi_{\text{э}\ddot{\alpha}\delta\Sigma} = \xi_{\text{э}\ddot{\alpha}\delta 1} = \xi_{\text{э}\ddot{\alpha}\delta 2} = \xi_{\text{э}\ddot{\alpha}\delta 3}.$$

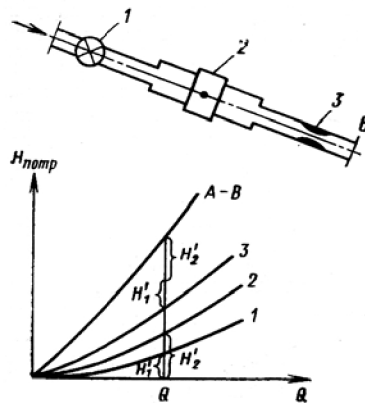


Рис. 5.10. Последовательное соединение трубопроводов

Запишем уравнение Бернулли для участка 1-2 в общем случае, когда $c_2 \neq c_1$:

$$H_{i\ddot{\alpha}\delta} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right) = \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} + \xi_{\text{э}\ddot{\alpha}\Sigma} \cdot \frac{c_{\text{max}}^2}{2g},$$

где c_{max} - наибольшее значение скорости в сложном трубопроводе.

Для получения характеристики сложного трубопровода вначале построим характеристики трех простых трубопроводов. Характеристику сложного трубопровода получим, складывая все три потребных напора при одинаковых расходах. Далее гидравлический расчет сложного трубопровода производится по методике расчета простого трубопровода.

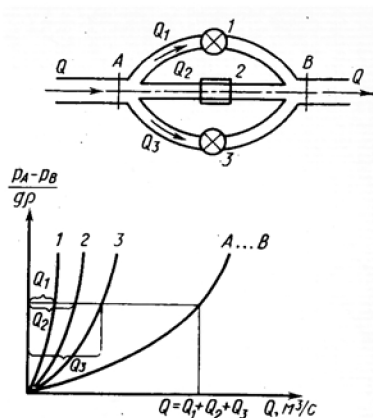


Рис. 5.11. Параллельное соединение трубопроводов

Параллельное соединение простых трубопроводов. Пусть в сечениях 1 и 2 соединяются параллельно три простых трубопровода различного сечения с n местными гидравлическими сопротивлениями (рис. 5.11). В этом случае расход жидкости через сложный трубопровод определяется как сумма расходов через три простых трубопровода: $G_v = G_{v1} + G_{v2} + G_{v3}$.

Суммарные гидравлические потери всего сложного трубопровода равны гидравлическим потерям каждого простого трубопровода.

Характеристики отдельных трубопроводов можно представить в виде:

$$H_{ii\partial\partial} = c_1 G_{v1}^{m_1}; H_{ii\partial\partial} = c_2 G_{v2}^{m_2}; H_{ii\partial\partial} = c_3 G_{v3}^{m_3}.$$

Для построения характеристики сложного трубопровода с параллельным соединением простых трубопроводов необходимо

сложить расходы в каждом простом трубопроводе при одинаковых потерях полного напора. При этом характеристики отдельных (простых) трубопроводов строятся по рекомендациям раздела 5.4.1.

5.4.3. Трубопровод с насосной подачей жидкости

Рассмотрим совместную работу трубопровода с насосом (см. рис. 5.12). Часть трубопровода до насоса называется всасывающей; за насосом – нагнетающей (напорной).

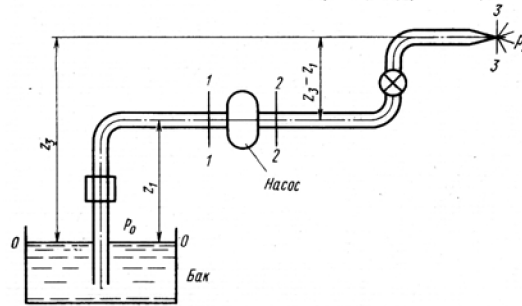


Рис. 5.12. Насосная подача жидкости

Запишем уравнение Бернулли для всасывающего трубопровода на участке 0-1, полагая что $c_0 = 0$.

$$\frac{p_0}{\rho g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} + \xi_{a1-2} \cdot \frac{\dot{m}_1^2}{2g},$$

где $\xi_{a1-2} = \lambda_{\delta} \cdot \frac{l_{1-2}}{d} + \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Из уравнения видно, что процесс всасывания осуществляется насосом, который создает пониженное давление $p_1 < p_0$. Этот процесс обеспечивается давлением p_0 в баке, которое расходуется на подъем жидкости на высоту z_1 , сообщение ей кинетической энергии $\frac{\dot{m}_1^2}{2g}$, преодоление всех гидравлических сопротивлений всасы-

вающего трубопровода, и сохраняется в виде давления p_1 , которое

должно обеспечивать бескавитационную работу насоса. Последнее условие может обеспечиваться снижением температуры жидкости, увеличением давления p_1 (например, за счет увеличения давления наддува p_0 , установки подкачивающего насоса на участке 0-1), уменьшением высоты всасывания z_1 , снижением суммарного гидравлического сопротивления всасывающего трубопровода.

Для определения потребного напора запишем уравнение Бернулли для всего трубопровода на участке 0-3:

$$H_{i\dot{\delta}} = \frac{1}{g} \cdot L_{i\dot{\delta}} = z_3 + \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} + \frac{1}{g} \cdot L_{\dot{\delta}0-3},$$

где $L_{\text{нас}} = -L_{\text{мех}} = g \cdot H_{\text{расп}}$ – полезная работа насоса, сообщаемая 1 кг жидкости; p_3 – давление газообразной среды, в которую происходит истечение жидкости; $L_{\dot{\delta}0-3}$ – гидравлическое сопротивление всей системы на участке 1-3.

Характеристику всего трубопровода можно записать в следующем виде:

$$H_{i\dot{\delta}} = z_3 + \frac{p_3 - p_0}{\rho g} + c_{\dot{\delta}} G_v^2 + c_d G_v^m$$

Полезную работу насоса можно подсчитать по уравнению Бернулли, составленного для участка 1-2 (см. рис. 5.12) при условии, что $d_1 = d_2$, $c_1 = c_2$, $z_1 = z_2$:

$$L_{i\dot{\delta}} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}, \quad \dot{L}_{i\dot{\delta}} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g}.$$

Таким образом, работа насоса заключается в повышении давления жидкости.

Характеристикой насоса называется зависимость полезной работы насоса от расхода жидкости, т.е. $H_{i\dot{\delta}} = f_2(G_v)$ при постоянной частоте вращения ротора насоса ($\omega = \text{const}$). Установившийся режим работы гидравлической системы с насосной подачей жидкости определяется рабочей точкой – точкой пересечения характеристики трубопровода $H_{i\dot{\delta}} = f_1(G_v)$ и характеристики насоса $H_{i\dot{\delta}} = f_2(G_v)$ (см. рис. 5.13). Положение рабочей точки соответст-

вует условию $H_{\text{потр}} = H_{\text{нас}}$. Такой режим устанавливается и поддерживается автоматически. Система регулирования может смещать положение рабочей точки на характеристике системы, например, обеспечивая заданный расход жидкости или работу системы с максимальным КПД насоса.

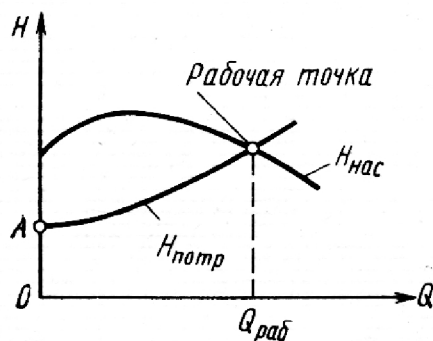


Рис. 5.13. Определение потребной мощности насоса

Полезной мощностью насоса $N_{\text{нас}}$ называется механическая энергия, которую насос сообщает всей массе жидкости в единицу времени, т.е.

$$N_{i \text{ аи}} = L_{i \text{ аи}} \cdot G_v = \frac{p_2 - p_1}{\rho} \cdot G_v = (p_2 - p_1) \cdot G_v.$$

Мощность двигателя, приводящего в действие насос, больше полезной ($N_{\text{дв}} > N_{\text{нас}}$) на величину мощности, затраченной на преодоление гидравлических сопротивлений в насосе и сопротивлений трения в приводе и подшипниках (механические потери). Эти потери учитываются общим КПД насоса $\eta_0 = \frac{N_{\text{нас}}}{N_{\text{дв}}}$,

где $\eta_0 = 0,60 \dots 0,85$ – для шестеренчатых насосов;
 $\eta_0 = 0,70 \dots 0,85$ – для центробежных насосов.

Глава 6. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И МЕТОДЫ ПОДОБИЯ

6.1. Анализ размерностей

В качестве принятых основных единиц физических величин, кроме системы СИ, можно выбрать скорость, плотность, ускорение и т.д. Величины, численное значение которых зависит от принятых единиц физических величин, называют размерными. Время, энергия, сила – это примеры размерных величин. Величины, численное значение которых не зависит от принятых единиц физических величин, называют безразмерными. Угол, число π - отношение длины окружности к ее диаметру, отношение удельной газовой постоянной к теплоемкости R/C_p – примеры безразмерных величин. Единицы физических величин, выраженные через основные, называют производными. Так, например, единицы скорости (m/c) и плотности (kg/m^3) являются производными единицами основных физических величин.

Для дальнейшего изложения введем обозначения четырех основных единиц физических величин: длина $[l] = L$ (метр); масса $[m] = M$ (килограмм); время $[t] = T$ (секунда); температура $[T] = K$ (градус Кельвина). Здесь, как обычно принято, квадратные скобки означают соответствующие физические величины. Тогда, например, размерности скорости, плотности, силы и давления, которые являются производными, могут быть записаны таким образом: $[C]=LT^{-1}$, $[\rho]=L^{-3}M$, $[F]=LMT^{-2}$, $[p]=L^{-1}MT^{-2}$.

В общем случае для принятых основных единиц размерность производной физической величины может быть выражена в форме одночлена, составленного из произведений символов основных физических величин в различных степенях, т.е. в виде формулы размерности Фурье:

$$[A]=L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\eta} \cdot K^{\delta}, \quad (6.1)$$

что положило начало системному применению соображений теории размерности и подобия к физическим задачам. Показатели степени в формуле (6.1) являются безразмерными величинами.

Если размерность данной физической величины может быть выражена через размерности некоторых других указанных физических величин, то ее называют зависимой (от размерности указанных величин). В противном случае размерность называют независимой. Например, указаны размерности ускорения $[g] = LT^{-2}$ и плотности $[\rho] = L^{-3}M$. В этом случае размерность скорости $[c] = LT^{-1}$ является независимой величиной.

В теории подобия и анализе размерностей принято использовать термины «параметр» и «переменная» для обозначения любой основной или производной размерной и безразмерной величины или любой комбинации из них. Под безразмерными параметрами следует понимать комплексы размерных параметров, составленные таким образом, что они не имеют размерности. π -теорема устанавливает связь между функцией, выраженной через размерные параметры, и функцией в безразмерной форме. В любой физической задаче мы имеем один или более зависимых параметров, каждый из которых является функцией некоторых независимых параметров. Обозначим зависимый параметр через q_1 . Пусть число независимых параметров равно $m-1$. Обозначим их как $q_2, q_3, q_4, \dots, q_m$. Тогда

$$q_1 = f_1(q_2, q_3, q_4, \dots, q_m), \quad (6.2)$$

где f_1 - неизвестная функция. Это уравнение эквивалентно соотношению

$$f_2 = (q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_m), \quad (6.3)$$

где f_2 - другая неизвестная функция.

Сформулируем π -теорему, используя выше написанные уравнения. Если имеется соотношение между m параметрами, то можно

найти эквивалентное соотношение между n безразмерными параметрами или комплексами:

$$f_3(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n) = 0, \quad (6.4)$$

где число n определяется как

$$n = m - k. \quad (6.5)$$

Здесь m – число параметров q в уравнении и k – наибольшее число параметров, содержащихся в первоначальном списке $q_1, q_2, q_3, q_4, \dots, q_m$, которые не могут быть объединены в какой-либо безразмерный комплекс. Эту теорему называют π -теоремой Бакингема или теоремой Ваши–Бакингема. Однако в действительности она является результатом работы многих исследователей, включая Фурье, Рябушинского и Релея. В своей первоначальной формулировке π -теоремы Бакингом установлен, что k равно минимальному числу независимых размерностей, необходимых для образования размерностей всех параметров q_i . Обозначим это минимальное число через r . Позднее (1946) Ван Драйст показал, что, хотя обычно k равно r , имеются исключения, и более общее правило записывается как $k \leq r$. Хантли в 1953 году сделал важное обобщение π -теоремы. Он показал, что можно использовать большее число независимых переменных, если четко разграничить отдельные операции и понятия, и за счет этого уменьшить число окончательных безразмерных комплексов.

Рассмотрим применение π -теоремы на примере. Предположим, что мы изучаем установившееся, стабилизированное, ламинарное течение несжимаемой ньютоновской жидкости в круглой трубе. Допустим, что нам неизвестно уравнение для перепада давления. Чтобы определить вид уравнения, применим анализ размерностей. Если считать, что перепад давления Δp является функцией

скорости C , длины трубы l , диаметра d , плотности ρ и вязкости μ , то можно записать

$$f_2(\Delta p, l, c, \mu, \rho) = 0. \quad (6.6)$$

Из рассмотрения размерностей всех шести параметров уравнения (6.6) следует, что минимальное число независимых размерностей, из которых могут быть образованы размерности этих параметров, равно трем, например, размерности силы, длины и времени. Следовательно, имеем $r = 3$. Теперь найдем три из шести размерных параметра, которые не образуют безразмерного комплекса. Комбинация только плотности, диаметра и скорости не может быть безразмерной, поскольку из трех этих параметров лишь плотность имеет размерность массы. Поэтому заключаем, что в данном конкретном случае $k = r = 3$. Согласно π -теореме, число необходимых безразмерных параметров равно $6 - 3 = 3$. Если невозможно найти какой-либо комплекс из трех параметров, который не может быть безразмерным, то следует постараться найти комплекс из двух параметров и т. д. до тех пор, пока число «к» не будет определено. В нашем простом примере после внимательного исследования можно найти, что одной из безразмерных зависимостей является:

$$f_3\left(\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho c^2}, \frac{l}{d}, \frac{\rho c d}{\mu}\right) = 0. \quad (6.7)$$

Так как мы хотим, чтобы перепад давления был зависимой переменной, то можно записать:

$$\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho c^2} = f_4\left(\frac{\rho c d}{\mu}, \frac{l}{d}\right). \quad (6.8)$$

Это соотношение совершенно корректно для рассматриваемой нами задачи. Однако целесообразно привести его к более удобному виду, содержащему тот же объем информации, но включающему меньшее число безразмерных параметров или комплексов π . Физи-

ческий смысл этого следующий: для полностью установившегося равномерного течения в круглом канале постоянного сечения существует определенная симметрия. В частности, перепад давления на единице длины трубы будет постоянным вдоль оси, так как поле скорости не изменяется по длине трубы. Предполагая, что эта длина измеряется в диаметрах трубы, мы должны искать соотношение вида:

$$\lambda_{\delta \delta} = \frac{\Delta \delta / (l/d)}{\frac{1}{2} \rho c^2} = f_5 \left(\frac{\rho c d}{\mu} \right) = f_5 (Re_d), \quad (6.9)$$

где $\lambda_{тр}$ – коэффициент гидравлических потерь на трение;
 Re – число Рейнольдса, вычисленное по диаметру.

Из большого числа экспериментов известно, что такой подход в данном случае успешен. Уравнение (6.8) хорошо описывает перепад давления вследствие трения для всех круглых труб, независимо от специфических условий. Известно, что это один из немногих случаев, когда возможно точное и полное решение уравнений Навье–Стокса, совпадающее с экспериментальными данными.

Анализируя приведенный пример, приведем условия, которые должны быть выполнены при использовании π -теоремы:

1. В систему безразмерных параметров должны входить все параметры, имеющие физический смысл, включая все независимые параметры и один зависимый.
2. Каждый параметр, содержащийся в первоначальном списке, должен входить в безразмерные комплексы π по крайней мере один раз.
3. Размерности, используемые для образования размерностей физических параметров, должны быть независимыми.

Необходимо отметить, что сама по себе теория размерностей не позволяет установить в явном виде функциональные соотношения между безразмерными параметрами и в этом ее ограниченность. Эффективность применения теории размерности зависит от

того, насколько полно сформулирована решаемая задача, понята ее физическая сущность. Прежде всего, надо выбрать основные факторы, которые определяют изучаемое явление, и выяснить, какими эффектами можно пренебречь. В сложном случае можно анализировать последовательно несколько правдоподобных предположений, а затем с помощью теоретических выкладок, расчетов или опытов выбрать правильное. Если известны дифференциальные уравнения и краевые условия, которые математически описывают поставленную физическую задачу, то отыскание безразмерных критериев производится довольно просто.

6.2. Физическое подобие. Критерии подобия

Вопрос о подобии возникает в связи с необходимостью экспериментального определения важнейших характеристик течения потока и силовых характеристик его взаимодействия с твердыми поверхностями или телами. Если отбросить тепловые, электрические, электромагнитные и другие факторы, отличные от чисто механических, то систему тело–жидкость можно рассматривать как механическую, которая является частным случаем более общих физических систем. Физические явления подобны, если по характеристикам одного можно определить характеристику другого простым пересчетом масштабов по коэффициентам подобия.

Необходимым и достаточным условием подобия явлений служит равенство численных значений безразмерных комплексов, которые называют критериями подобия. Они обычно носят имена ученых, которые ввели их в практический обиход. Из теории подобия следует, что возможно моделирование физических явлений. Моделированием называют замену исследования явлений на натурном объекте экспериментальным изучением этого явления на модели. Для обеспечения подобия моделируемых течений или явлений необходимо обеспечить равенство критериев подобия. Совокупность критериев, необходимых для соблюдения подобия явлений, определяется конкретным типом решаемой задачи.

Различают два способа выбора критериев подобия: с помощью теории размерностей и π -теоремы и метод, основанный на отношении сил. Если моделируемое явление сложное, не имеет достаточного математического описания, например течение с развитой кавитацией, то критерии подобия можно получить только при использовании теории размерностей и π -теоремы. В настоящее время этот метод является наиболее распространенным. В случае, когда течение описывается замкнутой системой дифференциальных уравнений, критерии подобия легко находятся, так как они представляют собой безразмерные коэффициенты уравнений, записанных в безразмерном виде. В XIX столетии многие исследователи, в том числе Релей, решали задачи путем прямого использования идеи подобия и отношения сил. Этот метод включает геометрическое, кинематическое и динамическое подобие.

Два тела *геометрически* подобны, если сходственные отрезки тел пропорциональны и углы между сходственными отрезками равны между собой. Потоки *кинематически* подобны, если скорости в сходственных точках пропорциональны и углы вектора скорости в сходственных точках одинаковы. Для *динамического* подобия необходима пропорциональность сил, действующих на сходственные элементы, и равенство углов соответствующих векторов сил. Таким образом, когда речь идет о физическом (механическом) подобии, имеется в виду геометрическое подобие натурального объекта и модели, а также подобие силовых и скоростных полей.

Для обеспечения кинематического и динамического подобия нужно, прежде всего, обратиться к законам физики. Запишем второй закон Ньютона для двух систем:

$$m_1 c_1 = \sum_{i=1}^n F_i^{(1)}, \quad m_2 c_2 = \sum_{i=1}^n F_i^{(2)}, \quad (6.10)$$

здесь F_i – векторы сил, приложенные к материальным точкам сравниваемых систем. В кинематически и динамически подобных системах векторы ускорений центров тяжести должны быть одинако-

вы по направлению, а также должно быть равно число сил, приложенных к каждой системе, и каждая из сил должна быть одинаково направлена. Из сказанного следует:

$$\frac{|F_1^{(1)}|}{|F_2^{(2)}|} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{|c_1|}{|c_2|}.$$

Опуская векторные обозначения, перепишем правую часть в ином виде

$$\frac{m_1 c_1}{m_2 c_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{L_1^3}{L_2^3} \cdot \frac{L_1}{L_2} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 = \frac{\rho_1 c_1^2 S_1}{\rho_2 c_2^2 S_2} \quad (6.11)$$

Поэтому вместо (6.11) запишем

$$\frac{F^{(1)}}{\rho_1 c_1^2 S_1} = \frac{F^{(2)}}{\rho_2 c_2^2 S_2}.$$

Формула (6.11) представляет собой закон подобия Ньютона, утверждающий что в динамически подобных системах должны быть равны безразмерные коэффициенты сил, которые образуются делением соответствующей силы на произведение соответствующих значений плотности, площади и квадрата скорости. Силы, действующие в жидкости, имеют различную физическую природу. Закон подобия Ньютона позволяет установить безразмерные комплексы, отражающие действие сил той или иной природы. Поскольку произведение $\rho c^2 S$ характеризует уровень сил инерционной природы, то критерием подобия, по существу, выражают отношение сил той или иной природы к силам инерции.

Рассмотрим наиболее употребительные из критериев подобия. Пусть силы генерируются вязкостью. Согласно закону вязкого трения Ньютона

$$\tau = \mu \frac{dc}{dn}$$

$$\text{Далее } F \sim S\tau = L^2 \tau \frac{c}{L} \sim L \cdot \mu \cdot \dot{\eta}.$$

Поэтому $\frac{S_1 \tau_1}{S_2 \tau_2} = \frac{L_1 \cdot \mu_1 \cdot c_1}{L_2 \cdot \mu_2 \cdot c_2}$, и на основании закона подобия

(6.11) получаем:

$$\frac{L_1 \cdot \mu_1 \cdot c_1}{\rho_1 c_1^2 S_1} = \frac{L_2 \cdot \mu_2 \cdot c_2}{\rho_2 c_2^2 S_2},$$

или

$$\frac{\rho_1 \tilde{\eta}_1 L_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 c_2 L_2}{\mu_2}.$$

Таким образом, подобие течений по соотношению инерционных и вязких сил определяется безразмерным комплексом,

$Re = \frac{\rho c L}{\mu} = \frac{c L}{\nu}$, который называется числом Рейнольдса.

Рассмотрим теперь условия подобия для течений под действием сил тяжести. Силы тяжести имеют объемный характер действия. Следовательно, условие подобия

$$\frac{\rho_1 g_1 L_1^3}{\rho_1 c_1^2 L_1^2} = \frac{\rho_2 g_2 L_2^3}{\rho_2 c_2^2 L_2^2}$$

или

$$\frac{c_1^2}{g_1 L_1} = \frac{c_2^2}{g_2 L_2}.$$

Безразмерный комплекс $Fr = \frac{c}{\sqrt{g L}}$ получил название числа

Фруда.

Учет сил давления $F \sim pS$ приводит к понятию числа Эйлера

$Eu = \frac{P}{\rho \cdot c^2}$, так как из закона подобия следует

$$\frac{L_1^2 \cdot p_1}{\rho_1 c_1^2 L_1^2} = \frac{L_2^2 \cdot p_2}{\rho_2 c_2^2 L_2^2}.$$

В нестационарных течениях сила, обусловленная нестационарностью, пропорциональна $\rho L^3 c/t$. Отсюда следует, что в подобных течениях

$$\frac{\rho_1 L_1^3 c_1}{t_1} \cdot \frac{1}{\rho_1 c_1^2 S_1} = \frac{\rho_2 L_2^3 c_2}{t_2} \cdot \frac{1}{\rho_2 c_2^2 S_2}$$

или

$$\frac{L_1}{c_1 t_1} = \frac{L_2}{c_2 t_2}.$$

Безразмерный комплекс $Sh = \frac{L}{c \cdot t}$ получил название числа

Струхалия.

Существуют и другие безразмерные комплексы параметров, отражающие своеобразие той или иной задачи. Зачастую используются также комбинации указанных выше критериев. В реальных условиях не все силовые факторы проявляют себя одинаково. Более того, в определенных задачах ряд критериев автоматически отпадает.

В потоках жидкости обычно действуют разные силы: силы давления, вязкости (трения), тяжести и др. Соблюдение их пропорциональности означает полное динамическое подобие. Осуществление на практике полного подобия оказывается не всегда возможным. В случае установившегося течения выпадает из рассмотрения число Струхалия Sh . В случае для обеспечения подобия для установившегося течения несжимаемой жидкости в каналах необходимо обеспечить равенство на модели и натуре только двух критериев – Re и Fg . Однако одновременное сохранение этих двух критериев при использовании для моделирования натурной среды оказывается невозможным, так как при уменьшении размеров Re падает, а Fg растет. Для поддержания постоянства числа Re характерная скорость должна увеличиваться, а для сохранения значения Fg необходимо уменьшать скорость. Сохранить постоянство указанных критериев можно, если при моделировании использовать различные

среды, что не всегда возможно на практике. По этой причине в задачах, где влияние массовых сил несущественно, при моделировании сохраняется постоянство только числа Re . Подобное моделирование и подобие потоков является частичным. Отбрасывание того или иного критерия возможно только после детального анализа его роли в исследуемом процессе. Частичное моделирование является вынужденной мерой и в некоторых случаях может приводить к заметным ошибкам, которые не всегда удастся предвидеть.

В теоретических исследованиях и расчетах сложных процессов соображения о физическом подобии играют большую роль. На первом этапе изучения задачи эти соображения помогают лучше разобраться в существе явлений и выбрать основные безразмерные аргументы, от которых зависит изучаемое явление. Далее наиболее простым образом обосновывается вид неизвестной функциональной зависимости. Соображения теории размерностей и подобия достаточно просты, и они должны предшествовать как теоретическим, так и экспериментальным исследованиям, а также применяться после окончания исследований на этапе обобщения и представления итоговых зависимостей. На основе указанного выше следует, что методы теорий подобия и размерностей дополняют друг друга и могут использоваться на разных этапах решения задач.

Примеры решения задач

Задача 1. Несжимаемая вязкая жидкость течет по длинной горизонтальной круглой трубе с постоянной площадью поперечного сечения. В какой форме следует искать зависимость $\frac{\Delta p}{l}$ – падение давления на единице длины трубы, чтобы она была универсальной?

Решение. Движение несжимаемой жидкости в трубе характеризуется плотностью ρ , коэффициентом динамической вязкости μ , диаметром трубы d , и средней скоростью потока c . Тогда должна

быть справедливой зависимость $\frac{\Delta\delta}{l} = f(\rho, \mu, d, c)$. Из $n + 1 = 5$ размерных величин $k = 3$ имеют независимую размерность. Согласно π -теореме это физическое соотношение можно представить как отношение ($n + 1 - k = 2$) двумя безразмерными величинами $\pi = f(\pi_1)$.

Для определения π и π_1 составим по формуле размерностей Фурье $L^l T^t M^m$ (метр, секунда, килограмм):

$$\frac{\Delta\delta}{l} \left[\frac{H}{l^3} \right] - \frac{\dot{l}}{(\dot{\sigma}^2 L^2)}; \rho \left[\frac{\dot{e}\dot{a}}{l^3} \right] - \frac{\dot{l}}{L^3}; \mu \left[\frac{H \cdot c}{l^2} \right] - \frac{\dot{l}}{(TL)};$$

$$d[l] - L; c[l/\tilde{n}] - L/T.$$

Аргумент $\pi_1 = \rho^a \mu^b d^c c^e$. Тогда размерность π_1 представим в виде

$$\frac{M^a}{M^{3a}} \frac{M^b}{T^b L^b} L^c \frac{L^e}{T^e} = M^{a+b} L^{-3a-b+c+e} T^{-b-e}.$$

Из условия, что π_1 имеет нулевую размерность, составим следующую систему уравнений для определения показателей степени:

$$a + b = 0; -3a - b + c + e = 0; -b - e = 0.$$

Одну величину всегда можно выбрать произвольно, но не 0 и не ∞ . Для $a = 1$ из системы уравнений найдем $b = -1$; $e = 1$; $c = 1$. Таким образом, получим $\pi_1 = \rho dc / \mu$. Безразмерную комбинацию

π_1 называют числом Рейнольдса. Функция $\pi = (\Delta p / l)^a \rho^b \mu^c d^e c^f$.

Аналогичным образом размерность π представим в виде

$$\frac{M^a}{L^{2a} T^{2a}} \frac{M^b}{L^{3b}} \frac{M^c}{T^c L^c} L^e \frac{L^f}{T^f} = M^{a+b+c} L^{-2a-3b-c+e+f} T^{-2a-c-f}.$$

Система уравнений для определения показателей степени

$$a + b + c = 0; -2a - 3b - c + e + f = 0; -2a - c - f = 0.$$

В системе из трех уравнений пять неизвестных. Очевидно, комбинацию переменных $\rho dc/\mu$, которая уже рассматривается как аргумент, включать еще не имеет смысла. При $c = 0$ снова можно выбрать один из показателей, равным единице. Лучше взять $a = 1$, чтобы искомая величина была в первой степени. Тогда получим $b = -1, e = 1, f = -2$ и $\pi = \Delta p d / (l \rho c^2)$, следовательно, искомая зависимость

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\rho c^2}{d} f(\text{Re}).$$

Задача 2. Сопловой аппарат воздушной турбины, параметры воздуха перед которым $p_{\text{он}} = 2,2 \cdot 10^5$ Па, $T_{\text{он}} = 700$ К, а давление за ним $p_{\text{ин}} = 1 \cdot 10^5$ Па, испытывается в модельной установке с масштабom 1:2,5. Температура воздуха перед модельным сопловым аппаратом $T_{\text{ом}} = 500$ К.

Какие давления воздуха $p_{\text{ом}}$ и $p_{\text{ин}}$ соответственно перед модельным сопловым аппаратом и за ним необходимо поддерживать, чтобы выполнялось подобие по числам M и Re ? Во сколько раз изменится расход воздуха через модель по сравнению с расходом через натуральный аппарат ($G_{\text{м}}/G_{\text{н}}$)?

Решение. Поскольку температура воздуха в натурном аппарате и модели отличается незначительно, примем в обоих случаях одинаковыми значения вязкости воздуха μ , газовой постоянной R и показателя адиабаты k . Из условия подобия следует, что числа Re и M должны быть одинаковыми для модели и натурны

$$\tilde{n}_i l_i \rho_i / \mu = c_i l_i \rho_i / \mu; \quad \tilde{n}_i / \dot{a}_i = \tilde{n}_i / \dot{a}_i,$$

где c – скорость потока; l – характерный размер, например, высота сопла; a – скорость звука. Уравнения состояния и выражения для скорости звука следующие:

$$\delta_i = \rho_i RT_i; \quad \delta_i = \rho_i RT_i; \quad a_i^2 = kRT_i; \quad a_i^2 = kRT_i.$$

Безразмерные масштабы пересчета параметров модели природы

$$k_l = l_i / l_i; \quad k_\delta = \delta_i / \delta_i; \quad k_{\dot{O}} = \dot{O}_i / \dot{O}_i; \quad k_\rho = \rho_i / \rho_i; \\ k_w = w_i / w_i; \quad k_m = m_i / m_i; \quad k_a = a_i / a_i.$$

Тогда условие подобия можно представить в виде:
 $k_w k_l k_\rho = 1$; $k_w = k_a$, а уравнения состояния $k_\delta = k_\rho k_T$; $k_a^2 = k_T$.

Масштабы искомых величин выразим через известные масштабы $k_l = 2,5$ и $k_T = T_{он}/T_{ом} = 700/500 = 1,4$ и получим $k_\delta = \sqrt{k_T} / k_l = \sqrt{1,4} / 2,5 = 0,473$. Коэффициент пересчета массового расхода найдем из уравнения неразрывности

$$k_m = \rho_i l_i^2 w_i / (\rho_i l_i^2 w_i) = k_l^2 k_\rho / \sqrt{k_T} = 2,5.$$

Искомые величины

$$\delta_{ii} = \delta_{ii} / k_\rho = 4,65 \cdot 10^5 \text{ } \ddot{I} \text{ } \dot{a}; \quad \delta_{li} = \delta_{li} / k_\rho = 2,11 \cdot 10^5 \text{ } \ddot{I} \text{ } \dot{a};$$

$$G_M/G_H = 1/k_m = 0,4$$

Глава 7. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

7.1. Механизм потери устойчивости ламинарного течения

Разобьем ламинарный поток, текущий около стенки на бесконечно тонкие слои и представим, что скорость от слоя к слою изменяется ступенчато (рис. 7.1). Пусть изменение скорости ΔC от «медленного» слоя М к «быстрому» Б пропорционально скорости невозмущенного потока $\Delta C = kC$. Поверхность соприкосновения слоев, на которой скорость изменяется скачкообразно, называется поверхностью тангенциального разрыва скорости. Устойчивость ламинарного режима течения определяется устойчивостью этой поверхности.

Пусть случайное возмущение Δp искривило поверхность тангенциального разрыва скорости. В сечениях 2 и 4, из-за уменьшения площади, скорость в струйке Б возрастет, а давление станет меньше давления в слое М. В сечении 3 давление в слое Б повысится. Так возникнут силы избыточного давления Δp , направленные перпендикулярно к вектору скорости невозмущенного движения жидкости, усиливающие случайное возмущение.

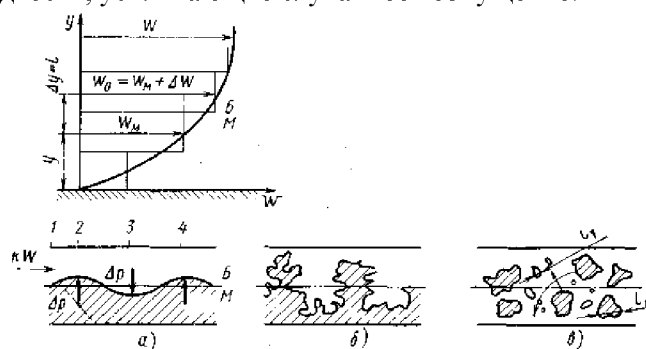


Рис. 7.1. Потеря устойчивости ламинарного течения: а - случайное возмущение; б - развитие случайного возмущения; в - турбулентное движение

Итак, случайные возмущения ламинарного течения Δp приводят к возникновению сил инерции, усиливающих эти возмущения –

встречные движения масс жидкости поперек потока. Силы трения препятствуют развитию возмущений, то есть способствуют сохранению ламинарного течения. Ламинарный режим или поверхности раздела между слоями устойчивы, когда силы трения намного превышают силы инерции, то есть при небольших значениях чисел Рейнольдса. Если силы инерции существенно превышают силы трения, то есть при больших значениях чисел Re , ламинарный режим неустойчив и при наличии случайного возмущения Δp переходит в турбулентный. В этом случае случайное возмущение усиливается, вплоть до полного разрыва поверхности между слоями, когда конечные объемы жидкости самых различных размеров хаотически перебрасываются из одного слоя в другой, обмениваясь веществом, количеством движения и теплотой. Траектории частиц жидкости при турбулентном движении не определяются стенками канала, а чрезвычайно перепутаны и извилисты. Конечные объемы, участвующие в турбулентном перемешивании, называются *молями жидкости*.

Необходимые и достаточные условия возникновения устойчивого (развитого) турбулентного течения:

1. Градиент скорости $\partial C / \partial y > 0$.
2. Наличие случайных возмущений в потоке Δp .
3. Превышение сил инерции над силами вязкости, то есть $Re > Re_{кр}$.

7.2. Пульсационное и осредненное движение потока

Безынерционные измерения скорости с помощью термоанемометра в фиксированной точке турбулентного движения показывают, что скорость не остается неизменной во времени, а непрерывно и с большой частотой ($5 \dots 10^5$ Гц) хаотически изменяется или пульсирует по величине и направлению около некоторого среднего значения (рис. 7.2). Пульсации скорости являются результатом хаотического пульсационного движения молей жидкости. Это движение вызывает аналогичные пульсации всех параметров потока -

давления, температуры; в сжимаемой жидкости - плотности, в неоднородной - концентрации. Эти пульсации можно представить аналогично пульсациям скорости. Пульсации параметров являются самым характерным свойством турбулентного течения.

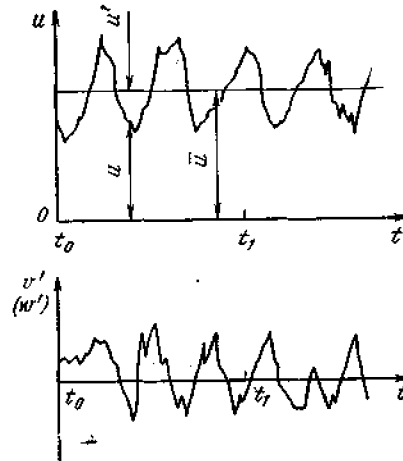


Рис. 7.2. Истинная, пульсационная и осредненная скорости

Ламинарное течение сплошной среды может быть как неустановившимся, так и установившимся. Турбулентное течение сплошной среды является принципиально неустановившимся хаотическим течением. Система основных дифференциальных уравнений, описывающая распределение истинных или мгновенных значений u, v, w, p, T, ρ в потоке, справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного течений. Для многих случаев ламинарного течения существуют методы интегрирования этих уравнений. Турбулентное движение настолько сложно, что пока не удастся даже записать условия однозначности ни для одной из задач и, следовательно, проинтегрировать основные дифференциальные уравнения и определить поля истинных параметров. Для решения большинства практических задач нет необходимости изучать изменение истинных параметров жидкости в турбулентных течениях. В современных теориях турбулентное течение представляется как хаоти-

ческое движение молей жидкости, наложенное на главное направленное движение жидкости с некоторой средней скоростью и средними параметрами. При исследовании турбулентных течений в большинстве случаев изучается изменение этих средних параметров, представляющих для практики наибольший интерес. В этом изучении существенная роль отводится эксперименту и теории подобия.

Разложим турбулентное течение на осредненное по времени и пульсационное. Обозначим истинное значение составляющей скорости в точке A в момент t , через u , осредненное во времени - через \bar{u} , а пульсационную составляющую - через u' (см. рис. 7.2). Вводя аналогичные обозначения для других параметров, получим

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad \omega = \bar{\omega} + \omega',$$

$$p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + T'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'.$$

Осреднение во времени в заданной точке пространства производится следующим образом:

$$\bar{u} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_0+t_1} u dt; \quad \bar{p} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_0+t_1} p dt; \quad (7.1)$$

Турбулентное течение называется *квазиустановившимся* или *установившимся по осредненным параметрам*, если эти параметры не изменяются во времени в любой точке турбулентного течения. Мы будем рассматривать только квазиустановившиеся турбулентные течения. В этом случае турбулентное течение может рассматриваться как «слоистое» со своей постоянной средней скоростью в каждом слое. Средние значения скорости, давления и температуры в заданной точке такого течения измеряются датчиками, обладающими достаточной инерционностью. Минимальная величина интервала осреднения t_1 в формуле (7.1) такова, что при его увеличении значение осредняемой величины не изменяется. Если для характеристики турбулентного течения указываются определенные

значения пульсационных скоростей u' , v' , w' , то под этим понимаются среднеквадратичные значения этих величин, например

$$u' = \sqrt{\overline{u'^2}} = \sqrt{\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (u')^2 dt}.$$

Обычно пульсации составляют сотые доли от среднего значения скорости, но влияние их на осредненное течение очень велико. Оно проявляется как бы в увеличении вязкости осредненного движения по сравнению с молекулярной вязкостью. Эта дополнительная или *кажущаяся вязкость* (кажущиеся турбулентные напряжения) являются основными понятиями всех современных теорий турбулентности. Термин «кажущиеся» отражает инерционно-условный характер турбулентных напряжений.

В дальнейшем будем употреблять следующие формулы осреднения параметров во времени (для примера взяты параметры u и v):

$$\begin{aligned} \overline{\bar{u}} &= \bar{u}; \quad \overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}; \quad \overline{\bar{u}v} = \bar{u} + \bar{v}; \quad \overline{(\bar{u}u')} = 0; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}; \quad \overline{u dt} = \int \bar{u} dt. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Однако осредненные значения произведений пульсационных составляющих могут быть не равны нулю

$$\overline{u'v'} \neq 0, \quad \overline{(\bar{u}')^2} \neq 0; \quad \overline{u'T'} \neq 0.$$

В этом случае между пульсациями существует корреляция (связь). Именно наличие корреляции между пульсациями приводит к дополнительной вязкости в турбулентном потоке.

7.3. Дополнительные (кажущиеся) турбулентные напряжения

Задача состоит в получении формул для определения дополнительных турбулентных напряжений и установлении зависимости их от осредненных параметров турбулентного течения, а также в составлении системы дифференциальных уравнений, которым

удовлетворяли бы осредненные параметры и для которых возможно составить условия однозначности.

Рассмотрим квазиустановившееся турбулентное движение несжимаемой вязкой жидкости при отсутствии массовых сил. Полная система уравнений в этом случае состоит из уравнений неразрывности и Навье-Стокса. Из уравнений Навье-Стокса исключим равные нулю массовые силы ($X = Y = Z = 0$) и члены, учитывающие сжимаемость жидкости ($\text{div } c = 0$). Левые части этих уравнений преобразуем с помощью уравнения неразрывности и получим

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u;$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v;$$

$$\rho \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} + \frac{\partial(\omega^2)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta \omega.$$

Подставим в уравнения неразрывности и Эйлера вместо давления и компоненты скорости их выражения через осредненные значения и пульсации и осредним по времени каждый член. Осреднение уравнения неразрывности с учетом $\overline{\partial u' / \partial x} = \overline{\partial v' / \partial y} = \overline{\partial \omega' / \partial z}$ показывает, что

$$\overline{\partial u' / \partial x} + \overline{\partial v' / \partial y} + \overline{\partial \omega' / \partial z} = 0 ,$$

и уравнению неразрывности турбулентного течения несжимаемой жидкости удовлетворяют истинные, осредненные и пульсационные компоненты скорости. Осреднение членов уравнений движения, квадратичных относительно осредненных скоростей типа $\overline{u^2}$, $\overline{u v}$ не изменит этих членов, так как в соответствии с (7.2) $\overline{u^2} = \overline{u}^2$, $\overline{u v}$. Осреднение членов, линейных относительно пульсаций типа $\overline{\partial u' / \partial t}$, $\overline{\partial u' / \partial x}$, $\overline{\partial^2 u' / \partial x^2}$, а также членов смешанного типа

$\bar{u}u', \bar{u}v'$ и т. д. даст нули. Члены, квадратичные относительно пульсаций $u'^2, u'v'$ и т. д., после осреднения останутся в виде выражений $\overline{u'^2}, \overline{u'v'}$ и т. д. Произведя эти осреднения, преобразовав левые части уравнений и перенеся члены, квадратичные относительно пульсаций, в правые части, получим дифференциальные уравнения движения для средних параметров квазиустановившегося турбулентного течения несжимаемой жидкости, которые называются уравнениями Рейнольдса.

$$\begin{aligned} \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} - \\ &- \rho \left[\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'\omega'}}{\partial z} \right]; \\ \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} - \\ &- \rho \left[\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'\omega'}}{\partial z} \right]; \\ \rho \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta \bar{\omega} - \\ &- \rho \left[\frac{\partial \overline{u'\omega'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\omega'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega'^2}}{\partial z} \right], \end{aligned}$$

Уравнения Рейнольдса отличаются от уравнений Навье-Стокса тем, что все соответственные члены в них написаны для осредненных параметров, поэтому для квазиустановившегося турбулентного течения члены $\partial \dots / \partial t$ отсутствуют. Наиболее важное отличие состоит в том, что уравнения содержат дополнительные члены, обусловленные турбулентными пульсациями. На основании сопоставления уравнений заключаем, что дополнительные члены в

уравнении Рейнольдса представляют суммы проекций на оси x, y, z дополнительных или кажущихся турбулентных напряжений, которые можно записать в виде таблицы

$$-\begin{vmatrix} \overline{\rho u'^2} & \overline{\rho u'v'} & \overline{\rho u'\omega'} \\ \overline{\rho u'v'} & \overline{\rho v'^2} & \overline{\rho v'\omega'} \\ \overline{\rho u'\omega'} & \overline{\rho v'\omega'} & \overline{\rho \omega'^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xy} & \tau'_{xy} & \sigma'_z \end{vmatrix},$$

где $\sigma'_x = -\overline{\rho u'^2}$; $\sigma'_y = -\overline{\rho v'^2}$; $\sigma'_z = -\overline{\rho \omega'^2}$ - нормальные дополнительные напряжения, обусловленные пульсационным движением, действующие на площадки, нормальные к осям x, y, z ; $\tau'_{xy} = -\overline{\rho u'v'} = \tau'_{yx}$ и т. д. - касательные дополнительные напряжения, парные из которых, по аналогии с обычными, равны между собой. Аналогично может быть получено дифференциальное уравнение энергии для осредненного турбулентного течения.

Система уравнений содержит шесть новых неизвестных дополнительных напряжений и, следовательно, не замкнута. Современные теории турбулентности предназначены для описания механизма турбулентных течений, указания путей управления ими и получения выражений дополнительных напряжений через компоненты осредненной скорости u, v, ω для того, чтобы замкнуть систему.

7.4. Полуэмпирическая теория пути перемешивания

Турбулентные течения происходят не только в трубах, но и в пограничном слое при внешнем обтекании тел, в струйных течениях в неограниченном стенками пространстве (струя отработавших газов реактивного двигателя в атмосфере). Каждое из этих течений имеет свою специфику и свои закономерности.

Полуэмпирические теории турбулентности основаны на экспериментальных данных. Расчетные формулы обязательно содер-

жат некоторое число экспериментальных констант, определяемых не свойствами жидкостей, а особенностями данного вида турбулентного течения. Поэтому в настоящее время нет универсальной теории турбулентности. Более строгие статистические теории турбулентности, основанные на законах статистической физики, пока еще далеки от применения в технике. Наибольшее распространение в настоящее время имеет теория пути перемешивания, предложенная Прандтлем в 1925 г. В теории пути перемешивания хаотическое пульсационное движение молей как капельной жидкости, так и газов, наложенное на осредненное течение, уподобляется тепловому хаотическому движению молекул газа. Поэтому характеристики этих двух движений схожи по смыслу и названию. В качестве основного постулата в теории пути перемешивания принимается, что моли жидкости, совершающие пульсации, на определенном расстоянии l , названном *путем перемешивания*, сохраняют свою индивидуальность, то есть осредненное количество движения, скорость пульсации, температуру, концентрацию избыточного элемента и т. д., и лишь пройдя это расстояние смешиваются с окружающей средой (теряют индивидуальность), привнося в нее тем самым пульсации скорости, температуры, концентрации и т.д. Предполагается, что путь перемешивания равен также *масштабу турбулентности*, т.е. характерному размеру пульсирующего моля. В турбулентном потоке имеется широкий спектр масштабов турбулентности от самых крупных, соизмеримых с поперечным размером канала, до самых мелких, приближающихся к молекулярному уровню. Отсюда следует, что крупные моли пульсируют на большие расстояния, мелкие - на меньшие. Если для турбулентного течения называется определенная величина пути перемешивания, то под этим понимают его среднеквадратическое значение. Аналогом пути перемешивания является путь свободного пробега молекул, аналогом пульсационной составляющей скорости - скорость теплового хаотического движения молекул газа.

Степенью турбулентности ϵ_T , или интенсивностью турбулентности, называется отношение средней пульсационной составляющей к среднemasсовой скорости потока. Изотропной турбулентностью называется турбулентное течение, в котором средние пульсационные скорости одинаковы во всех направлениях $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{\omega'^2}$.

Для изотропной турбулентности $\epsilon = \sqrt{\overline{u'^2}} / c$.

Для неизотропной турбулентности

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{\omega'^2})}}{c}$$

Выражение пульсационных составляющих через осредненные скорости. Рассмотрим наиболее простое плоско-параллельное квазиустановившееся турбулентное течение около стенки канала с прямоугольным сечением.

В этом случае $\bar{u} = \bar{u}(y)$, $\bar{v} = \bar{\omega} = 0$, $v = v'$, $\omega = \omega'$ и из касательных напряжений рассмотрим только одно

$$\tau'_{yx} = -\rho \overline{v'u'}$$

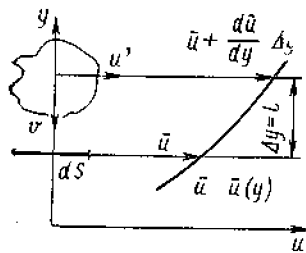


Рис. 7.3. Иллюстрация к теории пути перемешивания

Пусть моль жидкости совершает пульсацию из слоя Б в слой М на расстояние $\Delta y = l$ со скоростью v' . Тогда за время dt через площадку dS пройдет масса жидкости $dm = \rho v' dS dt$. При этом

моль вызовет в слое М продольную положительную пульсацию скорости, равную разности скоростей в слоях Б и М, которая, как предполагается, по абсолютной величине равна поперечной пульсационной скорости

$$u' = |v'| = \bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dy} \Delta y - \bar{u} = \Delta y \frac{d\bar{u}}{dy} = l \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Так, в теории Прандтля пульсационные составляющие скорости выражаются через осредненную скорость и путь перемешивания. В последнем уравнении знаки пропорциональности заменены знаками равенства в предположении, что все коэффициенты пропорциональности учтены в величине пути перемешивания.

Физический смысл дополнительного касательного напряжения. При пульсации моль жидкости переносит из слоя Б в слой М через площадку dS избыточное количество движений $u' dm = \rho v' u' dS dt$. Вследствие этого, на площадку dS будет действовать положительная касательная сила турбулентного трения $\tau_T dS$, импульс которой за время dt равен перенесенному количеству движения, т. е. $\tau_T dS dt - \rho v' u' dS dt$. После сокращения и осреднения во времени получим искомое дополнительное напряжение, обусловленное турбулентным перемешиванием

$$\tau_T = \rho \overline{v' u'}.$$

Положительный знак τ_T определен положительным знаком переносимого пульсацией избыточного направленного количества движения из верхнего слоя Б в нижний М при заданном $du/dy > 0$. Для определения знака τ_{yx} в уравнениях Рейнольдса необходимо учитывать знак осредненного произведения $\overline{v' u'}$, который в рассматриваемых условиях отрицателен, так как отрицательная v' вызывает положительную u' . Значит, между v' и u' существует корреляция, поэтому их осредненное произведение не равно нулю и отрицательно $\overline{v' u'} < 0$, т.е. турбулентное касательное напряжение

$\tau'_{yx} = -\rho \overline{v'u'}$ в этом случае также положительно: $\tau'_{yx} = \tau_T$ и имеет такой же знак, как и напряжение молекулярного трения $\tau = \mu d\bar{u} / dy$.

Подставим значения u' и v' , получим формулу Прандтля

$$\tau_T = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2,$$

имеющую при исследовании турбулентных течений такое же значение, как формула Ньютона $\tau = \mu d\bar{u} / dy$ при исследовании ламинарных течений.

При изменении знака $d\bar{u} / dy$ должен изменяться и знак касательного напряжения. Чтобы учесть это, формулу записывают следующим образом:

$$\tau_T = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} = \mu_T \frac{d\bar{u}}{dy},$$

где μ_T - коэффициент турбулентной вязкости, Н·с/м², он вводится по аналогии с динамическим коэффициентом вязкости.

Коэффициент турбулентной вязкости

$$\mu_T = \rho l v' = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|,$$

а кажущийся кинематический коэффициент вязкости

$$\nu_T = \mu_T / \rho = l v' = l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|.$$

Для объяснения этого явления на рис. 7.4 схематично показано, что при пульсации моль переносит количество движения на расстояние l между центрами тяжести моля в начале и в конце пульсаций независимо от его вращения. При этом скалярные субстанции - тепло и примесь - из-за вращения моля, переносятся на большее расстояние l_l . Вращение моля при пульсации является дополнительным механизмом переноса скалярных субстанций, то

есть механизм турбулентного переноса количества движения и скалярных субстанций похож, но неодинаков.

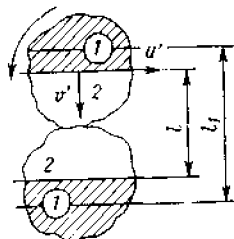


Рис. 7.4. Иллюстрация механизма турбулентного переноса

Твердые поверхности в турбулентных течениях вызывают снижение размеров молей и ограничивают их вращение и описанный эффект ослабляется.

Диссипация энергии в турбулентных течениях. Энергия направленного осредненного движения в результате наличия градиента скорости $d\bar{u}/dy \neq 0$ непрерывно переходит в наиболее крупные моли жидкости, вызывающие появление кажущихся турбулентных напряжений. Вследствие неустойчивости движения непрерывно возникают все меньшие и меньшие турбулентные образования. Для самых малых из них числа Рейнольдса $Re = v'l/\nu$ оказываются малы, а силы молекулярного трения велики. Именно на этом уровне масштабов, близких к молекулярным, энергия движения преобразовывается в теплоту, то есть происходит диссипация энергии главного движения. Как показывает приведенная оценка, диссипация энергии в турбулентном течении больше, чем в ламинарном. Турбулентные течения необходимо организовывать, когда требуется интенсифицировать процессы переноса, например смешение топлива с воздухом, химическую реакцию (реакцию горения в камерах сгорания двигателей), охлаждение раскаленных поверхностей жидкостью или передачу тепла от жидкости к твердым телам. Многие процессы в двигателях были бы неосуществимы при ламинарных течениях. Наоборот, течение следует ламинизировать, когда необходимо предотвратить смешение различных

сред, текущих рядом, уменьшить теплообмен между жидкостью и твердым телом, уменьшить гидравлические потери при течении жидкости в трубах.

Глава 8. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

8.1. Анализ уравнений движения жидкости и методов их решения

Механика жидкости и газа основана на справедливости утверждений классической механики Ньютона, термодинамики и гипотезы сплошности.

Первое утверждение предполагает, что изучаются движения со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, и рассматриваются макроскопические объекты, размеры которых существенно превосходят размеры микромира.

Второе утверждение предполагает, что в окрестности каждой точки жидкость находится в состоянии термодинамического равновесия или близком к нему, вследствие чего можно пользоваться термодинамическими законами.

И наконец, третье утверждение предполагает замену реальной жидкости (газа) с её дискретным молекулярным строением моделью сплошного распределения вещества по рассматриваемому объёму. Согласно гипотезе сплошности жидкость моделируется непрерывной сплошной средой. С математической точки зрения это означает, что функции, характеризующие состояние среды, должны быть достаточно гладкими, т.е. непрерывными и дифференцируемы в пространстве и времени. Нарушение непрерывности допускается лишь на отдельных линиях или поверхностях. Гипотеза сплошности объединяет жидкости и газы в единую категорию текучих легко деформируемых сред.

Если в механике твёрдого тела рассматриваются как сосредоточенные, так и распределённые силы, то в жидкости имеют место только распределённые силы. Приложение к жидкости сосредоточенных сил ведет к ее разрыву.

Для характеристики массовых сил вводится вектор напряжения массовых сил J , имеющий размерность ускорения. Разлагая вектор J по координатным осям (ортам), получаем:

$$J = iX + jY + kZ,$$

где X, Y, Z – проекции напряжения массовых сил на оси координат (единичные массовые силы), а i, j, k – единичные орты.

При рассмотрении поверхностных сил вводится вектор напряжения поверхностной силы в точке жидкости p_n , численно равный давлению.

В общем случае p_n зависит не только от положения точки на поверхности (координат x, y, z) и времени t , но и от ориентации в пространстве площадки ΔS , т.е.

$$\vec{p}_n = (x, y, z, t, \vec{n})$$

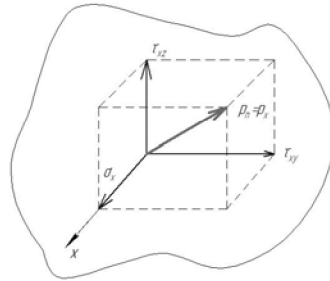


Рис. 7.5. Элементарный объем

Следовательно, напряжение p_n , вообще говоря, не является обычным вектором, так как может принимать различные значения в зависимости от положения площадки. Если зафиксировать ее положение, то p_n будет обычным вектором, который можно разложить на составляющие по координатным осям. Пусть, например, выбрана площадка, перпендикулярная оси Ox . Вектор напряжения $p_n = p_x$, в общем случае не совпадает с направлением нормали n (в

данном случае с направлением оси Ox) и может быть разложен на нормальную и касательные τ_{xy}, τ_{xz} составляющие $p_x = i\sigma_x + j\tau_{xy} + k\tau_{xz}$. Второй индекс у касательных напряжений указывает ось, в направлении которой проецируется напряжение τ .

Располагая площадки перпендикулярно к осям y и x , получим еще два разложения напряжения:

$$p_y = i\tau_{yx} + j\sigma_y + \tau_{yz},$$

$$p_z = i\tau_{zx} + j\tau_{zy} + k\sigma_z.$$

При произвольном расположении площадки с внешней нормалью n вектор p_n , может быть выражен через векторы p_x, p_y, p_z следующим соотношением:

$$p_n = np_n = p_x \cos(nx) + p_y \cos(ny) + p_z \cos(nz)$$

Проецируя p_n на координатные оси, получаем

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz),$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) + \tau_{zy} \cos(nz),$$

$$p_{nz} = \tau_{zx} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) + \sigma_z \cos(nz).$$

Физическую величину, характеризующую в данной точке вектором p_n , который принимает различные значения в зависимости от ориентации площадки, называют тензором. Таким образом, поверхностное напряжение определяется девятью скалярными величинами $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$. Тензор напряжений в произвольной точке пространства обладает свойством симметрии (теорема Коши о взаимности касательных напряжений), то есть $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Следовательно, поверхностное напряжение определяется не девятью, а шестью скалярными величинами.

Возникновение в жидкости касательных напряжений обусловлено ее вязкостью и движением (относительным сдвигом).

В неподвижной жидкости, а также в движущейся жидкости, лишенной вязкости (идеальная жидкость), касательные напряжения равны нулю ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) и поверхностные силы определяются только нормальными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, не зависящими от ориентации площадки, т.е. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = -p_{nn}$.

Величину p , равную любому нормальному напряжению с обратным знаком, называют напряжением давления или просто давлением.

$$p = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z = -p_{nn}.$$

Уравнения движения Эйлера для идеальной жидкости в декартовой системе координат имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{dc_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{dc_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X \\ \frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \frac{\partial c_z}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Рассматриваемые уравнения (8.1), (8.2) представляют собой математическое выражение закона сохранения количества движения в каждой точке жидкого элемента: скорость изменения вектора количества движения равна сумме всех массовых и поверхностных сил, действующих на жидкий элемент.

Система дифференциальных уравнений движения Эйлера (8.2) с частными производными от неизвестных функций (проекции вектора скорости c_x, c_y, c_z , плотность ρ и давление p) не замкнута в том смысле, что число неизвестных функций превышает число уравне-

ний. Кроме того, система уравнений нелинейна: неизвестные функции и их частные производные входят в виде произведений.

Для замыкания системы воспользуемся дифференциальным уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho c_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho c_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c_z)}{\partial z} = 0. \quad (8.3)$$

Это уравнение отражает закон сохранения массы жидкости и условие сплошности, поэтому имеет место не только для идеальной, но и для вязкой жидкости.

Для несжимаемой жидкости ($p = \text{const}$) из (8.3) имеем:

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0. \quad (8.4)$$

Уравнения движения несжимаемой жидкости, записанные с учетом сил вязкости, существенно усложняются по сравнению с системой уравнений (8.2):

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_x}{\partial z} \right) = \\ & = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right); \\ & \rho \left(\frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_y}{\partial z} \right) = \\ & = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial z^2} \right); \quad (8.5) \\ & \rho \left(\frac{\partial c_z}{\partial t} + c_x \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) = Z - \\ & - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Написанные уравнения движения (8.5), называемые уравнениями Навье-Стокса, при использовании оператора Лапласа объединяются в одно векторное уравнение

$$\rho \frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{J} - \text{grad}p + \mu \Delta \vec{c}.$$

Для математической формулировки задачи уравнения Эйлера и Навье-Стокса необходимо дополнить уравнением неразрывности и другими зависимостями. Для решения конкретных задач необходимо определить начальные и граничные условия. Для несжимаемой вязкой жидкости граничные условия вытекают из гипотезы прилипания жидкости к обтекаемой поверхности, согласно которой как нормальная, так и тангенциальная составляющие скорости на поверхности обтекаемого тела обращаются в ноль. опыты показывают, что эта гипотеза хорошо соответствует действительности и нарушается только при обтекании твердых поверхностей сильно разреженными газами.

Для однородной жидкости при отсутствии свободной поверхности массовые силы уравниваются гидростатической подъёмной силой и, если под давлением p понимать разницу между действительным давлением и давлением в состоянии покоя, эти силы выпадают из уравнений движения. Тогда имеем:

$$\rho \frac{d\vec{c}}{dt} = -\text{grad}p + \mu \Delta \vec{c}.$$

Дифференциальные уравнения движения Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости содержат те же зависимые переменные Эйлера: c_x, c_y, c_z, p , которые входят в дифференциальные уравнения для идеальной несжимаемой жидкости. Различие между этими уравнениями заключается только в том, что в правых частях уравнений системы появилось дополнительное слагаемое, равное произведению динами-

ческого коэффициента вязкости μ на оператор Лапласа от соответственной проекции вектора скорости.

Таким образом, введение вязкости привело к повышению порядка частных производных от проекций вектора скорости, а также к изменению граничных условий. Если для идеальной жидкости достаточно было на обтекаемой твердой поверхности условие непроницаемости и безотрывности частиц жидкости, то для вязкой несжимаемой жидкости необходимо условие прилипания частиц жидкости к непроницаемой твердой поверхности, т.е. обращение в нуль полной скорости.

На основе выше изложенного следует, что уравнения движения Эйлера и Навье-Стокса в общем случае проинтегрировать не удастся.

Однако при некоторых дополнительных условиях такое интегрирование оказывается возможным. Так, простейшие задачи о течении идеальной жидкости эффективно решаются с помощью методов теории функций комплексного переменного. Точные решения уравнений Навье-Стокса для некоторых частных случаев тоже имеются. Эти решения относятся к задачам, где все инерционные члены в левой части уравнений исчезают. В частности, указанным свойством обладают так называемые слоистые течения, признаком которых является наличие только одной составляющей скорости. Если этой составляющей является скорость c_x , а составляющие c_y и c_z равны нулю, то из уравнения неразрывности следует, что $\frac{\partial c_x}{\partial x} = 0$ и, следовательно, c_x от координаты x не зависит. Та-

ким образом, для слоистых течений имеем

$$c_x = c_x(y,z), c_y = 0, c_z = 0, \frac{dp}{dy} = 0, \frac{dp}{dz} = 0$$

и вместо полной нелинейной системы уравнений (8.2) получим для установившегося (стационарного) течения линейное дифференциальное уравнение относительно скорости $c_x(y,z)$

$$\frac{dp}{dy} = \mu \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} \right)$$

Заметим, что, поскольку в соотношении слева стоит функция координаты x , а справа – функция координат y и z , то равенство указанных функций возможно только при условии постоянства

градиента давления, т.е. $\frac{dp}{dz} = \text{const}$.

С использованием уравнения получены точные решения уравнений движения Навье–Стокса для случаев: плоскопараллельного течения в канале, ограниченном двумя параллельными плоскими стенками; течения Куэтта и слоистого движения несжимаемой жидкости в трубах. В первом случае течения скорость c_x не зависит от координаты z . Течение Куэтта имеет место между двумя параллельными пластинами, из которых одна движется с постоянной скоростью c_{x0} . Этот случай отличается от предыдущего только граничными условиями. Слоистое движение несжимаемой жидкости в трубах обладает осевой симметрией. При этом решение задачи упрощается, если использовать уравнения движения Навье–Стокса, записанные в цилиндрических координатах.

Применение уравнений движения Навье–Стокса к другим разнообразным случаям течений вязкой несжимаемой жидкости создавало большие трудности из-за их нелинейности. Это вынуждало многих исследователей изыскивать возможности применения не полных точных уравнений движения, а соответственно упрощенных приближенных дифференциальных уравнений.

Например, для некоторых задач инерционные силы могут быть очень малыми по сравнению с силами вязкости. Отбрасывая в уравнениях все члены в левой части, вместо нелинейной системы приходим к неоднородным линейным уравнениям Пуассона, решения которых известны. Этот путь линеаризации наиболее прост, но применим к очень медленным ползущим течениям.

Другой пример упрощения уравнений относится к течениям при больших числах Рейнольдса. В этом случае можно воспользоваться методом сравнительных оценок членов, входящих в уравнения Навье–Стокса, и на их основе попытаться упростить исходную систему, опустив члены, которые имеют относительно малый порядок. Подобное упрощение было предложено Прандтлем в 1904 г. для области течения, расположенной непосредственно вблизи обтекаемой поверхности. Это послужило основой для создания и дальнейшего развития теории пограничного слоя. Дифференциальные уравнения пограничного слоя следуют из уравнений Навье–Стокса.

Турбулентное движение является наиболее распространенной формой движения жидкостей и газов в природе и в технических устройствах. Однако достаточно универсальных и обоснованных методов расчета турбулентных течений не существует, несмотря на уже более чем вековую историю развития исследований турбулентности.

Полуэмпирические теории турбулентности применяются главным образом для течений типа пограничного слоя (пристеночных и струйных). Задачи со сложной внутренней структурой (пространственные течения, отрывные течения и др.) с помощью полуэмпирических теорий практически не рассчитываются. Это объясняется следующими причинами: сложностью математического описания механизма самого явления, ограниченностью возможностей традиционного направления в теории турбулентности, а также отсутствием необходимых детальных экспериментальных данных. Очевидно, необходимы новые подходы при построении теории турбулентности.

В настоящее время существуют две точки зрения математического описания развитого турбулентного течения. Согласно первой из них, базирующейся на основополагающих идеях О. Рейнольдса, за основу принимаются уравнения Навье–Стокса, видоизмененные соответствующим образом (уравнения движения Рейнольдса) и до-

полненные недостающими соотношениями турбулентного движения. Эта точка зрения является доминирующей. Вторая точка зрения заключается в том, что турбулентное движение является вероятностным процессом, а следовательно, и уравнения, описывающие его, должны составляться на статистической основе.

Краткий анализ на примере уравнений движения жидкости позволяет отметить, что при решении сложных нелинейных задач деформируемой сплошной среды классические методы математического анализа непрерывных функций для получения количественной информации оказываются в большинстве своем непригодными.

8.2. Численный эксперимент

За последние десятилетия наблюдается новый подход к решению задач (уравнений движения Навье–Стокса и Рейнольдса) с помощью численных методов, базирующихся на функциях дискретного элемента. Использование современных ЭВМ дает большие возможности для решения нелинейных задач, прямого численного моделирования физических явлений, а также численного эксперимента.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук, и не случайно, некоторые методы носят имена ученых Ньютона и Эйлера, а слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми. Второе «рождение» этой методологии пришлось на конец 40-х–начало 50-х годов XX века и было обусловлено по крайней мере двумя причинами. Первая из них – появление ЭВМ (компьютеров), хотя и скромных по нынешним меркам, но тем не менее избавивших от огромной по объему рутинной вычислительной работы. Вторая – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спут-

ников были предварительно «осуществлены» на ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике.

Технологические, экологические, экономические и иные системы, изучаемые современной наукой, больше не поддаются исследованию (в нужной полноте и точности) обычными теоретическими методами. Прямой натуральный эксперимент над ними дорог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в единственном экземпляре. Цена ошибок и просчетов в обращении с ними недопустимо высока.

В настоящее время математическое моделирование послужило основой нового способа исследования сложных процессов путём численного эксперимента, т.е. исследования реальных процессов средствами вычислительной математики и вычислительной техники. Появление высокопроизводительных ЭВМ и разработка эффективных численных методов решения задач создали предпосылки для реализации численного моделирования сложных течений жидкости и газа, в том числе и явлений турбулентности.

Численный эксперимент в сочетании с физическим открывает новые возможности в познании явлений природы, установлении роли в них различных факторов, а также позволяет более точно и глубоко определить рамки применимости схем и математических моделей.

Сама постановка вопроса о математическом моделировании какого-либо объекта (процесса, явления) порождает определённый план действий. Его можно условно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа.

На первом этапе, исходя из физической модели исследуемого объекта (процесса, явления), выбирается (или строится) «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, т.е. строится математическая модель. Математическая модель (или ее фрагменты) исследуется теорети-

ческими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

Второй этап: построение приближенного (численного) метода решения задачи, выбор (разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью. Вычислительные алгоритмы не должны искажать основные свойства модели и, следовательно, исходного объекта, должны быть экономичными и адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, «переводящие» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также предъявляются требования экономичности и адаптивности. Программы можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для непосредственного испытания на компьютере. Третий этап – программирование численного алгоритма для ЭВМ.

В численном эксперименте к вышеизложенным трем этапам добавляются: четвертый – проведение расчетов на ЭВМ; пятый – анализ полученных численных результатов и уточнение математической модели (исходной физической модели), т.е. качественное ее исследование. Всё это в совокупности и составляет предмет численного эксперимента.

Численное моделирование особенно важно там, где не совсем ясна физическая картина изучаемого явления, не познаны до конца внутренние механизмы взаимодействия. Путем расчетов на ЭВМ различных вариантов ведется накопление фактов, что дает возможность в конечном счете произвести отбор наиболее реальных и вероятных ситуаций. Активное использование методов численного моделирования позволяет резко сократить сроки научных и конструкторских разработок. В тех случаях, когда физический экспери-

мент трудно осуществим, математическое моделирование (численный эксперимент) служит практически единственным инструментом исследования. При теоретических исследованиях возникает много важных проблем, изучение которых связано с решением систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных или интегральных уравнений, выражающих законы сохранения. При этом во многих задачах приходится иметь дело с разрывными решениями (областями больших градиентов), причем область изменения исходных функций настолько широка, что обычные методы аналитического исследования (линеаризации уравнений, разложение в ряды, выделение малого параметра и т.п.) в общем случае не проходят для получения полного решения уравнений. В таких условиях приходится иметь дело с весьма сложными математическими моделями, решение которых без привлечения численных методов невозможно. Таким образом, численный эксперимент в механике жидкости и газа приобретает в настоящее время равные права с традиционным физическим экспериментом.

В зависимости от поставленной задачи по своему назначению условно различают следующие типы численных экспериментов: поисковый, оптимизационный, диагностический, имитационный. В результате проведения поискового вычислительного эксперимента дается описание наблюдаемых явлений, прогнозируется поведение исследуемого объекта в тех или иных условиях, возможно и не достижимых в реальных условиях. Такой тип характерен при проведении теоретических исследований фундаментального направления. Оптимизационный вычислительный эксперимент своей целью имеет многовариантность расчетов в рамках фиксированной математической модели и многомодельность, в результате которых решается задача оптимизации по уменьшению затрат, облегчению конструкции, управлению, а также уточнению или выбору математической модели (исходного объекта). При обработке данных натурных экспериментов используется диагностический численный эксперимент. По дополнительным косвенным измерениям делается

вывод о внутренних связях явления или процесса, например определяются коэффициенты уравнений. При отсутствии математических моделей или невозможности ее создания на основе широкого использования компьютеров проводится имитационное моделирование.

Следует отметить, что особенностью численного эксперимента является его междисциплинарный характер, так как в его едином цикле работает и теоретик, и экспериментатор, и прикладной математик, и программист.

Кажущаяся простота численного эксперимента, однако, таит в себе значительные трудности, связанные с построением соответствующей математической модели – численного алгоритма решения задачи и необходимостью обоснования полученных результатов. В ближайшем будущем не столько мощности ЭВМ, сколько разработка рациональных моделей и методов решения задач будет определять эффективность внедрения вычислительного эксперимента в различные области науки и техники.

8.3. Математическое моделирование и программное обеспечение

Выбор математической модели сводится к составлению групп искоемых физических величин и заданных, установлению связи между ними, т.е. написание уравнений вместе со всей необходимой информацией (о коэффициентах уравнений, о начальных и граничных условиях). Математические модели – уравнения могут быть разными: дифференциальными с частными производными, интегральные или интегрально-дифференциальными. Эти уравнения обычно выражают законы сохранения основных физических величин (энергии, количества движения, массы и др.) и, как правило, являются нелинейными.

Разработка математической модели является делом ответственным и требует большого искусства и опыта от исследователя. Важно так «сконструировать» приближенную модель, чтобы она

достаточно точно отражала характерные свойства рассматриваемого явления: при этом могут быть опущены несущественные и второстепенные свойства явления, с тем чтобы приближенная математическая модель была доступна для исследования на данном уровне развития вычислительной техники. Кроме того, она должна быть универсальной, т.е. одной и той же для описания различных физических, химических, биологических и т.д. процессов и явлений. Одно и то же математическое выражение (понятие) может описывать совершенно различные процессы. Так, например, уравнение Лапласа описывает движение несжимаемой жидкости, электрическое поле вне заряженных тел, стационарное тепловое поле, прогиб мембраны в теории упругости и т.д.

Для класса моделей – тех, которые сводятся к дифференциальным уравнениям, процесс численного моделирования включает два главных этапа: на первом строятся дискретные аналоги исходных моделей и изучаются их свойства, на втором – строятся дискретные аналоги дифференциального уравнения задачи и входных данных.

«Конструирование» соответствующей численной модели связано с рассмотрением следующих вопросов:

- дискретное («структурное») представление среды;
- математическая формулировка задачи;
- построение численного алгоритма и пути его реализации с учетом его реализации оптимальных требований к ресурсам ЭВМ;
- установление «структурно-асимптотической» устойчивости решения;
- исследование корректности постановки задачи.

Все численные подходы в механике сплошных сред предполагают переход от непрерывной среды к некоторой ее дискретной модели (например, эйлеровы и лагранжевы ячейки, «крупные частицы», конечные элементы, дискретные вихри и т.п.). При таком переходе естественно требовать, чтобы основные свойства физического процесса сохранялись. Такими свойствами, прежде всего,

являются законы сохранения. Если в классических подходах на дифференциальном уровне устанавливается связь для «точечных» объёмов, то приёмы вычислительной математики используют приближенное «структурное» представление уравнений баланса для указанных элементарных (но конечных) объёмов.

Совокупность разностных уравнений, аппроксимирующих основные дифференциальные уравнения и дополнительные условия (краевые и начальные), называется разностной схемой. Основные понятия и методы составления разностных схем изложены в теории разностных схем.

Для того чтобы написать разностную схему, необходимо выполнение двух условий:

1. Заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения.
2. Заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностный аналог для краевых и начальных условий.

При численном решении задачи невозможно воспроизвести разностное решение для всех значений аргумента, изменяющегося внутри некоторой области евклидова пространства. Естественно поэтому выбрать в этой области некоторое конечное множество точек и приближенное решение искать только в этих точках. Такое множество точек называется сеткой. Отдельные точки называют узлами сетки. Функция, определенная в узлах сетки, называется сеточной функцией. Таким образом, область непрерывного изменения аргумента заменим сеткой, т.е. областью дискретного изменения аргумента. Иными словами, осуществили аппроксимацию пространства решений дифференциального уравнения пространством сеточных функций.

Наиболее естественная дискретизация дифференциального оператора – замена производных соответствующими конечными разностями (дискретная аппроксимация производных), при этом возможно использование шаблонов.

После осуществления процедуры выполнения условий и составления разностной схемы приходят к алгебраической системе линейных уравнений, которые могут быть вычислены. Таким образом, задача о численном решении исходного дифференциального уравнения сводится к вопросу о нахождении решения полученной алгебраической системы.

Требование универсальности численного алгоритма для решения класса задач, определяемых заданием типа дифференциального уравнения, приводит к понятию однородных разностных схем, под которыми понимаются разностные схемы, вид которых не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной схемы. Во всех узлах сетки для любой задачи из данного класса разностные уравнения имеют один и тот же вид. Коэффициенты однородной разностной схемы определяются как функционалы коэффициентов дифференциального уравнения.

Разностные схемы должны отражать в пространстве сеточных функций основные свойства исходных дифференциальных уравнений. Кроме того, схема должна удовлетворять требованиям разрешимости и устойчивости, аппроксимации и, следовательно, точности определенного порядка; и наконец, численный алгоритм должен быть экономичным. Экономичность его зависит не только от схемы, но и от выбора способа решения разностных уравнений и от выбора сетки. В настоящее время получили распространение ряд методов получения разностных схем: интегро-интерполяционный, вариационно-разностные и метод конечных элементов.

Конечно-разностные формы нелинейных дифференциальных уравнений имеют различный вид в зависимости от выбора численной модели и методов решения численных алгоритмов.

Программное обеспечение численного эксперимента базируется на использовании комплексов и пакетов прикладных программ. Комплекс программ предназначен для решения близких по своей математической природе задач из одной предметной области. Он включает в себя библиотеку программных модулей, из которых

комплекуются рабочие программы. В комплексах прикладных программ сборка программ из модулей осуществляется вручную. В пакетах прикладных программ для сборки используются системные средства компьютера, что позволяет в значительной степени автоматизировать этот процесс. Пакеты прикладных программ можно рассматривать как информационные технологии, которые позволяют наиболее эффективно использовать накопленный программный продукт.

В настоящее время на основе использования CAD/CAE/CAM технологий возможно полноценное и качественное инженерное обеспечение математического моделирования на всех этапах разработки новых образцов техники. Задачей высших образовательных учреждений является освоение этих технологий в процессе обучения студентов.

Выбор способа расчета определяется стратегией решения общей задачи, поставленной или на уровне лабораторной работы, или курсового проекта, выпускной дипломной работы. Студенты могут выполнять задания и расчеты с помощью калькуляторов и графических построений, решать задачи с помощью многочисленных пакетов, носящих название «математика» (например, MATHCAD, MATLAB), или использовать готовые пакеты прикладных программ. В качестве примера, ниже будут рассмотрены некоторые возможности пакета Ansys, с помощью которого можно решать задачи по механике жидкости и газа (раздел Flotran). Университетские версии Ansys/Flotran имеет ограничение от 2000 до 16000 узлов, поэтому приходится ограничиваться главным образом плоскими и осесимметричными задачами. Для работы в среде Flotran необходимы знания в области механики жидкости и газа, основ вычислительных методов и программирования. Пакет имеет встроенные модули для многих известных систем CAD.

В результате решения уравнений Навье-Стокса для ламинарного режима течения или уравнения Рейнольдса для турбулентного режима течения с помощью пакета определяется поле скоростей и

поле давлений в области, на основании которых можно получить некоторые интегральные характеристики, например коэффициент гидравлических потерь устройства.

Схема применения численных методов при работе в среде пакета сводится к некоторой последовательности действий.

Определение имени задания.

1. Выбор раздела в главном меню (в рассматриваемом случае - Flotran).

2. Определение типа элемента: плоского или пространственного.

3. Задание геометрии области течения посредством координат, определяющих точек или прямоугольников (в случае простой геометрии).

4. Соединение введенных точек линиями.

5. Производство сеточного разбиения на границах области и создание конечно-элементной сетки.

6. Задание граничных условий: величин компонент скоростей во всех элементах входного сечения и нулевое значение скорости на стенках.

7. Задание величины давления на входе.

8. Задание свойств жидкости: плотности и вязкости в указанных единицах измерения.

9. Установка параметров решения в зависимости от возможностей компьютера и требуемой точности (например, ввести число итераций).

10. Ввести команду «Решение» (Solution).

11. По завершению расчетов на экране появляется график, показывающий изменение компонент скоростей по осям, а также соответствующие значения давлений. Проводится анализ результатов расчета. Решение может сходиться при достаточно большом числе итераций. Большое значение имеет также выбор расчетной области течения и корректность задания граничных условий.

12. Загрузка результатов последней итерации.

13. Просмотр поля скоростей. На экране появляется картина течения.

14. Просмотр полей давления. На экран выводятся изолинии давлений.

15. Программирование определения интегральных характеристик с помощью встроенной в систему вспомогательной программы или запись результатов для дальнейшей работы.

16. Выход из Ansys.

Схема действий при работе с другим пакетом, например STAR-CD, будет в деталях отличаться. Однако общий подход, зависящий от структуры задачи, останется без существенных изменений.

STAR-CD является специализированным пакетом для решения задач механики жидкости и газа. Этот пакет позволяет решать задачи со свободными поверхностями, фазовыми переходами и многофазными потоками. Возможно также получить решение для течений с кавитационными кавернами, проводить численное моделирование течений с химическими реакциями, в частности процессов горения. В процессе работы можно проводить изменение области интегрирования и использовать скользящие сетки, с помощью которых легко определять взаимодействие неподвижных и подвижных объектов.

Рассмотрим пример задачи, решенной посредством пакета Ansys, расчет течения жидкости в плоских диффузорах.

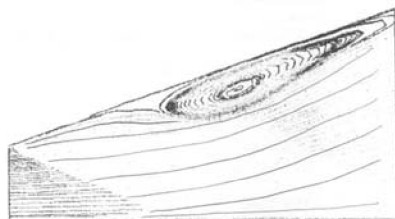


Рис. 8.1. Картина линий тока в плоском диффузоре

Течение в плоском диффузоре зависит от двух геометрических параметров (выбраны угол раскрытия диффузора α и степень рас-

ширения n) и от числа Рейнольдса. Модель диффузора была создана таким образом, что все эти параметры можно изменять. Расчетная область была разбита на 40 элементов по горизонтали и на 20 элементов по вертикали. В ходе вычислений были получены распределения скоростей и давлений, а также значения гидравлических потерь h и коэффициентов гидравлического сопротивления ξ . Сложность анализа течения в диффузорных каналах состоит в том, что здесь возможны две формы течения: безотрывная и отрывная, когда основной поток не следует вдоль стенки диффузора.

Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса для двух значений угла раскрытия представлена на рис. 8.2.

При некотором значении числа Рейнольдса, подсчитанному по входному сечению, его величина перестает влиять на значение коэффициента гидравлического сопротивления. На первый план выходят геометрические параметры диффузора.

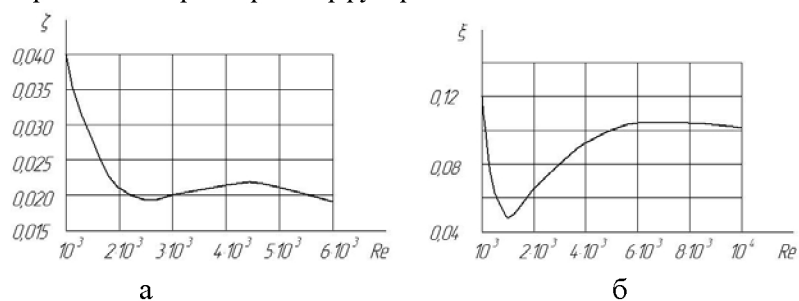


Рис. 8.2. Зависимость коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса: *а* - Угол раскрытия 8° ; *б* - угол раскрытия 12°

На рис. 8.3 показано влияние степени расширения диффузора и угла его раскрытия на отрыв потока в нем. Область ниже кривой соответствует безотрывному течению. Если геометрические параметры диффузора попадают в зону над кривой, то реализуется отрывной характер течения. Хорошо видно резкое уменьшение предельной степени расширения с ростом угла α и асимптотическое увеличение ее с уменьшением угла. При $\alpha < 4^\circ$ течение при любых степенях

расширения становится безотрывным. Разумеется, этот факт не свидетельствует об оптимальности таких диффузоров.

Полученные результаты совпадают с исследованиями А.Е. Зарянкина

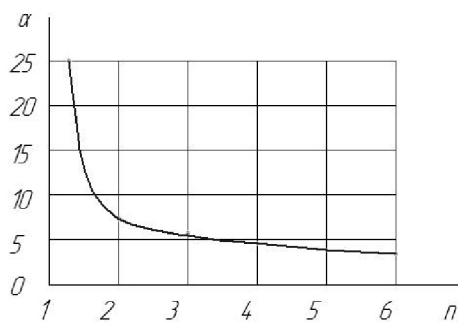


Рис 8.3. Отрывные и безотрывные диффузоры

Список использованной литературы

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика / ГИТТЛ. – М., 1953.
2. Сергель О.С. Прикладная гидрогазодинамика. – М.: Машиностроение, 1981.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1978.
4. Дейч М.Е. Техническая газовая динамика. – М.: Энергоиздат, 1973.
5. Лепешинский И.А. Газодинамика одно- и двухфазных течений в реактивных двигателях. – М.: Машиностроение, 1970.
6. Ковальнов Н.Н. Основы механики жидкости и газа / УлГТУ. – Ульяновск, 2002.
7. Башта Т.М. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы. – М.: Машиностроение, 1970.
8. Наталевич А.С., Кленина А.Д. Прикладная гидрогазодинамика. Гидравлика
9. Гидравлика: Метод. указания / Сост. А.Д. Кленина, В.А. Курочкин, А.С. Наталевич, В.Т. Шестаков; Куйбыш. авиац. ин-т. – Куйбышев, 1990. – 36 с.
10. Сборник контрольных заданий к лабораторно-практическим занятиям по гидрогазодинамике. Ч. 1. Гидравлика: Метод. разработка / Самар. аэрокосм. ун-т; Сост. В.В. Бирюк, А.Д. Кленина. – Самара, 1995. – 34 с.
11. Патанкарс С., Сполдинг Д. Тепло и массообмен в пограничных слоях. – М.: Энергия, 1971.
12. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978.
13. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980.
14. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984.

15. Численное моделирование турбулентных течений / В.М. Исвлев – М.: Наука, 1990.
16. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетгер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1-2. – М., 1990.
17. Численные решения многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. – М.: Наука, 1976.

Лабораторный практикум (физический)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 1

I. КОНСТРУКЦИЯ, ПРИНЦИП РАБОТЫ,
СИСТЕМА ИЗМЕРЕНИЙ ГИДРОСТЕНДА.

II. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

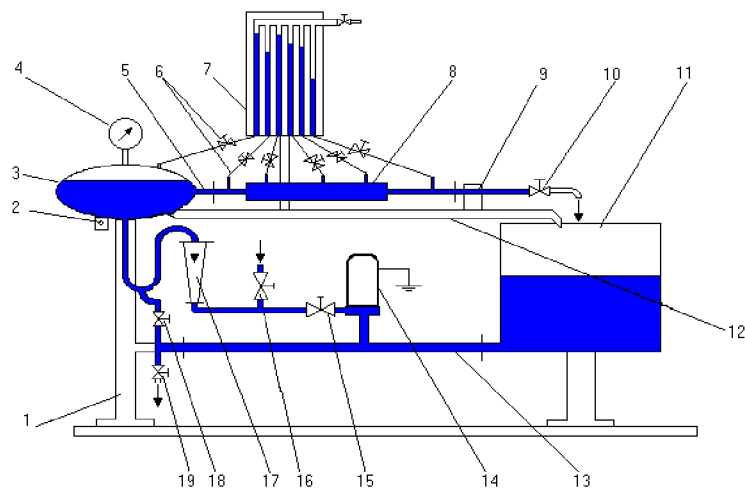


Рис. А.1. Схема гидравлического стенда ГС-3М

Основным элементом напорного устройства является ресивер 3, выполненный из нержавеющей стали в виде эллипсоида и установленный на стойке 1. Достаточно большие размеры ресивера позволяют получить равномерный поток на входе в рабочий участок. Постоянный напор во время эксперимента поддерживается с по-

мощью вентиля 16 подачи воды из водопроводной сети или вентиля 15 насоса.

Ресивер имеет выходной патрубок 5, к которому с помощью уплотнения крепится рабочий участок 8, необходимый для данной лабораторной работы. Другой конец рабочего участка уплотняется в патрубке с помощью резиновой манжеты, надвигаемой на рабочий участок механизмом крепления 9.

В напорную магистраль вода поступает из водопроводной сети при открытии вентиля 16, а вентиль 15 должен быть закрытым.

При режиме автономного питания водой от насоса 14 из сливного бака 11 вентиль 15 открывается, а вентиль 16 подачи воды от сети должен быть закрыт. Общий объем воды в баке 11 гидростенда при работе по замкнутой схеме составляет 60 литров.

Расход воды через рабочий участок регулируется вентилем 10 на выходе из рабочего участка 8 и вентилем 16 подачи воды из сети или вентилем 15 при насосной подаче воды из бака. Во время эксперимента с питанием от водопроводной сети вентиль слива воды 10 (основной) должен быть открыт, вентиль слива воды 18 (дополнительный) закрыт. При работе гидростенда в автономном режиме сливные вентили 19 и 18 должны быть закрыты.

Приёмное устройство представляет собой бак 11, связанный трубопроводом 13 со сливной магистралью.

Измерительные приборы на стенде представлены пьезометрическим щитом 7, на котором смонтированы семь стеклянных однострунных пьезометров высотой 1000 мм. Пьезометрический щит установлен неподвижно на стойке стенда. Пьезометры соединены с приёмниками (датчиками) давления гибкими соединительными трубками 6 с зажимами.

Избыточное давление в ресивере 3 измеряется образцовым манометром 4.

Расход воды измеряется ротаметром 7. В других модификациях гидростенда для определения расхода воды используется расхо-

домер оригинальной конструкции разработки кафедры теплотехники и тепловых двигателей СГАУ или счетчик воды.

Гидростенд (электродвигатель насоса) необходимо надежно заземлить.

Конструктивные особенности ГС-3М

- Малые габариты.
- Быстроразъёмные соединения для удобства и ускорения смены рабочего участка.
- Наддув пьезометрического щита для удобства регистрации показаний давления воды на испытываемых участках.
- Измерение объёмного расхода воды с помощью ротаметра.
- Контур с насосом и ёмкостью для работы стенда по замкнутой схеме.
- Система для введения подкрашенной жидкости в исследуемый поток воды при визуальных наблюдениях.
- Наличие лотка и координатных линеек для исследования свободных струй воды.

Технические данные гидростенда

Напряжение питания – 220 В

Частота – 50 Гц

Мощность электродвигателя насоса – 750 Вт

Максимальный расход воды – 1 кг/с

Напор $H = (0,1...2,0) \cdot 10^5$ Па

Габариты: длина - 2240 мм
 ширина - 800 мм
 высота - 1820 мм
 масса - 80 кг

Большинство известных учебных гидравлических установок являются унифицированными по своим расходным и габаритным

характеристикам, которые приближены к натурным. Изготовление гидростенда связано с большими материальными затратами и требованием достаточно больших площадей учебных помещений.

Универсальный гидравлический стенд ГС-3М является модификацией стенда, разработанного в Куйбышевском авиационном институте на кафедре теплотехники и тепловых двигателей совместно с отраслевой научно-исследовательской лабораторией № 9, защищенного авторским свидетельством № 521488 от 22 марта 1976 года, авторы: А.П. Меркулов, В.Б. Щербак.

Гидростенд прост в управлении, удобен в эксплуатации, позволяет осуществлять быструю смену режимов и объектов исследования (рабочих участков), что важно при индивидуальной работе студентов на лабораторно-практических занятиях.

Гидростенд ГС-3М может работать как от водопроводной сети со сливом в канализацию, так и по собственной замкнутой схеме с насосной подачей воды из расходного бака и слива в него.

На рис. А.1 приведена схема универсального гидравлического стенда ГС-3М, включающего напорное и приёмное устройства, измерительные приборы и рабочий участок.

Перенастройка гидростенда для проведения очередной лабораторной работы производится сменой рабочего участка 8 (рис. А.1). Описание рабочих участков гидростенда приводится в методических указаниях к каждой лабораторной работе.

I. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА ЖИДКОСТИ

Цель работы - ознакомление с понятиями и единицами измерений основных физических величин жидкости; измерение статического давления и давления торможения в поперечном сечении потока; определение скорости движения в точке потока, определение средней скорости в сечении потока, измерение расхода.

Теоретические основы эксперимента

Давлением в потоке (статическим давлением) p в данной точке потока жидкости называется предел отношения нормальной составляющей силы воздействия ΔP_n со стороны окружающей жидкости к поверхности элемента ΔS в окрестности данной точки:

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P_n}{\Delta S}.$$

Если нормальные силы P_n распределены непрерывно и равномерно по площади поверхности S элемента жидкости, то плотность распределения их характеризуется средним гидростатическим давлением:

$$p = \frac{P_n}{S}.$$

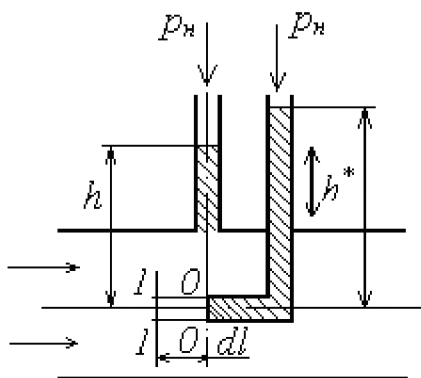


Рис. А.1.1. Схема измерения скорости в центре потока жидкости

Давлением торможения p^* называется давление в точке (сечении) потока жидкости, скорость которой сведена к нулю. Соотношение между давлением p и давлением торможения p^* в точке потока несжимаемой жидкости определяется из уравнения Бернулли, записанного для горизонтальной элементарной струйки на участке 1-0 (рис. А.1.1), где происходит процесс торможения жидко-

сти. Участок 1-0 должен быть горизонтальным, чтобы исключить влияние сил тяжести на процесс торможения жидкости. Поскольку процесс торможения протекает почти мгновенно, то расстояние между сечениями 1-1 и 0-0 мало и влиянием вязкости можно пренебречь. Тогда

$$\frac{p_0^*}{\rho} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2}; \quad p_0^* = p_1 + \frac{\rho \cdot c_1^2}{2}.$$

Сечения 1-1 и 0-0 практически совпадают, поэтому давление торможения в произвольной точке определим из выражения:

$$p^* = p + \frac{\rho \cdot c^2}{2}, \quad (1)$$

где второй член в правой части формулы называется динамическим давлением (скоростным напором).

Из уравнения (1) следует, что давление торможения в точке потока несжимаемой жидкости равно сумме статического и динамического давления в той же точке. В покоящейся жидкости различия между p^* и p нет, так как при $c = 0$; $p^* = p$. В случае газа (сжимаемая жидкость) формула (1) неточна, так как в ней не учитывается увеличение плотности газа в процессе торможения.

Под влиянием сил вязкости жидкости скорость её в различных точках одного и того же сечения потока неодинакова: в центре сечения потока она максимальная, у стенки равна нулю. Закон распределения скоростей по сечению в большинстве случаев бывает неизвестен и определяется в результате эксперимента. Используя уравнение (1), получим формулу для вычисления скорости движения несжимаемой жидкости в точке потока

$$c = \sqrt{2 \frac{p^* - p}{\rho}}. \quad (2)$$

Если при измерении давлений жидкость в трубках пьезометров одинаковая с исследуемой жидкостью (рис. А.1.3), то

$$\frac{p^* - p}{\rho g} = h^* - h, \quad (3)$$

где ρ – плотность исследуемой жидкости;
 g – ускорение свободного падения, $g = 9,8066 \text{ м/с}^2$.
 $h^* - h$ – разность высот столбиков жидкости в пьезометрах, измеряющих давление торможения и давление в потоке в одной и той же точке потока.

Тогда с учетом (3) формула (2) примет вид

$$c = \sqrt{2g(h^* - h)}, \quad (4)$$

В теории одномерных течений вводится понятие осредненной скорости в сечении потока. Обычно осреднение скорости делается по расходу.

Средерасходной скоростью $c_{\text{ср}}$ называется такая условная, но одинаковая во всех точках сечения скорость, при которой через сечение протекает такое же количество жидкости, как и при действительном распределении скоростей. При движении несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) нет различия между среднemasсовой и среднеобъемной скоростями, то есть $c_{\text{срG}} = c_{\text{срQ}} = c_{\text{ср}}$. Среднеобъемную скорость несжимаемой жидкости в сечении потока можно определять либо путем осреднения экспериментальной эпюры скорости в соответствии с формулой

$$c_{\text{ср}} = \frac{\int c_i ds}{S}, \quad (5)$$

либо по измеренному объемному секунднему расходу

$$c_{\text{ср}} = \frac{Q}{S}, \quad (6)$$

где S – площадь сечения потока жидкости; ds – площадь сечения элементарной струйки, соответствующая скорости c_i .

Расходом называется количество жидкости, протекающей через сечение потока в единицу времени. В зависимости от единиц измерения количества жидкости различают объемный расход

G_v , m^3/c и массовый G $кг/c$, которые определяются соотношением $G = \rho \cdot G_v$, где ρ – плотность жидкости.

При установившемся движении несжимаемой жидкости её расход в любом произвольном сечении одного и того же потока сохраняется неизменным, то есть $Q = \text{const}$, при $\rho = \text{const}$, $G_c = \text{const}$.

Измерение давления. Широко используются приборы дистанционного типа, состоящие из приемника (датчика) и измерительного устройства. Приемник помещается в жидкость, а измерительное устройство находится в удобном для наблюдения месте.

Схема расположения в жидкости приемников давления в потоке и давления торможения показана на рис. А.1.2.

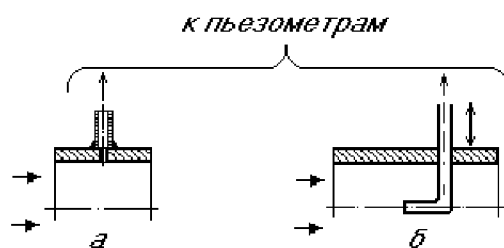


Рис. А.1.2. Схема установки приемников для измерения в центре потока жидкости: *а* – давления в потоке; *б* – давления торможения

Для правильного измерения давления в потоке жидкости необходимо, чтобы плоскость отверстия приемника была касательной к линии тока. Часто отверстие приемника статического давления делают в стенке трубы. Приемник для измерения давления торможения обычно представляет собой изогнутую трубку, открытый конец которой устанавливается навстречу потоку в положение, когда его ось совпадает с направлением вектора скорости набегающей струйки жидкости.

Положение точки измерения можно изменять, перемещая приемник давления торможения в сечении трубы с помощью микрометрического винта.

Измерительным устройством является пьезометр 2 или манометр 4 (рис. А.1.3).

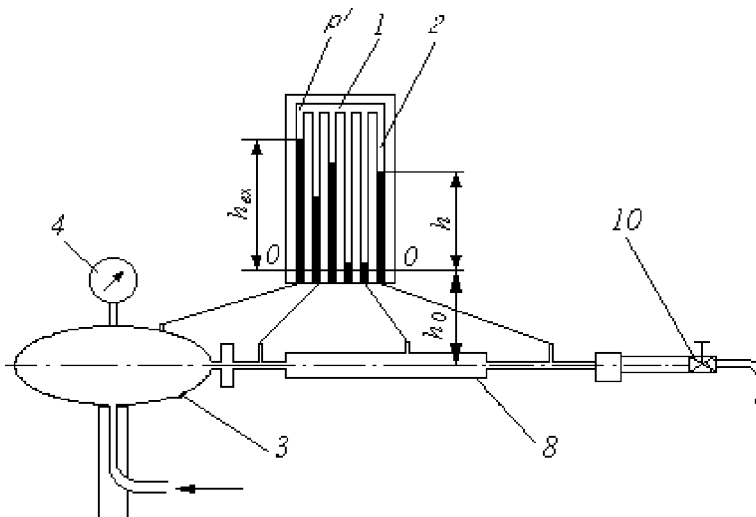


Рис. А.1.3

Пьезометр - это вертикальная стеклянная трубка, один конец которой сообщен с окружающей газовой средой, в частности с атмосферой, а второй - гибкой трубкой соединен с приемником давления. Пьезометр обычно помещают на щите с миллиметровой шкалой для отсчета высоты h подъема жидкости.

Манометры бывают различных конструкций, но наиболее распространен пружинный. Принцип действия пружинного манометра основан на зависимости деформации одновитковой трубчатой пружины (трубки Бурдона) от избыточного давления внутри этой трубки. Трубчатая пружина (рис. А.1.4.) одним концом закреплена в держателе 2, оканчивающемся штуцером для присоединении к магистрали с измеряемым давлением. Другой, закрытый конец пружины 1 соединен с секторным передаточным механизмом, состоящим из поводка 3, сектора 4, трубки 5, на оси которой закреплена стрелка 6.

Избыточное давление вызывает перемещение конца пружины *1* и связанное с ним перемещение стрелки *б* вокруг своей оси. Показания прибора отсчитываются по шкале *7*. Шкала у образцового манометра разбита на число условных делений (100, 250 или 300), у простых (технических) манометров шкала градуируется в $кг/см^2$, $кПа$, $МПа$.

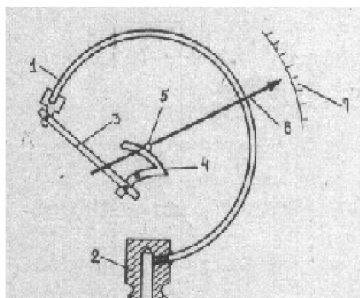


Рис. А.1.4. Схема пружинного манометра

Нуль шкалы манометра соответствует атмосферному давлению. Пружинные манометры должны периодически поверяться, так как с течением времени пружины деформируются, изменяя свою первоначальную форму.

Пьезометрами и манометрами измеряется избыточное давление, то есть разность между абсолютным давлением жидкости и давлением окружающей среды. Тогда абсолютное давление жидкости

$$p = p_n + p_{изб},$$

где p_n – атмосферное давление; $p_{изб}$ – избыточное давление, измеренное с помощью пьезометра или манометра.

Абсолютное давление торможения жидкости

$$p^* = p_n + p^*_{изб},$$

где $p^*_{изб}$ – избыточное давление торможения, измеренное с помощью пьезометра или манометра.

Для сокращения длины пьезометрических трубок и удобства отсчета уровней столбиков жидкости на гидростенде ГС-3М верхние концы всех трубок соединены общим коллектором *1* (рис. А.1.3), который посредством крайней слева трубки соединен с ресивером *3*. В этом случае в коллекторе и в верхних концах трубок давление воздуха выше атмосферного.

Размерность давления p, p^* в международной системе единиц измерения СИ – Паскаль ($Па$) или H/m^2 . Переводные единицы измерения давления $1 \text{ мм вод. ст.} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ кг/см}^2 = 7,356 \cdot 10^{-2} \text{ мм рт. ст.} = 9,8066 \text{ Па}$.

Атмосферное давление измеряется с помощью прибора, называемого барометром.

Измерение скорости. Из множества способов измерения скорости жидкости наиболее распространенным в практике экспериментирования является пневмометрический. В основе этого способа лежит непосредственное воздействие движущейся жидкости или газа на приемные элементы приборов, измеряющих давление в потоке и давление торможения. Затем по величине этих давлений по формуле (2) или (4) вычисляется скорость в точке потока. Среднеобъемная скорость несжимаемой жидкости в сечении потока определяется по формулам (5) или (6).

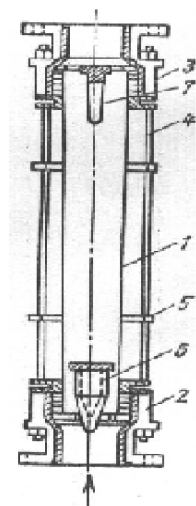


Рис. А.1.5. Ротаметр со стеклянной конусной трубкой

Измерение расхода. Приборы для измерения расхода называются расходомерами. Наиболее простым и точным способом измерения расхода жидкости является объемный (весовой), при котором определяется время t наполнения заданного объема V вытекающей жидкости. Объемный расход жидкости $G_v = V/t$. Этот способ измерения расхода используется при малых расходах, а также для градуировки (поверки) других типов расходомеров.

Ротаметр – является расходомером, принцип действия которого основан на восприятии динамического напора протекающей по трубопроводу жидкости чувствительным элементом прибора (поплавком), перемещение которого в потоке служит мерой расхода.

На рис. А.1.5 показано устройство ротаметра со стеклянной конусной трубкой 1, которая зажата в патрубках 2 и 3, снабженных сальниками. Оба патрубка между собой связаны тягами 4 с надетыми на них ребрами 5. Эта армировка придает прибору необходимую прочность. Внутри патрубка 2 имеется седло, на которое опускается поплавок 6 при нулевом расходе жидкости или газа. Верхний патрубок 3 снабжен ограничителем хода поплавка 7. Для обеспечения устойчивой работы поплавок верхний его обод снабжен каналами с кртым наклоном. Под действием потока жидкости или газа поплавок вертикально перемещается и одновременно приходит во вращательное движение и центрируется в середине потока. Изменение расхода нарушает равновесие поплавок и вызывает его перемещение по трубке до тех пор, пока разность давлений до и после поплавок не будет его уравнивать. Для конкретного поплавок и измеряемой среды эта разность давлений имеет одно и то же значение. Положение поплавок, при котором будет выполняться условие равновесия, зависит от расхода и проходного сечения (кольцевого зазора между поплавком и трубкой) ротаметра. По вертикальному перемещению поплавок ротаметра вдоль его шкалы, нанесенной на конусной стеклянной трубке судят об объемном расходе в единицу времени ($л/с$, $м^3/ч$). Указателем у ротаметра со стеклянной трубкой служит верхняя горизонтальная плоскость поплавок. К преимуществам ротаметров следует отнести простоту конструкции, возможность измерения малых расходов, практически равномерную шкалу. Недостатком стеклянных ротаметров является отсутствие автоматической записи показаний, зависимость показаний от вязкости, температуры и давления измеряемой среды.

Описание лабораторной установки

В качестве установки используется универсальный гидравлический стенд ГС-3М [5]. Рабочий участок гидростенда для данной

лабораторной работы представляет собой прозрачную трубу постоянного сечения с внутренним диаметром, $d = 17 \text{ мм}$ (рис. А.І.6).

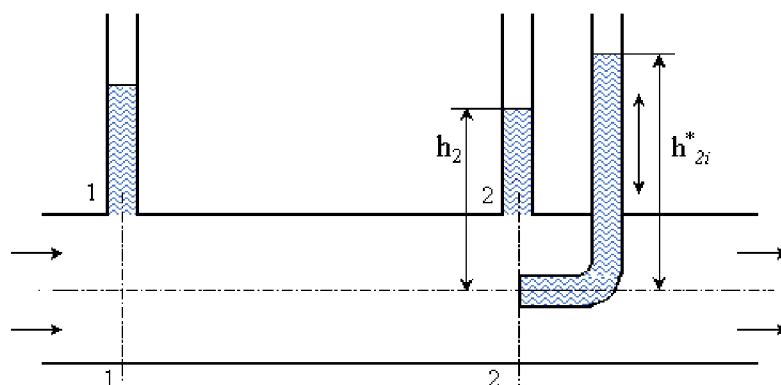


Рис. А.І.6. Схема прозрачной трубы для измерения давления и скоростей жидкости

На выходе из прозрачной трубы (сечение 2) установлены приёмники давления и давления торможения, соединенные гибкими трубками с пьезометрами. Приемник давления торможения представляет собой изогнутую трубку, перемещаемую по радиусу сечения трубы при помощи микрометрического винта.

Порядок выполнения работы

1. Для записи показаний приборов и результатов вычислений заготавливается протокол эксперимента.
2. Измерить давление p_n и температуру t_n воздуха в помещении лаборатории.
3. Проверить готовность установки к эксперименту. При этом сливной вентиль *16* должен быть полностью открыт, дополнительный сливной вентиль *18* и вентиль автономного режима *15* закрыты, трубопровод и рабочий участок заполнен водой, приёмник давления торможения в сечении 2 находится у стенки трубы.

4. Установить режим течения воды, открывая вентиль подачи воды *16* и регулируя расход её вентилем *10*. На режиме установившегося течения показания манометра *4* и пьезометров на щите *7* должны сохраняться постоянными во время эксперимента.

5. Измерить избыточное давление воды в ресивере p_m , высоту столбика жидкости $h_{вх}$ в пьезометре, соединенном с ресивером, а также высоту столбиков жидкости h_2 и h_{2i}^* в пьезометрах, соединенных с приёмниками давления в сечении *2*.

6. Перемещая микрометрическим винтом трубку приёмника давления торможения от стенки трубы, произвести измерение давления в фиксированных точках сечения *2* потока воды.

7. Измерить расход воды ротаметром.

8. Закрыть вентиль *16* и *10*.

9. Результаты всех измерений записать в протокол.

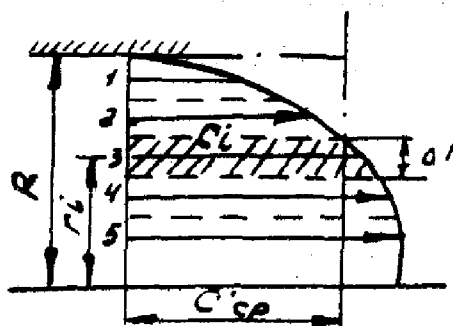


Рис. А.1.7. Осреднение скорости неравномерного потока в сечении трубы

Обработка результатов эксперимента

1. По результатам измерений избыточного давления в ресивере p_m и показаний пьезометров определить по формулам статическое давление p и давление торможения p^* в фиксированных точках сечения *2* потока воды.

2. По результатам измерений показаний пьезометров определить по формуле скорость движения воды c для каждой координаты установки приемника давления торможения в сечении 2 трубы.

3. Подсчитать среднеобъемную скорость потока c_{cp} путём осреднения экспериментальной эпюры скорости

$$c_{cp} = \frac{2\Delta r(c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 + c_4r_4) + c_5\left(r_5 + \frac{\Delta r}{2}\right)^2}{R^2},$$

где r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 – радиусы точек измерения давления торможения в сечении 2 трубы; Δr – толщина слоя воды, соответствующая данной точке измерения; R – радиус в сечении 2 трубы.

4. Определить по формуле среднеобъемную скорость потока c_{cpQ} .

5. Записать в таблицу рассчитанных величин результаты расчетов, построить графики изменения c_{2i}, p_{2i}^* по радиусу сечения 2 потока жидкости.

Содержание отчета

1. Протокол эксперимента со схемой рабочего участка установки.

2. Графики изменения скорости и давления торможения по радиусу сечения 2 потока жидкости.

3. Сравнение средней скорости потока жидкости c_{cpQ} и c_{cp} в сечении 2.

4. Выводы по работе.

Контрольные вопросы к работе

1. Почему движение воды на рабочем участке считается установившемся?

2. Как измеряется объемный расход воды в трубопроводе?

3. Почему расход воды измеряется за пределами рабочего участка, а в расчетах принимается равным расходу в сечении 2?
4. Почему в движущейся воде давление торможения больше давления потока в этой же точке?
5. Почему плоскость отверстия приемника давления торможения должна быть строго перпендикулярна вектору скорости набегающей струйки жидкости или газа?
6. Как определяют координаты точек установки приемника давления торможения?
7. Почему при движении воды по трубе её скорость на оси максимальная, а у стенки близка к нулю?
8. При каких условиях давление торможения было бы одинаковым для всего потока в сечении трубы?
9. Для чего определяется среднеобъемная скорость движения?
10. Как доказать постоянство среднеобъемной скорости воды во всех сечениях рабочего участка?

Список использованных источников

1. Преображенский В.П. Теплотехнические измерения и приборы. – М.: Энергия, 1978.
2. ОСТ В1 03534-71. Датчики давления. Типы и основные параметры, технические требования.
3. ГОСТ 6521-60. Манометры и вакуумметры пружинные образцовые.
4. ГОСТ 13045-67. Общепромышленные ротаметры.
5. Универсальный гидравлический стенд ГС-3М: Метод. разработка / Сост. В.В. Бирюк, А.Д. Кленина, А.М. Цыганов; Самар. гос. аэрокосм. ун-т. – Самара, 2002. - 6 с.

II. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Цель работы – ознакомление с ламинарным и турбулентным режимами течения жидкости в трубе, методами определения режимов: экспериментальным (визуальное наблюдение) и расчётным с помощью числа Рейнольдса (Re).

Теоретические основы эксперимента

Различают два вида движения жидкости в каналах: ламинарное (слоистое), когда отдельные струйки не перемешиваются, и турбулентное, когда имеются поперечные и продольные скорости и перемешиваются частицы жидкости из различных струек.

Критерием вида движения жидкости является число Рейнольдса. В частном случае при течении жидкости в трубах число Рейнольдса

$$Re = cd/\nu \quad (1)$$

Критическое число $Re_{кр}$, разделяющее потоки жидкости в трубах на ламинарные и турбулентные, равно 2320. При $Re > Re_{кр}$ - поток ламинарный, при $Re < Re_{кр}$ - поток турбулентный. Переход ламинарного течения жидкости в турбулентное происходит постепенно. Когда число Re незначительно превышает $Re_{кр}$, турбулентность потока слабая, соответствующий режим движения называют переходным. Физически число Re соответствует отношению сил инерции к силам вязкости, т.е. является безразмерным критерием динамического подобия потоков жидкости. Два или несколько потоков жидкости считаются подобными, если имеет место подобие: геометрическое (подобие каналов, по которым течёт жидкость), кинематическое (подобны эпюры скорости в сходственных сечениях) и динамическое (равны числа Re в сходственных сечениях).

У подобных потоков одноимённые безразмерные (относительные) параметры (отношение давлений p_2/p_1 ; плотностей ρ_2/ρ_1 ; ско-

ростей c_2/c_1 ; коэффициенты гидравлических потерь ξ_f ; КПД и т.п.) одинаковы. Это позволяет моделировать течение жидкости и проводить исследование моделей, а не натуральных образцов, которые зачастую невозможно или трудно исследовать в силу сложности и большой стоимости эксперимента.

Описание лабораторной установки

В качестве установки используется универсальный гидравлический стенд. Рабочий участок данной лабораторной работы представляет собой прозрачную трубу постоянного сечения с внутренним диаметром $d = 17 \text{ мм}$ (рис. А.П.1). На входе (сечение 1) в центральную часть трубы по тонкой трубке подаётся подкрашенная жидкость из бачка 1 при открытии крана 2.

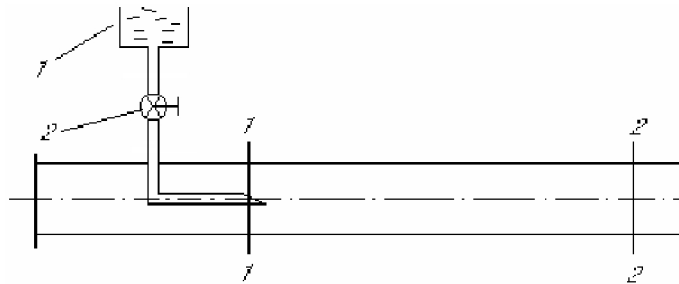


Рис. А.П.1. Схема прозрачной трубы для наблюдения режимов течения жидкости

Порядок выполнения работы

1. Для записи показаний приборов и результатов вычислений заготавливается протокол эксперимента.
2. Измерить давление p_n и температуру воды, подаваемой в гидростенд.
3. Проверить готовность установки к эксперименту. При этом сливной вентиль 5 должен быть полностью открыт, дополнитель-

ный вентиль 6 и вентиль автономного режима 9 закрыт, трубопровод и рабочий участок заполнен водой.

4. Установить режим течения воды, открывая вентиль подачи воды 8 и регулируя расход вентилем 18. Во время эксперимента, регулируя вентилем 8, поддерживать постоянным давление в ресивере p_m , т.к. движение жидкости должно быть установившимся.

5. Плавно открыть кран 2 (рис. А.П.1), чтобы струйка подкрашенной жидкости оставалась тонкой.

6. Наблюдать за поведением подкрашенной струйки в потоке воды.

7. Закрыть кран 2 (рис. А.П.1).

8. Измерить расход воды ротаметром.

9. Измерить температуру воды ртутным термометром, помещая его в вытекающую струю воды.

10. Повторить пункты 4, 5, 6, 7, 8, 9 для каждого следующего опыта.

11. Закрыть вентили подачи воды в ресивер 8 и вентиль регулирования расхода 18 [3].

12. Результаты всех измерений записать в протокол.

Обработка результатов эксперимента

1. Определить площадь сечения потока жидкости: $S = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$,

где d - внутренний диаметр прозрачной трубы.

2. Определить расход воды Q в m^3/c по результату измерения его ротаметром.

3. Определить по объёмному расходу воды среднюю скорость $c_{ср}$ в m/c .

4. Определить кинематический коэффициент вязкости ν в m^2/c по измеренной температуре t , °C воды в соответствии с графиком зависимости кинематической вязкости воды от ее температуры при $p_n = 101,325 \text{ кПа}$.

5. Подсчитать по формуле число Рейнольдса Re , сравнить со значением критического числа $Re_{кр}$ и определить режим течения воды.

6. Расчёты по пунктам 2, 3, 4, 5 повторить для каждого следующего опыта.

7. Записать в таблицу вычисляемых величин протокола результаты расчётов.

Содержание отчёта

1. Протокол эксперимента со схемой рабочего участка установки.

2. Эскизы картины течения жидкости при ламинарном и турбулентном движении.

3. Сравнение режимов течения жидкости, определённых при помощи числа Рейнольдса с визуально наблюдаемыми в опытах.

4. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Почему при турбулентном режиме течения эпюра скорости в поперечном сечении более равномерная, чем при ламинарном?

2. Как определяется режим течения жидкости при отсутствии возможности визуального наблюдения?

3. Почему вязкость воды зависит от её температуры?

4. Почему число Рейнольдса является критерием динамического подобия потоков жидкости?

5. При каких условиях движение воды в трубе считается установившимся?

6. Почему объемный расход воды в различных сечениях трубы постоянен?

7. Почему при турбулентном режиме течения потери энергии на преодоление сопротивления трения больше, чем при ламинарном?

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Цель работы - экспериментальное подтверждение закона сохранения и превращения механической энергии с использованием уравнения Бернулли для потока несжимаемой жидкости. При этом измеряются давление в потоке и давление торможения по длине канала переменного сечения; время заполнения водой фиксированного объёма. Рассчитываются объёмный расход жидкости, скорость потока жидкости в характерных сечениях трубы. Устанавливаются закономерности изменения вдоль потока несжимаемой жидкости давления и давления торможения, скорости движения и гидравлических потерь.

Теоретические основы эксперимента

Уравнение Бернулли выражает закон сохранения и превращения энергии в механической форме для потока жидкости. Для участка 1-2 элементарной струйки вязкой несжимаемой жидкости (рис. А.2.1) при установившемся одномерном движении уравнение Бернулли имеет следующий вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{c_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{c_2^2}{2g} + h_{r(1-2)}, \quad (1)$$

где z – удельная потенциальная энергия положения (работа силы тяжести);

$p/\rho g$ – удельная потенциальная энергия давления;

$c^2/2g$ – удельная кинетическая энергия;

h_r – удельная суммарная потеря энергии жидкости на преодоление гидравлических сопротивлений на участке между сечениями 1–2.

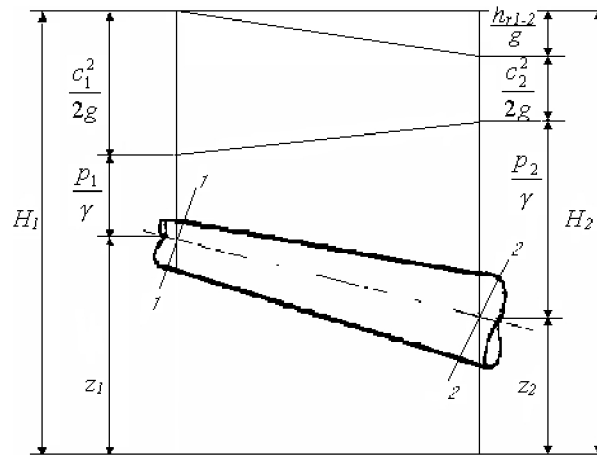


Рис. А.2.1. Изменение напоров на участке элементарной струйки

В параметрах торможения уравнение (1) примет вид

$$z_1 + \frac{p_1^*}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2^*}{\rho g} + h_{r(1-2)}. \quad (2)$$

В частном случае горизонтальной элементарной струйки ($z_1 = z_2$), имеем:

$$\frac{p_1^*}{\rho g} = \frac{p_2^*}{\rho g} + h_{r(1-2)}. \quad (3)$$

При протекании жидкости в трубе в слагаемое кинетической энергии уравнения (1) следует ввести поправочный множитель - коэффициент α , учитывающий неравномерность эпюры скорости в поперечном сечении потока. Тогда для участка 1-2 трубы уравнение Бернулли запишем следующим образом:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{c_{1cp}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{c_{2cp}^2}{2g} + h_{r(1-2)}, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{\int \frac{c_i^2 dG}{2}}{G c_{cp}^2} = \frac{\int c_i^2 dS}{c_{cp}^2 S}; \quad G = \rho \cdot c_{cp} S.$$

Уравнения (2) и (3) для течения в трубе остаются без изменения, только p^* вычисляется по среднemasсовой скорости, т.е.

$$p_{cp}^* = p + \frac{\rho \cdot c_{cp}^2}{2}. \quad (5)$$

При ламинарном движении жидкости в трубах $\alpha_{л} = 2$, при турбулентном движении $\alpha_{т} = 1,02 \dots 1,04$. На практике чаще наблюдается турбулентное движение жидкости в трубах, в инженерных расчётах приближённо принимают $\alpha_{т} = 1$.

Из уравнения (3) следует, что в горизонтальных трубах давление торможения p^* изменяется только под влиянием гидравлических сопротивлений; при наличии сопротивления p^* уменьшается по направлению движения, при отсутствии сопротивления (идеальная жидкость) p^* остаётся постоянным.

Из уравнения (4) следует, что давление p изменяется не только под влиянием гидравлического сопротивления $h_{г}$, но и в результате изменения скорости c , т.е. изменения площади сечения трубы, поскольку при установившемся движении несжимаемой жидкости $Q = c_{cp} S = \text{const}$ и

$$c_{cp} = \frac{Q}{S}. \quad (6)$$

При небольшом сопротивлении (в трубах без внезапного расширения или сужения) в плавно сужающихся трубах скорость возрастает, а статическое давление убывает; в плавно расширяющихся трубах, наоборот, скорость уменьшается, а статическое давление возрастает.

Описание лабораторной установки

В качестве лабораторной установки используется универсальный гидравлический стенд. Рабочий участок гидростенда для данной лабораторной работы представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения (рис. А.2.2).

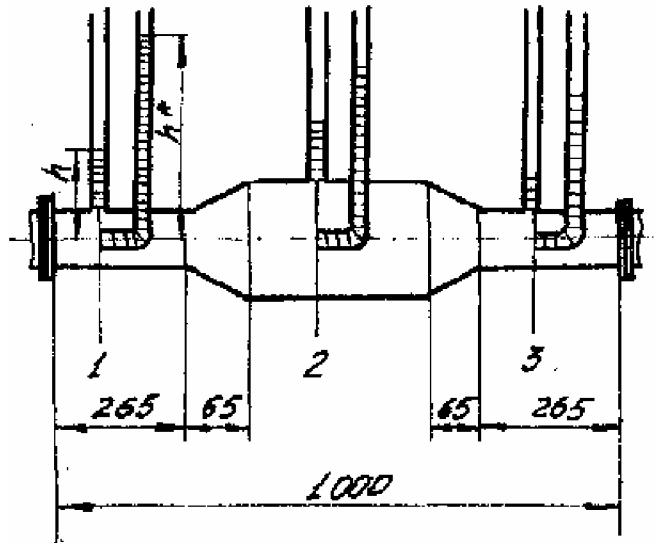


Рис. А.2.2. Схема измерения давлений в трубе переменного сечения

Для измерения давления жидкости в трёх сечениях (сечения 1, 2, 3) в стенке трубы имеются отверстия с трубками, соединёнными с пьезометрами. Для измерения давления торможения на оси трубы в тех же сечениях установлены изогнутые навстречу потоку трубки, также соединённые с соответствующими пьезометрами.

Разница столбиков жидкости ($h^* - h$) в пьезометрах для измерения давления торможения и давления соответствует максимальной скорости в центре потока жидкости (на оси трубы).

Внутренний диаметр трубы в сечениях 1 и 3 одинаков и равен $d_1 = d_3 = 14$ мм, в сечении 2 - $d_2 = 28$ мм. Расстояния сечений 1, 2, 3 от входа трубы равны $l_1 = 135$ мм; $l_2 = 510$ мм; $l_3 = 890$ мм.

Порядок выполнения работы

1. Для записи показаний приборов и результатов вычислений заготавливается протокол эксперимента.
2. Измерить давление p_n воздуха в помещении лаборатории.
3. Проверить готовность установки к эксперименту. При этом сливной вентиль 5 должен быть полностью открыт, дополнительный сливной вентиль 6 и вентиль автономного режима 9 закрыты, трубопровод и рабочий участок заполнен водой.
4. Установить режим течения воды, открывая вентиль подачи воды 8 и регулируя расход её вентилем 18. На режиме установившегося течения показания манометра 1 и пьезометров на щите 15 должны сохраняться неизменными.
5. Измерить избыточное давление воды в ресивере p_m , высоту столбика жидкости $h_{вх}$ в пьезометре, соединённом с ресивером, а также высоту столбиков жидкости h и h^*_{max} в пьезометрах, соединённых с приёмниками давления в трёх сечениях трубы (рис. А.2.2).
6. Измерить расход воды ротаметром.
7. Закрыть вентиль 8 подачи воды в ресивер и вентиль 18 регулирования расхода.
8. Результаты всех измерений записать в протокол.

Обработка результатов эксперимента

1. По результатам измерений определить давление p в $кПа$ и давление торможения в центре потока p^*_{max} в трёх сечениях потока в трубе
2. Определить площадь S потока жидкости в трёх сечениях

$$S = \frac{\pi}{4} d^2,$$

где d - внутренний диаметр трубы в сечении.

3. Определить объемный расход воды Q по результатам измерения его ротаметром.

4. Определить средние скорости движения $c_{\text{ср}}$ по формуле (6) в трёх сечениях потока жидкости.

5. Определить по формуле (5) осреднённое давление торможения $p^*_{\text{ср}}$ в трёх сечениях потока жидкости.

6. Подсчитать из формулы (4) потери энергии на участке трубы между сечениями 1 и 2 $(h_r)_{1-2}$, суммарные потери энергии на участке трубы между сечениями 1 и 3 $(h_r)_{1-3}$. Принимается плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, а коэффициент $\alpha = 1,0$.

7. Записать в таблицу вычисляемых величин протокола результаты расчётов и построить графики изменения p , $p^*_{\text{ср}}$, $c_{\text{ср}}$ по длине трубы (сечения 1-3).

Содержание отчёта

1. Протокол эксперимента со схемой рабочего участка установки.
2. Графики изменения давления p и осреднённого давления торможения жидкости $p^*_{\text{ср}}$ по длине трубы переменного сечения.
3. График изменения среднеобъемной скорости движения жидкости $c_{\text{ср}}$ по длине трубы переменного сечения.
4. Выводы по работе.

Контрольные вопросы к работе

1. Когда поток жидкости в трубе можно считать энергоизолированным?
2. Под действием каких сил поток жидкости ускоряется в плавно сужающейся трубе и тормозится в плавно расширяющейся?
3. Какие преобразования энергии жидкости происходят при движении в энергоизолированных плавно сужающихся и расширяющихся трубах?
4. Почему давление торможения для сечения потока вычисляется по среднеобъемной скорости?

5. Как изменяется давление торможения в поперечном сечении потока жидкости?
6. Как изменяется давление торможения в поперечном сечении потока, если оно вычислено по среднemasсовой скорости жидкости?
7. Почему давление торможения жидкости уменьшается вдоль горизонтальной трубы?
8. Как изменяется статическое давление в плавно сужающихся и расширяющихся трубах?
9. Почему давление торможения, измеренное в центре потока, больше давления торможения, вычисленного по среднemasсовой скорости?
10. Почему среднemasсовая скорость вдоль горизонтальной трубы одинакового диаметра сохраняется постоянной, а статическое давление уменьшается?
11. Когда показания пьезометров для измерения давления на рабочем участке будут одинаковыми?
12. Как изменяется среднеобъемная скорость в плавно сужающихся и расширяющихся трубах?

КАВИТАЦИЯ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Цель работы: визуальное наблюдение кавитации жидкости в трубке Вентури; ознакомление с экспериментальным и расчётным методами определения кавитационного режима течения жидкости; экспериментальное определение критического кавитационного числа $\chi_{кр}$ при движении жидкости в трубке Вентури.

Теоретические основы эксперимента

Кавитация (*от лат.* кавитас - пустота) – нарушение сплошности жидкости вследствие образования в ней пустот (пузырьков, пузырей, каверн), заполненных выделившимся из жидкости паром.

В движущейся жидкости кавитация возникает и развивается в том месте потока, где давление уменьшается до давления насыщенного пара. Возникновение кавитации начинается с образования в потоке кавитационных пузырьков, внутрь которых выделяются растворённые в жидкости газы. При дальнейшем развитии кавитации происходит выделение пара из-за «холодного» кипения жидкости. Образующиеся кавитационные пузырьки перемещаются, увлекаемые потоком жидкости, увеличиваются в размерах, укрупняются и объединяются, что приводит к образованию крупных кавитационных пузырей и каверн. Но так как в потоке жидкости за зоной кавитации давление повышается, рост кавитационных пузырей и каверн, в связи с повышением давления, прекращается, пар в них конденсируется, пузыри и каверны практически мгновенно исчезают – «схлопываются».

Непрерывное схлопывание многочисленных кавитационных пузырей и каверн сопровождается характерным кавитационным шумом и колебаниями давления жидкости. Колебания давления распространяются в потоке жидкости и передаются стенкам, окру-

жающим поток, вызывая вибрацию гидравлических агрегатов и систем.

Так как пузыри и каверны схлопываются практически мгновенно, то окружающая их жидкость с большой скоростью устремляется вовнутрь исчезающих полостей. В результате в центре этих полостей в момент их схлопывания возникают гидравлические микроудары с большими повышениями давления (на десятки мегапаскалей) и температуры жидкости (на сотни градусов). Многочисленные непрерывные гидравлические микроудары усиливают колебания и вибрации, а воздействие этих микроударов на стенки каналов приводит к их кавитационной эрозии – разрушению материала стенок в зоне схлопывания. Кроме того, по мере развития кавитации интенсивно возрастают гидравлические потери в потоке жидкости на участке в зоне кавитации и за ней. Кавитация в потоке жидкостей обычно не допускается, так как при кавитации нарушаются расчётные режимы работы гидравлических агрегатов и систем, ухудшаются показатели их работы, уменьшаются КПД, появляются недопустимые колебания давления в потоке и вибрации, кавитационная эрозия приводит к недопустимым разрушениям материала стенок в зоне схлопывания. Однако имеются случаи, когда кавитация специально организуется и полезно используется.

Для расчётной оценки отсутствия или наличия кавитации в потоке жидкости используется кавитационное число:

$$\chi = 2(p_1 - p_{н.п}) / (\rho c_1^2), \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости, $p_{н.п}$ – давление насыщенного пара жидкости, p и c – давление насыщенного пара жидкости перед местом возможного возникновения и развития кавитации.

Значение χ , при котором в этом месте возникает и развивается кавитация, называется критическим кавитационным числом $\chi_{кр}$. При $\chi > \chi_{кр}$ кавитации не будет, при расчётных $\chi \leq \chi_{кр}$ кавитация будет возникать и развиваться. Значения $\chi_{кр}$ определяются опыт-

ным путём и даются в соответствующих справочниках. Иногда эти значения можно оценить расчётом по теоретическим зависимостям для потока жидкости.

Схема трубы Вентури представлена на рис. А.3.1.

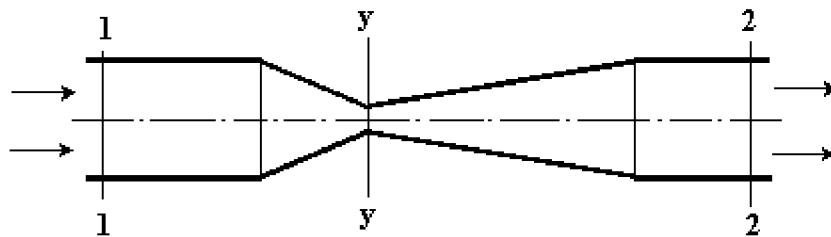


Рис. А.3.1. Схема трубы Вентури

Для потока жидкости в полностью заполненной трубе Вентури основными зависимостями, составленными соответственно для участков потока 1-у, у-2, являются

уравнения Бернулли:

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_y}{\rho} + \alpha_y \frac{c_y^2}{2} + h_{(1-y)} \quad (2)$$

$$\frac{p_y}{\rho} + \alpha_y \frac{c_y^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{c_2^2}{2} + h_{(y-2)} \quad (3)$$

уравнения расхода:

$$c_{1cp} S_1 = c_{2cp} S_2 = Q, \quad (4)$$

формулы для расчёта потерь удельной энергии потока:

$$h_{(1-y)} = \xi_{(1-y)} \cdot \frac{c_{ycp}^2}{2}, \quad (5)$$

$$h_{(y-2)} = \xi_{(y-2)} \frac{c_{2cp}^2}{2}, \quad (6)$$

где p - статическое давление жидкости,

c_{cp} – средняя скорость в сечении потока,
 η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения скоростей в соответствующем поперечном сечении потока,
 ξ – коэффициент гидравлических потерь удельной энергии потока,

S – площадь поперечного сечения потока,

Q – объёмный расход жидкости в потоке.

При следующих допущениях:

$\eta_1 = \eta_y = \eta_2 = 1,0$ (турбулентный режим течения),

$p_{н.п} = 0$, (для воды при температурах $0 \dots 20$ °С давление $p_{н.п} = 6 \dots 23$ ГПа),

$h_{(1-y)} = 0$,

используя уравнения (1)–(6), получаются расчётные зависимости для потока жидкости в трубе Вентури:

$$\chi = \frac{2p_1 S_1^2}{\rho \cdot Q^2}, \quad (7)$$

$$\chi_{кр}^{рас} = \left(\frac{S_1}{S_y} \right)^2 - 1, \quad (8)$$

$$Q_{max} = \sqrt{\frac{2P_1}{[\rho(1/S_y^2 - 1/S_1^2)]}}, \quad (9)$$

где $\chi_{кр}^{рас}$ – расчётное значение $\chi_{кр}$ для потока жидкости в трубе Вентури,

Q_{max} – максимально возможный объёмный расход жидкости через трубу Вентури при давлении p_1 (устанавливается при наличии кавитации в потоке).

Описание лабораторной установки

В качестве лабораторной установки используется универсальный гидравлический стенд ГС-3М [3].

Рабочий участок гидростенда для данной лабораторной работы представляет собой горизонтальную трубу постоянного сечения (внутренний диаметр $d = 20 \text{ мм}$), ко входу которой присоединена прозрачная трубка Вентури (рис. А.3.2).

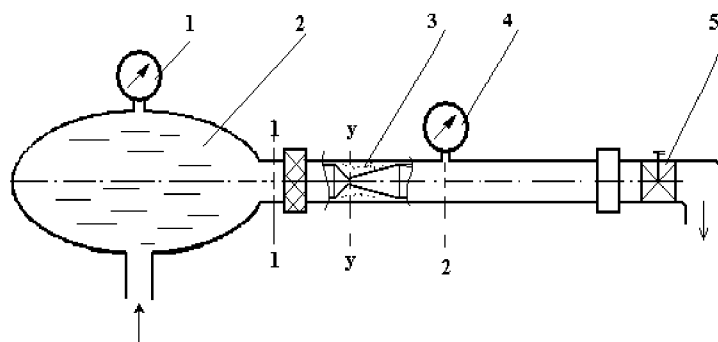


Рис.А.3.2. Схема измерения давления в трубе Вентури

Вода из ресивера 2 проходит через трубу Вентури 3 и затем сливается в бак. Статическое давление воды в потоке перед трубой Вентури (сечение 1–1) и за трубой Вентури (сечение 2–2) измеряются манометрами 1 и 4 (давление воды в сечении 1–1 принимается равным давлению в ресивере 2). Смена режимов течения воды в трубе Вентури производится с помощью вентилей подачи воды в ресивер или регулировочного вентилей 5 на выходе.

Порядок выполнения работы

1. Для записи показаний приборов и результатов вычислений заготавливается протокол эксперимента
2. Измерить давление p_n и температуру t_n воздуха в помещении лаборатории.
3. Проверить готовность установки к эксперименту. При этом сливной вентиль 5 [3] должен полностью открыт, дополнительный сливной вентиль 6 и вентиль автономного режима 9 закрыты.
4. Открыть полностью регулировочный вентиль 5 (рис. А.3.2).

Образец протокола эксперимента

Измеряемые величины				Вычисляемые величины									
№ сеч.	$p_{м1}, \text{де-Л}$	$p_{м2}, \text{кг/см}^2$	$Q, \text{л/с}$	$p_1, \text{кПа}$	$p_2, \text{кПа}$	p_2/p_1	$Q, \text{м}^3/\text{с}$	$S_1, \text{м}^2$	$\chi_{оп}$	$S_y, \text{м}^2$	$d_y, \text{мм}$	$Q_{max}, \text{м}^3/\text{с}$	$\frac{Q}{Q_{max}}$
1													
2													
3													
4													
5													
6													
7													

5. Плавно открывая вентиль подачи воды в ресивер наблюдать возникновение и развитие кавитации в трубе Вентури, зафиксировать показание манометра l (рис. А.3.2) при появлении кавитации.

6. Установить режим течения воды без кавитации, постепенно закрывая вентиль подачи воды в ресивер. Во время эксперимента давление воды в ресивере необходимо сохранять неизменным.

7. Измерить избыточное давление воды $p_{м1}$ в ресивере и в потоке за трубой Вентури ротаметром.

8. Измерить расход воды ротаметром.

9. Повторить пункты 6, 7, 8, для каждого следующего опыта (устанавливая последовательно ещё два режима течения воды в трубе Вентури без кавитации, режим появления кавитации и три режима с кавитацией).

10. Закрыть вентиль подачи воды в ресивер.

11. Результаты всех измерений записать в протокол.

Обработка результатов эксперимента

1. Определить абсолютное давление воды в потоке за трубой Вентури p_1 и за ней p_2 в кПа : $p_1 = p_n + p_{м1}$, $p_2 = p_n + p_{м2}$

2. Определить отношение давления воды в потоке за трубой Вентури к давлению перед ней p_2/p_1 .

3. Определить расход воды в трубе Вентури Q в $м^3/с$ по результату измерения его ротаметром.

4. Определить площадь сечения потока воды перед трубой Вентури S_1 $м^2$

$$S_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2,$$

где d_1 – внутренний диаметр выходного патрубка ресивера, $d_1 = 20$ мм.

5. Подсчитать по формуле (7) кавитационное число χ .

6. Расчёты по пунктам 1, 2, 3, 5 повторить для каждого следующего опыта.

7. Определить площадь узкого сечения потока воды в трубе Вентури из формулы (8), принимая $\chi_{кр}^{рас} = \chi_{кр}^{он}$.

П р и м е ч а н и е: значение $\chi_{кр}^{он}$ определяется как среднеарифметическое из значений χ на режимах течения воды в трубе Вентури с кавитацией.

8. Подсчитать диаметр узкого сечения трубы Вентури d_y в мм

$$d_y = \sqrt{\frac{4S_y}{\pi}}, \text{ где } \pi = 3,14.$$

9. Подсчитать по формуле (9) значения Q_{\max} в $м^3/с$.

10. Определить отношение секундного объёмного расхода воды в трубе Вентури к максимально возможному расходу в ней при давлении p_1 , то есть Q/Q_{\max} .

11. Расчёты по пунктам 9, 10 повторить для каждого следующего опыта.

12. Записать в таблицу вычисляемых величин протокола результаты расчётов.

Содержание отчёта

1. Протокол эксперимента со схемой рабочего участка гидро-стенда.
2. Кавитационная характеристика трубы Вентури, то есть график экспериментальной зависимости $Q/Q_{\text{макс}}$ от p_2/p_1 .
3. Выводы по работе.

Контрольные вопросы к работе

1. При каких условиях в потоке жидкости возникает и развивается кавитация?
2. Чему равно давление жидкости в зоне кавитации?
3. Почему кавитация в потоке жидкости возникает в узком сечении и развивается от этого сечения вниз по потоку?
4. Почему кавитация возникает и развивается у стенок, с которыми соприкасается поток жидкости?
5. Почему давление жидкости в потоке за зоной кавитации повышается?
6. Почему в потоке жидкости происходит схлопывание кавитационных пузырьков, пузырей, каверн?
7. В каком месте потока жидкости происходит схлопывание кавитационных пузырьков, пузырей, каверн?
8. Как доказать, что при $\chi > \chi_{\text{кр}}$ кавитации не должно быть?
9. Как изменяются значения χ для потока жидкости до возникновения кавитации и с момента её возникновения при дальнейшем развитии кавитации?
10. Как доказать, что расход жидкости в потоке с кавитацией является максимально возможным?
11. Почему значение $Q_{\text{макс}}$ в лабораторной работе изменяется при изменении p_1 и не изменяется при изменении p_2 ?
12. Как определяются значения p_1 , p_2 , Q в лабораторной работе?

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕНИЯ И МЕСТНЫХ
ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ В ТРУБЕ**

Цель работы:

1. Экспериментальное определение коэффициента сопротивления трения по длине трубы постоянного сечения, сравнение опытных значений коэффициента с вычисленными значениями по эмпирическим формулам.

2. Экспериментальное определение коэффициента местных сопротивлений в трубах, сравнение их значений со справочными данными.

Теоретические основы эксперимента

В уравнении Бернулли для потока вязкой жидкости (1) слагаемое h_r представляет собой удельную суммарную потерю энергии (потерю части напора) на преодоление гидравлических сопротивлений на участке между сечениями 1 и 2.

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{c_{1cp}^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{c_{2cp}^2}{2} + h_{r(1-2)} \quad (1)$$

Гидравлические потери обычно подразделяют на два вида: потери на трение (путевые потери) и местные потери.

Потери на трение обусловлены проявлением вязкости жидкости и могут наблюдаться в чистом виде при движении её по горизонтальной трубе постоянного сечения.

Местные потери наблюдаются в отдельных местах трубопровода, где возникает отрыв жидкости от твёрдых стенок и образуются вихревые зоны. Последнее происходит вследствие резкого изменения сечения трубопровода, его поворота, а также установки в потоке жидкости различных регулирующих и измерительных

устройств. Элементы трубопровода, приводящие к местным потерям энергии, называются гидравлическими сопротивлениями. Так как эти элементы имеют некоторую протяжённость, то местные потери, вызванные ими, связаны не только с завихрениями и изменением скорости потока, но включают в себя и потери на трение.

Гидравлические потери на выделенном участке потока жидкости экспериментально определяются по измеренным статическим давлениям и расходу с помощью уравнений (1) и (2).

$$Q = c_{cp}S = \text{const} \quad (2)$$

При практических расчётах потери на трение и местные потери определяются по общей формуле с помощью коэффициентов ξ .

$$h_r = \xi \left(\frac{c_{cp}^2}{2} \right)$$

Таким образом, h_r определяется в долях от кинетической энергии. Для участка трубы с переменным сечением h_r определяется по большей скорости c_{cp} , то есть по меньшему сечению s .

В частном случае, при большом гидравлическом сопротивлении, может быть $\xi > 1$. При местных сопротивлениях $\xi = \xi_m$, сопротивлениях трения $\xi = \xi_{тр}$. Однако, исходя из физической картины сопротивления трения, коэффициент $\xi_{тр}$ целесообразно выразить через относительную длину трубы l/d посредством формулы

$$\xi_{mp} = \lambda \frac{l}{d}. \quad (3)$$

Здесь $\lambda = \xi_{mp}$ при $l/d = 1$, то есть λ – это коэффициент трения для участка трубы длиной, равной диаметру трубы. В итоге гидравлические потери при местных сопротивлениях определяются по формуле

$$h_m = \xi_m \frac{c_{cp}^2}{2}, \quad (4)$$

а при сопротивлениях трения (формула Дарси)

$$h_{mp} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{c_{cp}^2}{2}. \quad (5)$$

Определение местных потерь энергии по формуле (4) представляет значительные трудности, так как коэффициент местного сопротивления ξ_m зависит от вида сопротивления и многих других факторов. Обычно значения ξ_m определяются опытным путем или берутся по справочным данным.

Коэффициент λ является безразмерной переменной величиной, зависящей от ряда характеристик: диаметра и шероховатости стенок трубы, вязкости и скорости движения жидкости. Влияние этих характеристик на величину λ проявляется по-разному при ламинарном и турбулентном режимах течения в трубе. В одном диапазоне чисел Рейнольдса на величину λ влияет в большей степени скорость, в другом диапазоне преобладающее воздействие оказывают геометрические характеристики; диаметр и шероховатость трубы.

В связи с этим различаются четыре области сопротивления, в которых изменение λ имеет свою закономерность.

Под тормозящим действием стенок трубы профиль скоростей деформируется: нарастает кольцевой пограничный слой δ , который постепенно захватывает всё сечение трубы, т.е. слои, прилегающие к противоположным стенкам, смыкаются на оси трубы.

Уменьшение центральной части потока (ядра) с равномерным распределением скоростей сопровождается непрерывным увеличением самих скоростей, что обусловлено постоянством расхода жидкости в трубе. Входной участок трубы, где происходит перестройка профиля скорости, называется начальным. За пределами начального участка, то есть на основном участке, наблюдается стабилизированное течение, при котором профиль скорости в поперечном сечении потока жидкости остаётся неизменным.

При ламинарном течении относительная длина начального участка l_n / d определяется по формуле

$$l_n / d = 0,065 Re.$$

В случае турбулентного режима течения эта длина сокращается и приближенно оценивается по соотношению

$$l_n / d = (3 \dots 3,5) \text{Re}^{0,25}.$$

Перестройка профиля скорости и ускорение потока в пределах начального участка сопровождаются дополнительной потерей энергии по сравнению со стабилизированным течением.

Степень влияния начального участка на трение зависит от длины трубы. При большой длине трубы ($l > 5 \dots 10l_n$) начальный участок можно из рассмотрения исключить и оценить потери энергии по коэффициенту λ , определённого по формулам (6)–(10) стабилизированного течения. Для коротких труб длиной $l < 5l_n$ необходимо учитывать особенности течения жидкости на начальном участке.

Описание лабораторной установки

В качестве лабораторной установки используется универсальный гидравлический стенд ГС-3М [4].

Рабочий участок гидростенда для данной лабораторной работы (рис. А.4.3.) представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, включающую участки с внезапным расширением и сужением, изгибом и дроссельным сопротивлением (краном).

Внутренний диаметр трубы в сечениях 1, 2, 4, 5, 6 одинаков и равен $d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = d_6 = 14 \text{ мм}$, диаметр $d_3 = 28 \text{ мм}$. Длина участка трубы между сечениями 1 и 2 $l_{1-2} = 180 \text{ мм}$.

Первая область сопротивления – область устойчивого ламинарного течения. В этой области λ зависит только от числа Рейнольдса (рис. А.4.1, линия 1) и определяется по формуле Пуазейля

$$\lambda = 64 / \text{Re}, \quad (6)$$

где $\text{Re} = c_{cp} d / \nu$ – число Рейнольдса.

При этом значении λ , то есть при ламинарном течении, гидравлические потери на трение пропорциональны первой степени скорости:

$$h_{mp} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{c_{cp}^2}{2} = \frac{32\nu \cdot l}{d^2} c_{cp}$$

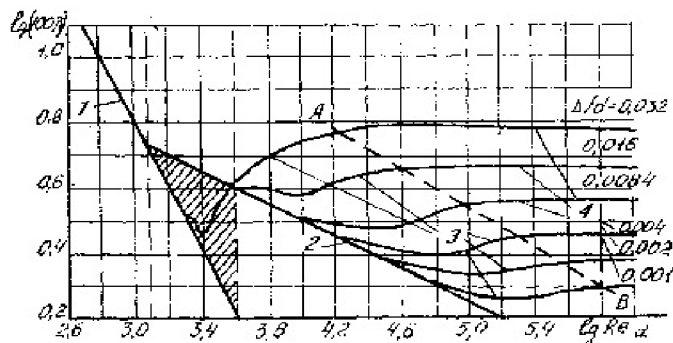


Рис. А.4.1. Зависимость коэффициента сопротивления трения λ от числа Re и шероховатости трубы (по данным И. Никурадзе)

Остальные области сопротивления находятся в зоне турбулентного течения.

Опыты исследователей И. Никурадзе и других показали, что в турбулентном потоке непосредственно у стенки трубы имеется ламинарный подслоя толщиной δ_n . Приближенно величина δ_n определяется по формуле

$$\delta_n = \frac{30d}{Re\sqrt{\lambda}},$$

из которой видно, что с увеличением скорости движение жидкости в трубе (соответственно числа Re) толщина подслоя уменьшается.

В зависимости от соотношения между δ_n и средней высотой выступов шероховатости поверхности Δ (рис. А.4.2), называемой абсолютной шероховатостью, различают трубы гидравлически гладкие и шероховатые.



Рис. А.4.2. Схема неравномерной шероховатости поверхности трубы

Если $\delta_n > \Delta$, поток не испытывает дополнительных завихрений от шероховатости поверхности, такая труба называется гид-

равлически гладкой. Если же $\delta_n < \Delta$, выступы шероховатости оголяются и в обтекающую их жидкость вносятся дополнительные возмущения (вихри), увеличивающие потери энергии; в этом случае труба называется гидравлически шероховатой. Деление труб (поверхностей) на гидравлически гладкие и шероховатые является условным, так как одна и та же труба при малых Re может быть гидравлически гладкой, а с увеличением Re может стать гидравлически шероховатой.

Вторая область сопротивления – область гидравлически гладких труб. Коэффициент λ , так же как и при ламинарном течении, не зависит от состояния поверхности трубы и при $2320 < Re \leq 10^5$ определяется по формуле Блазиуса (рис. А.4.1, линия 2)

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \quad (7)$$

или в более широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса $2320 < Re \leq 10^7$ по формуле Никурадзе

$$\lambda = 0,032 + 0,221 Re^{-0,237} . \quad (8)$$

Как видно из рис. А.4.1, переход из области, соответствующей ламинарному течению, в область, соответствующую турбулентному течению, происходит скачкообразно.

При значении λ по формуле (7) потери на трение в области гладких труб пропорциональны скорости в степени 1,75:

$$h_{mp} = \frac{0,3164}{Re^{0,25}} \frac{l}{d} \frac{c_{cp}^2}{2} = \frac{0,1582 \cdot \nu^{0,25} l}{d^{1,25}} c_{cp}^{1,75} .$$

Третья область является переходной от области гидравлически гладких труб к области сопротивления шероховатых труб. На рис. А.4.1 эта область изображена между линиями 2 и АВ. Коэффициент λ в этой области зависит и от числа Re , и от относительной шероховатости Δ/d , определяется по формуле Френкеля

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[0,27 \frac{\Delta}{d} + \left(\frac{6,81}{Re} \right)^{0,9} \right] . \quad (9)$$

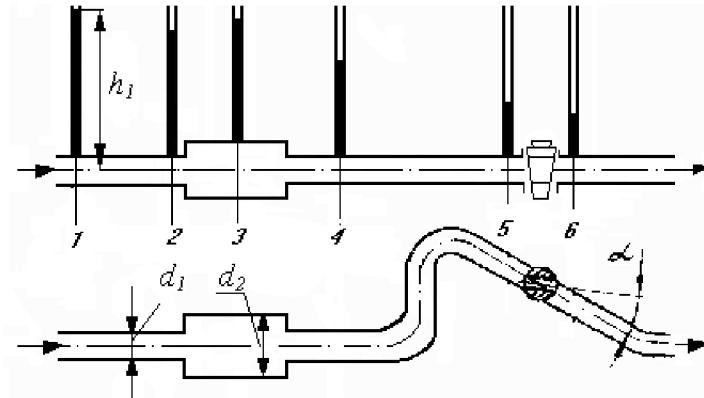


Рис. А.4.3. Трубка с различными гидравлическими сопротивлениями

Четвертая область сопротивления – область гидравлически шероховатых труб или квадратичного сопротивления (на рис. А.4.1 область, расположенная от линии AB вправо), когда практически отсутствует ламинарный подслои. Коэффициент λ в этой области зависит только от относительной шероховатости Δ/d и определяется, например, по формуле Прандля

$$\lambda = \frac{0,25}{\left(\lg \frac{3,7d}{\Delta}\right)^2}. \quad (10)$$

Так как в этой области для заданной относительной шероховатости Δ/d коэффициент λ является постоянной величиной, то потери энергии в трубе пропорциональны квадрату скорости:

$$h_{mp} = \lambda \frac{l}{d} \frac{c_{cp}^2}{2}.$$

Поэтому эта область сопротивления называется квадратичной.

Значения коэффициентов сопротивления трения λ в рассмотренных областях соответствуют участкам прямых труб со стабилизированным изотермическим трением жидкости. Такие участки труб называются основными. В длинных прямых трубах постоян-

ного сечения различают кроме основных ещё и входные (начальные) участки.

Жидкость при втекании из неограниченной ёмкости во входной участок трубы вначале имеет равномерное распределение скоростей в поперечном сечении (рис. А.4.4.).

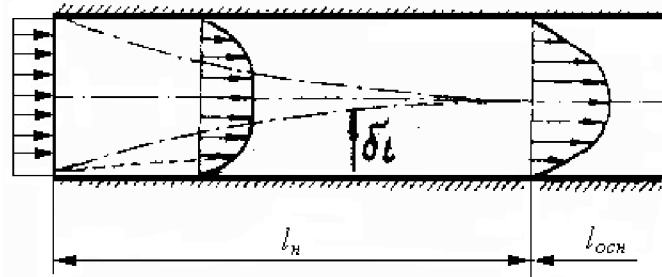


Рис. А.4.4. Схема развития течения жидкости на начальном участке трубы

Порядок выполнения работы

1. Для записи показаний приборов и результатов вычислений заготавливается протокол эксперимента.

Образец протокола эксперимента

Измеряемые величины				Вычисляемые величины									
№ сеч	h , мм вод. ст.	Q , л/с	t_{H_2O} , °C	Q , м ³ /с	S , м ²	$c_{ср}$, м/с	Участки	h_r^{on} , Дж/кг	ξ_{on}	λ^o	v , м ² /с	Re	$\lambda^{рас}$
1							1-2						
2							2-3			-		-	-
3							3-4			-		-	-
4							4-5			-		-	-
5							5-6			-		-	-
6													

2. Измерить давление p_n и температуру t_n воздуха в помещении лаборатории.

3. Проверить готовность установки к эксперименту. При этом сливной вентиль 5 [4] должен полностью открыт, дополнительный сливной вентиль 6 и вентиль автономного режима 9 закрыты, трубопровод и рабочий участок заполнены водой.

4. Установить режим течения воды, открывая вентиль подачи воды 8 и регулируя расход её вентилем 18 [4]. Во время эксперимента эксперименту регулируя вентилем 8 поддерживать постоянным давление в ресивере, так как движение жидкости должно быть установившемся.

5. Измерить высоты h столбиков жидкости в пьезометрах, соединённых с приёмниками статического давления в шести сечениях трубы рабочего участка гидростенда.

6. Измерить расход воды ротаметром.

7. Измерить температуру воды ртутным термометром, помещая его в струю вытекающей воды из рабочего участка гидростенда.

8. Закрыть вентиль 8 подачи воды и вентиль 18 регулирования расхода [4].

9. Результаты всех измерений записать в протокол.

Обработка результатов эксперимента

1. Определить площадь потока жидкости $S \text{ м}^2$ в шести сечениях

$$S = \pi d^2/4 ,$$

где d - внутренний диаметр трубы в сечении.

2. Определить расход воды Q в $\text{м}^3/\text{с}$ по результату измерения его ротаметром.

3. Подсчитать из формулы (2) среднюю скорость потока жидкости в каждом сечении в отдельности.

4. Подсчитать из формулы (1) экспериментальные значения потерь энергии на трение h_{mp}^{on} в Дж/кг на участке 1-2 и местных потерь h_m^{on} в Дж/кг на каждом участке в отдельности.

5. Подсчитать из формулы (5) экспериментальное значение коэффициента сопротивления трения λ^{op} на участке 1-2, принимая $h_{тр} = h_{mp}^{on}$.

6. Подсчитать из формулы (4) экспериментальное значение коэффициента местного сопротивления ξ_m^{on} для участков 2-3, 3-4, 4-5, 5-6 трубы.

7. Определить кинематический коэффициент вязкости ν в $\text{м}^2/\text{с}$ при измеренной температуре $t^\circ \text{С}$ воды в соответствии с графиком (см. ЛР № 1).

8. Подсчитать число Рейнольдса, $Re = c_{cp}d/\nu$, и определить режим течения воды на участке 1-2.

9. Подсчитать коэффициент сопротивления трения λ^{pac} по одной из формул (6)-(10), предварительно определив по числу Рейнольдса область сопротивления. Сравнить полученное расчётное значение λ^{pac} с экспериментальным λ^{op} .

10. Подсчитать длину начального участка потока воды l_H в мм и оценить степень влияния её на величину потерь энергии h_{mp}^{on} на участке 1-2.

Содержание отчёта

1. Протокол эксперимента со схемой рабочего участка гидро-стенда.

2. Сравнение опытного значения коэффициента сопротивления трения с расчётным, определённым по эмпирической формуле.

3. Результаты вычислений опытных коэффициентов местных сопротивлений.

4. Выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Как определяются скорости движения в поперечном сечении потока?
2. Почему гидравлические потери на трение в турбулентном потоке больше, чем в ламинарном?
3. Каким образом определяются гидравлические потери при эксперименте?
4. Как определяются гидравлические потери на трение и местные потери при отсутствии возможности проведения эксперимента?
5. Как определяется коэффициент трения при практических расчётах?
6. Почему одна и та же труба в одном случае может быть гидравлически гладкой, а в другом случае – гидравлически шероховатой?
7. Какие области сопротивления соответствуют турбулентному течению жидкости?
8. Почему при ламинарном режиме потери на трение пропорциональны первой степени среднеобъемной скорости движения жидкости?
9. Почему при турбулентном режиме в области квадратичного сопротивления потери на трение пропорциональны квадрату среднеобъемной скорости движения?
10. Как изменяется профиль (эпора) скорости при движении жидкости по начальному участку трубы?
11. Почему при движении жидкости по начальному участку трубы её центральные струйки ускоряются?
12. Как влияет начальный участок трубы на гидравлические потери при движении жидкости?

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЯ И НАСАДКОВ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ

Цель работы:

1. Ознакомление с методами определения скорости и расхода жидкости при истечении при постоянном напоре из отверстия и различных форм сопел.

2. Экспериментальное определение коэффициентов скорости φ ; расхода μ и сужения струи ϵ при истечении.

Теоретические основы эксперимента

Истечение жидкости из резервуара через отверстие или сопло в пространство, заполненное газом или той же жидкостью, характеризуется преобразованием запаса потенциальной энергии жидкости в резервуаре с большими или меньшими потерям в кинетическую энергию струи. Часть энергии необратимо расходуется на преодоление сопротивления кромок отверстия или сопла. Основной задачей является определение скорости истечения и расхода жидкости.

Истечение может быть из малого отверстия в тонкой или толстой стенке. Отверстие считается малым, если его диаметр d_0 (рис. А.5.1) значительно меньше, чем располагаемый напор H в м, $d_0 \leq 0,1H$.

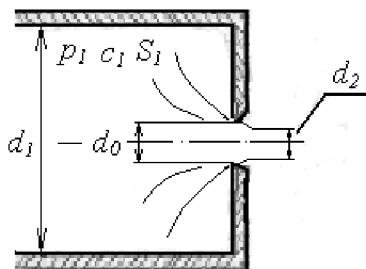


Рис. А.5.1. Истечение жидкости через отверстие

Под термином «тонкая» следует понимать такую толщину стенки, при которой она не оказывает влияния на истечение, т.е. жидкость, протекая через отверстие, не касается его боковой поверхности. Толщина тонкой стенки не должна превышать $(2,0 \dots 2,5)d_0$. Отверстие может быть выполнено в тонкой стенке, но с заострением входной кромки с внешней стороны (рис. А.5.1).

При истечении из отверстия, вследствие перехода от различных направлений движения жидкости в резервуаре к осевому движению, под действием инерционных сил происходит сужение струи жидкости. Минимальное сечение струи 2-2 (рис. А.5.1) образуется на расстоянии $(0,5 \dots 1,0)d_0$ от стенки резервуара. Сужение струи оценивается коэффициентом сужения ε .

$$\varepsilon = \frac{S_2}{S_0} \quad (1)$$

где S_2 – площадь минимального сечения струи жидкости,
 S_0 – площадь отверстия.

Для круглого отверстия

$$\varepsilon = \left(\frac{d_2}{d_0} \right)^2$$

где d_2 – диаметр суженной струи жидкости,
 d_0 – диаметр отверстия

При истечении жидкости из отверстия, используя уравнение Бернулли и уравнения расхода, можно получить расчётные формулы скорости истечения и расхода.

Рассмотрим случай истечения через малое отверстие в тонкой стенке (рис. А.5.1), когда давление жидкости в резервуаре p_1 превышает давление её на выходе p_2 , которое равно давлению окружающей среды p_n , $p_2 = p_n$. Расположение осей резервуара и струи жидкости вблизи отверстия горизонтально и они совпадают, поэтому $z_1 = z_2$.

Уравнение Бернулли, составленное для сечения 1-1 потока жидкости в резервуаре и 2-2 струи (рис. А.5.1)

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \alpha_1 \frac{C_{1cp}^2}{2} = \frac{p_H}{\rho} + \alpha_2 \frac{C_{2cp}^2}{2} + h_{M(1-2)} \quad (2)$$

Уравнение расхода

$$C_{1cp} S_1 = C_{2cp} S_2 \quad (3)$$

В уравнении (3) площадь сечения струи S_2 можно определить по площади отверстия, используя коэффициент сужения струи ε . Тогда

$$\begin{aligned} C_{1cp} S_1 &= C_{2cp} \cdot \varepsilon \cdot S_0, \\ C_{1cp} &= C_{2cp} \cdot \varepsilon \frac{S_0}{S_1} \end{aligned} \quad (4)$$

Выражая потери энергии $h_{M(1-2)}$ в уравнении (2) формулой (4)

$$h_{M(1-2)} = \xi_M \cdot \frac{C_{2cp}^2}{2}$$

после преобразований с учётом (4) получим формулу скорости истечения

$$C_{2cp} = \varphi \cdot \sqrt{2 \frac{(p_1 - p_H)}{\rho}} \quad (5)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \varepsilon^2 \left(\frac{S_0}{S_1}\right)^2 + \xi_M}} \quad \text{— коэффициент скорости.}$$

При истечении идеальной (невязкой) жидкости и без сужения струи коэффициенты $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$; $\xi_M = 1,0$; $\varphi = 1,0$, а теоретическая скорость истечения

$$C_{2ид} = \sqrt{2 \left(\frac{p_1 - p_H}{\rho} \right)} \quad (6)$$

Из формулы (5) с учётом (6) следует, что коэффициент скорости есть отношение действительной скорости истечения жидкости к теоретической

$$\varphi = \frac{C_{2\text{ср}}}{C_{2\text{ид}}} \quad (7)$$

Действительная скорость истечения $C_{2\text{ср}}$ вследствие гидравлических потерь всегда несколько меньше теоретической. Поэтому коэффициент скорости φ всегда меньше единицы.

Объёмный расход жидкости $Q_2 = C_{2\text{ср}} S_2$. Используя уравнения (1) и (5), получим расчётную формулу секундного объёмного расхода

$$Q_2 = \mu \cdot S_0 \sqrt{2 \left(\frac{P_1 - P_H}{\rho} \right)} \quad (8)$$

где μ – коэффициент расхода жидкости.

$$\mu = \varepsilon \varphi \quad (9)$$

Для идеальной жидкости без сужения струи

$$Q_{2\text{ид}} = S_0 \sqrt{2 \left(\frac{P_1 - P_H}{\rho} \right)} = S_0 \cdot C_{2\text{ид}} \quad (10)$$

Из уравнений (8) и (10) следует, что коэффициент расхода есть отношение действительного расхода при истечении к теоретическому

$$\mu = \frac{Q_2}{Q_{2\text{ид}}} \quad (11)$$

и всегда меньше единицы вследствие влияния двух факторов: сужения струи и гидравлического сопротивления.

Величины коэффициентов ε , φ , μ зависят от формы отверстия, отношения площадей S_0/S_1 и от числа Рейнольдса.

Несовершенное сужение струи наблюдается в том случае, когда на истечение жидкости через отверстие и на формирование струи оказывает влияние близость боковых стенок резервуара (рис. А.5.1). Боковые стенки частично направляют движение жидкости при подходе к отверстию, струя по выходе из отверстия сужается в меньшей степени, чем при истечении из резервуара неограниченных размеров. Вследствие уменьшения сужения струи воз-

растает коэффициент сужения ϵ , а следовательно, и коэффициент расхода μ .

Короткие трубки длиной l , равной $(3-4)d_0$, присоединённые к отверстию в тонкой стенке (рис. А.5.1) или трубопроводу, называют насадками (соплами). Насадки делятся на три основных типа: цилиндрические, конические, коноидальные.

Цилиндрические насадки бывают внешние и внутренние, конические – сходящиеся и расходящиеся, коноидальные – комбинированные.

При движении жидкости в цилиндрическом сопле (рис. А.5.2) струя вначале сужается примерно так же, как и при истечении из отверстия в тонкой стенке, а затем расширяется и заполняет всё сечение насадки.

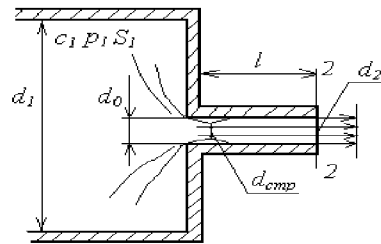


Рис. А.5.2. Истечение жидкости из внешнего цилиндрического сопла

Зона между струёй и внутренней поверхностью сопла в области минимального сечения струи характеризуется понижением в сравнении с окружающим давлением p_n и вихревым движением жидкости. При одинаковых площади S_0 и напоре $\frac{p_1 - p_2}{\rho}$ расход через сопло будет больше, чем расход через отверстие. Увеличение расхода жидкости Q через сопло объясняется увеличением скорости в суженном сечении вследствие вакуума.

Скругляя кромку при входе в сопло, можно избежать сужение струи, что будет способствовать уменьшению сопротивления сопла и увеличению расхода жидкости.

Формулы скорости и расхода для сопел те же, что и для отверстия в тонкой стенке, но при этом коэффициенты ϵ , ϕ , μ имеют другие значения.

При экспериментальном определении коэффициентов ϵ , ϕ , μ , кроме напора $\frac{P_1 - P_2}{\rho}$ и расхода воды Q , необходимо измерить в сечении 2 площадь струи S_2 или скорость истечения C_{2cp} . Проще определить скорость C_{2cp} по измеренным координатам x , y на оси струи произвольного сечения (рис. А.5.3).

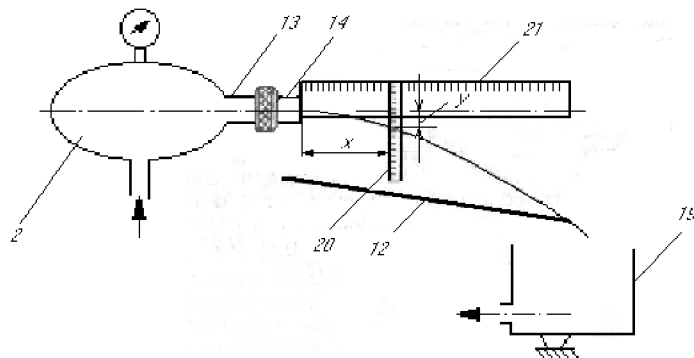


Рис. А.5.3. Схема измерения координат струи при истечении жидкости

При свободном истечении струи её траектория имеет форму параболы. Пренебрегая трением струи о воздух, можно предположить, что каждая частица струи жидкости движется как свободная материальная точка, на которую действует только сила тяжести. Тогда движение жидкости после истечения из отверстия (сопла) рассматривается как сумма равномерно ускоренного движения по вертикали ($y = g(t/2)$) и равномерного движения по горизонтали ($x = C_{2cp}t$).

$$\text{Исключив время } t, \text{ получим } C_{2cp} = x \sqrt{\frac{g}{2y}}$$

Из-за перекоса сопла при истечении возможно некоторое отклонение оси струи жидкости от горизонтального направления.

С учётом этого отклонения более точный расчёт скорости истечения C_{2cp} производится с помощью координат x_1, y_1 и x_2, y_2 , измеренных в двух сечениях струи:

$$C_{2cp} = \sqrt{\frac{g}{2} \cdot \frac{x_2 x_1 (x_2 - x_1)}{x_1 y_2 - x_2 y_1}}, \quad (12)$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести.

При практических расчётах значениями коэффициентов ϵ, φ, μ задаются, исходя из рекомендаций справочных материалов.

Описание лабораторной установки

В качестве лабораторной установки используется универсальный гидравлический стенд ГС-3М [4]. К напорному выходному патрубку гидростенда 13 (рис. А.5.3) с помощью накидной гайки присоединяется исследуемое сопло 14. Вода из сопла по лотку 12 попадает в сливной бак 19. Координирование траектории оси струи производится вертикальной линейкой 20, перемещающейся по горизонтальной линейке 21. Набор сопел представлен на рис. А.5.4. Сопло 1 соответствует отверстию в тонкой стенке.

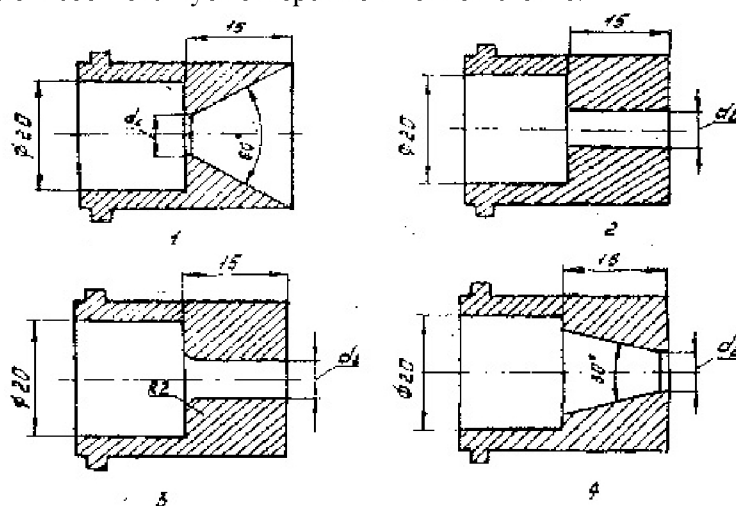


Рис. А.5.4. Набор исследуемых сопел

Порядок выполнения работы

1. Для записи показаний приборов и результатов вычислений заготавливается протокол эксперимента.

Образец протокола эксперимента

Измеряемые величины							
№ сопла	d_0 мм	p_m дел.	X_1 мм	X_2 мм	Y_1 мм	Y_2 мм	Q_2 л/с
1							
2							
3							
4							

Вычисляемые величины								
№ сопла	$C_{2ер}$ м/с	$C_{2ид}$ м/с	S_0 м ²	$Q_{2ид}$ м ³ /с	Q_2 м ³ /с	μ	φ	ϵ
1								
2								
3								
4								

2. Измерить давление p_n и температуру t_n воздуха в помещении лаборатории.

3. Проверить готовность установки к эксперименту. При этом сливной вентиль 5 [4] должен быть полностью открыт, дополнительный сливной вентиль 6 и вентиль автономного режима 9 закрыты.

4. Измерить расстояние X_1 и X_2 от выходного сечения отверстия, сопел до измерительной кромки вертикальных линеек.

5. Установить режим истечения по избыточному давлению p_m ресивера 2 (рис. А.5.3), регулируя вентилем подачи воды так, чтобы струя не выходила за пределы сливного лотка 12. Во время эксперимента давление p_m поддерживать постоянным.

6. Измерить вертикальные координаты Y_1 и Y_2 по оси струи.
7. Измерить расход воды ротаметром.
8. Закрыть вентиль подачи воды 8. Для ускорения слива воды из ресивера 2 открыть дополнительный сливной вентиль 6 [4].
9. После слива воды закрыть вентиль 6, затем отсоединить сопло от напорного выходного патрубка 13.
10. Повторить пункты 4, 5, 6, 7, 8, 9 для каждого следующего сопла.
11. Результаты измерений для всех сопел записать в протокол.

Обработка результатов эксперимента

1. По результатам измерений координат X и Y на оси струи в двух сечениях определить по формуле (12) действительную скорость истечения воды $C_{2\text{ср}}$ в м/с.
2. Подсчитать по формуле (6) теоретическую скорость истечения $C_{2\text{ид}}$ в м/с, имея ввиду, что $p_1 = p_n + p_m$
3. Подсчитать по формуле (10) объёмный расход идеальной воды без сужения струи $Q_{2\text{ид}}$ в м³/с. Здесь $S_0 = \pi d_0^2/4$, в м².
4. Определить действительный расход воды при истечении Q_2 в м³/с по результату измерения его ротаметром.
5. Подсчитать по формулам (11), (7), (9) коэффициенты ϵ , φ , μ .
6. Расчёты по пунктам 1, 2, 3, 4, 5, повторить для всех сопел.

Содержание отчёта

1. Протокол эксперимента со схемой измерения координат струи при истечении жидкости и с эскизами набора исследуемых сопел.
2. Сравнение величин коэффициентов ϵ , φ , μ для отверстия и различных сопел.

ГРАДУИРОВКА ДИАФРАГМЫ**Цель работы:**

1. Определение экспериментального значения коэффициента расхода μ , диафрагмы при различных расходах воды.
2. Построение зависимости коэффициента расхода μ от числа Рейнольдса.

Теоретические основы эксперимента

Для измерения расхода жидкости или газа в трубопроводах часто используются сужающиеся устройства (диафрагма, сопло, труба Вентури). Диафрагма представляет собой тонкий диск с концентрическим отверстием диаметром d , имеющим острую кромку со стороны входа жидкости (рис. А.6.1). При протекании через сужающееся устройство изменяется площадь проходного сечения, струи жидкости, а соответственно – скорость движения и статическое давление.

Обозначим сечение 1–1 трубопровода перед входом в диафрагму в том месте, где это устройство еще не влияет на характер потока, а 2–2 – сечение наибольшего сжатия струи после диафрагмы. На рис. А.6.1 показано также изменение статического давления и средней скорости при движении жидкости через диафрагму.

Зависимость между расходом несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) и перепадом статического давления (разностью пьезометрических напоров) в выбранных сечениях 1–1 и 2–2 может быть определена с помощью уравнения Бернулли и уравнения расхода для установившегося движения. Введем обозначения:

z_1 и z_2 – высоты центров тяжести сечений 1–1 и 2–2 над плоскостью сравнения;

F_1 – площадь сечения трубопровода;

F_d – площадь проходного сечения диафрагмы;

F_2 – площадь сечения потока жидкости в месте наибольшего сжатия;

α_1 и α_2 – значения коэффициента кинетической энергии потока соответственно в сечениях 1–1 и 2–2;

γ – удельный вес жидкости;

ζ_{1-2} – коэффициент местного сопротивления на участке потока между сечениями 1–1 и 2–2.

Уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{c_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{c_2^2}{2g} + \zeta_{1-2} \frac{c_2^2}{2g}. \quad (1)$$

Уравнение расхода

$$F_1 \cdot c_1 = F_2 \cdot c_2 \quad (2)$$

В уравнении (2) площадь сечения струи F_2 можно определить по площади отверстия сужающегося устройства (диафрагмы), используя коэффициент сжатия струи ε :

$$F_2 = \varepsilon \cdot F_d \quad (3)$$

$$\text{Тогда } F_2 = \varepsilon \cdot F_d \cdot c_2, \text{ а } c_1 = c_2 \cdot \varepsilon \frac{F_d}{F_1}. \quad (4)$$

Из уравнения (1) с учетом (4) получим

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \varepsilon^2 \left(\frac{F_d}{F_1}\right)^2 + \zeta_{1-2}}} \cdot \sqrt{2g \left[(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right]}. \quad (5)$$

$$\text{Объемный расход жидкости } Q = c_2 \cdot F_2. \quad (6)$$

С учетом (3) и (5) уравнение (6) приобретает вид

$$Q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \varepsilon^2 \left(\frac{F_d}{F_1}\right)^2 + \zeta_{1-2}}} \cdot F_d \cdot \sqrt{2g \left[(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right]} \quad (7)$$

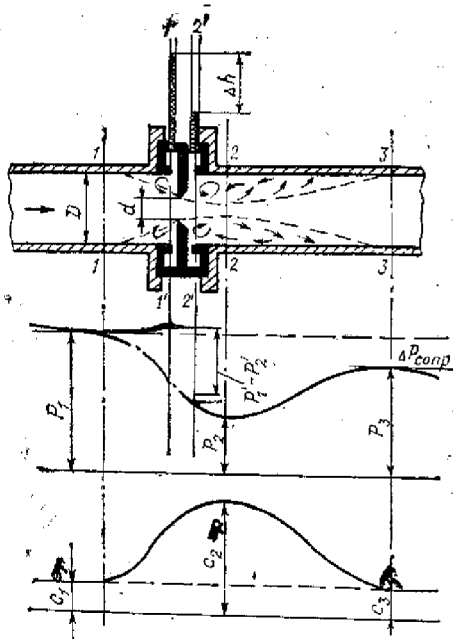


Рис. А.6.1. Структура потока и распределение давления p , средней скорости c в трубе с диафрагмой

В уравнении (7) $\Delta p = p_1 - p_2$ – разность давлений в точках потока, соответствующих средним скоростям в сечениях 1–1 и 2–2. Обычно замер давлений производится в непосредственной близости до и после прибора у стенок трубопровода или в кольцевых камерах сечения (1'–1' и 2'–2'), сообщающихся с потоком при помощи кольцевых щелей (рис. А.6.1). Эти камеры осредняют давление по периметру сечения трубы. Обозначим отношение перепада давлений в выбранных сечениях к измеренному через коэффициент $\psi = \frac{p_1 - p_2}{p'_1 - p'_2}$, который зависит только от конструктивных особенностей прибора.

Тогда уравнение (7) можно представить в виде

$$Q = \mu \cdot F_d \cdot \sqrt{2g \left[(z_1 - z_2) + \frac{p'_1 - p'_2}{\gamma} \right]} \quad (8)$$

где

$$\mu = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{\Psi}}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \varepsilon^2 \left(\frac{F_d}{F_1} \right)^2 + \xi_{1-2}}} \quad (9)$$

Множитель μ в уравнении (8) называется коэффициентом расхода сужающегося устройства (диафрагмы).

Отношение $\frac{F_d}{F_1} = \left(\frac{d}{D} \right)^2$ согласно ГОСТ 18083-72 называют относительной площадью сужающегося устройства и обозначают буквой m :

$$m = \frac{F_d}{F_1} = \left(\frac{d}{D} \right)^2 \quad (10)$$

Уравнение (9) с учетом (10)

$$\mu = \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{\Psi}}{\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \varepsilon^2 m^2 + \xi_{1-2}}} \quad (11)$$

В случае движения жидкости по горизонтальной трубе ($z_1 = z_2$) уравнение (8) упрощается:

$$Q = \mu \cdot F_d \cdot \sqrt{2g \Delta h} \quad (12)$$

где $\Delta h = \frac{p'_1 - p'_2}{\gamma}$ – разность пьезометрических напоров. Расчет по формуле (9) является приближенным из-за невозможности точного определения коэффициентов α_1 , α_2 , ξ_{1-2} , ε , Ψ .

С достаточной для практических расчетов точностью значение коэффициента α для каждого расходомера может быть определено опытным путем. Для этого, используя иной способ измерения расхода жидкости, например объемный, определяют μ по формуле (12):

$$\mu = \frac{Q}{F_d \sqrt{2g \Delta h}} \quad (13)$$

Получив опытные значения μ , при различных расходах жидкости, а значит, и различных числах Рейнольдса, можно построить тарифовочный график $\mu = f(\text{Re})$ для данного расходомерного устройства с постоянным значением m .

Существует предельное значение числа Re , выше которого коэффициент расхода μ остается постоянным. Это значение числа Re называют нижней границей квадратичной зоны. В этой зоне ($\mu = \text{const}$) тарифовочный график по результатам опытов удобно представлять в виде зависимости расхода Q жидкости от перепада пьезометрических напоров Δh : $Q = f(\Delta h)$. Изображение этой зависимости в логарифмических координатах выражается прямой линией. Сужающимися устройствами в качестве расходомеров удобно пользоваться при $\mu = \text{const}$, т.е. при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{пр}}$. Это значение μ используется в формулах (8) и (12) при определении расхода жидкости в трубопроводе по измеренному перепаду давления $(p' - p'_2)$.

Размеры нормальных или стандартных диафрагм, а также графики зависимости коэффициента расхода μ от соотношений диаметров d/D или $m = \left(\frac{d}{D}\right)^2$ и чисел Рейнольдса приводятся в [1, 2,

3]. Среди сужающихся устройств диафрагма отличается простотой конструкции. Однако она имеет наибольшее гидравлическое сопротивление и вызывает потери полного напора, т.е.

$$\Delta h_{\text{гидр}} = \left(\xi_{1-2} \frac{c_2^2}{2g} \right).$$

Кроме того, во время эксплуатации острая кромка

отверстия диафрагмы быстро изнашивается, что влечет за собой изменение коэффициента расхода. На точность показаний диафрагмы и других сужающих устройств сильно влияет равномерность поля скоростей на подходе к прибору. Для выравнивания поля скоростей необходим достаточно длинный прямолинейный участок трубопровода до и после сужающего прибора. Если $d/D < 0,5$; то прямолинейный участок до диафрагмы должен быть $(7-8) D$, а после неё $(5-6) D$. Это справедливо для возмущения потока от пово-

рота трубопровода на $90-180^\circ$. В случае возмущения потока от задвижек и кранов, особенно когда они не открыты полностью, длина прямого участка до прибора увеличивается до $(25-30) D$.

Описание установки

Рабочий участок гидростенда представляет собой горизонтальную трубу 2 постоянного сечения, в которую вмонтирована диафрагма 4 (рис. А.6.2). Трубопровод питается водой из бачка 1. Для измерения перепада пьезометрических напоров в сечениях до и после диафрагмы установлены пьезометры 3 и 5. Изменение расхода воды производится вентилем 6. Расход воды определяется объемным способом с помощью мерного бачка 7 и секундомера. При замере расхода воды сливной клапан 8 мерного бачка закрыт.

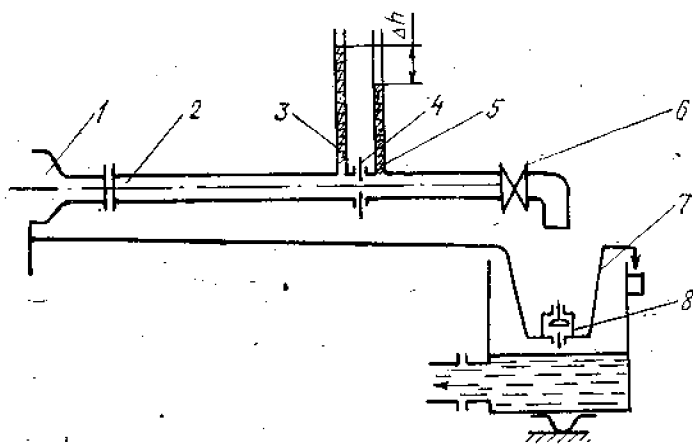


Рис. А.6.2. Схема рабочего участка гидростенда для тарировки диафрагмы

Порядок выполнения работы

1. Заполнить трубопровод 2 водой (рис. А.6.2). Для этого при полностью открытом сливном кране 2 открыть вентиль 1 (см. описание гидростенда). Регулируя вентилями 1 и 6, установить режим

течения, при котором уровень воды в напорном бачке сохраняется постоянным, а через выточки бачка наблюдается небольшой слив.

2. Проверить отсутствие воздуха в трубопроводе 2 и пьезометрах 3 и 5. Для этого закрыть вентиль 6. Уровень жидкости в пьезометрах 3 и 5 должен быть одинаковым.

3. Установить режим течения воды, постепенно открывая вентиль 6, соблюдая при этом условия п. 1.

4. Записать показания пьезометров 3 и 5. При небольших колебаниях показаний их осредняют и полученный средний результат записывают.

5. Определить расход воды, для чего, закрыв клапан 8, с помощью секундомера определить время t заполнения мерного бачка 7 водой объемом V литров. Записать показания приборов.

6. Измерить температуру воды t °С.

7. Регулируя вентилями 1 и 6, сменить режим течения, постепенно увеличивая расход воды. При этом необходимо следить за постоянством уровня воды в напорном бачке.

Повторить опыт (п. 4–7) для нескольких расходов воды.

8. Записать данные эксперимента в протокол.

Протокол эксперимента

режим	Экспериментальные данные															
	h_1	h_2	V	t	t_b	D	d	F	F_d	Δh	Q	μ	ν	c	v	Re
	мм.вод.ст.	мм.вод.ст.	л	°С	°С	м	м	м ²	м ²	мм вод. ст.	м ³ /с		м/с	м ² /с		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1																
2																
3																
4																
5																
6																
7																

Рабочие формулы

1. Объемный расход воды

$$Q = \frac{V}{t} \text{ м}^3/\text{с},$$

где V – замеренный объем воды, м^3 ; t – время заполнения бачка за-
меренным объемом воды, с .

2. Среднемассовая скорость воды в трубопроводе

$$c = \frac{Q}{F} \text{ м/с},$$

где F – площадь поперечного сечения трубы, м^2 .

3. Разность пьезометрических напоров в сечениях до и после
диафрагмы:

$$\Delta h = \frac{p'_1 - p'_2}{\gamma} = h_1 - h_2, \text{ м вод. ст.},$$

где h_1 – высота столбика воды в пьезометре перед диафрагмой, м ;

h_2 – высота столбика воды в пьезометре после диафрагмы, м .

4. Коэффициент расхода диафрагмы

$$\mu = \frac{Q}{F_d \sqrt{2g\Delta h}}, \text{ где } F_d \text{ – площадь проходного сечения диафраг-}$$

мы, м^2 ;

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести.

5. Кинематический коэффициент вязкости ν определяется по
температуре t °С воды (рис. А.6.3).

6. Число Рейнольдса $Re = \frac{cD}{\nu}$, где

D – диаметр трубы, м ;

c – среднерасходная скорость потока воды в трубе, м/с ;

ν – кинематический коэффициент вязкости воды, $\text{м}^2/\text{с}$.

Погрешность определения коэффициента расхода диафрагмы

Точность определения коэффициента расхода σ , оценивается относительной средней квадратичной погрешностью

$$\sigma_{0\sigma} = \sqrt{\sigma_{0v}^2 + \sigma_{0t}^2 + \frac{1}{4}\sigma_{0\Delta t}^2 + \sigma_d^2}$$

где σ_{0v} – относительная средняя квадратичная погрешность измерения величины объема воды;

σ_{0t} – относительная средняя квадратичная погрешность измерения времени заполнения водой объема V ;

$\sigma_{0\Delta t}$ – относительная средняя квадратичная погрешность измерения разности пьезометрических напоров;

σ_d – относительная средняя квадратичная погрешность измерения диаметра отверстия диафрагмы.

При прямом однократном измерении величин, что наблюдается в данной лабораторной работе, равновероятно получение любой величины погрешности в пределах $-\Delta_{\max}$, $+\Delta_{\max}$ поэтому закон распределения погрешностей отличается от нормального [2].

Дифференциальная функция распределения имеет вид $f\Delta = \text{const} = \frac{1}{2\Delta_{\max}}$, а средняя квадратичная погрешность измерения

$$\sigma_{\Delta} = \frac{\Delta_{\max}}{\sqrt{3}},$$

где Δ_{\max} – максимальная абсолютная погрешность.

Относительная квадратичная погрешность измерения

$$\sigma_0 = \frac{\delta}{\sqrt{3}},$$

где S – относительная максимальная погрешность.

При проведении данной лабораторной работы объем воды измеряется с точностью $\pm 0,05$ л. Тогда относительная средняя квадратичная погрешность будет $\sigma_{0v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pm 0,05 \cdot 100}{v}$.

Измерение времени заполнения объема производится секундомером с точностью $\pm 0,1$ с. Относительная среднеквадратичная погрешность измерения времени $\sigma_{0t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pm 0,1 \cdot 100}{t}$.

Перепад пьезометрических напоров Δh измеряется с помощью пьезометров с точностью ± 2 мм, тогда относительная средняя квадратичная погрешность будет

$$\sigma_{0\Delta h} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pm 2 \cdot 100}{\Delta h}$$

Отверстие диафрагмы изготовлено с точностью $\pm 0,01$ мм, следовательно, относительная средняя квадратичная ошибка измерения диаметра отверстия диафрагмы составит

$$\sigma_d = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pm 0,01 \cdot 100}{d}$$

Подставив числовые значения в исходную формулу (14), получим относительную среднюю квадратичную ошибку определения коэффициента расхода μ в процентах.

Указанные погрешности находятся для двух значений коэффициента расхода μ – максимального и минимального – и сводятся в таблицу:

μ	d мм	Δh мм	V л	t с	σ_{0v} %	σ_{0t} %	$\sigma_{0\Delta h}$ %	σ_d %	σ_μ %

Содержание отчета

1. Протокол эксперимента со схемой установки.
2. График зависимости коэффициента расхода μ диафрагмы от числа Рейнольдса $\mu = f(Re)$.
3. Определение по графику $\mu = f(Re)$ нижней границы квадратичной зоны ($\mu = \text{const}$).
4. Оценка погрешности определения μ .
5. Выводы.

Литература

1. Кремлевский П.П. Расходомеры и счетчики количества. - 3-е изд. - Л.: Машиностроение, 1975. С. 12–81.
2. Лабораторный курс гидравлики, насосов и гидропередат / Под ред. С.С. Руднева и Л.Г. Лодвиза. - М.: Машиностроение, 1974. - С. 29–36, 95–108.
3. Вильнер Я.М., Ковалев Я.Т., Некрасов Б.Б. Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам. - Минск: Вышэйш. шк., 1976. - С. 180–184.

**СОВМЕСТНАЯ РАБОТА ЦЕНТРОБЕЖНОГО НАСОСА
И ТРУБОПРОВОДА С ПЕРЕМЕННЫМ
ГИДРАВЛИЧЕСКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ**

Составители: В.В. Бирюк, А.М. Цыганов

Цель работы заключается в экспериментальном определении характеристик центробежного насоса и трубопровода с переменным гидравлическим сопротивлением, а также в изучении способов регулирования положения рабочей точки в поле характеристики.

Теоретические основы

Насосами называются гидравлические машины или гидравлические аппараты, предназначенные для повышения давления жидкости с целью её перемещения, распыливания, передачи энергии потребителю через жидкость.

Из истории насосной техники [3]

Простейший ковш - человеческая рука, ещё лучше - две руки. Кувшин - глиняный сосуд в форме ковша. Затем несколько таких кувшинов подвешивались на цепь или колесо. Люди или животные использовали свою силу для того, чтобы привести эти устройства в движение и поднять воду. Археологические находки доказывают существование таких ковшовых механизмов в Египте и Китае уже в X веке до н. э. На рис. А.7.1, а представлена схематическая реконструкция китайского черпального колеса, представляющего собой большое колесо с прикрепленными к нему глиняными горшками, которые поднимали воду. Колесо приводилось в движение человеком или животными. Эта идея была развита в 1724 г. Я. Лейбпольдом. Он предложил прикрепить к колесу изогнутые трубки так, как показано на рис. А.7.1, б. При вращении колеса течением вода поднималась до его средней оси. В этой конструкции бросает-

ся в глаза форма изогнутых трубок, имеющих поразительное сходство с каналами рабочего колеса современного центробежного насоса (см. рис. А.7.2). Архимед - величайший учёный и математик древности описал в 250 г. до н. э. названный его именем винт (см. рис. А.7.1, в). Вода поднимается вверх за счёт вращения спирали в трубе или резервуаре. Эти винтовые насосы конструировались таким образом, чтобы при их эксплуатации можно было выбирать между большим количеством перекачиваемой жидкости и большим напором. Чем больше угол наклона насоса, тем больший достигается напор при уменьшении объёма перекачиваемой среды. Угол наклона оси винта Архимеда составлял 35...45 град., напор достигался 2...6 м, максимальная подача воды составляла около 10 м³/час. Так появилась *характеристика насоса* - зависимость между подачей и напором. В общем случае работоспособность насоса характеризуется его напором (H), подачей (расходом жидкости) (Q), потребляемой мощностью (N), КПД (η), частотой вращения ротора (n).

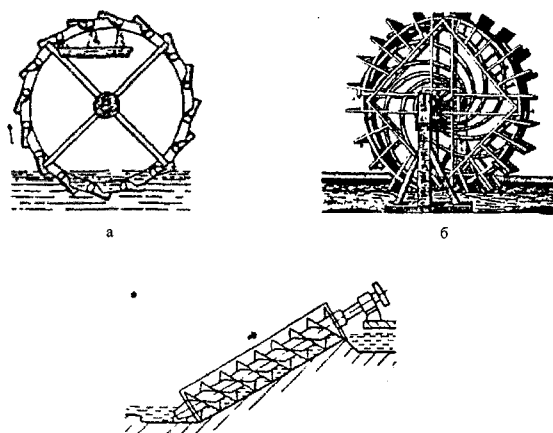


Рис. А.7.1. Из истории насосной техники:
a - китайское черпательное колесо; *б* - черпательное колесо
с изогнутыми спиралями; *в* - винтовой насос Архимеда

По принципу действия различают три основных класса насосов: 1) лопастные или лопаточные (насосы обтекания); 2) объёмные (насосы вытеснения); 3) струйные и вихревые (насосы увлечения). В лопаточных насосах преобразование энергии двигателя происходит в процессе обтекания лопаток колеса и их *силового* воздействия на поток. В них повышение энергии жидкости производится лопастным колесом (ротором), вращающимся в полости статора. Лопастные насосы подразделяются на *центробежные* (радиальные), *диагональные* и *осевые* (пропеллерные). Они не обладают способностью самовсасывания, поэтому при пуске их всасывающую трубу и колесо заливают перекачиваемой жидкостью. Фактором, ограничивающим частоту вращения ротора или высоту всасывания лопастного насоса, является *кавитация*, которая сопровождается нарушением сплошности течения жидкости в результате местного снижения давления. Область применения лопастных насосов: напор 1...2500 м столба жидкости; подача от долей до десятков м³/с; КПД 60...92%.

На рис. А.7.2, а изображена простейшая схема центробежного насоса. Проточная часть насоса состоит из трёх основных элементов: подвода 1, рабочего колеса 2 и отвода 3. Жидкость движется через колесо из центральной его части к периферии. В рабочем колесе энергия передаётся жидкости путём динамического воздействия лопаток на поток. При натекании потока на крыловой профиль (например, на крыло самолёта) на его верхней и нижней поверхностях образуется перепад давления и, следовательно, возникает подъёмная сила. При движении жидкости на лопатках рабочего колеса лопастной гидромашины возникает аналогичная подъёмная сила. У лопастного насоса момент подъёмных сил относительно оси колеса противодействует вращению рабочего колеса. Лопатки колеса должны быть соответствующим образом спрофилированы для данной подачи, частоты вращения и направления движения жидкости. Преодолевая момент подъёмных сил, при своём вращении, рабочее колесо совершает работу. Для этого к колесу от дви-

двигателя подводится энергия. Согласно закону сохранения и превращения энергии подводимая к колесу энергия может быть либо превращена в теплоту и, следовательно, быть «потеряна», либо передана жидкости.

В рабочем колесе насоса частицы жидкости движутся относительно рабочего колеса и, кроме того, они вместе с рабочим колесом совершают переносное движение. Сумма относительного и переносного движений есть абсолютное движение жидкости, то есть её движение относительно неподвижного корпуса насоса. На рис. А.7.2, б изображены траектории AB (относительного движения частицы) и AC (абсолютного). Абсолютная скорость равна геометрической сумме относительной и окружной скорости рабочего колеса в точке расположения частицы:

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}.$$

При прохождении жидкости через колесо её момент количества движения увеличивается. Согласно уравнению моментов количества движения для установившегося движения жидкости, разность моментов количества движения выходящей из канала и входящей в него жидкости за единицу времени равна моменту внешних сил, с которыми рабочее колесо действует на жидкость.

В объёмных насосах повышение энергии происходит в процессе вытеснения в напорный трубопровод объёма жидкости из замкнутого пространства насоса поршнем (плунжером, скалкой), мембраной, имеющими возвратно-поступательное движение, или при вытеснении объёма жидкости зубьями шестерён, винтами, кулачками, выдвижными, скользящими пластинами при вращательном движении этих элементов насоса (роторные насосы). В струйных и вихревых насосах преобразование энергии двигателя происходит в процессе интенсивного образования и разрушения вихрей. Этот процесс связан с увлечением быстро движущимися частицами жидкости в ячейках колеса медленно движущихся частиц жидкости в боковых или охватывающих верхнюю часть колеса каналах.

Подачей (или **расходом**) называется количество жидкости, подаваемой насосом в единицу времени, $м/с$. **Напором** называется приращение механической энергии, получаемое каждым килограммом протекающей через насос жидкости, то есть разность удельных энергий жидкости в выходном и входном сечениях насоса. Напор выражается в $Па = Н/м^2 = Дж/м^3$, метрах столба жидкости или $Дж/кг$.

$$H_{\text{нас}} = -l_{\text{мех}} = (p_2 - p_1) / (\rho g) + (W_2^2 - W_1^2) / (2g) + (z_2 - z_1).$$

Для выполненных насосов

$$z_2 - z_1 \approx 0; \quad (W_2^2 - W_1^2) / 2g \approx 0.$$

В результате $H_{\text{нас}} = -l_{\text{мех}} = (p_2 - p_1) / \rho g, м$

или $H_{\text{нас}} = -l_{\text{мех}} = p_2 - p_1, Па.$

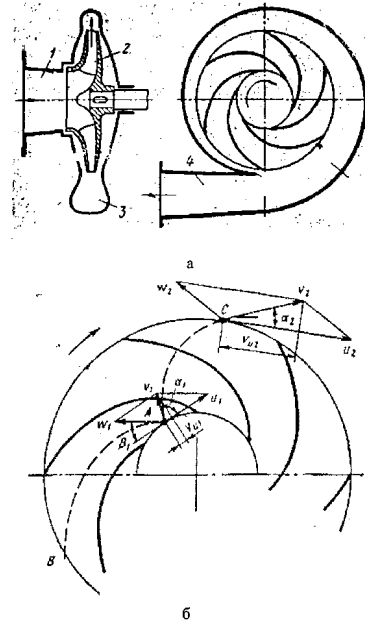


Рис. А.7.2. Устройство насоса и кинематика жидкости:
 а - схема центробежного насоса консольного типа;
 б - движение жидкости в рабочем колесе

Рассмотрим совместную работу трубопровода с насосом. Насосная подача жидкости в авиационной, ракетной и автомобильной технике наиболее распространена, вследствие её надёжности, хороших характеристик и минимального веса [1]. Часть трубопровода до насоса называется *всасывающей*, за насосом - *нагнетающей (напорной)*. Давление на входе в насос (p_1) должно обеспечить работу насоса без кавитации. Для предотвращения кавитации следует снижать температуру жидкости или увеличивать давление на входе в насос, например за счёт уменьшения гидравлического сопротивления всасывающего трубопровода либо установки подкачивающего насоса (преднасоса).

Потребный напор – это напор, который необходимо сообщить 1 кг жидкости в насосе для обеспечения заданных параметров работы системы:

$H_{\text{нас}} = - l_{\text{мех}} = (p_2 - p_1) / \rho$ – полезная работа насоса, сообщаемая 1 кг жидкости. Следовательно, работа насоса заключается в повышении давления жидкости.

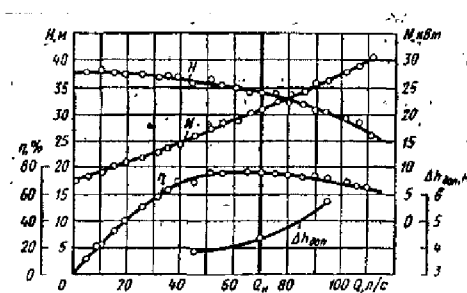


Рис. А.7.3. Пример характеристики центробежного насоса

Характеристикой трубопровода называется зависимость потребного напора от расхода жидкости. При турбулентном режиме гидравлические потери пропорциональны квадрату расхода жидкости, при ламинарном течении – пропорциональны расходу. На рис. А.7.4 показаны характеристики насоса, трубопровода, рабочие точки А и В, а также способы регулирования подачи лопастного

насоса дросселированием и изменением частоты вращения ротора насоса.

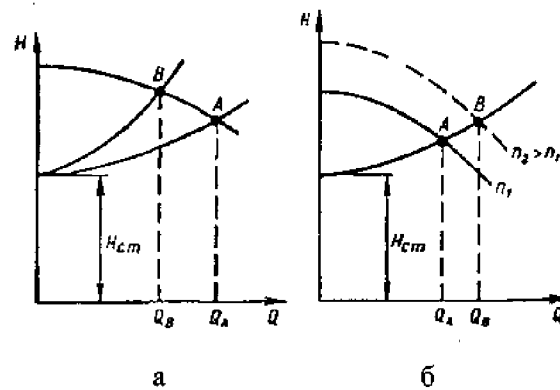


Рис. А.7.4. Способы регулирования подачи лопастного насоса:
 а - дросселированием; б - изменением частоты вращения ротора

На рис. А.7.3 в качестве примера приведена характеристика центробежного насоса в виде зависимости напора, мощности и КПД насоса от его подачи при постоянной частоте вращения ротора. Режим работы насоса, при котором его КПД имеет максимальное значение, называется оптимальным.

Рабочей точкой называется установившийся режим работы гидравлической системы с насосной подачей жидкости, который определяется точкой пересечения характеристики трубопровода и характеристики насоса, то есть соответствует условию $H_{yб} = H_{нас}$. Во время работы такой режим устанавливается и поддерживается автоматически. Потребные расходы жидкости могут изменяться в широком диапазоне, поэтому гидравлические системы часто снабжаются системами регулирования, позволяющими смещать рабочие точки на меньшие и большие расходы. Например, широко применяется регулируемый перепуск части жидкости помимо насоса из нагнетающей магистрали во всасывающую, а также изменение частоты вращения ротора насоса. Перепуск прост в реализации, однако снижает эффективность системы. Для ступенчатого изме-

нения частоты вращения ротора электродвигатель изготавливают с различным числом обмоток. Бесступенчатое регулирование частоты вращения ротора обеспечивает электронный преобразователь частоты вращения, изменяющий стандартную частоту в 50 Гц от 20 до 100 Гц [3].

Полезной мощностью называется механическая энергия, которую насос сообщает всей массе жидкости в единицу времени:

$$N_{\text{мех}} = I_{\text{нас}} G = [(p_2 - p_1) / \rho] G = (p_2 - p_1) Q.$$

Мощность двигателя, приводящего в действие насос, больше полезной на величину мощности, затраченной на преодоление гидравлических сопротивлений в насосе и сопротивлений трения в приводе и подшипниках. Эти потери учитываются **общим КПД насоса**:

$$\eta = N_{\text{мех}} / N_{\text{эл}}.$$

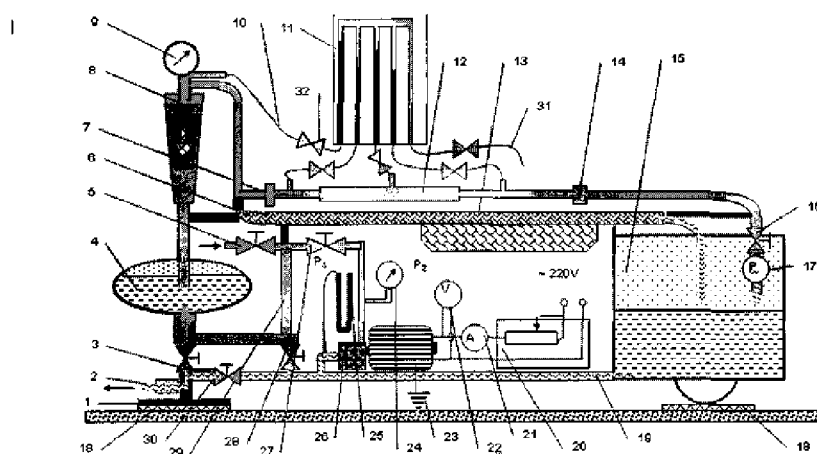


Рис.5 – Схема учебного гидростенда

- | | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------|
| 1-стойка | 8-ротаметр | 15-бак расходный | 23-заземление | 29- труба перепуска воды |
| 2-слив | 9-манометр | 16- кран расходный | 24-манометр насоса вых. холодной | 30-кран слива воды |
| 3-кран слива | 10- трубка гибкая | 17- счетчик воды | 25-пьезометр насоса вход. ндд | 31-устройство регулировки протиродавления |
| 4-реверсуар | 11- пьезометрический щит | 18-амортизатор | 26-электронасос | 32-вадки |
| 5-кентиль подвода воды отсети | 12- рабочий участок | 19- труба сливная | 27- кентиль маломный насоса | |
| 6-желоб сливной | 13- рабочий стол | 20- блок регулировки мощности насоса | 28- кран перепуска воды | |
| 7-гайка крепления рабочего участка | 14- воздушное уплотнение рабочего участка | 21- амперметр | | |
| | | 22-вольтметр | | |

Значения полного КПД находятся в пределах 0,60...0,85 для шестерёнчатых и 0,70...0,85 для центробежных насосов [1].

Общий КПД насоса получается умножением КПД электрической и гидравлической частей [4]. Если насос работает на закрытую задвижку (нулевой расход при максимальном напоре) или на полностью открытую трубу (максимальный расход при нулевом напоре), то КПД равен нулю. Оптимальный КПД насоса (оптимальная рабочая точка) лежит приблизительно в середине его характеристики и специально на ней обозначается.

Схема учебного стенда представлена на рис. А.7.5. Здесь описываются только те особенности гидростенда и его системы измерения, которые необходимы для выполнения данной лабораторной работы. До начала выполнения работы необходимо установить в качестве рабочего участка канал переменного сечения 12 и подключить его измерительные каналы к пьезометрическому щиту 11 (для обеспечения герметичности магистрали). Заполнить чистой, отфильтрованной водой из водопроводной сети расходный бак 15 примерно на 2/3 его объёма. Для этого необходимо закрыть краны 3, 28, 30 и открыть вентиль подачи воды 5 и вентиль 27. Переключателем блока регулировки 20 установить максимальную мощность электронасоса около 400 Вт. Открыть полностью регулировочный вентиль 27 и произвести все замеры на первом режиме: это показания пьезометра 25 на входе в насос манометра 24 на выходе из насоса, показания счётчика воды 17 в начале эксперимента и по истечении одной-трех минут. Для уменьшения гидравлического удара перед включением электронасоса 26 рекомендуется открыть кран перепуска воды 28, а после выхода на режим его закрыть. Прикрывая вентиль 27, повторить эксперимент 5...7 раз практически до полного его закрытия. В результате после обработки получится характеристика насоса на режиме максимальной мощности. Повторить эксперимент на «средней» и «минимальной» мощности электронасоса, примерно при 300 и 200 Вт.

Обработка результатов эксперимента и оформление отчёта

По показаниям пьезометра и манометра записать в протокол измерений избыточное (по отношению к атмосферному) давление воды на входе и выходе из насоса, соответственно $\pm \Delta h_1$ и Δp_2 , электрическое напряжение U и ток I , показания счётчика воды $N_{\text{нач}}$ и $N_{\text{кон}}$ за время τ .

Рассчитать и записать в таблицу рассчитанных величин протокола абсолютные значения давления на входе и на выходе из насоса:

$$p_1 = + \Delta h_1 + p_n;$$

$$p_2 = \Delta p_2 + p_n,$$

где p_n - атмосферное давление.

Напор насоса:

$$H_{\text{нас}} = p_2 - p_1.$$

Потребляемая электрическая мощность:

$$W_{\text{эл}} = UI \cos \varphi.$$

Расход воды:

$$Q = (N_{\text{кон}} - N_{\text{нач}}) / \tau.$$

Механическая (полезная) мощность насоса:

$$W_{\text{мех}} = (p_2 - p_1) \cdot Q$$

Коэффициент полезного действия насоса (условный):

$$\eta = W_{\text{мех}} / W_{\text{эл}}.$$

Построить характеристику насоса в виде зависимости напора, механической мощности и КПД от расхода при различной частоте вращения ротора насоса. Примечание. Начало координат располагать в точке $H = 0$ и $Q = 0$ для последующего обозначения точек «нулевого» и максимального значения КПД насоса.

Построить характеристику трубопровода при различном положении регулировочного вентиля 27 (в зависимости от гидравлического сопротивления сети). Обозначить положение нескольких рабочих точек на пересечении характеристики насоса и трубопровода.

Провести линию оптимальных режимов работы гидравлической системы с насосной подачей жидкости (линию максимальных значений КПД при изменении нагрузки на насос).

Контрольные вопросы

1. Определение и классификация насосов.
2. Напор, подача насоса, единицы измерения.
3. Определение характеристики насоса и трубопровода.
4. Рабочая точка и способы её перемещения в поле характеристики.
5. Как определяется КПД насоса?
6. Записать уравнение Бернулли для насоса, всасывающего и напорного трубопровода.
7. Определение простого и сложного трубопровода.
8. Как рассчитываются потери на трение и местные гидравлические потери?
9. Приведите примеры местных гидравлических сопротивлений и покажите их на гидростенде.

Литература

1. Лабораторный курс гидравлики насосов и гидропередач / Под ред. С.С. Руднева, Л.Г. Подвидза. – М: Машиностроение, 1974. – 416 с.
2. Насосная азбука. – М.: ВИЛО РУС, 2000. – 44 с.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ТЕЧЕНИЯ
И ЭНЕРГООБМЕНА ВИХРЕВЫХ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ
В ГИДРАВЛИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ ТЕПЛА**

Составители: В.Н. Белозерцев, В.В. Бирюк, Е.А. Рамзаева

Цель работы: экспериментальное изучение процесса закрученного потока вязкой несжимаемой жидкости в гидравлическом теплогенераторе и определение его основных характеристик.

Теоретические основы работы

Традиционными теплогенераторами, нашедшими широкое применение в технике и быту, являются преобразователи энергии, использующие теплоту сгорания различного рода топлива (жидкого, твердого и газообразного). Недостатками их являются загрязнение окружающей среды продуктами сгорания, значительные финансовые затраты при транспортировке и хранении энергоносителей.

Недостатками их являются загрязнение окружающей среды продуктами сгорания, значительные финансовые затраты при транспортировке и хранении энергоносителей.

Создание, разработка и исследование экологических теплогенераторов, реализующих в своей работе иные принципы преобразования различных форм энергии в тепловую, представляет значительный интерес. Приме-

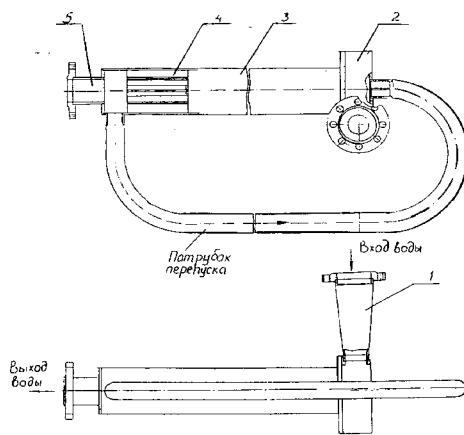


Рис. А.8.1. Общий вид теплогенератора:
1 - входное устройство, 2 – завихритель,
3 – корпус, 4 – развихритель,
5 - выходное устройств

ром таких теплогенераторов являются гидравлические вихревые теплогенераторы (ТВГ). В ТВГ электрическая энергия (привода насоса) преобразуется в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения потока жидкости. В ТВГ жидкость, приводимая в движение насосом, поступает через входное устройство в завихрителе.

Благодаря тангенциальному вводу 1 и профилю завихрителя 2 жидкость закручивается, приобретая вихревой, спиралевидный характер движения. К моменту поступления в корпус теплогенератора 3 скорость ее растет. За счет вязкостного трения, кавитации жидкость подогревается. Дополнительный подогрев жидкости происходит за счет взаимодействия свободного и вынужденного вихрей в корпусе теплогенератора. От распределения осевых, тангенциальных и осевых составляющих эпюр скоростей и давлений будет зависеть интенсивность энергообмена вихревых потоков и подогрев жидкости. Поэтому знание законов распределения скоростей и давлений в рабочей зоне теплогенератора, умение их рассчитать представляет большой практический и научный интерес. Вопросам течения закрученных потоков жидкости посвящено много работ, как правило, в них рассматривается изотермическое течение жидкости. В вихревом гидравлическом генераторе тепла жидкость подогревается. Но доля подогрева ее за один проход через теплогенератор будет составлять сотые доли градуса, поэтому зависимости распределения скоростей и давлений в рабочей зоне энергообмена для изотермической модели будут также справедливы. Неизотермичность течения жидкости потребует введения поправок на расчет ее температуры за время одного цикла. За время цикла работы подразумевается время одного прохождения жидкости через генератор.

Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости, в основу которого положен закон внутреннего трения Ньютона в применении к жидкой частице, имеет вид

$$\frac{dC}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \frac{1}{\rho} \text{div } T \quad (1.1)$$

C - скорость жидкой частицы;

t - текущее время;

F - ускорение от действия внешних сил;

ρ - плотность жидкости;

P - давление, определяющее инвариантное к ориентации в пространстве площадки, на которую оно действует, значение нормального напряжения;

T - тензор напряжений.

Дополняя уравнение (1.1) уравнением неразрывности $\text{div } C = 0$, и считая, что массовые силы обладают потенциалом Π , т.е. $F = \text{grad } \Pi$, получим

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{rot } V \cdot V = - \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + \frac{P}{\rho} \right) - v \text{rot rot } V \quad (1.2)$$

В тензорной форме уравнение движения турбулентного потока представляется в виде уравнения Рейнольдса [1] с определенными компонентами скорости в декартовой системе координат ($C = \{C_1, C_2, C_3\}$ - вектор скорости, компоненты которого относятся к координатам $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ соответственно) и их пульсационными составляющими $C' = \{C'_1, C'_2, C'_3\}$ скорости v', u' .

При отсутствии внешних массовых сил эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C_i}{\partial t} + C_j \frac{\partial C_i}{\partial x_j} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 C_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{v_i v_j}) \\ \frac{\partial C_j}{\partial x_j} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

где p - осредненное во времени значение давления;

$-\rho \overline{v_i v_j}$ - тензор осредненных турбулентных напряжений;

∇^2 - оператор Лапласа.

Уравнение (1.3) для случая движения закрученного потока в горизонтальной цилиндрической трубе удобно представить в цилиндрической системе координат τ, θ, z (рис А.8.2) с осредненными компонентами скорости w (по радиусу), u (по углу θ), v (по оси z) и пульсационными компонентами скорости, w' :

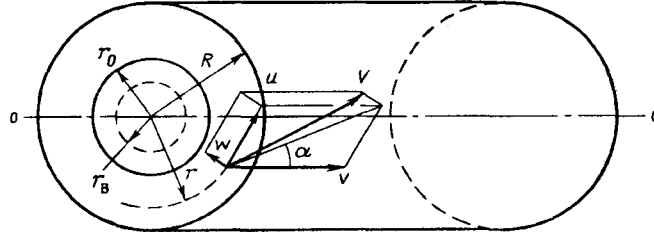


Рис. А.8.2. Составляющие скорости и характерные радиусы в поперечном сечении закрученного потока в теплогенераторе

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{u^2}{r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right. \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \left. \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\rho r \overline{w'^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\rho w' u' \right) + \left(-\rho w' v' \right) - \frac{1}{r} \left(-\rho r u' \overline{v'^2} \right); \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{wu}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right. \\ &- \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \left. \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(-\rho w' u' \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\rho u' \overline{v'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho u' v' \right) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho w' u' \right); \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho r w' u' \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\rho w' v' \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho v' \overline{v'^2} \right); \\ \frac{\partial}{\partial z} (rw) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rv) &; \end{aligned}$$

где μ - динамическая вязкость

Решение этой системы уравнений для ламинарных и турбулентных течений с введением понятия турбулентной вязкости было получено в работе [2]. Эти решения показали, что при любом промежуточном состоянии жидкости на входе, какими бы законами ни задавался входящий в трубопровод закрученный поток, через определенное расстояние от начального створа, вследствие вязкой диффузии и диссипации энергии, формируется течение, внутренне присущее закрученному потоку. Тангенциальная скорость закрученного потока может быть рассчитана из выражения:

$$u(r, z) = \frac{\Gamma_H(r)}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\eta_T z}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{(R-r)^2}{4\eta z}\right) \right] \quad (1.4)$$

Так как $\eta_T = RRe_T^{-1}$ и $\eta = RRe^{-1}$ окончательно имеем:

$$u(r, z) = \frac{\Gamma_H(r)}{r} \left[1 - \exp\left(-Re_T \frac{r^2}{4\eta_T z}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-Re \frac{(R-r)^2}{4\eta z}\right) \right] \quad (1.5)$$

В принятой модели при инженерных расчетах используется значение турбулентного числа Рейнольдса $Re_T = \frac{\nu R}{\eta_T}$, где

$\eta_T = \nu a Re^b$ - турбулентная вязкость и $a = 2,46 \cdot 10^{-3}$;

$b = 1$ [6].

Распределение давления в сечении потока

$$\begin{aligned} p(r, z) &= p_a + \rho \int_{r_0}^r \frac{u(r, z)^2}{r} = \\ &= p_a + \rho \int_{r_0}^r \frac{\Gamma_H(r)^2}{r^3} \left[1 - \exp\left(-Re_T \frac{r^2}{4\eta_T z}\right) \right]^2 \left[1 - \exp\left(-Re \frac{(R-r)^2}{4\eta z}\right) \right]^2 dr \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь

p_a - давление в полном вихревом жгуте закрученного потока;

r_0 - радиус цилиндрического разрыва сплошности вблизи оси вращения, при $r < r_0$ давление $p(r) = p_H = \text{const}$.

По известным значениям $p(r, z)$ и $\omega(z)$, а также из начального условия, заданного функцией распределения по радиусу удельной энергии частицы жидкости во входном сечении трубопровода $H_H(r)$, определяется по уравнению (1.5) функция распределения осевой компоненты скорости потока по длине и текущему радиусу трубопровода $v(r, z)$.

$$v(r, z) = \bar{v} + Ro \frac{\Gamma_H}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \exp\left(-\frac{Re_T r^2}{4Rz} \right) \left[1 - \exp\left(-\frac{Re_T r^2}{4Rz} \right) \right] + \\ + Ro Re_T \Gamma_H \frac{R}{r} \left[\frac{3}{8} Ei\left(-\frac{Re_T r^2}{4Rz} \right) - \frac{1}{4} Ei\left(-\frac{Re_T r^2}{2Rz} \right) \right] \quad (1.7)$$

где $Ro = \frac{\Gamma_H}{v R^2}$ - число Россби; $E_i(\dots)$ - интегрально показательная функция.

Таким образом, для кольцевого вязкого турбулентно закрученного потока несжимаемой жидкости в горизонтальном цилиндрическом трубопроводе при заданных граничных условиях (условие прилипания жидкости на стенке) и начальных условиях на входе (при $z = 0$, задаваемых функциями $\Gamma_H(r)$ и $H_H(r)$ в каждом конкретном случае могут быть получены распределения всех компонентов скорости, давления и радиуса вихревого жгута в функции расстояния от начального створа и текущего радиуса: $v(r, z)$; $u(r, z)$; $w(r, z)$; $p(r, z)$; $r_0(z)$.

В имитационной математической модели было произведено исследование течения жидкости при двух различных условиях на входе в теплогенератор.

В первом случае величина циркуляции на входе задавалась, как для потенциального течения

$$\Gamma_H = v_{\text{вх}} \cdot r_{\text{вх}} = \text{const} \quad \text{и как твердое тело} \quad \Gamma_H = \frac{v_{\text{вх}} \cdot r_{\text{вх}}}{R} r$$

Для решения этой задачи для двух различных условий была разработана программа расчета в среде Mathcad. Разработаны дополнительные программные функции, позволяющие автоматически

переопределять табличные данные $\rho = \rho(t)$, $C = C(t)$, $\nu = \nu(t)$ (плотности, теплоемкости и кинематической вязкости) и реализовать циклически процедуру расчета осредненных по площади сечения значений $v(r, z)$; $u(r, z)$; $p(r, z)$ и изменение температуры за несколько проходов жидкости через теплогенератор. Дополнительные процедуры помещены в отдельный файл Mathcad, расчетные документы используют вспомогательные функции. Результаты расчета уравнений (1.4), (1.5), (1.7) позволили использовать уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости с вращающейся осью вращения:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + h_c$$

Откуда $h_c = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$, здесь

h_c - удельная энергия, затрачиваемая на преодоление сил вязкого трения; $p_1, p_2, u_1, u_2, v_1, v_2$ - среднеинтегральные значения статического давления, окружных и осевых скоростей соответственно во входном и выходном сечениях теплогенератора.

Полагая, что вся она превращается в теплоту и идет на подогрев жидкости, проходящей через теплогенератор, находим температуру воды на выходе из теплогенератора.

Из выражения $h_c = C(t_2 - t_1)$ следует $t_2 = t_1 + \frac{h_c}{C}$

C - теплоемкость воды $C = C(t)$

Результаты расчета представлены на рис А.8.3-А.8.7.

Исследуемая имитационная модель теплогенератора показала, что задание циркуляции на входе существенно влияет на физическую картину течения и практические расчеты. Так, потенциальное движение на входе, задаваемое $\Gamma_H = \text{const}$ оказывается практически неприменимо для описания структуры потока в двух зонах: вблизи оси вращения и твердых стенок трубы, в которых существенно воздействие вязкости. В потенциальной схеме течения произведе-

ние ru должно оставаться постоянным для всех частиц жидкости, а течение в меридиональной плоскости не должно зависеть от движения по окружности. Но $ru \neq \text{const}$ вблизи оси вращения, иначе $u \rightarrow \infty$ (рис. А.8.3). Результаты исследований показывают, что вблизи оси вращения

$$u = 0 \text{ при } r \rightarrow 0 [7].$$

Более близкие результаты дает имитационная математическая модель при задании циркуляции $\Gamma_H(r)$ по второму случаю, рассматривая вращение жидкости во входном сечении, как вращение твердого тела с постоянной угловой скоростью $\Gamma_H = \frac{v_{ax} \cdot r_{ax}}{R} r$

Результаты этих расчетов, представленные на рис.А.8.4-А.8.6 подтверждают наличие свободного вихря у периферии трубы и вынужденного вихря, вращающегося как твердое тело.

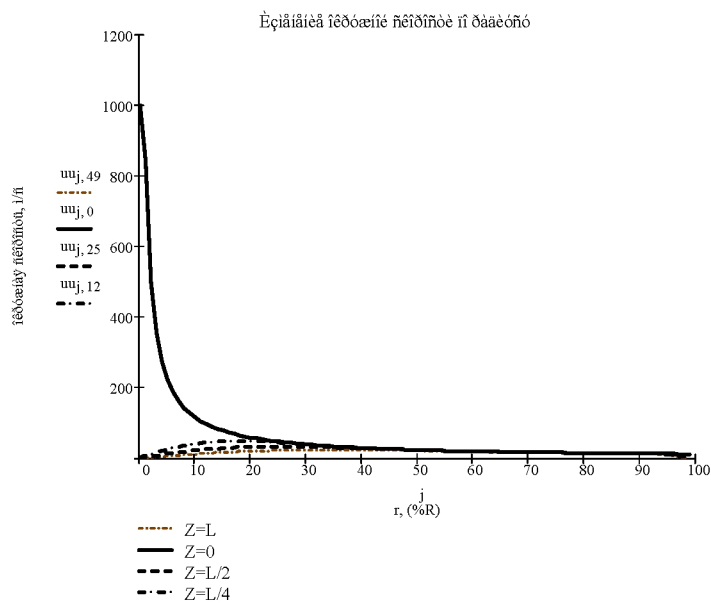


Рис. А.8.3. Изменение окружной скорости по радиусу для различных сечений трубы теплогенератора при постоянной циркуляции на входе в трубу теплогенератора

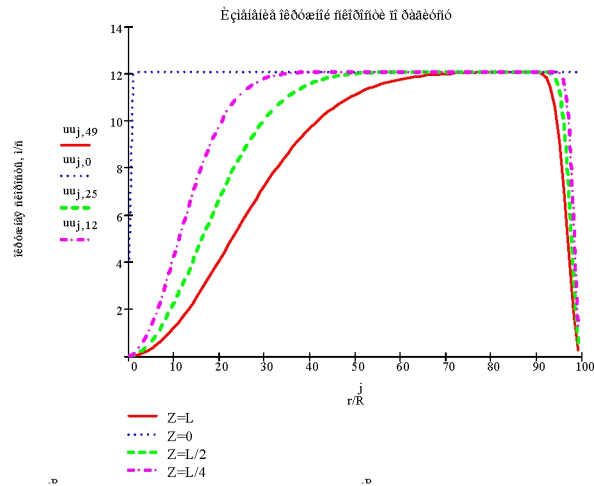


Рис А.8.4. Изменение окружной скорости по радиусу для различных сечений трубы теплогенератора при циркуляции на входе с постоянной угловой скоростью

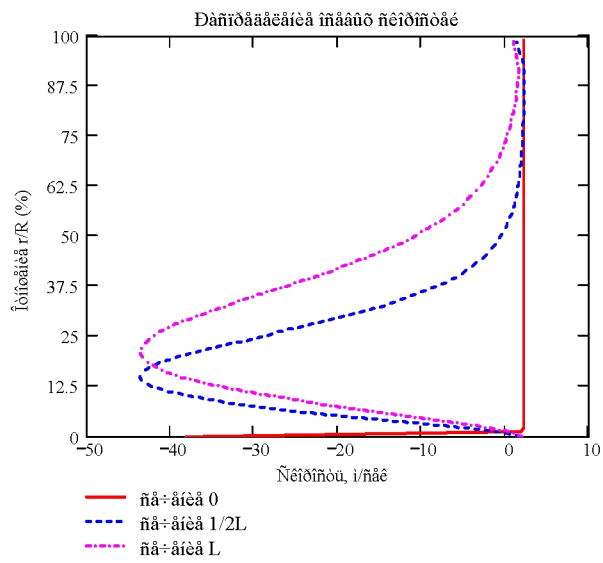


Рис. А.8.5. Изменение осевой скорости по радиусу для различных сечений трубы теплогенератора при циркуляции на входе с постоянной угловой скоростью

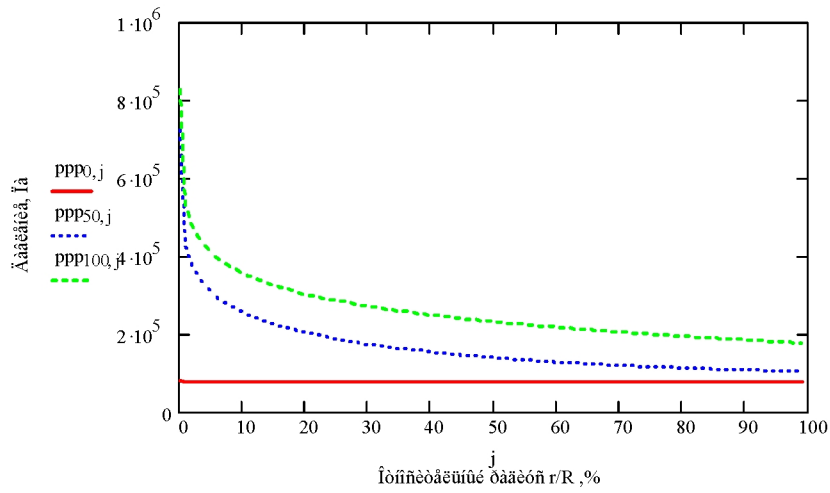


Рис. А.8.6. Изменение статического давления по радиусу для различных сечений трубы теплогенератора при циркуляции на входе с постоянной угловой скоростью

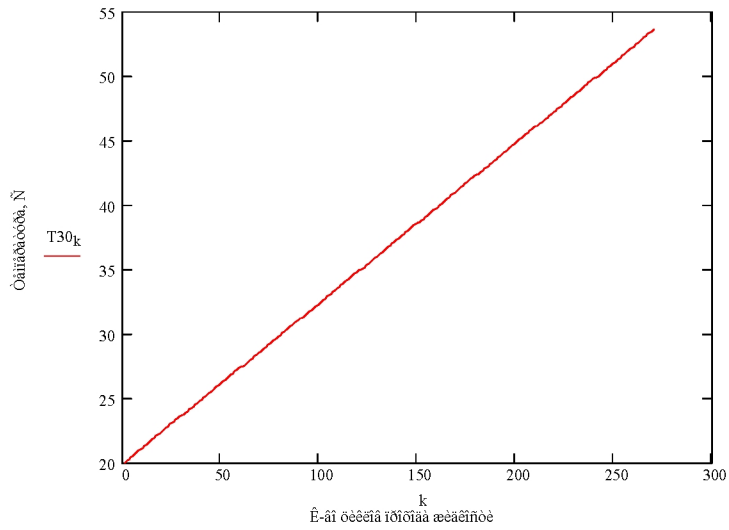


Рис. А.8.7. Изменение температуры жидкости при циркуляции на входе с постоянной угловой скоростью

Вместе с тем подтверждение правильности принятого предположения должно быть подтверждено экспериментально.

Рассчитанные значения получены в математической имитационной модели для адиабатно-изолированной жидкости на внешней поверхности теплогенератора, а также без учета теплоты, пошедшей на подогрев корпуса теплогенератора, труб, обеспечивающих круговое движение по рабочему гидравлическому контуру теплогенератора, подогрева всей жидкости, находящейся в системе теплогенератор – насос – теплогенератор.

Уточнить темп подогрева ΔT для каждого конкретного циркуляционного контура теплогенератора можно с помощью выражения

$$\Delta h_c = h_c - \sum_{i=1}^n q_i,$$

здесь Δh_c - доля удельной энергии, пошедшей на нагрев жидкости;

$$\sum_{i=1}^n q_i - \text{суммарная, удельная энергия, пошедшая на нагрев}$$

всей воды в контуре, труб и потери в окружающую среду.

Величина относительного теплового потока, отводимого от внутренней поверхности теплогенератора и труб, за счет теплопроводности будет составлять

$$q_1 = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}.$$

Тогда тепловой поток будет равен $Q = 2q_1 \cdot l$.

Количество теплоты пошедшее на нагрев теплогенератора и труб, составит $Q \cdot \tau$, а удельное количество теплоты, отнесенное к массе жидкости в теплогенераторе, будет равно $\frac{Q}{m}$.

Тогда $\Delta h_c = h_c - \frac{Q}{m}$, и подогрев воды в теплогенераторе с учетом отвода теплоты в стенку определится как $\Delta t = \frac{\Delta h_c}{C}$.

При смешении подогретой жидкости из теплогенератора и жидкости, находящейся в трубах, температура смешения определится по формуле

$$t_{см} = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$$

Из этого выражения видно, что температура жидкости после смешения будет существенно зависеть от суммарной массы жидкости.

На подогрев жидкости будет существенно влиять также количество теплоты, аккумулированное стенками теплогенератора и трубами.

Эффективность теплогенератора оценивается коэффициентом преобразования энергии

$$\varphi = \frac{Q_{пол}}{Q_{зат}}, \quad (1)$$

представляющего отношение полезной теплоты (пошедшей на нагрев воды и металлоконструкций) $Q_{пол}$ к затраченной энергии $Q_{зат}$.

Важными энергетическими характеристиками теплогенератора являются теплопроизводительность - Q_v - количество теплоты, пошедшее на нагрев воды и темп подогрева $\Delta T/\tau$. Последние две величины взаимосвязаны:

$$Q_v = c_v m_v \frac{\Delta T_v}{\tau}, \text{ Вт} \quad (2)$$

здесь c_v , m_v - теплоемкость и масса воды, циркулирующей в установке;

ΔT_v - разность температур воды в начале и конце нагрева;

τ - время работы теплогенератора.

Величина темпа подогрева может быть найдена из уравнения Бернулли, записанного для вязкой жидкости:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + h_c, \quad (3)$$

так как $Z_1 = Z_2$, то

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + h_c \quad (4)$$

h_c - удельная работа (отнесенная к весовому расходу) сил вязкого трения, переходящая в тепло, - удельная теплопроизводительность;

p_1, p_2 - давление на входе и выходе из теплогенератора;

U, V_1, V_2 - тангенциальные и осевые составляющие скорости на входе и выходе из теплогенератора.

Из (2) может быть найдена удельная теплопроизводительность

$$h_c = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}. \quad (5)$$

Для этого должны быть известны параметры потока жидкости на входе и выходе из теплогенератора.

Теплопроизводительность установки определяется из выражения:

$$H_c = Gh_c = G \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) \quad (6)$$

Здесь G - расход воды в кг/с,

g - ускорение свободного падения.

По величине H_c может быть оценен темп подогрева.

Поскольку $Q_B = H_c$, а $\Delta T = \frac{\Delta T}{\tau}$, то

$$\Delta T' = \frac{H_c}{G} = \frac{h_c}{C}, \quad (7)$$

$$\Delta T'' = \frac{p_1 - p_2}{\rho C} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2C} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2C}. \quad (8)$$

Так как для несжимаемой жидкости осевая составляющая скорости не меняется $U_1 = U_2$, то выражение (6) примет вид

$$\Delta T'' = \frac{1}{c\tau} \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right) \quad (9)$$

Выражение (3) и (4) справедливы для изотермической модели течения вязкой несжимаемой жидкости; темп подогрева целесообразно оценивать за промежуток времени, для которого изменение температуры жидкости не влияет на гидродинамическую картину течения.

Поэтому можно сделать следующие выводы: интенсивность подогрева жидкости в вихревом гидравлическом теплогенераторе будет зависеть от параметров жидкости на входе, распределения окружных, осевых скоростей и давления по радиусу и длине теплогенератора. Экспериментальное измерение этих параметров позволит найти практическое подтверждение физической картины течения жидкости внутри теплогенератора: наличие двух вихревых потоков, периферийного – свободного и приосевого – вынужденного, оценить эффективность энергообмена вихревых течений жидкости и уточнить температуру подогрева жидкости.

Описание лабораторной установки

Конструктивная схема лабораторной установки приведена на рис. А.8.8. Она включает в себя: теплогенератор вихревой гидравлической конической формы (ТВГК), насос марки БЦ-11-18У1 с электроприводом, расширительный бачок, контрольно-измерительную аппаратуру: счетчик расхода горячей воды, манометры p_1 ; p_2 ; p_3 , хромель-копелевые термомпары $T_1 \dots T_8$, ваттметр.

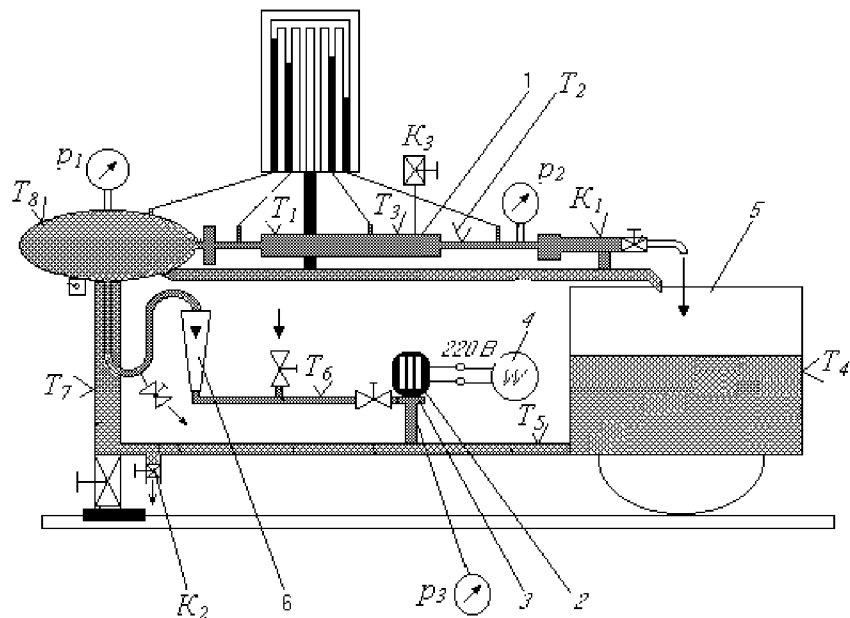


Рис. А.8.8. Принципиальная схема стенда для испытаний ТВГК:
 1 – теплогенератор; 2 – насос; 3 – электродвигатель; 4 - ваттметр; 5 - бак;
 6 - расходомер; p_1, p_2, p_3 – манометры; $T_1, T_2 \dots T_8$ – термопары;
 $K_1 \dots K_3$ – вентили

Датчики для измерения давления и температуры воды установлены на входе и выходе теплогенератора, а также на соединительных трубопроводах (рис. А.8.8). Датчики давления позволяют измерять полное и статистическое давление.

Методика проведения эксперимента

Основными параметрами уравнения (9), зависящими от температуры, является плотность ρ и вязкость ν . В интервале температуры от 10 до 100 °С изменение этих величин несущественно влияет на характер течения воды. Значительное влияние на работу теплогенератора оказывает процесс парообразования. Интенсивность испарения возрастает с ростом температуры. Поэтому эксперимент

следует проводить при умеренных температурах: от 10 до 50 °С в интервале слабого парообразования.

Перед началом испытаний проводятся операции тщательного удаления воздуха из системы. Записываются показания регистрирующих приборов. Данные заносятся в табл. 1. После включения насоса все параметры регистрируются через равные промежутки времени - 5 минут в течение 40-50 минут непрерывной работы насоса.

Обработка результатов эксперимента

1. Определить средний расход m^3/c по времени работы установки и показаниям счетчика горячей воды:

$$V' = \frac{V_r - V_0}{\tau}$$

V_r , V_0 - показания счетчика в момент времени τ и в момент пуска $\tau = 0$.

2. Подсчитать по расходу осевую среднеобъемную скорость движения воды в корпусе теплогенератора:

$$U_1 = \frac{V}{F_1}$$

Здесь F_1 - площадь сечения теплогенератора: $F_1 = \frac{\pi d_r^2}{4}$,

$$d_r = 42 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$$

3. Подсчитать циркуляцию потока в сопловом сечении $H = U_1 R_c$, где R_c - радиус среднего сечения сопла.

4. Подсчитать тангенциальную скорость закрученного потока на входе и выходе из теплогенератора, считая циркуляцию $H = \text{const}$

$$V_1 = \frac{H}{R_c}$$

5. Подсчитать удельную и полную теплопроизводительности из выражения (3)

$$h_c = \frac{p_1 - p_2}{\rho} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

$$H_c = Gh = Q_B$$

6. Подсчитать темп подогрева, сравнить с полученным из эксперимента:

$$\Delta T_3 = \frac{t_k - t_o}{\tau}$$

$$E = \frac{\Delta T - \Delta T_3}{\Delta T} \cdot 100\%$$

7. Подсчитать число Рейнольдса на входе и выходе из теплогенератора.

$$Re = \frac{v_1 d}{\nu_B} = \frac{u 2Rc}{\nu}$$

8. Найти полную теплопроизводительность вихревого гидравлического теплогенератора

$m_B \Delta T_B$ – тепло, пошедшее на нагрев воды;

$$Q_{\text{вод}} = c_B m_B \Delta T_B;$$

$Q_{\text{мет}} = c_{\text{мет}} m_{\text{мет}} \Delta T_{\text{мет}}$ - тепло пошедшее на нагрев металла;

Здесь $c_B, c_{\text{мет}}$ - теплоемкости воды и металла;

$m_B, m_{\text{мет}}$ - масса воды в системе и металлоконструкции;

$$c_B = 4178 \text{ Дж/кг К}, c_{\text{мет}} = 462 \text{ Дж/кг К};$$

$$m_B = 6 \text{ кг}, m_{\text{мет}} = 42 \text{ кг};$$

$Q_{\text{пот}} = \alpha F_{\text{сист}} (T_w - T_f) \tau$ - потери тепла за время проведения эксперимента τ ;

$$\alpha = 10 \text{ Вт/м}^2 \text{ К} - \text{коэффициент теплоотдачи}; F = 0,5 \text{ м}^2.$$

9. Подсчитать коэффициент преобразования энергии:

$$\phi = \frac{Q_{\text{пол}}}{Q_{\text{зат}}}.$$

10. Записать результаты расчета в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Рабочие параметры теплогенератора

№ п/п	Измеренные величины							
	τ , мин	t_1 , °C	t_2 , °C	t_3 , °C	t_4 , °C	V , м ³	P_1 , 10 ⁵ Па	P_2 , 10 ⁵ Па
1								
2								
3								
4								
5								
6								
$N_{зат}$, кВт	$\Delta T_{дв}$, °C/мин	V , м ³ /час	Δh_1 , мм.ст.Н ₂ O	Δh_2 , мм.ст.Н ₂ O	P_3^* , Па	P_4^* , Па	P_3 , Па	P_4 , Па

Таблица 2. Рабочие характеристики теплогенератора

Рассчитанные величины								
U , м/с	V_1 , м/с	V_2 , м/с	$\Delta T_{рв}$, °C/мин	$Q_{вв}$, Дж	$Q_{мв}$, Дж	$Q_{потв}$, Дж	Φ , %	ϵ , %

Контрольные вопросы к работе

1. Почему при течении вязкой несжимаемой жидкости происходит ее подогрев?
2. Почему для условий течения воды в теплогенераторе для широкого интервала изменения температур, ее можно рассматривать как изотермическую жидкость?
3. Что такое теплопроизводительность ТВГК?

4. Чем объяснить расхождение между теоретическим и экспериментальным значением тепла подогрева жидкости?
5. Что такое коэффициент преобразования энергии?
6. Что такое темп подогрева?

Лабораторный практикум (численный)

Электронные тесты к лабораторным работам № 2...5

Лабораторная работа по гидродинамике №2

Кавитация в потоке жидкости

Постоянные

$\rho := 1000$ [кг/м³] - плотность жидкости $i := 1..6$ [замеров]
 $g_{\text{жл}} := 9.81$ [м/с²] - ускорение свободного падения
 $\gamma := 9.8066$ [Па] - удельный вес

Параметры трубы Вентури

$d := 0.026$ [м] - диаметр сечений до и после трубы Вентури

Измеряемые величины

$T_{\text{воз}} := 22$ [°C] $T_{\text{вод}} := 10$ [°C] - температуры воздуха и воды соответственно
 $P_{\text{н}} := 0.999 \cdot 10^5$ [Па] - атмосферное давление
 $V_{\text{жл}} := 3.09 \cdot 10^{-3}$ [м³] - замеренный объем жидкости

Время наполнения объема V:

$\tau_1 := 27.2$ $\tau_2 := 16.2$ $\tau_3 := 12.7$ $\tau_4 := 11.2$ $\tau_5 := 10.1$ $\tau_6 := 9.5$ [с]

Давления до и за трубой Вентури:

$P11_1 := 1.4$ $P11_2 := 2.2$ $P11_3 := 3.2$ $P11_4 := 6.5$ $P11_5 := 10$ $P11_6 := 13$ [дел]
 $P22_1 := 0.4$ $P22_2 := 0.2$ $P22_3 := 0.4$ $P22_4 := 0.4$ $P22_5 := 0.6$ $P22_6 := 0$ [дел]

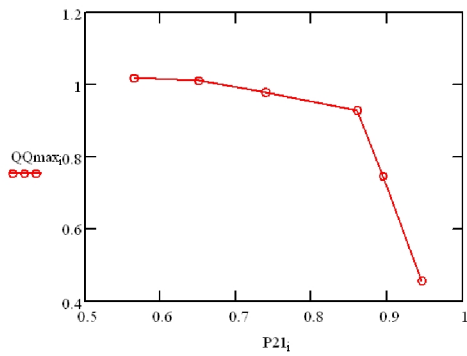
Вычисляемые величины

1) $k := 0.0698 \cdot 1000$ $k = 5.886 \times 10^3$ [Па] - одно деление образцового манометра
 $P1_i := P_{\text{н}} + P11_i \cdot k$
 $P2_i := P_{\text{н}} + P22_i \cdot k$ - пересчет давлений в характерных сечениях

- 2) $P21_i := \frac{P2_i}{P1_i}$ - отношение давлений
- 3) $Q_i := \frac{V}{t_i}$ [м³/с] - объемный расход жидкости
- 4) $S1 := \frac{\pi \cdot d_i^2}{4}$ $S1 = 5.309 \times 10^{-4}$ [м²] - площади сечений до и после трубы Вентури
- 5) $\chi_i := \frac{2 \cdot P1_i \cdot S1^2}{\rho \cdot (Q_i)^2}$ - кавитационное число
- 6) $\chi_{кр} := \frac{\sum_{i=4}^6 \chi_i}{3}$ $\chi_{кр} = 973.216$ - критическое кавитационное число вычисляется как среднее арифметическое на режимах с кавитацией
- 7) $Sy := \sqrt{\frac{S1^2}{\chi_{кр} + 1}}$ $Sy = 1.701 \times 10^{-5}$ - площадь узкого сечения
- 8) $dy := \sqrt{\frac{4 \cdot Sy}{\pi}}$ $dy = 4.654 \times 10^{-3}$ - диаметр узкого сечения
- 9) $Q_{max_i} := \sqrt{\frac{2 \cdot P1_i}{\rho \cdot \left(\frac{1}{Sy^2} - \frac{1}{S1^2} \right)}}$ - максимально возможный бъемный расход жидкост
- 10) $QQ_{max_i} := \frac{Q_i}{Q_{max_i}}$ - отношение расходов жидкости

Результаты

$P1_i =$	$P2_i =$	$P21_i =$	$\chi_i =$	$Q_i =$	$Q_{max_i} =$	$QQ_{max_i} =$
1.081·10 ⁵	1.023·10 ⁵	0.946	4.724·10 ³	1.136·10 ⁻⁴	2.503·10 ⁻⁴	0.454
1.128·10 ⁵	1.011·10 ⁵	0.896	1.749·10 ³	1.907·10 ⁻⁴	2.557·10 ⁻⁴	0.746
1.187·10 ⁵	1.023·10 ⁵	0.861	1.131·10 ³	2.433·10 ⁻⁴	2.623·10 ⁻⁴	0.928
1.382·10 ⁵	1.023·10 ⁵	0.74	1.023·10 ³	2.759·10 ⁻⁴	2.829·10 ⁻⁴	0.975
1.588·10 ⁵	1.034·10 ⁵	0.651	956.247	3.059·10 ⁻⁴	3.033·10 ⁻⁴	1.009
1.764·10 ⁵	9.99·10 ⁴	0.566	940.105	3.253·10 ⁻⁴	3.197·10 ⁻⁴	1.017



Лабораторная работа по гидродинамике №3
Определение коэффициентов сопротивления трения и местных сопротивлений в трубе

Постоянные

$\rho := 1000 [\text{кг/м}^3]$ - плотность жидкости $i := 1..6$ [сечений]
 $g := 9.81 [\text{м/с}^2]$ - ускорение свободного падения $j := 2..6$ [участков]
 $\gamma := 9.8066 [\text{Па}]$ - удельный вес

Параметры рабочего участка

$d_1 := 0.014$ $d_2 := 0.014$ $d_3 := 0.028$ $d_4 := 0.014$ $d_5 := 0.014$ $d_6 := 0.014$ [м] - диаметры
 $l_2 := 0.180$ $l_3 := 0.135$ $l_4 := 0.200$ $l_5 := 0.180$ $l_6 := 0.075$ [м] - длины участков
характерных сечений

Измеряемые величины

$P_{at} := 1.012 \cdot 10^5$ [Па] - атмосферное давление
 $T_{воз} := 17$ [С] $T_{вод} := 10$ [С] - температуры воздуха и воды соответственно
 $h_{вх} := 1630$ [мм вод ст] - напор жидкости
 $h_{вх} := 550$ [мм вод ст] - давление в расходном баке
 $h_1 := 480$ $h_2 := 476$ $h_3 := 483$ $h_4 := 464$ $h_5 := 435$ $h_6 := 100$ [мм вод ст] - давления в
характерных сечениях
 $V_{изм} := 3.12 \cdot 10^{-3}$ [м³] - замеренный объем жидкости
 $\tau := 31$ [с] - время наполнения объема V

Вычисляемые величины

- 1) $S_{\text{ш}} := \frac{\pi \cdot (d_i)^2}{4}$ [м²] - площади характерных сечений
- 2) $Q := \frac{V}{\tau}$ [м³/с] $Q = 1.006452 \times 10^{-4}$ - объемный расход жидкости
- 3) $C_{\text{ср}1} := \frac{Q}{S_1}$ [м/с] - средняя скорость потока жидкости
- 4) $P_i := P_n + \gamma \cdot (h_{\text{вх}} - h_{\text{вх}} + h_i)$ [Па] - пересчет давлений в характерных сечениях
- $\Delta h_{\text{э}j} := \frac{|P_j - P_{j-1}|}{\rho}$ [Па] - экспериментальные значения потерь энергии на трение
- 5) $\lambda_{\text{э}j} := \frac{2 \cdot \Delta h_{\text{э}j} \cdot d_j}{l_j \cdot (C_{\text{ср}j})^2}$ - экспериментальные значения коэффициентов сопротивления трения
- 6) $\xi_{\text{э}j} := \frac{2 \cdot \Delta h_{\text{э}j}}{(C_{\text{ср}j})^2}$ - экспериментальные значения коэффициентов местного сопротивления
- 7) $\nu := 1.3 \cdot 10^{-6}$ [м²/с] - вязкость вычисленная по температуре воды
- 8) $Re_{\text{э}j} := \frac{C_{\text{ср}j} \cdot d_j}{\nu}$ - число Рейнольдса
- 9) $\lambda_{\text{р}j} := \frac{0.3164}{(Re_j)^{0.25}}$ - расчетные значения коэффициентов сопротивления трения, потерь энергии на трение, местного сопротивления соответственно
- $h_{\text{р}j} := \lambda_{\text{р}j} \cdot \frac{l_j}{d_j} \cdot \frac{(C_{\text{ср}j})^2}{2}$ $\xi_{\text{р}j} := \frac{2 \cdot h_{\text{р}j}}{(C_{\text{ср}j})^2}$

Результаты

$h_i =$	$P_i =$	$S_i =$	$C_{\text{ср}1} =$	$Re_j =$
480	1.164983·10 ⁵	1.53938·10 ⁻⁴	0.653803	7.040956·10 ³
476	1.164591·10 ⁵	1.53938·10 ⁻⁴	0.653803	3.520478·10 ³
483	1.165277·10 ⁵	6.157522·10 ⁻⁴	0.163451	7.040956·10 ³
464	1.163414·10 ⁵	1.53938·10 ⁻⁴	0.653803	7.040956·10 ³
435	1.16057·10 ⁵	1.53938·10 ⁻⁴	0.653803	7.040956·10 ³
100	1.127718·10 ⁵	1.53938·10 ⁻⁴	0.653803	

$\Delta h_{\text{э}j} =$	$\lambda_{\text{э}j} =$	$\lambda_{\text{р}j} =$	$h_{\text{р}j} =$	$\xi_{\text{р}j} =$	$\xi_{\text{э}j} =$
0.039226	0.014275	0.03454	0.094915	0.444092	0.183533
0.068646	1.065852	0.041076	2.645488·10 ⁻³	0.198044	5.138929
0.186325	0.061025	0.03454	0.105462	0.493436	0.871783
0.284391	0.103492	0.03454	0.094915	0.444092	1.330615
3.285211	2.869235	0.03454	0.039548	0.185038	15.370903

Лабораторная работа по гидродинамике №4
Движение жидкости в трубе переменного сечения

Постоянные

$\rho := 1000 [\text{кг/м}^3]$ - плотность жидкости $i := 1..3$
 $g := 9.81 [\text{м/с}^2]$ - ускорение свободного падения
 $\gamma := 9.8066 [\text{Па}]$ - удельный вес

Параметры рабочего участка

$d_1 := 0.014$ $d_2 := 0.028$ $d_3 := 0.014$ [м] - диаметры
 $l_1 := 0.135$ $l_2 := 0.510$ $l_3 := 0.890$ [м] - расстояния до датчиков замера давлений в характерных сечениях

Измеряемые величины

$T_{\text{воз}} := 18$ [С] $T_{\text{вод}} := 10$ [С] - температуры воздуха и воды соответственно
 $P_{\text{ат}} := 0.996 \cdot 10^5$ [Па] - атмосферное давление
 $h_{\text{вх}} := 1630$ [мм.вод.ст] - напор жидкости
 $h_{\text{вх}} := 730$ [мм.вод.ст] - давление в расходном баке
 $h_1 := 250$ $h_2 := 380$ $h_3 := 110$ [мм.вод.ст] - статические давления и давления торможения в характерных сечениях
 $h'_1 := 555$ $h'_2 := 390$ $h'_4 := 325$ [мм.вод.ст]
 $V := 3.09 \cdot 10^{-3}$ [м³] - замеренный объем жидкости
 $\tau := 12.4$ [с] - время наполнения объема V

Вычисляемые величины

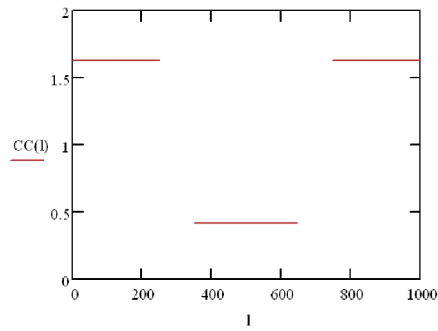
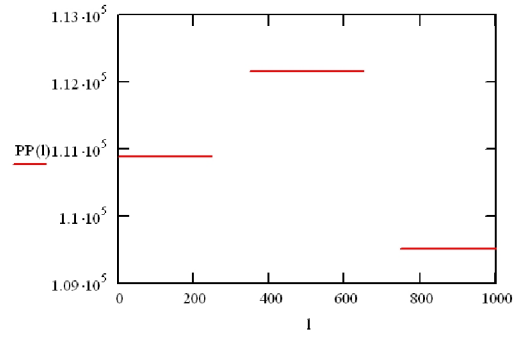
- 1) $P_1 := P_{\text{ат}} + \gamma \cdot (h_{\text{вх}} - h_{\text{вх}} + h_1)$ [Па] - пересчет давлений в характерных сечениях
 $P'_1 := P_{\text{ат}} + \gamma \cdot (h_{\text{вх}} - h_{\text{вх}} + h'_1)$ [Па]
- 2) $S_i := \frac{\pi \cdot (d_i)^2}{4}$ [м²] - площади характерных сечений
- 3) $Q := \frac{V}{\tau}$ [м³/с] - объемный расход жидкости
- 4) $C_{\text{ср}_1} := \frac{Q}{S_1}$ [м/с] - средняя скорость потока жидкости
- 5) $P'_{\text{ср}_1} := P_1 + \frac{\rho \cdot (C_{\text{ср}_1})^2}{2}$ [Па] - осредненное давление торможения
- 6) $h_{12} := \frac{P_1 - P_2}{\rho}$ [Дж/кг] - потери энергии
 $h_{13} := \frac{P_1 - P_3}{\rho}$

Результаты

$P_i =$	$P'_i =$	$S_i =$	$Ccp_i =$	$P'cp_i =$	$Q = 2.492 \times 10^{-4}$
1.109·10 ⁵	1.139·10 ⁵	1.539·10 ⁻⁴	1.619	1.122·10 ⁵	$h_{12} = -1.275$
1.122·10 ⁵	1.123·10 ⁵	6.158·10 ⁻⁴	0.405	1.122·10 ⁵	$h_{13} = 1.373$
1.095·10 ⁵	1.084·10 ⁵	1.539·10 ⁻⁴	1.619	1.108·10 ⁵	

7) $l := 0, 1, \dots, 1000$

$$PP(l) := \begin{cases} P_1 & \text{if } 0 \leq l \leq 250 \\ P_2 & \text{if } 350 \leq l \leq 650 \\ P_3 & \text{if } 750 \leq l \leq 1000 \end{cases} \quad CC(l) := \begin{cases} Ccp_1 & \text{if } 0 \leq l \leq 250 \\ Ccp_2 & \text{if } 350 \leq l \leq 650 \\ Ccp_3 & \text{if } 750 \leq l \leq 1000 \end{cases}$$



Лабораторная работа по гидродинамике № 5
Истечение жидкости из отверстия и сопел

Постоянные

$g := 9.81 \text{ [м/с}^2\text{]}$ - ускорение свободного падения; $i := 1..4$ - количество измерений

Параметры насадков

$d_1 := 0.00302$ $d_2 := 0.003075$ $d_3 := 0.003028$ $d_4 := 0.003285$ [м] - диаметры отверстий в насадках

Измеряемые величины

$x1_1 := 0.348$ $x2_1 := 0.804$ $y1_1 := 0.025$ $y2_1 := 0.115$

$x1_2 := 0.333$ $x2_2 := 0.789$ $y1_2 := 0.012$ $y2_2 := 0.110$

$x1_3 := 0.333$ $x2_3 := 0.789$ $y1_3 := 0.010$ $y2_3 := 0.095$

$x1_4 := 0.333$ $x2_4 := 0.789$ $y1_4 := 0.007$ $y2_4 := 0.083$

[м] - координаты отклонения струи

$H_{\text{вод}} := 1.630$ [м.вод.ст.]

- напор жидкости

$V := 3.6 \cdot 10^{-3}$ [м³]

- замеренный объем жидкости

$\tau_1 := 125.7$

$\tau_2 := 96$

$\tau_3 := 93$

$\tau_4 := 72.7$ [с]

- время наполнения объема V

Вычисляемые величины

1) $S0_i := \frac{\pi \cdot (d_i)^2}{4}$ [м²]

- площади отверстий насадков

2) $Q2_i := \frac{V}{\tau_i}$ [м³/с]

- действительный объемный расход воды

3) $Q2_{\text{нд}_i} := S0_i \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$ [м³/с]

- теоретический объемный расход воды

4) $C2_{\text{ср}_i} := \frac{g \cdot x2_i \cdot x1_i \cdot (x2_i - x1_i)}{2 \cdot (x1_i \cdot y2_i - x2_i \cdot y1_i)}$ [м/с]

- действительная скорость истечения воды

5) $C2_{\text{нд}_i} := \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$ [м/с]

- теоретическая скорость истечения воды

6) $\mu_i := \frac{Q2_i}{Q2_{\text{нд}_i}}$ $\phi_i := \frac{C2_{\text{ср}_i}}{C2_{\text{нд}_i}}$ $\varepsilon_i := \frac{\mu_i}{\phi_i}$ [-]

- коэффициенты: расхода, скорости, сжатия струи

Результаты

$S0_i =$	$Q2_i =$	$Q2_{\text{нд}_i} =$	$C2_{\text{ср}_i} =$	$C2_{\text{нд}_i} =$
7.163·10 ⁻⁵	2.863962·10 ⁻⁵	4.051·10 ⁻⁵	5.605	5.655
7.426·10 ⁻⁵	3.75·10 ⁻⁵	4.2·10 ⁻⁵	4.651	5.655
7.201·10 ⁻⁵	3.870968·10 ⁻⁵	4.072·10 ⁻⁵	4.975	5.655
8.475·10 ⁻⁵	4.951857·10 ⁻⁵	4.793·10 ⁻⁵	5.155	5.655

$\phi_i =$	$\mu_i =$	$\varepsilon_i =$
0.991	0.707	0.713
0.823	0.893	1.086
0.88	0.951	1.081
0.912	1.033	1.133

**Лабораторный практикум с использованием
компьютерных технологий**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 9

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ
В ТРУБЕ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ**

Цель работы: исследование режимов течения в трубе постоянного сечения в программном пакете ANSYS.

Порядок выполнения работы

1. Войти в программу ANSYS.
2. Выбрать вид анализа: Preferences>FLOTRAN CFD

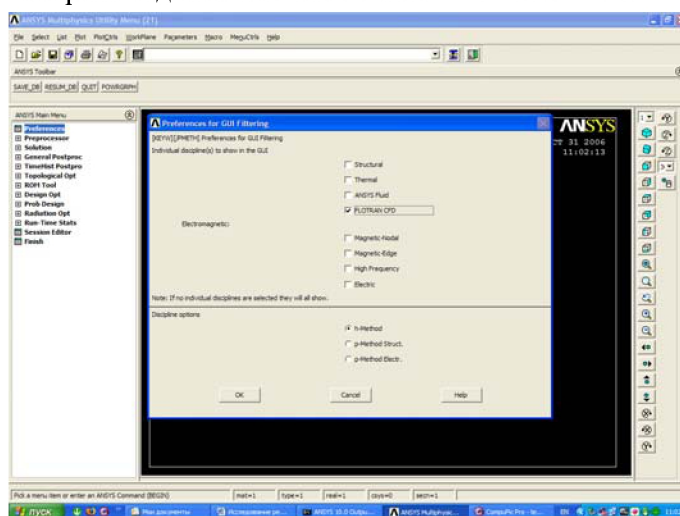


Рис. В.9.1. Выбор вида анализа

3. С помощью меню пользователя присвоить имя своему рабочему файлу (для сохранения текущих данных):

File>Change Jobname> ввод имени

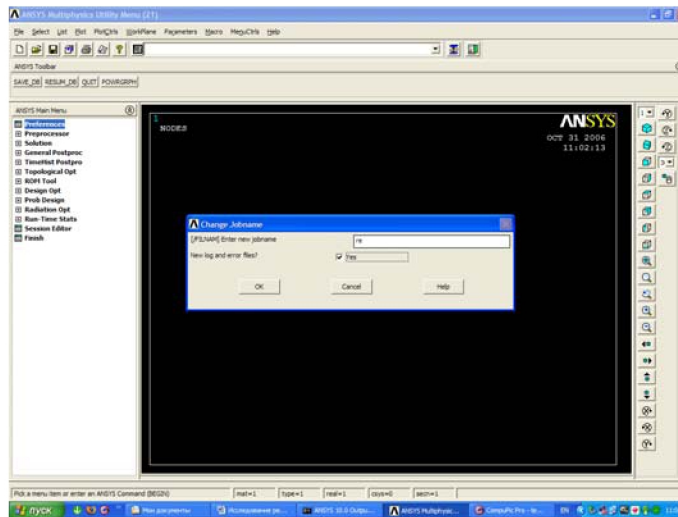


Рис. В.9.2. Задание имени проекта

4. Войти в Preprocessor.

4.1. Выбрать тип КЭ. Для данной двухмерной задачи теплового анализа подходит элемент 2d FLOTRAN 141:

Element type>Add>Edit>Delete>Add>FLOTRAN CFD>2d FLOTRAN 141> Close

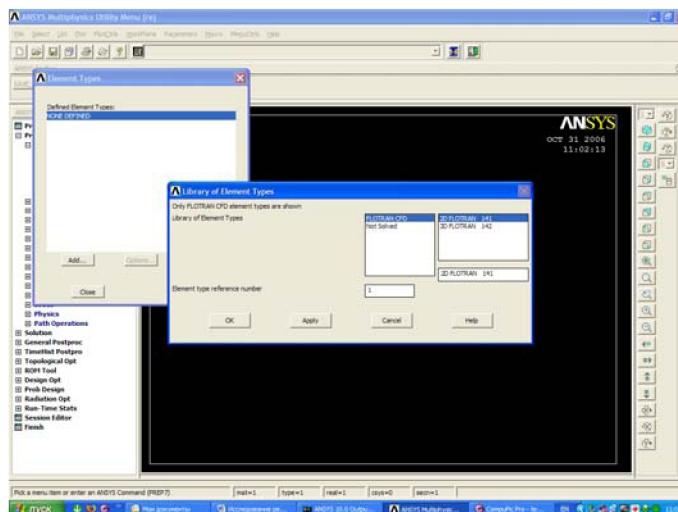
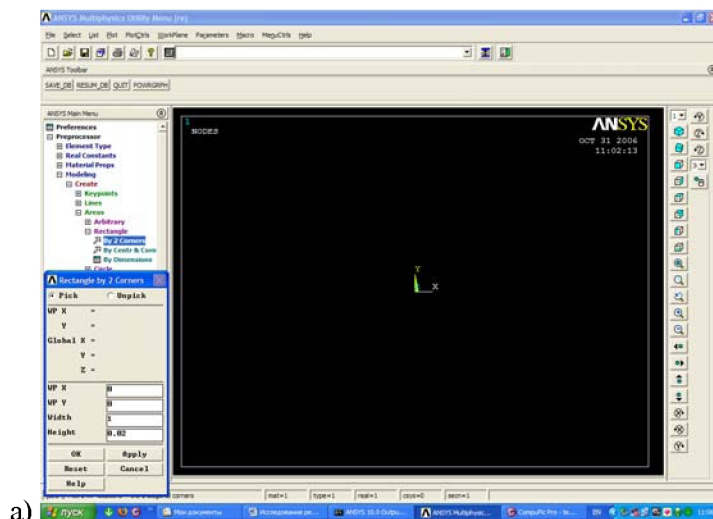


Рис. В.9.3. Выбор типа КЭ

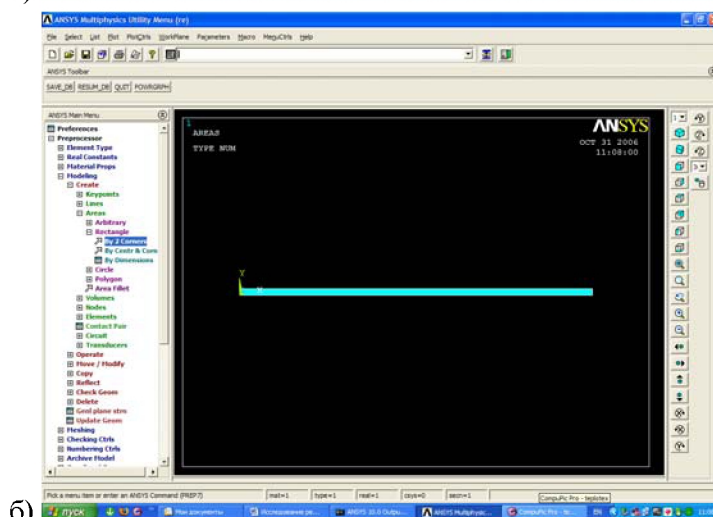
4.3. Создать геометрическую модель изучаемого объекта по заданным размерам с помощью команд Create.

Создание поверхности:

Preprocessor> Modeling> Create> Areas> Rectangle> By 2 Corners



а)



б)

Рис. В.9.5. Построение поверхности

4.4. Разбить полученную модель на КЭ, применив несколько вариантов частоты сетки.

Задание размеров элементов сетки:

Meshing>Size Cntrls>Manual Size>Areas>All Areas>Size = 0,001

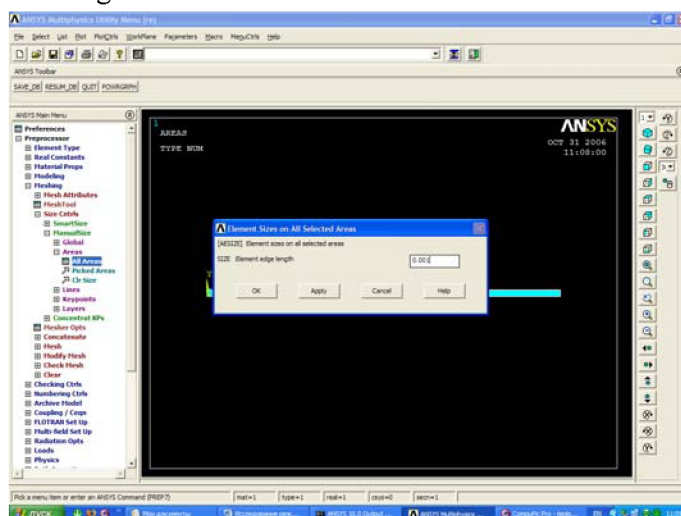


Рис. В.9.6. Задание размеров элементов

Наложение сетки на поверхность:

Meshing>Mesh>Areas>Mapped>3 or 4 sided

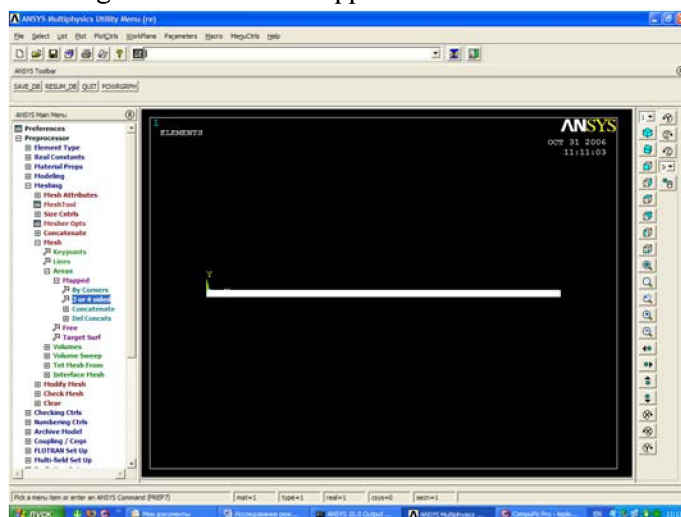


Рис. В.9.7. Наложение сетки на поверхность

После выполнения вышеизложенных операций объект готов для расчетного анализа.

5. Выполнить расчет изучаемого объекта.

5.1. Задать граничные условия:

Solution>DefineLoads>Apply>Fluid/CFD>Velocity>On Lines
(указываем стенки трубы)

$$VX=VY=0$$

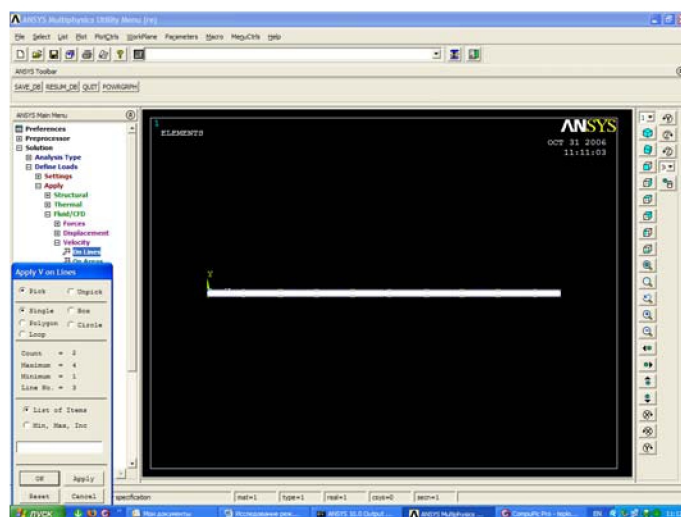


Рис. В.9.8. Задание граничных условий (скорость)

Solution>DefineLoads>Apply>Fluid/CFD>Pressure DOF>ON Lines

Давление на входе 500 Па, на выходе – 100 Па.

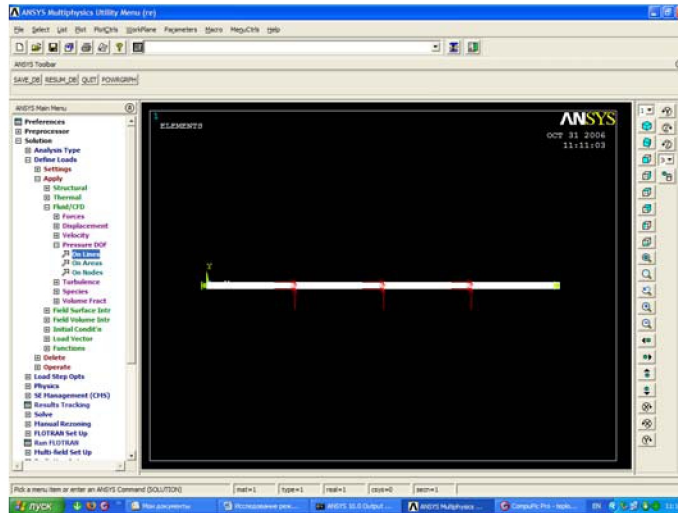


Рис. В.9.9. Задание граничных условий (давление на входе и выходе из участка)

Задаем параметры жидкости

Solution>FLOTRAN Set Up>Fluid Properties

Плотность 1000 кг/м^3 , вязкость $1 \cdot 10^{-5}$, теплопроводность $0,57$.

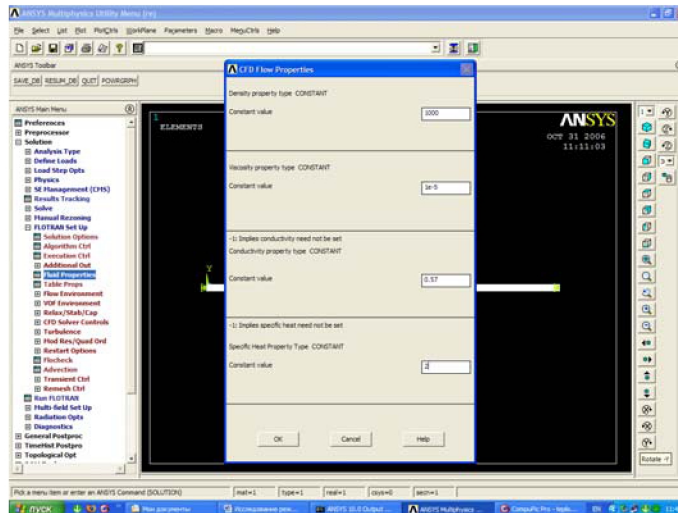


Рис. В.9.10. Задание параметров рабочего тела

Параметры расчета:
Solution>FLOTRAN Set Up>Solution Options

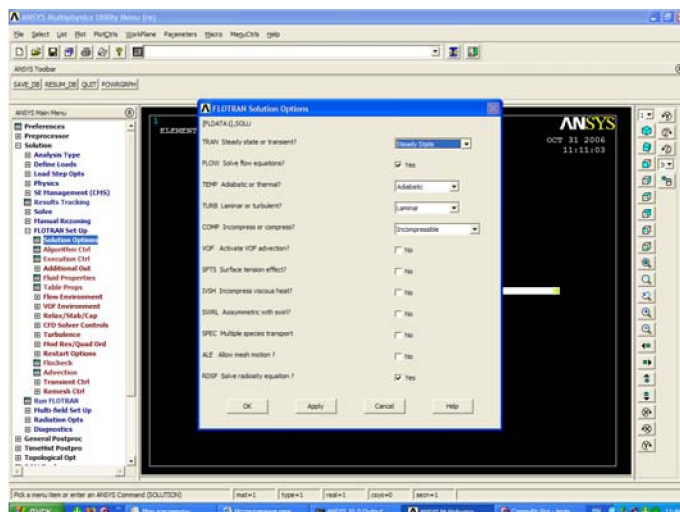


Рис. В.9.11. Задание параметров расчета

Запуск расчета:
Solution>Run FLOTRAN

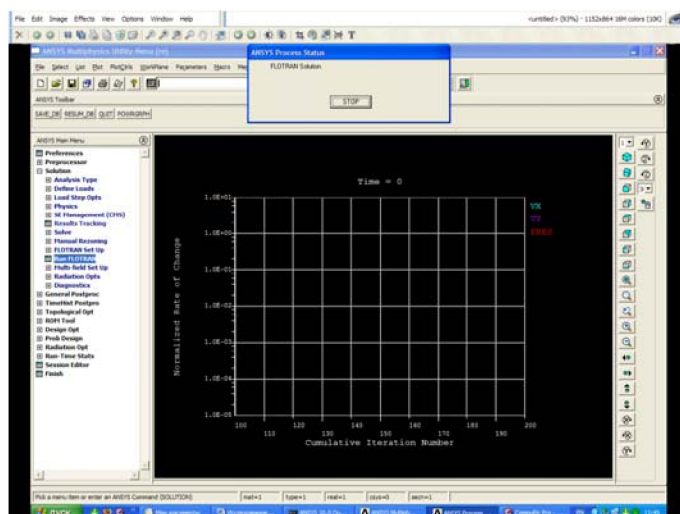


Рис. В.9.12. Запуск расчета

После окончания расчета в окне появится сообщение: Solution Done.

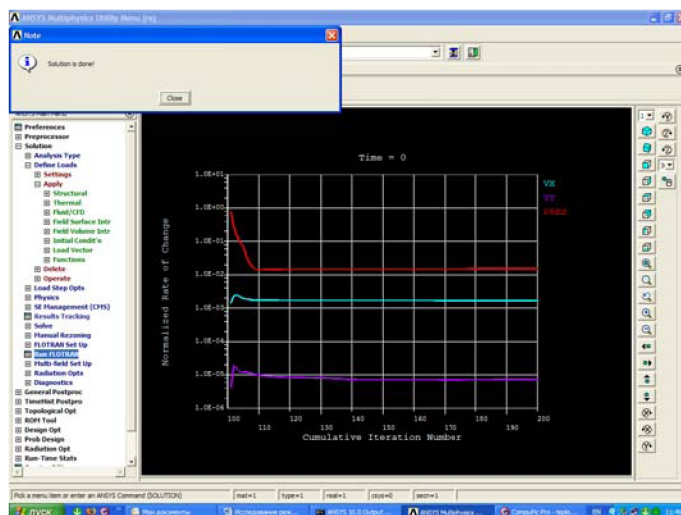


Рис. В.9.13. Окончание расчета

6. Просмотр результатов:
General Postproc>Read Results>Last Set

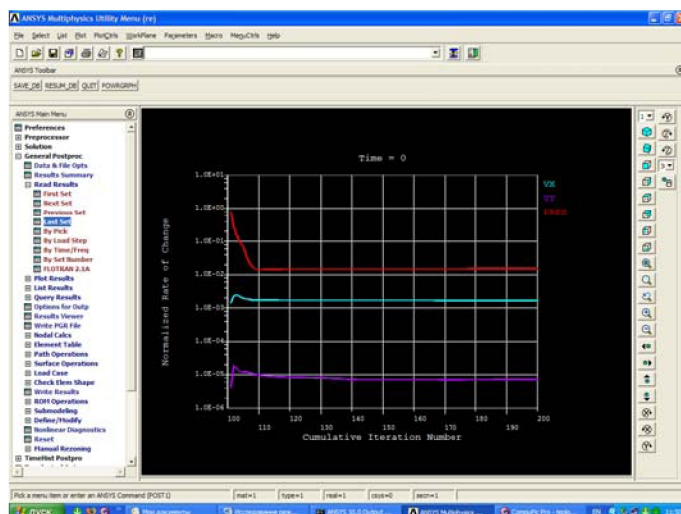


Рис. В.9.14. Выбор последнего полученного результата

General Postproc>Plot Results>Contour Plot>Nodal Solu
 В появившемся окне выбираем Nodal Solution>Fluid Velocity.

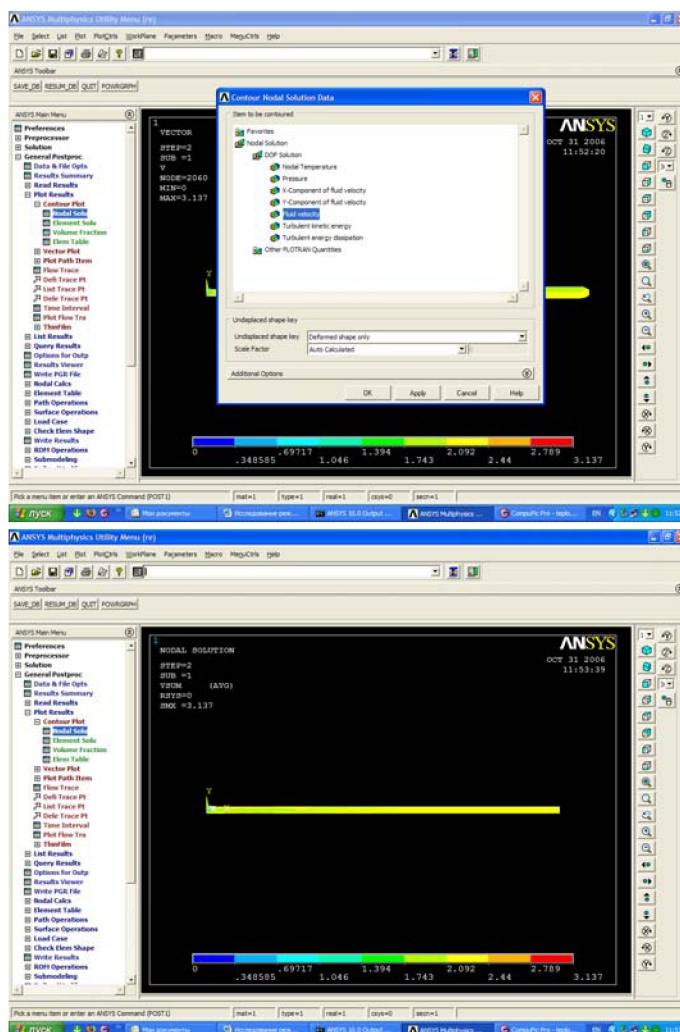


Рис. В.9.15. Просмотр результатов расчета

Построение эюр скоростей:
 General Postproc>Path operation>Define Path>By Nodes

Указываем крайние точки выходной зоны исследуемого участка:

General Postproc>Path Operation>Map onto Path

Выбираем интересующий нас параметр (в нашем случае скорость потока):

General Postproc>Path Operation>Plot Path Item>On Graph

Смотрим, что получилось.

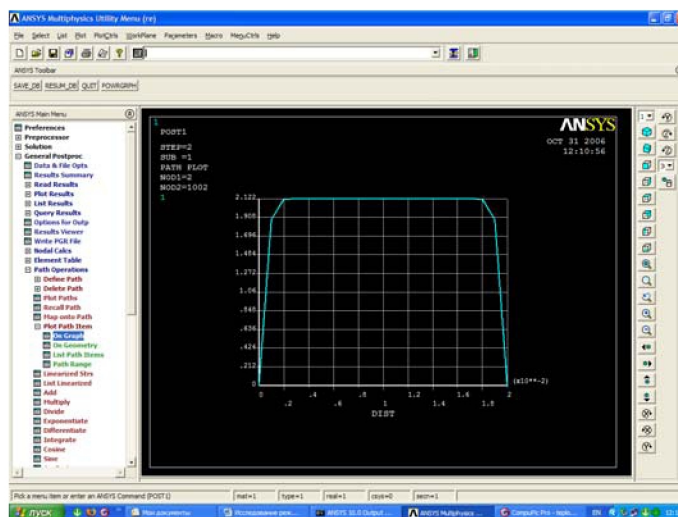


Рис. В.9.16. Эпюра скорости

**«МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ДВУХФАЗНОГО
ПОТОКА В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ.
ЯВЛЕНИЕ КАВИТАЦИИ»**

В данной лабораторной работе производится моделирование течения воды через трубку Вентури (аналогичную рабочему участку на гидростенде) при помощи компьютерной САЕ-системы FLUENT на платформе Windows. Для расчетов использовалась ЭВМ, оснащенная процессором AMD Athlon 64 с частотой 2,4 ГГц и оперативной памятью объемом 768 МБ. В нашем случае программа позволяет проводить различные расчеты и инженерный анализ результатов, полученных в ходе имитации течения жидкости. В основе пакета лежит метод конечных элементов, применяемый совместно с известными законами физики и уравнениями МЖГ. На сегодняшний день этот метод является наиболее перспективным при решении сложных задач различных областей науки. Он позволяет с высокой степенью точности предсказать картину протекания процессов в газах и жидкостях, не проводя натуральных экспериментов. На начальном этапе исследований данный метод делает возможным постановку экспериментов с использованием режимов, недопустимых для лабораторной установки, вследствие ее конструктивных и других ограничений.

Целью работы № 10 является получение студентами первых сведений о среде моделирования FLUENT 6.2, а также необходимых для предварительной работы программ GAMBIT 2.6 и Компас 8. Студенту предлагается самостоятельно построить чертеж трубки Вентури по размерам, согласно варианту задания, в программе Компас-График. Используя возможность конвертирования чертежа Компас в формат, понятный большинству САЕ-систем, студент транслирует чертеж в GAMBIT. В данном пакете происходит преобразование чертежа в рабочую модель посредством наложения

сетки конечных элементов и заданием граничных условий. После передачи модели в программу FLUENT студент вводит данные о материалах веществ, участвующих в опыте, и необходимые численные значения некоторых параметров. Итогом работы должны быть эпюры и картины распределения давления, скорости и энергетических характеристик потока по сечению рабочего участка (см. рис. 1) при известных начальных параметрах жидкости: давлениях жидкости на входе и на выходе, а также свойствах воды и водяного пара.

Построение трубки Вентури в программе Компас-График

В качестве примера рассмотрим трубку Вентури длиной 104 мм и диаметрами: 4,5 мм – минимальный, 26 мм – максимальный. Для выравнивания параметров потока до и после трубки добавим к ней слева и справа прямолинейные участки длиной не менее двух максимальных диаметров трубки. Для упрощения решения воспользуемся только половиной сечения трубки Вентури (см. рис. В.10.1). Чертеж необходимо сохранить в формате IGES.

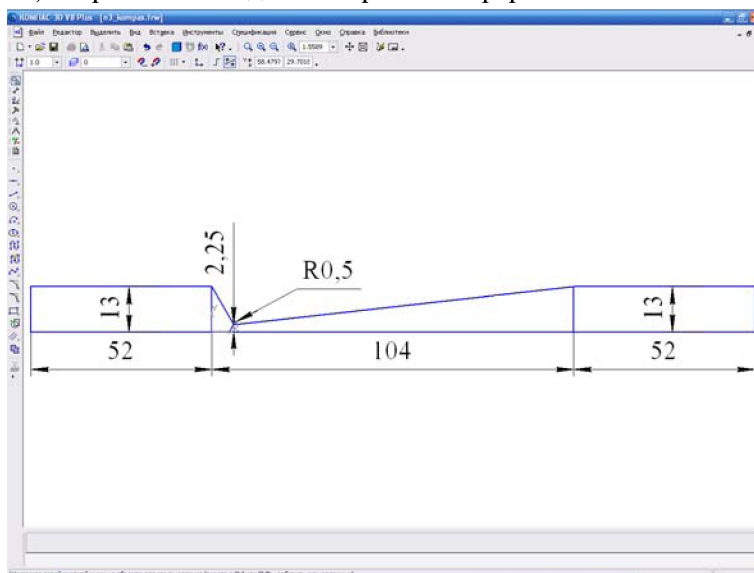


Рис. В.10.1. Построение рабочего участка в программе Компас

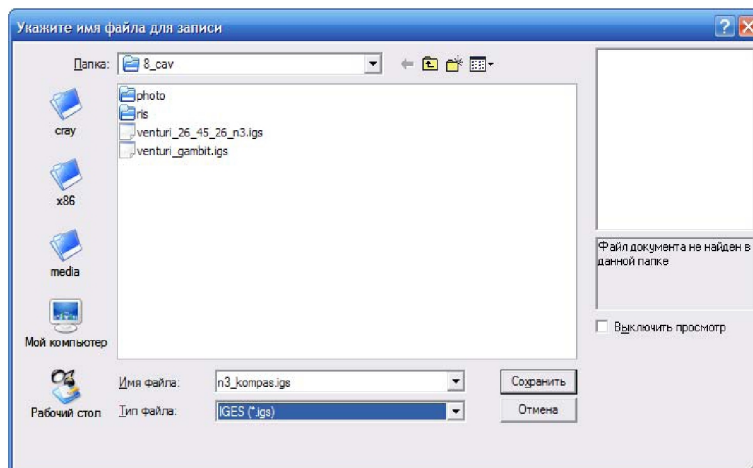


Рис. В.10.2. Сохранение чертежа в формате IGES

Программа GAMBIT

Для того чтобы поставленная задача была решена FLUENTом, с полученным чертежом необходимо выполнить некоторые преобразования.

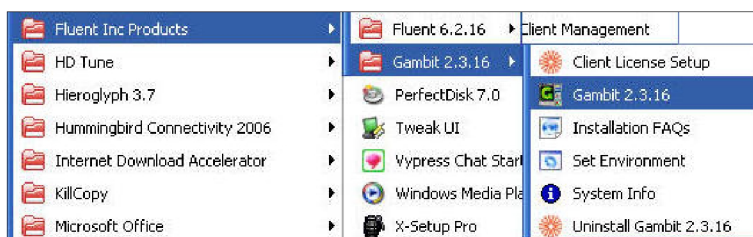


Рис. В.10.3. Расположение ссылок программы GAMBIT

Запуск программы не отличается от вызова большинства других программ (с помощью ссылки «Gambit 2.3.16» в меню «Пуск») (см. рис. В.10.3). Однако познакомившись с программой ближе, лаборант покажет более рациональный запуск программы с учетом рабочей директории с использованием системных переменных. После вызова программы в диалоговом окне нужно указать рабочую

папку и название работы (см. рис. В.10.4). После нажатия кнопки «Run» происходит запуск GAMBIT.

Следует отметить, что для отображения окон многих инженерных программ, таких, как GAMBIT, STAR-CD, в операционной системе должен быть установлен транслятор EXCEED. По ряду причин большинство сложных САЕ-систем было изначально спроектировано для работы под операционными системами UNIX (в частности, из-за неспособности работы ранних версий MS Windows с многопроцессорными и кластерными системами, а также невозможностью настройки операционной системы с закрытым исходным кодом). Оболочка таких программ использует графическую библиотеку OpenGL и связанные с ней принципы построения изображения без участия системного ядра.

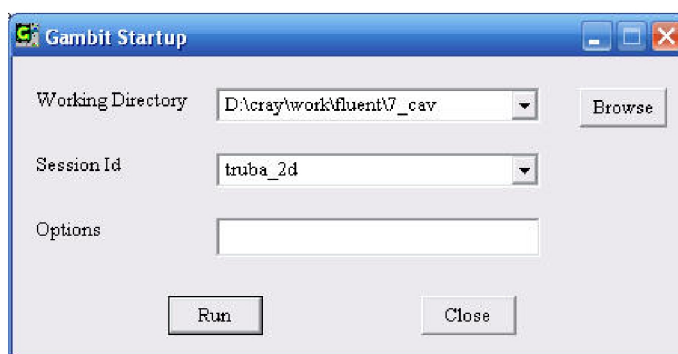


Рис. В.10.4. Ввод названия работы и рабочей директории

После того как мы загрузили программу, рассмотрим более подробно, из каких частей состоит окно программы и какие функции они выполняют:

1. Главное меню. Состоит из трех пунктов: File, Edit, Solver (сверху).

File – с помощью этого пункта выполняем различные операции с файлами: открыть, сохранить, экспортировать в другой формат и др.

Edit – позволяет записать в файл некоторую дополнительную информацию о редакторе и выполнить операции отмены или повторения действия.

Solver – выбор решателя. Дело в том, что созданные в GAMBIT модели можно импортировать в различные CAE-системы. Программа может оптимизировать модель под некоторые из них при использовании соответствующего решателя.

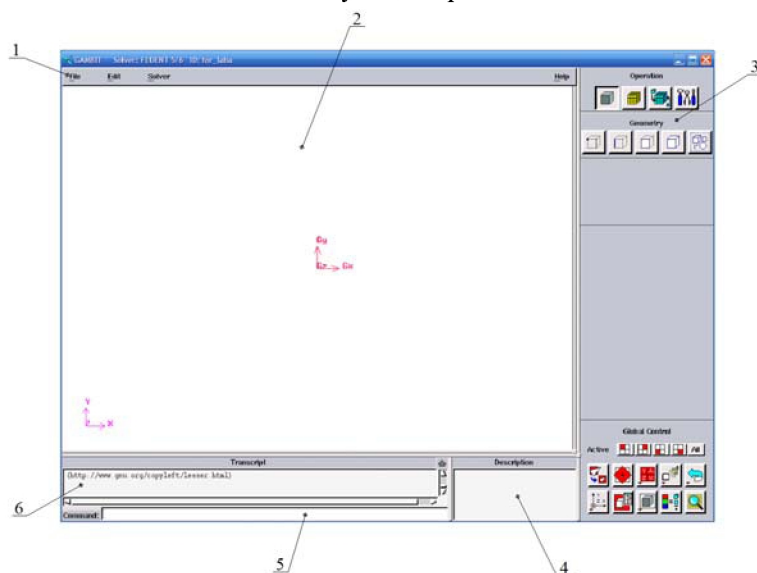


Рис. В.10.5. Окно программы

2. Рабочая плоскость или пространство.
3. Панель инструментов (справа). Позволяет выполнять различные операции с моделью.
4. Окно, отображающее выполненные операции.
5. Командная строка. Позволяет работать в программе с помощью специальных команд.
6. Информационное окно. Показывает описание функций кнопок панели инструментов.

После запуска программы импортируем в нее чертеж, сохраненный в формате IGES. Для этого выполним команды в меню «File»: Import – IGES (см. рис. В.10.5). Далее в появившемся окне (см. рисунок В.10.6, а) выбираем «Обзор...» (Browse...) и указываем файл (см. рисунок В.10.6, б) «truba_2d.igs». Вместо привычной кнопки завершения действия «ОК» здесь можно встретить «Ассерт».

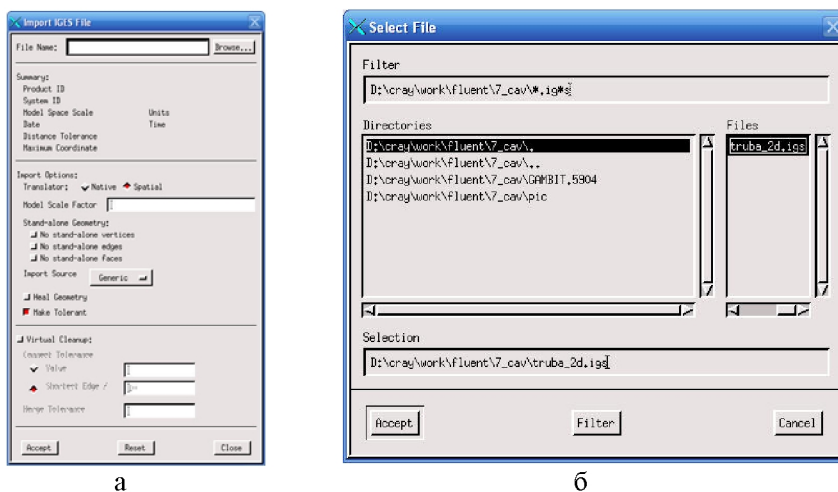
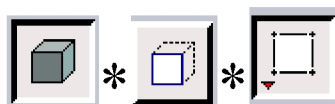


Рис. В.10.6. Окно обзора файла (а); окно выбора файла (б)

Редактирование чертежа

Через панель инструментов наложим на исходный контур поверхность:



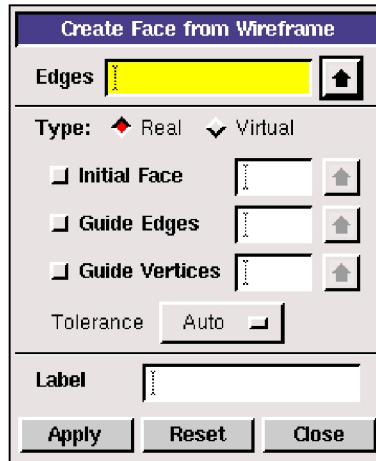
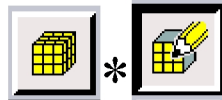


Рис. В.10.7. Создание поверхности

Удерживая нажатой клавишу SHIFT, выделите левой кнопкой четыре линии, образующие левый прямоугольник контура. Нажмите «Apply» в окне «Create Face from Wireframe». Линии образованной поверхности должны отобразиться голубым цветом. Повторите данную процедуру для остальных участков.

Построение сетки конечных элементов поверхности

С помощью панели инструментов разбиваем поверхности. Для прямоугольных поверхностей 1 и 4 воспользуемся командами:



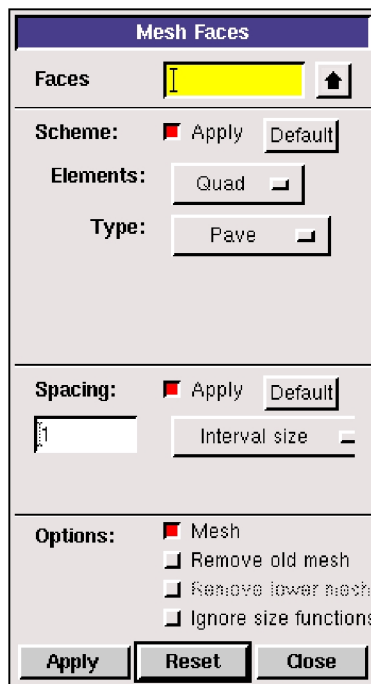


Рис. 8. Создание сетки КЭ

Выделив нужные поверхности, введем в поле «Spacing» размер конечного элемента (КЭ) «Interval size» 1 мм. После нажатия кнопки «Apply» указанные поверхности должны разбиться на элементы (см. рис. В.10.9).

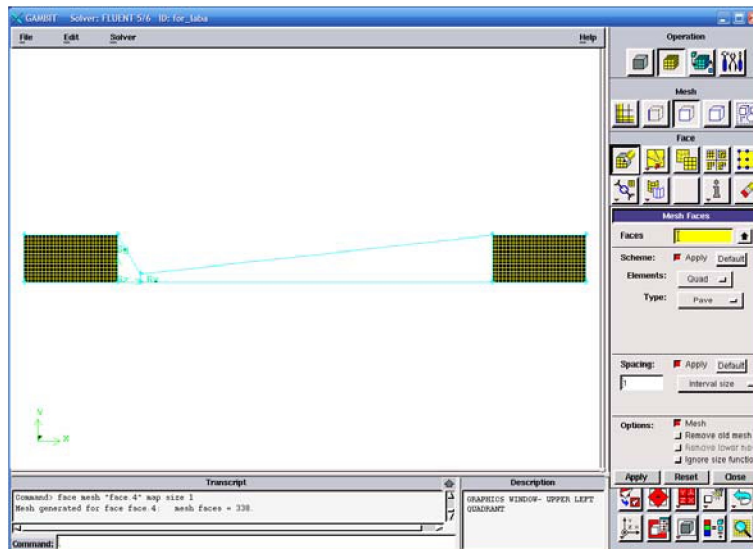
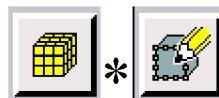


Рис. В.10.9. Вид разбитых поверхностей 1 и 4

Для разбиения более сложных поверхностей 2 и 3 сначала произведем разбивку отрезка прямой в критическом сечении на такое же количество элементов, какое укладывается по высоте поверхности 1. Так как радиус трубы в широком сечении равен 13 мм, а размер элемента для первой и четвертой поверхностей нами выбран 1 мм, то это количество соответствует 13.



Операция разбиения линии аналогична проведенной ранее процедуре для поверхности. Отличие лишь в том, что теперь нужно задать не размер элемента, а их количество, и в поле «Spacing» вводим «13», предварительно изменив значение кнопки «Interval size» на «Interval count». Для невертикальных линий, относящихся к поверхностям 2 и 3, необходимо учесть изменение размера КЭ по длине этих линий. Тенденция уменьшения или увеличения линейного размера элемента учитывается масштабным коэффициентом «Ratio». Для линий второй поверхности этот коэффициент можно

взять 0,872, а для третьей – 1,01 (см. рис. В.10.10). При этом может потребоваться изменение размера элемента. В нашем случае примером 0,4 мм.

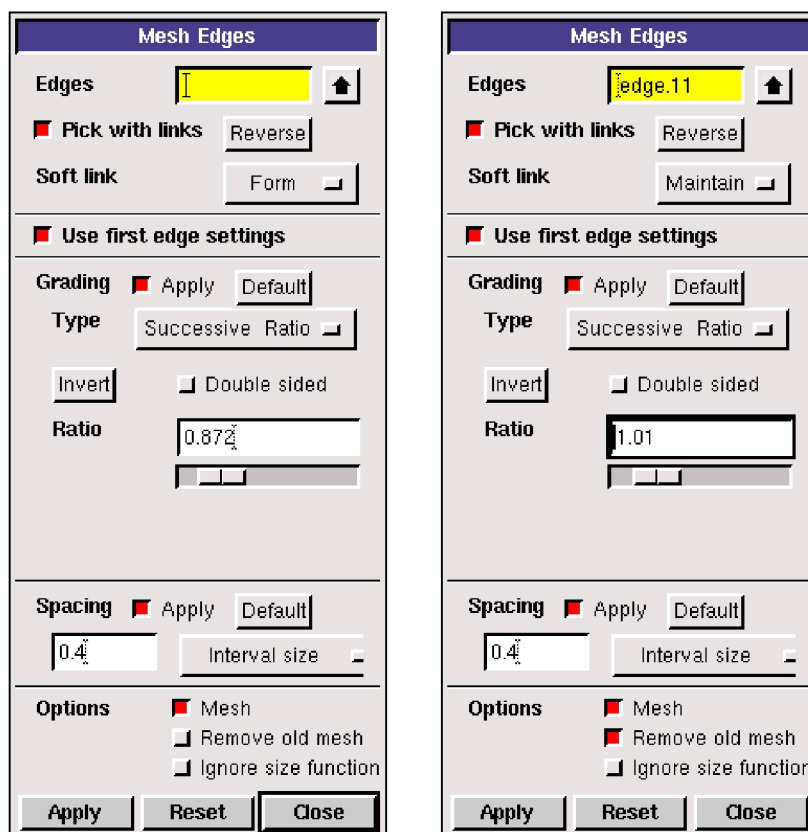


Рис. В.10.10. Параметры разбивки линий поверхностей 2 и 3

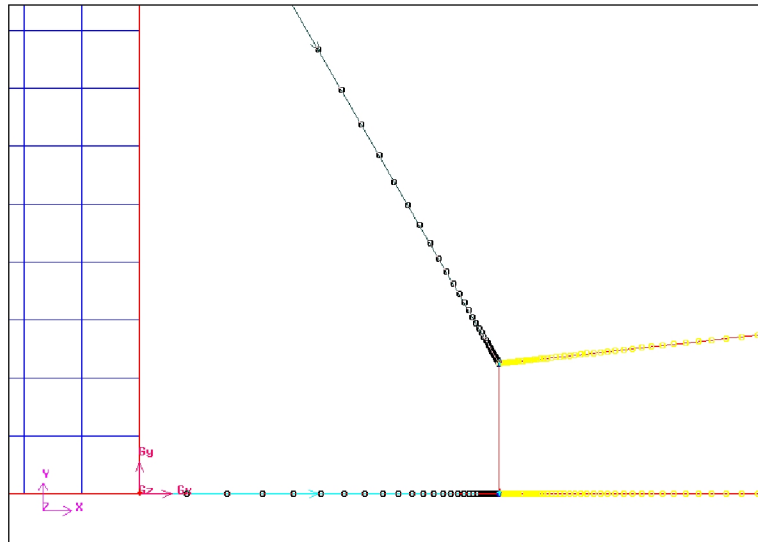


Рис. В.10.11. Вид подготовленных линий поверхностей 2 и 3

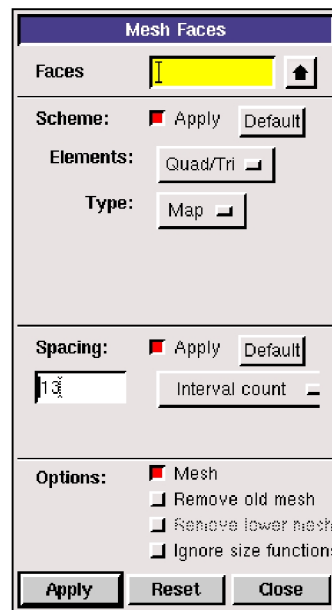


Рис. В.10.12. Параметры разбивки

Произведем последовательно разбивку второй, а затем третьей поверхности. Вторую поверхность необходимо заполнить не только четырехугольными элементами, но и треугольными. Поэтому в диалоговом окне вводим: количество элементов – «13», вид элемента – «4-угольный / 3-угольный», тип заполнения – упорядоченный «Map» (см. рис. В.10.12). Для третьей поверхности применим способ разбивки по самой короткой стороне «Shortest edge» – критическому сечению. Размер элемента вблизи такой стороны определится автоматически. Вид КЭ – 4-угольный, заполнение упорядоченное.

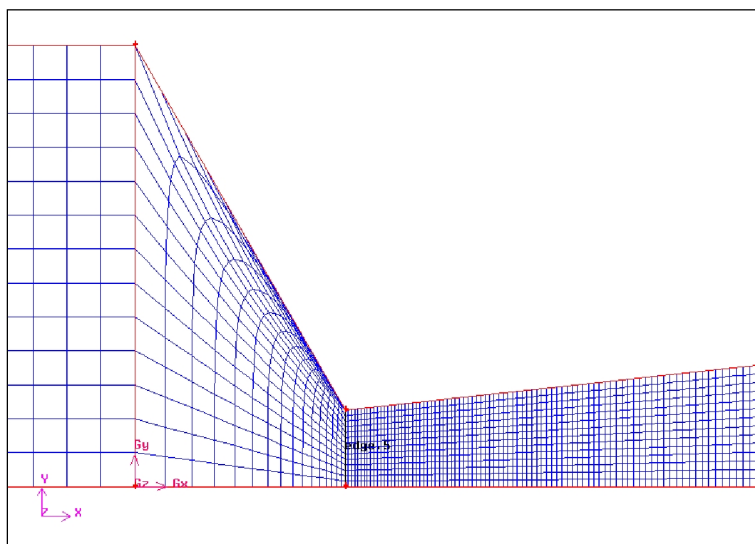


Рис. В.10.13. Сетка КЭ расчетной модели

Задание граничных условий (ГУ)

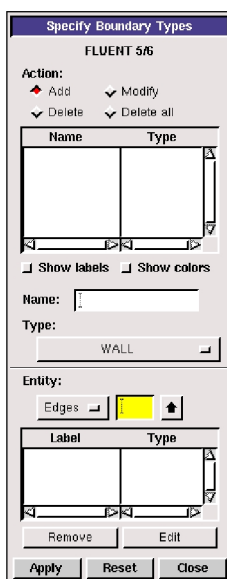


Рис. В.10.14. Задание ГУ

В данной задаче мы ограничимся четырьмя условиями: зададим стенку трубы (Wall), давление на входе и выходе (Pressure_inlet и Pressure_outlet) и ось симметрии (Axis). Данная процедура выполняется в разделе «Зоны» панели инструментов.



Итогом процедур должна стать конечно-элементная модель половины сечения трубки Вентури (см. рис. В.10.15).

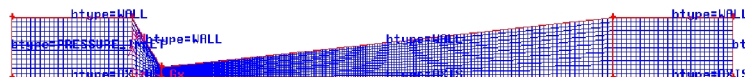


Рис. В.10.15. Сеточная модель с наложенными граничными условиями

Далее необходимо сохранить полученную модель для дальнейшей работы с ней в комплексе Fluent (тип файла *.msh). Воспользуемся главным меню программы «Export - Mesh» (рис. В.10.16).

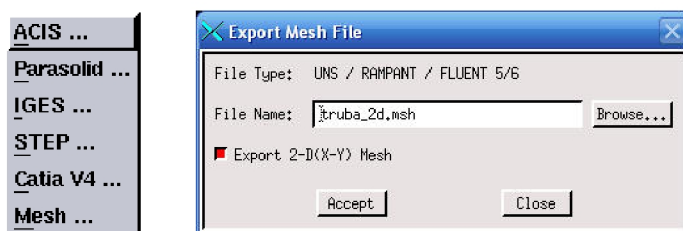


Рис. В.10.16. Сохранение сетки в формат MSH

Программа FLUENT

Эта глава исследует кавитационное течение воды через трубку Вентури. Используя способность моделирования многофазных течений FLUENT, можно предсказать кавитацию после разделения потока в узком сечении трубы.

В данном разделе проведем следующие шаги:

- установим численные значения известных параметров для течения;
- используем модель смеси жидкости и газа с эффектами кавитации;
- получить решение, используя отдельный решатель (segregated solver);
- проведем анализ полученных результатов.

Задача рассматривает кавитацию, вызываемую разделением течения из-за изменения диаметра трубы (трубка Вентури). Движение жидкости происходит за счёт перепада давления. Согласно замерам на гидравлическом стенде, явление кавитации наблюдается

при давлении на входе 187534 Па , на выходе – 111016 Па . Возьмем те же значения для виртуального эксперимента и сравним результаты, полученные в ходе опыта. Геометрия трубы показана на рис. В.10.1.

1. Запуск FLUENT и загрузка модели

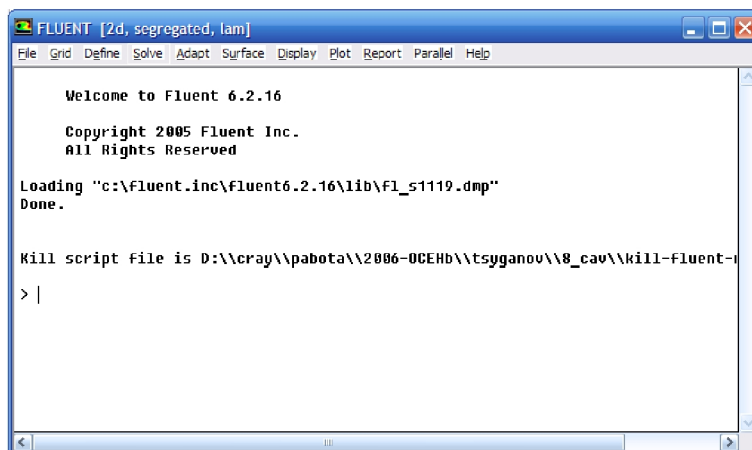


Рис. 17. Консоль программы FLUENT

1.1. Загрузите файл сетки (*.msh):

File - Read – Case...

Как только FLUENT прочитает сетку он отобразит результат в консоли окна.

1.2. Проверьте сетку:

Grid - Check

FLUENT обеспечит проверку сетки и выведет результаты в консоли окна. Особое внимание уделите отображаемому минимальному объёму. Убедитесь, что это положительное значение.

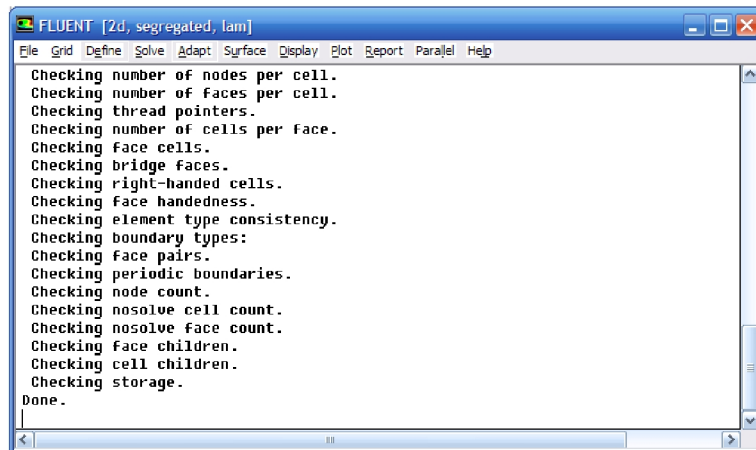


Рис. В.10.18. Проверка сетки

1.3. Проведите пересчет единиц измерения, которые использовались при построении сетки:

Grid - Scale

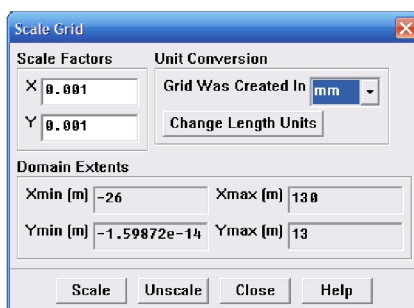


Рис. В.10.19. Выбор единиц измерения в расчете

Так как модель создавалась с миллиметровой сеткой, то выберите «мм» и подтвердите выбор нажатием кнопки «Scale».

1.4. Отобразите сетку:

Display - Grid...

Отобразите сетку, используя настройки по умолчанию (см. рис. В.10.20).

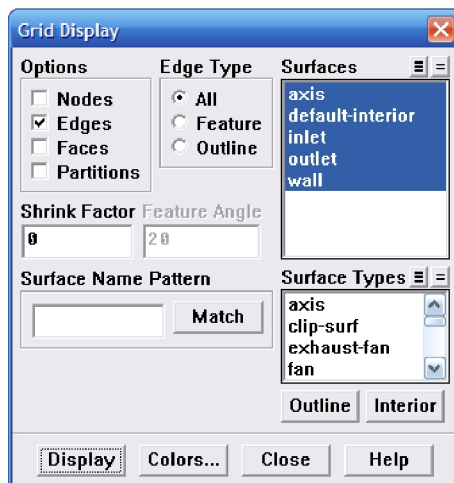


Рис. В.10.20. Параметры вывода модели на экран

Будет моделироваться только половина геометрии с осевой границей, при этом программа считает объемную модель, проворачивая сечение на 360 градусов вокруг оси.

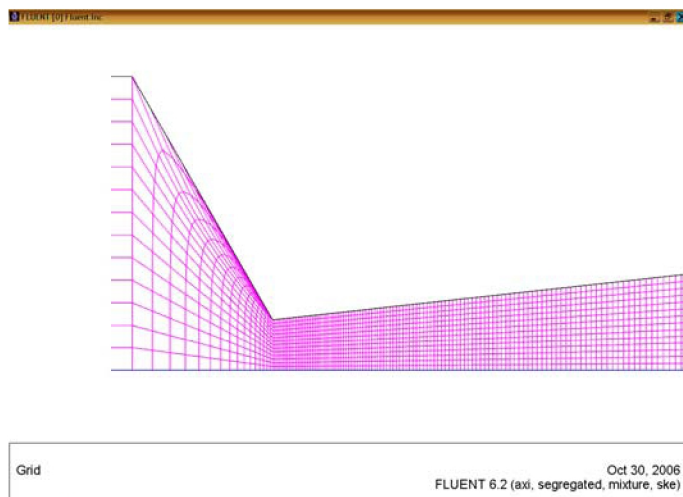


Рис. В.10.21. Отображение сетки

2. Подготовка модели

2.1. Установка параметров решателя:

Define - Models - Solver...

Для многофазных расчётов должен использоваться раздельный решатель (segregated solver).

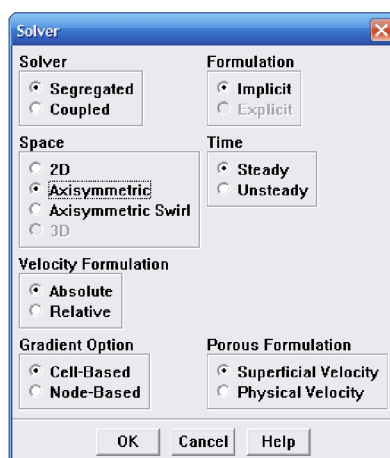


Рис. В.10.22. Свойства решателя

Под надписью Space (Пространство) выберите Axisymmetric (Осесимметричный). Остальные параметры оставьте по умолчанию.

Замечание: для точного моделирования образования пузырьков пара их роста, распада и обратного перехода в воду необходимо применять нестационарный расчёт. При таком допущении может наблюдаться картина кавитации, несколько отличающаяся от реальной.

2.2. Включите многофазную модель с эффектами кавитации:

Define - Models – Multiphase...

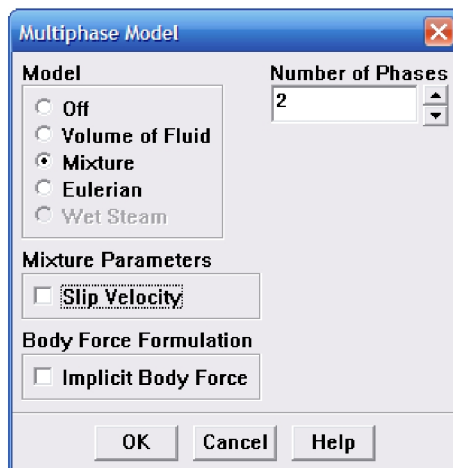


Рис. В.10.23. Задание многофазности

Выберите Mixture (Смесь) в качестве Model. Панель расширится. Под надписью Mixture Parameters (Параметры смеси) отключите опцию Slip Velocity (Скорость скольжения).

Поскольку нет значительного различия между скоростями фаз, нет необходимости расчёта уравнения скорости скольжения (slip velocity equation).

2.3. При необходимости включите в расчет уравнение энергии (для учета температуры):

Define - Models – Energy...

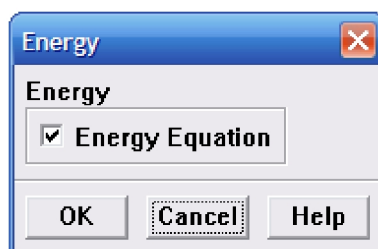


Рис. В.10.24. Уравнение энергии

2.4. Включите стандартную k-ε модель турбулентности со стандартными стеночными функциями (standard wall functions):

Define - Models – Viscous...

Выберите модель k-ε вместо ламинарной (см. рис. В.10.25). Оставьте выбранное по умолчанию «Standard» под надписью «k-epsilon Model» и «Standard Wall Functions» (Стандартные стеночные функции) под надписью «Near-Wall Treatment» (Пристеночный анализ).

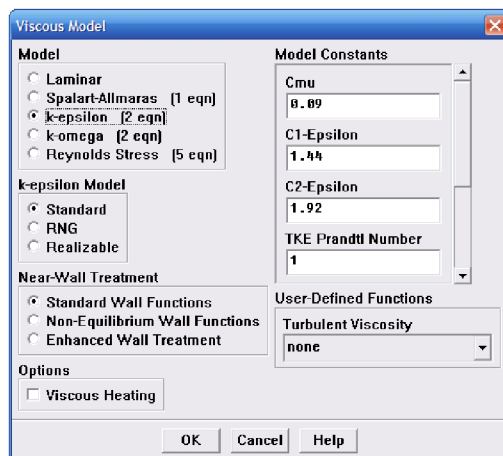


Рис. В.10.25. Выбор k-ε в качестве модели турбулентности

2.5. Материалы

Выберите из базы данных FLUENT материалы для двух фаз: воды и водяного пара:

Define – Materials...

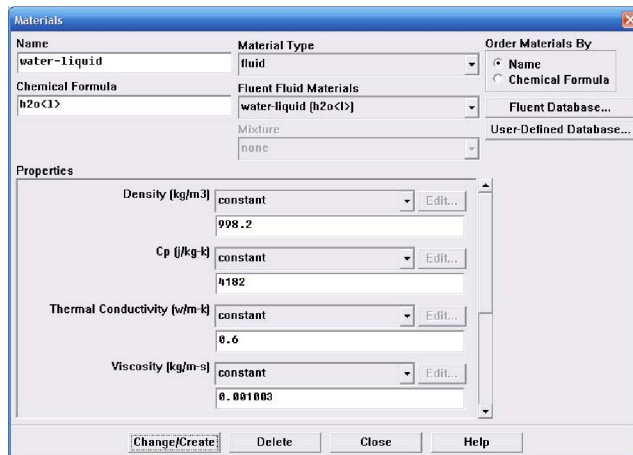


Рис. В.10.26. Свойства материалов

Войдите в базу данных, нажав кнопку «Fluent database...».

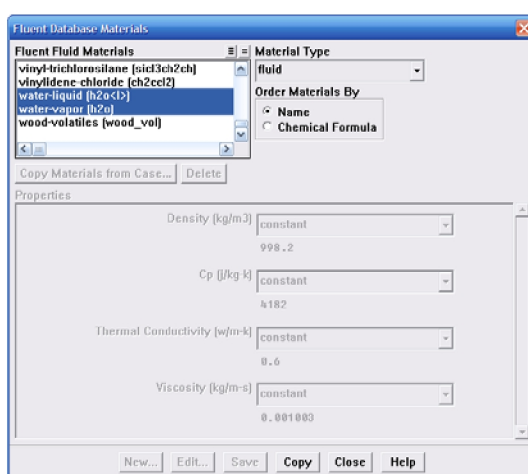


Рис. В.10.27. База материалов FLUENT

В списке «Fluid Materials» (Жидкие материалы) выберите «water-liquid (h2o<1>)» (вода-жидкость) и «water-vapor (h2o)» (вода-пар). Нажмите «Copy» для копирования информации по выбранным материалам в модель. Закройте панель «Database Materials».

Значение плотности «Density» и вязкости «Viscosity» для пара и воды брать из программы.

Нажмите «Change/Create» (Изменить/Создать).

2.6. Фазы

Определение фаз воды и водяного пара:

Define - Phases...

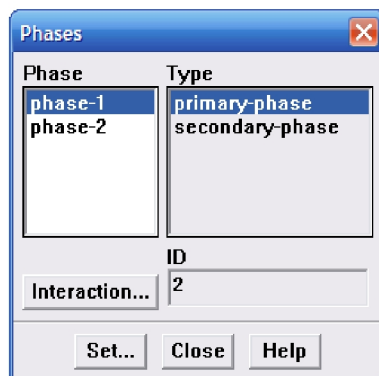


Рис. В.10.28. Параметры фаз потока

Для двухфазного течения выбираем первую и вторую фазы и вещества, которые им соответствуют. Определение параметров производится через кнопку «Set...» Установите воду в качестве первой фазы. Выберите phase-1 и нажмите кнопку «Set...» (Установить...). В панели Primary Phase (Первая фаза) введите слово в качестве названия первой фазы («Name»). Выберите воду из списка «Phase Material» (Материал фазы). Установите водяной пар в качестве второй фазы (рис. В.10.30, В.10.31). Для кавитационного режима установим флажок на вкладке «Mass» меню, вызываемого через кнопку «Interaction» (рис. В.10.29).

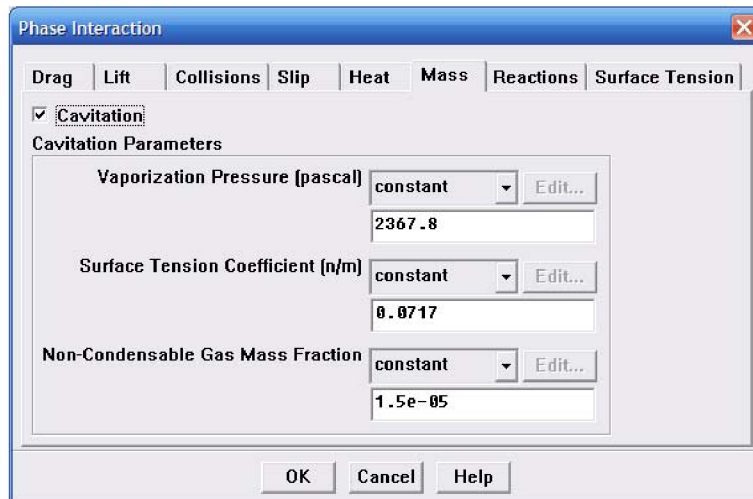


Рис. В.10.29. Установка параметров кавитационного режима течения

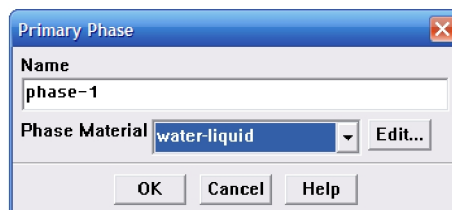


Рис. В.10.30. Установка первой фазы

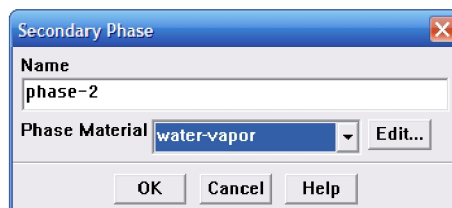


Рис. В.10.31. Установка второй фазы

Объёмная доля водяного пара в смеси «Volume Fraction» на начало расчёта должна быть равна нулю.

Параметры, характеризующие кавитацию:

«Vaporization Pressure» (Давление испарения) – в значительной степени зависит от температуры, значение по умолчанию - давление испарения воды при температуре 300 К; параметр газа «Non Condensable Gas» (Неконденсируемый газ), массовое содержание неконденсируемого газа в рабочей жидкости. $1,5 \cdot 10^{-5}$ (15 ppm - частей на миллион) - это типичное содержание растворенного воздуха в воде; «Liquid Surface Tension» - поверхностное натяжение жидкости. Поверхностное натяжение жидкости также в значительной степени зависит от температуры.

2.7. Рабочие условия

Установите точку отсчета рабочего давления - 0 Па. По умолчанию в поле введено нормальное атмосферное давление 101325Па. Чтобы в результатах расчета избежать появления отрицательных значений давления, сдвинем точку отсчета на 0:

Define - Operating Conditions...

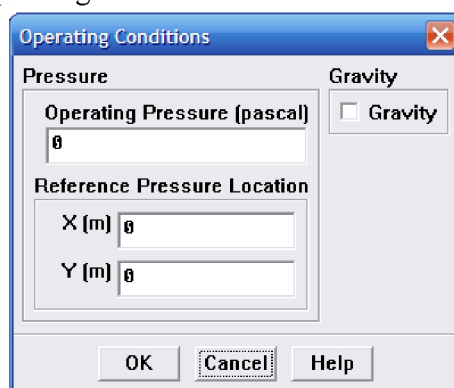


Рис. В.10.32. Точка отсчета давления и влияние гравитации на процесс течения

2.8. Граничные условия

2.8.1. Установите параметры для входа (inlet).

Для многофазной модели смеси необходимо устанавливать условия для смеси (т.е. условия, применимые для всех фаз) и усло-

вия, специфичные для первой и второй фазы. В условиях кавитации нужны только условия для смеси и второй фазы.

Установите параметры для смеси:

Define - Boundary Conditions...

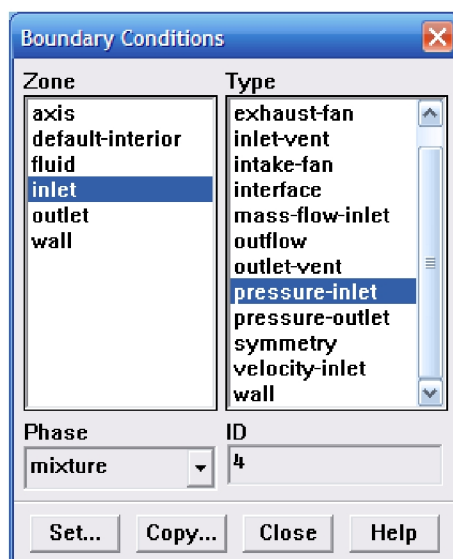


Рис. В.10.33. Список граничных условий

В панели «Boundary Conditions» (Граничные условия) для зоны «inlet» оставьте выбранное по умолчанию «mixture» (смесь) в списке Phase (Фазы) и нажмите «Set...». В новом окне введите: 187534 Па для Gauge Total Pressure (Полное давление на внешней грани первого слоя элементов) и несколько меньшее давление – 187531 Па – для Supersonic/Initial Gauge Pressure (Сверхзвуковое/Начальное избыточное давление на входе в трубку на внутренней грани первого слоя элементов). Перепад давлений инициирует начальную скорость течения жидкости в трубке 0,8 м/с (соответствует расчетам).

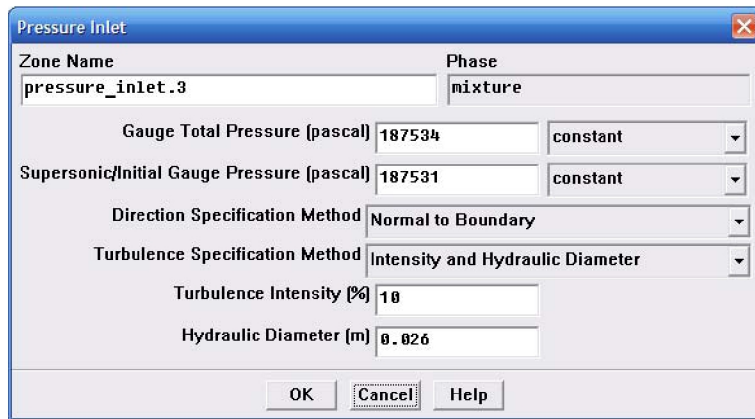


Рис. В.10.34. Установка значений давления на входе и модели турбулентности

В списке «Direction Specification Method» (Метод задания направления) оставьте выбранное по умолчанию «Normal to Boundary» (Нормальное к границе). В списке «Turbulence Specification Method» (Метод задания турбулентности) либо оставьте выбранное по умолчанию «K and Epsilon» и тогда под надписью «Turb. Kinetic Energy» (Кинетическая энергия турбулентности) введите 0,02, либо при известных диаметрах входа и выхода выберите «Intensity and Hydraulic Diameter». В этом случае нужно задать интенсивность турбулентности потока, который по умолчанию равен 10% и гидравлический диаметр 0,026 м – сечение входа и выхода.

2.8.2. Установите граничные условия для давления на выходе (outlet).

Установка параметров для смеси на выходе из трубы производится аналогично зоне входа (рис. В.10.33, В.10.35).

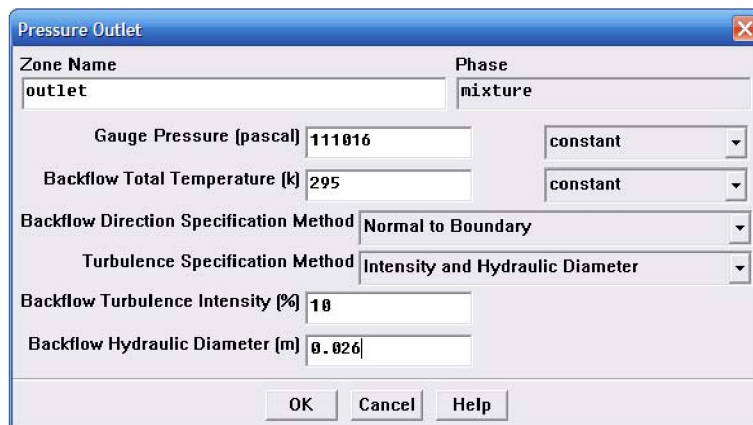


Рис. В.10.35. Установка значения давления на выходе и модели турбулентности

Под надписью «Gauge Pressure» (Избыточное давление) введите 111016 Па. Остальные параметры аналогично зоне «inlet».

Проверим объёмное содержание второй фазы.

В панели «Boundary Conditions» (Граничные условия) выберите vapor (пар) из списка «Phase» (Фазы) и нажмите «Set...». Оставьте по умолчанию «Volume Fraction» (Объёмное содержание) равным 0.

3. Решение

3.1. Установите параметры решения:

Solve - Controls - Solution...

Установите следующие значения подрелаксационных факторов «Under-Relaxation Factor»:

для «Pressure» (Давление) – 0,4;

для «Momentum» (Импульс) – 0,4;

для «Turbulence Kinetic Energy» (Кинетическая энергия турбулентности), «Turbulence Dissipation Rate» (Степень турбулентной диссипации), и «Turbulent Viscosity» (Турбулентная вязкость) – 0,5.

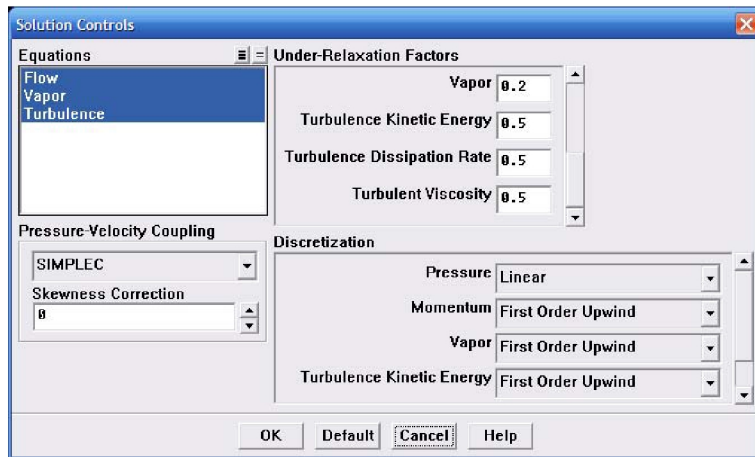


Рис. В.10.36. Специальные параметры решения

Новая модель кавитации FLUENT имеет ряд преимуществ перед предыдущей. Она более сложна, но даёт более точные результаты. В более сложных случаях с высокими перепадами давления или значительным отношением плотностей жидкости и пара возможно понадобится снизить подрелаксационные факторы до 0,1-0,2. Для «Vaporization Mass» (Масса испарения) советуют использовать подрелаксационный фактор равный 0,1; хотя для этой переменной можно применять значения от 0,001 до 1 при необходимости.

Под надписью «Discretization» (Дискретизация) выберите «Linear» (Линейная) в списке «Pressure» (Давление) и «SIMPLEC» в списке «Pressure-Velocity Coupling» (Расчёт Давление-Скорость).

3.2. Отображение невязки при решении: Solve - Monitors - Residual...

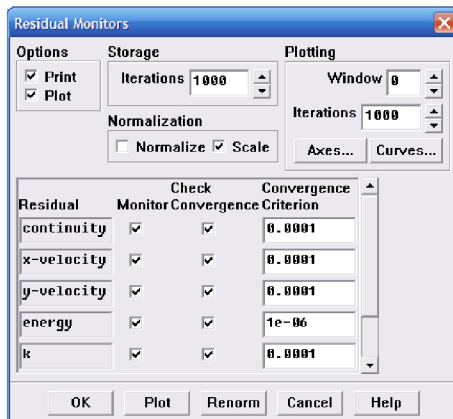


Рис. В.10.37. Параметры сходимости решения

Измените критерий сходимости для «continuity» (неразрывность потока) на 10^{-7} для повышения точности. Остальные критерии сходимости (кроме «vf-varor») примите равными 10^{-5} . Отметьте флажком «Plot» (Отображать) под надписью Options (Опции) и нажмите ОК.

3.3. Определение решения от давления на входе: Solve - Initialize - Initialize...

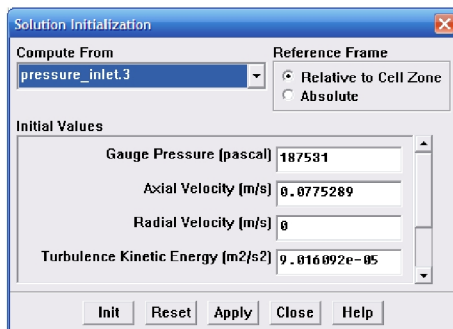


Рис. В.10.38. Инициализация начального решения

Выберите «inlet» в списке «Compute From» (Решать от).

В разделе «Reference Frame» (Система отчёта) выберите «Absolute (Абсолютная)».

Нажмите «Init» для определения решения.

3.4. Сохраните файл настроек (*.cas):

File - Write - Case...

3.5. Начните расчёт требуя 2000 итераций:

Solve - Iterate...

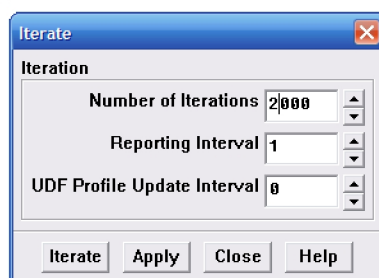


Рис. В.10.40. Задание количества итераций решения

Для начала расчета нажмите кнопку «Iterate». С помощью этого окна процесс решения можно прервать или продолжить с определенного шага.

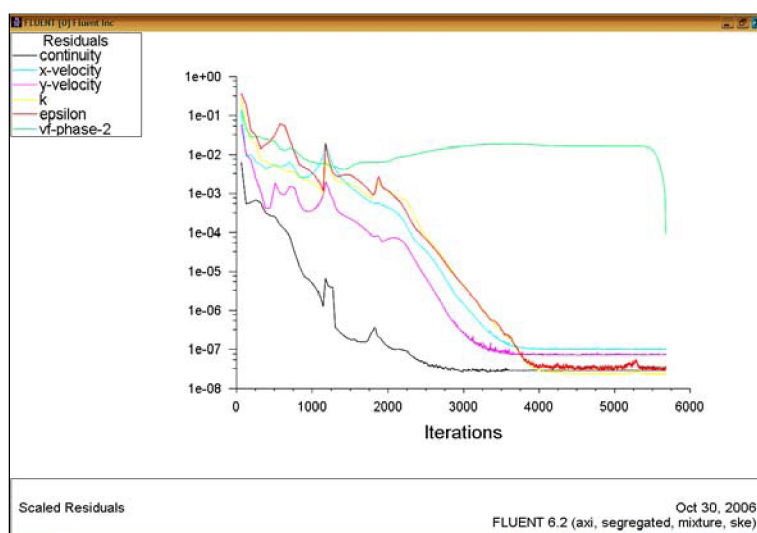


Рис. В.10.41. Процесс решения задачи

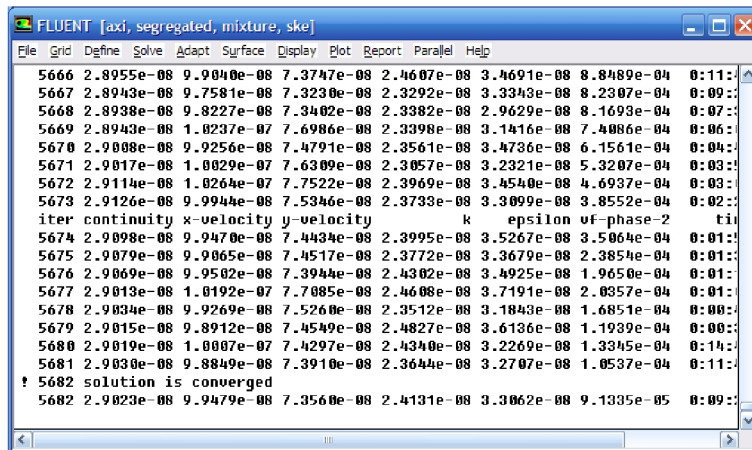


Рис. В.10.42. Отображение сходимости решения в консоли

3.6. Сохраните решение в файл данных (*.dat):

File - Write - Data...

4. Последующая обработка и вывод результатов на экран

4.1. Отразим изображение относительно оси:

Display - Views...

Определим ось симметрии для отображаемого объекта: выберем «axis».

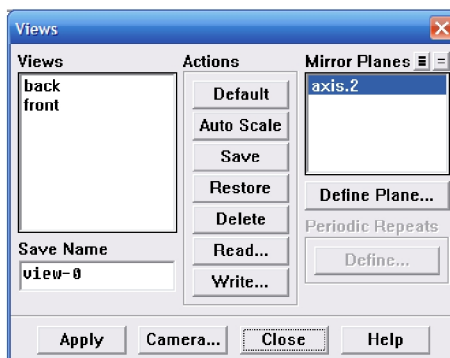


Рис. В.10.43. Окно управления видами модели

4.2. Отобразим результаты в виде полей:

Display - Contours...

Выберите «Velocity...» (Скорость...) и «Velocity Magnitude» (Значение скорости) в раскрывающихся списках «Contours Of» (Распределение).

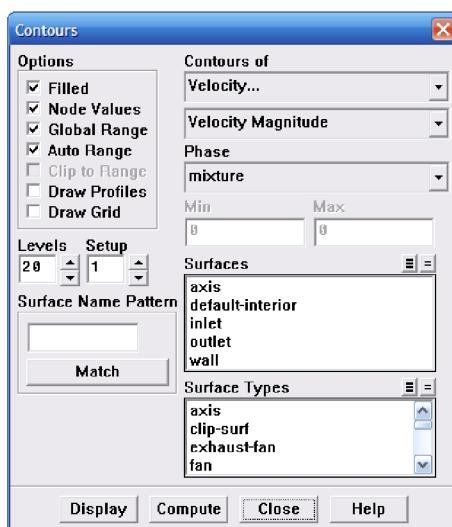


Рис. В.10.44. Окно управления результатами

В опциях отметьте «Filled» (Заливка). Уровень градиента цветов «Levels» установите 100.

При необходимости пересчет численных значений проводится нажатием кнопки «Compute» (Подсчитать).

Нажмите Display (Отображение). Распределение скоростей показывается цветом. Численные значения соответствуют определенным оттенкам шкалы слева. При нажатии правой кнопкой мыши на объект на шкале значений высвечивается диапазон, в котором находится значение параметра в указанном элементе модели (см. рис. В.10.45-В.10.52).

Аналогичным образом выведем на экран распределения других параметров потока: давление, плотность и энергетические характеристики.

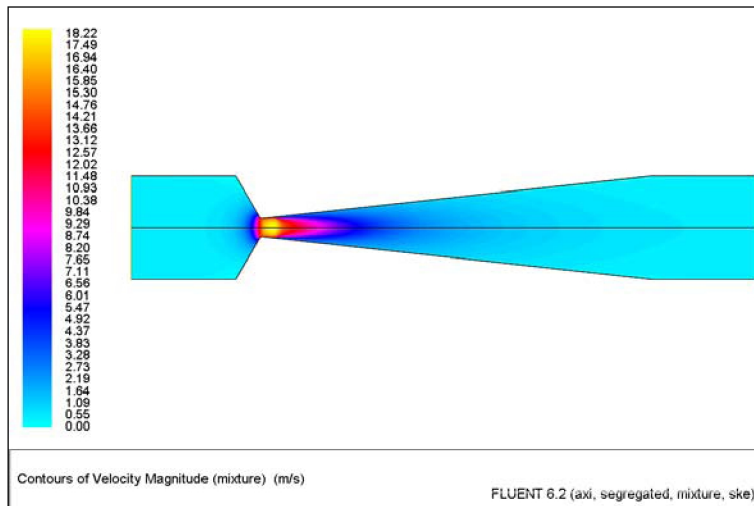


Рис. В.10.45. Поля распределения численного значения вектора скорости потока

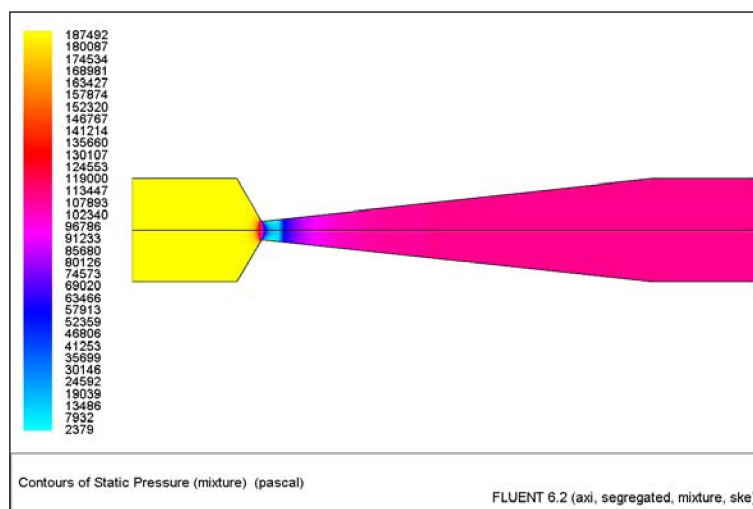


Рис. В.10.46. Поля распределения статического давления

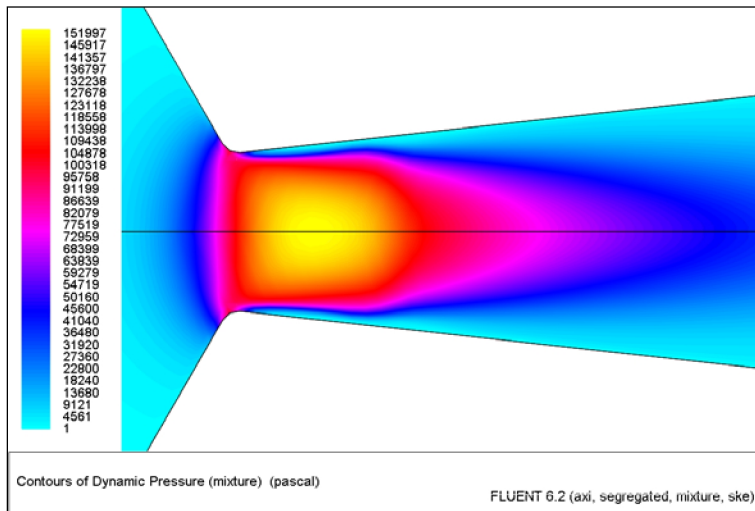


Рис. В.10.47. Поля распределения динамического давления

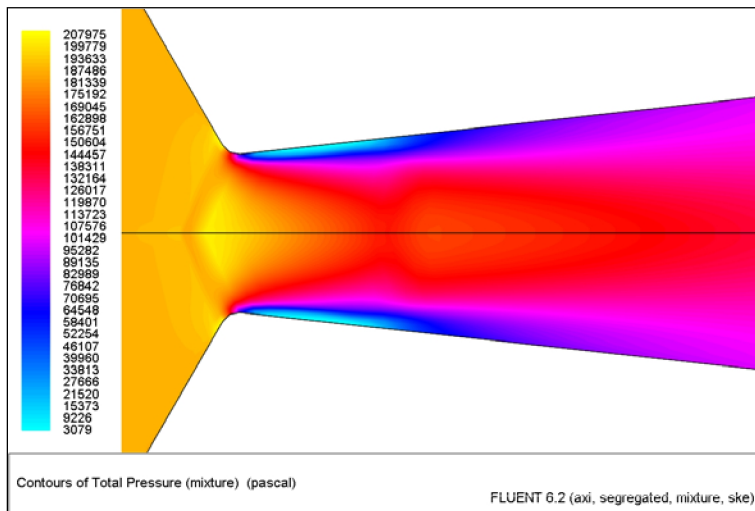


Рис. В.10.48. Поля распределения полного давления

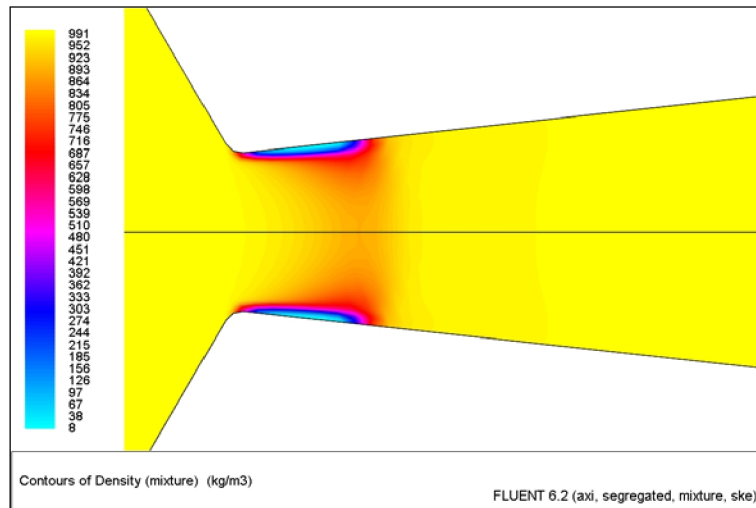


Рис. В.10.49. Поля распределения плотности смеси

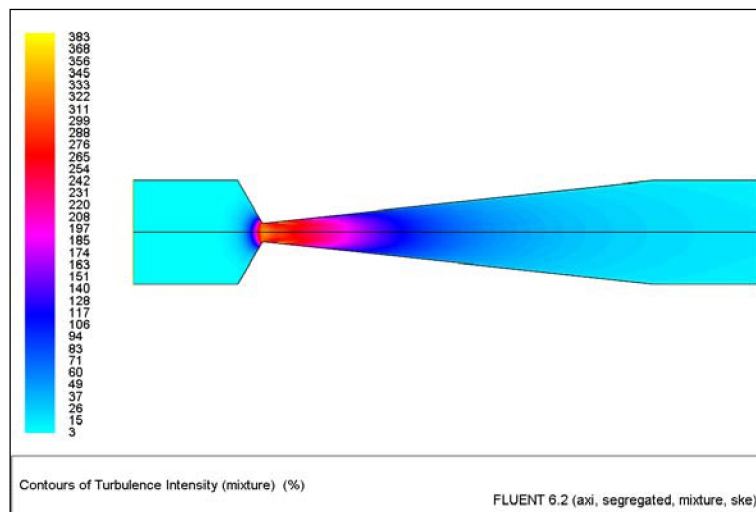


Рис. В.10.50. Поля распределения значений интенсивности турбулентности

По полям отклонения массового расхода воды от теоретического значения проверяется точность результатов расчета. Программа позволяет также показать распределение энергетических

параметров по каналу.

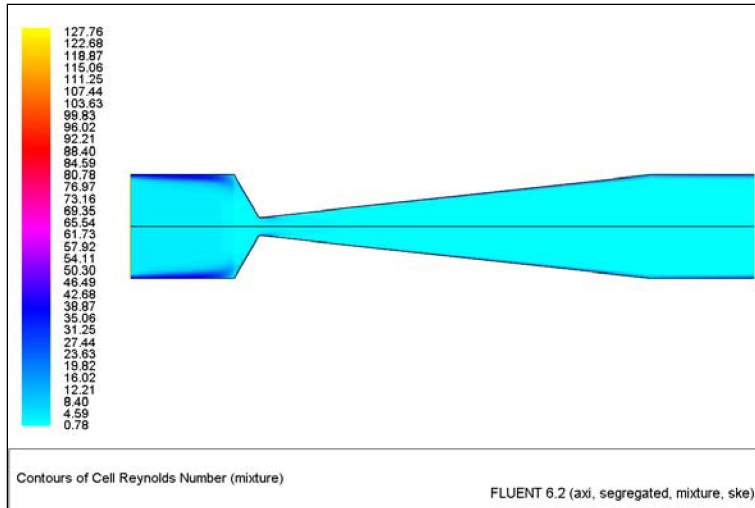


Рис. В.10.51. Поля распределения числа Рейнольдса

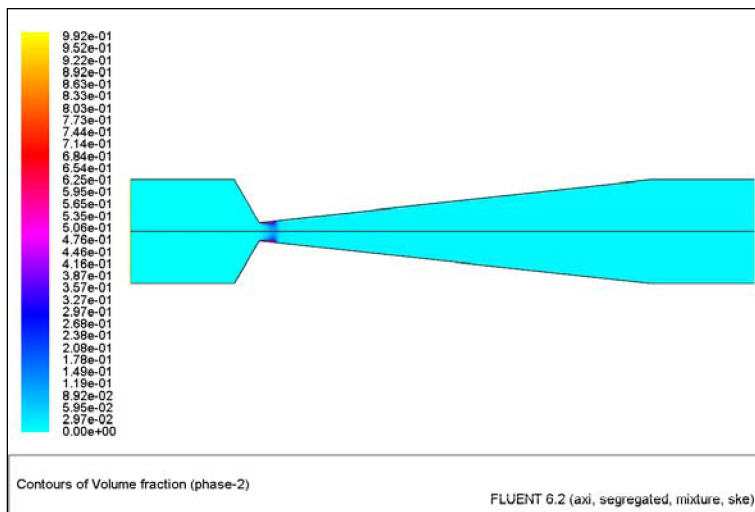


Рис. В.10.52. Поля распределения фаз по объему

4.3. Представление результатов в виде эюр

По сечениям 1-6 (см. рис. В.10.53) построены эюры параметров потока; по длине трубки – изменение этих параметров. Так как

расчет проводился по половине сечения трубки, то эпюры по сечениям отображают распределение параметра от стенки до оси (слева направо).

Сечения (начало координат на оси координат в начале сужения трубки):

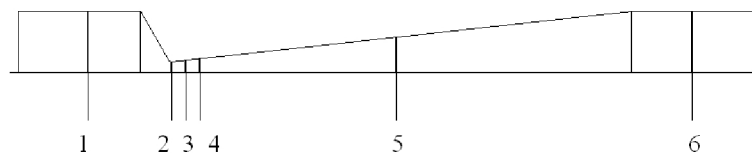


Рис. В.10.53. Расположение контрольных сечений

№ 1 – минус 0,01135 м ($D = 26$ мм);

№ 2 – 0,00642 м ($d = 4,5$ мм);

№ 3 – 0,00984 м;

№ 4 – 0,02162 м;

№ 5 – 0,05514 м;

№ 6 – 0,11604 м ($D = 26$ мм).

Изменение параметров вдоль оси трубки

На рис. В.10.54-В.10.61 изображены эпюры параметров потока по оси модели:

- давление,
- плотность,
- скорость,
- турбулентность,
- другие характеристики.

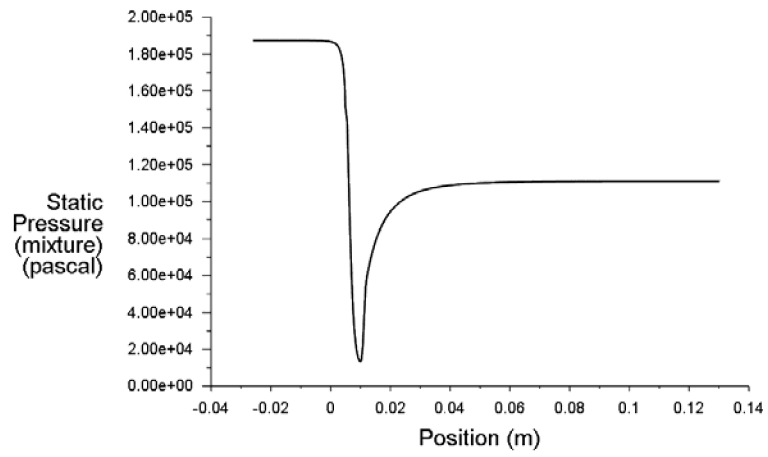


Рис. В.10.54. Статическое давление

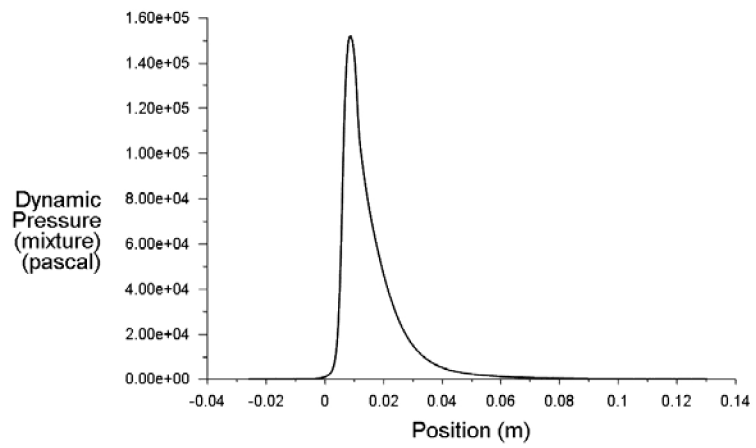


Рис. В.10.55. Динамическое давление

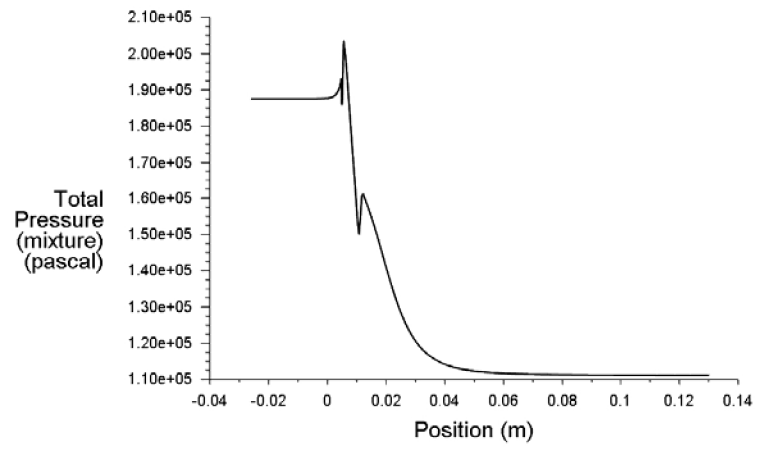


Рис. В.10.56. Полное давление

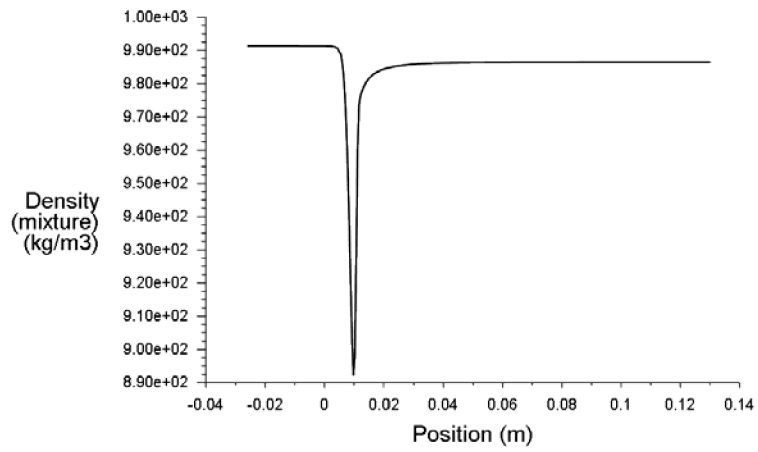


Рис. В.10.57. Плотность смеси

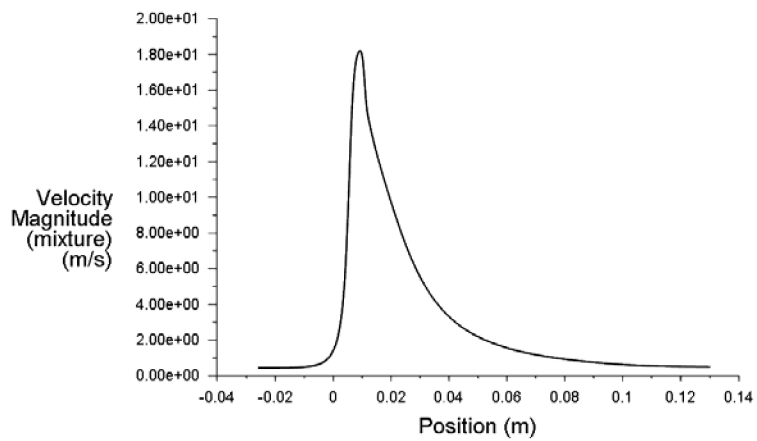


Рис. В.10.58. Скорость

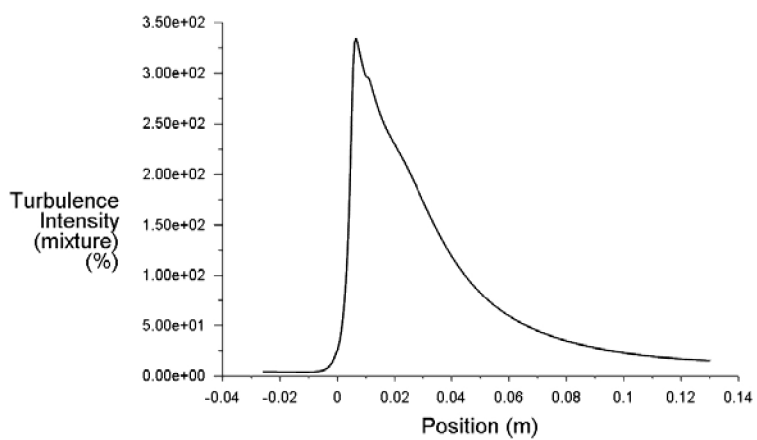


Рис. В.10.59. Интенсивность турбулентности

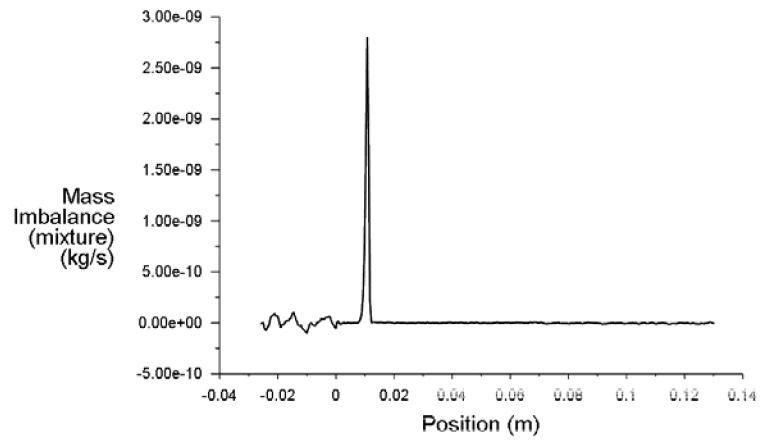


Рис. В.10.60. Отклонение массового расхода от теоретического

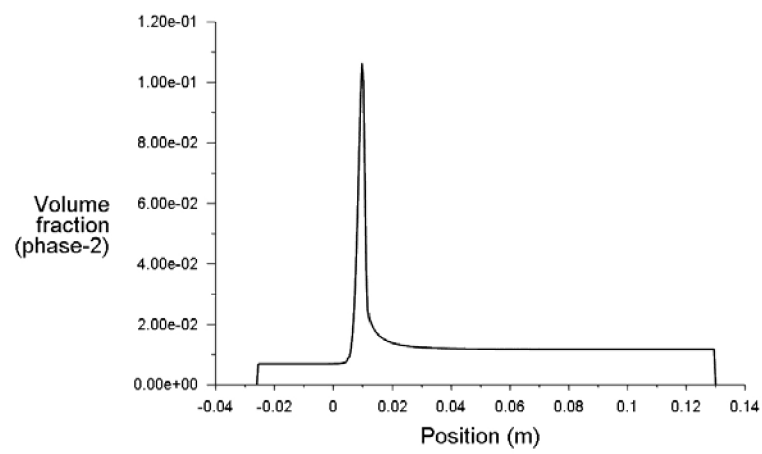


Рис. В.10.61. Доля пара по объему смеси

Эпюры параметров потока по сечениям

1. Статическое давление

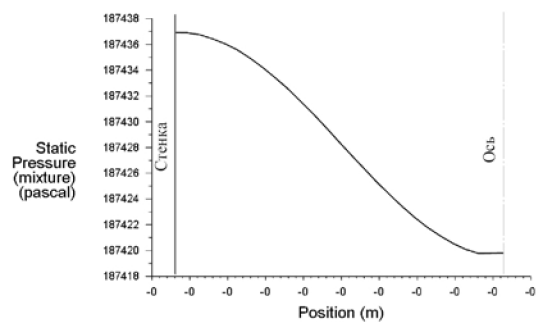


Рис. В.10.62. Сечение № 1

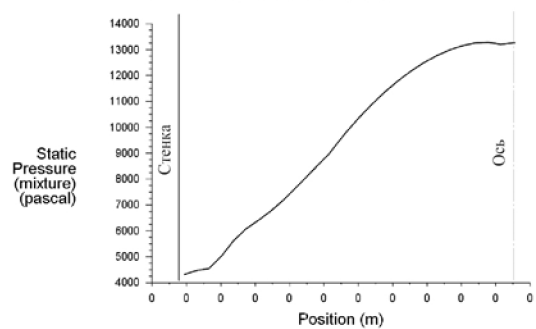


Рис. В.10.63. Сечение № 3

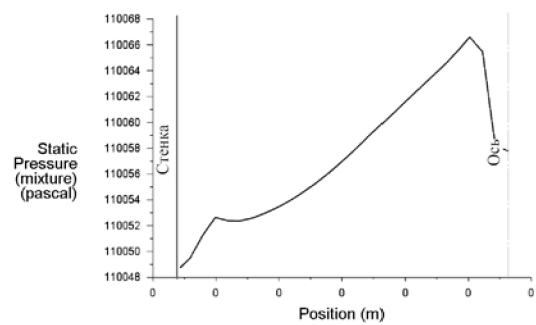


Рис. В.10.64. Сечение № 5

2. Динамическое давление

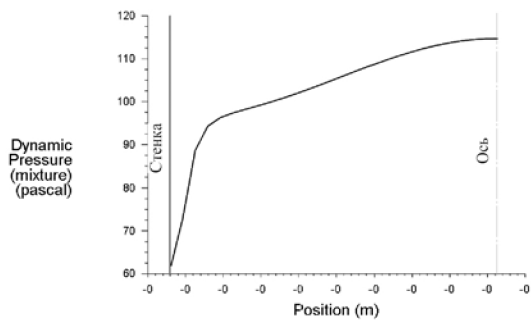


Рис. В.10.65. Сечение № 1

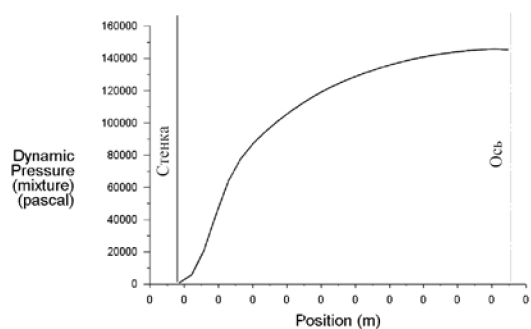


Рис. В.10.66. Сечение № 3

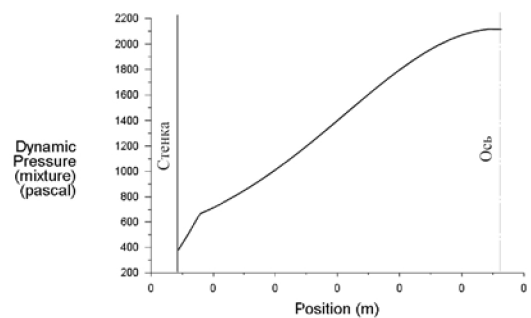


Рис. В.10.67. Сечение № 5

3. Полное давление

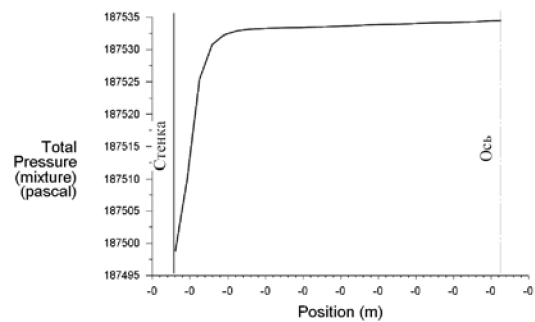


Рис. В.10.68. Сечение № 1

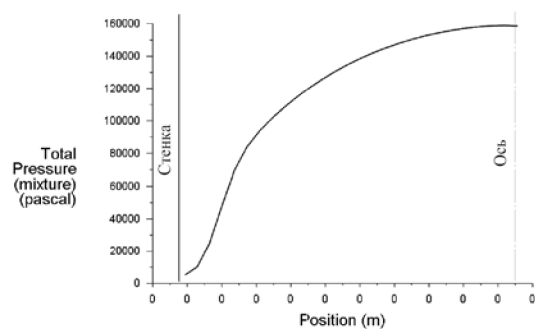


Рис. В.10.69. Сечение № 3

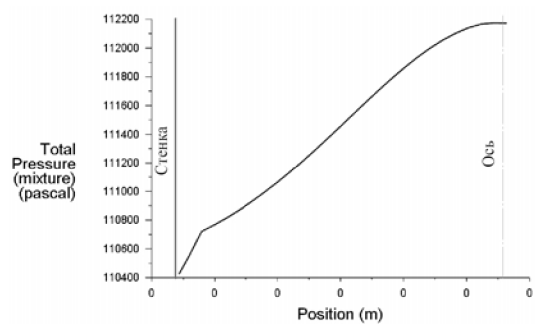


Рис. В.10.70. Сечение № 5

4. Скорость потока

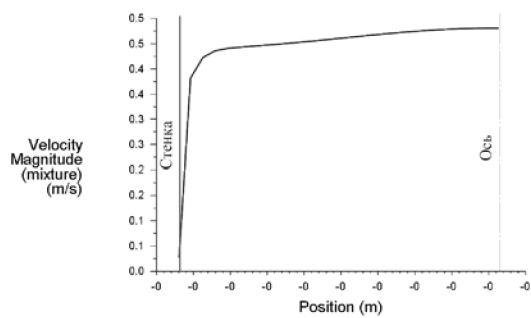


Рис. В.10.71. Сечение № 1

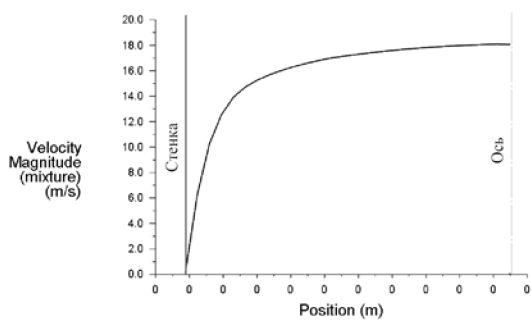


Рис. В.10.72. Сечение № 3

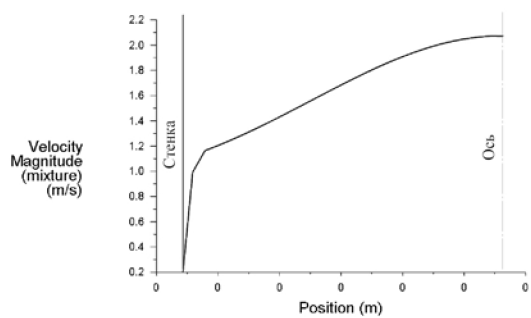


Рис. В.10.73. Сечение № 5

5. Число Рейнольдса

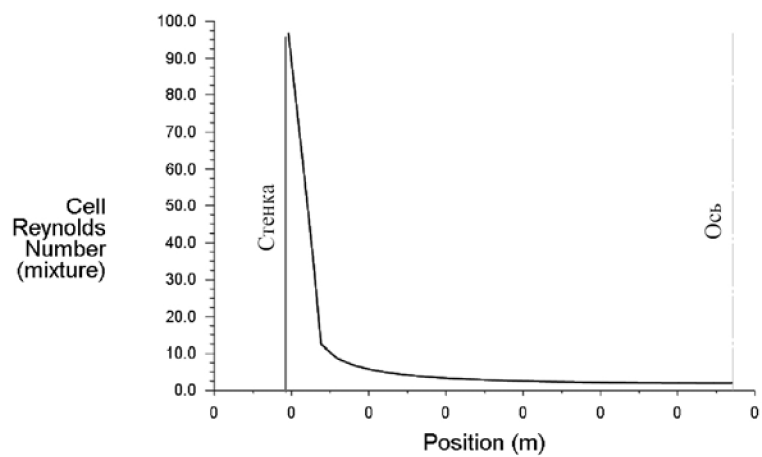


Рис. В.10.86. Сечение № 2

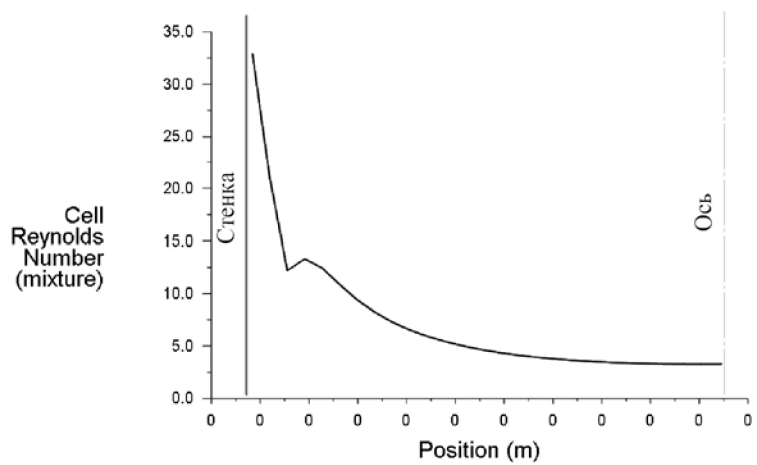


Рис. В.10.87. Сечение № 3

5. Анализ результатов

Отметим значительное снижение статического давления потока при сужении канала (рис. В.10.46). Низкое статическое давление - важный фактор приводящий к кавитации, хотя турбулентность тоже воздействует на кавитацию за счет колебаний давления и турбулентного переноса (turbulent diffusion).

В этом примере сетка достаточно груба. Однако в кавитационных течениях распределение давления - определяющий фактор, не очень чувствительный к размеру сетки.

Проведем сравнение численного расчета с экспериментальными данными. На рис. В.10.88 изображены расчетная модель (распределение фаз по объему) и фотография рабочего участка лабораторной установки, размещенные рядом в примерно одинаковом масштабе.

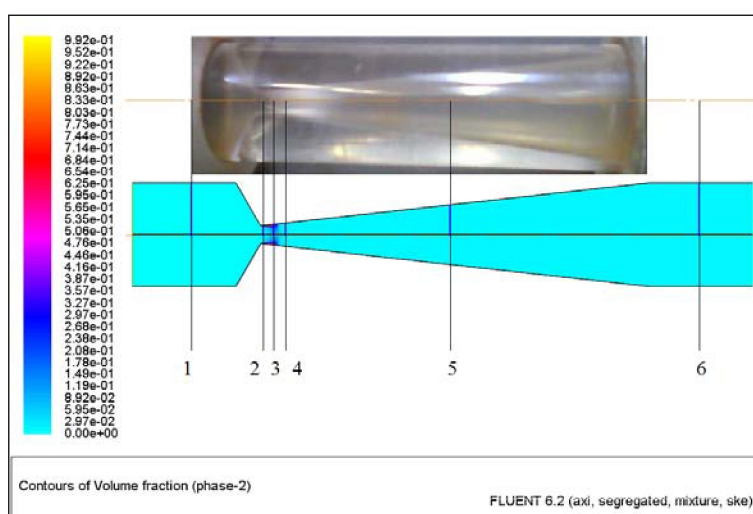


Рис. В.10.88. Визуальное сравнение полученных результатов с экспериментом

Как видно на фотографии, «факел» пузырьков газа в эксперименте наблюдается на более протяженном участке. Однако в целом

картина распределения пара по длине трубки совпадает с экспериментальной. Причиной же расхождения может являться неточный учет факторов, влияющих на характер протекания кавитации, начиная от шероховатости стенки, свойств воды и пара и заканчивая значениями подрелаксационных факторов в решении.

Отметим, что область наибольшего значения кинетической энергии турбулентности вблизи сужения отверстия (рис. В.10.50) совпадает с наибольшим объёмным содержанием водяного пара (рис. В.10.52). Это говорит о точном прогнозе расположения фазового перехода.

В ы в о д

Эта работа демонстрирует приемы установки и решения задачи кавитационного течения в канале переменного сечения, используя многофазную модель FLUENT с эффектами кавитации. Вы научились устанавливать граничные условия для внутреннего течения (internal flow). Для прогнозирования образования пузырьков пара в месте сужения канала было использовано стационарное решение. Для точного моделирования циклического процесса образования пузырьков, их роста и разрушения потребуется более сложный расчёт с использованием нестационарности процесса.

СБОРНИК ТИПОВЫХ ЗАДАЧ (ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ)

1. Гидростатика

1.1. Горизонтальный трубопровод диаметром $d = 400$ мм и длиной $l = 500$ мм наполнен стоячей водой. Температура воды $t = 5$ °С, давление $p = 3,92 \cdot 10^5$ Па, коэффициент температурного расширения $\beta_t = 0,00014$ м³/град и коэффициент объемного сжатия $\beta_p = 5 \cdot 10^{-10}$ м²/Н. Определить давление воды в трубе при нагревании ее до 15 °С. Деформацией стенок пренебречь.

1.2. Определить атмосферное давление $B = p_n$ на гладкой поверхности озера, если гидростатическое давление p на глубине $h = 50$ м равно $5,89 \cdot 10^5$ Па. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

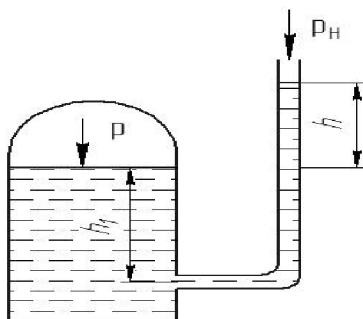


Рис. Г.1. К задаче 1.3

1.3. Найти выражение для определения высоты столба воды в пьезометре (рис. Г.1) над уровнем жидкости в закрытом сосуде. Давление на поверхности воды в сосуде p_1 .

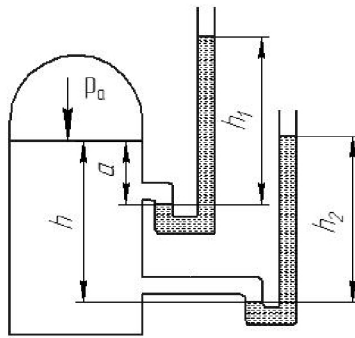


Рис. Г.2. К задаче 1.4

1.4. К закрытому резервуару с водой присоединены два ртутных пьезометра (рис. Г.2) Определить глубину погружения нижнего пьезометра h , если известны показания ртутных пьезометров h_1 и h_2 , глубина погружения верхнего пьезометра a .

Исходные данные	Ед. измерения	Значения для вариантов				
		1	2	3	4	5
h_1	см	30	35	40	45	50
h_2	см	35	40	50	60	70
a	см	50	60	70	65	80

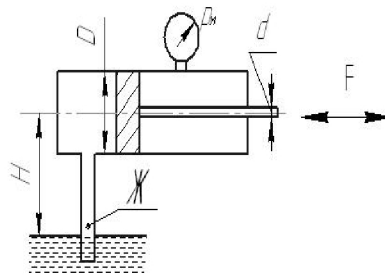


Рис. Г.3. К задаче 1.5

1.5. Определить величину и направление силы F , приложенной к штоку поршня для удержания его на месте. Справа от поршня находится воздух, слева от поршня и в резервуаре, куда опущен

открытый конец трубы, - жидкость Ж (рис. Г.3). Показание пружинного манометра – p_m .

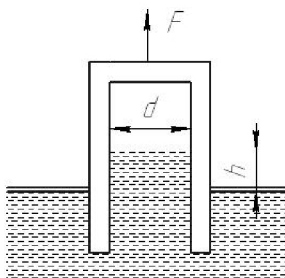


Рис. Г.4. К задаче 1.6

1.6. Определить высоту h , если поддерживающая сила $F=10\text{ Н}$. Вес сосуда $G=2\text{ Н}$, его диаметр $d=60\text{ мм}$ (рис. Г.4). Толщиной стенки сосуда пренебречь. Жидкость – вода.

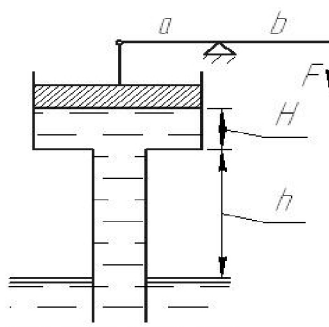


Рис. Г.5. К задаче 1.7

1.7. Определить силу F , необходимую для удержания в равновесии поршня, если труба под поршнем заполнена водой, а размеры трубы: $D=100\text{ мм}$, $H=0,5\text{ м}$, $h=4\text{ м}$. Длины рычага: $a=0,2\text{ м}$, $b=1,0\text{ м}$ (рис. Г.5). Собственным весом поршня пренебречь.

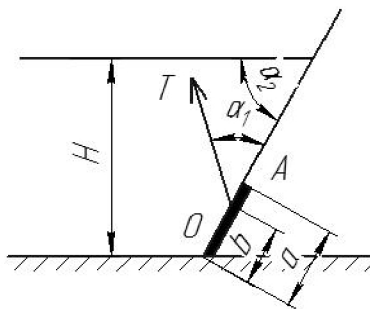


Рис. Г.6. К задаче 1.8

1.8. Квадратное отверстие со стенкой a в наклонной стенке резервуара с водой закрыто щитом (рис. Г.6). Определить натяжение каната T при следующих данных:

Исходные данные	Ед. измерения	Значения для вариантов				
		1	2	3	4	5
a	$м$	1,6	0,8	1,2	0,9	1,2
b	$м$	0,8	0,6	0,8	0,6	0,8
H	$м$	2,2	2,1	2,6	2,4	2,3
$\alpha_1 = \alpha_2$	$...^\circ$	60	45	30	60	45

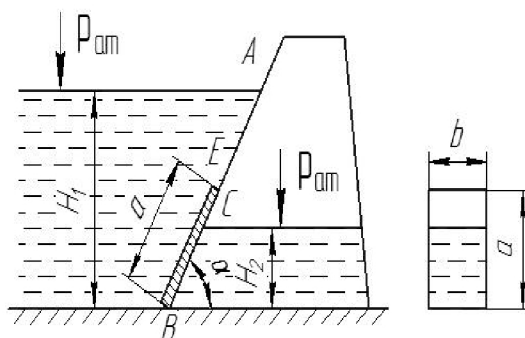


Рис. Г.7. К задаче 1.9

1.9. Определить равнодействующую силу избыточного давления воды на плоский затвор, перекрывающий отверстие трубы, 308

имеющей прямоугольное поперечное сечение. Найти координату точки приложения Y_D . Построить эпюру по указанному сечению.

Исходные данные	Ед. измерения	Значения для вариантов				
		1	2	3	4	5
H_1	м	5,8	5,6	5,4	5,5	6,5
H_2	м	1,4	1,2	1,6	2,4	2,4
α	...°	90	45	60	90	45
a	м	1,5	1,5	1,5	1,7	1,7
b	м	1,2	1,4	1,6	1,2	1,2
эпора		АВ	СД	АВ	СД	АВ

2. Гидродинамика

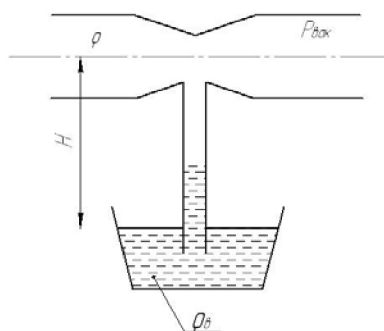
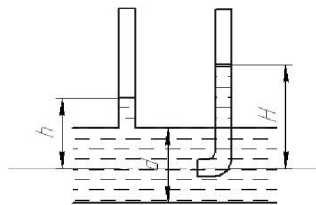


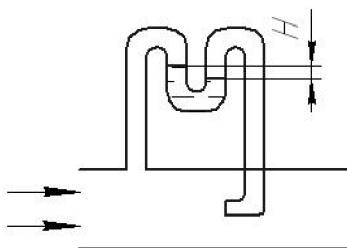
Рис. Г.6. К задаче 1.8

2.1. По трубе переменного сечения движется жидкость плотностью ρ . Для измерения разрежения $p_{\text{вак}}$ в узкой части трубы применен вакуумметр, заполненный жидкостью плотностью $\rho_{\text{в}}$. Чашка вакуумметра расположена ниже оси трубы на величину H . Уровень жидкости в трубке вакуумметра поднялся на высоту $h_{\text{в}}$.

Известно, что $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{\text{в}} = 1500 \text{ кг/м}^3$, $h_{\text{в}} = 2 \text{ м}$. Определить величину $p_{\text{вак}}$, если показание вакуумметра $h_{\text{в}}=250 \text{ мм}$ (рис. Г.8)

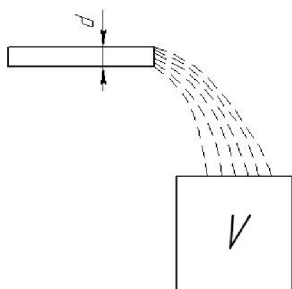


2.2. По длинной трубе диаметром $d = 50$ мм протекает жидкость $\nu = 2$ Ст, $\rho = 900$ кг/м³. Определить расход жидкости в трубе, если $h = 60$ см и $H = 80$ см (рис. Г.9).

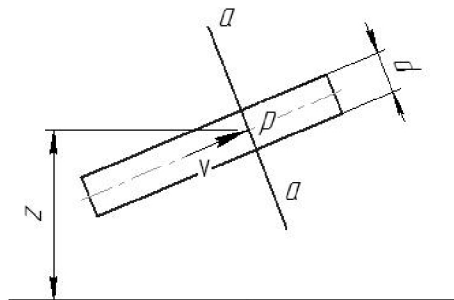


2.3. Чему равна скорость воды в трубе? В трубу налита ртуть ($\rho = 135000$ кг/м³). Поток воды считать турбулентным, $H_1 = 0,1$ м. Принять $g = 10$ м/с², для воды $\rho = 1000$ кг/м³ (рис. Г.10).

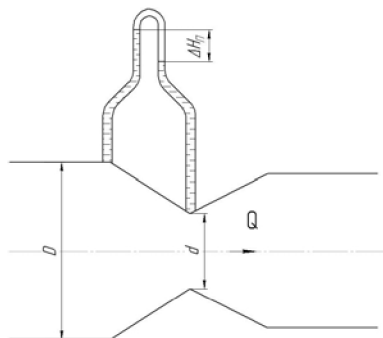
2.4. Определить показания H ртутного манометра при скорости движения воды на оси трубопровода $V = 3$ м/с. Принять $g = 10$ м/с², для воды $\rho = 1000$ кг/м³, для ртути $\rho = 135000$ кг/м³ (рис. Г.11).



2.5. По трубе диаметром d подается жидкость плотностью ρ в сосуд объемом V , который заполняется за интервал времени t . Известно, что $d = 200 \text{ мм}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $t = 60 \text{ с}$, $V = 2,4 \text{ м}^3$. определить массовый M и объемный Q расходы и среднюю скорость C потока в трубе (рис. Г.12).

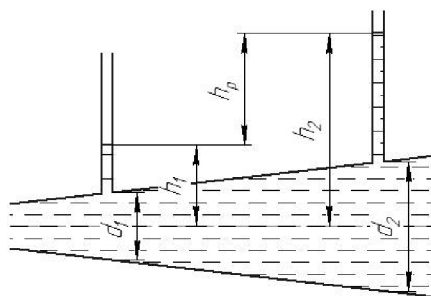


2.6. По трубопроводу диаметром d движется жидкость плотностью ρ , массовый расход ее равен G , а давление в сечении $a-a$, расположенном на высоте z , равно p . Известно, что $d = 100 \text{ мм}$, $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$, $z = 2,5 \text{ м}$, $G = 180 \text{ мм/ч}$, $p = 0,15 \text{ МПа}$. Определить пьезометрический, скоростной и гидродинамический напоры в сечении $a-a$ (принять коэффициент $\alpha = 1,0$) (рис. Г.13).



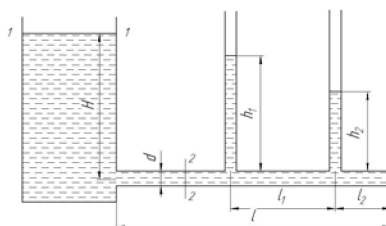
2.7. Для измерения расхода жидкости в трубопроводе диаметром D установлен водомер Вентури с диаметром горловины d и коэффициентом расхода μ . Перепад давления в водомере $\Delta H_{\text{п}}$ из-

меряется с помощью дифференциального манометра. Известно, что $D = 150 \text{ мм}$, $d = 100 \text{ мм}$. Определить величину коэффициента расхода μ водомера, если при пропуске жидкости в количестве $Q = 1200 \text{ л/мин}$ перепад в дифференциальном манометре $\Delta H_{\text{П}} = 400 \text{ мм}$.



2.8. Пренебрегая потерями напора, определить расход протекающего по трубопроводу керосина (рис. Г.15), если разность уровней в пьезометрах h_p , диаметры d_1 и d_2 .

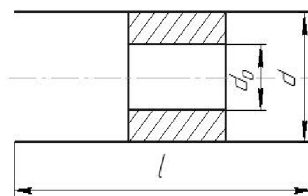
Исходные данные	Ед. измерения	Значения для вариантов				
		1	2	3	4	5
h_p	м	0,53	0,56	0,54	0,73	0,70
d_1	мм	40	50	40	50	40
d_2	мм	75	100	75	100	75



2.9. Определить требуемый напор для подачи воды в количестве $Q = 4 \text{ л/с}$, если $\zeta = 3,5$, $h_1 = 4 \text{ м}$, $h_2 = 3 \text{ м}$, $l = 10 \text{ м}$, $l_1 = 3 \text{ м}$, $l_2 = 1,5 \text{ м}$, $d = 20 \text{ мм}$ (рис. Г.16).

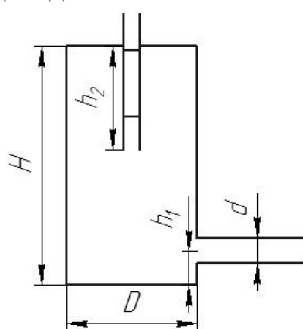
2.10. Система смазки двигателя внутреннего сгорания сводится к эквивалентному трубопроводу длиной $l = 0,25$ м и диаметром $d = 4$ мм с местным сопротивлением в виде отверстия в толстой стенке с диаметром $d_o = 2$ мм. Коэффициент гидравлических потерь описывается следующей эмпирической формулой:

$$\zeta = \frac{\left(1 + \frac{280}{\text{Re}}\right)^2}{0,41} - 1, \text{ где } \text{Re} = d_o \frac{V_o}{\nu}$$

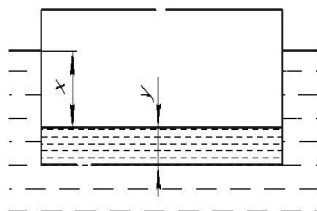


Определить максимальный расход масла Q , прокачиваемый через масляную систему, если давление, определяемое настройкой переливного клапана, равно $p = 0,45$ МПа; вязкость масла $\nu = 12$ сСт; плотность $\rho = 920$ кг/м³ (рис. Г.17).

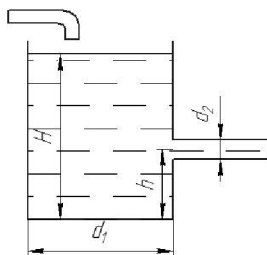
2.11. Жидкость динамической вязкостью $\mu = 3 \cdot 10^{-3}$ Па·с и плотностью $\rho = 900$ кг/м³ течет по горизонтально гладкой круглой трубе диаметром $d = 30$ мм. Перепад давлений, вызываемый силами сопротивления на участке длиной $l = 2$ м, $\Delta p = 4270$ Па. Определить массовый расход жидкости.



2.12. Сосуд Мариотта представляет собой плотно закрытый сосуд, в крышке которого укреплена трубка, сообщающая сосуд с атмосферой. В стенке сосуда имеется отверстие $d = 10$ мм. Определить время опорожнения сосуда от верхнего до нижнего обреза трубки. Объемом жидкости в трубке и сопротивлением при истечении пренебречь. Форма сосуда цилиндрическая, $D = 100$ мм, $h_1 = 0,2$ м, $h_2 = 1$ м, $H = 2$ м, $\varepsilon = 1$ (рис. Г.18).



2.13. Понтон массой $M = 800$ кг, площадью $S = 4$ м² и высотой $h = 0,6$ м получил в дне осколочную пробоину площадью $S_0 = 0,001$ м². Определить время полного затопления понтона, приняв за коэффициент расхода $\mu = 0,8$, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³ (рис. Г.19).



2.14. В баке, имеющем в дне отверстие диаметром d_1 , а в стенке – отверстие снабженное цилиндрическим насадком диаметром d_2 , установился уровень воды на высоте H (рис. Г.20). Определить, каков расход воды Q , поступающей в бак, если центр бокового от-

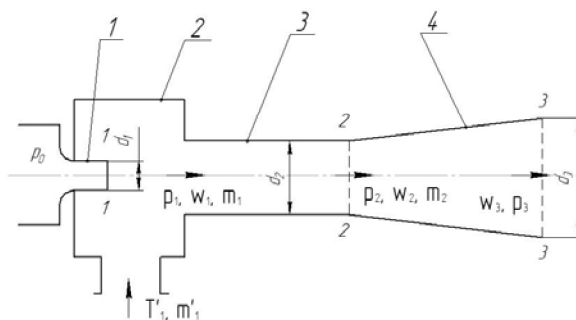
верстия возвышается над дном бака на высоту h . Определить скорости истечения C_1 и C_2 .

Исходные данные	Ед. измерения	Значения для вариантов				
		1	2	3	4	5
d_1	мм	120	100	140	120	80
d_2	мм	80	90	70	80	60
H	м	2,6	2,8	1,8	1,4	2,0
h_p	м	0,4	0,3	0,4	0,3	0,4

2.15. В стенке резервуара на высоте h_1 от дна имеется круглое отверстие диаметром d (коэффициент скорости $\varphi = 0,97$ и расхода $\mu = 0,62$). Уровень жидкости плотностью ρ расположен на высоте h_2 , манометрическое давление паров жидкости p_0 . Истекающая струя имеет скорость V и расход Q .

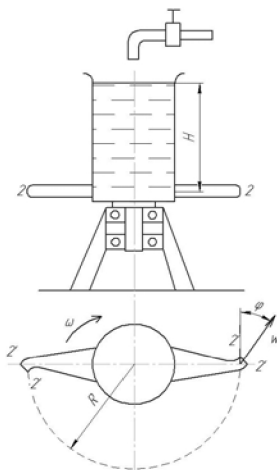
Известно, что $h_1 = 0,5$ м, $h_2 = 1,2$ м, $\rho = 1020$ кг/м³, $d = 10$ мм. Определить скорость V и расход Q струи, если давление $p_0 = 0,06$ МПа.

2.16. Катер с водометным двигателем развивает скорость 36 км/ч, при этом тяга двигателя должна быть 2 кН. Определить объемный расход воды через двигатель, если известно, что вода выбрасывается через трубу с диаметром $d = 300$ мм.



2.17. Водоводяной эжектор (рис. Г.21) состоит из круглого сопла 1, из которого вытекает активная струя, камеры 2 подвода отсасываемой жидкости, смесительной камеры 3, в конце которой поток выровнен, и диффузора 4 с диаметром выходного сечения $d_3 = 70$ мм. Давление торможения перед соплом $p_0 = 2 \cdot 10^5$ Па, диаметр сопла $d_1 = 15$ мм, диаметр камеры смешения $d_2 = 45$ мм, давление в камере 2 $p_1 = 0,8 \cdot 10^5$ Па.

Найти массовый расход m_1 через сопло, массовый расход m'_1 подсосываемой воды и параметры потока p_3 и w_3 на выходе из диффузора. Коэффициент эжекции $n = m'_1 / m_1 = 0,3$, трением о стенки пренебречь.



2.18. На рис. Г.22 изображена простейшая дождевальная установка, выполненная в виде сегнерова колеса. Определить относительную скорость истечения воды из сопла установки в зависимости от величины напора H и радиуса R при постоянной угловой скорости вращения ω . Предполагая, что трение отсутствует, определить максимальную угловую скорость вращения аппарата в зависимости от угла выхода струи φ .

2.19. Несжимаемая жидкость большой плотности закручена по закону свободного вихря, т.е. окружная скорость зависит от радиу-

са по закону Кеплера $C_u \cdot r = \text{const}$ (r – расстояние от вертикальной оси z). Найти уравнение свободной поверхности жидкости, на которой давление равно атмосферному.

2.20. В экспериментальной установке для поглощения мощности модельной турбины применяется гидротормоз. Мощность в гидротормозе тратится на вращение диска в камере, заполненной водой. Определить мощность, потребляемую гидротормозом при диаметре гладкого диска $d = 0,6$ м и частоте вращения $n = 100$ с⁻¹. Температура воды $T = 323$ К поддерживается постоянной.

2.21. В зону действия плоского океанического вихря интенсивностью $\Gamma = 4\pi \cdot 10^4$ м²/с попало судно, поперечный размер которого $b = 20$ м. Определить направление и величину силы, действующую на судно (помимо силы лобового сопротивления), при расположении судна вдоль линии тока на расстоянии $r = 5$ км от центра вихря.

2.22. Определить потерю полного напора ΔH в трубопроводе с диаметром 30 мм и длиной 10 м при течении в нем жидкости со средней скоростью 5 м/с при вязкости $\nu = 4,5 \cdot 10^{-3}$ м²/с.

2.23. На переднюю часть погруженного в реку тела, находящегося на глубине 5 м, действует максимальное избыточное давление, равное 81,5 кПа. Определить скорость течения реки на этой глубине.

2.24. Что можно сказать о характере движения жидкости, если при скорости потока $C = 10$ м/с разность между полным и статическим давлениями $\Delta p = 65$ Па, а при скорости $C = 20$ м/с, $\Delta p = 260$ Па.

2.25. Через трубку диаметром 3 мм прокачивается бензин при температуре 293 К с расходом 0,15 л/мин. Определить касательное напряжение на стенке трубы при вязкости бензина $\mu = 6,56 \cdot 10^{-4}$ Па·с.

2.26. Используя формулу Блазиуса для определения коэффициента сопротивления λ по длине гладкой цилиндрической трубы, найти градиент давления dp/dl , если известно, что труба имеет

диаметр 150 мм, прокачивается по ней вода при $T = 293 \text{ K}$ с расходом 50 л/с.

2.27. Вычислить потерю напора, вызванную внезапным расширением трубопровода от $d_1 = 200 \text{ мм}$ до $d_2 = 300 \text{ мм}$, если по трубопроводу прокачивается $0,2 \text{ м}^3/\text{с}$ воды при температуре $T = 293 \text{ K}$. На сколько уменьшится потеря напора, если участки трубы с размерами d_1 и d_2 соединить коническим диффузором с центральным углом раствора 6° .

2.28. По горизонтальному трубопроводу с диаметром 4 мм движется вода при температуре $T = 293 \text{ K}$ с расходом $0,2 \text{ л/мин}$. Определить разность уровней в водяных пьезометрах (жидкостных манометрах), измеряющих давление жидкости на длине трубопровода $l = 1 \text{ м}$, а также число Рейнольдса по осредненной скорости в сечении трубы.

2.29. Определить направление и силу, действующие на пожарный брандспойт при истечении из него воды под давлением 400 кПа . Диаметр подводящего шланга 70 мм , а диаметр выходного отверстия (сопла) – 40 мм . Силы трения не учитывать, внешнее давление 100 кПа .

III. Основы теории пограничного слоя

3.1. Плоская пластина с двух сторон обтекается потоком несжимаемой жидкости со скоростью $u_0 = 10 \text{ м/с}$. Плотность жидкости $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. На выходной кромке пластины известны толщина пограничного слоя $\delta = 2,8 \text{ мм}$ и закономерность распределения скорости поперек следа $u/u_0 = (y/\delta)^m$, $m = 1/8$. Найти силу трения $L_{\text{тр}}$, действующую на единицу ширины пластины, и кинетическую энергию E , перешедшую в теплоту вследствие работы сил трения.

Контрольные вопросы (для самоподготовки)

1. В чем отличие жидкостей от твердых тел и газов?
2. Какова взаимосвязь между плотностью и удельным весом жидкости? Укажите их единицы измерений.
3. Что называется коэффициентом объемного сжатия жидкости? Какова его связь с модулем упругости?
4. Как изменится плотность жидкости при увеличении температуры при постоянном давлении?
5. Что называется вязкостью жидкости. В чем состоит закон вязкостного трения Ньютона?
6. Какова связь между динамическим и кинематическим коэффициентами вязкости. Укажите их единицы измерения?
7. Какими свойствами реальной жидкости пренебрегают при использовании модели идеальной жидкости?
8. С какой целью в гидромеханике вводится понятие об идеальной жидкости?
9. В каких случаях реальная жидкость близка по своим свойствам к идеальной?

Гидростатика

1. Какие силы, действующие в жидкости, являются поверхностными, массовыми?
2. Каковы свойства гидростатического давления?
3. Каков физический смысл величин, входящих в дифференциальные уравнения равновесия жидкости Эйлера?
4. Какое условие выполняется на границе свободной поверхности жидкости или на поверхности раздела двух жидкостей?
5. Как формулируется закон Паскаля и какова его связь с основным уравнением гидростатики?

6. Каковы соотношения между абсолютным давлением, избыточным и вакуумом?

7. Почему центр давления всегда находится ниже центра тяжести смоченной поверхности наклонной плоской стенки?

8. Как формулируется закон Архимеда? В каких случаях положение судна будет устойчивым и неустойчивым?

Кинематика и динамика жидкости

1. К какому методу описания движения относится построение эпюры скоростей в исследуемом сечении; построение траектории движения частицы жидкости?

2. При каких условиях сохраняется постоянство расхода вдоль потока жидкости?

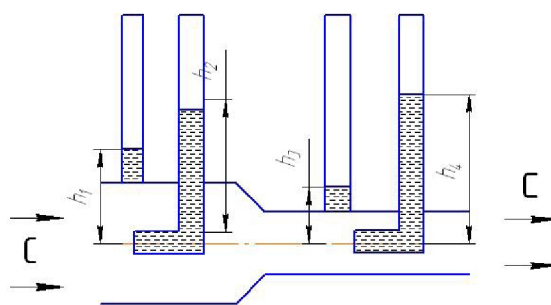


Рис. Д.1

3. Каков физический смысл величин, входящих в дифференциальные уравнения движения Эйлера?

4. К каким выражениям приводится уравнение Бернулли в случаях:

- неподвижной жидкости;
- равномерного движения в горизонтальном трубопроводе;
- истечения жидкости из сосуда через круглое отверстие.

5. Каковы причины возникновения потерь напора при движении вязкой жидкости

6. По показаниям каких пьезометров определяются статические давления в различных сечениях канала (рис. Д.1)?

7. По показаниям каких пьезометров определяется величина гидравлических потерь между сечениями 1 и 2 (рис. Д.1), скорость на оси трубы?

8. Как изменяется полный напор при движении идеальной жидкости по каналу переменного сечения?

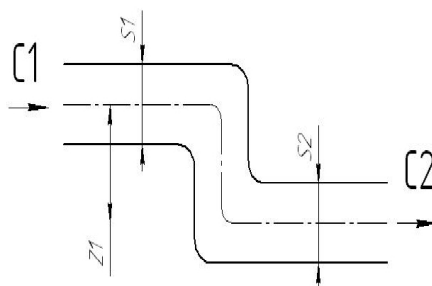


Рис. Д.2

9. Как изменяются скорость C и статическое давление p при течении идеальной несжимаемой жидкости от сечения 1 до сечения 2 (рис. Д.2) по цилиндрическому каналу постоянного сечения ($S_1 = S_2$; $z_1 > 0$)?

10. В чем отличие турбулентного течения жидкости от ламинарного?

11. Каков физический смысл критерия Рейнольдса? Критическое число Рейнольдса для труб круглого сечения?

12. Каковы условия гидродинамического подобия потоков?

13. Изобразите эпюру скоростей в цилиндрическом трубопроводе при ламинарном движении жидкости. Каково соотношение между средней и максимальной скоростями?

14. От каких параметров потока зависят потери на трение по длине при ламинарном движении жидкости?
15. Каковы особенности движения жидкости в начальном участке ламинарного движения?
16. Чем отличается распределение скоростей в цилиндрическом трубопроводе при ламинарном и турбулентном режимах движения жидкости?
17. Каково понятие «гладкие» и «шероховатые» поверхности? Может ли одна и та же труба быть «гидравлически гладкой» и «гидравлически шероховатой»?
18. Какова зависимость между потерей напора и средней скоростью течения жидкости в различных зонах и линиях на графике Никурадзе?
19. От каких факторов зависит коэффициент гидравлического трения при турбулентном течении жидкости?
20. Как определяется гидравлический диаметр для некруглых трубопроводов?
21. Какие сопротивления называются местными?
22. По какой формуле определяются потери, вызванные местными сопротивлениями?
23. Как определить потерю напора при внезапном расширении трубопровода? Теорема Бордо-Карно.
24. Как определяется коэффициент сопротивления системы трубопроводов (суммарный коэффициент сопротивления)?
25. Как связаны между собой коэффициенты сопротивления, сжатия, скорости и расхода? Поясните физический смысл этих коэффициентов.
26. Какое влияние оказывает вязкость жидкости при истечении из отверстий и насадков?
27. Как изменяются расход и скорость при истечении жидкости через цилиндрический насадок по сравнению с истечением ее из круглого отверстия того же диаметра и под тем же напором?

28. В чем особенность истечения жидкости из большого отверстия по сравнению с истечением ее из малого отверстия?

1. Определение дисциплины, её состав, примеры использования.
2. Общая постановка задач в МЖГ: задано, требуется определить; внутренние, внешние, струйные, прямые и обратные задачи.
3. Основные физические свойства жидкости и газа: плотность, сжимаемость, вязкость, скорость звука, число Маха, энтальпия, молекулярные теплопроводность и диффузия.
4. Модели жидкости и газа: капельная жидкость, совершенный газ.
5. Силы, действующие на жидкий или газообразный объём.
6. Напряжения, действующие на жидкий или газообразный объём.
7. Гидростатика: абсолютное и относительное равновесие жидкости, свободная поверхность и поверхность уровня.
8. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости: постановка задачи, расчётная схема, вывод уравнения.
9. Уравнение поверхности уровня как частный случай дифференциального уравнения равновесия.
10. Основное уравнение гидростатики как частный случай дифференциального уравнения равновесия.
11. Измерение давления при помощи пьезометра.
12. Сила давления жидкости на плоскую стенку.
13. Сила давления жидкости на криволинейную стенку.
14. Закон Архимеда.
15. Равновесие газов: международная стандартная атмосфера (МСА).
16. Кинематика жидкости: примеры стационарного и нестационарного движения; примеры одно-, двух-, трёхмерного течения.

17. Кинематика жидкости: линия тока, элементарная струйка, трубка тока, живое сечение, объёмный и массовый расход, плотность тока.

18. Кинематика жидкости: методы Лагранжа и Эйлера исследования движения жидкости.

19. Уравнение неразрывности (сплошности) для стационарного движения жидкости и газа.

20. Дифференциальное уравнение неразрывности (сплошности): вывод уравнения, частные формы для установившегося течения и несжимаемой жидкости.

21. Уравнение количества движения (первое уравнение Эйлера).

22. Уравнение моментов количества движения (второе уравнение Эйлера).

23. Уравнение моментов количества движения для плоскопараллельного движения в полярной системе координат: примеры реализации.

24. Уравнение моментов количества движения: вращение жидкости по инерции, центробежная форсунка.

25. Дифференциальное уравнение движения в напряжениях.

26. Дифференциальные уравнения Навье-Стокса (1845 г.) и его частные случаи.

27. Движение жидкой частицы: теорема Коши-Гельмгольца, линейная деформация бесконечно малого объёма.

28. Движение жидкой частицы: деформация сдвига и вращение элемента.

29. Вывод уравнения Бернулли для горизонтальной элементарной струйки постоянного поперечного сечения с использованием уравнения количества движения.

30. Частные формы уравнения Бернулли. Примеры использования в аэрокосмической технике.

31. Энергетический смысл уравнения Бернулли (теорема трёх высот).

32. Уравнение Бернулли: составляющие полной механической энергии жидкости в различных единицах измерения.

33. Частная форма уравнения Бернулли: понятие давления и давления торможения, определение скорости несжимаемой жидкости.

34. Предел применения уравнений неразрывности и Бернулли.

35. Кавитация: теоретические основы, положительные и отрицательные свойства.

36. Расходомер Вентури.

37. Примеры применения уравнений неразрывности и Бернулли для анализа работы струйного насоса, скоростного наддува бака, обтекания профиля.

1. Примеры расчёта числа Рейнольдса по измерениям на гидростенде.

2. Алгоритм определения скорости истечения жидкости из насадков на гидростенде.

3. Определение гидравлических потерь на гидростенде.

4. Определение кавитационных режимов течения на гидростенде.

5. Особенности определения эпюры скорости в цилиндрическом канале на гидростенде.

6. Пример расчёта объёмного расхода, скорости, массового расхода жидкости при работе на гидростенде.

7. Конструктивные особенности гидростенда, связанные с определением расхода и абсолютного давления жидкости.

8. Простой трубопровод с насосной подачей жидкости.

9. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке при постоянном напоре. Определение коэффициентов сжатия (сужения), скорости, расхода.

10. Особенности гидравлического расчёта простого трубопровода.
11. Гидравлические потери: потери на трение (потери по длине). Формулы для расчёта.
12. Механизм потери устойчивости ламинарного течения жидкости или газа.
13. Гидравлические потери: примеры местных гидравлических сопротивлений, формулы для расчёта.
14. Ламинарный, переходный и турбулентный режимы течения. Критерий Рейнольдса, его физический смысл.

Рейтинг по основам механики жидкости

Лекционный курс - 75 баллов
Физические лабораторные работы – 9 баллов
Компьютерные лабораторные работы – 6 баллов
Решение задач – 10 баллов
Экзамен (зачёт) - 25 баллов
Всего - 125 баллов

В лекционном курсе:
Понятия и определения - 5 баллов
Гидростатика – 10 баллов
Кинематика – 5 баллов
Гидродинамика – 30 баллов
Потери, истечение – 15 баллов
Расчётные модели – 10 баллов

Оценка:
Отлично - 100...125 баллов
Хорошо - 75...99 баллов
Удовлетворительно - 51...74 баллов
Неудовлетворительно - менее 50 баллов

Примечание. Для получения хорошей и отличной оценки необходимо набрать из каждого раздела не менее 50% указанных баллов.

Учебное издание

*Белозерцев Виктор Николаевич,
Беляева Екатерина Владимировна,
Бирюк Владимир Васильевич и др.*

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

Учебное пособие

Редакторская обработка *Т. К. Кретинина*
Корректорская обработка *Н. С. Курьянова*
Доверстка *В. С. Телпова*

Подписано в печать 13.12.06. Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 19,07. Усл. кр.-отт. 19,19. Печ. л. 20,5
Тираж 50 экз. Заказ ИП-17/2006

Самарский государственный аэрокосмический университет
443086, Самара, Московское шоссе, 34

Изд-во Самарского государственного аэрокосмического университета
443086, Самара, Московское шоссе, 34

