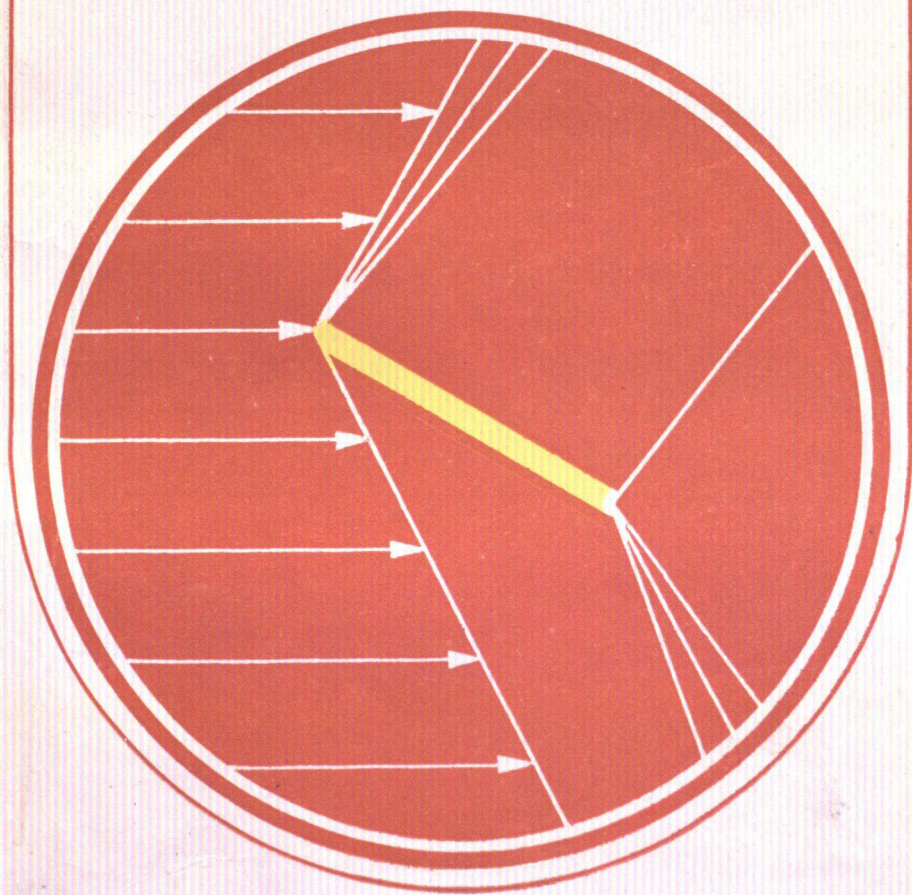


533/075)

с 79

А. А. СТЕПЧКОВ

ЗАДАЧНИК ПО ГИДРОГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ



А. А. СТЕПЧКОВ

ЗАДАЧНИК ПО ГИДРОГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

ВЫПУСК

пер

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве
учебного пособия для студентов авиационных
специальностей высших учебных заведений



МОСКВА
МАШИНОСТРОЕНИЕ
1980

ББК 39.55

С79

УДК 629.13 : 621.431.75.001.12

Рецензенты:

кафедра теплофизических основ двигателестроения ХАИ
д-р техн. наук, проф. **А. Я. Черкез**

С $\frac{20305-236}{038(01)-80}$ 236-80

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние годы в учебные планы по многим специальностям прочно вошел такой предмет как механика жидкости и газа.

Обилие публикаций и бурная дифференциация этой дисциплины осложняет построение курса с точки зрения широты и глубины его изложения. При этом надо иметь в виду ограниченность времени на аудиторные занятия. В этих условиях совершенно необходимым элементом обучения является активная самостоятельная работа над курсом с помощью решения задач, проведение практических и семинарских занятий и олимпиад по курсу.

Настоящий задачник содержит около 400 задач и разбит на семь глав, отражающих основные разделы курса прикладной гидродинамики. Каждой главе предшествует краткая сводка основных уравнений, необходимых для решения задач данного раздела.

Большинство задач составлено автором. Темы задач седьмой главы предложены Д. С. Ковнером и А. Я. Колпаковым. На заимствованные задачи указаны источники.

Для всех задач в качестве исходных данных приняты условные значения параметров. В конце книги на задачи даны ответы. В тех случаях, когда могут возникнуть затруднения при решении задачи, приведены решения или даны указания к ним. Надо иметь в виду, что приведенные решения не всегда единственные и самые простые.

Для облегчения числовых расчетов в задачнике приведены таблицы газодинамических функций и графики. Встречаются задачи, которые можно решить только с помощью таблиц газодинамических функций.

Подбор и формулировка задач дело сложное. Автор с благодарностью примет любые замечания, направленные на улучшение этого учебного пособия.

Глава I

ПАРАМЕТРЫ ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Давление, температура, плотность и скорость определяют состояние потока жидкости. Ниже приводится краткая сводка основных уравнений, главным образом для единичной струйки, с помощью которых могут быть решены все задачи данной главы.

1. Уравнение состояния

$$p = \rho RT. \quad (1.1)$$

2. Уравнения расхода. Массовый расход жидкости определяется уравнением (кг/с)

$$G = \rho w F. \quad (1.2)$$

Объемный расход (м³/с)

$$Q = w F. \quad (1.3)$$

Зависимость массового расхода от объемного выражается следующей формулой (кг/с):

$$G = Q \rho. \quad (1.4)$$

Удобно расход определять с помощью табличных значений (кг/с)

$$G = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{R}} \frac{p^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda) F. \quad (1.5)$$

Постоянные, зависящие от рода жидкости, обозначим

$$m = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \sqrt{\frac{k}{R}}, \quad \text{тогда} \quad G = m \frac{p^*}{\sqrt{T^*}} q(\lambda) F.$$

Для различных газов при нормальных условиях в табл. 1 даны значения показателя адиабаты k , газовой постоянной R и постоянной m , входящих в уравнение расхода.

Газодинамическая функция $q(\lambda)$, входящая в уравнение расхода, называется приведенной плотностью тока и рассчитывается по формуле

$$q(\lambda) = \frac{\rho w}{\rho_{кр} w_{кр}} = \frac{F_{кр}}{F} = \lambda \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad (1.6)$$

Уравнение расхода можно записать через газодинамическую функцию

$$y(\lambda) = \frac{p^* F_{кр}}{pF} = \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} = \frac{\lambda}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2} \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (1.7)$$

которая характеризует приведенный статический импульс

$$G = m \frac{p}{\sqrt{T^*}} y(\lambda) F. \quad (1.8)$$

Таблица 1

В уравнениях (1.6) и (1.7) приведенная скорость

$$\lambda = w/a_{кр}, \quad (1.9)$$

где $a_{кр} = \sqrt{kRT_{кр}} =$

$$= \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*} \quad (1.10)$$

Газ	k	R , Дж/(кг·К)	m
Воздух	1,4	287	0,0405
Водород	1,4	4160	0,0106
Азот	1,4	295	0,0398
Гелий	1,66	2080	0,0161
Неон	1,66	416	0,0360
Аргон	1,66	208	0,050

— критическая скорость звука.

3. Уравнение энергии

$$dQ = dU + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + g dz + dL + dL_{тр}. \quad (1.11)$$

Общее количество тепла Q , находящееся в потоке жидкости, можно представить как сумму, состоящую из тепла, подведенного от наружного источника $Q_{нар}$ и тепла внутреннего, выделенного в результате трения при движении жидкости $Q_{вн}$: $Q = Q_{нар} + Q_{вн}$. Так как $Q_{вн} = L_{тр}$, то уравнение (1.11) можно записать в следующем виде:

$$dQ_{нар} = dU + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + g dz + dL. \quad (1.12)$$

Из термодинамики известно, что внутренняя энергия U и работа сил давления p/ρ есть теплосодержание (энтальпия):

$$dU + d(p/\rho) = di. \quad (1.13)$$

Подставляя написанное равенство в уравнение (1.12), получим уравнение энергии в тепловом виде, или уравнение теплосодержания

$$dQ_{нар} = d(w^2/2) + di + g dz + dL. \quad (1.14)$$

В интегральной форме на участке 1—2 уравнение (1.14) запишется как

$$Q_{нар\ 1-2} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + i_2 - i_1 + g(z_2 - z_1) + L_{1-2}. \quad (1.15)$$

Если $Q_{нар} = 0$, $L_{техн} = 0$, а $z_1 = z_2$, то уравнение теплосодержания запишется следующим образом:

$$w_1^2/2 + i_1 = w_2^2/2 + i_2 = \text{const}. \quad (1.16)$$

Уравнение (1.16) описывает случай энергетически изолированного движения жидкости. Константа в этом уравнении есть полное теплосодержание потока

$$i^* = i + w^2/2. \quad (1.16')$$

Так как $i = c_p T$, то

$$T^* = T + \frac{w^2}{2c_p}. \quad (1.17)$$

При $i = 0$ $w = w_{\max}$, тогда

$$w_{\max} = \sqrt{2i^*} = \sqrt{2c_p T^*} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT^*}. \quad (1.18)$$

Так как скорость звука

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{k p}{\rho}} = \sqrt{k R T}, \quad (1.19)$$

то уравнение (1.17) можно записать

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2, \quad (1.20)$$

где M — безразмерная скорость потока, т. е. $M = w/a$.

Используя выражения (1.9) и (1.10), уравнение (1.17) можно записать через λ :

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 = T(\lambda). \quad (1.21)$$

Из уравнений (1.17) и (1.18) получим

$$T/T^* = 1 - \Lambda^2, \quad (1.22)$$

где $\Lambda = w/w_{\max}$ — относительная скорость потока.

Число M и λ между собой связаны уравнениями:

$$M^2 = \frac{\frac{2}{k+1} \lambda^2}{T(\lambda)}, \quad (1.24)$$

$$\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}. \quad (1.25)$$

Относительная скорость Λ через M и λ записываются следующим образом:

$$\Lambda^2 = \frac{\frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}, \quad (1.26)$$

$$\Lambda^2 = \frac{k-1}{k+1} \lambda^2. \quad (1.27)$$

С помощью первого начала термодинамики из уравнения (1.11) можно исключить тепловые функции и получить механическую формулу уравнения энергии, которое называется обобщенным уравнением Бернулли:

$$-dL = d\left(\frac{w^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + g dz + dL_{\text{тр}}. \quad (1.28)$$

В интегральной форме уравнение Бернулли для струйки тока на участке 1—2 имеет вид

$$-L_{1-2} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + g(z_2 - z_1) + L_{\text{тр}1-2}. \quad (1.29)$$

Чтобы проинтегрировать член уравнения с удельной работой проталкивания, необходимо знать зависимость плотности от давления, т. е. уравнение процесса. Для несжимаемой жидкости и изохорических процессов $\rho = \text{const}$ и $\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$. Тогда уравнение Бернулли будет

$$L_{1-2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + L_{\text{тр}1-2} = 0. \quad (1.30)$$

Это общий вид уравнения Бернулли, которое часто используется для различных гидравлических расчетов. Каждый член уравнения (1.30) представляет удельную энергию потока жидкости: $w^2/2$ — удельная кинетическая энергия, Дж/кг; p/ρ — удельная энергия сил давления, Дж/кг; gz — удельная потенциальная энергия, Дж/кг; L , $L_{\text{тр}}$ — техническая работа и работа сил трения на 1 кг протекающей жидкости, Дж/кг.

Если уравнение Бернулли записать в виде

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + z_2 - z_1 + \frac{L}{g} + \frac{L_{\text{тр}}}{g} = 0. \quad (1.31)$$

то каждый член уравнения (1.31) имеет линейную размерность: $\frac{w^2}{2g} = h_w$ — скоростная высота, м; $\frac{p}{\rho g} = h_p$ — пьезометрическая высота, м; $z = h$ — нивелирная высота, м.

Сумма этих высот называется суммарным или полным напором

$$H = h_w + h_p + h = \frac{w^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z, \quad (1.32)$$

а выражение — уравнением трех высот.

Через полные напоры техническая работа запишется

$$-L = g(H_2 - H_1) + L_{\text{тр}}. \quad (1.33)$$

Если зависимость плотности от давления задана уравнением изотермы $\rho = \rho(p)$, то работа проталкивания для изотермического

процесса будет

$$\int_1^2 \frac{dp}{\varrho} = \int_1^2 \frac{p_1}{\varrho_1} \frac{dp}{p} = \frac{p_1}{\varrho_1} \ln \frac{p_2}{p_1},$$

а уравнение Бернулли в этом случае

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + RT \ln \frac{p_2}{p_1} + g(z_2 - z_1) + L_{1-2} + L_{\text{тр}1-2} = 0. \quad (1.34)$$

Если зависимость плотности от давления задана уравнением адиабаты $\varrho = \varrho_1 (p/p_1)^{1/k}$, то работа проталкивания будет равна

$$\int_1^2 \frac{dp}{\varrho} = \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right],$$

а уравнение Бернулли для адиабатического процесса

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} RT_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + g(z_2 - z_1) + L_{1-2} = 0. \quad (1.35)$$

С помощью уравнения Бернулли легко определить скорость истечения из емкости с известными p^* и T^* для энергетически изолированного, изоэнтропного процесса:

$$w = \sqrt{\frac{2k}{k-1} RT^* \left[1 - \left(\frac{p}{p^*} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}, \quad (1.36)$$

где p — статическое давление в потоке, движущемся со скоростью w . Решая уравнение (1.36) относительно давления и используя зависимости (1.19) или (1.10), получим

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}; \quad (1.37)$$

$$\frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = p(\lambda). \quad (1.38)$$

По уравнению адиабаты такого же рода формулы можно написать и для плотностей:

$$\frac{\varrho^*}{\varrho} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}; \quad (1.39)$$

$$\frac{\varrho}{\varrho^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} = \varrho(\lambda). \quad (1.40)$$

формулы (1.38), (1.40), (1.21), (1.6) и (1.7) затабулированы для различных показателей адиабаты k и сведены в газодинамические таблицы, которые помещены в конце задачника.

4. Дифференциальные уравнения движения в форме Эйлера

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

В векторном виде система (1.41) записывается как

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{R} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (1.42)$$

Уравнения движения в форме Громеки

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{W^2}{2} + U + P \right) &= 2(\omega \omega_y - v \omega_z) + \frac{\partial u}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{W^2}{2} + U + P \right) &= 2(u \omega_z - \omega \omega_x) + \frac{\partial v}{\partial t}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{W^2}{2} + U + P \right) &= 2(v \omega_x - u \omega_y) + \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

или в векторном виде

$$-\text{grad} \left(\frac{W^2}{2} + U + P \right) = \text{rot } \vec{W} \times \vec{W} + \frac{\partial \vec{W}}{\partial t}. \quad (1.44)$$

В этих уравнениях U — потенциал массовых сил; $\vec{R} = -\text{grad } U$; $P = \int \frac{dp}{\rho}$ — потенциальная функция давления. Для несжимаемой жидкости $P = p/\rho$, для газа при адиабатическом процессе $P = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$, при изотермическом процессе $P = RT \ln p$; u, v, w — проекции вектора скорости $\vec{W}$ на оси x, y, z ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ на оси x, y, z .

Интегралы уравнений движения

$$U + P + \frac{W^2}{2} + \frac{\sigma^2}{\rho t} = C(t) \quad (1.45)$$

— интеграл Лагранжа, справедливый для потенциального, неустановившегося движения; $C(t)$ не зависит от координат.

Если $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, а $C = C$, то получим

$$U + P + \frac{W^2}{2} = C \quad (1.46)$$

— интеграл Эйлера для установившегося движения.

В потенциальном потоке константа C постоянна для всего поля течения. В остальных случаях C постоянна вдоль линии тока, вихревой линии, тогда это решение носит название интеграла Бер-

нулли, справедливое для установившегося, не потенциального движения вдоль линии тока.

5. Уравнение количества движения

$$\vec{R}dt = m d\vec{W}. \quad (1.47)$$

В таком виде уравнение записывается для твердого тела. Для потоков жидкости и газа уравнение количества движения (или первое уравнение Эйлера) имеет вид

$$\vec{R} = \int_F \rho \vec{w}_n \vec{W} dF, \quad (1.48)$$

где w_n — скорость, нормальная к элементу поверхности dF . В проекциях на оси уравнение (1.48) преобразуется в систему

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \int_F \rho w_n u dF; \\ R_y &= \int_F \rho w_n v dF; \\ R_z &= \int_F \rho w_n w dF. \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

Количество движения втекающей жидкости принято считать отрицательным, а вытекающей — положительным. Под вектором силы $\vec{R}$ подразумеваются все силы — поверхностные и массовые.

Для идеальной жидкости без учета массовых сил

$$\vec{R} = \int_F p d\vec{F} = \int_F \rho w_n \vec{W} dF. \quad (1.50)$$

Для вязкого газа равнодействующая $\vec{R}$ включает, кроме того, силы от касательных напряжений τ

$$\vec{R} = \int_F p d\vec{F} + \int_F \vec{\tau} dF = \int_F \rho w_n \vec{W} dF. \quad (1.51)$$

Если внутри контрольной поверхности находится твердое тело, то необходимо учитывать равнодействующую силу давления R_τ со стороны твердого тела на жидкость: $\int_F p d\vec{F} = -\vec{R}_\tau$. Здесь интегрирование ведется по поверхности твердого тела и тогда с учетом формулы (1.50)

$$\vec{R}_\tau = \int_F p d\vec{F} - \int_F \rho w_n \vec{W} dF, \quad (1.52)$$

где F — наружный контур, охватывающий тело и жидкость. В конечном виде уравнения для оси x (1.49) запишется

$$R_x = G(u_2 - u_1). \quad (1.53)$$

Рис. 1. Схема к расчету силы, действующей на стенку диффузора

Для цилиндрической струйки тока идеальной жидкости без учета массовых сил уравнение количества движения будет

$$p_2 - p_1 = \rho_1 w_1 (w_1 - w_2), \quad (1.54)$$

или $dp = -\rho w dw$, или $p + \rho w^2 = \text{const}$. Если же при движении газа учитывать силы трения $R_{\text{тр}}$, реакцию от твердого тела $R_{\text{т}}$ и поверхностные силы $(p_1 - p_2)F$, то уравнение количества движения для цилиндрической струйки запишется

$$R_x = (p_1 - p_2)F - R_{\text{тр} 1-2} - R_{\text{т}} = G(u_2 - u_1), \quad (1.55)$$

или для бесконечно малого расстояния между сечениями 1—2

$$Gdw + Fdp = -dR_{\text{тр}} - dR_{\text{т}}. \quad (1.56)$$

Суммарная сила, действующая на стенку диффузора (сопла) без учета сил трения, будет равна (рис. 1).

$$R_d = (p_1 - p_n)F_1 - (p_2 - p_n)F_2 + G(w_1 - w_2). \quad (1.57)$$

Сила тяги воздушно-реактивного двигателя

$$\checkmark R = G_a(w_a - w_n) + \cancel{G}w_a + (p_a - p_n)F_a. \quad (1.58)$$

Здесь первый член — изменение количества движения воздуха, проходящего через двигатель; второй член — количество движения горючего, покидающего реактивное сопло двигателя; третий член — избыточная сила давления в выходном сечении сопла.

Второй член правой части в воздушно-реактивных двигателях составляет 2...3% от тяги R и им часто пренебрегают, кроме того, p_n , w_n — давление и скорость набегающего потока; p_a , w_a — давление и скорость на срезе выходного сечения сопла F_a .

Если течение в реактивном сопле расчетное $p_a = p_n$, то тяга ВРД будет

$$\checkmark R = G_a(w_a - w_n). \quad (1.59)$$

Для ракетных двигателей, в которых не используется атмосферный воздух, а $G_{\text{г}}$ есть сумма топлива $G_{\text{т}}$ и окислителя $G_{\text{о}}$, тяга определяется уравнением

$$\checkmark R = G_{\text{г}}w_a + (p_a - p_n)F_a. \quad (1.60)$$

Тягу воздушно-реактивного двигателя удобно определять с помощью газодинамических функций $z(\lambda)$, $j(\lambda)$, $r(\lambda)$. Так с помощью функции $z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \frac{Gw + pF}{Ga_{\text{кр}} + p_{\text{кр}}F_{\text{кр}}}$ тягу ВРД без учета количества движения топлива можно определить по уравнению

$$R = G_{\text{г}} \left[z(\lambda_a) \sqrt{\left(\frac{k+1}{2k}\right)_{\text{г}}} R_{\text{г}} T_{\text{г}}^* - z(\lambda_n) \sqrt{\left(\frac{k+1}{2k}\right)_{\text{в}}} R_{\text{н}} T_{\text{н}}^* \right] - p_n(F_a - F_{\text{н}}), \quad (1.61)$$

где R_r, R_b, T_r^*, T_b^* — газодые постоянные и температуры продуктов сгорания в выходном сечении сопла и воздуха на входе в двигатель; F_n — площадь струйки набегающего потока.

Функцию $f(\lambda)$ называют приведенной плотностью потока импульса:

$$f(\lambda) = \frac{Gw + pF}{p^*F} = \frac{p + qw^2}{p^*} = (1 + \lambda^2) q(\lambda).$$

С помощью этой функции уравнение (1.58) без учета члена $G_r w_a$ запишется

$$R = p_n F_a [\pi_c f(\lambda_a) - 1] - G_b w_a, \quad (1.62)$$

где $\pi_c = p_a^*/p_n$ — степень расширения газа в сопле.

Функция $r(\lambda)$ есть отношение статического импульса к полному импульсу в том же сечении:

$$r(\lambda) = \frac{pF}{Gw + pF} = \frac{p}{p + qw^2} = \frac{T(\lambda)}{1 + \lambda^2}.$$

С помощью функции $r(\lambda)$ уравнение для тяги ВРД (1.58) без учета члена $G_r w_a$ запишется в виде

$$R = p_n F_a \left[\frac{n}{r(\lambda_a)} - 1 \right] - G_b w_n; \quad (1.63)$$

где $n = p_a/p_n$ — степень нерасчетности сопла.

6. Уравнение моментов количества движения. Это уравнение называют вторым уравнением Эйлера, его формулировка гласит: сумма моментов всех сил, приложенных к жидкому объему относительно любой оси равна разности моментов секундных количеств движения входящей и выходящей жидкости относительно той же оси:

$$M_y = G [(u_2 z_2 - w_2 x_2) - (u_1 z_1 - w_1 x_1)]. \quad (1.64)$$

Здесь для примера взят момент относительно оси y для струйки тока, произвольно расположенной в пространстве. Такие же уравнения можно записать для момента относительно осей x и z . Уравнение (1.64) приобретает особенно простую форму, если его записать в полярных координатах. Предполагая движение плоско-параллельным, получим $M = G (w_{u2} r_2 - w_{u1} r_1)$, где M — сумма моментов всех сил, приложенных к жидкому объему относительно начала координат; w_u — окружная составляющая скорости.

Если $M = 0$, получим известный закон площадей Кеплера:

$$w_u r = \text{const}. \quad (1.65)$$

Задачи

1.1. Определить, во сколько раз скорость звука в воздухе у земли при стандартных условиях больше скорости звука на высоте 11 км.

1.2. Определить скорость распространения звука в различных средах:

- а) в воздухе при $T=288\text{ К}$;
- б) в водороде при $T=288\text{ К}$;
- в) в гелии при $T=288\text{ К}$;
- г) в аргоне при $T=288\text{ К}$;
- д) в воде (модуль упругости $K=196200\text{ Н/см}^2$);
- е) в этиловом спирте (модуль упругости $K=120600\text{ Н/см}^2$), плотность $\rho=790\text{ кг/м}^3$;
- ж) в керосине (модуль упругости $K=168600\text{ Н/см}^2$, плотность $\rho=820\text{ кг/м}^3$).

Указание. Модуль упругости $K=\rho \frac{dp}{d\rho}$, скорость звука $a^2=\frac{dp}{d\rho}$

можно выразить через модуль упругости $a^2=k\rho$ — это уравнение справедливо для жидкости и газа.

1.3. Стандартный баллон, вместимость которого 40 л с открытым краном при стандартных условиях ($B_0=760\text{ мм рт. ст.}$, $T_0=288\text{ К}$) имеет массу 74 кг. Какова будет масса баллона с воздухом, если его давление изотермически повышено до $2 \cdot 10^4\text{ кН/м}^2$.

1.4. При температуре 273 К манометр, подключенный к баллону с воздухом показал давление $200 \cdot 10^5\text{ Па}$.

Как изменится показание манометра, если температура находящегося в баллоне воздуха повысится на 65 К?

1.5. Пустой баллон, вместимость которого 50 л имеет массу 75 кг. После того, как в него накачали воздух, масса баллона с воздухом стала 85 кг. Определить давление и плотность воздуха в баллоне, если температура его стала 288 К.

1.6. Определить, на сколько изменится масса баллона, вместимость которого 90 л, если давление находящегося в нем воздуха увеличить от $1,0133 \cdot 10^5$ до $2 \cdot 10^7\text{ Па}$. Температура воздуха в обоих случаях равна 290 К.

1.7. Определить, во сколько раз увеличится удельный объем газа, который изобарически нагревается в камере сгорания от $T_1^*=600\text{ К}$ в начале камеры, где скорость движения газа 125 м/с, до $T_2=1185\text{ К}$ в конце камеры сгорания. Постоянные принять $k=1,4$, $R=287\text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ в начале и в конце камеры сгорания.

1.8. Насадок полного давления помещен в поток жидкости, движущейся в открытом канале (рис. 2). Жидкость поднималась в насадке на высоту $h=319\text{ мм}$. Определить скорость движения жидкости в набегающей струйке тока.

1.9. На переднюю часть погруженного в реку тела, находящегося на глубине 5 м, действует максимальное избыточное давление, равное $0,815 \cdot 10^5\text{ Па}$. Определить скорость течения реки на этой глубине.

1.10. В воздушный поток, движущийся по трубе с числом $M=$

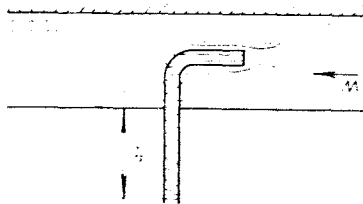


Рис. 2. Насадок полного давления в потоке жидкости

$=0,9$ и температурой торможения $T^*=400\text{ К}$, ввели легкий предмет, который приобрел скорость воздушного потока. Какова будет температура предмета после установления теплового равновесия?

1.11. В трубу с движущимся газообразным водородом заведена термопара, один спай которой замеряет температуру потока, а другой спай — температуру стенки трубы. Указатель температуры зафиксировал разность температур 6 К . Считая, что температура стенки близка к температуре торможения, определить скорость движения водорода в трубе.

1.12. Какова будет скорость потока, если в задаче 1.11 водород заменить на воздух?

1.13. Какова будет скорость потока для условий задачи 1.11 если по трубопроводу движется не водород, а гелий?

1.14. По трубе диаметром 400 мм движется жидкость со средней скоростью 5 м/с . Какова будет скорость движения жидкости на участке трубопровода с диаметром 250 мм ?

1.15. Вертикальная труба диаметром $0,7\text{ м}$ и высотой 15 м заполнена водой. Подсчитайте потенциальную энергию жидкости, приняв за линию отсчета уровней основание вертикальной трубы. Определите так же среднюю удельную энергию жидкости, находящейся в трубе.

1.16. Труба в виде усеченного конуса длиной 15 м с диаметрами оснований $0,7$ и $1,5\text{ м}$ заполнена водой и поставлена вертикально на меньшее основание. Подсчитайте потенциальную энергию жидкости и среднюю удельную энергию, приняв за линию отсчета уровней основание вертикальной трубы.

1.17. Труба в виде усеченного конуса длиной 15 м диаметрами оснований $0,7$ и $1,5\text{ м}$ заполнена водой и поставлена вертикально на большее основание. Подсчитайте потенциальную энергию жидкости и среднюю удельную энергию, приняв за линию отсчета уровней основание вертикальной трубы. Сравните полученный результат с решением для задачи 1.16.

1.18. Куйбышевская ГЭС имени В. И. Ленина имеет мощность 2100000 кВт . Определить расход воды через гидравлические турбины электростанции если известно, что разность в уровнях воды между верхним и нижним бьефом 27 м , а коэффициент полезного действия турбины $\eta=0,96$.

1.19. Гидравлическая станция в Яропольце на реке Ламе имеет расход воды $2,5\text{ м}^3/\text{с}$ при разности в высотах верхнего и нижнего бьефа $\Delta H=5\text{ м}$. Определить мощность гидростанции при к. п. д. турбины $0,9$.

1.20. Насосная станция перекачивает $100000\text{ м}^3/\text{ч}$ воды из Донского магистрального канала в Верхне-Сальский канал. Максимальная высота подъема воды 17 м . Определить мощность электромоторов привода, считая к. п. д. насосов $0,75$; а также диаметр каждой из 5 ниток трубопроводов, по которым подается вода в канал, при средней скорости движения воды в трубопроводах 5 м/сек .

1.21. Сооружаемая на р. Енисее Саяно-Шушенская ГЭС будет

иметь мощность $6,3 \cdot 10^6$ кВт. Определить расход воды через турбины гидростанции при напоре 200 м и к. п. д. турбин 0,96.

1.22. Трубопровод переменного сечения смонтирован в вертикальной плоскости. В сечении 1—1 трубопровод имеет $d_1=150$ мм и $p_1=1,2 \cdot 10^5$ Па. Сечение 2—2 находится выше сечения 1—1 на 7 м и имеет $d_2=250$ мм, а $p_2=1 \cdot 10^5$ Па. По трубопроводу перекачивается керосин с плотностью $\rho=830$ кг/м³. Определить в каком направлении движется жидкость по трубопроводу при расходе $Q=0,2$ м³/с.

1.23. Для условий задачи 1.22 найти какое будет давление в сечении 1—1, если жидкость направить сверху вниз при сохранении параметров потока в сечении 2—2 и без учета потерь на участке 1—2.

1.24. По трубопроводу перекачивается жидкость с плотностью $\rho=800$ кг/м³. В сечении 1—1 диаметр трубопровода $d_1=150$ мм, а в сечении 2—2, находящемся выше сечения 1—1 на 8 м, диаметр $d_2=300$ мм и давление $p_2=1,5 \cdot 10^5$ Па. Определить какое должно быть давление p_1 , если жидкость движется снизу вверх, а в другом случае — сверху вниз при одинаковом расходе $Q=0,2$ м³/с. Коэффициенты потерь заданы: при движении снизу вверх $\xi_{1-2}=0,1$, при движении сверху вниз $\xi_{2-1}=0,02$.

1.25. Сверхзвуковой пассажирский самолет изготовлен из алюминевого сплава, допускающего длительный нагрев обшивки в критических точках до 530 К. Определить с каким максимальным числом M может лететь самолет на высоте $H>11$ км.

1.26. Самолет летит на высоте 11 км. Прибор, замеряющий число M полета, показал 0,9. Определить скорость полета самолета и температуру торможения.

1.27. На высоте 15 км скорость горизонтального полета самолета оказалась 2500 км/ч. Определить число M полета и температуру торможения.

1.28. Местная звуковая скорость на крыле самолета наступает при числе $M=M_{кр}=0,85$. С какой максимальной скоростью может лететь самолет на высоте 8000 м, не превышая критической скорости полета? Определить температуру потока, при которой местная скорость равна скорости звука.

1.29. Самолет летит на высоте 5000 м. Насадок полного давления, установленный на самолете, показал давление 684 мм рт. ст. (давление заторможенного потока). Какова скорость самолета и на сколько ее надо увеличить, чтобы лететь со скоростью, равной скорости звука на этой высоте?

1.30. Число M полета самолета на высоте 7000 м равно 0,8. Какой перепад давлений покажет U-образный ртутный манометр, соединенный с насадком динамического напора, если внешние условия соответствуют стандартной атмосфере?

1.31. Самолет летит на высоте 3000 м. Указатель насадка полного давления зарегистрировал избыточное давление $\Delta p^*=28900$ Па. Считая внешние условия стандартными, подсчитать скорость и число M полета самолета.

1.32. Определить полное давление в критической точке крыла самолета с учетом сжимаемости и без учета сжимаемости, если известно, что самолет летит на высоте $H=9000$ м, при $M=0,8$.

1.33. Решетка профилей испытывается в аэродинамической трубе с открытой рабочей частью (рис. 3). Скорость набегающего потока 280 м/с, давление в струе равно внешнему атмосферному давлению $B_0=760$ мм рт. ст., температура потока 288 К. Определить полное давление в критической точке профиля и вычислить относительную ошибку в определении давления, которая может получиться, если не учитывать сжимаемость потока.

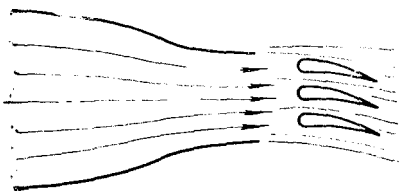


Рис. 3. Решетка аэродинамических профилей в потоке

1.34. На высоте 11000 м самолет летел с критической скоростью 255 м/с. На поверхности самолета есть области, где местная скорость равна скорости звука. До какой высоты должен снизиться самолет, чтобы критическая скорость полета ($M_{кр} < 1$) была равна 1020 км/ч. Определить температуру торможения на этом режиме полета.

1.35. Определить скорость истечения и расход из воздухопровода заводской воздушной магистрали через простой конический насадок площадью $3,14$ см² при известных полном давлении перед насадком $p^*=5 \cdot 10^5$ Па и температуре $T^*=300$ К. Потери не учитывать, истечение происходит во внешнюю среду с давлением $B_0=760$ мм рт. ст.

1.36. Через простое коническое сопло с диаметром выходного сечения $d_c=5$ мм из неограниченной емкости с постоянным давлением $p^*=10^7$ Па и температурой $T^*=300$ К вытекает гелий во внешнюю среду с давлением $B_0=760$ мм рт. ст. Определить скорость истечения, секундный расход, температуру и давление на срезе сопла без учета потерь. Принять $k=1,66$, $R=2080$ Дж/(кг·К), постоянная в уравнении расхода $m=0,0161$.

1.37. Лемнискатный насадок для замера расхода воздуха установлен на входе в газотурбинный двигатель (рис. 4). Определить расход и скорость воздуха в мерном насадке, если U-образный манометр, заполненный водой, показал перепад давлений $\Delta p=-350$ мм вод. ст. Диаметр насадка 500 мм, внешние условия стандартные: $B_0=760$ мм рт. ст., $T_0=288$ К.

1.38. Двуокись углерода при температуре $T=288$ К и давлении $p=1,471 \cdot 10^5$ Па выпускается через трубу диаметром $d=50$ мм в ресивер неограниченной емкости с числом $M=0,7$. Определить секундный расход двуокиси углерода и давление торможения в потоке. Принять молекулярную массу двуокиси углерода $\mu=44,011$, отношение теплоемкостей $c_p/c_v=1,32$.

1.39. На трубопроводе диаметром 350 мм установлен расходомер типа трубы Вентури с диаметром узкого сечения 225 мм

(рис. 5). По трубопроводу перекачивается воздух при давлении $p^* = 10^6$ Па и температуре $T^* = 350$ К. Определить разность давлений Δp , которую покажет заполненный водой U-образный манометр, если через трубу проходит 20 кг/с воздуха. Потери не учитывать.

1.40. На трубопроводе с диаметром 100 мм установлен расходомер Вентури с диаметром узкого сечения 70 мм. Считая течение идеальным, определить расход воздуха по трубопроводу, если из-

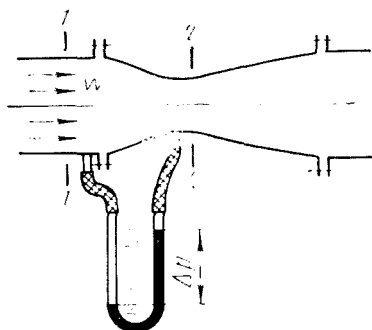
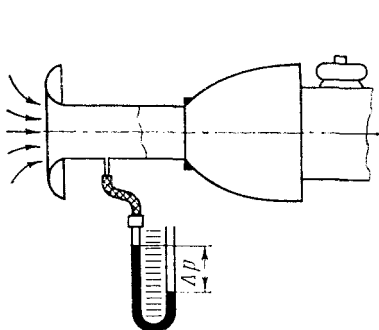


Рис. 4. Лемникатный насадок на входе в двигатель

Рис. 5. Труба Вентури с манометром

вестно, что разность давлений в расходомере $\Delta p = 500$ мм вод. ст., а давление и температура на входе в расходомер $p_1 = 1,5 \cdot 10^5$ Па, $T_1 = 300$ К.

1.41. На входе в трубопровод с диаметром 200 мм поток воздуха имеет скорость $w_1 = 60$ м/с, температуру $T_1 = 310$ К и давление $p_1 = 2,45 \cdot 10^5$ Па. Считая, что движение происходит без потерь, определить скорость потока в сечении, где площадь трубопровода вдвое меньше чем на входе, а также секундный расход воздуха в трубопроводе.

1.42. Температура газа в камере сгорания двигателя 2800 К, газовая постоянная $R = 343$ Дж/(кг·К), показатель адиабаты $k = 1,3$. Определить критическую скорость звука и скорость звука заторможенного газа. Прокомментировать, с какой скоростью распространяются слабые возмущения в камере сгорания двигателя.

1.43. Метеорит влетел в верхние слои атмосферы со скоростью 15 км/с. Определить без учета диссоциации и рассеивания тепла температуру торможения в критической точке метеорита и число М полета.

1.44. Определить температуру потока воздуха в конце адиабатического сжатия, если известна степень повышения давления $\pi = 10$ и температура в начале сжатия 288 К. Какова будет температура торможения в конце сжатия при числе $M = 0,6$.

1.45. Скорость на входе в компрессор $w = 130$ м/с, степень повышения давления в компрессоре $\pi_k = 12$, а температура в конце сжатия 613 К. Определить, какой объем V_0 занимает 1 кг воздуха

при стандартных условиях ($B_0=760$ мм рт. ст., $T_0=288$ К), на входе в компрессор V_1 и на нагнетающей стороне компрессора V_2 ?

1.46. Из ресивера неограниченной емкости вытекает воздух в среду с давлением 760 мм рт. ст. и температурой 300 К. Истечение происходит через сопло с числом $M=2$ и расходом 4 кг/с. Определить размеры сопла ($F_{кр}$ и F_a) и давление в ресивере, если истечение расчетное ($p_a=p_n$), а температура воздуха в ресивере равна температуре внешней среды.

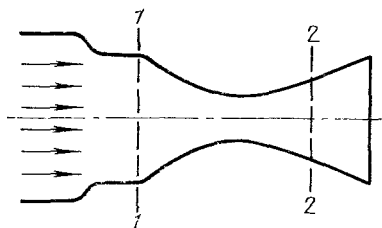


Рис. 6. Сверхзвуковое сопло

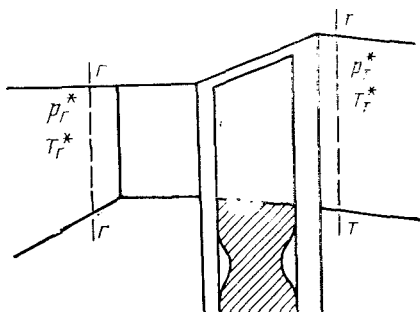


Рис. 7. Проточная часть турбины

1.47. Определить полное давление до скачка уплотнения и температуру торможения в критической точке летательного аппарата, летящего на высоте 20 000 м со скоростью 3500 км/ч.

1.48. Самолет с турбореактивным двигателем у земли ($T=288$ К) развивает скорость 1500 км/ч; скорость воздуха на входе в компрессор 180 м/с. Определить температуру воздуха перед входом в компрессор.

1.49. В сечении 1—1 идеального сверхзвукового сопла (рис. 6) статическое давление $p_1=685000$ Па, температура торможения $T^*=320$ К, приведенная скорость $\lambda_1=0,5$. Найти давление потока p_2 и приведенную скорость λ_2 в сечении 2—2, в котором температура потока $T_2=250$ К. Определить, кроме того, $q(\lambda_1)$, $q(\lambda_2)$ и отношение площадей F_1/F_2 .

1.50. Заданы параметры потока перед турбиной (рис. 7) $p_r^*=640000$ Па, $T_r^*=1400$ К, работа расширения турбины $L_T=303500$ Дж/кг и к. п. д. турбины по параметрам заторможенного потока $\eta_T=0,9$. Определить полное давление p_r^* и температуру торможения T_r^* за турбиной. Принять $k=1,33$, $R=287$ Дж/(кг·К).

1.51. Известны параметры газа перед сопловым аппаратом многоступенчатой газовой турбины: $p_r=1180000$ Па, $T_r^*=1300$ К и расход газа 40 кг/с. Определить мощность, развиваемую турбиной и температуру торможения за турбиной, считая, что расширение газа в турбине происходит до давления 108000 Па, а к. п. д. турбины $\eta_T=0,9$. Принять $k=1,33$, $R=287$ Дж/(кг·К).

1.52. При испытании турбокомпрессорного агрегата были замечены: расход воздуха $G=25$ кг/с, полное давление и температура

на входе в компрессор $p_v^* = 10^5$ Па, $T_v^* = 288$ К, полное давление воздуха за компрессором $p_k^* = 660000$ Па, потери полного давления в камере сгорания $\sigma_{к.с} = p_t^*/p_k^* = 0,97$, температура торможения перед турбиной $T_T^* = 1400$ К. Определить, какую мощность турбокомпрессорный агрегат может передать внешнему потребителю, если расширение газа в турбине происходит до давления $p_T^* = 105000$ Па. К. п. д. компрессора $\eta_k = 0,86$, турбины $\eta_T = 0,92$. Принять: для компрессора $k = 1,4$, $R = 287$ Дж/(кг·К); для турбины $k = 1,33$, $R = 290$ Дж/(кг·К).

1.53. Определить удельную работу расширения газовой турбины и параметры потока за ней (p_T , T_T , T_T^*), если давление перед турбиной $p_T^* = 10^6$ Па, температура $T_T^* = 1500$ К, степень расширения газ в турбине $\delta_T^* = 10$, $\lambda_T = 0,7$, к. п. д. турбины по заторможенным параметрам $\eta_T = 0,9$. Принять $k = 1,33$, $R = 290$ Дж/(кг·К).

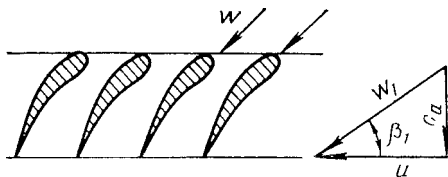


Рис. 8. Схема течения через решетку профилей и треугольник скоростей

1.54. Определить удельную работу сжатия компрессора и параметры потока на выходе из него (p_k^* , p_k , T_k^* , T_k , w_k) по известным параметрам на входе $p_v^* = 10^5$ Па, $T_v^* = 300$ К при степени повышения давления в компрессоре $\pi_k^* = 10$, к. п. д. сжатия $\eta_k = 0,88$ и приведенной скорости на выходе из компрессора $\lambda_k = 0,3$.

1.55. При испытании многоступенчатого осевого компрессора было замерено в выходном сечении площадью $F_k = 0,2$ м² статическое давление $p_k = 7,8 \cdot 10^5$ Па, температура торможения $T_k^* = 560$ К, расход воздуха через компрессор при этом режиме $G_k = 120$ кг/с. Определить адиабатическую работу сжатия 1 кг воздуха, полное давление в выходном сечении компрессора при стандартных условиях на входе ($B_0 = 760$ мм рт. ст., $T_0 = 288$ К). Потери полного давления в входном устройстве компрессора известны: $\sigma = p_k^*/p_0^* = 0,96$.

1.56. Окружная скорость колеса стационарного осевого компрессора на внешнем радиусе равна 275 м/с, допустимое число $M_{кр}$ по относительной скорости не должно превышать 0,9. Определить максимальную осевую скорость входа воздуха в компрессор c_u при отсутствии направляющих аппаратов на входе, а также угол потока β_1 на входе в колесо (рис. 8). Условия на входе в компрессор стандартные.

1.57. Окружная скорость I ступени осевого компрессора газотурбинного двигателя на внешнем радиусе 380 м/с, осевая скорость входа воздуха в компрессор 190 м/с. На высоте 11 км максимально допустимое по относительной скорости на внешнем радиусе число $M_{кр} = 1$. Определить, как надо направить поток в колесо компрессора, чтобы обеспечить заданные условия (найти закрутку потока c_u) и построить треугольник скоростей на входе.

1.58. Осовая скорость воздуха на входе в осевой компрессор турбореактивного двигателя 210 м/с, окружная скорость колеса компрессора на внешнем радиусе 380 м/с. Определить, какова будет относительная скорость и число M по относительной скорости на внешнем радиусе при отсутствии направляющего аппарата на входе в компрессор и как надо изменить направление потока, чтобы снизить число M до 1 при работе двигателя на земле и на высоте 11000 м.

1.59. Распределение скорости в круглой трубе с радиусом R задано уравнением $w = w_0(1 - r/R)$ (отсчет r от оси трубы, w_0 — скорость на оси трубы). Определить, во сколько раз кинетическая энергия потока с заданным распределением скорости будет меньше кинетической энергии при постоянной скорости w_0 по всему поперечному сечению трубы. Плотность жидкости считать постоянной по радиусу трубы.

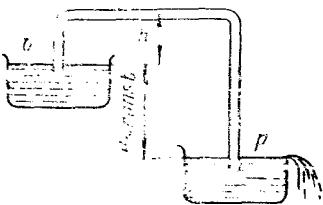


Рис. 9. Схема сифона

1.60. Поле скоростей несжимаемой жидкости в трубе радиуса R задано уравнением $w = w_0(1 - r/R)$. Определить среднюю скорость из уравнений расхода, импульса и энергии. Сравнить полученные

в каждом случае средние скорости между собой.

1.61. Решить задачу 1.60 при распределении скорости по радиусу трубы заданной уравнением $w = w_0(1 - r^2/R^2)$.

1.62. Определить мощность воздушной струи, вытекающей из сопла с диаметром 60 мм при полном давлении $p^* = 1,47 \cdot 10^5$ Па и температуре $T^* = 370$ К. Истечение происходит в среду с давлением $B_0 = 760$ мм рт. ст. Во сколько раз изменится мощность струи если вместо воздуха из сопла будет вытекать вода при тех же условиях?

1.63. С какой максимальной скоростью можно прокачивать по трубопроводу жидкости, находящиеся при одинаковом давлении $p^* = 2 \cdot 10^5$ Па и температуре $T = 300$ К. Род жидкости, ее плотность ρ , давление насыщенных паров p_s задано:

- а) вода $\rho = 10^3$ кг/м³, $p_s = 27$ мм рт. ст.;
- б) бензин Б-70 $\rho = 745$ кг/м³, $p_s = 122$ мм рт. ст.;
- в) керосин Т-1 $\rho = 815$ кг/м³, $p_s = 55$ мм рт. ст.;
- г) четыреххлористый углерод $\rho = 1550$ кг/м³, $p_s = 148$ мм рт. ст.

1.64. Жидкость известной плотности ρ и давления насыщенных паров p_s с помощью сифона перекачивается из одной открытой емкости h может быть поднята труба сифона чтобы течение не прерывалось? Внешнее давление стандартное, потери не учитывать. Перекачиваемые жидкости:

- а) вода $\rho = 10^3$ кг/м³, $p_s = 27$ мм рт. ст.;
- б) бензин Б-70 $\rho = 745$ кг/м³, $p_s = 122$ мм рт. ст.;
- в) керосин Т-1 $\rho = 815$ кг/м³, $p_s = 55$ мм рт. ст.;
- г) четыреххлористый углерод $\rho = 1550$ кг/м³, $p_s = 148$ мм рт. ст.

1.65. Выразить температуру, давление и плотность газа вдоль линии тока через число M и приведенную скорость λ .

1.66. Выразить скоростной напор $\rho w^2/2$ через число M и λ .

1.67. Доказать следующее равенство:

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_1}{q_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} RT_1^* \left[\left(\frac{p_2^*}{p_1^*} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right].$$

1.68. Используя уравнение Бернулли для струйки тока в дифференциальной форме $\frac{dp}{\rho} + wdw = 0$, получить его запись в следующем виде:

$$1) \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p^*}{\rho^*};$$

$$2) \frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}};$$

$$3) \frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

1.69. Уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости можно получить в таком же виде, как и для несжимаемой жидкости:

$$p^* = p + \frac{\rho w^2}{2} + \frac{\rho w^2}{2} \left(\frac{1}{4} M^2 + \frac{2-k}{24} M^4 + \dots \right).$$

Первые два члена правой части есть полное давление несжимаемой жидкости, поэтому

$$\frac{\Delta p^*}{\rho \frac{w^2}{2}} = \frac{p^* - p_{\text{несж}}^*}{\rho \frac{w^2}{2}} = \varepsilon_p = \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-k}{24} M^4 + \dots$$

Выражение в скобках — это относительная ошибка в вычислении давления для сжимаемой жидкости по уравнению для несжимаемой жидкости. Найти подобного рода поправку для плотности и сравнить величину погрешности для давления ε_p с аналогичной погрешностью для плотности ε_ρ при $M=0,3$ и $0,5$.

1.70. Подсчитайте критический перепад давлений $\beta_{кр}$, необходимый для движения газа со скоростью звука: для гелия, двуокиси углерода и метана. Молекулярную массу и теплоемкость при атмосферном давлении и температуре $T=298$ К соответственно принять: для гелия — $4,003$ и 5185 Дж/(кг·К), для двуокиси углерода — $44,011$ и 878 Дж/(кг·К), для метана — $16,042$ и 2219 Дж/(кг·К).

1.71. Что можно сказать о характере движения жидкости, если при скорости потока $w=10$ м/с разность между полным и статическим давлениями $\Delta p=65$ Н/м², а при скорости $w=20$ м/с, $\Delta p=260$ Н/м².

1.72. Воздух находится в емкости под давлением $45 \cdot 10^5$ Па при температуре 293 К. Определить, во сколько раз скорость истечения из емкости в окружающую среду ($p_n=101325$ Па) при пол-

ном расширении будет больше скорости истечения через простой конический насадок. Кроме того, определить диаметр критического сечения при расходе в 1 кг/с. Течение считать адиабатическим.

1.73. Воздух из неограниченной емкости через сопло Лаваля вытекает в окружающую среду со скоростью 750 м/с, имея при этом температуру потока 198 К. Определить параметры воздуха в емкости (p^* , T^* , q^*) при давлении во внешней среде 10^5 Па, истечение адиабатическое, расчетное.

1.74. При истечении воздуха из котла в окружающую среду через сужающийся насадок оказалось, что давление на срезе сопла выше внешнего давления в 3,5 раза, а температура потока равна 248 К. Определить параметры газа в котле (p^* , T^* , q^*) и скорость истечения, считая давление окружающей среды стандартным ($p_n = 101325$ Па).

1.75. Продукты сгорания вытекают через сопло Лаваля с числом $M=2,5$ во внешнюю среду, где давление $B_0=760$ мм рт. ст. Температура потока в выходном сечении сопла равна 1725 К. Определить параметры газа в камере двигателя (p^* , T^* , q^*), если истечение расчетное, показатель адиабаты продуктов сгорания $k=1,25$, а газовая постоянная $R=343$ Дж/(кг·К).

1.76. Вакуумметр, замеряющий статическое давление в рабочей части аэродинамической трубы, показал разрежение 710 мм рт. ст. Давление и температура на входе в трубу стандартные ($B_0=760$ мм рт. ст., $T^*=288$ К). Определить без учета потерь температуру, число M и скорость потока в рабочей части трубы, работающей на расширении атмосферного воздуха.

1.77. Определить разрежение, число M и температуру в рабочей части аэродинамической трубы, работающей на расширении атмосферного воздуха ($B_0=760$ мм рт. ст. и $T_0=288$ К) если известна скорость потока в рабочей части аэродинамической трубы: $w=610$ м/с.

1.78. Газодинамическая сверхзвуковая труба, работающая на расширении сжатого и подогретого воздуха, имеет в рабочей части число $M=11$. Труба плоская, с постоянной по длине шириной $b=150$ мм; высота рабочей части $h=200$ мм. Предполагая, что течение происходит без потерь и без конденсации, определить высоту критического сечения, секундный расход при давлении в подогревателе $p^*=490 \cdot 10^5$ Па и температуре $T^*=1800$ К. Подсчитать также скорость и температуру потока в рабочей части трубы. Принять $k=1,4$, $R=287$ Дж/(кг·К).

1.79. Компрессорная станция, обслуживающая сверхзвуковую аэродинамическую трубу с открытой рабочей частью, нагнетает 6 кг/с воздуха с давлением $12 \cdot 10^5$ Па и температурой $T^*=450$ К. Определить основные размеры сопла ($d_{гг}$ и d_n) число M_n , скорость потока и температуру на выходе из сопла, считая расширение адиабатическим до внешнего давления $B_0=760$ мм рт. ст.

1.80. Гиперзвуковая газодинамическая труба имеет в рабочей части поток воздуха с числом $M=10$. Для предотвращения конденсации кислорода, содержащегося в воздухе, температура потока не

должна быть ниже 90 К, а давление из условия работы диффузора и вакуум-насосов — ниже 10^3 Па. Определить давление и температуру воздуха перед входом в газодинамическую трубу без учета потерь. Принять $k=1,4$, $R=287$ Дж/(кг·К).

1.81. Гиперзвуковая газодинамическая труба, работающая на расширении гелия, имеет в рабочей части число $M=15$. Труба плоская, с постоянной по длине шириной $b=150$ мм. Высота рабочей части трубы $h=200$ мм. Определить высоту критического сечения трубы и секундный расход гелия без учета потерь при известном давлении в баллонах $p^*=200 \cdot 10^5$ Па и температуре $T^*=300$ К. Принять $k=1,66$, $R=2080$ Дж/(кг·К), $m=0,0161$.

1.82. На входе в диффузор двигателя дозвукового самолета (рис. 10) полное давление $p^*_1=1,9 \cdot 10^5$ Па, приведенная

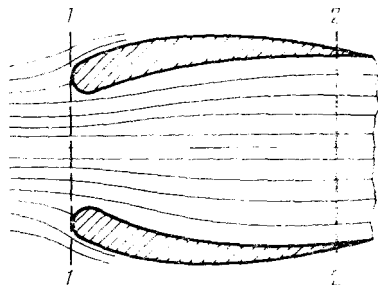


Рис. 10. Схема течения в дозвуковом диффузоре

скорость $\lambda_1=0,85$; известны так же отношение площадей $F_2/F_1=1,4$ и коэффициент давления $\sigma=p_2^*/p_1^*=0,94$. Определить приведенную скорость в конце диффузора λ_2 и статическое давление p_2 .

1.83. Рассчитать и построить график изменения давления потока на срезе простого конического идеального сопла p_a при изменении полного давления p^* на входе в сопло от 10^5 до 10^6 Па. Из сопла вытекает воздух в среду с давлением 735 мм рт. ст.

1.84. Как изменится график $p_a=f(p^*)$, рассчитанный для задачи 1.83, если из сопла при тех же условиях вытекает газ с показателем адиабаты $k=1,2$?

1.85. Определить параметры воздушного потока (p_a , T_a , w_a) на срезе простого конического сопла, а также секундный расход, если известно $p_a^*=10^6$ Па, $T_a^*=900$ К, площадь выходного сечения сопла $F_a=0,01$ м². Истечение происходит в среду с давлением 10^5 Па, постоянные k и R взять для воздуха.

1.86. Определить параметры потока (p_a , T_a , w_a) в выходном сечении сопла Лавали и площадь сопла на выходе, если известно, что через сопло вытекает водород с расходом 100 кг/с, $p_a^*=150 \times 10^5$ Па, $T^*=2500$ К. Истечение расчетное и происходит в среду с давлением $p_n=10^5$ Па. Принять $k=1,4$, $R=4160$ Дж/(кг·К).

1.87. Определить размеры критического и выходного сечений идеального сопла Лавали и параметры заторможенного потока перед соплом для получения воздушного потока с числом $M=10$, давлением в выходном сечении сопла $p_a=10^4$ Па и температурой потока $T_a=150$ К при расходе воздуха через сопла 100 кг/с. Принять $R=287$ Дж/(кг·К), $m=0,0405$, $k=1,4$.

1.88. Определить диаметр выходного сечения простого конического сопла и параметры потока на выходе из него (p_a , T_a , w_a), если

через сопло без потерь проходит 10 кг/с водорода с полным давлением $p^*=10^6$ Па и $T^*=2000$ К. Истечение происходит в среду с давлением 10^5 Па. Принять $k=1,4$, $R=4160$ Дж/(кг·К), $m=0,0106$.

1.89. Площадь выходного сечения идеального сопла Лавала $F_a=1$ м², полное давление $p^*=20 \cdot 10^5$ Па, температура торможения $T^*=1000$ К. Истечение расчетное и происходит в среду с давлением $p_n=10^5$ Па. Определить скорость и температуру потока

в выходном сечении, а также диаметр критического сечения сопла и расход воздуха.

1.90. Заданы параметры воздуха на входе в сопло Лавала: $p^*=10^7$ Па, $T^*=3000$ К, расход воздуха при этом 100 кг/с. Давление среды, куда

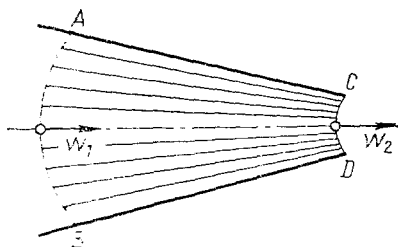


Рис. 11. Схема радиального изотермического течения

происходит истечение $p_n=52$ кПа. Определить площади выходного и критического сечений идеального расчетного сопла Лавала и параметры потока в этих сечениях p_a , $p_{кр}$, T_a , $T_{кр}$, w_a , $w_{кр}$. Принять $k=1,4$, $R=287$ Дж/(кг·К), $m=0,0405$.

1.91. По трубопроводу переменного сечения движется изотермический воздух с расходом 0,5 кг/с и температурой потока 303 К. В начальном сечении трубопровода с диаметром $d_1=75$ мм давление $p_1=5 \cdot 10^5$ Па. Определить давление и скорость потока на участке трубопровода с диаметром $d_2=150$ мм.

1.92. Определить скорость воздушного потока при изотермическом процессе расширения, если известно, что $p^*/p=3,0$, а температура торможения при этом 450 К. На сколько скорость адиабатического процесса расширения меньше скорости изотермического расширения?

1.93. В начальном участке канала переменного сечения известны параметры воздушного потока: $w_1=150$ м/с, $p_1=2 \cdot 10^5$ Па, $T_1=300$ К. В сечении канала 2—2 известно давление $p_2=0,7 \cdot 10^5$ Па. Определить скорость w_2 , число M_2 и температуру T_2 в сечении 2—2, если процесс изменения параметров потока между сечениями 1—1 и 2—2 в одном случае изотермический, а в другом случае — адиабатический.

1.94. При установившемся течении газа из тонкой конической трубки траектории частиц представляют собой прямые линии сходящиеся в вершине конуса. Предполагая, что движение совершается изотермически, найти соотношение между скоростями w_1 и w_2 в сечениях АВ и CD, площади которых F_1 и F_2 (рис. 11) [3].

1.95. Определить $\beta_{кр}$ и потребный перепад давлений p^*/p для получения потока с числом $M=3$ при использовании в качестве рабочих тел газов с показателями адиабаты $k=1,66; 1,40; 1,33$;

1,25; 1,20; 1,15 и 1,10. По результатам расчета построить график зависимости $1/\beta_{кр} = p^*/p = f(k)$ при $M=1$ и 3. Прокомментируйте результаты, каким газам соответствуют какие показатели адиабаты k ?

1.96. Действительное число M на выходе из сопла $M_d=2,61$, при этом потери полного давления в сопле оцениваются коэффициентом $\sigma = p_d^*/p_c^* = 0,92$. Определить коэффициент скорости сопла $\varphi = w_d/w$, считая, что процессы расширения газа в сопле в идеальном и реальном случаях происходят до одного и того же давления.

1.97. В результате испытания установлено, что сопло имеет коэффициент скорости $\varphi = w_d/w = 0,98$. Сопло рассчитано по идеальному течению на число $M_{ид}=4$. Определить, каков при этом будет коэффициент полного давления $\sigma = p_d^*/p^*$, считая, что расширение воздуха в реальном и идеальном процессах происходят до одного и того же давления.

1.98. Воздух из емкости с давлением $p^*=1,5 \cdot 10^5$ Па и температурой $T^*=400$ К вытекает через сопло в среду с давлением 10^5 Па. Потеря в скорости при течении в сопле оценивается коэффициентом $\varphi = w_d/w = 0,90$. Определить действительную скорость истечения и коэффициент давления σ , учитывающий потери полного давления при течении в сопле.

1.99. Потери в скорости при истечении из сопла оцениваются коэффициентом $\varphi = 0,95$, температура воздуха в резервуаре, откуда происходит истечение, $T^*=400$ К. До какого значения необходимо поднять давление в резервуаре, чтобы действительная скорость истечения в окружающую среду ($B_0=760$ мм рт. ст.) из сопла была 300 м/с?

1.100. На воздушной магистрали с давлением $p^*=2 \cdot 10^5$ Па и температурой $T^*=350$ К установлено сопло, потери полного давления в котором оцениваются коэффициентом $\sigma = 0,92$. Определить действительную скорость истечения из сопла и коэффициент скорости φ , если истечение происходит в среду с давлением $p_n = 10^5$ Па.

1.101. Определить минимально необходимое полное давление на входе в сопло, у которого коэффициент давления $\sigma = 0,94$, чтобы обеспечить истечение воздуха из сопла в окружающую среду ($p_n = 10^5$ Па) со скоростью звука. Каков при этом будет коэффициент скорости φ ?

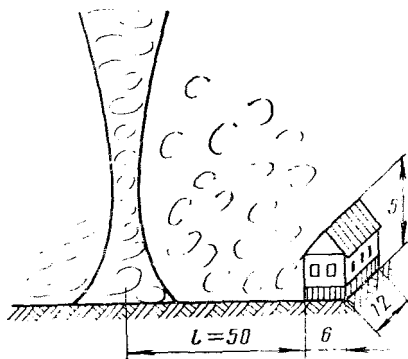
1.102. По каналу переменного сечения без трения перекачивается вода с постоянным градиентом давления $\partial p/\partial x = 500$ Н/м³. Найти градиент скорости du/dx в сечениях 1—1 и 2—2, где $u_1 = 20$ м/с, а $u_2 = 2$ м/с.

1.103. В зону действия плоского океанического вихря интенсивностью $\Gamma = 4\pi \cdot 10^4$ м²/с попало судно, поперечный размер которого $b = 20$ м. Определить направление и величину силы, действующую на судно (помимо силы лобового сопротивления), при расположении судна вдоль линии тока на расстоянии $r = 5$ км от центра вихря.

1.104. Известно, что воздушные вихри (смерчи) обладают большой разрушительной силой и подсасывающим свойством. Зона дей-

ствия их ограничена сравнительно небольшим радиусом. Определить величину боковой силы, действующей на жилой дом, находящийся от центра вихря на расстоянии $l=50$ м. Размеры постройки указаны на рис. 12. Интенсивность вихря задана циркуляцией $\Gamma=4\pi \cdot 10^3$ м²/с.

1.105. Определить изменение давления по радиусу ядра плоского вихря, предполагая, что жидкость в вихре движется с известной постоянной по радиусу угловой скоростью ω (как твердое тело).



1.106. Один из фонтанов в Петергофе бьет на высоту 30 м, а диаметр струи у основания сопла 80 мм. Определить без учета трения струи о воздух напор, обеспечивающий работу фонтана и мощность на привод насоса, к. п. д. которого 0,75.

1.107. Определить потери

Рис. 12. Строение в зоне вихря

удельной энергии (в Дж/кг) и потери давления при внезапном расширении трубопровода от $d_1=500$ мм до $d_2=750$ мм при движении по трубопроводу воды с расходом $Q=2$ м³/с.

1.108. Определить после выравнивания поля скоростей, потери полного давления σ и λ_2 в потоке воздуха при внезапном расширении трубопровода от d_1 до d_2 , если известно, что в узком участке трубопровода поток движется с $\lambda_1=0,8$, а отношение площадей $F_2/F_1=4$. Сравнить два решения задачи — с учетом сжимаемости и без учета сжимаемости по теореме Борда—Карно.

1.109. Баллон высокого давления и большой емкости установлен на подставку для наполнения воздухом (рис. 13). На какое осевое усилие необходимо рассчитывать хомуты, крепящие баллон к раме, в случае обрыва воздухоподводящего трубопровода с диаметром 40 мм при максимальном давлении в баллоне $250 \cdot 10^5$ Па. Внешние условия считать стандартными.

1.110. Определить размеры реактивного сопла ($d_{тр}$, d_n), тягу двигателя на старте и скорость потока на срезе сопла ракетного двигателя, у которого известны давление и температура в камере сгорания $p_k^*=20 \cdot 10^5$ Па, $T_k^*=3000$ К, расход продуктов сгорания через сопло $G=250$ кг/с, газовая постоянная $R=313$ Дж/(кг·К) и показатель адиабаты $k=1,25$. За расчетный режим принять работу двигателя на земле ($B_0=760$ мм рт. ст.).

1.111. При каком числе М полета у земли ($B_0=760$ мм рт. ст., $T_0=288$ К) тяга турбореактивного двигателя с сужающимся соплом будет создаваться только за счет избытка давления на срезе реактивного сопла? Известно, что полная температура в реактив-

ном сопле $T_c^* = 900$ К. Для реактивного сопла принять $k = 1,33$, $R = 287$ Дж/(кг·К).

1.112. Турбореактивный двигатель имеет сужающееся сопло с площадью выходного сечения $F_a = 0,3$ м², полное давление в реактивном сопле $p_a^* = 3,2 \cdot 10^5$ Па, полная температура $T_a^* = 1000$ К. Определить тягу двигателя на старте, считая внешнее давление $p_n = 10^5$ Па. Как изменится тяга двигателя, если обеспечить полное расширение газа в сопле, какова должна быть при этом площадь выходного

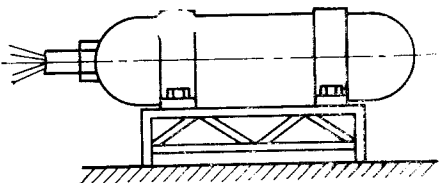


Рис. 13. Баллон на подставке

сечения сопла F_a ? Для газа в сопле принять $k = 1,33$, $R = 287$ Дж/(кг·К).

1.113. При скорости полета $v_n = 1200$ км/ч на высоте $H = 7000$ м полное давление в реактивном сопле $p_a^* = 3,6 \cdot 10^5$ Па, температура $T_a^* = 960$ К, площадь выходного сечения сужающегося сопла $F_a = 0,3$ м². Определить, какова потеря в тяге от неполного расширения газа на заданном режиме полета. Для газа в сопле принять $k = 1,4$, $R = 287$ Дж/(кг·К).

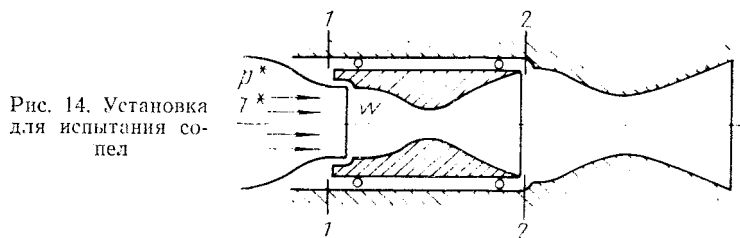


Рис. 14. Установка для испытания сопел

1.114. Давление и температура газа за турбиной турбореактивного двигателя известны: $p_T^* = 2,5 \cdot 10^5$ Па, $T_T^* = 1000$ К. Двигатель имеет сужающееся сопло с площадью $F_n = 0,4$ м². Определить тягу двигателя при полете на высоте 15000 м со скоростью 1200 км/ч. Как изменится тяга двигателя на заданном режиме полета, если обеспечить форсирование тяги за счет подвода тепла после турбины до $T_{\phi}^* = 2000$ К, и как надо изменить площадь проходного сечения сопла, чтобы сохранить тот же расход газа. Принять $k = 1,33$, $R = 290$ Дж/(кг·К), потери в форсажной камере не учитывать.

1.115. При испытании турбореактивного двигателя на стенде были измерены тяга $R = 94000$ Н, статическое давление на срезе сопла $p_n = 1,9 \cdot 10^5$ Па, температура торможения за турбиной 1050 К, площадь выходного сечения сопла $F_n = 0,35$ м². Определить, до какой температуры необходимо подогреть выходящий из сопла газ

и как изменить площадь выходного сечения сопла, чтобы увеличить тягу на старте на 35%, не меняя режим работы двигателя. Внешнее давление считать стандартным; для газа в сопле принять $k=1,33$, $R=287$ Дж/(кг·К).

1.116. На установке, изображенной на рис. 14, испытывается сверхзвуковое сопло с размерами $d_{вх}=200$ мм, $d_{кр}=90$ мм, $d_a=205$ мм. Полное давление на входе в сопло $p^*=12 \cdot 10^5$ Па. Определить направление действия и величину усилия, создаваемого соп-

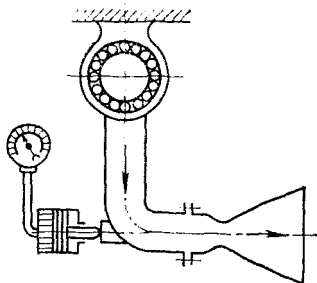
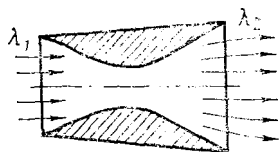


Рис. 15. Маятниковая установка для испытания сопел

Рис. 16. Сверхзвуковое сопло



лом без учета сил трения и усилия на внешний торец сопла слева.

1.117. При испытании модели сопла на маятниковой установке, схема которой изображена на рис. 15, было замерено усилие 5600 Н, направленное против потока. Давление воздуха в начале расширения $p^*=8 \cdot 10^5$ Па, размер критического сечения сопла $d_{кр}=80$ мм, внешнее давление $p_a=10^5$ Па. Определить число М на выходе из сопла и размер выходного сечения сопла d_a .

1.118. На рис. 16 изображена схема сверхзвукового сопла реактивного двигателя. Определить, при каких условиях действующие на сопло внутренние силы будут направлены по потоку ($R<0$), против потока ($R>0$) и когда они будут равны нулю. Как при этом будут изменяться сечения на входе и выходе из сопла?

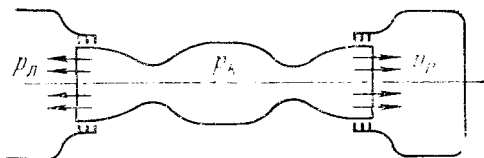
1.119. На рис. 17 изображена установка, состоящая из камеры сгорания и двух совершенно одинаковых сопел, направленных в противоположные стороны. Истечение из сопел происходит в ресиверы неограниченных размеров с недорасширением. Давление в правом ресивере вдвое больше, чем давление в левом ресивере. Определить направление действия реактивной силы.

1.120. Идеальный, расчетный, двигатель должен работать на высоте 15 км и развивать тягу 5000 Н при давлении в камере сгорания $20 \cdot 10^5$ Па и температуре $T_k^*=2775$ К. Рассчитать сопло этого двигателя ($d_{кр}$, d_a), секундный расход продуктов сгорания, скорость и температуру потока на выходе из сопла. Принять $k=1,25$, $R=350$ Дж/(кг·К).

1.121. Давление в камере сгорания двигателя $25 \cdot 10^5$ Па степень уширения сопла $F_a/F_{кр}=3,5$. Определить относительное изменение тяги двигателя на уровне моря и на высоте $H=15$ км, считая показателем адиабаты $k=1,25$.

1.122. Самолет с турбореактивным двигателем при полете с числом $M=2,5$ на высоте 15 км имеет полное давление за турбиной $p_t^*=2 \cdot 10^5$ Па, температуру за турбиной $T_t^*=1000$ К, диаметр критического сечения реактивного сопла $d_{кр}=700$ мм. Сверхзвуковое нерегулируемое сопло рассчитано для данного режима полета без учета потерь в сопле до полного расширения. Какую тягу развивает двигатель и каково значение коэффициента тяги $\bar{R} = R_{дейст}/R_{ид}$ при коэффициенте давления в сопле $\sigma_c = p_a^*/p_t^* = 0,96$. Принять $k=1,33$, $R=287$ Дж/(кг·К).

Рис. 17. Двигатель с двумя соплами



1.123. На конце трубопровода воздушной магистрали с внутренним диаметром $d_{вх}=350$ мм установлено сопло Лавала (рис. 18), имеющее $d_{кр}=150$ мм и размер выходного сечения $d_a=370$ мм. Полное давление на входе в сопло $p^*=20 \cdot 10^5$ Па. На какое усилие необходимо рассчитывать болты, крепящие сопло к трубопроводу?

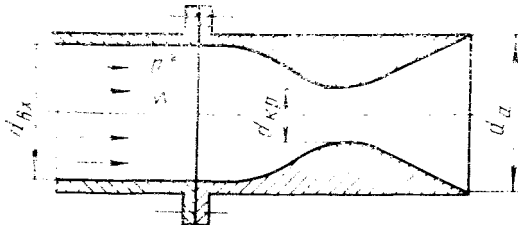


Рис. 18. Трубопровод с соплом

1.124. Определить направление и величину силы, действующей на пожарный брандспойт при истечении из него воды под давлением $4 \cdot 10^5$ Па. Диаметр подводящего шланга 70 мм, а диаметр выходного отверстия (сопла) — 40 мм. Силы трения не учитывать, внешнее давление 10^5 Па.

1.125. Воздуховод с диаметром 150 мм имеет переходный участок конической формы, с помощью которого трубопровод соединен с трубой диаметра 300 мм (рис. 19). Определить величину и направление силы, действующей на переходный участок при безотрывном течении с расходом 20 кг/с. Давление на входе в переходник $9 \cdot 10^5$ Па, температура $T_1=300$ К, внешнее давление 10^5 Па. Потери не учитывать.

1.126. Воздух с давлением $p^*=3 \cdot 10^5$ Па и температурой $T^*=300$ К подается в турбину, выполненную в виде сегнерова колеса. Турбина имеет два противоположно направленных сужающих-

ся сопла с диаметрами выходного сечения $d_a=20$ мм, отстоящих от оси вращения на расстоянии $r=0,3$ м. Оси сопел перпендикулярны радиусу вращения. Давление окружающей среды $p_n=10^5$ Па. Определить без учета потерь и массовых сил, какую мощность может развить турбина при условии, что абсолютная скорость потока относительно земли при этом равна нулю?

1.127. Момент сопротивления турбины, выполненной в виде сегнерова колеса с двумя соплами, задан уравнением $M=0,01 n^2$, где n — частота вращения турбины в мин^{-1} , а M — момент сопротивления в Н·м. Определить, до какой частоты вращения раскрутится турбина, какова при этом будет мощность турбины, а также величины относительной ω и абсолютной s скоростей, если воздух в турбину подается при давлении $p^*=5 \cdot 10^5$ Па, с температурой $T^*=300$ К. Сопла у турбины простые, сужающиеся, расположены на плече 0,3 м, с диаметром выходного

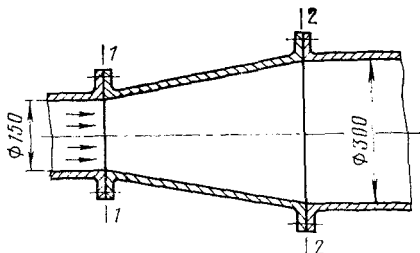


Рис. 19. Трубопровод с коническим переходником

сечения у каждого сопла 30 мм, внешнее давление $p_n=10^5$ Па. Как изменится частота вращения и мощность, если при том же расходе и давлении применить сверхзвуковые сопла с полным расширением? Все потери и влияние массовых сил учтены моментом сопротивления.

1.128. Для создания искусственной силы тяготения на летательном аппарате диаметром 30 м необходимо задать частоту вращения 7 мин^{-1} . Для этого на внешней оболочке аппарата на противоположных сторонах смонтировано два двигателя, работающих на расширении газообразного водорода при давлении $p^*=30 \cdot 10^5$ Па и $T^*=300$ К. Определить потребную тягу двигательных установок и суточный расход водорода, если известно, что момент сопротивления вращению задан уравнением $M=0,01 \omega^2$, где ω — угловая скорость вращения в рад/с, M — момент в Н·м. Расширение в сопле двигателя происходит до давления $p=0,15 \cdot 10^5$ Па, внешнее давление считать равным нулю, постоянные водорода $k=1,4$, $R=4160 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

1.129. Определить, на сколько изменится суточный расход газа для условий задачи 1.128, если вместо водорода в двигательные установки подавать воздух при тех же давлении и температуре.

1.130. Сверхзвуковая аэродинамическая труба (рис. 20), работающая на расширении атмосферного воздуха ($p_n^*=10^5$ Па, $T_n^*=288$ К), имеет диаметр входного отверстия $d_1=400$ мм, диаметр критического сечения $d_{кр}=200$ мм, диаметр рабочей части трубы $d_2=300$ мм и диаметр в конце диффузора $d_3=600$ мм. Определить направление действия и величину осевой силы, предполагая, что торможение сверхзвукового потока происходит в прямом скач-

ке уплотнения на входе в дозвуковой диффузор (сечение 2—2), а затем происходит адиабатическое торможение до λ_3 в диффузоре.

1.131. Самолет с воздушно-реактивным двигателем летит со скоростью 900 км/ч, при этом через двигатель проходит 20 кг/с воздуха, который выбрасывается через реактивное сопло на расчетном режиме со скоростью 700 м/с относительно самолета. Определить реактивную тягу при этих условиях, пренебрегая долей тяги, создаваемой расходом топлива.

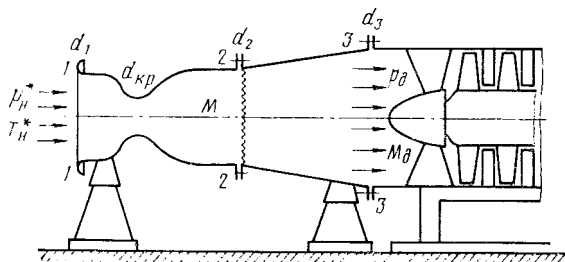


Рис. 20. Схема сверхзвуковой аэродинамической трубы

1.132. Самолет с воздушно-реактивным двигателем летит со скоростью 960 км/ч, при этом через двигатель проходит 20 кг/с воздуха, который выбрасывается через реактивное сопло на расчетном режиме со скоростью 710 м/с относительно самолета. Определить реактивную тягу, если на каждый килограмм топлива, сгорающего в двигателе, расходуется 30 кг воздуха.

1.133. Самолет с воздушно-реактивным двигателем летит на высоте 10 000 м со скоростью 960 км/ч, при этом через двигатель проходит 16 кг/с воздуха, который выбрасывается через коническое сужающееся сопло со скоростью 600 м/с относительно самолета. Определить реактивную тягу двигателя, если, кроме того, известно, что давление на срезе сопла 800 мм рт. ст., а на каждый килограмм топлива, сгорающего в двигателе, тратится 45 кг воздуха. Показатель адиабаты в горячей части принять равным 1,33.

1.134. Катер с водометным двигателем развивает скорость 36 км/ч, при этом тяга двигателя должна быть 2 кН. Определить объемный расход воды через двигатель, если известно, что вода выбрасывается через трубу с диаметром 300 мм.

1.135. Определить объемный расход водометного двигателя для условий задачи 1.134, если воду забирать из емкости, находящейся на катере.

1.136. Определить размер реактивного сопла водометного двигателя и тяговую мощность, необходимую для получения тяги в 4 кН, действующей на катер, который движется со скоростью 40 км/ч, при этом тяговый коэффициент полезного действия равен 70%.

Пояснение: тяговым к. п. д. называется отношение полезной работы, затраченной на передвижение судна, к разности кинетических энергий рабочего тела на выходе и входе в двигатель.

1.137. Какова будет максимальная скорость движения летательного аппарата с воздушно-реактивным двигателем, если известно, что продукты сгорания выбрасываются из реактивного сопла на расчетном режиме со скоростью 1300 м/с относительно самолета, и на каждые 16 кг воздуха расходуется 1 кг топлива?

1.138. Может ли летательный аппарат с воздушно-реактивным двигателем лететь со скоростью больше скорости истечения продуктов сгорания из реактивного сопла?

1.139. Для целей корректировки траектории полета летательного аппарата используется небольшой

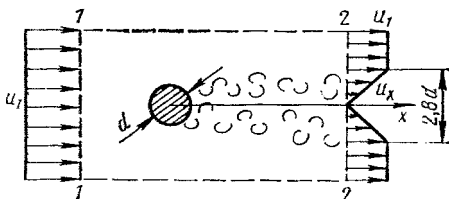


Рис. 21. Схема к определению c_x цилиндра

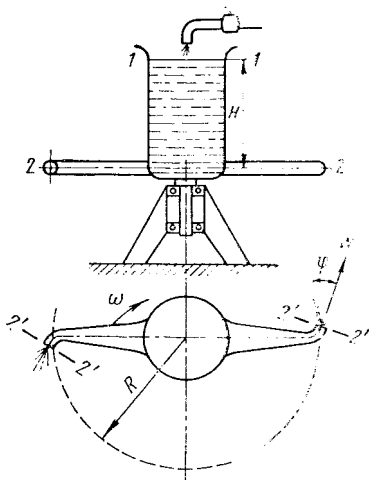


Рис. 22. Дождевальная установка

двигатель, работающий на расширении воздуха от давления $p^* = 30 \cdot 10^5$ Па до давления на срезе сопла $15 \cdot 10^3$ Па. Площадь критического сечения сопла $F_{кр} = 0,3 \cdot 10^{-4}$ м². Покажите, как изменится тяга и расход, если вместо воздуха при тех же параметрах в двигатель подавать:

- водород $k=1,4$, $R=4160$ Дж/(кг·К);
- гелий $k=1,66$, $R=2080$ Дж/(кг·К).

1.140. На рис. 21 показано распределение скорости в сечении 2—2, полученное в опыте при обтекании кругового цилиндра длиной l потоком вязкого воздуха. Скорости u и w в контрольных сечениях 1—1 и 2—2 равны 0. Используя уравнение количества движения, найти по результатам опыта коэффициент лобового сопротивления c_x .

1.141. На рис. 22 изображена простейшая дождевальная установка, выполненная в виде сегнерова колеса. Определить относительную скорость истечения воды из сопла установки в зависимости от величины напора H и радиуса R при постоянной угловой скорости вращения ω . Предполагая, что трение отсутствует, определить максимальную угловую скорость вращения аппарата в зависимости от угла выхода струи φ .

1.142. Определить величину момента сопротивления и мощность простейшей дождевальной установки (см. рис. 22), если известно, что установка работает при постоянном напоре $H=0,3$ м, $R=1$ м,

$\varphi=0$, частота вращения ротора $n=1 \text{ с}^{-1}$, расход воды при этом $0,01 \text{ м}^3/\text{с}$. Найти также относительную и абсолютную скорости движения воды при этих условиях.

1.143. Найти общее выражение для определения составляющих силы R_x и R_y , действующих на внутренние стенки криволинейного

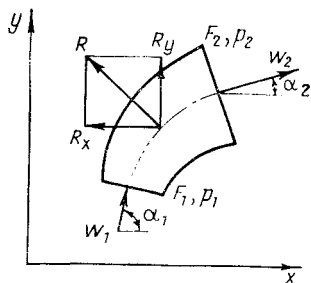


Рис. 23. Схема для определения усилия на криволинейный патрубок

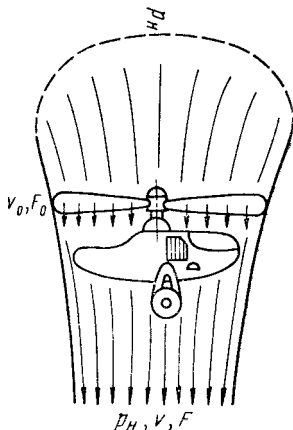


Рис. 24. Схема течения от винта вертолета

канала заданных размеров при движении по нему жидкости (рис. 23).

1.144. Для условий задачи 1.143 найти R_x и R_y , если известно:

1) $F_1=F_2=0,5 \text{ м}^2$, $\alpha_1=90^\circ$, $\alpha_2=0$, $p_1=p_2=2 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $w_1=w_2=20 \text{ м/с}$. По колену движется воздух с температурой $T=300 \text{ К}$;

2) $F_1=0,5 \text{ м}^2$, $F_2=0,2 \text{ м}^2$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2=90^\circ$, $p_1=2 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $w_1=30 \text{ м/с}$. По колену движется воздух с температурой $T_1=500 \text{ К}$ без потерь.

1.145. Используя теорему количества движения, найти подъемную силу идеального винта вертолета с диаметром $d_0=8 \text{ м}$ и мощность, потребную для привода винта, если известно (рис. 24), что скорость воздуха в струе за винтом на достаточном удалении $v=40 \text{ м/с}$, а плотность воздуха при этом — $\rho=1,2 \text{ кг/м}^3$.

Глава II

КИНЕМАТИКА ЖИДКОЙ СРЕДЫ

Параметры поля течения в общем случае являются функциями координат и времени: $(u; v; w; p; \varrho; T) = f(x, y, z, t)$. В данный момент времени уравнение линии тока будет

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \quad (2.1)$$

Для стационарного поля скоростей линии тока совпадают с траекториями жидких частиц.

Уравнение неразрывности записывается в следующих равносильных формах:

$$\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div} \vec{w} = 0; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho w)}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$

Для стационарного движения, когда $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$, уравнение неразрывности получается в следующем виде:

$$\operatorname{div} (\vec{w} \varrho) = 0. \quad (2.4)$$

Для несжимаемой жидкости из уравнения (2.4) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

В общем случае движение бесконечно малой частицы жидкости можно разложить на элементарные движения: поступательное движение со скоростью $\vec{w}$, вращательное движение с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и деформационное движение, которое в свою очередь разлагается на линейную деформацию:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.6)$$

и угловую деформацию, проекции которой на осях x, y, z будут:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \theta_z &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Вектор угловой скорости вращения $\vec{\omega}$, составляющие которого есть $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, носит название завихренности, или вихря скорости, величина его определяется равенством

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}; \\ \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Кроме того, все потоки делятся на безвихревые, в которых у каждой частицы отсутствует вращательная часть движения; для таких потоков

$$\text{rot } \vec{w} = 0, \quad (2.9)$$

и вихревые движения, для которых условие (2.9) не выполняется. Выражение (2.9) в проекциях на оси x, y, z имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.10)$$

Эти равенства выражают необходимое и достаточное условия существования потенциала скорости φ .

В этом случае

$$\vec{W} = \text{grad } \varphi, \quad (2.11)$$

а проекции скорости

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.12)$$

Так как u, v, w являются функциями x, y, z, t , то и потенциал скорости φ будет зависеть от тех же аргументов, а время t играет роль параметра:

$$d\varphi = u dx + v dy + w dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (2.13)$$

Линейный интеграл вектора $\vec{W}$ через дугу dS будет

$$\int_S \vec{W} dS = \int_S (u dx + v dy + w dz) = \int_S d\varphi = \varphi_B - \varphi_A. \quad (2.14)$$

Для замкнутой кривой S при однозначности потенциала скорости φ

$$\oint \vec{W} dS = 0. \quad (2.15)$$

Уравнение неразрывности (2.3) для потенциального потока с использованием потенциала скорости φ принимает вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.16)$$

А для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности превращается в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.17)$$

Для вихревых потоков

$$\text{rot } \vec{W} = \vec{\Omega}, \quad (2.18)$$

где вектор $\vec{\Omega}$ называется вихрем скорости, а поле течений, где $\vec{\Omega} \neq 0$ — полем вихрей скорости. Проекции вихря скорости будут:

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.19)$$

Поле вихрей является соленоидным полем, в каждой точке которого

$$\text{div } \vec{\Omega} = 0, \quad (2.20)$$

или

$$\frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} = 0. \quad (2.21)$$

Поток вихря сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\int_F \Omega_n dF = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение вихревой линии будет

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}. \quad (2.23)$$

Из уравнения неразрывности для плоского (двухмерного) потока несжимаемой жидкости можно получить функцию $\psi(x, y)$, которая называется функцией тока и связана с проекциями скорости уравнениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.24)$$

Сравнивая эти равенства с уравнениями (2.12), получаем, что для потенциальных потоков семейство линий тока $\psi(x, y) = C$ ортогонально семейству эквипотенциальных линий $\varphi(x, y) = C$. Вихрь скорости через функцию тока для плоского потока запишется

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \text{а } \Omega_x = 0; \quad \Omega_y = 0. \quad (2.25)$$

Отсюда следует, что для плоского безвихревого движения функция тока должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.26)$$

Расход жидкости между двумя поверхностями тока ψ_1 и ψ_2 будет

$$Q = \psi_2 - \psi_1. \quad (2.27)$$

Условие уравнений (2.24) дает связь между функциями φ и ψ . Помимо этого, плоское безвихревое движение определяется комплексным потенциалом $f(z)$

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (2.28)$$

Производная от характеристической функции $f(z)$ по комплексной переменной $z = x + iy$ представляет комплексную или сопряженную скорость

$$\frac{df(z)}{dz} = u - iv = \vec{W}(z). \quad (2.29)$$

Модуль комплексной скорости дает величину скорости

$$\left| \frac{df(z)}{dz} \right| = \sqrt{u^2 + v^2} = |\vec{V}|. \quad (2.30)$$

В плоскопараллельном потоке со скоростью w , совпадающей с осью x потенциал скорости и функция тока будут

$$\varphi = wx; \quad (2.31)$$

$$\psi = wy. \quad (2.32)$$

Для плоского течения с источником и стоком с расходом $\pm Q$ («+» для источника и «-» для стока) составляющие скорости, потенциал скорости и функция тока запишутся:

в полярных координатах

$$w_r = \frac{Q}{2\pi r}; \quad w_\theta = 0; \quad (2.33)$$

$$w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta}; \quad (2.34)$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln |x^2 + y^2|; \quad (2.35)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad (2.36)$$

в декартовых координатах

$$u = w_r \cos \theta = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad (2.37)$$

$$v = w_r \sin \theta = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad (2.38)$$

Используя линейные свойства потенциала скорости и функции тока можно методом наложения получить результирующие течения,

каждое из которых характеризуется потенциалом скорости φ_1 и φ_2 либо функциями тока ψ_1 и ψ_2 . Тогда

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2; \quad (2.39)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad (2.40)$$

где φ и ψ — потенциал скорости и функция тока результирующего течения.

Для дипольного течения

$$\varphi_{\text{дип}} = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}; \quad (2.41)$$

$$\psi_{\text{дип}} = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}, \quad (2.42)$$

где M — момент диполя

$$M = 2\varepsilon Q = \text{const} \quad (2.43)$$

Для плоского вихря

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.44)$$

В проекциях на оси x, y

$$\left. \begin{aligned} u &= -w \cos \theta = -w \frac{x}{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; \\ v &= w \sin \theta = w \frac{y}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Потенциал скорости и функция тока для плоского вихря с осью, проходящей через начало координат и с направлением вращения против часовой стрелки

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta; \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (2.46)$$

Одиночная вихревая криволинейная нить с циркуляцией Γ в произвольной точке M вызывает скорость, которая может быть вычислена по формуле

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_s \frac{\sin \alpha}{r^2} ds,$$

где ds — элемент вихревой линии; s — длина вихревой линии; r — расстояние от точки M до элемента ds , α — угол между радиусом r и осью вихревого элемента ds (рис. 25).

Задачи

2.1. Жидкость движется таким образом, что каждая частица описывает окружность, перпендикулярную к постоянной оси и с центром на ней (рис. 26). Доказать, что уравнение неразрывности

в цилиндрических координатах при этом принимает вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho \omega)}{\partial \varphi} = 0,$$

где ω — угловая скорость частицы, положение которой определяется координатами r, φ, z [3].

2.2. Жидкость движется таким образом, что траектории частиц расположены на поверхностях коаксиальных цилиндров. Найти уравнение неразрывности [3].

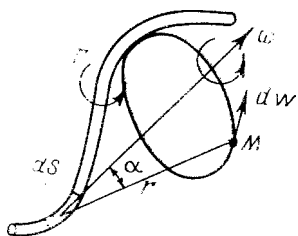
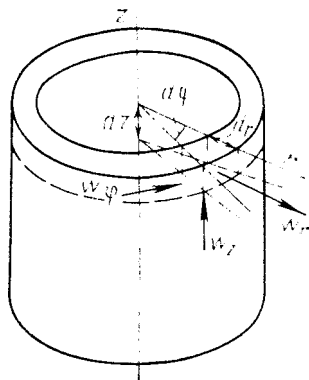


Рис. 25. Схема действия элемента вихря на частицу жидкости в точке M

Рис. 26. Схема к выводу уравнения неразрывности в цилиндрических координатах



2.3. Каждая частица жидкости движется в плоскости, проходящей через ось z . Написать уравнение неразрывности для этого случая движения жидкости.

2.4. Получите уравнение неразрывности для стационарного потока сжимаемой и несжимаемой жидкостей в сферической системе координат (рис. 27).

2.5. Частицы жидкости движутся в пространстве симметрично по отношению к неподвижному центру так, что скорость каждой частицы направлена либо от центра, либо к нему и зависит только от расстояния до центра r (см. рис. 27). Написать уравнение неразрывности для данного случая движения жидкости [3].

2.6. Траектории частиц жидкости расположены на конусах, коаксиальных с осью z и имеющих общую вершину. Написать уравнение неразрывности в этом случае [3].

2.7. Получите уравнение неразрывности для стационарного потока сжимаемой и несжимаемой жидкостей в цилиндрической системе координат (рис. 28).

2.8. Будет ли распределение скорости, заданное уравнениями

$$u = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad v = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad w = 0,$$

удовлетворять условию неразрывности несжимаемой жидкости?

2.9. Будет ли распределение скорости, заданное уравнениями

$u = \frac{Ax}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{Ay}{x^2 + y^2}$; $w = 0$, удовлетворять условию неразрывности несжимаемой жидкости?

2.10. Поток задан потенциалом скорости $\varphi = axy$. Показать, что уравнение неразрывности при $\rho = \text{const}$ удовлетворяется в данном случае. Определить составляющие скорости в точках: 1) $x=1$, $y=1$ и 2) $x=-1$, $y=1$ [19].

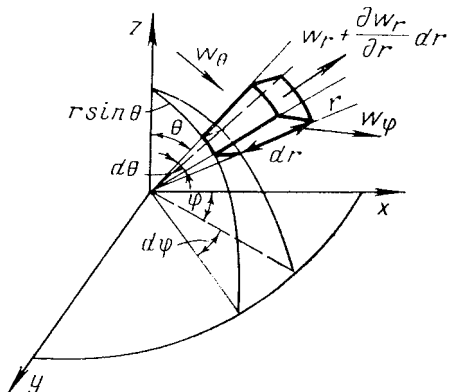


Рис. 27. Схема к выводу уравнения неразрывности в сферических координатах

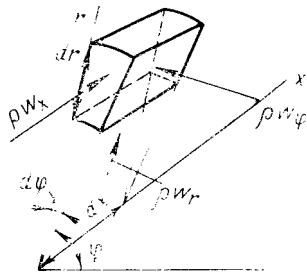


Рис. 28. Схема к выводу уравнения неразрывности в цилиндрических координатах

2.11. Поток задан потенциалом скорости $\varphi = x^2 - y^2$. Определить функцию тока данного потока, подсчитать объемный расход на единицу длины между линиями тока, проходящими через точки $x=1$, $y=1$ и $x=2$, $y=2$ [19].

2.12. Потенциал скорости плоскопараллельного потока несжимаемой жидкости задан уравнением $\varphi = ax + by$. Определить составляющие скорости u и v и уравнение линий тока.

2.13. Составляющая скорости плоского потока несжимаемой жидкости задана уравнением $u = x^2 + 2x - 4y$. Найти составляющую скорости по оси y , удовлетворяющую уравнению неразрывности [19].

2.14. Источник и сток равной интенсивности $Q = 10 \text{ м}^3/\text{с}$ на 1 м расположены на оси x (источник в точке $x=1$, а сток в точке $x=-1$). Определить скорость в начале координат, а также в точках $x=-0,5$, $y=0$ и $x=0,5$, $y=0$.

2.15. Для условий задачи 2.14 найти координату на оси x ($y=0$), где скорость потока равна нулю и где скорость максимальная.

2.16. Для условий задачи 2.14 найти координату вдоль оси y , где скорость максимальна и характер изменения скорости вдоль оси y (при $x=0$).

2.17. Найти уравнение линии тока потока, заданного составляющими скорости $u=a$, $v=b$, $w=c$, где a , b и c постоянные величины [2].

2.18. Найти уравнение линии тока и характер движения потока, заданного составляющими скорости:

$$\begin{aligned} u &= \frac{Q}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^n}; \\ v &= \frac{Q}{4\pi} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^n}; \\ w &= \frac{Q}{4\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^n}, \end{aligned}$$

где объемный расход Q и показатель степени n — постоянные величины [2].

2.19. Найти уравнение линии тока и характер движения потока, заданного составляющими скорости:

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad w = 0,$$

где циркуляция $\Gamma = \text{const}$.

2.20. Найти уравнение линий тока, характер течения и величину скорости потока, заданного составляющими скорости:

$$u = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad w = 0,$$

где объемный расход $Q = \text{const}$.

2.21. Поток в некоторой области течения задан комплексной функцией $f(z) = \frac{5}{2} z^2$. Найти потенциал скорости и функцию тока потока, а также составляющие скорости u и v в точке с координатами $x=4$, $y=0,5$.

2.22. Московская телевизионная башня в Останкино помимо своей прямой функции является так же гидрометеорологическим пунктом, где на различной высоте сосредоточены приборы службы погоды. Какую поправку надо вносить в показания прибора измеряющего скорость ветра, если прибор удален от поверхности башни, имеющей форму цилиндра радиуса r_0 , на расстояние $h=2r_0$ (рис. 29)? На каком расстоянии надо было бы расположить прибор, чтобы ошибка была не более 1%?

2.23. Поток задан комплексным потенциалом $j(z) = (a+bi)z$. Найти потенциал скорости, функцию тока, скорости u и v и дать характеристику потока.

2.24. Поток задан комплексным потенциалом $f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$, где Q — расход на единицу длины в $\text{м}^2/\text{с}$. Найти потенциал скорости, функцию тока, скорости u и v и дать характеристику потока.

2.25. Поток задан комплексным потенциалом $f(z) = \frac{a}{2} z^2$, где $a = \text{const}$. Найти потенциал скорости и функцию тока, дать харак-

теристику течения, найти скорости u и v в точке с координатами $x=5, y=1$.

2.26. Поток задан комплексным потенциалом $f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$,

где Γ — циркуляция скорости. Найти потенциал скорости и функцию тока, составляющие скорости w_r и w_θ (в полярных координатах), дать характеристику потока.

2.27. Найти поток, который получится от сложения точечного источника мощностью Q (м²/с) и точечного вихря Γ , помещенных в начало координат. Определить составляющие скорости результирующего потока и дать его характеристику.

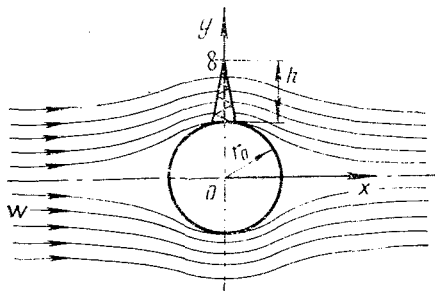


Рис. 29. Обтекание цилиндрической башни с ветромером

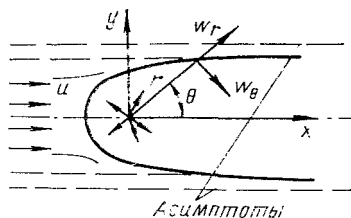


Рис. 30. Равномерный плоский поток и источник

2.28. Исследовать поток, который получается от сложения плоского равномерного потока вдоль оси x со скоростью u и источника мощностью Q , помещенного в начало координат (рис. 30).

2.29. Исследовать поток несжимаемой жидкости, потенциал скорости которого задан уравнением $\phi = ax(x^2 - 3y^2)$ при $a > 0$. Найти функцию тока, составляющие скорости и комплексный потенциал.

2.30. Найти закон изменения избыточного гидродинамического давления потока вдоль радиуса для плоского источника мощностью $Q = 4\pi$ в м²/с.

2.31. Найти закон изменения избыточного гидродинамического давления вдоль радиуса для циркуляционного потока при циркуляции скорости $\Gamma = 4\pi$ в м²/с.

2.32. Исследовать поток, получающийся при наложении плоского однородного потока несжимаемой жидкости, движущегося вдоль оси x со скоростью u_0 , на источник и сток мощностью $\pm Q$, находящихся на оси x , в точках с координатами: источник при $x = -a$, сток при $x = a$.

Глава III

ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

При решении задач о движении газа в каналах произвольной формы с учетом трения, теплоподвода и механической работы приходится часто отказываться от наличия фактического распределения скорости, температуры и вязкости в поперечных сечениях и рассматривать поток одномерным. При этом точность решения может пострадать, однако не настолько, чтобы совсем отказаться от такой модели течения.

Связь между параметрами потока и возможными воздействиями на него можно получить, если рассмотреть систему основных уравнений: состояния $dp = d(\rho RT)$; расхода $dG = d(\rho w F)$; количества движения $dp + \rho w dw + \rho dL + \rho dL_{тр} = 0$

и энергии $dQ = dU + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + d\left(\frac{w^2}{2}\right) + dL$,

где Q — тепло, подводимое к газу извне; U — внутренняя энергия.

Приведенные уравнения содержат пять параметров потока — w , p , ρ , T , U , и пять независимых воздействий на поток — F , G , Q , L , $L_{тр}$. Имея четыре уравнения, можно исключить четыре параметра потока и получить зависимость пятого параметра от всех воздействий на поток. Ниже приводятся полученные таким образом уравнения для различных параметров потока.

Для скорости потока

$$\frac{dw}{w}(M^2 - 1) = \frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} - \frac{k-1}{a^2} dQ - \frac{1}{a^2} dL - \frac{k}{a^2} dL_{тр}. \quad (3.1)$$

Для давления

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p}(1 - M^2) = kM^2 \left(\frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} \right) - \frac{(k-1)kM^2}{a^2} dQ - \frac{k}{a^2} dL - \\ - \frac{k[1 + (k-1)M^2]}{a^2} dL_{тр}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для плотности

$$\frac{d\rho}{\rho}(1 - M^2) = M^2 \left(\frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} \right) - \frac{k-1}{a^2} dQ - \frac{1}{a^2} dL - \frac{k}{a^2} dL_{тр}. \quad (3.3)$$

Для температуры

$$\frac{dT}{T} (1-M^2) = (k-1) \left[M^2 \left(\frac{dF}{F} - \frac{dG}{G} \right) - \frac{kM^2-1}{a^2} dQ - \frac{1}{a^2} dL - \frac{kM^2}{a^2} dL_{\text{тр}} \right]. \quad (3.4)$$

Общего интеграла этих уравнений не получено, а некоторые частные случаи интегрирования приводятся ниже.

Движение вязкого газа в цилиндрической, шероховатой трубе без теплообмена с внешней средой при $Re > 10^4$. Интеграл уравнения (3.1) для такого случая движения будет

$$\frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} - 2 \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2k}{k+1} \xi \frac{x}{D}, \quad (3.5)$$

где x — длина труб, где устанавливается приведенная скорость λ_2 .

Из уравнения (3.5) можно найти критическую длину, когда поток в конце трубы будет звуковым ($\lambda_2 = 1$):

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + 2 \ln \lambda_1 - 1 = \frac{2k}{k+1} \xi \frac{x_{\text{кр}}}{D}. \quad (3.6)$$

Потери полного давления в результате трения получим из уравнения неразрывности, имея в виду при этом, что $T^* = \text{const}$:

$$\sigma_{\text{тр}} = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_2)}. \quad (3.7)$$

Соотношение для статических давлений найдем из тождества (3.7):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1 T(\lambda_2)}{\lambda_2 T(\lambda_1)} = \frac{y(\lambda_1)}{y(\lambda_2)}. \quad (3.8)$$

Из уравнения сплошности найдем формулу для плотностей:

$$\rho_2/\rho_1 = \lambda_1/\lambda_2. \quad (3.9)$$

Параметры потока в идеальном расходном сопле найдем интегрируя выражения (3.1) при $dF, dQ, dL, dL_{\text{тр}} = 0$:

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{\lambda_2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_2^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}}{\lambda_1 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{q(\lambda_2)}{q(\lambda_1)}. \quad (3.10)$$

Все остальные параметры потока при изменении расхода вдоль русла течения находятся по уравнениям для адиабатического процесса:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p(\lambda_2)}{p(\lambda_1)}; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho(\lambda_2)}{\rho(\lambda_1)}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{T(\lambda_2)}{T(\lambda_1)}. \quad (3.11)$$

Такой вариант течения с расходным воздействием практически реализуется при отборе части потока, движущегося по каналу. В этом случае энтропия потока в канале, полное давление и температура торможения не изменяются. Варианты с добавлением по-

тока в канал даже при одинаковых полных давлениях и температурах зависят от способа ввода дополнительного расхода, и всегда имеются потери на смешение потоков.

При движении газа в тепловом сопле, т. е. в трубе при $F, G = \text{const}$, $L, L_{\text{тр}} = 0$, параметры потока найдем, используя уравнения неразрывности и количества движения:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \lambda_1^2}{1 + \lambda_2^2} \frac{T(\lambda_2)}{T(\lambda_1)} = \frac{\lambda_1 z(\lambda_1) T(\lambda_2)}{\lambda_2 z(\lambda_2) T(\lambda_1)} = \frac{r(\lambda_2)}{r(\lambda_1)}, \quad (3.12)$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\lambda_1 z(\lambda_2)}{\lambda_2 z(\lambda_1)}; \quad (3.13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_2)} \right]^2 \frac{T(\lambda_1)}{T(\lambda_2)}; \quad (3.14)$$

$$\sigma_r = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\lambda_1 z(\lambda_1) q(\lambda_1)}{\lambda_2 z(\lambda_2) q(\lambda_2)} = \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)}; \quad (3.15)$$

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_2)} \right]^2. \quad (3.16)$$

Из уравнения (3.16) можно найти критический подогрев (когда $\lambda_2 = 1$) в зависимости от λ_1 :

$$\left(\frac{T_2^*}{T_1^*} \right) = \frac{1}{4} [z(\lambda_1)]^2. \quad (3.16a)$$

Из уравнения (3.15) можно найти минимальное значение $\sigma_{r \min}$, когда поток в результате подогрева разгоняется до $\lambda_2 = 1$. Так как $k = 1,4$ получим

$$\sigma_{r \min} = \frac{\lambda_1 z(\lambda_1) q(\lambda_1)}{1,268}. \quad (3.15a)$$

Для движения газа в механическом сопле, когда площадь канала $F = \text{const}$, расход $G = \text{const}$ и при отсутствии теплообмена и трения. Используя уравнения неразрывности и изоэнтропы, получим:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2k}{k+1}}; \quad (3.17)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}}; \quad (3.18)$$

$$\frac{q_2}{q_1} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2}{k+1}}; \quad (3.19)$$

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \left[\frac{\lambda_1 T(\lambda_1)}{\lambda_2 T(\lambda_2)} \right]^{\frac{2}{k+1}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{2(k-2)}{k+1}}; \quad (3.20)$$

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \left[\frac{T(\lambda_1)}{T(\lambda_2)} \right]^{\frac{2k}{k-1}} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{2k}{k+1}}. \quad (3.21)$$

Уравнения (3.5) ... (3.21) даны для изолированных воздействий одного типа. Чаще приходится решать задачи, когда одновременно участвуют два и более воздействий. Например: трение и теплообмен, трение и изменение геометрии канала и т. д.

Для решения таких задач помимо уравнений (3.1) ... (3.4) нужны дополнительные условия, чтобы замкнуть задачу, причем для одновременного действия двух различных воздействий требуется одно дополнительное условие, для трех воздействий — два дополнительных условия. Своим происхождением эти условия обязаны либо теоретическим, либо опытным предположкам.

Ниже приводятся расчетные уравнения для решения распространенных задач **одновременного действия трения и теплообмена потока с внешней средой** при $dF, dG, dL=0$. В качестве дополнительного условия для этих задач принято выражение подводимого к газу тепла в долях от работы трения:

$$Q = nL_{\text{тр}}. \quad (3.22)$$

Записывая, как и ранее, работу трения по уравнению Дарси—Вейсбаха

$$dL_{\text{тр}} = \xi \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D}, \quad (3.23)$$

используя уравнения (3.1) и (3.4), получим

$$-\frac{M^2 - 1}{M^3} dM = -\frac{1}{4} [k(k-1)(n+1)M^2 + (k-1)n + 2k] \xi \frac{dx}{D}. \quad (3.24)$$

Приведенное дифференциальное уравнение справедливо при любой степени подогрева n . В частности при $n=-1$, когда $L_{\text{тр}}=-Q$, т. е. когда все тепло трения отводится от потока. Течение при этом получается с постоянной энтропией потока ($dS=0$), а уравнение (3.24) приобретает вид

$$\frac{M^2 - 1}{M^3} dM = -\frac{k+1}{4} \xi \frac{dx}{D}. \quad (3.25)$$

Интеграл этого уравнения при $\xi = \text{const}$ будет

$$\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} - 2 \ln \frac{M_2}{M_1} = \frac{k+1}{2} \xi \frac{x}{D}. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.24) позволяет при заданных длине трубопровода x коэффициенте сопротивления ξ , степени подогрева n и известных условиях на входе в канал M_1 , определить M_2 и все остальные параметры потока. При этом следует иметь в виду, что число M_1 на входе в канал не может быть произвольным. Оно должно быть меньше максимально возможного при заданных условиях. $M_{1\text{max}}$ можно найти после интегрирования выражения (3.24), положив в нем $M_2=1$.

3.1. Воздух на входе в цилиндрическую камеру сгорания (сечение 1—1) имеет $T_1^*=400$ К и $\lambda_1=0,3$. Пренебрегая гидравлическим сопротивлением, определить в конце камеры сгорания (сечение 2—2) λ_2 и тепловое сопротивление σ_T после подогрева воздуха до $T_2^*=1200$ К. Показатель адиабаты k для холодного и горячего потока принять равным 1,4.

3.2. На входе в цилиндрическую камеру сгорания известны полное давление $p_1^*=15 \cdot 10^5$ Па, скорость потока $\omega_1=65$ м/с и температура торможения $T_1^*=500$ К. Определить скорость потока и плотность его в конце камеры сгорания при подогреве газа до $T_2^*=1200$ К. Принять $k=1,4$, $R=287$ Дж/(кг·К) в начале и конце камеры сгорания.

3.3. В начале цилиндрической камеры сгорания температура потока $T_1=350$ К при скорости $\omega_1=50$ м/с. Определить температуру, до которой надо подогреть движущийся по камере воздух, чтобы разогнать его до 250 м/с; какой для этого потребуется перепад давлений p_1/p_2 ? Для холодной и горячей части потока принять $k=1,4$, $R=287$ Дж/(кг·К).

3.4. На входе в цилиндрическую камеру сгорания поток имеет температуру торможения $T_1^*=300$ К и приведенную скорость $\lambda_1=0,2$. Определить тепловые сопротивления камеры сгорания σ_T и требуемые перепады давлений p_1/p_2 при подогреве воздуха до $T_2^*=1200$ и 2000 К. Показатель адиабаты k для холодного и горячего потока принять равным 1,4.

3.5. В цилиндрическую камеру сгорания поступает воздух с температурой торможения $T_1^*=400$ К. Какую наибольшую скорость на входе можно допустить при подогреве воздуха в камере сгорания до $T_2^*=1000$ К, каково при этом будет тепловое сопротивление камеры сгорания σ_T ? Как изменится максимальная скорость на входе и тепловое сопротивление σ_T , если подогрев в камере сгорания увеличить до $T_2^*=2000$ К? Показатель адиабаты k для холодного и горячего потоков принять равным 1,4.

3.6. В цилиндрическую камеру сгорания поступает воздух с температурой торможения $T_1^*=370$ К и скоростью $\omega_1=88$ м/с. Определить температуру критического подогрева потока $T_{2кр}$ в конце камеры сгорания; до какого значения надо снизить скорость на входе, чтобы критический подогрев довести до $T_{2кр}=2000$ К? Все расчеты вести при $k=1,4$.

3.7. Параметры потока на входе в цилиндрическую камеру сгорания известны: $p_1^*=1,82 \cdot 10^5$ Па, $T_1^*=420$ К и $\lambda_1=0,35$. Определить максимально возможный подогрев в камере сгорания и величину теплового сопротивления при этом, если истечение продуктов сгорания происходит в среду с давлением $p_n=760$ мм рт. ст. Для горячего и холодного потоков принять $k=1,4$, $R=287$ Дж/(кг·К).

3.8. На входе в цилиндрический участок теплообменного аппарата поток имеет $T_1^*=800$ К и $\lambda_1=0,4$. На последующем участке аппарата того же сечения газ нагревается до $T_2^*=1200$ К. Опреде-

лить, пренебрегая трением, приведенную скорость λ_2 после подвода тепла к газу и величину теплового сопротивления σ_t , принимая показатель адиабаты $k=1,4$ для холодного и горячего газа.

3.9. Из цилиндрического теплообменника воздух вытекает со скоростью звука, имея при этом $p_2^*=10^5$ Па; $T_2^*=2200$ К. Определить приведенную скорость λ_1 и температуру T_1^* , если известно давление на входе в теплообменник $p_1^*=1,25 \cdot 10^5$ Па. Показатель адиабаты $k=1,4$ принять для холодного и горячего потока.

3.10. К дозвуковому потоку, который движется в расширяющемся канале, подводится тепло так, что статическое давление газа вдоль канала не меняется. Покажите, как при этом изменяется вдоль канала скорость потока, нарисуйте также качественное изменение p^* , T^* , q^* , T , λ , w .

3.11. Воздух поступает в цилиндрический теплообменник с параметрами на входе $p_1^*=10^6$ Па, $T_1^*=400$ К, $\lambda_1=0,4$. На последующем участке теплообменника к воздуху подводится тепло $q=10^6$ Дж/кг. Считая среднюю теплоемкость воздуха на всем участке теплообменного аппарата постоянной $c_p=1000$ Дж/(кг·К), определить параметры потока в выходном сечении теплообменника T_2^* , λ_2 , p_2^* , а также изменение расхода воздуха до и после включения подогревателя при неизменных T_1^* и p_1^* .

3.12. Воздух с теплоемкостью $c_p=1005$ Дж/(кг·К) движется в цилиндрической трубе без трения со сверхзвуковой скоростью $\lambda_1=2$, имея при этом $T_1^*=500$ К и $p_1^*=10^6$ Па. Определить характер и величину теплового потока, который затормозил бы поток до $\lambda_2=1,2$. Какое при этом будет p_2^* и T_2^* ?

3.13. На входе в цилиндрическую камеру сгорания площадью $F=0,02$ м² подводится воздух с расходом $G=18,3$ кг/с и $T_1^*=400$ К, $p_1^*=10^6$ Па. Определить количество тепла, которое надо подвести к воздуху, чтобы увеличить скорость его движения до $\lambda_2=0,95$. Какие при этом будут T_2^* и p_2^* . Принять $k=1,4$, $R=287$ Дж/(кг·К).

3.14. Особо ответственные электросварочные швы производят с помощью электрода, окруженного струей инертного газа (рис. 31). Сварочный шов будет защищен от вредных примесей внешней среды тем лучше, чем больше диаметр струи инертного газа. Однако при этом возрастает расход газа. Диаметр струи можно увеличить за счет предварительного нагрева газа. Пусть диаметр выходного сечения сопла при холодном дутье задан и равен $d_x=15$ мм, скорость на выходе $w=50$ м/с при $T_x^*=290$ К. Определить диаметр выходного сечения сопла, если предварительно на прямом участке трубы с диаметром 20 мм инертный газ подогреть до $T_1^*=800$ К; потребное полное давление для обеспечения истечения с той же приведенной скоростью, если учесть только потери от теплового воздействия. В качестве инертного газа используется аргон [$k=1,66$, $R=208$ Дж/(кг·К)]. Внешнее давление 760 мм рт. ст.

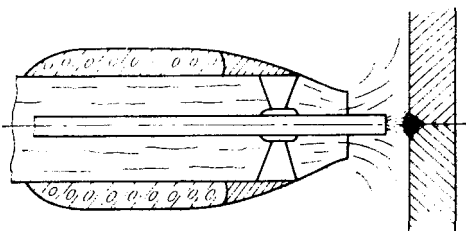
3.15. В стальной теплоизолированной шероховатой трубе с диаметром 14 мм и длиной 1540 мм был получен кризис течения воздуха при приведенной скорости на входе $\lambda_1=0,4$. Определить коэф-

коэффициент трения ξ и потери полного давления σ вызванные трением. Как изменится приведенная скорость λ_1 на входе, если кризис течения будет реализован на длине трубы, увеличенной вдвое?

3.16. В шероховатой трубе с диаметром 100 мм движется воздух со сверхзвуковой скоростью $\lambda_1=2,2$ при $p_1^*=10^6$ Па. Коэффициент сопротивления трения трубы $\xi=0,018$. Определить длину трубы, при которой на срезе установится $\lambda_2=1,2$; какое при этом будет полное и статическое давление на срезе трубы в сечении 2—2.

3.17. Воздух из окружающей среды при давлении $p_0=760$ мм рт. ст. и температуре $T_0=300$ К через шероховатую трубу с диа-

Рис. 31. Сварочная горелка с инертным газом



метром 20 мм и длиной $l=1,5$ м поступает в емкость с давлением p_2 . Предполагая, что турбулентный режим течения начинается со входа в трубу, имеющую коэффициент сопротивления трения $\xi=0,018$, определить максимальный расход воздуха и величину давления p_2 , при котором этот расход достигается.

3.18. По магистральному газопроводу с диаметром 1420 мм перекачивается природный газ, молекулярная масса которого 44,094, а показатель адиабаты $k=1,57$. Считая поверхность трубы шероховатой, определить, на каком расстоянии необходимо устанавливать подкачивающие компрессорные станции, если скорость на входе в газопровод $w_1=12$ м/с, температура $T_1=285$ К, коэффициент сопротивления трения $\xi=0,014$, а допустимая приведенная скорость перед станцией подкачки $\lambda_2=0,8$. Определить также минимально необходимую степень повышения давления газа в компрессорах при этих условиях.

3.19. Решить задачу 3.18 при условии, что все тепло трения отводится через стенки трубопровода во внешнюю среду. Прокомментировать полученный результат.

3.20. По длинной теплоизолированной цилиндрической трубе движется газ с трением. На входе в трубу приведенная скорость $\lambda_1=0,1$. Определить q_1/q_2 , T_1/T_2 и перепад давлений p_1/p_2 , который обеспечивает течение в трубе с $\lambda_2=1$ на выходе. Показатель адиабаты $k=1,4$.

3.21. Решение задачи о движении вязкого газа в теплоизолированной цилиндрической трубе в рамках одномерной модели жидкости обычно находится в предположении, что коэффициент сопротивления трения $\xi=\text{const}$. Это справедливо для шероховатых труб при $Re>10^4$. Трубы большого диаметра или бесшовные тянутые трубы при тех же числах Рейнольдса следует рассматривать как технически гладкие, для которых $\xi=f(Re)$. Найти решение данной за-

дачи для технически гладких труб, когда коэффициент сопротивления описывается уравнением Блазиуса:

$$\xi = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{\text{Re}}}.$$

3.22. Заводская воздушная магистраль диаметром 100 мм имеет на входе $\lambda_1=0,1$ и $p_1^*=5 \cdot 10^5$ Па. Определить максимально допустимую длину магистрали при полном расходе воздуха, если коэффициент сопротивления трубы $\xi=0,018$, а давление, куда подается воздух, $p_2^*=10^5$ Па.

3.23. По магистральному газопроводу с диаметром 0,7 м перекачивается природный газ [$c_p/c_v=1,57$, $R=189$ Дж/(кг·К)]. Определить, какова будет скорость потока на пятом километре газопровода, если скорость на входе в трубопровод $\omega_1=20$ м/с, коэффициент трения $\xi=0,014$. Течение газа происходит при постоянной температуре $T=300$ К.

3.24. Для условий задачи 3.23 определить, при какой скорости на входе в трубопровод поток разгонится до скорости звука в конце трубопровода длиной 5 км?

3.25. По цилиндрической шероховатой трубе движется воздух с трением. Параметры потока на входе в трубу известны: $\omega_1=45$ м/с, $T_1^*=600$ К. При этих условиях была найдена критическая длина трубы ($\lambda_2=1$). Затем было решено: с целью увеличения критической длины трубы отводить тепло от потока по длине таким образом, чтобы оно в точности было равно теплу трения. Как при этом изменится критическая длина трубы, если коэффициент трения $\xi=0,015$? Прокомментируйте полученный результат, для чего определите температуру торможения T_2^* в конце трубы.

3.26. Определить максимально возможную скорость на входе в цилиндрическую трубу теплообменного аппарата, а также потери полного давления σ на длине трубы l в этом случае, если коэффициент сопротивления $\xi=0,018$, температура воздуха на входе в трубу $T_1^*=400$ К, относительная длина трубы $l/D=100$. По трубе движется воздух, к которому на длине трубы l подводится тепло $Q=107,7$ кДж/кг.

3.27. При расчете воздушного теплообменного аппарата были заданы условия на входе в цилиндрический участок: $\lambda_1=0,1$, $T_1^*=300$ К, коэффициент сопротивления $\xi=0,02$, относительная длина канала $l/D=100$ и температура, до которой следует подогреть воздух в конце теплообменного аппарата $T_2^*=1000$ К. Для расчета параметров потока на выходе и определения потерь полного давления при движении в канале теплообменного аппарата вязкого газа с теплоподводом найти степень подогрева n в канале.

3.28. Для увеличения числа M в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы, рассчитанной на $M=2,5$, было предложено отбирать часть воздуха через сверленные стенки трубы (рис. 32). При $M=2,5$ через трубу проходил 6 кг/с воздуха. Вакуум-насосы позволяют откачивать из рабочей части трубы до 1 кг/с воздуха. Определить, какое максимально возможное число M в ра-

бочей части трубы можно получить и какое при этом будет давление потока, если на входе в трубу давление равно атмосферному $B_0=760$ мм рт. ст.

3.29. Аэродинамические трубы небольших сверхзвуковых скоростей ($M < 2$) не позволяют испытывать модели с большими поперечными размерами из-за малой допустимой загрузки рабочей части трубы (при $M=2$ загрузка $= F_{\text{мод}}/F_{\text{раб.ч}} \approx 5\%$). Для того, чтобы

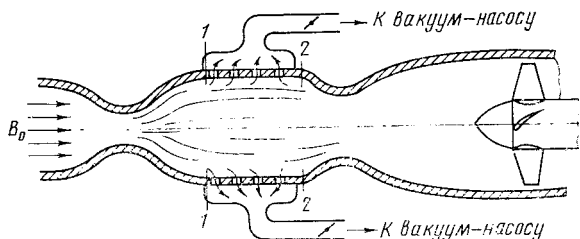


Рис. 32. Аэродинамическая труба с расходным регулированием скорости

модель не «запирала» трубу, можно применить отсос части воздуха из области расположения модели. Определить, какое количество воздуха необходимо отобрать из рабочей части аэродинамической трубы с тем, чтобы в районе модели было то же число M , что и без модели. Труба рассчитана на $M=2$, поперечные размеры рабочей части 150×200 мм, в трубе установлена модель оживальной формы с диаметром 62 мм. Труба работает на расширении атмосферного воздуха $B_0=760$ мм рт. ст., $T_0=290$ К.

3.30. Воздух из ресивера неограниченной емкости с давлением $p^*=10^7$ Па и температурой $T^*=300$ К через сопло Лавалья вытекает в цилиндрический канал с $\lambda_1=1,2$. На прямом участке с $F=\text{const}$ поток разгоняется за счет отбора воздуха из канала до $\lambda_2=2,0$. Определить отношение расходов G_2/G_1 , а также давление p_2 и температуру T_2 .

3.31. Определить тепловое сопротивление сверхзвуковой камеры сгорания и отношение площадей камеры на выходе и входе F_2/F_1 , если процесс подвода тепла осуществляется при постоянной температуре потока. На длине камеры сгорания к потоку подведено $74,5 \cdot 10^5$ Дж тепла при расходе 10 кг/с. Температура торможения в начале камеры сгорания $T_1^*=1400$ К, $M_1=2,5$. Показатель адиабаты $k=1,33$ и теплоемкость $c_p=1245$ Дж/(кг·К) принять постоянными по всей длине камеры сгорания. Прокомментировать полученный результат.

3.32. Решить задачу 3.31 при условии, что подвод тепла в камере сгорания происходит при постоянном числе $M=2,5$.

Глава IV

АДИАБАТИЧЕСКИЕ СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

§ 1. ТЕЧЕНИЯ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ

Из уравнения энергии для течений со скачками уплотнения следует, что вдоль линии тока

$$T^* = \text{const}, \quad i^* = \text{const}. \quad (4.1)$$

Основное динамическое соотношение и ударная адиабата

$$\frac{p_1 - p_n}{q_1 - q_n} = k \frac{p_1 + p_n}{q_1 + q_n}; \quad (4.2)$$

$$\frac{q_1}{q_n} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_n}{p_1}}{1 + \frac{k+1}{k-1} \frac{p_n}{p_1}}. \quad (4.3)$$

Здесь и далее индексом «н» обозначены параметры потока до скачка уплотнения, а индексом «1» — за скачком уплотнения. Поскольку в уравнения (4.2), (4.3) входят только скалярные величины, то они пригодны и для прямого и для косого скачков уплотнения. Основное кинематическое соотношение для прямого скачка уплотнения

$$w_n w_1 = a_{кр}^2, \quad (4.4)$$

или в безразмерном виде

$$\lambda_n \lambda_1 = 1. \quad (4.5)$$

Так как $\lambda_n > 1$, то $\lambda_1 < 1$.

Для косого скачка уплотнения

$$w_{n\pi} w_{1\pi} = a_{кр\pi}^2. \quad (4.6)$$

Здесь

$$w_{n\pi} = w_n \sin \alpha; \quad (4.7)$$

$$w_{1\pi} = w_1 \sin \beta; \quad (4.8)$$

$$a_{кр\pi}^2 = \frac{2k}{k+1} RT_n^* = a_{кр}^2 - \frac{k-1}{k+1} w_1^2. \quad (4.9)$$

Схема течения с косым скачком уплотнения показана на рис. 33. $w_{нn}$ и w_{1n} — нормальные составляющие скорости до скачка и за скачком; w_t — тангенциальная скорость, лежащая в плоскости скачка уплотнения

$$w_t = w_n \cos \alpha = w_1 \cos \beta; \quad (4.10)$$

T_n^* — температура частичного торможения

$$T_n^* = T_n + \frac{w_{нn}^2}{2c_p} = T_1 + \frac{w_{1n}^2}{2c_p} = T^* - \frac{w_t^2}{2c_p}. \quad (4.11)$$

В безразмерном виде основное кинематическое соотношение для косого скачка уплотнения запишется

$$\lambda_{нn} \lambda_{1n} = 1, \quad (4.12)$$

где

$$\lambda_{нn} = w_{нn}/a_{крn}; \quad \lambda_{1n} = w_{1n}/a_{крn}. \quad (4.13)$$

Если подставить значения $w_{нn}$ и $a_{крn}$, то

$$\lambda_{нn}^2 = \frac{\lambda_n^2 \sin^2 \alpha}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_n^2 \cos^2 \alpha}. \quad (4.14)$$

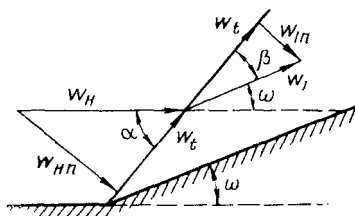


Рис. 33. Схема течения с косым скачком уплотнения

Эта же формула через число М

$$M_{нn} = M_n \sin \alpha. \quad (4.15)$$

Прирост давления в скачке уплотнения

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{2k}{k+1} M_{нn}^2 \sin^2 \alpha - \frac{k-1}{k+1} \quad (4.16)$$

Если угол скачка $\alpha = 90^\circ$ — прямой скачок, то из уравнения (4.16) следует, что

$$\frac{p_1}{p_n} = \frac{2k}{k+1} M_n^2 - \frac{k-1}{k+1}. \quad (4.17)$$

Прирост давления в скачке уплотнения через приведенную скорость λ будет

$$\frac{p_1}{p_n} = \lambda_{нn}^2 \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_{нn}^2}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{нn}^2}. \quad (4.18)$$

Для прямого скачка $\lambda_{нn} = \lambda_n$. Прирост плотности в скачке уплотнения

$$\rho_1/\rho_n = \lambda_{нn}^2. \quad (4.19)$$

Потери полного давления в скачке уплотнения определяются по уравнению

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_n^*} = \lambda_{nn}^2 \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{nn}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda_{nn}^2}} \right]^{\frac{1}{k-1}} = \frac{q(\lambda_{nn})}{q\left(\frac{1}{\lambda_{nn}}\right)}. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) справедливо и для прямого скачка уплотнения, когда $\lambda_{nn} = \lambda_n$. Помимо коэффициента давления σ ударно-адиабатический процесс течения со скачками уплотнения оценивается приростом энтропии при переходе через ударную волну

$$\Delta S = S_1 - S_n = R \ln \frac{p_n^*}{p_1^*} = -R \ln \sigma. \quad (4.21)$$

Угол поворота потока в косом скачке уплотнения можно определить по уравнениям:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\lambda_{nn}^2} = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_n^2 \cos^2 \alpha}{\lambda_n^2 \sin^2 \alpha}; \quad (4.22)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \sin^2 \alpha}{\frac{k+1}{2} M_n^2 \sin^2 \alpha}. \quad (4.23)$$

В этих уравнениях согласно рис. 33

$$\beta = \alpha - \omega. \quad (4.24)$$

Используя равенство (4.24) можно получить

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{M_n^2 \sin^2 \alpha - 1}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2\right) \operatorname{tg} \alpha - M_n^2 \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (4.25)$$

Поскольку практические расчеты по уравнениям (4.22) ... (4.25) громоздки, на рис. 34...37 даны графики решения этих уравнений для различных показателей адиабаты k . Многие задачи на течения с косыми скачками уплотнения легко решаются с помощью ударной поляры. На рис. 38 приведен совмещенный треугольник скоростей косого скачка уплотнения. Уравнение кривой, описываемой концом вектора скорости за косым скачком уплотнения ω_1 , при постоянном значении скорости набегающего потока ω_n и переменных углах поворота потока ω в координатах u , v будет

$$v_1^2 = (\omega_n - u_1)^2 \frac{u_1 - \frac{a_{kp}^2}{\omega_n}}{\frac{a_{kp}^2}{\omega_n} - u_1 + \frac{2}{k+1} \omega_n}, \quad (4.26)$$

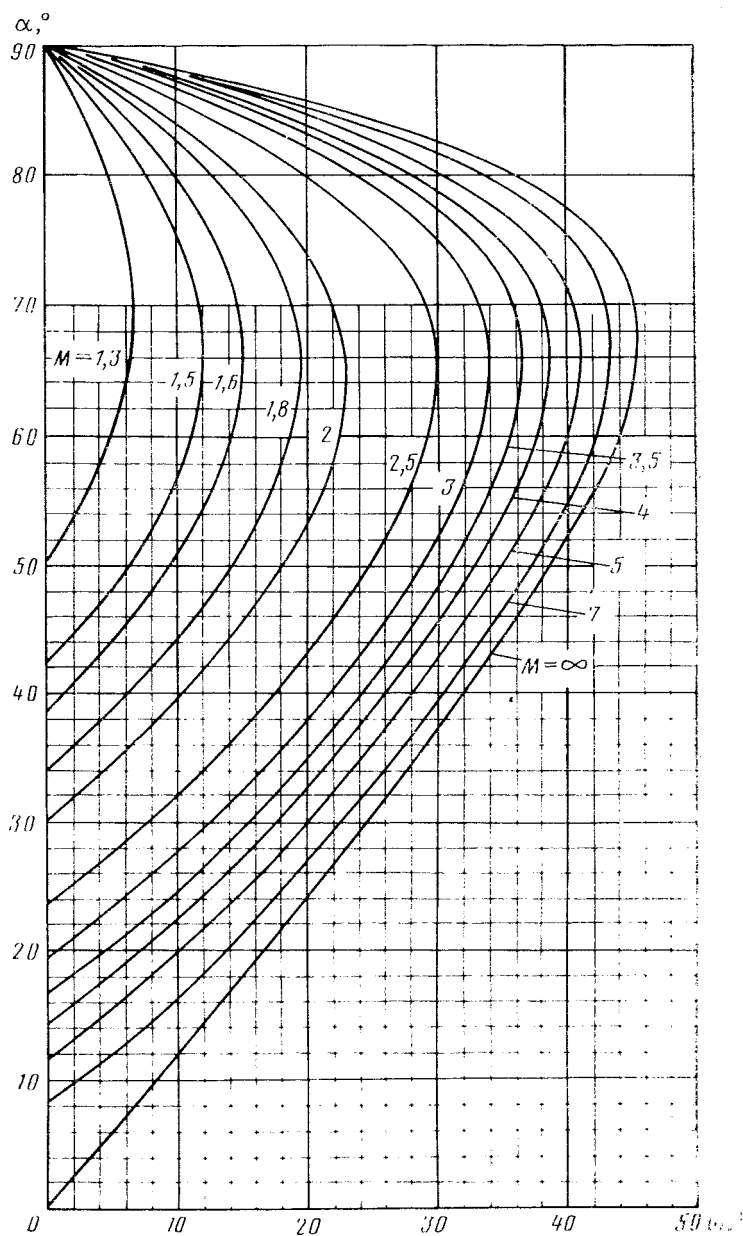


Рис. 34. Зависимость α от ω и M для $k=1,40$

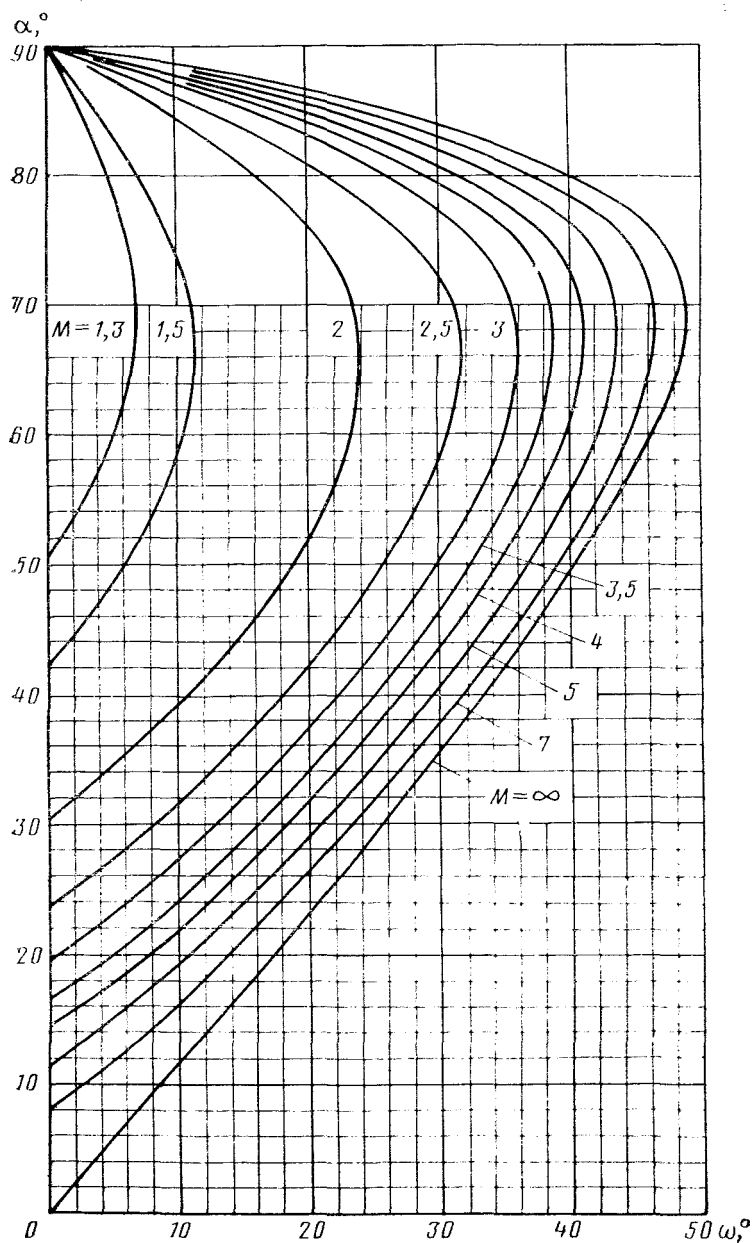


Рис. 35. Зависимость α от ω и M для $k=1,33$

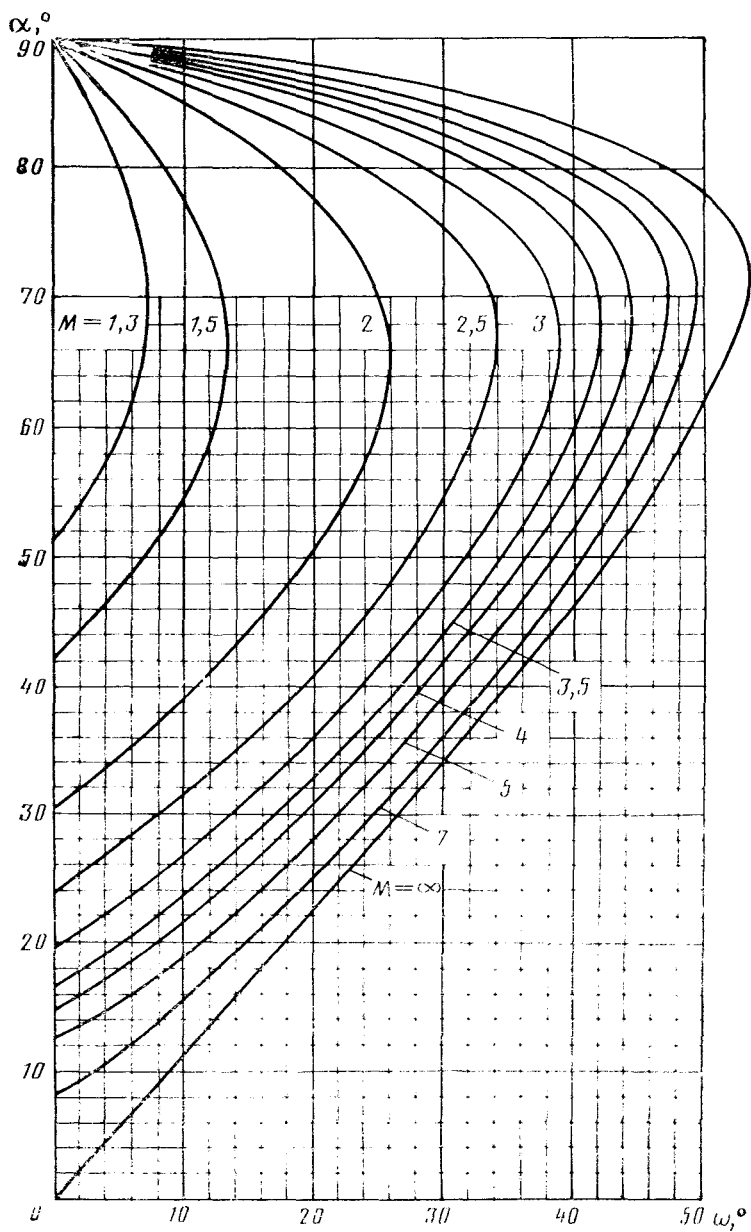


Рис. 36. Зависимость α от ω и M для $k=1.25$

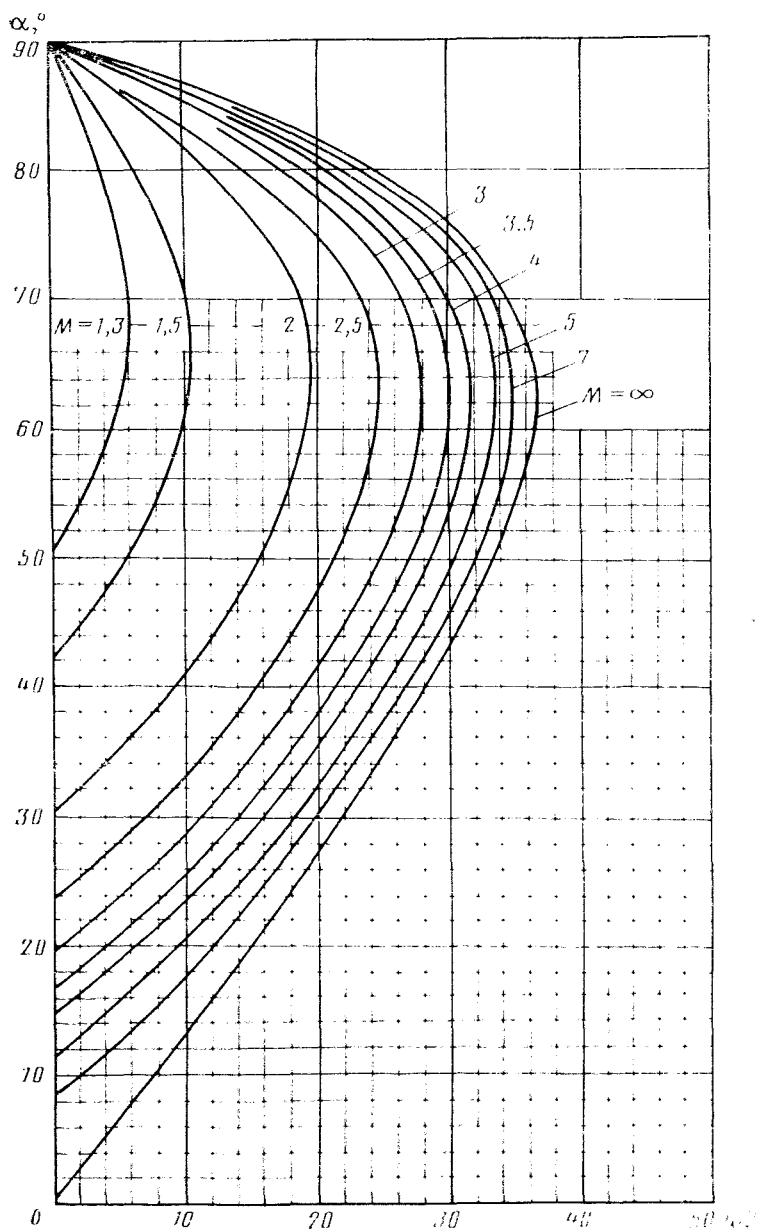


Рис. 37. Зависимость α от ω и M для $k=1.66$

или в безразмерном виде

$$\lambda_v^2 = (\lambda_H - \lambda_u)^2 \frac{\lambda_u - \frac{1}{\lambda_H}}{\frac{2}{k+1} \lambda_H - \left(\lambda_u - \frac{1}{\lambda_H} \right)}, \quad (4.27)$$

где

$$\lambda_H = w_H/a_{KP}; \lambda_u = u_1/a_{KP}; \lambda_v = v_1/a_{KP}.$$

Уравнение (4.27) в координатах λ_u, λ_v есть гипоциклоида (декартов лист) (рис. 39). Для косого скачка уплотнения ветви гипоциклоиды (точка E_3) физического смысла не имеют. Для практических расчетов используется ветвь AB . На рис. 40 приведена в масштабе ударная поляра, построенная для газа с показателем адиабаты $k=1,40$.

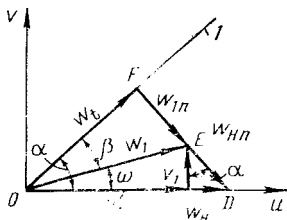


Рис. 38. Совмещенный треугольник скоростей косого скачка уплотнения:

$$OD \sim \omega_H; FD \sim \omega_H n; FE \sim \omega_{1n};$$

1—фронт скачка

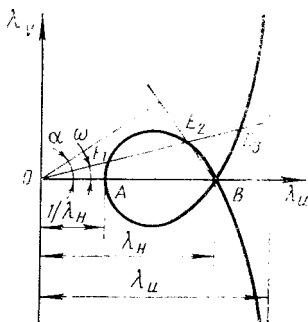


Рис. 39. Гипоциссонда (декартов лист)

Отражение косого скачка от твердой стенки показано на рис. 41 и 42. На рис. 41 показано, так называемое, правильное отражение, когда сверхзвуковой набегающий поток с числом $M_{\text{н}}$, пройдя через косой скачок уплотнения, отклоняется на угол ω_1 и движется далее с числом $M_1 < M_{\text{н}}$. Около стенки такое течение невозможно. Поэтому в точке B возникает второй косой скачок, отклоняющий поток в обратном направлении на тот же угол. Этих условий достаточно, чтобы рассчитать все течение.

В том случае, когда угол поворота потока ω_2 оказывается больше предельно возможного для данного числа M_1 течение с правильным отражением реализоваться не может. В таком случае точка B отходит от стенки, скачок BC поворачивает поток на $\omega_{\max}$ при данном числе M_1 , не выводя его на течение параллельно твердой стенки. Между точкой B и стенкой возникает прямой скачок BD с дозвуковым потоком за ним. Пунктиром на рис. 42 показана граница между сверхзвуковым и дозвуковым потоками. Это граница тангенциального разрыва скорости для идеальной модели газа или

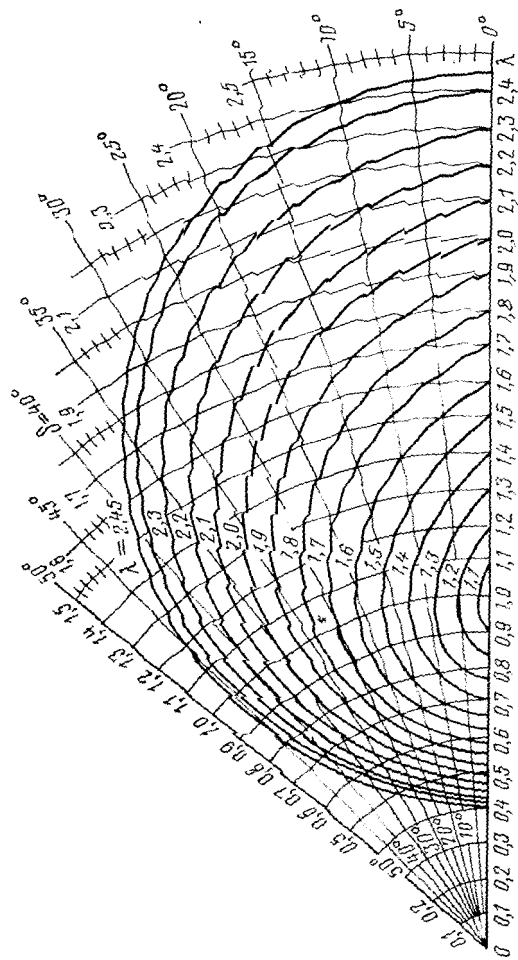


Рис. 40. Ударная поляра для $k=1,40$

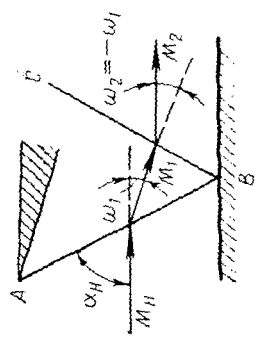


Рис. 41. Правильное отражение косого скачка от твердой стенки

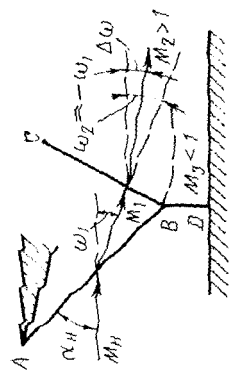


Рис. 42. Маховое отражение косого скачка

слой смешения в случае вязкой жидкости. Такое течение называется маховским отражением косого скачка. Размер зоны течения с прямым скачком уплотнения находится из уравнения неразрывности.

Косые скачки от границы свободной струи отражаются характеристиками (рис. 43). Это связано с тем, что повышенное давление p_1 после скачка выравнивается с давлением на границе струи через расширение в пучке характеристик. Характеристики от твердой

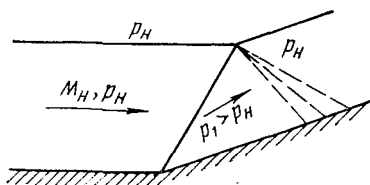


Рис. 43. Отражение косого скачка от границы свободной струи

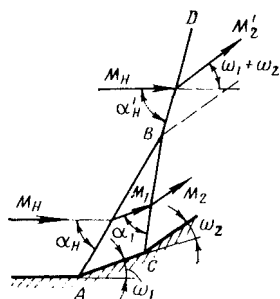


Рис. 44. Пересечение двух скачков уплотнения с образованием тройной точки

стенки и границы свободной струи отражаются скачками уплотнения. Пересечение двух косых скачков уплотнения с образованием тройной точки показано на рис. 44. Скачки AB и CB заданы числом M_H набегающего потока и углами поворота ω_1 и ω_2 . Скачок BD должен повернуть поток на суммарный угол $\omega_1 + \omega_2$. Пунктирная линия, выходящая из точки B , представляет линию тангенциального разрыва скорости.

Полные давления у потоков ниже пунктирной линии больше, чем за скачком BD , а также $M_2 > M_2'$, так как внизу поток проходит через систему скачков уплотнения с меньшими потерями полного давления. Если угол поворота потока $\omega_1 + \omega_2$ окажется больше предельного для данного числа M_H , то скачок BD будет прямым, а поток за ним будет дозвуковым, пунктирная линия тангенциального разрыва скорости будет криволинейной.

Если на скачок уплотнения падает волна разрежения, то скачок уплотнения ослабляется, постепенно превращаясь в волну разрежения.

§ 2. СВЕРХЗВУКОВОЕ ТЕЧЕНИЕ С НЕПРЕРЫВНЫМ УВЕЛИЧЕНИЕМ СКОРОСТИ

При обтекании сверхзвуковым потоком внешнего тупого угла (рис. 45) поток адиабатически расширяется при повороте волн разрежения на угол φ . Положение волны разрежения определяется уравнением

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M}. \quad (4.28)$$

Отсчет углов поворота характеристик φ условились производить от звуковой характеристики. В этом случае приведенная скорость определяется уравнением

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi. \quad (4.29)$$

Если набегающий поток сверхзвуковой, то к фактическому углу поворота характеристик φ надо добавить фиктивный угол поворота характеристики от звукового потока до заданного потока λ_H . Величина фиктивного угла поворота характеристики находится по формуле (4.29).

Угол поворота потока определяется по формуле

$$\delta = \varphi + \alpha - \pi/2. \quad (4.30)$$

Уравнение линии тока

$$\frac{r}{r_0} = \left[\cos \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right]^{-\frac{k+1}{k-1}}, \quad (4.31)$$

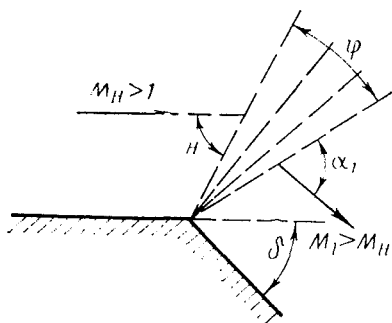


Рис. 45. Схема течения около внешнего тупого угла

где r_0 — радиус на звуковой характеристике; r — текущее значение радиуса при повороте характеристики на угол φ .

Задачи на течения около внешнего тупого угла легко решаются с помощью специальных газодинамических таблиц, которые помещены в приложении для различных показателей адиабаты k .

Задачи

4.1. Самолет летит у земли со сверхзвуковой скоростью. Определить число M и скорость полета, если манометр, подключенный к насадке полного давления, показал избыточное давление 2800 мм рт. ст. Давление и температуру в окружающей среде считать стандартными.

4.2. Какое давление покажет манометр, подключенный к насадке полного давления летательного аппарата, совершающего полет на высоте 20 км со скоростью 2660 км/ч?

4.3. Модель самолета с прямоточным ВРД совершает полет на высоте $H=11$ км с числом $M=2$. На входе в двигатель реализуется прямой скачок уплотнения. Определить параметры потока за прямым скачком уплотнения на заданном режиме полета (p_1 , T_1 , ω_1 , p_1^*).

4.4. Струя воздуха движется со скоростью 520 м/с, имея давление $p_H=10^5$ Па и температуру $T_H=323$ К. Определить скорость,

температуру и давление за прямым скачком уплотнения, возникшем в потоке.

4.5. Определить, при каком числе M набегающего потока давление торможения за прямым скачком уплотнения составляет одну десятую от давления торможения набегающего потока.

4.6. Показать, что число M_1 за прямым скачком уплотнения можно определить по уравнению

$$M_1^2 = \frac{\frac{2}{k-1} + M_n^2}{\frac{2k}{k-1} M_n^2 - 1},$$

где M_n — число M до скачка уплотнения.

4.7. Скорость движения волны давления равна трем скоростям звука в невозмущенном потоке воздуха. Определить, какое требуется для этого повышение давления и с каким числом M движется поток за ударной волной.

4.8. Взорвавшийся на поверхности земли снаряд повы-

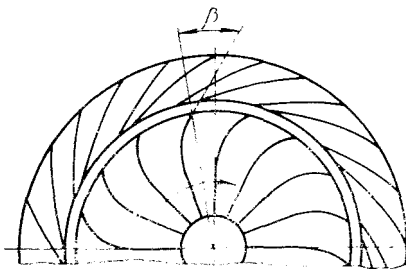


Рис. 46. Активное колесо центробежного компрессора

сил давление в месте взрыва вдвое. Считая параметры воздуха у земли стандартными, определить скорость движения ударной волны без учета затухания.

4.9. Скорость сверхзвукового потока можно подсчитать, если измерить с помощью специального пасадажа полное давление за прямым скачком уплотнения p_1^* и статическое давление в потоке p_n . Расчет производят по известному уравнению Рейля

$$\frac{p_n}{p_1^*} = \frac{1}{k_n^2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} k_n^2 \right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{k_n^2} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Получите аналогичное уравнение, записав его через число M в общем виде, а также с числовыми коэффициентами при $k=1,4$.

4.10. Колесо центробежного компрессора с внешним диаметром 650 мм имеет активные лопатки с углом изгиба $\beta=25^\circ$ (рис. 46). При вращении колеса с частотой 15000 мин⁻¹ относительная скорость на выходе из колеса компрессора 120 м/с, температура торможения $T_2^*=700$ К, а давление в потоке $p_2=2,5 \cdot 10^5$ Па. Пренебрегая изменением параметров в безлопаточном диффузоре (зазор между колесом и лопаточным диффузором) и считая, что поток покидает колесо компрессора с заданным углом β , определить параметры потока p_3 , c_3 и T_3 в начале канала лопаточного диффузора за прямым скачком уплотнения, а также коэффициент давления σ .

4.11. Получите уравнения для скачка скорости, давления, температуры и плотности при течении потока с прямым скачком уплотнения. Произведите расчет для потока с числом M от 1,5 до 5; по результатам расчета постройте графики

$$\Delta w = w_n - w_1 = f(M); \Delta p = p_1 - p_n = f(M);$$

$$\Delta T = T_1 - T_n = f(M); \Delta q = q_1 - q_n = f(M).$$

4.12. Потери полного давления в прямом скачке уплотнения определяются по известному уравнению

$$\sigma = \frac{p_1^*}{p_n^*} = \lambda^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Получите это уравнение через число M набегающего потока.

4.13. Сравните прирост плотности и температуры в ударной волне и в идеальном адиабатическом процессе, если в обоих случаях повышение давления $p_1/p_n = 15$. Расчет провести для воздуха и для продуктов сгорания с показателем адиабаты $k = 1,25$.

4.14. На рис. 20 изображена схема сверхзвуковой аэродинамической трубы, работающей на расширении атмосферного воздуха с помощью эксгаустера. Определить требуемую для работы трубы степень повышения давления в эксгаустере p^*/p_d для двух вариантов процесса торможения сверхзвукового потока в диффузоре трубы:

1) торможение потока происходит только в прямом скачке уплотнения;

2) торможение потока происходит в прямом скачке уплотнения и, кроме того, в дозвуковом диффузоре поток адиабатически тормозится до числа $M_d = 0,2$.

В обоих случаях скачок уплотнения реализуется при входе в диффузор (сечение 2—2). Расчет провести для чисел M в рабочей части трубы от 1,5 до 5. По результатам расчета построить график $p^*/p_d = f(M)$.

4.15. Определить размеры аэродинамической трубы ($F_{тр} = b \times h_{тр}$ и $F_{р.ч} = b \times h_{р.ч}$), работающей на расширении атмосферного воздуха ($B_0 = 760$ мм рт. ст.; $T_0 = 288$ К) с числом $M_{р.ч} = 4$. Рабочая часть трубы квадратная; в качестве эксгаустера использовать два параллельно работающих вакуум-насоса ВН-6 с расходом 155 л/с каждый. Давление и скорость потока перед вакуум-насосом принять равным давлению и скорости за прямым скачком уплотнения.

4.16. С какими размерами рабочей части и критического сечения можно сделать аэродинамическую трубу, работающую на расширении атмосферного воздуха ($B_0 = 760$ мм рт. ст.; $T_0 = 288$ К) с числом $M = 3$ в рабочей части, если рабочую часть делать квадратной, а в качестве эксгаустера использовать два параллельно работающих вакуум-насоса ВН-300 с расходом 300 л/с каждый? Давле-

ние и скорость потока перед вакуум-насосом принять равными давлению и скорости за прямым скачком уплотнения.

4.17. На рис. 47 изображена часть сверхзвуковой аэродинамической трубы с приборами для измерения полного и статического давлений, которые регистрируются ртутными манометрами. Определить число M и приведенную скорость λ по показаниям манометров ΔH^* и Δh . Внешнее давление считать стандартным ($B_0 = 760$ мм рт. ст.). Расчеты произвести для следующих значений ΔH^* и Δh :

1) $\Delta H^* = 1722$ мм, $\Delta h = -320$ мм;

2) $\Delta H^* = 907$ мм; $\Delta h = -560$ мм;

3) $\Delta H^* = 440$ мм; $\Delta h = -647$ мм.

Определить для всех режимов работы трубы полное давление p^* в набегающем потоке.

4.18. На рис. 48 изображен канал переменного сечения. Воздух, пройдя первое критическое

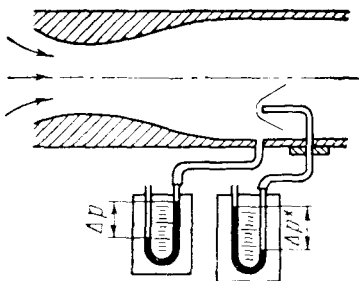


Рис. 47. Сверхзвуковая труба с приборами замера давлений

сечение $F_{кр}'$, разгоняется до сверхзвуковой скорости и в сечении $k-k$ тормозится в прямом скачке уплотнения. Определить размер второго узкого сечения $F_{кр}''$ при условии, что там поток движется также со скоростью звука. Как будет зависеть $F_{кр}''$ от числа M перед прямым скачком уплотнения?

4.19. В сверхзвуковом сопле движется газ со скачком уплотнения внутри сопла (рис. 49). Построить качественный график изменения статического давления и скорости потока по длине сопла для центральной струйки. Отметить на графике внешнее давление p_n и значение критической скорости звука.

4.20. Рассчитать и построить график изменения давления на срезе сверхзвукового сопла p_n в зависимости от полного давления p^* на входе в сопло, если известно, что $F_{кр}/F_a = 0,5$; из сопла вытекает воздух в среду с давлением $B_0 = 760$ мм рт. ст. Давление p^* меняется от $1,5 \cdot 10^5$ до $15 \cdot 10^5$ Па.

4.21. На установке, изображенной на рис. 50, проводится опыт с обтеканием воздушным потоком симметричного клина с половиной угла при вершине $\omega = 15^\circ$. Число M на выходе из сопла равно 3, давление в потоке равно давлению окружающей среды и составляет 760 мм рт. ст. Определить показания U -образного ртутного манометра, замеряющего давление на боковой грани клина.

4.22. В аэродинамической трубе с открытой рабочей частью испытывается клиновидное тело с половиной угла при вершине $\omega = 15^\circ$ (см. рис. 50). Подсчитать параметры потока за косым скачком уплотнения (p_1^* , p_1 , T_1 , ω_1) и угол скачка α , если известно, что полное давление в сопле $p^* = 100 \cdot 10^5$ Па, $T^* = 400$ К, расширение в сопле происходит до внешнего давления.

Указание: при решении задачи воспользоваться кривыми $\alpha = f(\omega, M)$ или ударной полярой.

4.23. Определить минимальное значение числа M набегающего потока воздуха, при котором еще реализуется косой скачок уплотнения на клине с углом $\omega = 15^\circ$ (см. рис. 50). Определить, какой

при этом будет угол скачка α .

4.24. На рис. 51 даны характеристики. Нарисуйте профили скоростей потоков, которые могли дать характеристики такого вида

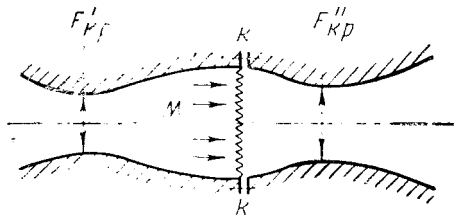


Рис. 48. Канал с двумя критическими сечениями

4.25. На рисунке 52 приведены поля скоростей потоков. Нарисуйте характеристики для этих потоков.

4.26. Наблюдатель услышал звук пролетающего на высоте 10 км самолета в то время, когда самолет удалился от наблюдателя на 10 км по горизонтали. Пренебрегая кривизной ударной волны, определить примерное число M полета самолета.

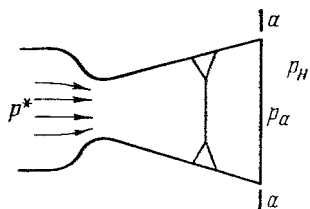


Рис. 49. Сопло Лавеля со скачком уплотнения

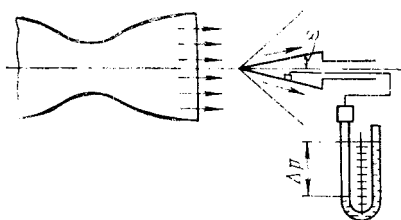


Рис. 50. Клин в сверхзвуковом потоке

4.27. Угол поворота потока ω в косом скачке уплотнения зависит от числа M набегающего потока и угла скачка α . Найдите уравнение, связывающее число M потока и угол скачка α , при котором достигается максимальный угол поворота потока.

4.28. На рис. 53 дана схема плоского двухскачкового диффузора с постоянным углом клина $\omega = 10^\circ$. Определить коэффициент полного давления $\sigma = p_{1*}/p_{2*}$ в зависимости от числа M_1 набегающего потока при условии, что внешняя обечайка диффузора перемещается, обеспечивая при всех числах M расчетную схему скачков уплотнения. Расчеты провести для чисел $M_1 = 2, 3, 4, 5$, по результатам расчета построить график $\sigma_2 = f(M_1)$.

4.29. Рассчитать сверхзвуковой участок плоского двухскачкового диффузора (см. рис. 53), обеспечивающего наименьшие потери полного давления при изменении числа M_1 от 1,5 до 5. По результатам расчета построить график $\omega = f(M_1)$, который отвечает течению с $\sigma_{\max}$.

4.30. Определить коэффициент давления σ двухскачкового плоского диффузора (см. рис. 53) при $M_n=3$ и $\omega=18^\circ$. Сравнить полученное значение σ с потерями полного давления при том же числе M в прямом скачке уплотнения.

4.31. Плоская ударная волна отражается от плоской поверхности абсолютно твердого тела без потери энергии (рис. 54). Определить давление потока за отраженной волной [4].

4.32. Плоская пластина, установленная под углом атаки $\omega=$

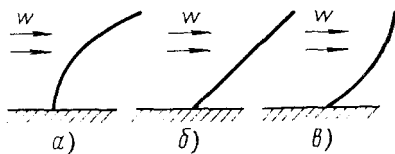


Рис. 51. Характеристики различного вида

$=25^\circ$, обдувается сверхзвуковым потоком воздуха (рис. 55). При каком числе M набегающего потока прекратится безотрывное обтекание верхней стороны пластины и под каким углом α при этом будет располагаться косой скачок уплотнения с нижней стороны пластины?

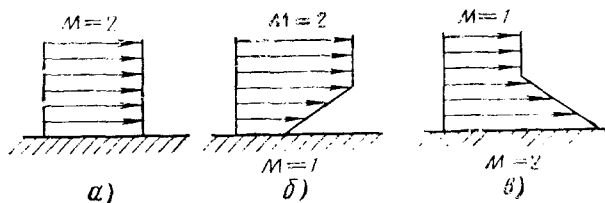


Рис. 52. Поля скоростей потоков

4.33. Плоская пластина, находящаяся под некоторым углом атаки, обдувается сверхзвуковым потоком воздуха с числом $M=3$. При каком угле атаки ω косой скачок уплотнения превратится в отошедшую криволинейную ударную волну?

4.34. В сверхзвуковой аэродинамической трубе предстоит испытать модель ромбовидного крыла с передним углом заострения 12° на числах M от 2 до 3. Пренебрегая вязкостью, определить максимально допустимую хорду крыла b при нулевом угле атаки, при высоте рабочей части трубы $h=300$ мм.

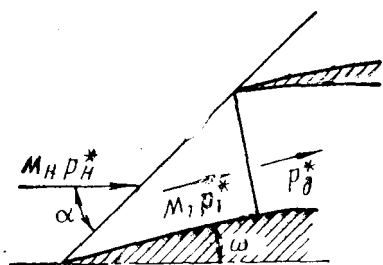
4.35. Как изменится длина хорды b для условий задачи 4.34, если число M набегающего потока уменьшить до 1,5?

4.36. На рис. 56 показана схема течения в несимметричном диффузоре с внутренним сжатием. Для заданной формы канала и числа $M_n=3$ найти M_3 и M_4 , а также потери полного давления в зонах, где реализуется течение с M_3 и M_4 .

4.37. Плоский идеальный сверхзвуковой поток движется вдоль стенки с двумя поворотами потока на $\omega_1=8^\circ$ и $\omega_2=10^\circ$ (см. рис. 44). Определить число M и полное давление p^* за скачками уплотнения BC и BD при числах M набегающего потока $M_n=2$ и 3 и полном давлении p_n^* .

4.38. В плоском канале с изломом одной из стенок (рис. 57) движется идеальный воздушный поток с числом $M_n=3$. Определить состояние потока M_3 , p_3^* за вторым отраженным скачком уплотнения при $\omega=15^\circ$.

4.39. Как изменится решение задачи 4.38, если набегающий поток движется с числом $M_n=2$?



4.40. Определить длину l и высоту горла h_r сверхзвукового диффузора плоской аэродинамической трубы, рассчитанной на число $M_n=3$, с углом поворота потока $\omega=10^\circ$ при условии, что реализуется заданная на рис. 58 схема течения. Найти также числа M в зонах 1, 2, 3, 4, 5.

Рис. 53. Схема плоского двухскачкового диффузора

4.41. Доказать, что в косом скачке уплотнения при $M_n \rightarrow \infty$ и конечном значении угла поворота потока

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} \rightarrow \frac{k+1}{k-1}.$$

4.42. Для измерения скорости сверхзвукового потока в аэродинамических трубах иногда используют зонд в виде плоского клина с заданным углом заострения. Оптическая фотография обтекания клина с центральным углом $2\omega=10^\circ$ показала, что внутренний угол между скачками уплотнения симметричен относительно клина и равен 78° . Найти число M набегающего потока.

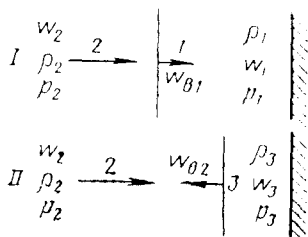


Рис. 54. Отражение плоской ударной волны

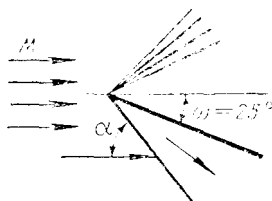


Рис. 55. Пластина в сверхзвуковом потоке

4.43. Определить качество ($K=c_y/c_x$), коэффициенты подъемной силы c_y и лобового сопротивления c_x пластины, находящейся в потоке воздуха при $M_n=3$ и угле атаки $\omega=10^\circ$ (см. рис. 55). Обтекание считать идеальным.

4.44. Плоская, бесконечно тонкая пластина, установленная под углом атаки $\omega=30^\circ$, обдувается сверхзвуковым воздушным потоком (см. рис. 55). При каком числе M набегающего потока прекратится безотрывное обтекание верхней стороны пластины и под ка-

жим углом при этом будет располагаться косой скачок уплотнения с нижней стороны пластины?

4.45. Летательный аппарат имеет крыло, размеры и форма поперечного сечения которого даны на рис. 59. Полет происходит на высоте $H=20$ км со скоростью $w=2650$ км/ч. Определить подъемную силу и силу лобового сопротивления одного метра длины крыла при нулевом угле атаки. Влияние вязкости не учитывать.

4.46. Подсчитайте максимальный угол поворота характеристики $\varphi_{\max}$ и максимальный угол поворота потока $\delta_{\max}$ при течении вокруг внешнего тупого угла продуктов сгорания с показателем адиабаты $k=1,33$. Сравните полученные значения

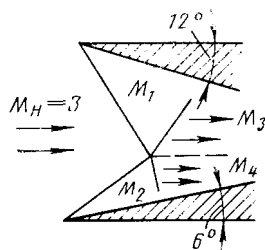


Рис. 56. Несимметричный диффузор внутреннего сжатия

$\varphi_{\max}$ и $\delta_{\max}$ с аналогичными величинами для воздуха.

4.47. Воздух с давлением $p^*=2,9 \cdot 10^5$ Па и температурой $T^*=400$ К вытекает в среду с давлением $p=10^5$ Па из плоского сужающегося сопла с косым срезом (рис. 60). Определить скорость, давление и температуру потока на срезе сопла и угол поворота потока δ , если угол среза $\varphi=40^\circ$. Прокомментируйте результаты о характере течения струи вне сопла.

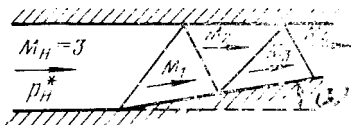


Рис. 57. Сверхзвуковой поток с отраженными скачками уплотнения

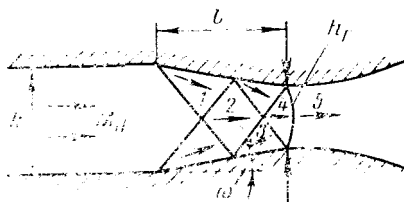


Рис. 58. Схема течения в сверхзвуковом трубном диффузоре

4.48. Воздушный поток, движущийся со скоростью звука, подошел к точке А, являющейся вершиной внешнего тупого угла (рис. 61). Что нужно сделать с потоком, чтобы он безотрывно мог отклониться на угол $\delta > 130^\circ 29'$?

4.49. Определить скорость потока на выходе из соплового аппарата турбины при перепаде давлений $p^*/p=1,4$ и температуре $T^*=1200$ К (рис. 62). Как изменится величина скорости, угол выхода потока, потребный перепад давления, если расширение будет происходить и в косом срезе сопла. Узкое сечение соплового аппарата расположено по нормам к выходной кромке сопла; через турбину проходит газ с показателем адиабаты $k=1,33$ и газовой постоянной 287 Дж/(кг·К).

4.50. Плоское сужающееся сопло парциальной газовой турбины установлено под углом $\alpha=19^\circ$ (рис. 63). Продукты сгорания с температурой $T^*=1100\text{ К}$ в сечении r_0 движутся со скоростью звука. Определить величину скорости на выходе из сопла, угол

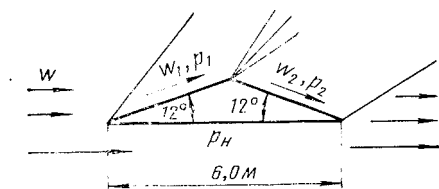


Рис. 59. Треугольное крыло в сверхзвуковом потоке

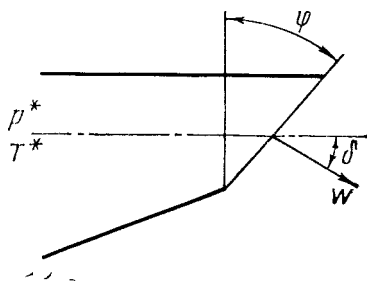


Рис. 60. Сопло с косым срезом

отклонения потока от геометрической оси сопла δ , потребный перепад давлений для расчетного течения и величину радиуса r при профилировании внешней стенки сопла. Принять $k=1,25$, $R=290\text{ Дж/(кг·К)}$.

4.51. Плоское сопло активной газовой турбины установлено под углом $\alpha=22^\circ$, отношение $b/b_{кр}=1,83$, давление и температура газа в сопле известны: $p^*=18,5 \cdot 10^5\text{ Па}$, $T^*=900\text{ К}$. Определить давле-

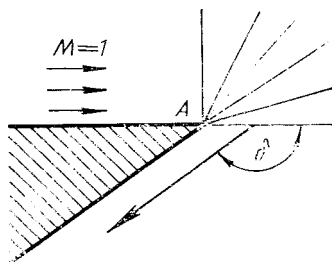


Рис. 61. Течение вокруг внешнего тупого угла

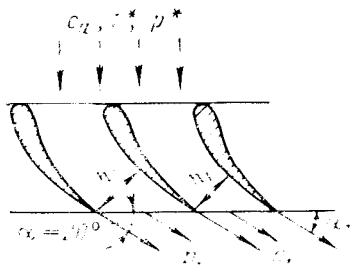


Рис. 62. Течение в сопловом аппарате турбины

ние, температуру, скорость и направление потока на выходе из сопла, а также размер A в случае профилирования внешней стенки сопла (рис. 64). Принять $k=1,33$, $R=287\text{ Дж/(кг·К)}$.

4.52. Под каким углом α надо установить сверхзвуковое плоское сопло из задачи 4.51 (см. рис. 64), чтобы расширения в косом срезе не было?

4.53. Рассчитать и построить плоское сверхзвуковое сопло с косым срезом для заданных условий на выходе из сопла:

$$\lambda=2,0, \delta=10^\circ, p=10^5\text{ Па}.$$

Размер критического сечения $b_{кр}=0,05$ м. Определить угол установки сопла α , размер b , полное давление в сопле p^* . В сопле движется воздух с показателем адиабаты $k=1,4$, схему течения см. на рис. 64.

4.54. В сверхзвуковом плоском сопле с косым срезом (см. рис. 64) известны параметры потока на входе в сопло: $p^*=10^6$ Па,

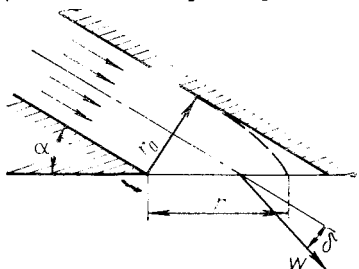


Рис. 63. Профилированное сопло с косым срезом

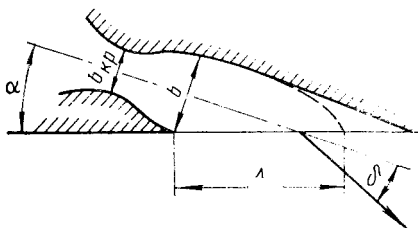


Рис. 64. Сверхзвуковое сопло с косым срезом

$T^*=1000$ К, $k=1,4$, $R=287$ Дж/(кг·К), $\alpha=30^\circ$, $b_{кр}/b=0,85$. Определить состояние потока на срезе сопла: p , T , λ , w , δ размер $A/b_{кр}$ при условии расчетного расширения в сопле и в косом срезе.

4.55. Одна из стенок плоского цилиндрического канала повернута на угол ω . Найти максимальный угол поворота потока ω в зависимости от числа M набегающего потока, который обеспечивает после косоого скачка уплотнения два правильных отражения.

Глава V

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Отличие гидродинамической модели реальной жидкости от идеальной состоит в том, что реальная жидкость обладает вязкостью и теплопроводностью. Вязкость жидкости приводит к появлению внутреннего трения, а теплопроводность — к термодинамической необратимости движения.

§ 1. ВЯЗКОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Вязкостью называется способность жидкостей и газов оказывать сопротивление изменению формы. Диффузия молекул, а в турбулентном движении и целых молей, сопровождающаяся переносом количества движения и тепла из одного слоя в другой, является причиной возникновения силы трения и переноса тепла.

Напряжение трения ламинарного режима течения находится из уравнения Ньютона:

$$\tau = -\mu \frac{dw}{dn}. \quad (5.1)$$

Коэффициент динамической вязкости μ измеряется в П (пузах) или Па·с ($1\text{П} = 10^{-1}\text{Па}\cdot\text{с} = 10^{-1}\text{Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$) и зависит от физических свойств жидкости, температуры и давления, однако влияние давления заметно проявляется только при $p > 150 \cdot 10^5$ Па. Зависимость $\mu = f(T)$ в большинстве случаев определяется по эмпирическим формулам.

Для воды обычно пользуются формулой Пуазейля:

$$\mu = \frac{0,0178q}{1 + 0,0337t + 0,00022t^2}, \quad (5.2)$$

где q — плотность воды в г/см³ при температуре t в °С. Ниже приводятся значения μ в П (паузы), вычисленные по формуле (5.2) для ряда температур t (табл. 2).

Таблица 2

$t, ^\circ\text{C}$	0	10	20	30	40	50
$\mu, \text{П}$	0,01788	0,01306	0,01004	0,00801	0,00656	0,0055

$t, ^\circ\text{C}$	60	70	80	90	100
$\mu, \text{П}$	0,00474	0,00408	0,00357	0,00314	0,00284

Для газов и паров используется степенная формула:

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^\omega, \quad (5.3)$$

где ω — показатель степени от 0,5 до 1.

Для воздуха $\omega = 0,76$; $\mu_0 = 1,72 \cdot 10^{-5}$ Па·с при $T_0 = 273$ К. Ниже

приводится табл. 3 значений коэффициента динамической вязкости μ для некоторых жидкостей и воздуха. Помимо коэффициента динамической вязкости μ существует коэффициент кинематической вязкости ν , который с μ связан соотношением $\nu = \mu/\rho$ ($\text{м}^2/\text{с}$).

Величина коэффициента кинематической вязкости, измеренная в $\text{см}^2/\text{с}$, называется стоксом (Ст). В справочниках иногда дается значение этого коэффициента в сантистоксах ($1 \text{ сСт} = 10^{-2}$ Ст), который равен $10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$.

Таблица 3

Среда	$t, ^\circ\text{C}$	$\mu, \text{Па}\cdot\text{с}$
Воздух	20	$1,7 \cdot 10^{-5}$
СО ₂ жидкая	20	$7 \cdot 10^{-5}$
Бензол	20	$6,4 \cdot 10^{-4}$
Ртуть	—21,4	$1,9 \cdot 10^{-3}$
»	0	$1,6 \cdot 10^{-3}$
»	100	$1,2 \cdot 10^{-3}$
»	300	$1,0 \cdot 10^{-3}$
Глицерин	0	4,6
»	20	$8,5 \cdot 10^{-1}$

§ 2. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Течения вязкой жидкости по характеру происхождения сопротивления делятся на ламинарный и турбулентный режимы.

Режим течения характеризуется критерием Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho w d}{\mu} = \frac{w d}{\nu}. \quad (5.4)$$

Ламинарный режим существует, когда число Рейнольдса данного течения меньше некоторого критического числа Рейнольдса

$$\text{Re} < \text{Re}_{\text{кр}}. \quad (5.5)$$

Критическое число Рейнольдса — это предельный режим течения, при котором еще сохраняется устойчивое ламинарное (слоистое) течение с обменом количествами движения между слоями только за счет молекулярного теплового движения. При ламинарном режиме течения напряжение трения между слоями определяется формулой (5.1).

Критическое значение число Рейнольдса для различных видов течений различное. Так для течения в трубах $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 2300$, для обтекания шара свободным потоком $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 3,2 \cdot 10^5$, для течения в по-

граничном слое на плоской пластине

$$\text{Re}_{\text{кр}} = \frac{\rho u_0 x}{\mu} = 10^5 \dots 10^6,$$

где x — длина обтекаемой пластины; u_0 — скорость на границе пограничного слоя. Критическое значение числа Рейнольдса в сильной степени зависит от выбранного линейного размера, интенсивности и масштаба турбулентности набегающего потока.

Турбулентный режим течения отличается от ламинарного тем, что перенос количества движения из одного слоя в другой осуществляется не только молекулярным движением, а главным образом в результате переноса отдельных частиц, объемов (молей) жидкости. Этот перенос осуществляется наличием в турбулентном течении помимо скорости направленного движения, так называемых, пульсационных составляющих скорости.

Мгновенные значения скоростей u , v , w , давления p и температуры T в турбулентном потоке записываются через средние параметры

$$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{T} \text{ и их пульсации } u', v', w', p', T'. \text{ Так } u = \bar{u} + u'; v = \bar{v} + v'; w = \bar{w} + w'; p = \bar{p} + p', T = \bar{T} + T'. \quad (5.6)$$

Осреднение производится по времени t . Наличие пульсаций скорости в турбулентном потоке приводит к появлению дополнительных напряжений. Согласно гипотезе Прандтля средние значения напряжений турбулентного течения для площадки нормальной к оси y определяются

$$\tau_x = -\overline{\rho u' v'}; \tau_z = -\overline{\rho v' w'}; \tau_y = -\overline{\rho v' v'}. \quad (5.7)$$

Принимая, что

$$u' = l \frac{du}{dy}, \quad (5.8)$$

и считая турбулентность изотропной, получим

$$\tau_x = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \mu_t \frac{du}{dy}, \quad (5.9)$$

где μ_t — коэффициент турбулентной вязкости, равный

$$\mu_t = \rho l^2 \frac{du}{dy}.$$

С учетом молекулярного переноса напряжение τ_x будет

$$\tau_x = \mu \frac{du}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = (\mu + \mu_t) \frac{du}{dy}. \quad (5.10)$$

В этих уравнениях l — некоторый линейный размер, называемый длиной пути перемешивания.

§ 3. УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ—СТОКСА

Уравнение движения для вязкой жидкости отличается от уравнений Эйлера только тем, что в качестве поверхностных сил здесь действуют помимо сил гидродинамического давления еще касательные и нормальные напряжения. Так уравнение Навье—Стокса в напряжениях записывается:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right); \\ \frac{dv}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right); \\ \frac{dw}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

где P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} —нормальные напряжения; τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{zx} , τ_{xz} , τ_{zy} , τ_{yz} —касательные напряжения. Касательные и нормальные напряжения можно записать через скорости деформации:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yx} &= \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \theta_x; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \mu \theta_y; \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \mu \theta_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

В нормальные напряжения P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} входит и гидростатическое давление P .

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= -p + \sigma_{xx}; \\ P_{yy} &= -p + \sigma_{yy}; \\ P_{zz} &= -p + \sigma_{zz}, \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} —добавочные нормальные напряжения, вызванные только вязкостью жидкости. Их значения через скорости деформации будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} w; \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} w; \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} w. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Используя зависимости (5.11) ... (5.14), получим уравнение Навье—Стокса при $\mu = \text{const}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho} \Delta u + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} w; \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\varrho} \Delta v + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} w; \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\varrho} \Delta w + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\varrho} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} w. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Здесь использовано обозначение для оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Известно всего несколько точных решений уравнений Навье—Стокса. Все они связаны с тем, что в этих примерах постановка задачи упрощает уравнения (5.15) и позволяет их проинтегрировать. Приведем здесь результаты двух таких задач.

Задача Пуазейля — о ламинарном течении вязкой, несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе без учета массовых сил. Направив ось x вдоль оси трубы, получаем, что $v = w = 0$, а $u = f(r)$, тогда y и z — компоненты уравнений (5.15) будут

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0,$$

а x — компонента уравнения (5.15) дает

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx},$$

или в полярных координатах

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\mu l}.$$

Интегрируя, получим

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2). \quad (5.16)$$

Имея профиль скорости, можно найти расход жидкости в трубе

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi R^4. \quad (5.17)$$

Другое решение уравнения Навье — Стокса — это ламинарное течение вязкой, несжимаемой жидкости между параллельными плоскостями — **течение Куэтта**. Рассматривается установившееся движение в направлении оси x . Все величины зависят, очевидно, только от координаты z , направленной поперек зазора между пластинами.

Пренебрегая массовыми силами, из уравнений (5.15) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (5.18)$$

Левая часть уравнения (5.18) от x не зависит, следовательно

$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.}$ Интегрируя выражения (5.18) дважды и определяя постоянные из граничных условий при $z=0$ и $z=l$, получим

$$u = -\frac{1}{2\mu} z(l-z) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.19)$$

Уравнения (5.18) могут быть проинтегрированы и для случая, когда одна из пластин движется со скоростью v . В этом случае изменятся только граничные условия — при $z=l$, $u=v$, а скорость в зазоре будет

$$u = \frac{z}{l} v - \frac{1}{2\mu} z(l-z) \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.20)$$

Используя уравнение для скорости в зазоре, можно найти расход, напряжение трения в зазоре и т. д.

Приближенные решения уравнения Навье — Стокса связаны с тем, что отдельные члены уравнения не учитываются.

Обычно приводится решение задачи о движении шара в вязкой жидкости, при этом инерционными и массовыми силами в уравнениях (5.15) пренебрегают, шар при своем движении не должен вращаться. В результате интегрирования уравнений движения в сферических координатах получим формулу для силы сопротивления шара:

$$Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g + 6\pi \mu R w. \quad (5.21)$$

Первый член правой части уравнения (5.21) представляет архимедову силу, второй член появляется только при относительном движении шара и обусловлен силами вязкости. Так как сила Q уравновешивается силой тяжести, которая равна $\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g$, ρ_0 — плотность шара, то из уравнения (5.21) получим

$$\mu w = \frac{2}{9} R^2 g (\rho_0 - \rho). \quad (5.22)$$

Это решение, полученное Стоксом, справедливо при $Re \leq 1$. Приведенное уравнение движения (5.15) справедливо для ламинарного движения или для мгновенных скоростей турбулентного течения. Нам обычно бывают известны средние скорости турбулентного течения. Проводя операцию осреднения по времени, уравнения (5.15) с использованием уравнения неразрывности и уравнений (5.6) ... (5.10), можно получить уравнение движения для турбулентного течения (уравнение Рейнольдса). Так для плоского течения оно запишется

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{\rho u' v'}).$$

Так как

$$\bar{\tau} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (-\overline{\rho u' v'}),$$

то может быть и такая запись:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y}.$$

§ 4. ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Основной задачей течения вязкой жидкости в трубах является определение сопротивления трубопровода. Универсальная формула для определения сопротивления, пригодная для любого режима течения,

$$\Delta p = \xi \frac{\varrho w^2}{2}. \quad (5.23)$$

Однако в этом уравнении коэффициент сопротивления ξ есть функция не только режима течения, но и геометрических форм проточной части. Аналогичного вида уравнение можно записать и для напряжения трения:

$$\tau = c_f \frac{\varrho w^2}{2}. \quad (5.24)$$

В уравнениях (5.23), (5.24) скоростной напор берется по средней скорости потока.

Используя уравнение (5.23), можно получить уравнение для определения падения давления по длине канала при равномерном движении жидкости

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\varrho w^2}{2}, \quad (5.25)$$

где λ — коэффициент сопротивления трубопровода $\lambda = 4c_f$; l — длина канала, на которой ищется падение давления; d — эквивалентный диаметр, который определяется через гидравлический радиус R_h

$$d = 4R_h.$$

Гидравлический радиус, в свою очередь, определяется

$$R_h = F/U,$$

где F — площадь, занятая жидкостью; U — смоченный периметр. Уравнение (5.25) записано для несжимаемой жидкости. Для сжимаемой жидкости падение давления Δp надо брать на элементе длины dx , а затем потери суммировать по всей длине, учитывая при этом изменение всех величин уравнения (5.25).

Коэффициент сопротивления λ для ламинарного режима с помощью выражения (5.16) можно найти теоретически:

$$\lambda = 64/\text{Re}. \quad (5.26)$$

Для турбулентных режимов течения в технически гладких трубах коэффициент сопротивления находится с помощью различных

эмпирических формул. Например, формула Блазиуса, справедливая в диапазоне $10^5 \geq \text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$:

$$\lambda = 0,3164 \sqrt[4]{\text{Re}}, \quad (5.27)$$

или формула Конакова, справедливая в широком диапазоне чисел Рейнольдса ($\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$):

$$\lambda = 1 / (1,8 \lg \text{Re} - 1,5)^2. \quad (5.28)$$

Для шероховатых труб в той области, где коэффициент сопротивления не зависит от числа Рейнольдса, можно пользоваться формулой

$$\lambda = 1 / \left(1,74 + 2 \lg \frac{1}{n} \right)^2, \quad (5.29)$$

где $n = \Delta/R$ — относительная шероховатость трубы; Δ — средняя высота неровностей; R — радиус трубы.

Уравнение Бернулли для вязкой несжимаемой жидкости при движении по трубам записывается так:

$$z + \frac{\alpha w^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + \sum h_r = \text{const}, \quad (5.30)$$

где $\sum h_r$ — суммарные потери энергии на преодоление потерь по длине и местные сопротивления; α — коэффициент кинетической энергии, учитывающий неравномерность распределения скорости в поперечном сечении (при $R < \text{Re}_{\text{кр}}$ $\alpha = 2$, при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$ $\alpha \approx 1,1$).

Для определения силы сопротивления, возникающей у тел в потоке, часто используют универсальные формулы типа

$$R_x = c_x \frac{\rho w^2}{2} F. \quad (5.31)$$

Коэффициент сопротивления c_x находится по справочникам в зависимости от формы тела и режима течения.

§ 5. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Вязкость жидкости проявляется главным образом вблизи обтекаемых поверхностей, в пограничном слое толщиной δ . Кроме того, пограничный слой характеризуется следующими линейными величинами:

а) толщиной вытеснения

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{qu}{q_0 u_0} \right) dy = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{qu}{q_0 u_0} \right) d\bar{y}; \quad (5.32)$$

б) толщиной потери импульса

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{qu}{q_0 u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) dy = \delta \int_0^1 \frac{qu}{q_0 u_0} \left(1 - \frac{u}{u_0} \right) d\bar{y}, \quad (5.33)$$

где q , u — текущие значения плотности и скорости в пограничном

слое; ρ_0 , u_0 — плотность и скорость в невозмущенном потоке (при $y \geq \delta$); $\bar{y} = y/\delta$ — относительная координата.

Задачи пограничного слоя решаются интегрированием дифференциального уравнения пограничного слоя:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (5.34)$$

Это дифференциальные уравнения для ламинарного течения в пограничном слое несжимаемой жидкости. Для турбулентного течения несжимаемой жидкости следует использовать уравнение (5.22). Учет сжимаемости приводит к дифференциальному уравнению Дордницина:

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\frac{T}{T_0} \right)^{\omega-1} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right], \quad (5.35)$$

которое дополняется уравнением неразрывности в новых переменных

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0.$$

В этих уравнениях $\xi = x$, $\eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy$, $V = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\rho}{\rho_0}$.

Другой метод решения задач пограничного слоя состоит в использовании уравнения количества движения пограничного слоя:

$$\frac{\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} + \frac{1}{u} (2\delta^{**} + \delta^*) \frac{du_0}{dx}. \quad (5.36)$$

Для интегрирования этого уравнения необходимы еще сведения о распределении скорости в пограничном слое.

Уравнение для профиля скорости в пограничном слое несжимаемой жидкости при ламинарном режиме течения

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3. \quad (5.37)$$

Совместное решение уравнений (5.1), (5.36) и (5.37) позволяет найти все параметры ламинарного пограничного слоя на пластинке при $\rho = \text{const}$

$$\delta = \frac{4,55x}{\sqrt{\text{Re}_x}}; \quad (5.38)$$

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,66}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad (5.39)$$

где c_f — местный коэффициент трения;

$$\text{Re}_x = \frac{\rho_0 u_0 x}{\mu_0}.$$

Для сжимаемой жидкости профиль скорости в пограничном слое при ламинарном режиме течения задается уравнением

$$\frac{u}{u_0} = \frac{3}{2} \frac{\eta}{\Delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\Delta} \right)^3, \quad (5.40)$$

где η — переменная Дородницына, а Δ — значение этой переменной при $y = \delta$

$$\eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy, \quad \Delta = \int_0^\delta \frac{\rho}{\rho_0} dy.$$

При таком профиле скорости расчет пограничного слоя на пластинке при отсутствии теплоотдачи, когда

$$T_w = T^* = T_0 \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \right),$$

позволяет найти

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left(1 + \frac{18}{35} \frac{k-1}{2} M_0^2 \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{\omega-1}{2}}; \quad (5.41)$$

$$c_f = \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,647}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{\omega-1}{2}}; \quad (5.42)$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1,74}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left(1 + \frac{48}{35} \frac{k-1}{2} M_0^2 \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{\omega-1}{2}}. \quad (5.43)$$

Если между обтекаемой стенкой и пограничным слоем существует теплообмен, то при подобии полей скорости и температуры ($\text{Pr}=1$) температура торможения в пограничном слое определится

$$T^* = (T_0^* - T_w) \frac{u}{u_0} + T_w. \quad (5.44)$$

Используя это уравнение и профиль скорости (5.40), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{T}{T_0} &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 - \frac{T_w}{T_0} \right) \frac{u}{u_0} + \frac{T_w}{T_0} - \frac{k-1}{2} M_0^2 \left(\frac{u}{u_0} \right)^2 = \\ &= \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 - \frac{T_w}{T_0} \right) \left[\frac{3}{2} \frac{\eta}{\Delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\Delta} \right)^3 \right] + \frac{T_w}{T_0} - \\ &\quad - \frac{k-1}{2} M_0^2 \left[\frac{3}{2} \frac{\eta}{\Delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\Delta} \right)^3 \right]^2. \end{aligned} \quad (5.45)$$

После чего находим

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{\frac{\omega-1}{2}} \left[\frac{T_w}{T_0} + \frac{5}{8} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 - \frac{T_w}{T_0} \right) - \frac{17}{35} \frac{k-1}{2} M_0^2 \right]. \quad (5.46)$$

$$c_f = \frac{\delta^{**}}{x} = \frac{0,647}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{\frac{\omega-1}{2}}; \quad (5.47)$$

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1,74}{\sqrt{\text{Re}_x}} \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{\frac{\omega-1}{2}} \left(\frac{T_w}{T_0} + \frac{13}{35} \frac{k-1}{2} M_0^2 \right). \quad (5.48)$$

Распределение скорости в турбулентном пограничном слое описывается либо логарифмическим профилем, полученным из уравнения (5.9):

$$\frac{u}{u_0} = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_0 u_0^2}} \ln\left(\frac{\eta}{\delta}\right), \quad (5.49)$$

где длина пути смещения $l = \kappa y$, а $\kappa = 0,4$, либо степенным уравнением

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}, \quad (5.50)$$

где показатель степени n для $Re_x = 10^6 \dots 10^8$ можно принять $n = 7$. Поскольку вблизи стенки местные числа Рейнольдса малы, то эта часть пограничного слоя имеет ламинарный режим течения, она называется ламинарным подслоем и распределение скорости в ламинарном подслое описывается уравнением прямой:

$$u/u_\lambda = y/\delta_\lambda. \quad (5.51)$$

Число Рейнольдса на границе ламинарного подслоя не зависит от числа M_0 внешнего потока и интенсивности теплообмена

$$\alpha^2 = \frac{\rho_\lambda u_\lambda \delta_\lambda}{\mu_\lambda} \approx 150. \quad (5.52)$$

Совместное решение уравнений (5.1), (5.36) и (5.50) с использованием соотношений (5.51) и (5.52) позволяет найти для пластины все величины пограничного слоя. Так при $n = 7$ и $\omega = 0,75$ будем иметь

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,0575}{Re_x^{0,2}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{-0,8} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{0,6}}{\left(1 + 0,75 \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{1,05}} \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{0,6} \left(\frac{2}{1 + \frac{T_w}{T_0}}\right)^{1,05}; \quad (5.53)$$

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = \frac{0,0922}{Re_x^{0,2}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{0,2} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{0,6}}{\left(1 + 0,75 \frac{k-1}{2} M_0^2\right)^{1,05}} \left(\frac{T_w}{T_0}\right)^{0,6} \left(\frac{2}{1 + \frac{T_w}{T_0}}\right)^{1,05}; \quad (5.54)$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = 1 - \frac{\delta^*}{\delta} - n \int_0^1 \frac{z^{n+1} dz}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right) [(1 - \bar{T}_w) z + \bar{T}_w] - \frac{k-1}{2} M_0^2 z^2}; \quad (5.55)$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 1 - n \int_0^1 \frac{z^n dz}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2\right) [(1 - \bar{T}_w) z + \bar{T}_w] - \frac{k-1}{2} M_0^2 z^2}; \quad (5.56)$$

где

$$\bar{T}_w = T_w/T_0, \quad z = y/\delta.$$

Коэффициент сопротивления пластины длиной l и шириной b

$$c_w = \frac{2 \int_0^l v_w dx}{\rho_0 u_0^2 l} = \frac{0,116}{Re_l^{0,2}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)^{0,2} \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_0^2 \right)^{0,6}}{\left(1 + 0,75 \frac{k-1}{2} M_0^2 \right)^{1,05}} \bar{T}_w^{0,6} \left(\frac{2}{1 + \bar{T}_w} \right)^{1,05}. \quad (5.57)$$

Для несжимаемой жидкости ($M_0=0$) без теплообмена ($\bar{T}_w=1$) $\delta^{**}/\delta=7/72$; $\delta/x=0,37/Re_x^{0,2}$; $c_f=0,058/Re_x^{0,2}$; $c_w=0,073/Re_x^{0,2}$. (5.58)

Коэффициент сопротивления в переходной области пограничного слоя пластинки можно определить по уравнению

$$c_w = \frac{0,073}{Re_x^{0,2}} \left(1 - \frac{Re_{кр}}{Re_x} + 38 \frac{Re_{кр}^{0,625}}{Re_x} \right)^{0,8}. \quad (5.59)$$

Эта формула справедлива при $Re_x > Re_{кр}$, а $Re_{кр} \approx 5 \cdot 10^5$.

Отрыв ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости можно найти по уравнению

$$\frac{\frac{dp}{dx} z^2}{\mu_0 u_0} = \varphi_1(0). \quad (5.60)$$

Если $z=\delta^*$, то $\varphi_1(0)=1,92$; при $z=\delta^{**}$, $\varphi_1(0)=0,157$.

Отрыв турбулентного пограничного слоя определяется уравнением

$$\frac{\frac{dp}{dx} z}{\rho_0 u_0^2} = \varphi_0(M_0) = \frac{2}{k-1} \frac{1}{M_0^2} \frac{\delta^*/\delta}{(\delta^*/\delta)_н} \varphi_0(0) \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{k-1} M_0^2}} \right)^2. \quad (5.61)$$

Если $z=\delta^*$, то $\varphi_0(0)=0,015$, если $z=\delta^{**}$, то $\varphi_0(0)=0,005$. Течение будет безотрывным, если левая часть уравнений (5.60) и (5.61) будет меньше численных значений правой части.

Скачки уплотнения, взаимодействуя с пограничным слоем, как правило, приводят к отрыву пограничного слоя. Относительное давление, которое приведет к отрыву ламинарного пограничного слоя, можно определить по формуле

$$\frac{p_{0тр}}{p_0} = 1 + 0,57 \frac{k M_0^2}{[(M_0^2 - 1) Re_x]^{1/4}}. \quad (5.62)$$

Формула справедлива при $M_0 > 1,2$.

Для турбулентного пограничного слоя относительное давление в точке отрыва можно найти по формуле

$$\frac{p_{0тр}}{p_0} = 1 + 0,15 \frac{k M_0^2}{(M_0^2 - 1)^{1/4}}. \quad (5.63)$$

Формула справедлива при $M_0 > 1,3$.

§ 6. СВОБОДНЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУИ

Струя называется затопленной, если она распространяется в покоящейся среде, и спутной, если внешняя среда движется в направлении струи со скоростью u_n . Профили скорости в поперечных сечениях основного участка струи любой формы описываются уравнением

$$\frac{\Delta u}{\Delta u_m} = \frac{u - u_n}{u_m - u_n} = (1 - \eta^{3/2})^2, \quad (5.64)$$

где $\eta = y/b$ — расстояние от точки со скоростью u до оси струи, выраженное в долях от полутолщины (или радиуса) струи в данном сечении; u_m — скорость на оси струи.

В начальном участке струи, где $u_m = u_0$ — скорости на срезе сопла — профиль скорости можно найти по уравнению

$$\frac{u_0 - u}{u_0 - u_n} = (1 - \eta_n^{3/2})^2, \quad (5.65)$$

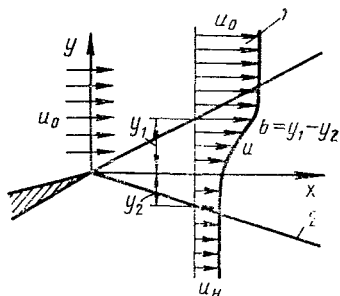


Рис. 65. Схема течения в начальном участке струи:

1—потенциальное ядро струи, 2—пограничный слой

где η_n отсчитывается от наружной границы струи (рис. 65):

$$\eta_n = \frac{y - y_2}{b} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}. \quad (5.66)$$

Уравнения (5.64) и (5.65) справедливы при значительном изменении плотности струи ρ_0 и внешней среды ρ_n ($0,25 \leq n \leq 4$, где $n = \rho_n / \rho_0$). Для этих случаев профили температур описываются уравнениями:

для начального участка

$$\frac{T - T_n}{T_0 - T_n} = \eta_n \quad \text{или} \quad \frac{T_0 - T}{T_0 - T_n} = 1 - \eta_n; \quad (5.67)$$

для основного участка

$$\frac{T - T_n}{T_m - T_n} = \left(\frac{\Delta u}{\Delta u_m} \right)^{Pr}, \quad (5.68)$$

где Pr — турбулентное число Прандтля. Согласно экспериментальным данным обычно принимается для осесимметричных струй $Pr = 0,8$, для плоских струй $Pr = 0,5$. Эти данные справедливы при $n = 0,03 \dots 300$ и для чисел $M_0 < 1$ и $M_0 > 1$. В последнем случае термодинамические температуры следует заменить температурами торможения.

Распределение примеси в поперечных сечениях струи подчиняется той же закономерности, что и распределение температур:

$$\frac{z - z_n}{z_m - z_n} = \frac{T - T_n}{T_m - T_n}, \quad (5.69)$$

где $\alpha = \frac{G_{\text{п}}}{G + G_{\text{п}}}$ — массовая концентрация примеси, т. е. отношение массы примеси ($G_{\text{п}}$) к массе всей смеси в том же объеме ($G + G_{\text{п}}$).

Границы турбулентной струи в общем случае находятся из уравнения

$$\pm C \frac{dx}{db} = \frac{2}{u_m - u_n} \frac{u_m + u_n Q_n / Q_m}{1 + Q_n / Q_m}. \quad (5.70)$$

Отношение плотностей в изобарической струе

$$\frac{Q_n}{Q_m} = \frac{T_m}{T_n}. \quad (5.71)$$

Значение коэффициента C : для начального участка $C=0,27$, для основного участка $C=0,22$.

Для струи с $q = \text{const}$

$$\frac{db}{dx} = \pm C \frac{u_m - u_n}{u_m + u_n}. \quad (5.72)$$

Знак минус берется при $u_n > u_m$. Для затопленной струи ($u_n = 0$) несжимаемой жидкости

$$b = Cx. \quad (5.73)$$

Вводя обозначения: $m = u_n / u_0$; $\theta = T_0 / T_n$; $\Delta \bar{u}_m = \frac{u_m - u_n}{u_0 - u_n}$; $\Delta \bar{T}_m = \frac{T_m - T_n}{T_0 - T_n}$ — уравнение (5.70) можно записать

$$\pm C \frac{dx}{db} = \frac{2m}{1-m} \frac{1}{\Delta \bar{u}_m} + \frac{1}{1 + \frac{\theta-1}{2} \Delta \bar{T}_m}. \quad (5.74)$$

Первый член правой части значительно больше второго члена, особенно при малых значениях u_0 . Поэтому приближенно для изотермических струй можно пользоваться тем же уравнением для границ струи, что и для изотермической струи:

$$C \frac{d\bar{x}}{d\bar{b}} = 1 + \frac{2m}{1-m} \frac{1}{\Delta \bar{u}_m}, \quad (5.75)$$

где $\bar{x} = x/b_0$; $\bar{b} = b/b_0$ — для плоской струи и $\bar{x} = x/r_0$; $\bar{b} = R_{\text{гр}}/r_0$ — для осесимметричной струи.

Закон изменения Δu_m по оси струи можно найти с помощью уравнения сохранения количества движения, которое для изобарической струи имеет следующий вид:

$$\int_0^G (u - u_n) dG = \int_0^{G_0} (u_0 - u_n) dG, \quad (5.76)$$

где G — секундная масса жидкости, протекающая через произвольное поперечное сечение струи; G_0 — то же в начальном сечении

струи. Так как $dG = \rho u dF$ и вводя обозначения определенных интегралов

$$A_1 = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\Delta u}{\Delta u_m} \frac{dF}{F}; \quad A_2 = \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta u_m} \right)^2 \frac{dF}{F},$$

получим зависимость скорости на оси основного участка струи от относительной площади поперечного сечения струи:

$$\Delta \bar{u}_m = \frac{mA_1}{2A_2(1-m)} \left(\sqrt{1 + \frac{4A_2(1-m)}{m^2 A_1^2} \frac{F_0}{F}} - 1 \right). \quad (5.77)$$

Это уравнение справедливо при равномерных полях скорости и плотности в начальном сечении струи.

Для затопленной струи, когда $m=0$ ($u_n=0$)

$$\left(\frac{u_m}{u_0} \right)^2 = \bar{u}_m^2 = \frac{F_0}{F} \frac{1}{A_2}. \quad (5.78)$$

Определенный интеграл A_2 находится из определения с учетом уравнений (5.64), (5.68), (5.71) и геометрической формы струи. С некоторой ошибкой ($< 3\%$) при $0,2 \leq \theta \leq 5$ и $Рг=0,5$ можно определить A_2 по уравнениям:

а) в случае плоской струи

$$A_2 = \frac{0,316\theta}{1 + 0,86(\theta - 1)k_T \bar{u}_m}; \quad (5.79)$$

б) в случае осесимметричной струи

$$A_2 = \frac{0,134\theta}{1 + 0,745(\theta - 1)k_T \bar{u}_m}. \quad (5.80)$$

Коэффициент k_T , учитывающий в основном влияние спутного потока при равномерных полях скорости, плотности, температуры и концентраций в начальном сечении струи, можно определять по приближенным уравнениям:

а) для плоской струи

$$k_T = 0,86 \frac{1 + 1,84m}{1 + 2,26m}; \quad (5.81)$$

б) для осесимметричной струи

$$k_T = 0,745 \frac{1 + 2,86m}{1 + 3,76m}. \quad (5.82)$$

Подставляя в равенство (5.78) значение определенного интеграла A_2 , получим:

а) для плоской затопленной струи ($m=0$, $k_T=0,86$)

$$\bar{h} = \frac{1 + 0,76(\theta - 1) \bar{u}_m}{0,316\theta \bar{u}_m^2}; \quad (5.83)$$

б) для осесимметричной струи ($m=0$, $k_T=0,745$)

$$\bar{r}^2 = \frac{1+0,555(\theta-1)\bar{u}_m}{0,134\theta\bar{u}_m^2}, \quad (5.84)$$

где $\bar{b}=b/b_0$; $\bar{h}=h/h_0$; $\bar{r}=R_{rp}/r_0$.

Изменение скорости по длине затопленной струи найдем, интегрируя выражение (5.74), сохраняя в нем только второй член правой части ($m=0$). Для плоской затопленной неизотермической струи

$$C(\bar{x}-\bar{x}_n) = \frac{3,16}{\theta} \left[\frac{p(z)}{\bar{u}_m^2} - p(z_0) \right], \quad (5.85)$$

$$p(z) = 1 - 0,28z - 1,72z^2 + 0,28z^2 \ln(1 + 1/z);$$

где $z = \frac{\theta-1}{2} k_T \bar{u}_m$; $z_0 = \frac{\theta-1}{2} k_T$. (5.86)

При $\theta=1$ формула (5.85) переходит в соотношение для изотермической плоской затопленной струи:

$$C(\bar{x}-\bar{x}_n) = 3,16 \left[\frac{1}{\bar{u}_m^2} - 1 \right]. \quad (5.87)$$

В этих уравнениях $\bar{x}_n$ — относительное расстояние от начала струи до начала основного участка, где $\bar{u}_m=1$, $\bar{x}_n=x_n/b_0$. Для осесимметричной затопленной неизотермической струи изменение скорости по длине струи можно найти по уравнению

$$C(\bar{x}-\bar{x}_n) = \frac{2,73}{V\theta} \left[\frac{R(z)}{\bar{u}_m} - R(z_0) \right], \quad (5.88)$$

$$R(z) = \sqrt{1+1,49z} - 0,73z \operatorname{arctg} (1,47 \sqrt{1+1,49z}) - z \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+1,49z}}{1 - \sqrt{1+1,49z}} \right);$$

где $z = \frac{\theta-1}{2} k_T \bar{u}_m$, $z_0 = \frac{\theta-1}{2} k_T$. (5.89)

При $\theta=1$ формула (5.88) переходит в соотношение для изотермической осесимметричной затопленной струи:

$$C(\bar{x}-\bar{x}_n) = 2,73 \left[\frac{1}{\bar{u}_m} - 1 \right]; \quad (5.90)$$

$\bar{x}_n$ находится по уравнениям (5.83), (5.84) при $\bar{u}_m=1$, а далее по уравнению (5.73).

Уравнение для определения изменения температуры вдоль струи можно получить, используя уравнение сохранения избыточного теплосодержания струи, которое для равномерных полей скорости и температуры в начальном сечении записывается

$$\int_0^a c_p (T - T_n) dG = \int_0^{a_0} c_{p0} (T_0 - T_n) dG.$$

или в безразмерном виде

$$(1-m) \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \frac{\Delta u_m}{\Delta u_0} \int_0^1 \frac{c_p}{c_{p0}} \frac{q}{q_0} \frac{\Delta u}{\Delta u_m} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{dF}{F} + \\ + m \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} \int_0^1 \frac{c_p}{c_{p0}} \frac{q}{q_0} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{dF}{F} = \frac{F_0}{F}.$$

Вводя обозначения для определенных интегралов:

$$B_1 = \int_0^1 \frac{c_p}{c_{p0}} \frac{q}{q_0} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{dF}{F}; \quad B_2 = \int_0^1 \frac{c_p}{c_{p0}} \frac{q}{q_0} \frac{\Delta u}{\Delta u_m} \frac{\Delta T}{\Delta T_m} \frac{dF}{F},$$

приводим уравнение сохранения избыточного теплосодержания к виду

$$\Delta \bar{u}_m \Delta \bar{T}_m B_2 (1-m) + \Delta \bar{T}_m B_1 m = F_0/F. \quad (5.91)$$

Решая совместно уравнения (5.91) и (5.77), получим

$$\Delta \bar{T}_m = k_t \Delta \bar{u}_m. \quad (5.92)$$

Имея в виду, что поля относительных температур и относительных концентраций подобны, можем записать

$$\Delta \bar{x}_m = k_t \Delta \bar{u}_m, \quad (5.93)$$

где $\Delta \bar{x}_m = \Delta x_m / \Delta x_0$, а коэффициенты пропорциональности k_t можно определять по формулам (5.80), (5.82).

Расчет поперечных полей скорости сверхзвуковой изобарической струи производится по уравнениям (5.64) и (5.65), как и для обычных струй.

Профили температур описываются уравнениями (5.67) и (5.68) с заменой термодинамических температур на температуры торможения. В дальнейших расчетах для сверхзвуковых струй принято $Pr=0,5$. Отношение плотностей в сверхзвуковой струе запишем в следующем виде:

$$\frac{q_n}{q_m} = \frac{\Delta T_m^*}{\Delta T_0^*} (\theta^* - 1) + 1 - a \lambda_0^2 \theta^{*2} \bar{u}_m^2, \quad (5.94)$$

где $\theta^* = T_0^*/T_n^*$; $\lambda = u/a_{кр}$; $a = \frac{k-1}{k+1}$.

Для начального участка, когда $\Delta T_m^* = \Delta T_0^*$, а $\bar{u}_m = 1$,

$$q_n/q_0 = \theta^* (1 - a \lambda_0^2). \quad (5.95)$$

Для сверхзвуковой струи определенный интеграл A_2 можно находить по приближенной формуле:

$$A_2 = 0,134 (1 - a \lambda_0^2) (1 + 0,448 a \lambda_0^2 \bar{u}_m^2). \quad (5.96)$$

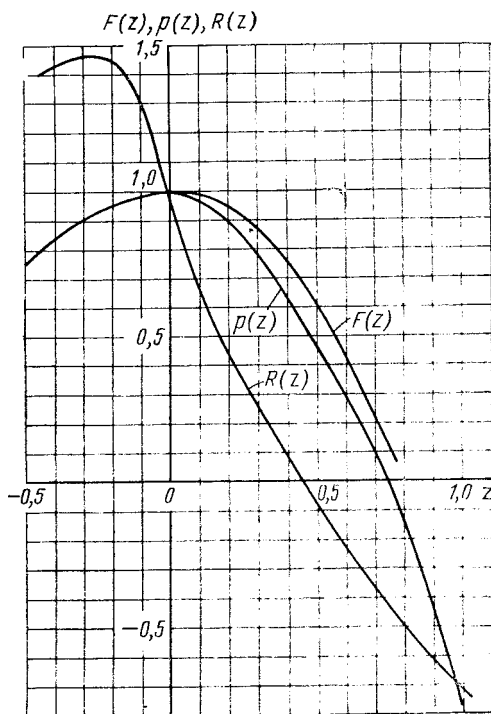
Уравнение для границ сверхзвуковой изотермической затопленной струи:

$$C = \frac{dx}{db} = \frac{2}{1 - a\lambda_0^2 \bar{u}_m^2}. \quad (5.97)$$

Для начального участка ($\bar{u}_m = 1$)

$$C \frac{dx}{db} = \frac{2}{1 - a\lambda_0^2}.$$

Рис. 66. Вспомогательные функции $p(z)$, $R(z)$, $F(z)$



Из совместного решения уравнений (5.97), (5.78) и (5.96) находим связь для скорости затухания струи на основном участке:

$$C(\bar{x} - \bar{x}_n) = \frac{2,74}{\sqrt{1 - a\lambda_0^2}} \left[\frac{F(z)}{\bar{u}_m} - F(z_n) \right], \quad (5.98)$$

$$F(z) = \frac{1}{(1 - z^2) \sqrt{1 + 0,9z^2}} - \frac{0,53z^2 \sqrt{1 + 0,9z^2}}{1 - z^2} - 1,07z \ln \frac{1,38z + \sqrt{1 + 0,9z^2}}{\sqrt{1 - z^2}};$$

где

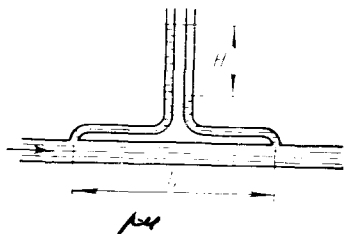
$$z = \bar{u}_m \sqrt{a\lambda_0^2/2}; \quad z_0 = \sqrt{a\lambda_0^2/2}. \quad (5.99)$$

Для облегчения числовых расчетов на рис. 66 даны графики вспомогательных функций $p(z)$, $R(z)$ и $F(z)$.

Задачи

5.1. По горизонтальному трубопроводу (рис. 67) с диаметром 4 мм движется вода при температуре $T=293$ К, с расходом 0,2 л/мин. Определить разность уровней жидкости в манометрах, измеряющих давления на длине трубопровода $l=1$ м, а также число Рейнольдса по скорости на оси трубы.

5.2. Подсчитайте максимальный расход керосина ($\mu=14,9 \times 10^{-4}$ Па·с, $\rho=800$ кг/м³) через трубу с диаметром 24 мм при сохранении ламинарного режима течения. Критическое число Рейнольдса определить по скорости на оси трубы.



5.3. Ртуть при комнатной температуре ($\mu=1,6 \cdot 10^{-3}$ Па·с) движется по горизонтальному трубопроводу с

Рис. 67. Схема к определению напора на длине l

диаметром 2 мм; при этом число Рейнольдса, подсчитанное по скорости на оси трубы, равно 2000. Определить перепад давлений на длине трубопровода $l=1$ м.

5.4. Через трубку диаметром 3 мм прокачивается бензин при комнатной температуре с расходом 0,15 л/мин. Определить касательное напряжение на стенке трубы при вязкости бензина $\mu=6,56 \cdot 10^{-4}$ Па·с.

5.5. Определить касательное напряжение на стенке трубы с диаметром 3,5 мм при течении по ней этилового спирта 92%-й концентрации с температурой 293 К ($\mu=12,4 \cdot 10^{-4}$ Па·с, $\rho=800$ кг/м³), если расход спирта при этом 0,2 л/мин. Определить, кроме того, режим течения по скорости на оси трубы.

5.6. Как изменится касательное напряжение у стенки и число Рейнольдса, если для условий задачи 5.5 вместо спирта прокачивать воду при той же температуре?

5.7. По трубе диаметром 6 мм прокачивается глицерин при комнатной температуре ($\mu=1,14 \cdot 10^{-2}$ Па·с, $\rho=1260$ кг/м³) с расходом $Q=0,8$ л/мин. Определить режим течения и касательное напряжение на стенке трубы. Изменится ли режим течения, если вместо глицерина по той же трубе и с тем же расходом прокачивать ртуть ($\mu=1,6 \cdot 10^{-3}$ Па·с)?

5.8. Определить максимальный расход глицерина через горизонтальную трубу диаметром 8 мм при безусловно ламинарном режиме течения. Температура глицерина 288 К, при этом коэффициент динамической вязкости $\mu=11,37 \cdot 10^{-3}$ Па·с, плотность глицерина $\rho=1260$ кг/м³.

5.9. По горизонтальной трубе диаметром 10 мм при $T=288$ К прокачивается глицерин ($\mu=11,37 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho=1260$ кг/м³) при

перепаде давлений на длине трубопровода $l=1$ м 3530 Па. Определить расход глицерина, напряжение трения на стенке трубы и число Рейнольдса по скорости на оси трубы.

5.10. Что можно сказать о характере движения жидкости в трубопроводе постоянного сечения, если перепад давлений $\Delta p=p_1-p_2$ на длине l составляет при скорости движения $\omega_1=10$ м/с $\Delta p_1=2\cdot 10^5$ Па, а при скорости $\omega_2=20$ м/с $\Delta p_2=8\cdot 10^5$ Па?

5.11. Найти поправочный коэффициент ψ_L для количества движения ламинарного потока в круглой трубе, принимая за ψ_L отношение действительного количества движения потока к количеству движения потока с равномерной скоростью, равной скорости на оси.

5.12. Жидкость с плотностью $\rho=800$ кг/м³ из напорного бака по наклонному трубопроводу с диаметром 10 мм и длиной 12 м при напоре $H=15$ м переливается в другую емкость. Определить расход жидкости при неизменном напоре, число Рейнольдса по скорости на оси. Потери на входе в трубопровод не учитывать, вязкость жидкости 0,8 П.

5.13. Решить задачу 5.12 при следующих данных: $l=18$ м, $d=24$ мм, $\rho=800$ кг/м³, $\mu=7,98\cdot 10^{-2}$ Па·с, $H=z_1-z_2=30$ м.

5.14. По трубопроводу с диаметром 30 мм и длиной 40 м перекачивается жидкость, при этом число Рейнольдса по средней скорости оказалось $Re=2100$. Определить объемный расход жидкости через трубопровод, если потеря напора при этом составляет 7 м.

5.15. Определить потерю напора ΔH в трубопроводе с диаметром 30 мм и длиной 10 м при течении в нем жидкости со средней скоростью 5 м/с при вязкости жидкости $\nu=4,5\cdot 10^{-3}$ м²/с.

5.16. Объясните, почему коэффициент трения в трубе при ламинарном режиме течения увеличивается с уменьшением скорости движения жидкости?

5.17. Газообразный водород ($\mu=86,6\cdot 10^{-6}$ П) перекачивается по горизонтальной трубе диаметром 50 мм с расходом 0,7 г/с при температуре 295 К. В начальном сечении трубы давление $p_1=2,5\cdot 10^5$ Па. Какое будет давление в конце трубопровода длиной 200 м?

5.18. Доказать, что ламинарный поток жидкости в трубе круглого сечения не обладает потенциалом скорости; найти, кроме того, суммарную угловую скорость вращения.

5.19. Определить компоненты вихря в потоке вязкой жидкости при ламинарном режиме течения в трубе круглого сечения.

5.20. При ламинарном режиме течения в цилиндрической трубе местная скорость определяется уравнением $\omega=\omega_0[1-(r/R_0)^2]$ (где ω_0 — скорость на оси трубы). Определить среднюю скорость течения и радиус, на котором местная скорость равна средней.

5.21. Найти поправочный коэффициент ψ_E для кинетической энергии при ламинарном потоке в трубе круглого сечения, принимая за ψ_E отношение действительной кинетической энергии потока к кинетической энергии с равномерной скоростью, равной скорости на оси.

5.22. На рис. 68 показан отрезок трубы, по которому движется бензин. Для заданных на рисунке условий определить направление движения бензина, объемный расход, число Рейнольдса по средней скорости и касательное напряжение на стенке трубы.

5.23. Две параллельные пластины установлены под углом $\theta = 45^\circ$ к горизонту. Одна из пластин движется со скоростью $v = 1$ м/с в направлении обратном течению жидкости. Жидкость имеет плотность $\rho = 800$ кг/м³ и динамическую вязкость $\mu = 0,80$ П. При заданных на рис. 69 условиях определить максимальную скорость

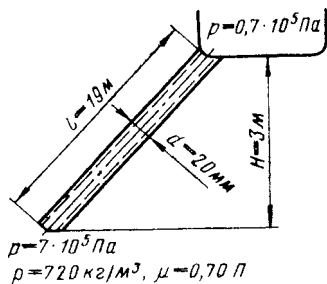


Рис. 68. Напорное течение в наклонной трубе

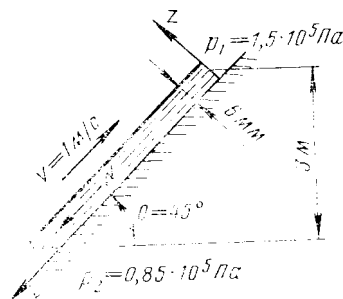


Рис. 69. Схема течения между пластинами с наклоном

жидкости в зазоре, координату z , где эта скорость реализуется, объемный расход жидкости на единицу ширины пластин и напряжение на нижней и верхней пластинах.

5.24. Определить угол наклона параллельных неподвижных пластин, при котором жидкость движется между пластинами при постоянном давлении. Расстояние между пластинами $l = 20$ мм, плотность жидкости $\rho = 800$ кг/м³, вязкость $\mu = 0,70$ П, а расход на 1 м ширины пластины $Q = 50$ л/с.

5.25. Определить, как изменится расход жидкости между двумя параллельными пластинами, если угол наклона их к горизонту от 20° увеличить до 40° . При этом давление жидкости по длине пластин в обоих случаях остается постоянным. Расстояние между пластинами $l = 25$ мм, плотность жидкости $\rho = 720$ кг/м³, вязкость $\mu = 0,70$ П.

5.26. Жидкость движется между параллельными неподвижными горизонтальными пластинами при ламинарном режиме течения. Определить координаты z по высоте зазора между пластинами l , где местная скорость равна средней скорости в зазоре.

5.27. Определить касательное напряжение на стенках канала, образованного параллельными неподвижными пластинами, отстоящими одна от другой на расстоянии 0,5 мм при движении между ними жидкости с расходом $Q = 2$ см³/с на 1 м ширины канала и с вязкостью $\mu = 0,45$ П.

5.28. Для условий задачи 5.27 определить градиент давления по длине канала.

5.29. Параллельные горизонтальные пластины отстоят одна от другой на расстоянии $l=8$ мм. Между пластинами движется жидкость с вязкостью $\mu=0,20$ П и расходом $Q=20$ л/с на единицу ширины пластин. Верхняя пластина движется параллельно самой себе в направлении $+x$ со скоростью $v=1,5$ м/с. Определить градиент давления по длине пластин, напряжение трения на поверхности каждой пластины и координату z по высоте зазора, где напряжение трения равно нулю.

5.30. Параллельные пластины отстоят одна от другой на расстоянии $l=4$ мм. Верхняя пластина движется в направлении $+x$ со скоростью $v=0,5$ м/с. Между пластинами движется жидкость с вязкостью $\mu=12,76 \cdot 10^{-3}$, градиент давления при этом $\partial p / \partial x = -18$ кПа/м. Определить максимальную скорость течения в зазоре, расход жидкости на единицу ширины пластины и касательное напряжение в середине зазора.

5.31. Параллельные пластины отстоят одна от другой на расстоянии $l=5$ мм. Верхняя пластина движется относительно нижней со скоростью $v=1$ м/с. Между пластинами находится жидкость с вязкостью $\mu=0,20$ П. Определить градиент давления в направлении движения скорости v при нулевом расходе жидкости, а также напряжение трения на каждой из пластин.

5.32. В концентрическом зазоре между двумя трубами движется жидкость при ламинарном режиме. Найти уравнения для профиля скорости движения жидкости в зазоре и объемного расхода протекающей жидкости.

5.33. Для условий задачи 5.32 найти напряжение трения на стенках зазора и координату r , где скорость в зазоре максимальна.

5.34. В трубе с внутренним диаметром $D_2=60$ мм coaxially закреплена труба, образующая круговой зазор в 10 мм. В зазоре движется керосин с плотностью $\rho=800$ кг/м³, коэффициентом вязкости $\mu=1,5 \cdot 10^{-3}$ Па·с и с объемным расходом $Q=10$ л/с. Считая, что режим течения в зазоре ламинарный, определить перепад давлений на длине трубы $l=1$ м, а также напряжение трения на стенках труб.

5.35. При каком максимальном диаметре движение корундово-го шарика ($\rho=3000$ кг/м³), опускающегося без вращения в воде при $T=293$ К, будет удовлетворять решению Стокса; какова при этом будет скорость движения шарика?

5.36. Определить скорость оседания силикатной пыли $\rho=2600$ кг/м³ в камере пескоструйного аппарата при давлении $p=0,9 \cdot 10^5$ Па и температуре $T=315$ К, если принять, что пылинки имеют форму шара диаметром 0,07 мм. Показать правомочность применения формулы Стокса для решения данной задачи.

5.37. Шарик из органического стекла ($\rho=2100$ кг/м³) диаметром 6 мм падает в масле без вращения с постоянной скоростью 2 см/с. Определить коэффициент динамической вязкости масла μ , если плотность его $\rho=883$ кг/м³.

5.38. Алюминиевый шарик ($\rho=2700$ кг/м³) диаметром 4 мм опускается в масле без вращения с постоянной скоростью 4,5 см/с.

Определить коэффициент кинематической вязкости масла при условиях опыта, если плотность его $\rho = 890 \text{ кг/м}^3$, проверить также справедливость применения для решения этой задачи уравнения Стокса.

5.39. С какой скоростью будет опускаться в масле стальной шарик ($\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ диаметром 3 мм, если плотность масла $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$, а вязкость его $\nu = 4 \text{ см}^2/\text{с}$; каково будет при этом значение числа Рейнольдса?

5.40. Предполагая, что уравнение Стокса для движения шара в вязкой жидкости справедливо при $Re \leq 1$, определить максимальный диаметр водяной капли, удовлетворяющей уравнению Стокса, при свободном падении ее в атмосферном воздухе при стандартных условиях. Как изменится максимальный диаметр капли, если температуру воздуха при том же давлении увеличить до 90°C ?

5.41. Для условий задачи 5.40 определить максимальную скорость падения водяной капли в воздухе при найденных размерах капли.

5.42. Для создания прибора по определению вязкости нефтепродуктов методом падающего шарика необходимо определить максимальный диаметр шарика, который решено было изготовить из алюминия. Опыт должен проходить при числе Рейнольдса не более 0,6; примерное значение коэффициента вязкости нефтепродуктов $\mu = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$, а плотность $\rho = 890 \text{ кг/м}^3$.

5.43. Для условий задачи 5.42 определить требуемую высоту сосуда, в котором будет определяться вязкость нефтепродуктов, при этом необходимо иметь в виду, что только $2/3$ высоты сосуда шарик движется с постоянной скоростью, а время опускания шарика на этой высоте должно быть не менее 5 с.

5.44. Решить задачи 5.42 и 5.43, заменив материал шарика с алюминия на сталь.

5.45. Определить число Рейнольдса и режим течения при движении масла по трубе диаметром 250 мм с расходом 90 кг/с. Плотность масла $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$, а коэффициент динамической вязкости $\mu = 0,17 \text{ П}$.

5.46. Используя формулу Блазиуса для определения коэффициента сопротивления λ по длине гладкой цилиндрической трубы, найти градиент давления dp/dl , если известно, что труба имеет диаметр 150 мм, прокачивается по ней вода при $T = 293 \text{ К}$ с расходом 50 л/с.

5.47. По теплоизолированному трубопроводу с коническим насадком на конце трубы движется газ с известными p^* и i^* в начальном участке трубопровода. В выходном сечении насадка удалось измерить давление p и температуру потока T . Скорость потока на выходе из насадка можно определить либо по уравнению теплосодержания $i^* = i + \omega^2/2$, либо по уравнению Бернулли $p^* = p + \frac{\rho \omega^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2-k}{25} M^4 + \dots \right)$. Какое из приведенных уравнений следует предпочесть, чтобы определить действительную скорость истечения, и почему?

5.48. Полный полуцилиндр при обтекании потоком, как показано на рис. 70, имеет коэффициент сопротивления $c_x=1,3$; при обтекании в обратном направлении коэффициент сопротивления уменьшается вдвое. Определить лобовое сопротивление полуцилиндра длиной 0,5 м, радиусом 0,125 м, если он движется в воде со скоростью 15 км/ч при движении вогнутой и выпуклой сторонами.

5.49. По трубопроводу диаметром 150 мм перекачивается вода с расходом 60 л/с. На длине трубопровода $l=24$ м был замерен с помощью ртутно-водяного манометра перепад давлений, который оказался равным 89 мм. Определить коэффициент сопротивления трубопровода c_f .

5.50. Вычислить потерю напора, вызванную внезапным расширением трубопровода от $D_1=200$ мм до $D_2=300$ мм, если по трубопроводу прокачивается $0,2 \text{ м}^3/\text{с}$ воды при $T=293 \text{ К}$. На сколько уменьшится потеря напора, если участок трубы с размерами D_1 и D_2 соединить коническим диффузором с центральным углом раствора 6° ?

Указание. Потерю напора в диффузоре определить с учетом потерь на трение и расширение, т. е. $h_d=h_{тр}+h_{расш}$,

где $dh_{тр}=\lambda_\tau \frac{dx}{D} \frac{w^2}{2g}$, а $h_{расш}=\psi \frac{(w_1-w_2)^2}{2g}$.

Коэффициент смягчения удара ψ определить по приближенной формуле $\psi=\sin \alpha$, а $\lambda_\tau=1/(1,8 \lg \text{Re}-1,5)^2$.

5.51. Определить потерю напора для потока воды при течении через резкое сужение от диаметра трубопровода $D_1=150$ мм до $D_2=100$ мм при расходе жидкости $1 \text{ м}^3/\text{мин}$.

Указание. $\xi_{суж}$ определить по приближенной формуле

$$\xi_{суж}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{F_2}{F_1}\right).$$

5.52. По трубопроводу с диаметром 100 мм движется воздух со средней скоростью 100 м/с, давление потока при этом $6 \cdot 10^5 \text{ Па}$, а температура 293 К. Определить режим течения, число Рейнольдса и число М потока в трубопроводе.

5.53. Определить величину средней скорости движения жидкости в трубе при ламинарном и турбулентном режимах течения, если поле скоростей в поперечном сечении трубы при любом режиме течения задано уравнением $w=w_0[1-(r/R)^n]$, где w_0 — скорость на оси, показатель степени $n=2, 4, 6, 8$.

5.54. Воздушный поток движется вдоль гладкой пластины со скоростью 5 м/с, давление потока при этом 760 мм рт. ст. и температура 288 К. Какой длины должна быть пластина, чтобы в конце

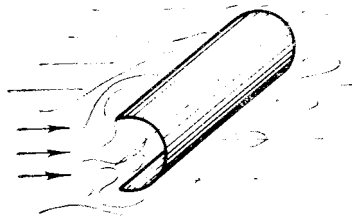


Рис. 70. Полуцилиндр в потоке

ее пограничный слой был толщиной 3 мм, каким при этом будет режим течения в пограничном слое?

5.55. Считая, что переход течения в пограничном слое от ламинарного режима к турбулентному совершается при $Re_{x_{кр}} = 3,2 \times 10^5$, определить, какая должна быть длина пластины, чтобы в конце ее было критическое число Рейнольдса, и какова при этом будет толщина пограничного слоя, если пластина обдувается потоком воздуха со скоростью 20 км/ч при стандартных условиях $T_0 = 288$ К $B_0 = 760$ мм рт. ст.

5.56. Поток воздуха при нормальных условиях ($B_0 = 760$ мм рт. ст., $T_0 = 288$ К) движется вдоль плоской стенки со скоростью 30 м/с. Определить толщину пограничного слоя и величину угловой скорости в пограничном слое (при $y = 0$ и $y = \delta$) на расстоянии $x = 50$ мм от начала стенки. Как изменится толщина пограничного слоя при $x = 200$ мм. Критическое число Рейнольдса, принять $Re_{кр} \approx 5 \cdot 10^5$.

5.57. Гладкая пластина обдувается потоком воздуха при нулевом угле атаки с числом $M_0 = 0,8$ при коэффициенте кинематической вязкости $\nu = 3,89 \cdot 10^{-5}$ м²/с, плотности $\rho = 0,365$ кг/м³ и температуре $T = 216$ К. Определить, на какой длине x будет ламинарный пограничный слой, какова будет толщина пограничного слоя на этой длине, значение местного коэффициента трения c_f . За критическое число Рейнольдса принять $Re_{кр} = 6 \cdot 10^5$. Сравнить результаты расчета с учетом сжимаемости и без учета сжимаемости.

5.58. Гладкая пластина с размерами 1×3 м обдувается потоком воздуха вдоль длинной стороны при нулевом угле атаки с числом $M_0 = 0,8$ при нормальных условиях ($B_0 = 760$ мм рт. ст., $T_0 = 288$ К). Найти силу сопротивления одной стороны пластины. Расчет произвести с учетом сопротивления ламинарного участка пограничного слоя. За критическое число Рейнольдса принять $Re_{кр} = 5 \cdot 10^5$.

5.59. Панель плоского сверхзвукового воздухозаборника с длиной 0,8 м составляет угол с вектором скорости набегающего потока $\omega = 10^\circ$. В конце панели имеется щель для слива пограничного слоя. Определить высоту щели, считая, что весь пограничный слой сливается. Полет происходит на высоте 12 км с числом $M_\infty = 2,5$; течение в воздухозаборнике происходит без теплообмена.

5.60. Решить задачу 5.59, считая, что в пограничном слое $\rho = \text{const}$. Какая при этом будет ошибка и в какую сторону?

5.61. Определить силу сопротивления и c_x трения крыла гиперзвукового летательного аппарата, представив крыло в виде тонкой пластины, находящейся под углом атаки $\alpha = 8^\circ$ с длиной хорды 6 м. Полет происходит на высоте 35 км с числом $M_\infty = 7$ без теплообмена.

5.62. Как изменится решение задачи 5.61, если крыло летательного аппарата будет иметь принудительное охлаждение и на заданном режиме его температура будет $T_w = 400$ К?

5.63. Тонкая гладкая пластина с длиной 3 м и шириной 2 м обдувается потоком воздуха вдоль длинной стороны с нулевым углом атаки со скоростью $u_0 = 100$ м/с. Определить силу трения на двух сторонах пластины, если известно, что коэффициент динами-

ческой вязкости $\mu = 1,765 \cdot 10^{-5}$ Па·с, температура потока $T = 300$ К, а давление потока $p_0 = 10^5$ Па. Определить также толщину пограничного слоя в конце пластины. За критическое число Рейнольдса принять $Re_{кр} = 3,2 \cdot 10^5$.

5.64. c_x кругового конуса с углом при вершине 30° равен 0,34. Предполагая, что течение в донной области не изменится, если конус дополнить цилиндром длиной $6d$, определить силу сопротивления такого тела и его c_x при скорости набегающего потока $u_0 = 200$ м/с, давлении потока $p_0 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 300$ К. Диаметр цилиндра $d = 0,5$ м, пограничный слой в начале цилиндра считать равным нулю, за критическое число Рейнольдса принять $Re_{кр} = 3,2 \cdot 10^5$.

5.65. Плоская аэродинамическая труба, работающая на расширении атмосферного воздуха ($B_0 = 760$ мм рт. ст., $T_0 = 288$ К), имеет $F_{кр}/F_{р.ч} = 0,5925$ при размерах рабочей части трубы $F_{р.ч} = 200 \times 200$ мм, расстояние от критического сечения до рабочей части вдоль образующей сопла 1,8 м. Определить, на какое число M рассчитана труба в идеальном случае и какое число M можно ожидать в действительности, если принять, что в критическом сечении толщина пограничного слоя пренебрежимо мала, а в дальнейшем пограничный слой увеличивается как на пластине при числе $M_0 = M_{ид}$.

5.66. Как изменится решение задачи 5.65, если учесть пограничный слой в критическом сечении при длине дозвуковой части сопла 0,4 м?

5.67. Торможение потока воздуха происходит в изогradientном диффузоре с $dp/dx = 600$ Па/м. Определить длину образующей диффузора, вдоль которой течение будет безотрывным. Скорость на входе в диффузор 40 м/с, температура потока при этом 300 К, а давление $p = 10^5$ Па.

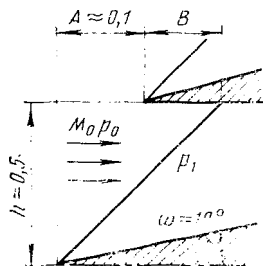
5.68. Определить место расположения отверстий для слива пограничного слоя на крыле самолета с постоянным градиентом давления $dp/dx = 800$ Па/м, при заходе на посадку со скоростью $u_0 = 60$ м/с. Пограничный слой на крыле — ламинарный.

5.69. Входное устройство дозвукового ВРД выполнено в виде изогradientного диффузора с градиентом давления $dp/dx = 2000$ Па/м. При полете со скоростью 900 км/ч на высоте 10 км на входе в диффузор установилась скорость $u_0 = 200$ м/с. В конце диффузора скорость должна быть 130 м/с. Какова при этом должна быть длина диффузора, не будет ли отрыва пограничного слоя на этой длине?

5.70. Для изучения течения в пограничном слое была сделана плоская аэродинамическая труба со скоростью воздушного потока на входе $u_0 = 10$ м/с при стандартных условиях ($B_0 = 760$ мм рт. ст., $T_0 = 288$ К). Определить, на каком максимальном расстоянии от входа следует располагать приборы замера давления, чтобы провести зондирование пограничного слоя при ламинарном режиме. Для изучения турбулентного пограничного слоя предлагается отступить от найденного сечения вниз по потоку на 0,5 м. Какова тол-

щина пограничного слоя будет в исследуемых сечениях? За критическое число Рейнольдса принять $Re_{кр} = 5 \cdot 10^5$.

5.71. Измерительный участок в плоской аэродинамической трубе для изучения течения в пограничном слое расположен на расстоянии 0,7 м от входа. Труба работает на расширении атмосферного воздуха ($B_0 = 760$ мм рт. ст., $T_0 = 288$ К). Определить, при какой максимальной скорости на входе в мерное сечение пограничного слоя еще будет ламинарный режим течения, какова при этом



будет толщина пограничного слоя. При какой минимальной скорости на входе в мерное сечение будет турбулентный пограничный слой, какова его толщина δ ?

5.72. На рис. 71 показана картина течения на одном из переходных режимов плоского сверхзвукового регулируемого воздухозаборника. Определить, не будет ли при $M_0 = 3$ на высоте $H = 10$ км отрыва погра-

Рис. 71. Схема переходного режима течения в регулируемом воздухозаборнике

ничного слоя в точке падения скачка уплотнения. Если отрыв будет, то как надо изменить угол клина ω , чтобы отрыва не было?

5.73. Из паялка с диаметром 50 мм при постоянном напоре $H = 6$ м вытекает вода в открытый резервуар больших размеров (см. рис. 72). На каком расстоянии от среза сопла средняя (по радиусу) скорость в струе снизится до 1 м/с?

5.74. На стенде для испытания реактивных двигателей выходящие из сопла газы отводятся вверх с помощью газотбойного экрана (рис. 5.9). Определить, на каком расстоянии от среза сопла необходимо установить газотбойный экран, если допустимая температура на оси струи при встрече с экраном не должна быть выше 500 К, площадь выходного сечения сопла двигателя $0,3$ м², температура на срезе сопла $T_c^* = 1300$ К, скорость течения - критическая, продукты сгорания имеют $k = 1,33$, $R = 289$ Дж/(кг·К), внешние условия - стандартные ($B_0 = 760$ мм рт. ст., $T_0 = 288$ К), течение расчетное.

5.75. Для условий задачи 5.74 определить, какова должна быть ширина газотбойного экрана, чтобы струя от него отразилась полностью.

5.76. Старт и полет самолета в строю возможен при условии, что выхлопная струя переднего самолета не попадает в диффузор следующего за ним самолета. Определить для условий старта допустимое расстояние между осью сопла переднего и диффузора следующего за ним самолета. Выходное сопло имеет диаметр 1,0 м, температура в сопле $T_c^* = 1200$ К, скорость истечения критическая, течение расчетное. Диаметр входа в диффузор 0,6 м, расстояние между срезом сопла и входом в диффузор 20 м. Определить так же температуру потока на оси струи при $x = 20$ м.

5.77. Для проветривания карьеров открытой разработки минерального сырья применяется выхлопная струя реактивного двигателя. Объем карьера $0,9 \text{ км}^3$. Выхлопная струя эффективно вентилирует при уменьшении скорости на оси струи до 10 м/с . Диаметр выходного сечения сопла 590 мм , давление в сопле $p_c^* = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$, температура $T_c^* = 980 \text{ К}$. Определить число двигателей, необходи-

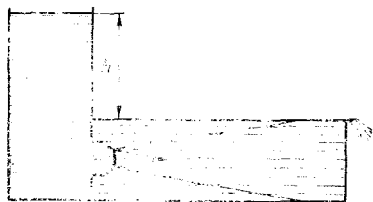


Рис. 72. Затопленная струя

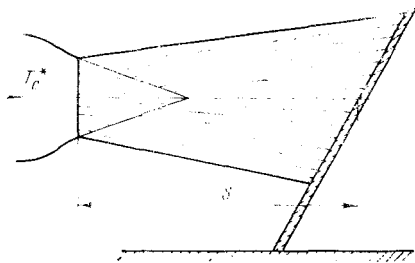


Рис. 73. Газоотбойный экран

мых для однократного обмена находящегося в карьере воздуха в течение суток, и дальность струи при скорости на оси $u_m = 10 \text{ м/с}$. Внешние условия считать стандартными, газ в сопле имеет $k = 1,33$, $R = 289 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

5.78. Для очистки вагонов от остатков сыпучих грузов используют струю реактивного двигателя. Определить, на каком расстоянии от вагона следует устанавливать двигатель, чтобы куски породы с наименьшим $c_x = 0,3$ (форма шара), плотностью $\rho = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и размером поперечника $0,1 \text{ м}$ удалялись из вагона. Определить также температуру струи на оси в этом месте. Давление в сопле двигателя $p_c^* = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$, температура $T_c^* = 980 \text{ К}$, диаметр сопла 590 мм , постоянные продуктов сгорания $k = 1,33$, $R = 289 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, внешние условия стандартные.

Глава VI

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ И МЕТОД АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ

Гидродинамическая теория подобия устанавливает связь между физическими величинами для природы и модели и условия проведения эксперимента. Простейшим видом подобия является геометрическое подобие, которое является одним из условий гидродинамического подобия. В понятие гидродинамического подобия включается также кинематическое подобие, или подобие траекторий движения частиц жидкости или линий тока, и динамическое подобие, устанавливающее пропорциональность сил, действующих на подобные частицы.

Отношения однородных физических величин, постоянные в любых сходственных точках подобных потоков, называются коэффициентами подобия. Критерии подобия исследуемых гидродинамических течений можно получить преобразованием дифференциальных уравнений, описывающих данное течение. Покажем это на примере преобразования таких основных уравнений гидродинамики, как уравнение Навье—Стокса и уравнение энергии. Приводя эти уравнения к безразмерному виду с помощью введения в рассмотрение характерных величин — скорости u_0 , линейного размера b_0 , давления p_0 , времени процесса t_0 , плотности ρ_0 , вязкости μ_0 , перепада температур $\Delta T_0 = T_0 - T_\infty$, получим для плоского течения уравнение Навье—Стокса в таком виде:

$$\frac{b_0}{u_0 t_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{X b_0}{u_0^2} - \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \frac{1}{\bar{q}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\mu_0}{u_0 \rho_0 b_0} \frac{\bar{\mu}}{\bar{q}} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right], \quad (6.1)$$

и уравнение энергии

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \frac{1}{\bar{q}} - \frac{u_0^2}{c_p \Delta T_0} \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right] + \\ &+ \frac{\lambda}{\rho_0 c_p u_0 b_0} \frac{1}{\bar{q}} \left(\frac{\partial^2 \Delta \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \Delta \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\mu_0 u_0}{\rho_0 c_p \Delta T_0 b_0} \frac{\bar{\mu}}{\bar{q}} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

В этих уравнениях $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{x}$ и т. д. это u , v , x , отнесенные к характерным величинам u_0 , b_0 и т. д.

В уравнениях (6.1) и (6.2) перед некоторыми членами появились безразмерные комплексы:

$$\frac{b_0}{u_0 t_0}; \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2}; \frac{\mu_0}{\rho_0 \rho_0 b_0}; \frac{X b_0}{u_0^3}; \frac{u_0^2}{c_p \Delta T_0}; \frac{\lambda}{\rho_0 \mu_0 b_0 c_p}; \frac{\mu_1 u_0}{\rho_0 b_0 c_p \Delta T_0}.$$

Если эти безразмерные комплексы, входящие в уравнения (6.1) и (6.2), выдержать одинаковыми для природы и модели, то решения дифференциальных уравнений, найденные для модельного течения, будут справедливы и для натурального явления.

Эти безразмерные комплексы называют критериями подобия:

$\frac{b_0}{u_0 t_0} = \text{Sh}$ — критерий Струхала, учитывающий нестационарность течения;

$\frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} = \text{Eu}$ — критерий Эйлера, учитывающий силы давления;

$\frac{u_0 \rho_0 b_0}{\mu_0} = \text{Re}$ — критерий Рейнольдса, учитывающий силы вязкости.

Если в качестве массовой силы X учитывать только силу тяжести, то получим

$\frac{u_0^2}{g b_0} = \text{Fr}$ — критерий Фруда, учитывающий массовые силы, в данном случае силы тяжести.

Если в качестве массовой силы X учитывать в среде с переменной плотностью объемные силы Архимеда $X = g_x \frac{\rho - \rho_0}{\rho}$, $Y = g_y \times \frac{\rho - \rho_0}{\rho}$, $Z = g_z \frac{\rho - \rho_0}{\rho}$, где g_x , g_y , g_z — проекции ускорения силы тяжести на координатные оси, то получим $\frac{g_x (\rho - \rho_0) b_0}{\rho u_0^2} = \text{Ar}$ $\frac{\Delta T}{\Delta T_0}$, где

$\text{Ar} = \frac{\Delta T_0}{T_0} \frac{1}{\text{Fr}} = \frac{g b_0}{u_0^2} \beta \Delta T_0$ (β — коэффициент объемного расширения) —

критерий Архимеда, учитывающий влияние при больших перепадах температур в газовом потоке;

$\frac{u_0^2}{c_p \Delta T_0} = \theta$ — температурный критерий, учитывающий отношение работы сжатия, осуществляемой средой при нагреве, к количеству тепловому потоку;

$$\frac{\lambda}{c_p \rho_0 \mu_0 b_0} = \frac{\lambda}{\mu c_p} \frac{\mu}{\rho_0 \mu_0 b_0} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}}$$

— этот безразмерный комплекс состоит из двух критериев. Крите-

рий Прандтля $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$, где $a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ — коэффициент температуропроводности. Он характеризует отношение конвективного

теплового потока к теплу, переносимому теплопроводностью. Второй критерий — уже известное число Рейнольдса. Произведение этих критериев образует новый критерий. $Pr \cdot Re = Re = \frac{u_0 b_0}{a}$ — это критерий Пекле — мера относительной роли молярного и молекулярного переноса тепла.

Последний безразмерный комплекс новых критериев не образует, так как его можно записать

$$\frac{\mu_0}{\rho_0 b_0 \mu_0} \frac{u_0^2}{c_p \Delta T_0} = \frac{\theta}{Re}.$$

Конкретная постановка задачи может привести и к другим критериям подобия. При исследовании турбулентных течений следует учитывать масштаб и степень турбулентности:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{3\overline{u_0^2}}}.$$

Соблюсти равенство всех критериев подобия для натурального и модельного явлений практически невозможно. Поэтому приходится довольствоваться не полным, а частичным подобием; при этом надо иметь в виду, что влияние каждого критерия подобия в исследуемом диапазоне величин сказывается неодинаково. Определение вида критерия подобия и формы влияния отдельных параметров на конкретные задачи производится обычно с помощью анализа размерностей. Основой этого метода является решение простых уравнений размерностей, которые проще рассмотреть на примере.

Пусть требуется найти выражение силы сопротивления R тела конкретной формы. Будем считать, что $R = f(\rho, \omega, \mu, l)$. Размерность правой и левой части должна быть одинаковой:

$$[R] = [\rho]^a [\omega]^b [\mu]^c [l]^d$$

$$\text{или} \quad \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right)^1 = \left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)^a \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^b \left(\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}\right)^c (\text{м})^d.$$

Показатели степени у одинаковых размерностей в обеих частях равенства должны совпадать. Поэтому можно написать такие уравнения $a + c = 1$; $-3a + b - c + d = 1$; $-\beta - c = -2$. Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, поэтому одно из них произвольно. Пусть этой величиной будет γ , тогда $a = 1 - \gamma$; $\beta = 2 - \gamma$; $d = 2 - \gamma$.

Тогда уравнение для силы сопротивления будет

$$R = C \rho \omega^2 l^2 \left(\frac{\mu}{\rho \omega l}\right)^{\gamma}$$

или

$$R = C \frac{\rho \omega^2}{Re^{\gamma}} l^2,$$

где C — безразмерный коэффициент, учитывающий индивидуальные особенности обтекаемого тела. На долю эксперимента остается

только найти показатель степени γ и постоянную C в зависимости от режима течения.

Из анализа уравнений размерностей вытекает правило, что число безразмерных комплексов Π , характеризующих данный процесс, определяется формулой $\Pi = m - n$, где m — число размерных величин, характеризующих данный процесс; n — число действующих размерностей. В разобранном выше примере $m = 4$, а $n = 3$ и $\Pi = 1$.

Задачи

6.1. Найти безразмерные критерии подобия из следующих размерных величин:

а) p (Па), V (м³), q (кг/м³), l (м), g (м/с²);

б) R (Н), Q (м³/с), q (кг/м³), g (м/с²);

в) p (Па), μ (Па·с), t (с).

6.2. Найти безразмерные критерии подобия из следующих размерных величин:

а) w (м/с), l (м), t (с);

б) V (м³), t (с), v (м²/с);

в) R (Н), p (Па), l (м);

г) τ (Н·м²), q (кг/м³), w (м/с).

6.3. Предполагая, что коэффициент лобового сопротивления $c_x = f(q, \omega, l, \rho)$, найти безразмерный критерий подобия и прокомментировать насколько полно этот критерий учитывает все факторы, влияющие на коэффициент лобового сопротивления.

6.4. Предполагая, что коэффициент лобового сопротивления $c_x = f(q, \omega, l, \mu)$, найти безразмерный критерий подобия и указать область его использования.

6.5. Для определения гидродинамических характеристик крылового профиля катера на подводных крыльях последние испытываются в натуральную величину в аэродинамической трубе. Полагая, что катер будет развивать среднюю путевую скорость 60 км/ч в воде с температурой $t = 10^\circ\text{C}$, определить, какую скорость должен иметь поток воздуха в аэродинамической трубе, чтобы результаты испытания были справедливы для рабочих условий. В рабочей части аэродинамической трубы воздух имеет давление потока 1200 мм рт. ст и температуру $T = 300$ К. Прокомментируйте полученный результат.

6.6. Модель судна выполнена в масштабе 1 : 10. Определить, при какой скорости в гидроканале должна испытываться модель, чтобы коэффициент сопротивления, вызванного волновыми эффектами, у модели и натуре были одинаковыми. Судно рассчитано на движение со средней скоростью 40 км/ч.

6.7. Требуется определить сопротивление при спижении воздушного шара на основании исследования спуска в воде модели, выполненной в масштабе 1 : 50. Какие условия необходимо выдер-

жать при проектировании модели и что именно надо измерить при выполнении опыта?

6.8. Определить, каково будет соотношение между гидродинамическими силами, действующими на натуру и модель, при соблюдении равенства чисел Рейнольдса, если испытание натуре и модели производится в одной и той же среде.

6.9. Решить задачу 6.8 при условии соблюдения равенства чисел Фруда для натуре и модели.

6.10. В настоящее время устраняются соревнования моделей самолетов геометрически точно повторяющих прототип. Модели должны обладать по возможности теми же летными качествами, что и натура. Определить, каким качеством по массе должна удовлетворять модель, выполненная в масштабе $n = l_n : l_m$, чтобы условия полета натуре и модели были одинаковы. Влияние числа Рейнольдса не учитывать.

6.11. Покажите с помощью анализа размерностей, что тело, свободно падающее в пустоте, проходит путь s пропорциональный gt^2 .

6.12. Потребная для привода насоса мощность очевидно зависит от объемного расхода через насос Q ($\text{м}^3/\text{с}$) от плотности жидкости ρ ($\text{кг}/\text{м}^3$), ускорения земного тяготения g ($\text{м}/\text{с}^2$), напора, создаваемого насосом H (м) и коэффициента полезного действия насоса η . Найти формулу для определения мощности привода с помощью анализа размерностей.

6.13. Мощность гидравлической турбины зависит от расхода через турбину G ($\text{кг}/\text{с}$), напора жидкости H (м), ускорения g ($\text{м}/\text{с}^2$) и коэффициента полезного действия турбины η . Используя анализ размерностей, найти формулу для мощности гидравлической турбины.

6.14. Какая скорость движения нефти в трубе с диаметром 30 мм динамически подобна скорости движения воды $\omega_w = 6$ м/с при температуре 283 К в трубе с диаметром 5 мм. Какие потребуются при этом перепады давлений Δp для движения воды и нефти? Плотность и вязкость нефти: $\rho = 840$ $\text{кг}/\text{м}^3$, $\mu = 6,20$ П.

6.15. По трубопроводу с диаметром 150 мм перекачивается нефть ($\rho = 840$ $\text{кг}/\text{м}^3$, $\mu = 0,20$ П) с расходом 0,354 $\text{м}^3/\text{с}$. Какова должна быть скорость движения воды при температуре 283 К в трубопроводе того же диаметра, чтобы режим течения был динамически подобен движению нефти при заданных условиях?

6.16. По трубопроводу прокачивается вода со средней скоростью 5 м/с. С какой скоростью по данному трубопроводу надо прогонять воздух, чтобы течения были динамически подобны; какое для этого потребуется давление на входе в трубопровод. Давление и температура потока в трубопроводе в обоих случаях одинаковы ($B_0 = 760$ мм рт. ст., $T = 283$ К).

6.17. Модель снаряда выполнена в масштабе 1 : 6. Определить, во сколько раз сила сопротивления снаряда будет больше силы сопротивления модели, если их полет происходит при том же числе M в воздухе с той же температурой, но при плотности вдвое меньшей, чем та, при которой производились испытания модели.

6.18. Топливная система двигателя, выполненная из труб с диаметром 150 мм, пропускает 100 л/с керосина. Определить секундный расход воды по модельной сборке системы с диаметром труб 20 мм при соблюдении динамического подобия, найти так же скорость прокачки воды и керосина. Динамическая вязкость керосина и воды при температуре перекачки задана $\mu_k=0,20$ П, $\mu_v=0,01004$ П; плотность керосина $\rho=835$ кг/м³.

6.19. Определить, с какой скоростью и при какой температуре необходимо прокачивать керосин ($\rho=810$ кг/м³) по трубе с диаметром 50 мм, чтобы получить динамически подобные условия движению воды по трубе с диаметром 150 мм и расходом 28 кг/с при температуре воды 283 К.

6.20. В аэродинамической трубе с закрытой рабочей частью испытывается модель решетчатых компрессорных профилей, предназначенных для работы на последних ступенях осевого компрессора. Определить, какие должны быть давление и температура в рабочей части трубы, если геометрические размеры заданы масштабом моделирования $k_l=b_m/b_n$, степень повышения давления компрессора $\pi_k=10$, относительная скорость потока на входе на последних ступенях 260 м/с, компрессор работает у земли при стандартных условиях. Моделирование выдержать по критерию Рейнольдса и числу М.

6.21. Для определения аэродинамических характеристик легкового автомобиля высотой $h_n=1,7$ м необходимо испытать его модель в аэродинамической трубе, соблюдая подобие по числу Рейнольдса. Определить высоту модели автомобиля, если известно, что аэродинамическая труба работает на расширении атмосферного воздуха ($P_0=760$ мм рт. ст., $T_0=293$ К) со скоростью потока в рабочей части 100 м/с. Максимальная скорость движения автомобиля 130 км/ч.

6.22. Для условий задачи 6.21 и найденной высоты модели автомобиля определить, какое усилие будет испытывать автомобиль при максимальной скорости движения, считая, что усилие на модели известно. Прокомментируйте полученный результат.

6.23. Для определения сопротивления поплавок гидросамолета требуется провести опыт на модели с одновременным соблюдением подобия по критериям Фруда и Рейнольдса. В качестве модельной жидкости предлагается выбрать ртуть ($\rho_{рт}=13,6 \cdot 10^3$ кг/м³, $\mu_{рт}=1,6 \cdot 10^{-3}$ Па·с). Определить, какие при этом должны быть геометрический $k_l=b_m/b_n$ и кинематический $k_v=\omega_m/\omega_n$ масштабы моделирования.

6.24. Натурный объект работает в воздушном потоке. Эксперимент на модели проводится также в потоке воздуха, при этом требуется выдержать одновременно подобие по критериям Рейнольдса и Эйлера. Найти масштабы моделирования для геометрических размеров $k_l=b_m/b_n$ и для скоростей $k_v=\omega_m/\omega_n$.

6.25. Сколько безразмерных комплексов Π необходимо для выражения функций F_k , зависящих от указанных ниже размерных величин:

- а) $F_a = f(G \text{ в кг/с, } v \text{ в м}^2/\text{с, } b \text{ в м, } t \text{ в с, } w \text{ в м/с});$
 б) $F_6 = f(Q \text{ в м}^3/\text{с, } v \text{ в м}^2/\text{с, } b \text{ в м, } t \text{ в с, } w \text{ в м/с});$
 в) $F_8 = f(q \text{ в кг/м}^3, \mu \text{ в Па} \cdot \text{с, } b \text{ в м, } t \text{ в с, } w \text{ в м/с});$
 г) $F_2 = f(p \text{ в Па, } q \text{ в кг/м}^3, w \text{ в м/с, } l \text{ в м}).$

Получите эти безразмерные комплексы.

6.26. Коэффициент теплоотдачи α , характеризующий процесс теплообмена между твердой стенкой и обтекающей ее жидкостью, для случая течения в трубе круглого сечения является функцией $\alpha = f(w, \mu, c, \lambda, q, D, l, g)$ где α — коэффициент теплоотдачи в Вт/(м²·К); w — средняя по расходу скорость жидкости в м/с; c — удельная теплоемкость жидкости в Дж/(кг·К); μ — коэффициент динамической вязкости в Па·с; λ — коэффициент теплопроводности жидкости в Вт/(м·К); q — плотность жидкости в кг/м³; D, l — диаметр и длина трубы в м; g — ускорение свободного падения в м/с².

Определить число безразмерных комплексов Π , характеризующих данный процесс; составьте эти комплексы.

6.27. Доказать, что критерий Рейнольдса характеризует отношение сил инерции к силам трения в потоке.

6.28. Доказать, что критерий Фруда характеризует отношение сил инерции к силам тяжести.

6.29. Доказать, что критерий Эйлера есть мера отношения сил гидродинамического давления к силам инерции в потоке.

6.30. Доказать, что число M есть мера отношения кинетической энергии потока к теплосодержанию потока.

Глава VII

ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В отличие от уравнений газовой динамики уравнения магнитной газодинамики содержат дополнительные члены, учитывающие действие электромагнитной объемной силы и наличие джоулевой диссипации энергии. Система уравнений, описывающих движение проводящей жидкости в электромагнитных полях будет состоять из уравнений:

движения

$$\rho \frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{R} - \text{grad } p + \mu \Delta \vec{W} + \frac{1}{3} \mu \text{grad} (\text{div } \vec{W}) + [\vec{J} \times \vec{B}]; \quad (7.1)$$

энергии

$$\rho \frac{dt}{dt} = \frac{dp}{dt} + \lambda \Delta T + \mu \Phi + \frac{J^2}{\sigma_R}; \quad (7.2)$$

индукции

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{W} \times \vec{B}] + \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta \vec{B}; \quad (7.3)$$

обобщенного закона Ома

$$\vec{J} = \sigma_R [\vec{E} + [\vec{W} \times \vec{B}]]; \quad (7.4)$$

уравнений электродинамики Максвелла

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (7.5)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_B \vec{J}; \quad (7.6)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (7.7)$$

Эти уравнения должны быть дополнены уравнениями неразрывности и состояния, которые имеют обычный для газодинамики вид. В эти уравнения помимо известных газодинамических величин входят следующие: J — поверхностная плотность тока в А/м²; B — магнитная индукция в Т (тесла); σ_R — удельная электрическая прово-

дитость в См/м; E — напряженность электрического поля в В/м; Φ — поток магнитной индукции в Вб; μ_B — абсолютная магнитная проницаемость среды в Г/м, которая связана с магнитной постоянной $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Г/м и безразмерной магнитной проницаемостью μ уравнением

$$\mu_B = \mu \cdot \mu_0. \quad (7.8)$$

В этих уравнениях не учитывается взаимодействие электрического поля с зарядами, отношение которого к взаимодействию магнитной индукции с током имеет порядок 10^{-6} даже при больших скоростях потока (ω порядка 10^5 м/с).

Наличие в уравнениях движения (7.1) и энергии (7.2) дополнительных членов приводит к появлению новых критериев подобия. Так наряду с гидродинамическим числом Рейнольдса в магнитной газодинамике вводится понятие магнитного числа Рейнольдса

$$\text{Re}_m = \frac{l\omega}{v_H} = \mu_B \tau_R l \omega \sim B_l / B_t. \quad (7.9)$$

Этот критерий характеризует отношение магнитного поля от индуцированных токов B_t к наложенному внешнему магнитному полю B_l .

Отношение магнитного числа Рейнольдса к обычному числу Рейнольдса называют магнитным числом Прандтля

$$\text{Pr}_m = \frac{\text{Re}_m}{\text{Re}} = \frac{v}{v_H} = \mu_B \tau_R v. \quad (7.10)$$

Отношение электромагнитной силы к силе вязкости характеризуется квадратом числа Гартмана

$$\text{Ha} = B_l l \sqrt{\frac{\sigma_R}{q\nu}}. \quad (7.11)$$

Отношение электромагнитной силы к силе инерции называют параметром МГД-взаимодействия (число Стюарта S)

$$S = \frac{\tau_R B_0^2 l}{q_0 \omega_0} = \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}}. \quad (7.12)$$

Отношение энергии магнитного поля к кинетической энергии характеризуется числом Альфвена

$$\text{Al} = \frac{B_0^2}{\mu_B q_0 \omega_0^2}. \quad (7.13)$$

В качестве примера решения системы уравнений магнитогазодинамики приведем основные соотношения для ламинарного течения несжимаемой электропроводной жидкости по плоскому каналу (щели) постоянного сечения, направление продольной оси которого примем за ось x . Канал находится в однородном магнитном поле $\vec{B}(0, B_0, 0)$, направленном по оси y прямоугольной системы координат вдоль узких сторон канала. Стенки канала выполнены из непроводящего материала. Это течение называют течением Гартмана.

По закону Ома плотность тока в данном случае направлена вдоль оси z (вдоль широкой стороны канала)

$$J_z = \tau_R [E_z + u B_0]. \quad (7.14)$$

Нетрудно показать, что E_z определяется среднерасходной скоростью потока, т. е.

$$E_z = -u_{cp} B_0.$$

E_z имеет знак минус, так как направлено противоположно индуцированной электродвижущей силе $u B_0$. Тогда

$$J_z = \tau_R B_0 (u - u_{cp}). \quad (7.15)$$

Подставляя значение J_z в уравнение движения (7.1), получим

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \tau_R B_0^2 (u - u_{cp}).$$

Решая это уравнение, находим профиль скорости в канале

$$\frac{u}{u_{cp}} = \bar{u} = \text{Ha} \frac{\text{ch Ha} - \text{ch}(\bar{y} \text{ Ha})}{\text{Ha ch Ha} - \text{sh Ha}}, \quad (7.16)$$

где $\bar{y} = y/b$, а b — полущирина щели.

Имея профиль скорости, можно найти напряжение трения в канале и коэффициент трения c_f

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{\rho u_{cp}^2}{2}} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\text{Ha}^2 \text{sh Ha}}{\text{Ha ch Ha} - \text{sh Ha}}. \quad (7.17)$$

Решая уравнение (7.6) для данного случая течения, найдем

$$\frac{B_x}{B_0} = \text{Re}_m \frac{\text{sh}(\bar{y} \text{ Ha}) - \bar{y} \text{sh Ha}}{\text{Ha ch Ha} - \text{sh Ha}}. \quad (7.18)$$

Как видно, в течении Гартмана возникает магнитная индукция, направленная по оси x и пропорциональная магнитному числу Рейнольдса.

Другим типичным примером решения задачи магнитной газодинамики является течение в МГД-преобразователях. Рассмотрим МГД-преобразователь с плоским каналом в поперечном магнитном поле. Искажение приложенного магнитного поля токами преобразователя будем считать не существенным.

Электромагнитная сила, действующая на единицу объема,

$$f_{эм} = \tau_R [\vec{E} + \vec{W} \times \vec{B}] \times \vec{B} \quad (7.19)$$

может быть направлена вдоль и против тока жидкости. Это определяется величиной и знаком напряженности внешнего электрического поля $\vec{E}$. Сила, направленная по току жидкости, используется либо для ее ускорения (реактивный двигатель), либо для увеличения давления (МГД-насос). Электромагнитная сила направлена против тока жидкости в МГД-генераторах и дросселях.

Из уравнения движения (7.1) для одномерного течения в канале постоянного сечения можно найти максимальный напор, развиваемый МГД-насосом:

$$\Delta p_{\max} = \tau_R E l B = \frac{\sigma_R V l B}{2b} \quad (7.20)$$

и электродвижущую силу МГД-генератора в режиме холостого хода

$$V = u_{\text{ср}} 2bB, \quad (7.21)$$

где l — длина канала преобразователя; V — напряжение на электродах; b — полуширина канала.

Это же решение в безразмерном виде можно представить следующим соотношением:

$$\frac{\Delta p}{\rho u_{\text{ср}}^2} = \frac{l}{b} \frac{\text{Ha}}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\Pi} - \frac{\text{Ha}}{\text{Ha} - \text{th Ha}} \right), \quad (7.22)$$

где $\Delta p = p_2 - p_1$ — перепад давлений в канале; $\Pi = \frac{u_{\text{ср}} B}{E}$ — параметр нагрузки.

В насосе или ускорителе $\Pi < 1$ и $\Delta p > 0$, в МГД-генераторе $\Pi > 1$ $\Delta p < 0$.

Для генератора Π удобно выразить через сопротивление нагрузки внешней цепи R и внутреннее сопротивление преобразователя r , тогда $\Pi = \frac{R + r}{R}$.

В отличие от обычной газодинамики, где слабые возмущения распространяются со скоростью звука, в магнитной газодинамике наблюдается несколько типов слабых волн. Так магнитогазодинамическая волна или волна Альфвена, скорость распространения которой определяется уравнением

$$b_H = \frac{B_H}{\sqrt{\rho_B \mu_0}} = \sqrt{2 \frac{\rho_M}{\rho}}. \quad (7.23)$$

Волна Альфвена распространяется со скоростью b_H вдоль силовых линий магнитного поля ($b_H \sim B_H$) в газе бесконечно большой проводимости ($\sigma_H \rightarrow \infty$) и представляет собой слабую поперечную волну.

Помимо волны Альфвена имеются еще магнитозвуковые волны, которые подразделяются на быстрые и медленные. Скорость распространения быстрой магнитозвуковой волны определяется по уравнению

$$c = b_H \sqrt{\frac{r + 1 + \sqrt{(r + 1)^2 - 4r \cos \theta}}{2}}, \quad (7.24)$$

а медленной волны

$$c' = b_H \sqrt{\frac{r + 1 - \sqrt{(r + 1)^2 - 4r \cos \theta}}{2}}, \quad (7.25)$$

где $r = a_n^2/b_n^2$, а угол θ — угол между выбранным направлением скорости распространения волны и вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Так для волны Альфвена

$$b = b_n \cos \theta. \quad (7.26)$$

Помимо слабых возмущений в электропроводном газе наблюдаются магнитогазодинамические ударные волны, скорость распространения которых можно найти по отношениям давлений p_1/p_n и плотности q_1/q_n в ударной волне:

$$\omega_n^2 = \frac{p_1 - p_n}{q_1 - q_n} \frac{q_1}{q_n} + \frac{B_n^2}{2\mu_B q_n} \left(\frac{q_1}{q_n} + 1 \right) \frac{q_1}{q_n}. \quad (7.27)$$

Основное кинематическое соотношение для прямой магнитогазодинамической ударной волны определяется соотношением

$$u_n u_1 = \frac{2k}{k+1} RT_c^* + \frac{2-k}{k+1} \frac{B_H^2 (m+1)}{\mu_B q_n}, \quad (7.28)$$

где T_c^* — эффективная температура торможения, которая определяется

$$T_c^* = T_n + \frac{k-1}{2kR} u_n^2 + \frac{k-1}{kR} \frac{B_H^2}{\mu_B q_n}; \quad (7.29)$$

$$m = \frac{q_1}{q_n} = \frac{u_n}{u_1} = \frac{B_1}{B_H} = \frac{b_1^2}{b_n^2} = \frac{Al_1^2}{Al_n^2}.$$

Первый член уравнения (7.28) есть квадрат критической скорости звука соответствующей эффективной температуре торможения, а второй член учитывает влияние магнитного поля.

Основное динамическое соотношение для прямой магнитогазодинамической ударной волны

$$\frac{p_1 - p_n}{q_1 + q_n} = k \frac{p_1 + p_n}{q_1 + q_n} + \frac{B_H^2 (m-1)^2 (k-1)}{2\mu_B q_n (m+1)}. \quad (7.30)$$

Уравнение (7.30) позволяет найти прирост давления в ударной магнитогазодинамической волне, что является уравнением МГД-ударной адиабаты:

$$p = \frac{p_1}{p_n} = \frac{b_n^2 - 1 + q(m-1)^2}{b_n^2 - m}, \quad (7.31)$$

где $\theta = \frac{k-1}{k+1}$; $q = \frac{p_n}{\rho_n}$, а $p_m = \frac{B^2}{2\mu_B}$.

Связь безразмерной скорости распространения ударной волны с параметрами представляется соотношением

$$M_n^2 = \frac{m}{k} \frac{\theta + 1 + q[(\theta + 1)(m + 1) - 4m]}{\theta - m}. \quad (7.32)$$

Турбулентные течения электропроводной жидкости в магнитном поле различной ориентации приводят к анизотропии пульсацион-

ных значений всех параметров потока. Для определения напряжения трения турбулентного потока при наличии МГД-воздействия предлагается модифицированная формула Прандтля:

$$\tau = \left\{ \begin{array}{l} -ql^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 (1 - \alpha \text{Se}) \quad (B_x, 0, 0), \\ -ql^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 (1 - \alpha \text{Se}) \quad (0, B_y, 0); \\ -ql^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 (1 - \alpha \text{Se})^2 \quad (0, 0, B_z), \end{array} \right\} \quad (7.33)$$

где l — длина пути смещения; α — опытная константа турбулентных токов; Se — локальный критерий МГД-взаимодействия

$$\text{Se} = \frac{\sigma_R B^2}{\rho \frac{du}{dy}}. \quad (7.34)$$

Задачи

7.1. Запишите векторные уравнения движения (7.1) в прямоугольной системе координат.

7.2. Запишите векторное уравнение обобщенного закона Ома (7.4) в декартовых координатах.

7.3. Запишите векторное уравнение (7.3) в декартовых координатах.

7.4. Определить, какой максимальный напор может создавать кондукционный МГД-насос, к электродам которого приложено напряжение 0,02 В. Длина насоса 0,8 м, ширина 0,1 м. Прокачивается натрий при температуре 623 К. Проводимостью стенок канала пренебречь. Удельная электрическая проводимость натрия при заданной температуре $5,43 \cdot 10^6$ См/м. Индукция однородного магнитного поля равна 2,0 Т. Электроды принять эквипотенциальными.

7.5. Определить напор, создаваемый насосом, описанным в задаче 7.4, при высоте канала 0,04 м и расходе 0,2 л/с с учетом вязких потерь при ламинарном режиме течения. Вязкость и плотность натрия при условиях задачи заданы $\mu = 0,3 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\rho = 870$ кг/м³.

7.6. Плоский канал кондукционного МГД-генератора имеет поперечные размеры $0,1 \times 0,02$ м при длине 1 м. По каналу движется натрий с расходом 2 л/с при ламинарном режиме течения; индукция однородного магнитного поля генератора 2,0 Т. Определить напряжение на электродах генератора в режиме холостого хода и напор Δp , который надо создать, чтобы обеспечить заданный расход рабочего тела. Плотность, вязкость и проводимость натрия при температуре прокачки известны: $\rho = 870$ кг/м³, $\mu = 0,3 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $\sigma_R = 5,43 \cdot 10^6$ См/м.

7.7. К МГД-генератору, описанному в задаче 7.6, подключили нагрузку $R = 10^{-6}$ Ом. Расход через канал поддерживается прежним. Определить напряжение на электродах генератора, ток в цепи

нагрузки, напор Δp , необходимый для поддержания прежнего расхода.

7.8. Плоский канал постоянного сечения МГД-генератора имеет стенки из идеального ферромагнетика, изолированные от потока жидкого металла тонкой непроводящей пленкой. Отвод тока в режиме короткого замыкания осуществляется с помощью шин, расположенных в плоскости канала и направленных по току рабочего тела. Внешнее магнитное поле поперечное, однородное. Длина канала 1 м, рабочее тело — галлий с проводимостью $3,6 \cdot 10^6$ См/м, скорость потока 1 м/с. Решая уравнение индукции, найти распределение магнитного поля по длине канала генератора в режиме короткого замыкания. Во сколько раз максимальное значение индуцированного поля больше наложенного поля?

7.9. Определить относительную толщину пристеночного слоя $\bar{\delta}$ в течении Гартмана, где местная скорость составляет 99% от среднечасходной скорости в канале. Найти зависимость этой толщины от критерия Na , а также значение толщины δ при высоте канала $h=0,1$ м и $Na=500$.

7.10. Определить поток магнитной индукции вдоль направления скорости в течении Гартмана, пронизывающий половину поперечного сечения канала, примыкающий: а) к одному из электродов и б) к одной из боковых стенок. Величина индукции поперечного поля $2T$, по каналу движется галлий с проводимостью $\sigma_L=3,6 \times 10^6$ См/м и вязкостью $\mu=1,8 \cdot 10^{-3}$ Па·с, магнитной проницаемостью среды $\mu_B=1,25 \cdot 10^{-6}$ Г/м, средняя скорость потока 100 м/с, ширина канала $2b=0,8$ м, высота канала $2h=0,04$ м.

7.11. Исследования по распространению волн Альфвена проводились в магнитогидродинамическом волноводе, представляющем собой медную трубу, внутри которой с помощью соленоида создается однородное осевое магнитное поле с $B=1,6$ Т. Труба заполнена водородной плазмой с плотностью $\rho=10^{-5}$ кг/м³ и абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_B=4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м. Определить скорость распространения волн вдоль оси волновода и в направлении, составляющем с осью волновода угол 45° .

7.12. Вертикально поставленная труба заполнена жидким галлием. Внутри трубы с помощью соленоида создано продольное магнитное поле. Какова должна быть индукция этого поля, чтобы возмущения, производимые свинцовым шариком диаметром 20 мм, не опережали последний в его установившемся движении внутри трубы под действием силы тяжести при коэффициенте лобового сопротивления $c_x=0,3$. Плотность галлия $\rho=6090$ кг/м³, абсолютная магнитная проницаемость $\mu_B=4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м, плотность свинца $\rho=11400$ кг/м³.

7.13. Воспользовавшись континуальным приближением найти максимальные скорости распространения быстрой и медленной магнитозвуковых волн, а также волн Альфвена в водородной (одноатомной плазме), находящейся в однородном магнитном поле индукции $B=0,5$ Т. Плотность плазмы $\rho=10^{-6}$ кг/м³ при температуре $T=10^8$ К, абсолютная магнитная проницаемость $\mu_B=4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м.

7.14. Для условий задачи 7.13 построить годограф фазовых скоростей быстрой и медленной магнитозвуковых волн и волн Альфвена (качественно), приняв за ось абсцисс направление магнитного поля.

7.15. В прямой магнитогазодинамической ударной волне идеально проводящего газа отношение плотностей $\varrho_1/\varrho_n=2$. Чему при этом равен скачок индукции магнитного поля?

7.16. Подсчитайте прирост эффективного давления Δp в МГД-ударной волне, движущейся со скоростью $w_n=360$ км/с в гелиевой плазме плотности $\varrho_n=10^{-6}$ кг/м³, если $\varrho_1/\varrho_n=1,8$.

7.17. Число M_1 в потоке идеально проводящей плазмы за МГД-ударной волной равно 10. Чему равно число M_n набегающего потока, если отношение плотностей на ударной волне $\varrho_1/\varrho_n=3$, давление $p_n=1330$ Па, а магнитная индукция $B_n=0,2$ Т.

7.18. Определить скорость распространения прямой ударной волны магнитного поля в одноатомной идеально проводящей среде с молекулярной массой, равной 1, при давлении $p_n=13,3$ Па и температуре $T_n=10^7$ К. Индукция магнитного поля меняется в скачке от 1 до 2 Т.

7.19. Определите, во сколько раз повышается плотность идеально проводящей плазмы при прохождении магнитогазодинамической ударной волны, если задано $M_n=8$, $\bar{p}=p_m/p_n=25$. Как изменится решение, если при тех же условиях прямая ударная волна возникла при $B_n=0$?

7.20. Найти число M_n потока с прямой газодинамической ударной волной, эквивалентной по увеличению статического давления МГД-ударной волне, которая при $M_n=24$ имеет $\bar{p}=100$, $k=1,67$. Найдите при этом степень повышения статического давления в скачке уплотнения.

7.21. Определить скорость истечения и тягу электрореактивного двигателя, в котором ускорение плазмы происходит в скрещенных электрическом и магнитном полях (аналогично схеме кондукционного МГД-насоса), при следующих условиях: канал плоский длиной 3 м, шириной 0,5 м (расстояние между электродами), высотой 0,05 м, величина индукции однородного магнитного поля ускорителя 0,1 Т, проводимость плазмы $\sigma_k=3 \cdot 10^3$ См/м, расход 0,1 кг/с, напряжение на электродах ускорителя 2000 В.

7.22. Используя концепцию турбулентного моля, рассмотрите качественно, как влияет однородное электромагнитное поле на процессы турбулентного переноса. Как зависит воздействие магнитного поля на турбулентный моль от проводимости и плотности жидкости?

7.23. Найдите отношение напряжений турбулентного трения с одинаковым градиентом скорости в продольном B_n ($B_0, 0, 0$) и окружном поле $B_0(0, 0, B_0)$. Локальный критерий МГД-взаимодействия Se-2, константа турбулентных токов $\alpha=0,22$.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ИЗ НИХ

Глава I

- 1.1. В 1,15 раза.
 1.2. а) 341 м/с; б) 1296 м/с; в) 997 м/с; г) 306 м/с; д) 1400 м/с; е) 1236 м/с;
 ж) 1435 м/с.
 1.3. 83,6 кг.
 1.4. $p_2 = 248 \cdot 10^5$ Па.
 1.5. $p = 165,3 \cdot 10^5$ Па, $q = 200$ кг/м³.
 1.6. На 21,6 кг.
 1.7. В 2 раза.
 1.8. $w = 2,5$ м/с.
 1.9. $w = 12,76$ м/с.
 1.10. $T = 344$ К.
 1.11. $w = 418$ м/с.
 1.12. $w = 109,6$ м/с.
 1.13. $w = 251$ м/с.
 1.14. $w = 12,8$ м/с.
 1.15. $E = 425$ кДж; $E_{yx} = \frac{gH}{2} = 73,5$ Дж/кг.
 1.16. $E = 1350$ кДж; $E_{yx} = 151,5$ Дж/кг.
 1.17. $E = 845$ кДж; $E_{yx} = 95,2$ Дж/кг.
 1.18. $Q = 8270$ м³/с.
 1.19. $N = 110$ кВт.
 1.20. $N = 6200$ кВт; $d = 1190$ мм.
 1.21. $Q = 3350$ м³/с.
 1.22. Жидкость движется снизу вверх.
 1.23. $p_1 = 1,107 \cdot 10^5$ Па.
 1.24. При движении снизу вверх $p_1 = 1,7 \cdot 10^5$ Па; при движении сверху вниз
 $p_1 = 1,65 \cdot 10^5$ Па.
 1.25. $M_{max} = 2,69$.
 1.26. $w = 266$ м/с; $q = 956$ км/ч; $T^* = 252$ К.
 1.27. $M = 2,35$; $T^* = 456$ К.
 1.28. Решение. На высоте $H = 8000$ м $T = 236$ К, скорость звука $a =$
 $= 20,1 \sqrt{236} = 309$ м/с, $w = M \cdot a = 0,85 \cdot 309 = 263$ м/с; $q = 945$ км/ч.
 При этой скорости на высоте $H = 8$ км температура торможения будет $T^* =$
 $= T(1 + 0,2 M^2) = 236(1 + 0,2 \cdot 0,85^2) = 270$ К.
 При скорости, равной скорости звука, температура потока будет

$$T = \frac{2}{k + 1} T^* = 0,834 \cdot 270 = 225$$
 К.
 1.29. Решение. На высоте $H = 5000$ м, $T = 255,5$ К, давление $p = 405$ мм
 рт. ст. $p/p^* = p(\lambda) = \frac{405}{684} = 0,593$. При этом $\lambda = 0,91$, $M = 0,8947$; $w = M \cdot a =$

$=0,8947 \cdot 20,1 \times \sqrt{255,5} = 287 \text{ м/с} = 1035 \text{ км/ч}$. Полет со скоростью, равной скорости звука, на этой высоте, будет при $w=a=20,1\sqrt{255,5}=321 \text{ м/с} = 1155 \text{ км/ч}$.

Скорость полета надо увеличить на 120 км/ч.

1.30. $h_{\text{лин}} = 157 \text{ мм рт. ст.}$

1.31. $w=a=240 \text{ м/с}$, $M=0,73$.

1.32. $p^*=350,6 \text{ мм рт. ст.}$ При $q=\text{const}$ $p^*=333 \text{ мм рт. ст.}$

1.33. $p_1^*=1184 \text{ мм рт. ст.}$ При $q=\text{const}$ $p_2^*=1119 \text{ мм рт. ст.}$

$$\Delta h = \frac{p_1^* - p_2^*}{p_1^*} \cdot 100 = \frac{1184 - 1119}{1184} \cdot 100 = 5,5\%.$$

1.34. $H=3000 \text{ м}$, $T^*=308 \text{ К}$.

1.35. $w=a=317 \text{ м/с}$, $G=0,367 \text{ кг/с}$.

1.36. $w=882,5 \text{ м/с}$, $G=0,183 \text{ кг/с}$, $T_a=226 \text{ К}$. $p_a=48,8 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

1.37. $G=17,56 \text{ кг/с}$, $w=74,5 \text{ мс}$.

1.38. $G=0,56 \text{ кг/с}$, $p^*=2,008 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

$$1.39. \Delta h = \frac{p_1 - p_2}{qg} = 1080,5 \text{ мм}.$$

1.40. $G=0,56 \text{ кг/с}$.

1.41. $w_2=126,33 \text{ м/с}$, $G=5,2 \text{ кг/с}$.

1.42. $a_{\text{кр}}=1040 \text{ м/с}$, $a^*=1115 \text{ м/с}$. Действительная скорость распространения слабых возмущений (скорость звука) в камере $>a_{\text{кр}}$ и $<a^*$.

1.43. $T^*=11415 \text{ К}$, $M=50,6$.

1.44. $T_k=556 \text{ К}$, $T_k^*=596 \text{ К}$.

1.45. $v_0=0,816 \text{ м}^3/\text{кг}$, $v_1=0,877 \text{ м}^3/\text{кг}$, $v_2=0,16 \text{ м}^3/\text{кг}$.

1.46. $F_{\text{кр}}=21,6 \text{ см}^2$, $F_a=36,4 \text{ см}^2$, $p^*=7,93 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

1.47. $p^*=3,125 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T^*=684 \text{ К}$.

1.48. $T=358 \text{ К}$.

1.49. $p_2=3,35 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $\lambda_2=1,146$, $q(\lambda_1)=0,7091$, $q(\lambda_2)=0,9748$, $F_1/F_2=1,375$.

1.50. $p_T^*=2,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T_T^*=785 \text{ К}$.

1.51. $N_T=24214 \text{ кВт}$, $T_T^*=777 \text{ К}$.

1.52. $N_e=7580 \text{ кВт}$.

1.53. $L_T=686418 \text{ Дж/кг}$, $p_T=0,748 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T_T=850 \text{ К}$, $T_T^*=913 \text{ К}$.

1.54. $L_k=319146 \text{ Дж/кг}$, $p_k^*=10^6 \text{ Па}$, $p_k=9,496 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T_k^*=618 \text{ К}$, $T_k=$
 $=610 \text{ К}$ $w_k=136,5 \text{ м/с}$.

1.55. $L_{\text{ад}}=232435 \text{ Дж/кг}$, $p_k^*=8,17 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

1.56. $c_a=136 \text{ м/с}$, $\beta=26^\circ 20'$.

1.57. По вращению колеса $c_u=153 \text{ м/с}$.

1.58. Без направляющего аппарата относительная скорость будет $w_1=434 \text{ м/с}$.

На земле $M_1=1,27$, на высоте $H=11 \text{ км}$ $M_1=1,46$. С направляющим аппаратом закрутка по вращению колеса, на земле $c_{1u}=118 \text{ м/с}$, на высоте $H=11 \text{ км}$ $c_{1u}=171 \text{ м/с}$.

1.59. В 10 раз.

$$1.60. \bar{w}_Q = \frac{1}{3} w_0, w_J = \frac{1}{\sqrt{6}} w_0, \bar{w}_E = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{10}} w_0, \bar{w}_E > \bar{w}_J > \bar{w}_Q.$$

$$1.61. \bar{w}_Q = \frac{1}{2} w_0, \bar{w}_J = \frac{1}{\sqrt{3}} w_0, \bar{w}_E = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{4}} w_0, \bar{w}_E > \bar{w}_J > \bar{w}_Q.$$

1.62. $N_{\text{возд}}=32007 \text{ Вт}$, $N_{\text{водн}}=1250 \text{ Вт}$, $N_{\text{возд}}/N_{\text{водн}}=25,6$ раза.

1.63. а) $w=19,8 \text{ м/с}$; б) $w=22,2 \text{ м/с}$; в) $w=21,7 \text{ м/с}$; г) $w=15,25 \text{ м/с}$.

1.64. а) $h=9,9 \text{ м}$; б) $h=11,6 \text{ м}$; в) $h=11,76 \text{ м}$; г) $h=5,37 \text{ м}$.

$$1.65. \frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2, \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2;$$

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{k}{k-1}}, \frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

$$\frac{Q^*}{Q} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad \frac{Q}{Q^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

$$1.66. \frac{Qw^2}{2} = \frac{k\rho}{2} M^2 = \frac{\frac{k}{k+1} p \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}.$$

$$1.69. \varepsilon_Q = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{4} M^4 - \frac{1}{8} k M^4 + \dots$$

при $M = 0,3$ $\varepsilon_p = 2,27\%$, $\varepsilon_Q = 4,6\%$;

при $M = 0,5$ $\varepsilon_p = 6,4\%$, $\varepsilon_Q = 12,97\%$;

$$\varepsilon_Q \approx 2\varepsilon_p.$$

1.70. Для гелия $\beta_{кр} = 0,487$; для CO_2 $\beta_{кр} = 0,547$; для CH_4 $\beta_{кр} = 0,547$.

1.71. Жидкость идеальная, несжимаемая.

1.72. $w_{пол}/w_{отн} = 2$, $d_{кр} = 11$ мм.

1.73. $p^* = 215 \cdot 10^5$ Па, $T^* = 476$ К, $Q^* = 157,5$ кг/м³.

1.74. $p^* = 6,72 \cdot 10^5$ Па, $T^* = 298$ К, $Q^* = 7,86$ кг/м³, $w = 316$ м/с.

1.75. $p^* = 18,2 \cdot 10^5$ Па, $T^* = 3075$ К, $Q^* = 1,725$ кг/м³.

1.76. $T = 132,5$ К, $M = 2,43$, $w = 559$ м/с.

$$1.77. \text{Решение. } \lambda = \frac{w}{a_{кр}} = \frac{610}{18,3 \sqrt{288}} = 1,965,$$

при этом $M = 3,0$, $p(\lambda) = 0,0270$, $T(\lambda) = 0,3565$,

откуда $p = 0,0270 \cdot 760 = 25$ мм рт. ст., а

разрежение $B_0 - p = 760 - 25 = 735$ мм рт. ст.,

температура потока $T = T^* T(\lambda) = 288 \cdot 0,3565 = 103$ К.

1.78. $h_{кр} = 0,242$ мм, $G = 1,7$ кг/с, $T = 72$ К, $w = 1863,4$ м/с.

1.79. $d_{кр} = 57,8$ мм, $d_n = 84,24$ мм, $M_n = 2,2646$, $w = 675$ м/с, $T = 222$ К.

1.80. $p^* = 413,2 \cdot 10^5$ Па, $T^* = 1875$ К.

1.81. $h_{кр} = 0,88$ мм, $G = 5,487$ кг/с.

1.82. Решение. Из уравнения неразрывности

$$\frac{p_2^*}{\sqrt{T_2^*}} q(\lambda_2) F_2 = \frac{p_1^*}{\sqrt{T_1^*}} q(\lambda_1) F_1.$$

Так как $T_2^* = T_1^*$, то $q(\lambda_2) = q(\lambda_1) \frac{p_1^* F_1}{p_2^* F_2}$, т. е.

$$q(\lambda_2) = 0,9729 \frac{1}{0,94 \cdot 1,4} = 0,383, \quad \lambda_2 = 0,25, \quad p(\lambda_2) = 0,964.$$

$$p_2 = p^* p(\lambda_2) = p_1^* p(\lambda_2) = 0,94 \cdot 1,9 \cdot 10^5 \cdot 0,964 = 1,72 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

1.83. Решение. Внешнее давление $p_n = 0,98 \cdot 10^5$ Па. Критическое давление, которое обеспечивает течение со скоростью звука $p_{кр}^* = 1,86 \cdot 10^5$ Па. В диапазоне давлений в сопле от p_n до $p_{кр}^*$ давление на срезе сопла $p_a = p_n$. Далее с ростом давления в сопле p^* на срезе сопла p_a растет прямо пропорционально:

$$p_a = \beta_{кр} p^*.$$

1.84. Решение. Так как $\beta_{кр} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$, то при $k = 1,2$ — $\beta_{кр} = 0,564$,

следовательно, до давления $p^* = \frac{0,98 \cdot 10^5}{0,564} = 1,736 \cdot 10^5$ Па давление $p_a = 0,98 \times 10^5$ Па, а далее с увеличением p^* давление p_a растет прямо пропорционально p^* .

1.85. $p_a = 5,283 \cdot 10^5$ Па, $T_a = 750$ К, $w_a = 549$ м/с, $G = 13,5$ кг/с.

1.86. $p_a = 10^5$ Па; $T_a = 597$ К, $w_a = 7444$ м/с, $F_a = 0,334$ м².

1.87. $F_{кр} = 0,334 \cdot 10^3$ м², $F_a = 0,276$ м², $p^* = 4132 \cdot 10^5$ Па, $T^* = 3125$ К.

1.88. $d_a = 0,232$ м, $p_a = 5,283 \cdot 10^5$ Па, $T_a = 1666$ К, $w_a = 3115,5$ м/с.

1.89. $w_a = 1075$ м/с, $T_a = 424,6$ К, $d_{кр} = 0,662$ м, $G = 882$ кг/с.

1.90. $F_a = 0,15$ м², $F_{кр} = 0,0135$ м², $p_a = 52$ кПа, $p_{кр} = 52,83 \cdot 10^5$ Па, $T_a = 667$ К, $T_{кр} = 2500$ К, $w_a = 2165$ м/с, $w_{кр} = 1002$ м/с.

1.91. Р е ш е н и е. Из уравнения расхода

$$w_1 = \frac{G}{Q_1 F_1}, \quad Q_1 = \frac{p_1}{RT_1}, \quad \text{тогда}$$

$$w_1 = \frac{GRT_1}{p_1 \pi d_1^2} = \frac{0,5 \cdot 287 \cdot 303 \cdot 4}{5 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 0,075^2} = 19,7 \text{ м/с.}$$

Запишем уравнение энергии для изотермического процесса и уравнение расхода:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{Q_1}{Q_2} \ln \frac{p_2}{p_1} = 0; \quad Q_1 w_1 F_1 = Q_2 w_2 F_2.$$

Получили два уравнения с двумя неизвестными.

Из уравнения расхода

$$w_2 = w_1 \frac{Q_1}{Q_2} \frac{F_1}{F_2} = w_1 \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2.$$

Исключим из уравнения энергии скорость w_2 и получим

$$\frac{w_1^2}{2} \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right] + \frac{p_1}{Q_1} \ln \frac{p_2}{p_1} = 0.$$

В этом уравнении одно неизвестное p_2 .

Обозначим через A выражение

$$\frac{Q_1 w_1^2}{2} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 p_1 = A = \frac{5,75 \cdot 19,7^2}{2} \left(\frac{75}{150} \right)^4 \cdot 5 \cdot 10^5 = 348 \cdot 10^5$$

тогда

$$\frac{A}{p_2^2} + \ln p_2 = \ln p_1 + \frac{Q_1 w_1^2}{2 p_1}.$$

Уравнение можно решить либо подбором, либо приближенно, отбросив первый член из-за его малости $A/p_2^2 \approx 10^{-4}$, тогда

$$\ln p_2 = \ln p_1 + \frac{Q_1 w_1^2}{2 p_1} = \ln 5 \cdot 10^5 + \frac{5,75 \cdot 19,7^2}{2 \cdot 5 \cdot 10^5} = 13,1246, \quad \text{отсюда} \quad p_2 = 5,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Расчет можно повторить с учетом отброшенного члена. После этого находим w_2 :

$$w_2 = w_1 \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 19,7 \cdot \frac{5}{5,01} \left(\frac{75}{150} \right)^2 = 4,92 \text{ м/с.}$$

1.92. $w = 530$ м/с, $\Delta w = 530 - 493 = 37$ м/с.

1.93. Для процесса $T = \text{const}$:

$$w_2 = 450 \text{ м/с, } M_2 = 1,46, \quad T_2^* = 428 \text{ К.}$$

Для адиабатического процесса: $w_2 = 425$ м/с.

$$M_2 = 1,415, \quad T_2^* = 311 \text{ К.}$$

1.94. Решение. Из уравнения неразрывности

$$Q_1 w_1 F_1 = Q_2 w_2 F_2.$$

Из уравнения энергии для изотермического процесса

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + RT \ln \frac{p_2}{p_1} = 0.$$

Так как в изотермическом процессе $Q_1/Q_2 = p_1/p_2$,

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{F_1}{F_2} e^{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2RT}}.$$

1.95.

k	1,66	1,40	1,33	1,25	1,20	1,15	1,10
$\beta_{кр}$	0,488	0,528	0,540	0,555	0,564	0,574	0,585
p^*/p	32,07	36,73	39,2	43,33	47,05	52,17	59,57

1.96. Решение. Запишем уравнение Бернулли для среза сопла при течении без потерь и с потерями:

а) для течения без потерь $\frac{p}{p_c} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$

б) для течения с потерями $\frac{p}{p_x} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2\right)^{\frac{k}{k-1}}.$

Так как $\varphi = w_x/w_c = \lambda_c/\lambda_x$, то $\lambda_x = \lambda_c/\varphi$.

Имея это в виду, получим

$$\frac{p_x}{p_c} = \sigma = \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_x^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Решая это уравнение относительно φ , получим

$$\varphi^2 = \frac{\frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2}{1 - \sigma^{\frac{k-1}{k}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_c^2\right)}.$$

Подставляя численные значения, найдем $\varphi = 0,91$.

1.97. $\sigma = 0,68$.

1.98. $w_x = 266,5$ м/с, $\sigma = 0,92$.

1.99. $p_x^* = 1,7 \cdot 10^5$ Па.

1.100. $\omega_d = 335$ м/с, $\varphi = 0,944$.

1.101. $p_{вх}^* = 2,017 \cdot 10^5$ Па, $\varphi = 0,96$.

1.102. Решение. Предполагая движение одномерным, вдоль оси x из уравнения Эйлера без учета массовых сил, получим

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ или } \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho u} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Подставляя численные значения, найдем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 = -\frac{1}{103 \cdot 20} \cdot 500 = -\frac{1}{40}; \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 = -\frac{1}{103 \cdot 2} \cdot 500 = -\frac{1}{4}.$$

Поток тормозится.

1.103. Решение. Считая поток потенциальным, найдем давление

$$p = p^* - \frac{\rho v^2}{2}; v = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \text{ тогда } p = p^* - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Борта судна находятся на разных расстояниях от центра вихря. Наружный борт на $r+10$, внутренний борт на $r-10$.

$$\Delta p = p_{нар} - p_{вн} = \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2} \left[\frac{1}{(r-10)^2} - \frac{1}{(r+10)^2} \right] = \frac{\rho \Gamma^2 40r}{8\pi^2 (r^2 - 100)^2}.$$

Подставим численные значения Γ и r

$$\Delta p = \frac{103 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 40 \cdot 5 \cdot 10^3}{(25 \cdot 10^6 - 100)^2} \approx 6,4 \text{ Па},$$

Сила $R = \Delta p F$, где F — подводная боковая площадь корабля.

Сила R направлена к центру вихря.

1.104. $R = 6814$ Н к центру вихря.

1.105. Решение. При положительном ω (против часовой стрелки) $w = -r\omega$, $u = -\omega y$, $v = \omega x$.

При отсутствии массовых сил (вихрь плоский) уравнения Эйлера запишутся

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Найдем производные u и v :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = -\omega; v \frac{\partial u}{\partial y} = -\omega^2 x;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \omega; \frac{\partial v}{\partial y} = 0; u \frac{\partial v}{\partial y} = -\omega^2 y.$$

Подставив полученные значения в уравнения Эйлера, получим

$$-\omega^2 x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; -\omega^2 y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Умножая на dx и dy , получим $dp = \frac{\rho \omega^2}{2} d(x^2 + y^2) = \frac{\rho \omega^2}{2} dr^2$,

откуда $p = \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 + C$. Постоянную интегрирования найдем из условия, что на

границе ядра вихря (при $r=r_0$) давление p снаружи и внутри должно быть одинаковым и равно

$$p^* - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2} = \frac{\rho \omega^2}{2} r_0^2 + C,$$

откуда

$$C = p^* - \frac{q}{2} \left(\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} + \omega^2 r_0^2 \right).$$

Так как $\Gamma = 2\pi r_0 \omega = 2\pi r_0^2 \omega$, то $C = p^* - q\omega^2 r_0^2$, а избыточное давление в ядре вихря $p - p^* = \frac{q\omega^2}{2} (r^2 - 2r_0^2)$ — уравнение параболы.

Поскольку $r < r_0$, то давление внутри ядра меньше внешнего и при $r=0$: $p - p^* = -q\omega^2 r_0^2$.

1.106. $p^* = 3,96 \cdot 10^5$ Па, $N = 47,8$ кВт.

1.107. $\Delta E = 16,02$ Дж/кг, $\Delta p = 16017,8$ Па.

1.108. Решение. Запишем уравнение количества движения: $m(w_1 - w_2) = p_2 F_2 - p_1 F_2 = p_2 F_2 - p_1 F_1 - p_1 (F_2 - F_1)$.

После несложных преобразований, получим

$$z(\lambda_2) = z(\lambda_1) + \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{F_2/F_1 - 1}{\eta(\lambda_1)}.$$

Подставив заданные численные значения с использованием газодинамических таблиц, получим $z(\lambda_2) = 5,39$, $\lambda_2 = 0,192$. Из уравнения неразрывности

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1) F_1}{q(\lambda_2) F_2} = 0,798.$$

Если решать без учета сжимаемости жидкости, то $\Delta p = p_1^* - p_2^* = \frac{q(w_1 - w_2)^2}{2}$,

$$w_2 = w_1 \frac{F_1}{F_2}, \text{ или } \lambda_2 = \lambda_1 \frac{F_1}{F_2} = 0,8 \frac{1}{4} = 0,2; \sigma = 1 - \frac{k M_1^2}{2 + k M_1^2} \left(1 - \frac{F_1}{F_2} \right)^2 = 0,83.$$

Ошибка в определении λ_2 на 9,4%, в определении σ на 4%.

1.109. $R = 39400$ Н.

1.110. $d_{кр} = 0,285$ м, $d_a = 0,523$ м, $R = 513000$ Н, $w_a = 2050$ м/с.

1.111. Решение. Тяга двигателя определяется уравнением $R = m(w_a - v) + (p_a - p_n)F_a$.

Первый член правой части будет равен нулю при $w = v$. Соплю у двигателя простое, следовательно в пределе

$$w_a = a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_c^*} = \sqrt{\frac{2,66}{2,33} 287 \cdot 900} = 543 \text{ м/с.}$$

Отсюда найдем число М полета:

$$M = \frac{543}{20,1 \sqrt{T_0}} = \frac{543}{341} = 1,6.$$

1.112. $R = 91700$ Н, $R_{полн} = 97000$ Н, $F_a = 0,347$ м².

1.113. $\Delta R = R_{полн} - R = 86000 - 77500 = 8500$ Н.

1.114. $R = 80600$ Н, $R_\phi = 125400$ Н, $F_\phi = 0,516$ м².

1.115. $T_\phi^* = 1900$ К, $F_\phi = 0,47$ м².

1.116. Решение. По уравнению количества движения для сечений 1—1 и 2—2

$$p_1 F_1 + G_1 w_1 - R = p_2 F_2 + G_2 w_2.$$

Выполняя преобразование Киселева, получим

$$-R = G a_{кр} \frac{k+1}{2k} [z(\lambda_2) - z(\lambda_1)]; G a_{кр} = p^* k \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} F_{кр}.$$

Подставим этот член в уравнение

$$-R = p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} F_{кр} [z(\lambda_2) - z(\lambda_1)];$$

$$q(\lambda_1) = \left(\frac{d_{кр}}{d_{вх}} \right)^2 = \left(\frac{9}{20} \right)^2 = 0,2025; \lambda_1 = 0,13; z(\lambda_1) = 7,822;$$

$$q(\lambda_2) = \left(\frac{d_{кр}}{d_a} \right)^2 = \left(\frac{90}{205} \right)^2 = 0,193; \lambda_2 = 2,01; z(\lambda_2) = 2,5075;$$

$$F_{кр} = 63,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; -R = 12 \cdot 10^5 \cdot 0,833^{2,5} \cdot 63,6 \cdot 10^4 (2,5075 - 7,822) = -25600 \text{ Н}.$$

Тяга направлена по потоку.

1.117. Решение. $R = G\omega_a + (p_a - p_n) F_a = p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} F_{кр} z(\lambda_a) - p_n F_a.$

Площадь F_a найдем из соотношения $F_a = \frac{F_{кр}}{q(\lambda_a)}.$

Подставим значение F_a в уравнение тяги

$$R = p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} F_{кр} z(\lambda_a) - \frac{p_n F_{кр}}{q(\lambda_a)}.$$

Принципиально задача решена, так как справа одно неизвестное $-\lambda_a$, которое входит в газодинамические функции $z(\lambda)$ и $q(\lambda)$. Однако решить уравнение относительно λ_a невозможно. Найдем графически зависимость $q(\lambda)$ от $z(\lambda)$ в области $\lambda > 1$. В интервале $\lambda = 1,7 \dots 1,9$ эта зависимость имеет примерно линейный характер и может быть аппроксимирована уравнением $q(\lambda) = 3,94 - 1,5z(\lambda)$, тогда

$$R = p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} F_{кр} z(\lambda_a) - \frac{p_n F_{кр}}{3,94 - 1,5z(\lambda_a)},$$

откуда

$$z(\lambda_a)^2 - \left[\frac{R}{p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} F_{кр}} + \frac{3,94}{1,5} \right] z(\lambda_a) + \frac{3,94R + p_n F_{кр}}{1,5 p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} F_{кр}} = 0.$$

Подставляя численные значения и решая квадратное уравнение, найдем

$$z(\lambda_a) \approx 2,4; \lambda_a = 1,87; M_a = 2,64; q(\lambda_a) = 0,3316;$$

$$F_a = 1,52 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2; d_a = 139 \text{ мм}.$$

1.118. $R < 0$ при $z(\lambda_2) < z(\lambda_1)$ или $\lambda_2 < 1/\lambda_1$;

$$R > 0 \text{ при } z(\lambda_2) > z(\lambda_1) \text{ или } \lambda_2 > 1/\lambda_1;$$

$$R = 0 \text{ при } z(\lambda_2) = z(\lambda_1) \text{ или } \lambda_2 = 1/\lambda_1.$$

Ниже дано графическое изображение описанных условий (рис. 74).

1.119. $\bar{R} = 0$.

1.120. $d_{кр} = 43,7 \text{ мм}$, $d_a = 172 \text{ мм}$, $G = 2 \text{ кг/с}$, $\omega_a = 2500 \text{ м/с}$, $T_a = 1000 \text{ К}$.

1.121. $R_0/R_n = 0,92$.

1.122. $R_d = 30769 \text{ Н}$, $R_{нд} = 32600 \text{ Н}$, $\bar{R} = 0,942$.

1.123. На растяжение от усилия $137,5 \text{ кН}$.

1.124. По потоку 327 Н .

1.125. Против потока 45718 Н .

1.126. $N=55,8$ кВт.

1.127. $n=150,44$ мин⁻¹, $N=3,56$ кВт, $\omega=317$ м/с, $c=312,2$ м/с.

При полном расширении $n=152,84$ мин⁻¹, $N=3,7$ кВт.

1.128. Тяга каждого двигателя $R=1,8 \cdot 10^{-4}$ Н, расход в сутки на два двигателя 11,4 г.

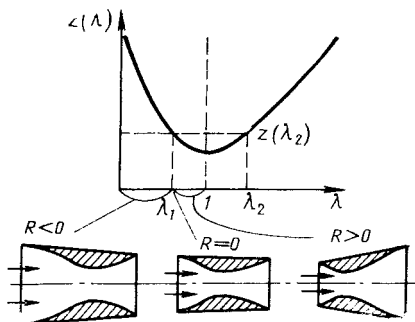
$$1.129. G_{\text{возд}} = G_{\text{H}_2} \sqrt{\frac{R_{\text{H}_2}}{R_{\text{возд}}}} = 3,807 G_{\text{H}_2} = 43,4 \text{ г/сут.}$$

1.130. Решение. $R_{\Sigma} = R_c + R_d$

$$R_c = \frac{k+1}{2k} m a_{\text{кр}} [z(\lambda_1) - z(\lambda_2)] + p_n (F_2 - F_1);$$

$$R_d = \frac{k+1}{2k} m a_{\text{кр}} \left[z\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) - z(\lambda_3) \right] + p_n (F_3 - F_2).$$

Рис. 74. Схема к ответу на задачу 1.118



Так как $z(\lambda_2) = z(1/\lambda_2)$, то

$$R_{\Sigma} = \frac{k+1}{2k} m a_{\text{кр}} [z(\lambda_1) - z(\lambda_3)] + p_n (F_3 - F_1);$$

$$m = 0,0405 \frac{10^5}{\sqrt{288}} \frac{3,14 \cdot 0,04}{4} = 0,749 \text{ кг/с};$$

$$a_{\text{кр}} = 18,3 \sqrt{288} = 310 \text{ м/с}; \quad q(\lambda_1) = F_{\text{кр}}/F_1 = 0,25; \quad \lambda_1 = 0,1605; \quad z(\lambda_1) = 6,381;$$

$$q(\lambda_2) = F_{\text{кр}}/F_2 = 0,444; \quad \lambda_2 = 1,767; \quad 1/\lambda_2 = 0,566; \quad q(1/\lambda_2) = 0,7783; \quad q(\lambda_3) = q \times$$

$$\times (1/\lambda_2) \frac{F_2}{F_3} = 0,7783 \frac{9}{36} = 0,195; \quad \lambda_3 = 0,125; \quad z(\lambda_3) = 8,125; \quad R_{\Sigma} = 0,858 \cdot 0,749 \times$$

$$\times 310 [6,381 - 8,125] + \frac{3,14}{4} \cdot 10^5 (0,36 - 0,16) = 15353 \text{ Н.}$$

Сила R_{Σ} направлена по потоку.

1.131. $R=15$ кН.

1.132. $R=17393$ Н.

1.133. $R=11094$ Н.

1.134. $Q=0,87$ м³/с.

1.135. $Q=0,356$ м³/с.

1.136. $d=160$ мм, $N=44,5$ кВт.

1.137. $v_{\text{max}}=1382$ м/с.

1.138. На расчетном режиме $\omega_{\text{max л.а}} \leq \omega_a$. При $p_a > p_n$ $\omega_{\text{max л.а}} > \omega_a$.

1.139. Решение. Будем считать, что внешнее давление $p=0$, тогда

$$R = m\omega + p_a F_a = p^* \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} F_{кр} z(\lambda).$$

Как видно, при $p^* = \text{const}$ и $F_{кр} = \text{const}$ тяга будет зависеть только от показателя адиабаты k . Так как у воздуха и водорода $k=1,4$, то и тяга $R_{\text{возд}} = R_{\text{H}_2}$. Найдем тягу для гелия

$$\frac{R_{\text{возд}}}{R_{\text{He}}} = \frac{\left[\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} z(\lambda) \right]_{\text{возд}}}{\left[\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} z(\lambda) \right]_{\text{He}}}.$$

λ найдем по перепаду давлений $p(\lambda) = \frac{0,15}{30} = 5 \cdot 10^{-3}$: для $k=1,4$, $\lambda=2,16$, $z(\lambda)=2,62296$; для $k=1,66$, $\lambda=1,96$, $z(\lambda)=2,47020$.

$$\frac{R_{\text{возд}}}{R_{\text{He}}} = \frac{0,635 \cdot 2,62296}{0,648 \cdot 2,47020} = 1,04; R_{\text{He}} = 0,962 R_{\text{возд}},$$

Найдем расход для водорода

$$G_{\text{возд}}/G_{\text{H}_2} = 0,0405/0,0106 = 3,82; G_{\text{H}_2} = 0,26 G_{\text{возд}}.$$

Расход гелия

$$G_{\text{возд}}/G_{\text{He}} = 0,0405/0,0161 = 2,52; G_{\text{He}} = 0,4 G_{\text{возд}}.$$

Тяга двигателя на водороде и гелии почти одинаковые с воздушным двигателем, а расход при этом водорода или гелия значительно меньше.

1.140. Решение.

$$c_x = \frac{R}{\frac{\rho u^2}{2} F}; R = l \int_{-y}^{+y} [\rho u_x (u_1 - u_x) + (p_1 - p_2)] dy.$$

Так как v и $w=0$, то $p_1 = p_2$; $F = l d$, то

$$c_x = 2 \int_{-y}^{+y} \frac{u_x}{u_1} \left(1 - \frac{u_x}{u_1} \right) \frac{dy}{d} = 4 \int_0^y \frac{u_x}{u_1} \left(1 - \frac{u_x}{u_1} \right) \frac{dx}{d};$$

$$u_x = u_1 \frac{y}{1,4d}; c_x = \frac{4}{1,4d} \int_0^{1,4d} y \left(1 - \frac{y}{1,4d} \right) dy = \\ = \frac{4}{1,4d^2} \left(\frac{1,4^2 d^2}{2} - \frac{1,4^2 d^2}{3} \right) = 4 \cdot 1,4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 0,93.$$

1.141. Решение. Запишем интеграл Эйлера для осей, связанных с дождевой установкой:

$$\frac{w^2}{2} + P + U = \text{const}$$

$P = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$; U — потенциал массовых сил — в нашем случае центробежных и сил тяжести

$$U = U_0 + y h - \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

За нивелирную плоскость возьмем сечение 2—2. Постоянную интеграла Эйлера найдем, записав уравнение для сечений 1—1 и 2'—2':

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_0 + gh_1 - \frac{\omega^2 r_1^2}{2} = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_0 + gh_2 - \frac{\omega^2 R^2}{2}.$$

Полагая, что $w_1 \approx 0$, $r_1 \approx 0$, а $p_1 = p_2$, получим

$$\frac{w_2^2}{2} = g(h_1 - h_2) + \frac{\omega^2 R^2}{2} \text{ или } w = \sqrt{2gH + \omega^2 R^2}.$$

Величину угловой скорости вращения найдем из уравнения моментов количества движения, записав его относительно оси установки для границ контура, радиуса R :

$$M = -GR(w \cos \varphi - \omega R).$$

Знак минус указывает на то, что действующий момент и количество движения имеют разные направления.

Так как внешние силы и трение отсутствуют, то $M=0$ и

$$w \cos \varphi = \omega R.$$

Подставим ранее найденное значение w и получим

$$\sqrt{2gH + \omega^2 R^2} \cdot \cos \varphi = \omega R, \text{ откуда} \\ \omega = \frac{\sqrt{2gH} \cdot \cos \varphi}{R \sin \varphi}.$$

При $\varphi=0$ $\omega \rightarrow \infty$; при $\varphi=\pi/2$ $\omega \rightarrow 0$.

1.142. $M=4,53$ Н·м, $N=28,45$ Вт, $\omega=6,733$ м/с, $c=0,453$ м/с.

1.143. $R_x = (p_1 F_1 + G w_1) \cos \alpha_1 - (p_2 F_2 + G w_2) \cos \alpha_2$;

$$R_y = (p_1 F_1 + G w_1) \sin \alpha_1 - (p_2 F_2 + G w_2) \sin \alpha_2.$$

1.144. 1) $R_x = -100,5$ кН, $R_y = 100,5$ кН;

2) $R_x = 40,25$ кН, $R_y = -80,313$ кН.

1.145. Решение. Выбирая жидкий контур перед винтом так, что скорость на границе контура достаточно мала, а давление равно атмосферному, как и в струе за винтом, где скорость v , площадь струи F , получим

$$R_y = \rho v^2 F. \quad (1)$$

С другой стороны

$$R_y = \Delta p \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d_0^2}{4} \cdot \frac{\rho v_0^2}{2} = \frac{\rho v_0^2}{2} F_0, \quad (2)$$

где v_0 — скорость воздуха, отбрасываемого винтом. Сравнивая выражения (1) и (2), получим при $\rho = \text{const}$

$$v^2 F = \frac{1}{2} v_0^2 F_0. \quad (3)$$

Недостающее условие найдем из уравнения мощности:

$$N = \frac{G v^2}{2} = \frac{\rho v^3}{2} F = \frac{\rho v_0^3}{2} F_0. \quad (4)$$

Из уравнения (3)

$$\frac{F}{F_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{v} \right)^2, \quad (5)$$

а из уравнения (4) с учетом (5)

$$v = 2v_0, F = \frac{1}{8} F_0.$$

Найдём численные значения R_y и N :

$$R_y = 1,2 \cdot 402 \frac{1}{8} \frac{\pi d_0^2}{4} = 12057,6 \text{ Н};$$

$$N = \frac{qv^3}{2} F = \frac{1,2 \cdot 403}{2} \cdot 6,28 = 241 \text{ кВт}.$$

Глава II

2.1. Решение. Схема течения и обозначения показаны на рис. 26. По условию $w_z, w_r = 0$, тогда $dm = \frac{\partial(qw_\varphi)}{\partial\varphi} d\varphi dz dr dt$. С другой стороны $dm = - \frac{\partial q}{\partial t} dt dz dr d\varphi$.

Приравняв правые части дифференциальных уравнений, получим $\frac{\partial(qw_\varphi)}{\partial\varphi} = -r \frac{\partial q}{\partial t}$. Так как $w_\varphi = r\omega$, то $\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(q\omega)}{\partial\varphi} = 0$, что и требовалось доказать.

2.2. Решение. По условию $w_r = 0$. Суммарный расход за время dt через грани, перпендикулярные оси z и вдоль радиуса r (см. рис. 26), будет

$$dm_z = \left[\frac{\partial(qw_\varphi)}{\partial\varphi} + r \frac{\partial(qw_z)}{\partial z} \right] d\varphi dz dr dt.$$

С другой стороны за время dt в выделенном объеме масса жидкости изменится в зависимости от плотности q :

$$dm_z = - \frac{\partial q}{\partial t} dt dz dr d\varphi.$$

Приравняв правые части дифференциальных уравнений и имея в виду, что $w_\varphi = r\omega$, получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial(q\omega)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(qw_z)}{\partial z} = 0.$$

2.3. Решение. Если на рис. 26 провести плоскость через ось z , то расход в выделенном объеме будет создаваться скоростями w_z и w_r . Записывая изменение расхода за время dt через соответствующие площади и приравняв полученное изменение расхода изменению количества жидкости за то же время, в том же объеме, вызванное изменением плотности q , получим

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(qw_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(qw_z)}{\partial z} = 0.$$

2.4. Для $q \neq \text{const}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(qw_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial(qw_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial(qw_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} = 0.$$

Для $q = \text{const}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(w_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial(w_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} = 0.$$

2.5. Решение. По условию $w_\varphi = 0$ и $w_\theta = 0$ объем жидкости в сферической системе координат показан на рис. 27. Запишем расход жидкости в направлении радиуса вектора r за время dt :

$$dm_r = \frac{\partial (Q w_r r^2)}{\partial r} \sin \theta d\theta d\varphi dr dt.$$

С другой стороны за время dt плотность Q изменится и в выделенном объеме масса жидкости также изменится:

$$dm = -\frac{\partial Q}{\partial t} dt r^2 \sin \theta d\theta dr d\varphi.$$

Приравняв расходы, получим

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (Q w_r r^2)}{\partial r} = 0,$$

или

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + w_r \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{Q}{r^2} \frac{\partial (w_r r^2)}{\partial r} = 0.$$

2.6. В сферических координатах условия задачи приводят к течению, при котором составляющая скорости $w_\theta = 0$ (см. рис. 27). Тогда, записывая изменение расхода от компонент скорости w_r и w_φ и приравнявая это изменение расхода за время dt расходу в выделенном объеме за счет изменения плотности Q за то же время, получим

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (Q w_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (Q w_\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

Преобразуя второй член суммы, получим

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial (Q w_r)}{\partial r} + \frac{2Q w_r}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (Q w_\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$$

2.7. Для $Q \neq \text{const}$

$$\frac{\partial (Q w_r)}{\partial x} + \frac{\partial (Q w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (Q w_\theta)}{\partial \theta} + \frac{Q w_r}{r} = 0.$$

Для $Q = \text{const}$

$$\frac{\partial w_r}{\partial x} + \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} = 0.$$

2.8. Не удовлетворяет.

2.9. Удовлетворяет.

2.10. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$

1) $u = v = a$; 2) $u = a$, $v = -a$.

2.11. $\psi = 2xy$, $Q = 2$ м³/с на 1 м.

2.12. $u = a$, $v = b$, $\psi = ay - bx$.

2.13. $v = -2y(x+1) + c(x)$.

2.14. $w_{x=0} = -3,19$ м/с, $w_{x=-0,5} = -4,25$ м/с, $w_{x=0,5} = -4,25$ м/с.

2.15. $w \rightarrow 0$ при $x = \pm \infty$;

$w \rightarrow \infty$ при $x = \pm 1$.

2.16. Решение. $r_{\text{ист}}^2 = (x-1)^2 + y^2$; $r_{\text{ст}}^2 = (x+1)^2 + y^2$.

$$w = w_{r_{\text{ист}}} \cos \alpha_1 + w_{r_{\text{ст}}} \cos \alpha_2.$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}; \cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}, \text{ тогда}$$

$$w = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right].$$

$$\text{При } x=0 \quad w = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} \right) = \frac{Q}{\pi(y^2 + 1)}.$$

$$w_{\text{max}} \text{ при } y=0, \quad w = -3,19.$$

$$w = 0 \text{ при } y \rightarrow \infty.$$

2.17. $y = \frac{b}{a}x + c_1$ — уравнение семейства плоскостей, перпендикулярных плоскости xOy .
 $y = \frac{b}{c}z + c_2$ — уравнение семейства плоскостей, перпендикулярных плоскости yOz .

Пересечение плоскостей одного семейства с плоскостями другого семейства дадут семейство параллельных друг другу прямых, которые и будут линиями тока результирующего поступательного потока.

2.18. $y = c_1x$ — семейство плоскостей, проходящих через ось z .

$y = c_2z$ — семейство плоскостей, проходящих через ось x .

Пересечение плоскостей этих семейств даст линии тока результирующего потока, представляющие собой прямые, проходящие через начало координат — движение из точечного источника мощностью Q .

2.19. $x^2 + y^2 = c$ — уравнение плоского вихря.

2.20. $y = cx$ — плоский источник.

$$w = \frac{Q}{2\pi r}, \text{ где } r^2 = x^2 + y^2.$$

2.21. Решение. Комплексная функция $f(z)$ запишется, как

$$f(z) = \frac{5}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy).$$

Действительная часть будет определять потенциал скорости: $\varphi = \frac{5}{2}(x^2 - y^2)$, мнимая часть — функцию тока ψ : $\psi = 5xy$ — равнобокая гипербола.

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 5x = 20 \text{ м/с};$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -5y = -2,5 \text{ м/с}.$$

2.22. Решение. Потенциал скорости заданного течения найдется наложением потенциала плоского потока на диполь:

$$\varphi = wx + \frac{w r_0^2}{x^2 + y^2}; \text{ так как } u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = w \left[1 - \frac{r_0^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right].$$

1) Решение ищется по оси y , т. е. при $x=0$, тогда $u/w = 1 + r_0^2/y^2$; при $y = h + r_0 = 3r_0$; $u/w = 1 + 1/9 = 1,11$. Замеренную скорость надо уменьшить на 11%, чтобы получить истинную скорость ветра.

2) Решим уравнение относительно y :

$$y = \frac{r_0}{\sqrt{u/w - 1}}; \text{ при } u/w = 1,01 \text{ получим } y = 10r_0.$$

Для получения ошибки в 1% прибор надо относить от оси башни на 10 радиусов.

2.23. Решение. $f(z) = (a+bi)(x+iy)$. Действительная часть комплексной функции даст потенциал скорости $\varphi = ax - by$, а мнимая часть — функцию тока: $\psi = ay + bx$.

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -b$$

— имеем однородный поступательный поток со скоростью $w = \sqrt{a^2 + b^2}$ под углом к оси Ox .

$$2.24. \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{Q}{2\pi} \ln r; \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

r и θ — полярные координаты; w_r и w_θ — составляющие скорости по радиусу и окружности:

$$w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}; \quad w_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = 0.$$

Течение из плоского источника мощностью Q , расположенного в начале координат.

2.25. Решение. Заменяем комплексную величину: $z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$.

Действительная часть комплексной функции даст потенциал скорости:

$$\varphi = \frac{a}{2} (x^2 - y^2), \quad \text{а мнимая часть — функцию тока: } \psi = axy.$$

Линиями тока будет равнобокая гипербола с асимптотами x , y и $-x$, y . Составляющие скорости найдем, взяв производные от φ и ψ ,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = ax; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -ay.$$

В точке с координатами $x=5$, $y=1$ будем иметь

$$u=5a; \quad v=-a; \quad w=a\sqrt{26}.$$

$$2.26. \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta; \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r; \quad w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = 0; \quad w_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Циркуляционный поток в начале координат.

2.27. Решение. Комплексный потенциал, потенциал скорости и функция тока источника мощностью Q , помещенного в начало координат, запишутся (см. зад. 2.24)

$$f_1(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z; \quad \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r; \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta.$$

Скорость такого потока чисто радиальная $w_r = \frac{Q}{2\pi r}$. Комплексный потенциал вихря, помещенного в начало координат, потенциал скорости и функция тока запишутся (см. зад. 2.26)

$$f_2(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z; \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta; \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

Скорость потока чисто окружная $w_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$.

Комплексный потенциал, потенциал скорости, функция тока результирующего потока получим методом наложения потоков:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \frac{1}{2\pi} (Q + i\Gamma) \ln z = \frac{1}{2\pi} (Q + i\Gamma) (\ln r + i\theta).$$

Потенциал скорости будет $\varphi = \frac{1}{2\pi} (Q \ln r - \Gamma\theta)$,

функция тока $\psi = \frac{1}{2\pi} (Q\theta + \Gamma \ln r)$.

Радиальная составляющая скорости $w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}$.

Окружная составляющая скорости $w_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}$.

Результирующая скорость $w = \sqrt{w_r^2 + w_\theta^2} = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{Q^2 + \Gamma^2}$.

Так как Q и $\Gamma = \text{const}$, то получаем $wr = \text{const} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{Q^2 + \Gamma^2}$.

Найдем угол между вектором скорости w и радиусом вектором r : $\text{tg } \alpha = w_r/w_\theta = -Q/\Gamma = \text{const}$.

Скорость w образует постоянный угол $\pi/2 + \alpha$ с радиусом вектором r . Линии тока представляют собой логарифмическую спираль.

2.28. Решение. Потенциал скорости φ_1 и функция тока ψ_1 плоского равномерного потока запишутся $\varphi_1 = u_1 x$; $\psi_1 = u_1 y$. Запишем φ_2 и ψ_2 плоского источника, мощность которого Q :

$$\varphi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \psi_2 = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Результирующий поток получим наложением составляющих потоков:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = u_1 \left(x + \frac{Q}{2\pi u_1} \ln r \right); \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 = u_1 \left(y + \frac{Q}{2\pi u_1} \theta \right).$$

Из последнего найдем уравнение линий тока:

$$y + \frac{Q}{2\pi u_1} \theta = \text{const}.$$

В этом уравнении $\frac{Q}{2\pi u_1} = b$ — величина постоянная, поэтому уравнение линий тока можно записать $y + b\theta = \text{const}$. Постоянную найдем из условия, что на оси x есть точка, где скорость равна нулю: $w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = u_1 \cos \theta + \frac{Q}{2\pi r}$.

При $\theta = \pi$ $w_r = 0$. Это будет при $r = \frac{Q}{2\pi u_1} = b$. В этой точке функция тока будет

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \pi = \frac{Q}{2} = \pi b u_1 = u_1 (y + b\theta).$$

Откуда получаем уравнение линии тока:

$$y = b(\pi - \theta).$$

Эта линия тока симметрична относительно оси x и имеет асимптоты параллельные оси x .

Уравнение асимптоты: $y = \pm \frac{Q}{2u_1}$. Скорость потока в любой точке данной линии тока найдем по уравнениям

$$w_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = u_1 \cos \theta + \frac{Q}{2\pi r};$$

$$w_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_1 \sin \theta.$$

Если линию тока представить отвердевшей, то данное решение можно представить как обтекание потоком идеальной жидкости со скоростью u_1 тела заданной формы (см. рис. 30).

$$2.29. \psi = ay(3x^2 - y^2).$$

В полярных координатах $\varphi = ar^3 \cos 3\theta$, $\psi = ar^3 \sin 3\theta$; $w_r = 3ar^2 \cos 3\theta$, $w_\theta = -3ar^2 \sin 3\theta$; $f(z) = az^3$ — это есть движение жидкости внутри двугранного угла с асимптотами: ось x и прямая, выходящая из начала координат под углом $\pi/3$ к оси x .

$$2.30. w = \frac{Q}{2\pi r}, \Delta p = p^* - p = \frac{Qw^2}{2} = \frac{Q}{2} \frac{Q^2}{4\pi^2 r^2}.$$

При заданном Q $\Delta p = \frac{2Q}{r^2}.$

2.31. Решение. Для циркуляционного потока при $\Gamma > 0$ (движение против часовой стрелки) $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$, $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$; $w = \frac{\Gamma}{2\pi r}$, $\Delta p = \frac{Qw^2}{2} = \frac{Q\Gamma^2}{8\pi^2 r^2}.$

При заданном значении Γ , получим $\Delta p = \frac{2Q}{r^2}.$

2.32. Решение. Методом наложения найдем потенциал скорости φ и функцию тока ψ результирующего потока $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$; $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$.

Для плоского течения $\varphi_1 = u_0 x$; $\psi_1 = u_0 y$.

Для источника $\varphi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln r_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$; $\psi_2 = \frac{Q}{2\pi} \theta_2 = \frac{Q}{2\pi} \times \times \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a}.$

Для стока $\varphi_3 = -\frac{Q}{2\pi} \ln r_3 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$; $\psi_3 = -\frac{Q}{2\pi} \theta_3 = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}.$

Потенциал скорости результирующего потока

$$\varphi = u_0 x + \frac{Q}{4\pi} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Найдем составляющие скорости u и v :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 + \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right];$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right].$$

Найдем функцию тока результирующего потока

$$\psi = u_0 y + \frac{Q}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \right) = u_0 y - \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2},$$

или в полярных координатах $\psi = u_0 r \sin \theta + \frac{Q}{2\pi} (\theta_2 - \theta_3),$

где $\theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{r}{a}$, $\theta_3 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{r}{a}.$

Найдем x_0 на оси x , в которой $u=0$ и $v=0$:

$$x_0 = \pm a \sqrt{1 + \frac{Q}{\pi a u_0}}.$$

Найдем расстояние между этими точками $l = 2a \sqrt{1 + \frac{Q}{\pi a u_0}}$.

По оси y при $x=0$ (или $\theta = \pi/2$) наибольшую ширину y_0 (или r_0) найдем, положив $\psi = 0$. Тогда $u_0 r_0 + \frac{Q}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{r_0}{a} - \pi + \operatorname{arctg} \frac{r_0}{a} \right) = 0$.

Откуда

$$\frac{r_0}{a} = \operatorname{ctg} \frac{\pi r_0 u_0}{Q} \quad \text{или} \quad \frac{y_0}{a} = \operatorname{ctg} \frac{\pi u_0 y_0}{Q}.$$

Уравнения трансцендентные.

$$\text{При } \frac{Q}{\pi a u_0} \rightarrow 0 \quad \frac{x_0}{a} \rightarrow 1, \quad \frac{y_0}{a} \rightarrow 0.$$

$$\text{При } \frac{Q}{\pi a u_0} \rightarrow \infty \quad \frac{x_0}{a} \rightarrow \infty, \quad \frac{y_0}{a} \rightarrow \infty, \quad \frac{y_0}{x_0} \rightarrow 1.$$

Приняв линию тока отвердевшей, получим обтекание плоским однородным потоком тела овальной формы с полуосями овала x_0 и y_0 .

Глава III

3.1. $\lambda_2 = 0,735$, $\sigma_T = 0,86$.

3.2. Решение. По скорости w_1 и температуре T_1^* находим

$$\lambda_1 = \frac{w_1}{a_{кр1}} = \frac{65}{18,3 \sqrt{500}} = 0,1588; \quad z(\lambda_1) = 6,44.$$

По уравнению (3.16) для заданного подогрева находим

$$z(\lambda_2) = z(\lambda_1) \sqrt{T_1^*/T_2^*} = 6,44 \sqrt{500/1200} = 4,157,$$

$$\lambda_2 = 0,26, \quad w_2 = \lambda_2 a_{кр2} = 0,26 \cdot 18,3 \sqrt{1200} = 165 \text{ м/с.}$$

$$p(\lambda_1) = 0,9853, \quad T(\lambda_1) = 0,9958, \quad \text{тогда}$$

$$p_1 = p_1^* p(\lambda_1) = 15 \cdot 10^5 \cdot 0,9853 = 14,7795 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$T_1 = T_1^* T(\lambda_1) = 500 \cdot 0,9958 = 497,9 \text{ К.}$$

$$q_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{14,7795 \cdot 10^5}{287 \cdot 497,9} = 10,34 \text{ кг/м}^3.$$

По уравнению (3.13)

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\lambda_1 z(\lambda_2)}{\lambda_2 z(\lambda_1)}; \quad q_2 = 10,34 \frac{0,1588 \cdot 4,157}{0,26 \cdot 6,44} = 4,076 \text{ кг/м}^3.$$

3.3. Решение.

$$M_1 = \frac{w_1}{a_1} = \frac{50}{20,1 \sqrt{350}} = 0,133;$$

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{M_2^2 (1 + k M_1^2)}{M_1^2 (1 + k M_2^2)}; \text{ откуда } M_2^2 = \frac{\frac{w_2}{w_1} \frac{M_1^2}{1 + k M_1^2}}{1 - k \frac{w_2}{w_1} \frac{M_1^2}{1 + k M_1^2}}.$$

Подставив численные значения, получим

$$M_2 = 0,3133.$$

Так как $M_2 = w_2 / \sqrt{k R T_2}$, то

$$T_2 = \frac{w_2^2}{k R M_2^2} = \frac{2502}{1,4 \cdot 287 \cdot 0,0982} = 1584 \text{ К.}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1 z(\lambda_1) T(\lambda_2)}{\lambda_2 z(\lambda_2) T(\lambda_1)}; \lambda_1 = 0,145; z(\lambda_1) = 7,041;$$

$$T(\lambda_1) = 0,9965; \lambda_2 = 0,340; z(\lambda_2) = 3,281,$$

$T(\lambda_2) = 0,9807$. Подставляя численные величины, получим $p_2/p_1 = 0,900$

3.4. При $T_2^* = 1200 \text{ К}$, $\sigma_T = 0,92$, $p_1/p_2 = 1,174$.

При $T_2^* = 2000 \text{ К}$, $\sigma_T = 0,813$, $p_1/p_2 = 1,972$.

3.5. При $T_2^* = 1000 \text{ К}$, $w_{1\max} = 132 \text{ м/с}$, $\sigma_T = 0,85$.

При $T_2^* = 2000 \text{ К}$, $w_{1\max} = 86,4 \text{ м/с}$, $\sigma_T = 0,81$.

3.6. Решение. По уравнению (3.16) при $\lambda_2 = 1$

$$\left(\frac{T_2^*}{T_1^*} \right)_{\text{кр}} = \frac{1}{4} [z(\lambda_1)]^2, \text{ а } T_{2\text{кр}}^* = T_{2\text{кр}} \left(\frac{k+1}{2} \right),$$

тогда $T_{2\text{кр}} = \frac{T_1^*}{2(k+1)} [z(\lambda_1)]^2; \lambda_1 = \frac{w_1}{a_{\text{кр}1}} = \frac{88}{18,3 \sqrt{370}} = 0,25; z(\lambda_1) = 4,25,$

Подставив найденное значение $z(\lambda_1)$ и T_1^* , получим $T_{2\text{кр}} = 1392 \text{ К}$.
При $T_{2\text{кр}} = 2000 \text{ К}$

$$z(\lambda_1) = \sqrt{\frac{2(k+1)}{T_1^*} T_{2\text{кр}}} = \sqrt{\frac{4,8}{370} \cdot 2000} = 5,093;$$

$$\lambda_1 = 0,205; w_1 = 72 \text{ м/с.}$$

3.7. Решение. Максимальный подогрев был бы при $\lambda_2 = 1$. Но для такого расширения перепада давления не хватает ($p_n/p^* > \beta_{\text{кр}}$). Запишем уравнение количества движения для сечений камеры сгорания 1—1 на входе и 2—2 на выходе без учета гидравлических сопротивлений и, имея в виду, что $F = \text{const}$: $p_1 + \rho_1 w_1^2 = p_2 + \rho_2 w_2^2$.

Так как газодинамическая функция $f(\lambda) = (p + \rho w^2)/p^*$, то уравнение количества движения запишется $f(\lambda_1) p_1^* = f(\lambda_2) p_2^*$.
В этом уравнении два неизвестных. Но p_2^* можно записать

$$p_2^* = \frac{p_2}{p(\lambda_2)}, \text{ а } \frac{p(\lambda_2)}{f(\lambda_2)} = r(\lambda_2)$$

или

$$r(\lambda_2) = \frac{p_2}{f(\lambda_1) p_1^*}.$$

Но так как $p_2 = p_n$, то

$$r(\lambda_2) = \frac{101365}{1,0661 \cdot 1,82 \cdot 10^5} = 0,522; \lambda_2 = 0,833;$$

$$p(\lambda_2) = 0,6504; z(\lambda_2) = 2,0335.$$

$$p_2^* = \frac{101365}{0,6504} = 1,56 \cdot 10^5 \text{ Па}, \sigma_T = \frac{1,56}{1,82} = 0,856;$$

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_2)} \right]^2, \text{ откуда } T_2^* = 420 \left(\frac{3,2071}{2,0335} \right)^2 = 1045 \text{ К.}$$

$$3.8. \lambda_2 = 0,8, \sigma_T = 0,876.$$

3.9. Решение. Запишем уравнение импульсов без учета сил трения:
 $p_1^* f(\lambda_1) = p_2^* f(\lambda_2).$

$$f(\lambda_2) = 1,2679, p_2^*/p_1^* = \frac{10^5}{1,25 \cdot 10^5} = 0,8.$$

Тогда

$$f(\lambda_1) = 1,2679 \cdot 0,8 = 1,014; \lambda_1 = 0,158;$$

$$T_1^* = T_2^* \left[\frac{z(\lambda_2)}{z(\lambda_1)} \right]^2 = 2200 \frac{4}{6,4872} = 210 \text{ К.}$$

3.10. При $\frac{dp}{dx} = 0$ из уравнения количества движения следует, что и $\frac{dw}{dx} = 0$, $w = \text{const}$,
 p^* — уменьшается, T^* — растет, q^* — уменьшается, T' — растет, λ — уменьшается.

$$3.11. \text{ Решение. } T_2^* = T_1^* + \frac{q}{c_p} = 400 + \frac{10^6}{10^3} = 1400 \text{ К.}$$

$$\text{Степень подогрева при этом } T_2^*/T_1^* = \frac{1400}{400} = 3,5.$$

Найдем критический подогрев для заданных условий на входе:

$$\left(\frac{T_2^*}{T_1^*} \right)_{\text{кр}} = \frac{1}{4} [z(\lambda_1)]^2 = 2,1.$$

Так как фактический подогрев больше критического, то $\lambda_2 = 1$, а λ_1 и расход через теплообменник уменьшатся. Новое значение λ_1' найдем из $Z(\lambda_1') = 2\sqrt{T_2^*/T_1^*} = 2\sqrt{3,5} = 3,741$; $\lambda_1' = 0,29$.

$$\text{Найдем полное давление } p_2^* = p_1^* \frac{f(\lambda_1')}{f(\lambda_2)} = 10^6 \frac{1,0465}{1,2679} = 8,25 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Соотношение расходов будет

$$\frac{G'}{G_1} = \frac{q(\lambda_1')}{q(\lambda_1)} = \frac{0,4416}{0,5897} = 0,75.$$

3.12. Решение. Из уравнения $(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = -\frac{k-1}{a^2} dQ$ следует, что для торможения сверхзвукового потока необходимо подводить тепло $dQ > 0$

$$T_2^* = T_1^* \left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_2)} \right]^2 = 500 \left(\frac{2,5}{2,033} \right)^2 = 756 \text{ К;}$$

$$Q = c_p (T_2^* - T_1^*) = 1005 (756 - 500) = 257124 \text{ Дж/кг};$$

$$p_2^* = p_1^* \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} = 106 \frac{0,3203}{1,2286} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

3.13. Решение. Найдем λ_1 по уравнению расхода:

$$q(\lambda_1) = \frac{G \sqrt{T_1^*}}{0,0405 p_1^* F_1} = \frac{18,3 \cdot 20}{0,040 \cdot 106 \cdot 0,02} = 0,452;$$

$$\lambda_1 = 0,297; \quad z(\lambda_1) = 3,664; \quad z(\lambda_2) = 2,0026.$$

$$T_2^* = T_1^* \left[\frac{z(\lambda_1)}{z(\lambda_2)} \right]^2 = 400 \left(\frac{3,664}{2,0026} \right)^2 = 1339 \text{ К};$$

$$Q = c_p (T_2^* - T_1^*) = 1005 (1339 - 400) = 943656 \text{ Дж/кг};$$

$$p_2^* = p_1^* \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} = 106 \frac{1,0487}{1,2658} = 8,3 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

3.14. Решение.

$$a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*} = \sqrt{\frac{3,32}{2,66} \cdot 208 \cdot 290} = 274,4 \text{ м/с};$$

$$\lambda_x = \frac{50}{274,4} = 0,18; \quad q(\lambda_x) = 0,274.$$

Найдем приведенную скорость в подводящей трубе $d_{\text{тр}} = 20 \text{ мм}$. По уравнению расхода

$$q(\lambda_{\text{тр}}) = q(\lambda_x) \left(\frac{d_x}{d_{\text{тр}}} \right)^2 = 0,274 \frac{225}{400} = 0,154.$$

Найдем λ_r :

$$z(\lambda_r) = z(\lambda_{\text{тр}}) \sqrt{T_x^* T_r^*} = 6,65 \sqrt{290 \cdot 800} = 4,0; \quad \lambda_r = 0,265;$$

$$p_x^* = \frac{p}{p(\lambda_x)} = \frac{101365}{0,9817} = 103253 \text{ Па.}$$

$$\frac{p_r^*}{p_x^*} = \frac{f(\lambda_x)}{f(\lambda_r)} = \frac{1,021}{1,04464} = 0,974.$$

При сохранении той же приведенной скорости давление в горячем состоянии должно быть $p_r^* = 103253/0,977 = 105684 \text{ Па}$. Диаметр выходного сечения сопла будет

$$d_r = d_x \sqrt{\frac{T_r^* T_x^*}{15 \cdot 800 \cdot 290}} = 19,33 \text{ мм.}$$

3.15. $\xi = 0,0285$, $\sigma = 0,5897$, $\lambda_1 = 0,306$.

3.16. $l = 3,45 \text{ м}$, $p_2^* = 0,598 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $p_2 = 0,23 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

3.17. Решение. Максимальный расход будет при $\lambda_2 = 1$. Величину λ_1 найдем по уравнению

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + 2 \ln \lambda_1 - 1 = \frac{2k}{k+1} \xi \frac{l}{D} = \frac{2,8}{2,4} \cdot 0,018 \frac{1500}{20} = 1,575.$$

$\frac{1}{\lambda_1^2} + 2 \ln \lambda_1 = 2,575$. Используя специальные таблицы, или подбором найдем

$\lambda_1 = 0,503$; $q(\lambda_1) = 0,7124$. Найдем расход

$$G = 0,0405 \frac{760 \cdot 13,6 \cdot 9,81}{\sqrt{300}} \cdot 0,7124 \frac{3,14 \cdot 0,022^2}{4} = 0,053 \text{ кг/с};$$

$$p_2^* = p_1^* q(\lambda_1) = 101396 \cdot 0,7124 = 0,72 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$p_2 = p_2^* \beta_{кр} = 0,72 \cdot 10^5 \cdot 0,528 = 0,38 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$3.18. l \approx 41 \text{ км, } \pi_k = 13,16.$$

3.19. Решение. По заданным λ_1 и λ_2 найдем M_1 и M_2 . При $k=1,57$ расчетная формула будет

$$M_2^2 = \frac{0,7782\lambda_2^2}{1 - 0,22\lambda_2^2}; \quad M_1^2 = 0,0017, \quad M_2^2 = 0,5796.$$

Для заданных условий течения длину трубопровода найдем по уравнению (3.26):

$$l = \frac{2}{k+1} \frac{D}{\xi} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} - 2 \ln \frac{M_2}{M_1} \right) = \\ = \frac{2 \cdot 1,42}{2,57 \cdot 0,014} \left(\frac{1}{0,0017} - \frac{1}{0,5796} - 2 \ln \frac{0,7613}{0,041} \right) = 45,8 \text{ км.}$$

Так как течение в трубе с постоянной энтропией, то $p_2^* = p_1^* = \text{const}$. Компрессор будет работать только на изменение статического давления, которое найдем по уравнению Бернулли:

$$\frac{p^*}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \frac{p^*}{p_1} = 1,00133, \quad \frac{p^*}{p_2} = 1,5226;$$

$$\pi_k = \frac{p_1}{p_2} = \frac{1,5226}{1,0013} = 1,52.$$

Длина трубопровода изменилась мало, всего на 5 км, а степень повышения давления компрессора, обеспечивающего работу трубопровода, изменилась сильно, так как отвод тепла трения привел к тому, что энтропия $S = \text{const}$.

$$3.20. q_1/q_2 = 10, T_1/T_2 = 1,198, p_1/p_2 = 11,98.$$

3.21. Решение. Для заданных условий уравнение (3.1) будет

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = -\frac{k}{a^2} dL_{тр}.$$

По уравнению Дарси—Вейсбаха

$$dL_{тр} = \xi \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D}.$$

Согласно условию задачи

$$\xi = \frac{0,3164}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad \text{Re} = \frac{qwD}{\mu}.$$

Из уравнения неразрывности при $D = \text{const}$, $qw = \text{const}$, а $\mu = \mu_0(T/T_0)^\omega$. Для воздуха в широком диапазоне температур $\omega = 0,75$,

$$\text{Re} = \frac{qwT_0^\omega}{\mu_0} \frac{D}{T^\omega} = \text{const} \frac{D}{T^\omega}.$$

$$T = T^* \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right);$$

$$\xi = \frac{0,3164 T^{*0,25\omega} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{0,25\omega}}{\sqrt{\text{const}} D^{0,25}} = A \frac{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{0,25\omega}}{D^{0,25}}.$$

Постоянная A будет равна:

$$A = 0,3164 \cdot T^{*0,25\omega} / \sqrt[4]{Qw \cdot 273^\omega / \mu_0}.$$

Подставим полученные выражения в исходное уравнение

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = -\frac{k}{2} M^2 A \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{0,25\omega} \frac{dx}{D^{1,25}}.$$

При $T^* = \text{const}$ $\frac{dw}{w} = \frac{d\lambda}{\lambda}$.

Заменим число M на λ :

$$(\lambda^2 - 1) \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{k}{k+1} \lambda^2 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{0,25\omega} A \frac{dx}{D^{1,25}}.$$

Получили дифференциальное уравнение, в котором переменные разделяются.

Разложим двучлен правой части в ряд бинома Ньютона и сохраняя два первых члена, получим

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^3 (1 - a\lambda^2)} d\lambda = -\frac{k}{k+1} A \frac{dx}{D^{1,25}}, \quad \text{где } a = 0,25\omega \frac{k-1}{k+1}.$$

После интегрирования и небольших преобразований получим уравнение для движения вязкого газа в технически гладких трубах:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \ln \frac{\lambda_1^2 (1 - a\lambda_2^2)}{\lambda_2^2 (1 - a\lambda_1^2)} + \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{2k}{k+1} \frac{A}{a} \frac{l}{D^{1,25}}.$$

3.22. $l = 445$ м.

3.23. Решение. При $T = \text{const}$, $\frac{dT}{T} = 0$. Из уравнения (3.4) находим

$$(kM^2 - 1)dQ + kM^2 dL_{\text{тр}} = 0,$$

откуда

$\frac{dQ}{dL_{\text{тр}}} = -\frac{KM^2}{kM^2 - 1} = n$ — степень подогрева в уравнении (3.24). Подставим полученное значение n в уравнение (3.24), преобразуя, получим:

$$\frac{KM^2 - 1}{M^3} dM = -\frac{k}{2} \xi \frac{dx}{D}.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение.

$$\frac{1}{M_1^2} + 2k \ln M_1 - \left(\frac{1}{M_2^2} + 2k \ln M_2\right) = k\xi \frac{l}{D}.$$

Найдем $M_1 = w_1/a = 20/\sqrt{1,57 \cdot 189 \cdot 300} = 0,067$.

M_2 найдем из полученного уравнения подбором:

$M_2 = 0,125$, $w_2 = 37,3$ м/с.

3.24. $w_{\text{max}} = 23,3$ м/с.

3.25. Решение При $Q = 0$ и $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \frac{45}{18,3 \sqrt{600}} = 0,1, a$

$$\left(\frac{l}{D}\right)_{\text{кр}} = \frac{k+1}{2k} \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \ln \lambda_1^2 - 1\right) = \frac{2,4}{2,8 \cdot 0,015} (94,4 - 1) = 5337.$$

При $Q = -L_{\text{тр}}$, $dS = 0$. По уравнению (3.26)

$$\frac{1}{M_1^2} + \ln M_1^2 - \left(\frac{1}{M_2^2} + \ln M_2^2\right) = \frac{k+1}{2} \xi \frac{l}{D}; \quad \text{при } \lambda_2 = 1.$$

$$\left(\frac{l}{D}\right)_{\text{кр}} = \frac{2}{k+1} \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{M_1^2} + \ln M_1^2 - 1\right) = \frac{2}{2,4 \cdot 0,015} (94,4 - 1) = 5189.$$

Расчетную формулу для изменения температуры торможения найдем из уравнения (3.25):

$$(M^2 - 1) \frac{dM}{M} = -\frac{k+1}{4} \xi \frac{dx}{D} \quad M^2 = -\frac{k+1}{2a^2} \cdot \frac{w^2}{2} \xi \frac{dx}{D} = -\frac{k+1}{2a^2} dL_{\text{тр}} = \\ = \frac{k+1}{2a^2} dQ.$$

Тепло dQ можно записать:

$$dQ = c_p dT^* = \frac{k}{k-1} R dT^* = \frac{a^2}{k-1} \frac{dT^*}{T} = \frac{a^2}{k-1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dT^*}{T^*}.$$

Подставляя значение dQ в исходное уравнение, получим:

$$(M^2 - 1) \frac{dM}{M} = \frac{1}{2} \frac{k+1}{k-1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right) \frac{dT^*}{T^*}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{2(k-1)}{k+1}} \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}.$$

В нашем случае при $M_2 = 1$ и $k = 1,4$

$$\frac{T_2^*}{T_1^*} = M_1^{1/3} \frac{1,2}{1 + 0,2 M_1^2} = \sqrt[3]{0,0918} \frac{1,2}{1 + 0,2 \cdot 0,0918^2} = 0,54;$$

$$T_2^* = 600 \cdot 0,54 = 324 \text{ К}.$$

Отвод тепла, равный теплу трения, несущественно изменяет критическую длину трубы, даже уменьшая ее, так как при этом хотя темп роста скорости по длине трубы снижается, но одновременно уменьшается и критическая скорость звука за счет отвода тепла.

3.26. Решение. Так как рассматривается случай течения в трубе при одновременном действии трения и теплоотвода, то воспользуемся уравнением (3.24):

$$\frac{M^2 - 1}{M^3} dM = -\frac{1}{4} [k(k-1)(n+1)M^2 + (k-1)n + 2k] \xi \frac{dx}{D}. \quad (1)$$

Прежде чем решать это уравнение, найдем n :

$$n = Q \cdot L_{\text{тр}} \quad (Q - \text{задано}), \text{ а } L_{\text{тр}}:$$

$$dL_{\text{тр}} = \xi \frac{w^2}{2} \frac{dx}{D} = \frac{k}{k+1} RT^* \lambda^2 \xi \frac{dx}{D}. \quad (2)$$

С другой стороны, из уравнения (3.5) в дифференциальной форме имеем:

$$(\lambda^2 - 1) \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{k}{k+1} \lambda^2 \xi \frac{dx}{D}. \quad (3)$$

Сравнивая правые части уравнений (2) и (3), получим

$$dL_{\text{тр}} = -RT^* (\lambda^2 - 1) \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

В таком виде это уравнение интегрируется и из него можно определить работу трения в зависимости от λ_1 и λ_2 :

$$L_{\text{тр}} = \frac{RT^*}{2} \left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \ln \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} \right). \quad (4)$$

Если проинтегрировать уравнение (3) и решить его относительно $\ln \lambda_2^2 - \ln \lambda_1^2$, то получим

$$\ln \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{2k}{k+1} \xi \frac{l}{D}. \quad (3')$$

Подставим это выражение в равенство (4):

$$L_{\text{тр}} = \frac{RT^*}{2} \left[\left(\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) - \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) - \frac{2k}{k+1} \xi \frac{l}{D} \right]. \quad (5)$$

Это уравнение позволяет найти работу трения на любой длине x при известных λ_1 и λ_2 . В задаче требуется найти решение при $\lambda_2=1$. В этом случае уравнение (5) запишется

$$L_{\text{тр}} = \frac{RT^*}{2} \left(\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} - 2 - \frac{2k}{k+1} \xi \frac{l}{D} \right). \quad (6)$$

При $\lambda_2=1$ $\lambda_1=\lambda_{1\text{max}}$. Найдем $\lambda_{1\text{max}}$ из уравнения (3'):

$$\frac{1}{\lambda_{1\text{max}}^2} + \ln \lambda_{1\text{max}}^2 = 1 + \frac{2k}{k+1} \xi \frac{l}{D} = 1 + \frac{2,8}{2,4} \cdot 0,018 \cdot 100 = 3,099; \lambda_{1\text{max}} = 0,4645.$$

Теперь находим работу трения, подставляя численные значения найденных величин.

$$L_{\text{тр}} = 43082,7 \text{ Дж/кг.}$$

Найдем степень подогрева:

$$n = Q/L_{\text{тр}} = 107700/43083 = 2,5.$$

Интеграл уравнения (1) будет

$$\frac{1}{M_2^2} - \frac{1}{M_1^2} - \frac{A+1}{A} \ln \frac{M_1^2 (M_2^2 + A)}{M_2^2 (M_1^2 + A)} = AB \frac{l}{D},$$

$$\text{где } A = \frac{2k+n(k-1)}{k(k-1)(n+1)}, \quad B = -\frac{k(k-1)(n+1)}{2} \xi.$$

При заданных условиях $A=1,94$, $B=-0,0176$. При $M_2=1$ M_1 будет максимальным, а уравнение для определения M_1 получится

$$\frac{0,66}{M_1^2} + \ln \frac{M_1^2}{M_1^2 + 1,94} = 1,832.$$

Решая это уравнение подбором, находим $M_1=0,38$, $\lambda_1=0,41$, $\omega_1=150,43$ м/с, $q(\lambda_1)=0,6036$. Потери полного давления найдем из уравнения расхода:

$$\sigma = p_2^* / p_1^* = q(\lambda_1) \sqrt{T_2^* / T_1^*}.$$

Температуру T_2^* найдем по подогреву Q :

$$T_2^* = T_1^* + \frac{Q}{c_p} = 400 + \frac{107700}{1005} = 507 \text{ К}; \quad \sigma = 0,68.$$

3.27. Решение. Найдем теплоподвод Q к потоку: $Q = c_p (T_2^* - T_1^*) = 1005(1000-300) = 703500$ Дж/кг.

Для определения n надо найти $L_{\text{тр}}$. Из решения задачи 3.26

$$L_{\text{тр}} = \frac{RT^*}{2} \left[\left(\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) - \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) - \frac{2k}{k+1} \xi \frac{l}{D} \right].$$

Будем искать работу трения для критического режима, когда $\lambda_2=1$, а $\lambda_1=\lambda_{1\text{max}}$.

Найдем сначала $\lambda_{1 \max}$:

$$\frac{1}{\lambda_{1 \max}^2} + \ln \lambda_{1 \max}^2 = 1 + \frac{2k}{k+1} \xi \frac{l}{D} = 1 + \frac{2,8}{2,4} \cdot 0,02 \cdot 100 = 3,333.$$

В этом случае $\lambda_{1 \max} = 0,451$, а $L_{\text{тр}} = 33837,3$ Дж/кг. Находим $n = 20,75$.

3.28. $M = 2,695$, $p = 33$ мм рт. ст.

3.29. $\Delta G = G_1 - G_2 = 0,43$ кг/с.

3.30. $G_2/G_1 = 0,2$, $p_2 = 2,14 \cdot 10^5$ Па, $T_2 = 100$ К.

3.31. Решение. $\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1)}{q(\lambda_2)} \frac{F_1}{F_2} \sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}}.$

По заданному теплу Q найдем T_2^* :

$$T_2^* = T_1^* + \frac{Q}{Gc_p} = 1400 + \frac{74,5 \cdot 10^5}{10 \cdot 1245} = 2000 \text{ К};$$

$$\lambda_1 = 1,893, \quad T(\lambda_1) = 0,4925, \quad q(\lambda_1) = 0,3516.$$

Найдем λ_2 по T_2^* при $T = \text{const}$:

$$T(\lambda_2) = T_2/T_2^* = T_1/T_2^* = T_1^*T(\lambda_1)/T_2^* = 1400 \cdot 0,4925/2000 = 0,34475;$$

$$\lambda_2 = 2,15; \quad M_2 = 3,3897, \quad q(\lambda_2) = 0,1362.$$

Используя уравнение $(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k-1}{a^2} dQ$,

интегрируя его с учетом $T = \text{const}$, получим

$$\ln \frac{F_2}{F_1} = \frac{M_2^2 - M_1^2}{2} - \ln \frac{M_2}{M_1} + \frac{k-1}{a^2} \frac{Q}{G}.$$

Подставляя численные значения, найдем $F_2/F_1 = 24,48!!$, $\sigma = 0,126$. Как видно, камера сгорания с $T = \text{const}$ требует большого увеличения проходных сечений и больших потерь полного давления.

3.32. Решение. При $M = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, $q(\lambda) = \text{const}$

$$\sigma = \frac{F_1}{F_2} \sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}}. \quad \text{Найдем } T_2^*:$$

$$T_2^* = T_1^* + \frac{Q}{Gc_p} = 1400 + \frac{74,5 \cdot 10^5}{10 \cdot 1245} = 2000 \text{ К}.$$

Преобразуем уравнение

$$(M^2 - 1) \frac{dw}{w} = \frac{dF}{F} - \frac{k-1}{a^2} dQ, \quad (1)$$

имея в виду

$$dQ = c_p dT^*, \quad a^2 = kRT = kRT^*T(\lambda),$$

$$w = \lambda a_{\text{кр}} = \lambda \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT^*}, \quad \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \frac{dT^*}{T^*},$$

$$\frac{k-1}{a^2} dQ = \frac{1}{T(\lambda)} \frac{dT^*}{T^*}, \quad \ln \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{2} \ln \frac{T_2^*}{T_1^*}.$$

Подставим полученные значения в уравнение (1) и проинтегрируем:

$$(M^2 - 1) \frac{1}{2} \frac{dT^*}{T^*} = \frac{dF}{F} - \frac{1}{T(\lambda)} \frac{dT^*}{T^*}, \text{ или}$$

$$\frac{dF}{F} = \left[\frac{M^2 - 1}{2} + \frac{1}{T(\lambda)} \right] \frac{dT^*}{T^*},$$

$$F_2/F_1 = (T_2^*/T_1^*)^{\frac{M^2-1}{2} + \frac{1}{T(\lambda)}}.$$

Численные значения дают $F_2/F_1 = 5,26$, $\sigma = 0,227$.

Глава IV

4.1. $M = 1,8$, $w = 613$ м/с.

4.2. $\Delta p = p_1^* - p_n = 309$ мм рт. ст.

4.3. $p_1^* = 1,27 \cdot 10^5$ Па, $p_1 = 1,01 \cdot 10^5$ Па, $T_1 = 364$ К, $w_1 = 220$ м/с.

4.4. $w_1 = 294$ м/с, $T_1 = 414$ К, $p_1 = 2,25 \cdot 10^5$ Па.

4.5. $M = 4,36$.

4.6. Решение $\lambda_n \lambda_1 = 1$; $\lambda_1^2 = 1/\lambda_n^2$.

По формуле перехода $\lambda^2 = \frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$, тогда $\frac{\frac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_n^2}{\frac{k+1}{2} M_n^2}$.

Решая это выражение относительно M_1^2 , получим

$$M_1^2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_n^2}{k M_n^2 - \frac{k-1}{2}} = \frac{\frac{2}{k-1} + M_n^2}{\frac{2k}{k-1} M_n^2 - 1}.$$

4.7. $p_1/p_2 = 10,3$, $M_1 = 0,476$.

4.8. $w_n = 463$ м/с.

$$4.9. \frac{p_n}{p_1^*} = \left[\frac{2}{(k+1) M^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{2k}{k+1} M^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}};$$

$$\frac{p_n}{p_1^*} = \frac{0,005991}{M^7} (7M^2 - 1)^{2,5}.$$

4.10. $p_3 = 3,99 \cdot 10^5$ Па, $c_3 = 409,5$ м/с,

$$T_3 = 616 \text{ К}, \quad \sigma = 0,99.$$

$$4.12. \sigma = \left(\frac{\frac{k+1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{k+1}{\frac{4k-1}{2} M^2 - k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

4.13. При $k = 1,4$ $(Q_1/Q_n)_{y\lambda} = 4,34$,

$$(T_1/T_n)_{y\lambda} = 3,46; (Q_1/Q_n)_{n\lambda} = 6,93,$$

$$(T_1/T_n)_{n\lambda} = 2,17.$$

При $k = 1,25$ $(Q_1/Q_n)_{y\lambda} = 5,8$, $(T_1/T_n)_{y\lambda} = 2,6$; $(Q_1/Q_n)_{n\lambda} = 8,8$, $(T_1/T_n)_{n\lambda} = 1,715$.

4.14. Решение.

$$1) p_{\lambda} = p_1 = p_n \left(\frac{2k}{k+1} M_n^2 - \frac{k-1}{k+1} \right); \quad p_n = p^* / \left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Подставим значение p_n

$$p_{\lambda} = p^* \frac{\frac{2k}{k+1} M_n^2 - \frac{k-1}{k+1}}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}};$$

$$\frac{p^*}{p_{\lambda}} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}}{\frac{2k}{k+1} M_n^2 - \frac{k-1}{k+1}}; \quad \text{при } k=1,4$$

$$\frac{p^*}{p_{\lambda}} = \frac{(1 + 0,2 M_n^2)^{3,5}}{\frac{7}{6} M_n^2 - \frac{1}{6}}.$$

$$2) p_{\lambda} = \frac{p_1^*}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}}; \quad p_1^* = p^* \frac{q(\lambda_n)}{q\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)},$$

или

$$p_1^* = p^* \left(\frac{\frac{k+1}{2} M_n^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_n^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{k+1}{\frac{4k-1}{2} M_n^2 - k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Подставим значение p_1^*

$$p_{\lambda} = p^* \left[\frac{\frac{k+1}{2} M_n^2}{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right)} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{k+1}{\frac{4k-1}{2} M_n^2 - k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Найдем необходимую степень повышения давления:

$$\frac{p^*}{p_{\lambda}} = \left[\frac{\left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right) \left(1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \right)}{\frac{k+1}{2} M_n^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{\frac{4k-1}{2} M_n^2 - k+1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

При $k=1,4$

$$\frac{p^*}{p_{\lambda}} = \left[\frac{(1 + 0,2 M_n^2) (1 + 0,2 M_n^2)}{1,2 M_n^2} \right]^{3,5} \left(\frac{2,3 M_n^2 - 0,4}{2,4} \right)^{2,5}.$$

4.15. $F_{кр} = 46,3 \times 4,3$ мм, $F_{p,ч} = 46,3 \times 46,3$ мм.

4.16. $F_{p,ч} = 61,7 \times 61,7$ мм, $F_{кр} = 61,7 \times 14,6$ мм.

4.17. 1) $M = 2,0$, $\lambda = 1,633$, $p^* = 3440$ мм рт. ст.

2) $M = 2,5$, $\lambda = 1,822$, $p^* = 3400$ мм рт. ст.

3) $M = 2,8$, $\lambda = 1,914$, $p^* = 3070$ мм рт. ст.

$$4.18. \frac{F'_{кр}}{F''_{кр}} = \lambda^2 \left(\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{\frac{1}{k-1}} = \sigma_{кр}.$$

4.20. Решение. По заданному $F_{кр}/F_a = q(\lambda) = 0,5$ находим $\lambda_a = 1,717$, $M_a = 2,198$, $p(\lambda) = 0,0932$.

Находим расчетное значение p^* :

$$p^* = \frac{p_n}{p(\lambda)} = \frac{760 \cdot 13,6 \cdot 9,81}{0,0932} = 10,88 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

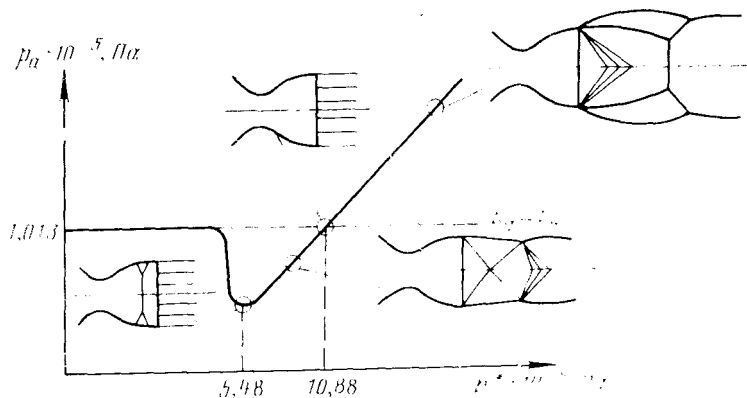


Рис. 75. Схема к ответу на задачу 4.20

В этом случае $p_n = p_n$. Дальнейшее увеличение p^* приведет к пропорциональному увеличению давления p_n .

Уменьшение p^* против расчетного значения приведет к уменьшению давления $p_n < p_n$. Это будет происходить до значения, когда $p_n/p_n = (p_n/p_n)_{кр}$.

Критический перепад давления на косом скачке уплотнения для воздуха можно найти по формуле Г. Гедда [1]:

$$\left(\frac{p_n}{p_a} \right)_{кр} = \left(\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_a^2}{1 + 0,64 \frac{k-1}{2} M_a^2} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

При $M_a = 2,198$, $(p_n/p_n)_{кр} = 1,985$, а $p_n = 0,51 \cdot 10^5$ Па при $p^* = 5,48 \cdot 10^5$ Па. Дальнейшее уменьшение давления p^* приведет к тому, что скачки уплотнения войдут внутрь сопла, а течение на срезе сопла будет дозвуковым с давлением $p_n = p_n$ (рис. 75).

4.21. $\Delta p = p_1 - p_n = 1345$ мм рт. ст.

4.22. $p_1^* = 83,6 \cdot 10^5$ Па, $p_1 = 3,45 \cdot 10^5$ Па, $T_1 = 161$, К, $\omega_1 = 692$ м/с, $\alpha = 28^\circ$.

4.23. $M \geq 1,6$, $\alpha = 66^\circ$.

4.26. $M \approx 1,4$.

4.27. $\sin \alpha =$

$$= \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{(k+1)M^2-1}{k} + \frac{1}{k} \sqrt{(k+1)[(k+1)M^4 + 8M^2(k-1) + 16]}}.$$

4.30. $\sigma=0,57$, $\sigma_{np}=0,328$.

4.31. Решение. Остановим ударную волну, сообщив всей массе газа скорость равную по величине скорости ударной волны, но направленной в противоположную сторону. Тогда уравнение неразрывности для течения с остановленной ударной волной можно записать: I — для падающей ударной волны $Q_1(w_{n1} - w_1) = \rho_2(w_{n1} - w_2)$; II — для отраженной волны $\rho_3(w_{n2} - w_3) = \rho_2(w_{n2} + w_2)$.

Уравнение количества движения:

$$I - p_2 - p_1 = Q_1(w_{n1} - w_1)(w_2 - w_1);$$

$$II - p_3 - p_2 = Q_2(w_{n2} + w_2)(w_2 + w_3).$$

Исключим из последних уравнений w_{n1} и w_{n2} с помощью уравнений неразрывности, тогда

$$p_2 - p_1 = \frac{Q_1 Q_2}{Q_2 - Q_1} (w_2 - w_1)^2;$$

$$p_3 - p_2 = \frac{Q_2 Q_3}{Q_3 - Q_2} (w_2 + w_3)^2.$$

Так как по условию задачи $w_1=0$ и $w_3=0$ (скорость на стенке), следовательно и во всем объеме позади отраженной волны w_2 тоже равна нулю. Из последних уравнений получим

$$\frac{(p_2 - p_1)(Q_2 - Q_1)}{Q_1 Q_2} = \frac{(p_3 - p_2)(Q_3 - Q_2)}{Q_2 Q_3} = w_2^2.$$

Для исключения плотностей воспользуемся уравнением ударной адиабаты, записав его для падающей и отраженной волн

$$I - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_1}{p_2}}{p_2}};$$

$$II - \frac{Q_3}{Q_2} = \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_3}}{1 + \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_2}{p_3}}{p_3}}.$$

После подстановки плотностей Q_1, Q_2, Q_3 получим

$$(p_3 - p_2)^2 = \frac{(p_2 - p_1)^2 [(k+1)p_3 + (k-1)p_2]}{(k-1)p_2 + (k+1)p_1}.$$

Получили квадратное уравнение относительно p_3 . Очевидный корень этого уравнения $p_3 = p_1$ соответствует звуковой волне давления. Второй корень, отвечающий сильным волнам давления, найдем из свойств корней квадратного уравнения:

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{\frac{3k-1}{k-1} - \frac{p_1}{p_2}}{1 + \frac{\frac{k+1}{k-1} + \frac{p_1}{p_2}}{p_2}}.$$

В случае волны бесконечно большой интенсивности $p_1/p_2 \rightarrow 0$, тогда

$$(p_3/p_2)_{\max} = \frac{3k-1}{k-1}.$$

Для воздуха при $k=1,4$ $(p_3/p_2)_{\max}=8$.

4.32. $M=11,04$, $\alpha=32^\circ$.

4.33. $\omega > 34^\circ$.

4.34. $b < 349$ мм.

4.35. $b < 197$ мм.

4.36. $M_3 = 1,93$, $M_4 = 2,40$, $\sigma_{\Sigma 3} = 0,91$, $\sigma_{\Sigma 4} = 0,98$.

4.37. При $M_n = 2$ $M_2 = 1,347$, $p_2^* = 0,96 p_n^*$, $M_2' = 1,31$, $p_2'^* = 0,92 p_n^*$.

При $M_n = 3$ $M_2 = 2,16$, $p_2^* = 0,95 p_n^*$, $M_2' = 2,12$, $p_2'^* = 0,857 p_n^*$.

4.38. $M_3 = 1,01$, $p_3^* = 0,79 p_n^*$.

4.39. Решение. По графику $\alpha = f(\omega, M)$ для $M_n = 2$, $\lambda_n = 1,633$ и $\omega = 15^\circ$ находим $\alpha_n = 45,5^\circ$.

По уравнению $\lambda_n \cos \alpha = \lambda_1 \cos \beta$ (где $\beta = \alpha_n - \omega$) находим $\lambda_1 = 1,633 \frac{0,7009}{0,8616} = 1,328$, $M_1 = 1,443$.

По графику $\alpha = f(\omega, M)$ при $M_1 = 1,443$ и $\omega = 15^\circ$ устанавливаем, что при этих условиях поворот потока за косым скачком уплотнения на 15° невозможен, т. е. правильного отражения при этих условиях не получается. Реализуется маховское отражение с поворотом потока на $\omega \approx 10^\circ$ при $\alpha_1 = 66^\circ$ с дозвуковым потоком за отраженным скачком $\lambda_2 \approx 0,97$ и дальнейшим поворотом потока при дозвуковом режиме течения.

4.40. $l = 1,92h$; $h_T = 0,32h$; $M_1 = 2,24$; $M_2 = 1,86$; $M_3 = 1,51$; $M_4 = 1,18$; $M_5 = 0,86$.

4.41. Решение. $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{1}{\lambda_{nn}^2} = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_n^2 \sin^2 \alpha}{\frac{k+1}{2} M_n^2 \sin^2 \alpha}$; $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} =$

$$= \frac{\frac{k+1}{2}}{\frac{1}{M_n^2 \sin^2 \alpha} + \frac{k-1}{2}}.$$

4.42. $M = 1,8$.

4.43. $c_y = 0,29$, $c_x = 0,05$, $k = c_y/c_x = 5,8$.

4.44. $M_n = 9,4$, $\alpha = 38^\circ$.

4.45. $R_y = -9698$ Н, $R_x = 1994$ Н.

4.46. $\varphi_{\max} = 239^\circ$, $\delta_{\max} = 149^\circ$.

4.47. $\omega = 432$ м/с, $p = 1,15 \cdot 10^5$ Па, $T = 307$ К, $\delta = 4,456^\circ$.

В струе есть избыток давления, поток будет продолжать ускоряться вне сопла без изменения направления.

4.48. Надо уменьшить показатель адиабаты k либо путем подогрева, либо добавками к воздуху многоатомного газа. При $k = 1,33$ $\delta_{\max} = 159,2^\circ$. При $k = 1,25$ $\delta_{\max} = 180^\circ$.

4.49. При $p^*/p_1 = 1,4$ $c_1 = 471,5$ м/с, $\alpha_1 = 20^\circ$.

При расширении в косом срезе: $c_1 = 928$ м/с, $p^*/p_1 = 4,47$, $\alpha_1 = 37^\circ$.

4.50. $\omega = 899$ м/с, $\delta = 18^\circ$, $p^*/p = 4,31$, $r = 2,19 r_0$.

4.51. $p = 1,68 \cdot 10^5$ Па, $T = 496$ К, $\omega = 967$ м/с, $\delta = 4^\circ 15'$, $A = 2,6 b$.

4.52. $\alpha = 29^\circ 10'$.

4.53. Решение. По таблицам при $\lambda = 2$ находим $\vartheta_\Sigma = 53^\circ$, $\varphi_\Sigma = 124^\circ 38'$. Расширение в сопле Лаваля будет соответствовать фиктивному углу поворота потока

$$\vartheta_\Phi = 53 - 10 = 43^\circ \text{ и } \varphi_\Phi = 111^\circ.$$

Этому углу поворота потока отвечает $\lambda_n = 1,878$, $q(\lambda_n) = 0,3231$. Отсюда находим размер b :

$$b = \frac{b_{кр}}{q(\lambda_n)} = \frac{0,05}{0,3231} = 0,155 \text{ м.}$$

Действительный угол поворота характеристики

$$\varphi = \varphi_\Sigma - \varphi_\Phi = 124^\circ 38' - 111^\circ = 13^\circ 38';$$

$$\alpha_n = \arcsin \frac{1}{M_n} = \arcsin \frac{1}{2,6703} = 22^\circ;$$

$$\alpha = 180 - [(180 - \alpha_n) + \varphi] = \alpha_n - \varphi = 22^\circ - 13^\circ 38' = 8^\circ 22';$$

$$p^* = \frac{p}{p(\lambda)} = \frac{10^5}{0,0214} = 46,7 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

4.54. Решение. По заданному $b_{кр}/b = q(\lambda) = 0,85$ находим $\lambda = 1,365$, $M = 1,5007$. Положение начальной характеристики найдем из равенства

$$\alpha_n = \arcsin \frac{1}{M} = 41,8^\circ.$$

По λ с помощью таблиц или уравнения, найдем фиктивный угол поворота характеристики φ_n и потока δ_n :

$$\varphi_n = 60^\circ 20', \quad \delta_n = 12^\circ.$$

Действительный угол поворота характеристики будет

$$\varphi = \alpha_n - \alpha = 41,8^\circ - 30^\circ = 11,8^\circ.$$

Общий угол поворота характеристики

$$\varphi_\Sigma = \varphi_n + \varphi = 60^\circ 20' + 11,8^\circ = 72,1^\circ.$$

Этому углу поворота характеристики соответствует поток с $\lambda = 1,486$, $M = 1,705$, $\delta_\Sigma = 18^\circ$, $r/r_0 = 2,91$, $p(\lambda) = 0,2007$, $T(\lambda) = 0,6320$.

$$p = 10^5 \cdot 0,2007 = 2,007 \cdot 10^5 \text{ Па;}$$

$$T = 1000 \cdot 0,6320 = 632 \text{ К}$$

$$w = \lambda a_{кр} = 1,486 \cdot 18,3 \sqrt{\frac{1000}{1000}} = 860 \text{ м/с;}$$

$$\delta = \delta_\Sigma - \delta_n = 18^\circ - 12^\circ = 6^\circ; \quad \lambda, b_{кр} = r/r_0 = 2,91.$$

Глава V

5.1. $H = 54 \text{ мм}$, $Re = 2112$.

5.2. $Q = 2,42 \text{ л/мин.}$

5.3. $\Delta p = p_1 - p_2 = 753 \text{ Па.}$

5.4. $\tau_w = 0,62 \text{ Н/м}^2$.

5.5. $\tau_w = 0,984 \text{ Н/м}^2$, $Re = 1570$ — ламинарный.

5.6. $\tau_w = 0,79 \text{ Н/м}^2$, $Re = 1203$ по средней скорости. $Re = 2405$ — по скорости на оси. Режим течения ламинарный.

5.7. Для глицерина: $Re = 312$ — режим ламинарный, $\tau_w = 7,14 \text{ Н/м}^2$.

Для ртути: $Re = 23970$ — режим турбулентный.

5.8. $Q = 7,8 \text{ л/мин.}$

5.9. $Q = 4,57 \text{ л/мин.}$, $\tau_w = 8,82 \text{ Н/м}^2$, $Re = 2150$.

5.10. Решение. Течение в трубе может быть либо ламинарным, либо турбулентным (переходный режим не рассматривается). При ламинарном режиме

$$\Delta p = \frac{8\mu l}{R^2} w_{ср} = A w_{ср}, \quad \text{где } A = \text{const.}$$

Следовательно, падение давления прямо пропорционально скорости движения. Это условиям задачи противоречит. При турбулентном режиме течения

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2}.$$

При малой скорости можно считать $q = \text{const}$, тогда $\Delta p = \lambda A w^2$.

По условиям задачи

$$\frac{\Delta p_1}{\Delta p_2} = \frac{2}{8} = \frac{\lambda_1 w_1^2}{\lambda_2 w_2^2} = \frac{\lambda_1 \cdot 100}{\lambda_2 \cdot 400},$$

откуда следует, что движение в трубопроводе турбулентное в шероховатой трубе, так как $\lambda_1 = \lambda_2$.

5.11. $\psi_f = 1/3$.

5.12. $Q = 1,8$ л/мин, $Re = 76,4$.

5.13. $Q = 1,33$ л/с, $Re = 356$.

5.14. $Q = 7,35$ л/с.

5.15. $\Delta H = 815,5$ м.

5.16. Решение. Так как коэффициент трения есть отношение напряжения трения к скоростному напору, то при ламинарном режиме течения уменьшение скорости приводит к уменьшению трения пропорционально скорости, а скоростной напор при этом уменьшается пропорционально квадрату скорости.

5.17. $p_2 = 2,496 \cdot 10^{-5}$ Па.

5.18. Решение. Условие потенциальности приводит к $\text{rot } w = 0$, $v = w = 0$, $u \neq 0$, следовательно, $\omega_x = 0$, $\omega_y \neq 0$, $\omega_z \neq 0$.

$$r^2 = y^2 + z^2, \quad u = \frac{\Delta p}{4\mu l} (r_0^2 - r^2).$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{4\mu l} z; \quad \omega_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\Delta p}{4\mu l} y,$$

отсюда $\omega = \sqrt{\omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{\Delta p}{4\mu l} r$; $\omega_{\max} = \frac{\Delta p}{4\mu l} r_0$.

5.19. $\Omega_x = 0$, $\Omega_y = -2 \frac{u_0 r}{R^2}$, $\Omega_z = 2 \frac{u_0 r}{R^2}$.

5.20. $u_{cp} = \frac{1}{2} u_0$, $r = \frac{R_0}{\sqrt{2}}$.

5.21. $\psi_E = 1/8$.

5.22. Движение снизу вверх. $Q = 1,8$ л/с, $Re = 1185$, $\tau_v = 160$ Н/м².

5.23. $u_{\max} = 1,03$ м/с при $z = 2,5$ мм, $Q = 2,95$ л/с, $\tau_{z=0} = -145,4$ Н/м², $\tau_{z=l} = 13,33$ Н/м².

5.24. $\theta = 42^\circ$.

5.25. При $\theta = 20^\circ$, $Q = 45$ л/с, при $\theta = 40^\circ$ $Q = 84,5$ л/с.

5.26. Таких точек в зазоре две: ближе к нижней пластине $z_1 = 0,21$ л и ближе к верхней пластине $z_2 = 0,79$ л.

5.27. $\tau_n = 2,16$ Н/м².

5.28. $\frac{dp}{dx} = -8640$ Па/м.

5.29. $\frac{dp}{dx} = -6560$ Па/м, $\tau_{z=0} = -30$ Н/м², $\tau_{z=l} = 22,49$ Н/м², $z_{\tau=0} = 4,57$ мм.

5.30. $u_{\max} = 3,06$ м/с, $Q = 8,53$ л/с, $\tau_{z=l/2} = 1,6$ Н/м².

$$5.31. \frac{dp}{dx} = 4800 \text{ Па/м}, \quad \tau_{z=0} = -8 \text{ Н/м}^2,$$

$$5.32. u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} \left(R_1^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} \right);$$

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{8\mu l} \pi \left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right].$$

$$5.33. \tau_{r=R_1} = \frac{\Delta p}{2l} \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} - R_1 \right); \quad \tau_{r=R_2} = \frac{\Delta p}{2l} \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}} - R_2 \right).$$

Напряжение на внутренней стенке больше чем на внешней.

$$u_{\max} \text{ при } r = \sqrt{\frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}}.$$

$$5.34. \Delta p = p_1 - p_2 = 1143,38 \text{ Па}, \quad \tau_{R_1} = 6,2 \text{ Н/м}^2, \quad \tau_{R_2} = 5,4 \text{ Н/м}^2.$$

$$5.35. d = 0,097 \text{ мм}, \quad w = 1,03 \text{ см/с}.$$

$$5.36. w = 0,278 \text{ м/с}, \quad \text{Re} = 1,01 \text{ — формула Стокса правомочна.}$$

$$5.37. \mu = 1,19 \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

$$5.38. v = 4,94 \text{ см}^2/\text{с}, \quad \text{Re} = 0,364.$$

$$5.39. w = 9,4 \text{ см/с}, \quad \text{Re} = 0,7.$$

$$5.40. \text{ При } T = 288 \text{ К } d_{\max} \approx 0,08 \text{ мм}; \text{ при } T = 378 \text{ К } d_{\max} \approx 0,1 \text{ мм}.$$

$$5.41. \text{ При } T = 288 \text{ К } w_{\max} = 19 \text{ см/с}; \text{ при } T = 378 \text{ К } w_{\max} = 24 \text{ см/с}.$$

$$5.42. d \leq 8,7 \text{ мм}.$$

$$5.43. h \geq 57 \text{ см}.$$

$$5.44. d \leq 5,6 \text{ мм}, \quad h \geq 97,5 \text{ см}.$$

$$5.45. \text{Re} = 27 \cdot 10^3 \text{ — режим течения турбулентный.}$$

$$5.46. \frac{dp}{dl} = -588 \text{ Па/м}.$$

5.47. Уравнение теплосодержания, так как оно учитывает работу трения, а в уравнение Бернулли необходимо вносить поправку на изменение полного давления от трения.

$$5.48. R_x = 1413 \text{ Н и } 707 \text{ Н}.$$

$$5.49. c_f = 2,99 \cdot 10^{-3}.$$

$$5.50. h_{уд} = 0,62 \text{ м}, \quad h_d = 0,11 \text{ м}, \quad \Delta h = 0,51 \text{ м}.$$

$$5.51. h_{суж} = 0,064 \text{ м}.$$

$$5.52. \text{Re} = 4,2 \cdot 10^6 \text{ — турбулентный}, \quad M = 0,29.$$

$$5.53. \text{ При } n = 2 \quad w_{ср} = 0,5 \omega_0; \text{ при } n = 4 \quad w_{ср} = 0,66 \omega_0; \text{ при } n = 6 \quad w_{ср} = 0,75 \omega_0;$$

$$5.54. l = 0,165 \text{ м}, \quad \text{Re}_x = 6,3 \cdot 10^3 \text{ — пограничный слой ламинарный}.$$

$$5.55. l = 0,86 \text{ м}, \quad \delta = 6,9 \text{ мм}.$$

$$5.56. \text{ При } x = 50 \text{ мм } \delta = 0,71 \text{ мм}, \quad (\omega_x)_{y=0} = -3,17 \cdot 10^4 \text{ рад/с}, \quad (\omega_z)_{y=\delta} = 0.$$

$$\text{ При } x = 200 \text{ мм } \delta = 1,42 \text{ мм}.$$

$$5.57. \text{ С учетом сжимаемости при } x_d = 0,1 \text{ м } \delta = 0,63 \text{ мм}, \quad c_f = 0,08 \cdot 10^{-2}.$$

$$\text{ Без учета сжимаемости при } x_d = 0,1 \text{ м}$$

$$\delta = 0,587 \text{ мм}, \quad c_f = 0,085 \cdot 10^{-2}.$$

$$5.58. \text{ Решение. Для заданных условий } v_0 = 1,46 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}, \quad a = 340 \text{ м/с},$$

$$u_0 = aM_0 = 272 \text{ м/с},$$

$$\text{Re}_{кр} = \frac{u_0 x_d}{\nu_0} = 5 \cdot 10^5, \quad x_d = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 1,46 \cdot 10^{-5}}{272} = 0,026 \text{ м}.$$

Длина ламинарного участка менее 1% от длины пластины, а сила сопротивления на этой длине еще меньше, поэтому будем считать, что вдоль всей пластины пограничный слой турбулентный. Среднее значение коэффициента сопротивления найдем по формуле (5.57), в которой δ^{**}/δ будем определять как для несжимаемой жидкости, так как $\overline{T}_w = 1$, а $M_0 = 0,8$.

$$Re_x = \frac{u_0 l}{\nu_0} = \frac{272 \cdot 3}{1,46 \cdot 10^{-5}} = 5,59 \cdot 10^7;$$

$$c_w = \frac{0,116}{(5,59 \cdot 10^7)^{0,2}} \cdot 0,6274 \frac{1,128^{0,6}}{1,096^{1,05}} = 0,002;$$

$$Q = c_w b l \frac{Q u^2}{2} = 0,002 \cdot 3 \cdot 0,7 \cdot 760 \cdot 13,6 \cdot 9,8 \cdot 0,64 = 272,3 \text{ Н.}$$

5.59. $\delta = 9,2$ мм.

5.60. При $\rho = \text{const}$ $\delta = 10,2$ мм. Ошибка в большую сторону примерно на 11%.

5.61. $R = 398$ Н, $c_{x \text{ тр}} = 0,00196$.

5.62. $R = 390,3$ Н, $c_{x \text{ тр}} = 0,00191$.

5.63. Решение. $Re_{кр} = 3,2 \cdot 10^5 = \frac{Q_0 u_0 x_d}{\mu_0}$.

$$Q_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{10^5}{287 \cdot 300} = 1,16, \quad x_d = \frac{3,2 \cdot 10^5 \cdot 1,765 \cdot 10^{-5}}{1,16 \cdot 100} = 48,6 \text{ мм.}$$

Поскольку длина ламинарной части пограничного слоя мала (1,6%), будем считать весь пограничный слой турбулентным, тогда

$$c_w = \frac{0,116}{Re_x^{0,2}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)^{0,2} \frac{(1 + 0,2 M_0^2)^{0,6}}{(1 + 0,75 \cdot 0,2 M_0^2)^{1,05}}.$$

$$Re_x = \frac{1,16 \cdot 100 \cdot 3}{1,765 \cdot 10^{-5}} = 1,97 \cdot 10^7, \quad \frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{7}{72}, \quad M_0 = 0,287.$$

$$c_w = 0,00252, \quad R = 2 c_w \frac{Q_0 u_0^2}{2} F = 175,4 \text{ Н.}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,0575}{Re_x^{0,2}} \left(\frac{\delta^{**}}{\delta} \right)^{-0,8} \frac{(1 + 0,2 M_0^2)^{0,6}}{(1 + 0,75 \cdot 0,2 M_0^2)^{1,05}}.$$

$$\delta = 38,6 \text{ мм.}$$

5.64. $R_\Sigma = 1791$ Н, $c_x = 0,393$

5.65. $M_{нд} = 2$, $M_d = 1,716$.

5.66. $M_d = 1,725$, $M_{нд} = 2$.

5.67. Решение. Для определения режима течения в пограничном слое найдем длину ламинарного участка, задавшись $Re_{кр} = 3,2 \cdot 10^5$. При этом $x_d = 127$ мм. Ламинарная часть пограничного слоя мала, отрыва на этой длине произойти не может. Ищем отрыв при турбулентном течении в пограничном слое. Так как $M_0 = 0,086$ — мало, считаем течение при $q = \text{const}$.

$$\frac{dp}{dx} z$$

$$\frac{Q_0 u_0^2}{2} = \varphi_0(M_0); \quad \text{при } z = \delta^*, \quad \varphi_0(M_0) = 0,015,$$

$$\text{тогда } \delta^* = \frac{0,015 \cdot Q_0 u_0^2}{\frac{dp}{dx}} = 0,0465 \text{ м.}$$

Для несжимаемой жидкости при $n=7$

$$\delta^* = 0,125\delta, \quad \text{а} \quad \delta/x = 0,37/\text{Re}_x^{0,2}.$$

Решая это уравнение относительно x , находим $x=40$ м. Заключаем, что отрыва при заданных условиях не будет, так как длина диффузора при $dp/dx=600$ и скорости на входе 40 м/с не должна быть более 1,55 м. Это следует из уравнения

$$u_0^2 - w^2 = \frac{2 \frac{dp}{dx} x}{\rho}, \quad \text{а при } w=0 \quad x \leq \frac{\rho u_0^2}{2 \frac{dp}{dx}}.$$

5.68. $x \leq 3,47$ м — расстояние вдоль хорды от передней кромки крыла.

5.69. $x=2,385$ м, отрыва не будет, так как

$$\frac{\frac{dp}{dx} \delta^*}{\rho u_0^2} = 0,0013 < \varphi_0(M_0) = 0,015.$$

5.70. $x_n=0,73$ м, $\delta_n=4,79$ мм; $x_T=1,23$ м, $\delta_T=29,7$ мм.

5.71. Решение. Будем считать, что $\text{Re}_{\text{кр}}=5 \cdot 10^5$, тогда

$$u_0 = \frac{\text{Re}_{\text{кр}} u_0}{\rho_0 x} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 1,79 \cdot 10^{-5}}{1,225 \cdot 0,7} = 10,44 \text{ м/с},$$

$$\delta_n = \frac{4,64 \cdot x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{4,64 \cdot 0,7}{7,07 \cdot 10^2} = 4,59 \text{ мм}.$$

Турбулентный режим будет при $\text{Re}_x \geq 10^6$, тогда

$$u_0 = \frac{10^6 \cdot 1,79 \cdot 10^{-5}}{1,225 \cdot 0,7} \geq 20,87 \text{ м/с},$$

$$\delta_T = \frac{0,37 \cdot x}{\text{Re}_x^{0,2}} = \frac{0,37 \cdot 0,7}{10^{1,2}} \leq 16,3 \text{ мм}.$$

5.72. Решение. При $M_0=3$ и $\omega=10^\circ$ $\alpha=28^\circ$,

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{7}{6} M_0^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{6} = 2,144.$$

Найдем размер B для определения режима течения в пограничном слое:

$$B = \frac{h}{\text{tg } \alpha} - A = \frac{0,5}{0,532} - 0,1 = 0,84 \text{ м}.$$

На высоте $H=10$ км, $\rho=0,413$ кг/м³, $a=299$ м/с, $\nu=3,52 \cdot 10^{-5}$ м²/с,

$$\text{Re}_x = \frac{wB}{\nu} = \frac{299 \cdot 3 \cdot 0,84}{3,52 \cdot 10^{-5}} = 2,14 \cdot 10^7 \text{ режим турбулентный}.$$

Найдем относительное давление отрыва:

$$\frac{p_{\text{отр}}}{p_0} = 1 + 0,15 \frac{k M_0^2}{(M_0^2 - 1)^{1/4}} = 1 + 0,15 \frac{1,4 \cdot 9}{8^{0,25}} = 2,124,$$

$$\frac{p_{\text{отр}}}{p_0} < \frac{p_1}{p_0} \text{ — произойдет отрыв.}$$

Найдем угол скачка, при котором повышение давления будет меньше давления отрыва:

$$\frac{P_{отр}}{P_0} \geq \frac{7}{6} M_0^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{6}; \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{2,124 + 0,166}{\frac{7}{6} \cdot 9}} = 0,467,$$

$$\alpha = 27,84^\circ, \quad \omega \leq 9,5^\circ.$$

5.73. $s = 1558$ мм.

5.74. $s \geq 7,1$ м.

5.75. $b \geq 3,12$ м.

5.76. $h \geq 5,2$ м, $T_m = 375$ К.

5.77. Три двигателя выполняют эту работу за 19,5 ч, $x = 104$ м.

5.78. $x = 7,72$ м, $T_m = 387$ К.

Глава VI

6.1. Решение. а) V и Q не могут быть независимыми переменными, так как $V = \text{const}/Q$. Их можно заменить произведением $VQ = G$ (кг). Тогда безразмерный комплекс Π будет:

$$\Pi = c (p^2 G^2 l^2 g^2) \quad \text{или} \quad 1^\circ = (\text{кг}_f/(\text{м} \cdot \text{с}^2))^2 \cdot \text{кг}_f^2 \cdot \text{м}^2 \cdot (\text{м}/\text{с}^2)^2.$$

Откуда получаем $\beta = -\alpha$, $\delta = -\alpha$, $\gamma = 2\alpha$.

$$\text{Безразмерный комплекс будет } \Pi = c \left(\frac{p l^2}{G g} \right) = c \left(\frac{p l^2}{V Q g} \right).$$

$$\text{б) } \Pi = c (R^2 Q^2 l^2 g^2) \quad \text{или} \quad 1^\circ = (\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2)^2 (\text{м}/\text{с})^2 (\text{кг}/\text{м}^3)^2 (\text{м}/\text{с}^2)^2.$$

$$\text{Откуда находим } \beta = -\frac{6}{5}\alpha, \quad \gamma = -\alpha, \quad \delta = -\frac{2}{5}\alpha.$$

$$\text{Безразмерный комплекс будет } \Pi = c \left(\frac{R}{Q Q_1^2 Q_2 g^2} \right).$$

$$\text{в) } \Pi = c (p^2 \omega^2 l^2) \quad \text{или} \quad 1^\circ = (\text{кг}_f/(\text{м} \cdot \text{с}^2))^2 (\text{кг}_f/(\text{с} \cdot \text{м}))^2 \text{с}^2.$$

Решая уравнения размерности, находим $\beta = -\alpha$, $\gamma = \alpha$.

Безразмерный комплекс будет $\Pi = c (p l / \omega)$.

$$6.2. \text{ а) } \Pi = c (\omega l / T); \quad \text{ б) } \Pi = c (v \sqrt{\frac{3}{V^2}}); \quad \text{ в) } \Pi = c \left(\frac{R}{p l^2} \right); \quad \text{ г) } \Pi = c \left(\frac{\tau}{Q \omega^2} \right).$$

6.3. $c_x = c (Q \omega^2 l^2)^{1/2}$; $c_{Eu} = c (k M^2)^{1/2}$ — критерий Эйлера учитывает сжимаемость среды и не учитывает сил вязкости.

6.4. $c_x = c (Q \omega^2 l^2)^{1/2} = c \text{Re}^{1/2}$ — пригоден для несжимаемой жидкости или газа при малых числах Ма.

6.5. $\omega = 127$ м/с, $M = 0,365$ — волновых потерь не будет, влияние сжимаемости не существенно.

6.6. $\omega_0 = 12,65$ км/ч.

6.7. Решение. $c_{xH} = c_{xM}$. Так как скорость спуска мала, то

$$\text{Re}_H = \text{Re}_M \quad \text{или} \quad \frac{\omega_H D_H Q_H}{\mu_H} = \frac{\omega_M D_M Q_M}{\mu_M}. \quad \text{Отсюда} \quad \omega_M = \omega_H \frac{Q_H}{Q_M} \frac{D_H}{D_M} \frac{\mu_M}{\mu_H}; \quad Q_H =$$

$$= 1,29 \text{ кг/м}^3, \quad Q_M = 103 \text{ кг/м}^3, \quad \mu_H = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \mu_M = 130,6 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с},$$

$$\omega_M = 4,9 \omega_H.$$

Скорость спуска модели можно обеспечить изменением средней плотности модели. Так как сила сопротивления модели при спуске $R_m = c_x \frac{\rho_{ж} w_m^2}{2} F_m$. С другой стороны $R_m = V_m (\rho_m - \rho_{ж}) g = \frac{4}{3} \pi r_m^3 g (\rho_m - \rho_{ж})$, $F_m = \pi r_m^2$, откуда $\rho_m = \rho_{ж} \left(\frac{3}{8} \frac{c_x w_m^2}{r_m g} + 1 \right)$.

В опыте замеряется время спуска на заданной длине y , после чего находится $w_m = y/t$. Относительная шероховатость модели должна быть такой же, как у воздушного шара.

$$6.8. R_m = R_n.$$

$$6.9. R_m/R_n = (b_m/b_n)^3.$$

6.10. Решение. Предполагая, что взлет модели происходит при тех же углах атаки, что и у натурy, получаем $c_{x\,m} = c_{x\,n}$, $c_{y\,m} = c_{y\,n}$. В момент взлета подъемная сила равна силе веса самолета, поэтому

$$G_n/G_m = (l_n/l_m)^2 = n^2, \text{ откуда } G_m = G_n/n^2.$$

Если бы модель изготавливалась из тех же материалов, что и натура, тогда масса была бы пропорциональна объему, или n^3 . Следовательно, модель может быть по удельной массе хуже чем натура.

$$6.11. s = cgt^2.$$

$$6.12. N = c \frac{QqgH}{\eta} \text{ Вт.}$$

$$6.13. N = cGHg\eta \text{ Вт.}$$

$$6.14. w_n = 23,7 \text{ м/с, } \Delta p_b = 1,8 \cdot 10^4 \text{ Па, } \Delta p_n = 2,35 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$6.15. w_b = 0,84 \text{ м/с.}$$

$$6.16. w = 70,6 \text{ м/с, } p^* = 1,04 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$6.17. \text{ В } 18 \text{ раз.}$$

$$6.18. Q = 0,56 \text{ л/с, } w_b = 1,78 \text{ м/с, } w_k = 5,66 \text{ м/с.}$$

$$6.19. w_k = 5,85 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

$$\text{При } t = 20^\circ \text{С } \mu_k = 1,49 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с, } w_k = 8,7 \text{ м/с; при } t = 40^\circ \text{С } \mu_k = 1,078 \times 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с, } w_k = 6,3 \text{ м/с.}$$

$$6.20. p_m = p_n \frac{b_n}{b_m} \left(\frac{T_m}{T_n} \right)^{5/4}.$$

$$\text{При } T_m = 288 \text{ К } p_m = 2,197 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$6.21. h_m = 0,633 \text{ м.}$$

6.22. $R_n = 0,98 R_m$. Хотя площадь модели автомобиля меньше натурy в 7,2 раза, скоростной напор при испытании модели больше в 7,3 раза скоростного напора при максимальной скорости движения, поэтому сила сопротивления натурy даже несколько меньше силы сопротивления модели.

$$6.23. \text{ Решение. } Re_m = Re_n \text{ или } \frac{w_m l_m \rho_m}{\mu_m} = \frac{w_n l_n \rho_n}{\mu_n}, \text{ откуда } \frac{l_m}{l_n} \frac{w_m}{w_n} = \frac{\rho_n}{\rho_m} \frac{\mu_m}{\mu_n}.$$

$$\text{С другой стороны, } Fr_m = Fr_n \text{ или } \frac{w_m^2}{g l_m} = \frac{w_n^2}{g l_n}, \text{ откуда } \frac{l_m}{l_n} = \left(\frac{w_m}{w_n} \right)^2. \text{ Тогда}$$

$$k_w = \frac{w_m}{w_n} = \sqrt[3]{\frac{Q_n}{Q_m} \frac{\mu_m}{\mu_n}} = \sqrt[3]{\frac{103}{13,6 \cdot 10^3} \frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{1,004 \cdot 10^{-3}}} = 0,49,$$

$$k_l = l_m/l_n = k_w^2 = 0,24.$$

$$6.24. k_l = \frac{p_H}{p_M} \left(\frac{T_M}{T_H} \right)^{5/4}, \quad k_w = \left(\frac{T_M}{T_H} \right)^{1/2}.$$

$$6.25. \text{ а) } \Pi = 2: \operatorname{Re} = l\omega/\nu; \quad t\omega^2/\nu; \quad \text{ б) } \Pi = 2: \operatorname{Re} = l\omega/\nu; \quad t\omega^2/\nu;$$

$$\text{ в) } \Pi = 2: \operatorname{Re} = q\omega l/\mu; \quad q\omega^2 t/\mu; \quad \text{ г) } \Pi = 1: q\omega^2/p = 1/Eu.$$

$$6.26. \Pi = 4: \frac{l}{D}, \quad \operatorname{Re} = \frac{wD}{\nu}, \quad \operatorname{Pr} = \frac{c\mu}{\lambda}, \quad \operatorname{Nu} = \frac{aD}{\lambda}.$$

$$6.27. \text{ Решение. } \operatorname{Re} = \frac{q\omega l}{\mu} = \frac{q\omega^2}{\mu \frac{w}{l}} \sim \frac{q \frac{dx}{dt} \frac{d\omega}{dx} dx dy dz}{\mu \frac{d\omega}{dn} dy dz} \sim \frac{R_{\text{ин}}}{R_{\text{тр}}}.$$

$$6.30. \text{ Решение. } M^2 = \frac{w^2}{a^2} = \frac{2 \frac{w^2}{2}}{kRT} = \frac{2}{k-1} \frac{w^2/2}{c_p T} = \frac{2}{k-1} \frac{w^2/2}{i}.$$

Глава VII

$$7.1. q \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + J_y B_z - J_z B_y;$$

$$q \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + J_z B_x - J_x B_z;$$

$$q \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + J_x B_y - J_y B_x.$$

$$7.2. J_x = \sigma_R [E_x + (vB_z - wB_y)];$$

$$J_y = \sigma_R [E_y + (wB_x - uB_z)];$$

$$J_z = \sigma_R [E_z + (uB_y - vB_x)].$$

$$7.3. \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \left(\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u B_x}{\partial x} + \frac{\partial u B_y}{\partial y} + \frac{\partial u B_z}{\partial z} -$$

$$- B_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right);$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial v B_x}{\partial x} + \frac{\partial v B_y}{\partial y} + \frac{\partial v B_z}{\partial z} -$$

$$- B_y \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right);$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial w B_x}{\partial x} + \frac{\partial w B_y}{\partial y} + \frac{\partial w B_z}{\partial z} -$$

$$- B_z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

$$7.4. \Delta p_{\max} = 17,376 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$7.5. \text{Решение: } \Delta p = \varrho u_{\text{ср}}^2 \frac{l}{b} \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} \left(\frac{1}{\Pi} - \frac{\text{Ha}}{\text{Ha} - \text{th Ha}} \right);$$

$$u_{\text{ср}} = \frac{Q}{F} = \frac{0,2 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 0,04} = 0,05 \text{ м/с.}$$

Числа Гартмана и Рейнольдса находим по полуширине канала:

$$b = 0,02 \text{ м; } \text{Ha} = B_0 b \sqrt{\frac{\sigma_R}{\varrho \nu}} = 2 \cdot 0,02 \sqrt{\frac{5,43 \cdot 10^6}{0,3 \cdot 10^{-3}}} = 0,538 \cdot 10^4;$$

$$\text{Re} = \frac{\varrho u b}{\mu} = \frac{870 \cdot 0,05 \cdot 0,02}{0,3 \cdot 10^{-3}} = 2,9 \cdot 10^3; \quad \frac{\text{Ha}^2}{\text{Re}} = \frac{0,538^2 \cdot 10^8}{2,9 \cdot 10^3} = 9980;$$

$$\Pi = \frac{u_{\text{ср}} B}{E} = \frac{0,05 \cdot 2 \cdot 0,1}{0,02} = 0,5;$$

$$\Delta p = 870 \cdot 0,05^2 \cdot 9980 \frac{0,8}{0,02} \left(2 - \frac{0,538 \cdot 10^4}{0,538 \cdot 10^4 - 1} \right);$$

$$\Delta p = 8,7 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

$$7.6. \text{Решение. } u_{\text{ср}} = \frac{Q}{F} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 0,02} = 1 \text{ м/с;}$$

$$V = u_{\text{ср}} B \cdot 2b = 1 \cdot 2 \cdot 0,1 = 0,2 \text{ В; } \Delta p = c_f \frac{l}{h} \frac{\varrho u_{\text{ср}}^2}{2} = 2 \frac{\text{Ha}}{\text{Re}} \frac{l}{h} \frac{\varrho u_{\text{ср}}^2}{2}; \quad \frac{\text{Ha}}{\text{Re}} =$$

$$= \frac{B \sqrt{\frac{\sigma_R}{\mu}}}{\varrho u_{\text{ср}}}; \quad \Delta p = B \sqrt{\sigma_R \mu} \frac{l}{h} u_{\text{ср}} = 8,072 \cdot 10^3 \text{ Па.}$$

$$7.7. V = 0,104 \text{ В, } I = 1,04 \cdot 10^5 \text{ А, } \Delta p = -10,4 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

$$7.8. \text{Решение. Для заданных условий уравнение индукции } \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot} [\vec{W} \times \vec{B}] + \\ + \frac{1}{\mu_B \sigma_R} \Delta \vec{B} \text{ преобразуется к виду } \frac{d^2 B_y}{dx^2} - \mu_B \sigma_R u \frac{dB_y}{dx} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$B = c_1 e^{\mu_B \sigma_R u x} + c_2.$$

$$\text{Граничные условия: } B(0) = B_0; \left(\frac{dB}{dx} \right)_{x=0} = \mu_B J_0 = \mu_B \sigma_R u B_0.$$

Из первого граничного условия $c_1 + c_2 = B_0$; из второго $c_1 = B_0$, $c_2 = 0$ и $B = B_0 e^{\mu_B \sigma_R u x}$.

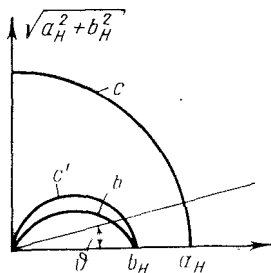
Максимальное поле получим при $x = l$:

$$\frac{B(l)}{B_0} = e^{\mu_B \sigma_R u l} = e^{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3,6 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 1} = e^{4,52} \approx 92; \\ B_l > B_0 \text{ в } 92 \text{ раза.}$$

$$7.9. \bar{\delta} = \frac{4,605}{\text{Ha}} = 0,01; \quad \delta = 0,46 \text{ мм.}$$

- 7.10. а) $\Phi=0$; б) $\Phi=-0,161$ МВб.
 7.11. $b_H=4,51 \cdot 10^5$ м/с, $b=3,19 \cdot 10^5$ м/с.
 7.12. $B_H \leq 0,0875$ Т.
 7.13. $c=11,8 \cdot 10^5$ м/с, $c'=b_H=4,46 \cdot 10^5$ м/с.

Рис. 76. Схема к ответу на задачу 7.14



- 7.14. См. рис. 76.
 7.15. $B_1/B_H=2$.
 7.16. $\Delta p=5,76 \cdot 10^4$ Па.
 7.17. $M_H=180$.
 7.18. $w_B=1,32 \cdot 10^5$ км/с.
 7.19. $Q_1/Q_H=1,55$, $(Q_1/Q_H)_{B=0}=3,81$.
 7.20. $M_H=9,96$, $p_1/p_H=123,8$

7.21. Решение. $\bar{u} = \frac{u}{w_H} = 1 - \frac{1}{k} e^{-S_1 \bar{x}};$

$$S_1 = \frac{2k}{k+1} S_0 = \frac{2k}{k+1} \frac{\sigma_R B^2 h}{m}; \quad m = \frac{G}{2bh} = \frac{0,1}{0,5 \cdot 0,05} = 4;$$

$$S_1 = \frac{2 \cdot 1,67}{2,67} \cdot \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 0,12 \cdot 0,05}{4} = 0,47.$$

Найдем $\bar{x}$, на которой плазма ускоряется до $M=1$:

$$e^{S_1 \bar{x}} = k; \quad (\bar{x})_{u=0} = \frac{\ln k}{S_1} = \frac{\ln 1,67}{0,47} = 1,01.$$

Примерно 1 калибр идет на ускорение до $M=1$. В нашем случае $\bar{x}=3/0,5=6$, следовательно, на сверхзвуковое ускорение остается 5 калибров, тогда

$$\bar{u} = 1 - \frac{1}{k} e^{-0,47 \cdot 5} = 1 - \frac{1}{1,67 \cdot e^{2,35}} = 0,94;$$

$$w_H = \frac{E}{B} = \frac{V}{hB} = \frac{2000}{0,5 \cdot 0,1} = 40000 \text{ м/с};$$

$$u = w_H \bar{u} = 40000 \cdot 0,94 = 37600 \text{ м/с};$$

$$R = Gu = 0,1 \cdot 37600 = 3760 \text{ Н}.$$

7.23. $\tau_{xyH}/\tau_{xy0} = 1,78$.

Приложения

ТАБЛИЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ПО ФОРМУЛЕ РЕЛЕЯ ($k=1,40$)

Если известно статическое давление потока p_H и полное давление за прямым скачком уплотнения p_1^* , то приведенная скорость λ связана с этими величинами уравнением

$$\frac{p_H}{p_1^*} = \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{1}{\lambda^2} \right)^{\frac{1}{k-1}},$$

или через число М

$$\frac{p_H}{p_1^*} = \left[\frac{2}{(k+1) M^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{2k}{k+1} M^2 - \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Ниже приводится таблица зависимости М от p_H/p_1^* , подсчитанная по приведенному уравнению для показателя адиабаты $k=1,40$.

М	p_H/p_1^*	М	p_H/p_1^*	М	p_H/p_1^*	М	p_H/p_1^*	М	p_H/p_1^*
1,0	0,5283	2,9	0,0885	4,8	0,0332	6,7	0,0172	8,6	0,0105
1,1	0,4688	3,0	0,0830	4,9	0,0319	6,8	0,0167	8,7	0,0102
1,2	0,4153	3,1	0,0778	5,0	0,0306	6,9	0,0162	8,8	0,0100
1,3	0,3688	3,2	0,0733	5,1	0,0294	7,0	0,0157	8,9	0,0098
1,4	0,3280	3,3	0,0690	5,2	0,0283	7,1	0,0153	9,0	0,0095
1,5	0,2929	3,4	0,0651	5,3	0,0273	7,2	0,0149	9,1	0,0093
1,6	0,2630	3,5	0,0615	5,4	0,0263	7,3	0,0145	9,2	0,0091
1,7	0,2369	3,6	0,0583	5,5	0,0253	7,4	0,0141	9,3	0,0089
1,8	0,2141	3,7	0,0553	5,6	0,0244	7,5	0,0137	9,4	0,0088
1,9	0,1943	3,8	0,0524	5,7	0,0236	7,6	0,0134	9,5	0,0086
2,0	0,1773	3,9	0,0498	5,8	0,0229	7,7	0,0130	9,6	0,0084
2,1	0,1623	4,0	0,0474	5,9	0,0221	7,8	0,0127	9,7	0,0082
2,2	0,1489	4,1	0,0452	6,0	0,0213	7,9	0,0124	9,8	0,0081
2,3	0,1372	4,2	0,0432	6,1	0,0207	8,0	0,0121	9,9	0,0079
2,4	0,1267	4,3	0,0412	6,2	0,0200	8,1	0,0118	10,0	0,0077
2,5	0,1174	4,4	0,0393	6,3	0,0194	8,2	0,0115	11,0	0,00639
2,6	0,1089	4,5	0,0377	6,4	0,0188	8,3	0,0112	12,0	0,00542
2,7	0,1013	4,6	0,0360	6,5	0,0182	8,4	0,0109	13,0	0,00458
2,8	0,0946	4,7	0,0346	6,6	0,0177	8,5	0,0107	14,0	0,00397

ТАБЛИЦЫ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Таблицы газодинамических функций значительно ускоряют и облегчают решение большинства задач по газовой динамике, причем, встречаются задачи, которые можно решить только с их помощью.

В первых трех столбцах приведены функции, характеризующие термодинамическое состояние газа:

$$T(\lambda) = \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2; \quad p(\lambda) = \frac{p}{p^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

$$q(\lambda) = \frac{q}{q^*} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

В следующих двух столбцах даны функции, характеризующие безразмерный расход газа:

$$q(\lambda) = \frac{q\omega}{q_{кр} a_{кр}} = \frac{F_{кр}}{F} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda,$$

$$y(\lambda) = \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} = \frac{p^* F_{кр}}{p F} = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)}.$$

В последующих двух столбцах приведены значения функций $f(\lambda)$ и $r(\lambda)$, которые так же как и функция $z(\lambda)$, приведенная в специальной таблице, характеризуют поток импульса.

Функция $z(\lambda)$, входящая в уравнение количества движения, а следовательно, и в уравнение, определяющее силу тяги реактивных двигателей, есть отношение полного импульса в произвольном сечении канала к его значению в критическом сечении:

$$z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda} = 2 \frac{m\omega + pF}{m a_{кр} + p_{кр} F_{кр}}.$$

Функция $f(\lambda)$ называется приведенной плотностью потока импульса и определяется отношением плотности потока импульса в произвольном сечении энергетически изолированного потока к его значению в заторможенном потоке, т. е. к полному давлению потока p^* .

Таким образом,

$$f(\lambda) = \frac{p + q\omega^2}{p^*} = (1 + \lambda^2) \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Из уравнения видно, что эта функция может быть определена через $q(\lambda)$ и $z(\lambda)$:

$$f(\lambda) = (1 + \lambda^2) q(\lambda) = \lambda z(\lambda) q(\lambda).$$

Функция $r(\lambda)$ есть отношение статического импульса pF к полному импульсу в данном сечении:

$$r(\lambda) = \frac{pF}{m\omega + pF} = \frac{p(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}{1 + \lambda^2}.$$

Функция $r(\lambda)$ может быть определена и через $T(\lambda)$ и $z(\lambda)$:

$$r(\lambda) = \frac{T(\lambda)}{1 + \lambda^2} = \frac{T(\lambda)}{\lambda z(\lambda)}.$$

Таблица для $k=1,40$

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$\rho(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
0,00	1	1	1	0	0	1	1	0
0,01	1	0,9999	0,9999	0,0158	0,0158	1	0,9999	0,0091
0,02	0,9999	0,9998	0,9998	0,0315	0,0316	1,0002	0,9996	0,0183
0,03	0,9999	0,9995	0,9997	0,0473	0,0473	1,0006	0,9989	0,0274
0,04	0,9997	0,9990	0,9993	0,0631	0,0631	1,0009	0,9981	0,0366
0,05	0,9996	0,9986	0,9990	0,0788	0,0789	1,0015	0,9971	0,0457
0,06	0,9994	0,9979	0,9985	0,0945	0,0947	1,0021	0,9958	0,0548
0,07	0,9992	0,9971	0,9970	0,1102	0,1105	1,0028	0,9943	0,0639
0,08	0,9989	0,9963	0,9974	0,1259	0,1263	1,0038	0,9925	0,0731
0,09	0,9987	0,9953	0,9967	0,1415	0,1422	1,0047	0,9906	0,0822
0,10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,1580	1,0058	0,9885	0,0914
0,11	0,9980	0,9929	0,9949	0,1726	0,1739	1,0070	0,9860	0,1005
0,12	0,9976	0,9916	0,9940	0,1882	0,1897	1,0083	0,9834	0,1097
0,13	0,9972	0,9901	0,9929	0,2036	0,2056	1,0100	0,9806	0,1190
0,14	0,9967	0,9886	0,9918	0,2190	0,2216	1,0113	0,9776	0,1280
0,15	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	0,2375	1,0129	0,9744	0,1372
0,16	0,9957	0,9851	0,9893	0,2497	0,2535	1,0147	0,9709	0,1460
0,17	0,9952	0,9832	0,9880	0,2649	0,2695	1,0165	0,9673	0,1560
0,18	0,9946	0,9812	0,9866	0,2801	0,2855	1,0185	0,9634	0,1650
0,19	0,9940	0,9791	0,9850	0,2952	0,3015	1,0206	0,9594	0,1740
0,20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,3176	1,0227	0,9551	0,1830
0,21	0,9927	0,9745	0,9817	0,3253	0,3337	1,0250	0,9507	0,1920
0,22	0,9919	0,9720	0,9799	0,3401	0,3499	1,0274	0,9461	0,2020
0,23	0,9912	0,9695	0,9781	0,3549	0,3660	1,0298	0,9414	0,2109
0,24	0,9904	0,9668	0,9762	0,3696	0,3823	1,0315	0,9373	0,2202
0,25	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,3985	1,0350	0,9314	0,2290
0,26	0,9887	0,9611	0,9721	0,3987	0,4148	1,0378	0,9261	0,2387
0,27	0,9879	0,9581	0,9699	0,4131	0,4311	1,0406	0,9207	0,2480
0,28	0,9869	0,9550	0,9677	0,4274	0,4475	1,0435	0,9152	0,2573
0,29	0,9860	0,9518	0,9655	0,4416	0,4640	1,0465	0,9095	0,2670
0,30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,4804	0,0496	0,9037	0,2760
0,31	0,9840	0,9451	0,9605	0,4697	0,4970	1,0528	0,8977	0,2850
0,32	0,9829	0,9415	0,9579	0,4835	0,5135	1,0559	0,8917	0,2947
0,33	0,9819	0,9379	0,9552	0,4972	0,5302	1,0593	0,8854	0,3040
0,34	0,9807	0,9342	0,9525	0,5109	0,5469	1,0626	0,8791	0,3134
0,35	0,9796	0,9303	0,9497	0,5243	0,5636	1,0661	0,8727	0,3228
0,36	0,9784	0,9265	0,9469	0,5377	0,5804	1,0696	0,8662	0,3322
0,37	0,9772	0,9224	0,9439	0,5509	0,5973	1,0732	0,8595	0,3417
0,38	0,9759	0,9183	0,9409	0,5640	0,6142	1,0778	0,8528	0,3511
0,39	0,9747	0,9141	0,9378	0,5769	0,6312	1,0805	0,8460	0,3606
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,6482	1,0842	0,8391	0,3701
0,41	0,9720	0,9053	0,9314	0,6024	0,6654	1,0880	0,8321	0,3796
0,42	0,9707	0,9008	0,9281	0,6149	0,6826	1,0981	0,8251	0,3892
0,43	0,9692	0,8962	0,9247	0,6272	0,6998	1,0957	0,8179	0,3987
0,44	0,9677	0,8915	0,9212	0,6394	0,7172	1,0956	0,8108	0,4083
0,45	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,7346	1,1036	0,8035	0,4179
0,46	0,9647	0,8819	0,9142	0,6633	0,7521	1,1076	0,7963	0,4275

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$q(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
0,47	0,9632	0,8770	0,9105	0,6750	0,7697	1,1116	0,7889	0,4372
0,48	0,9616	0,8719	0,9067	0,6885	0,7874	1,1156	0,7816	0,4468
0,49	0,9600	0,8668	0,9029	0,6970	0,8052	1,1197	0,7741	0,4565
0,50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,8230	1,1239	0,7666	0,4663
0,51	0,9567	0,8563	0,8951	0,7201	0,8409	1,1279	0,7592	0,4760
0,52	0,9549	0,8509	0,8911	0,7309	0,8590	1,1320	0,7517	0,4858
0,53	0,9532	0,8455	0,8871	0,7416	0,8771	1,1362	0,7442	0,4956
0,54	0,9514	0,8400	0,8829	0,7520	0,8953	1,1403	0,7366	0,5054
0,55	0,9496	0,8344	0,8787	0,7623	0,9136	1,1445	0,7290	0,5152
0,56	0,9477	0,8287	0,8744	0,7724	0,9321	1,1486	0,7215	0,5252
0,57	0,9459	0,8230	0,8701	0,7823	0,9506	1,1528	0,7139	0,5350
0,58	0,9439	0,8172	0,8657	0,7920	0,9692	1,1569	0,7064	0,5450
0,59	0,9420	0,8112	0,8612	0,8015	0,9880	1,1610	0,6987	0,5549
0,60	0,9400	0,8053	0,8567	0,8109	1,0069	1,1651	0,6912	0,5649
0,61	0,9380	0,7992	0,8521	0,8198	1,0258	1,1691	0,6836	0,5750
0,62	0,9359	0,7932	0,8475	0,8288	1,0449	1,1733	0,6760	0,5850
0,63	0,9339	0,7870	0,8428	0,8375	1,0641	1,1772	0,6685	0,5951
0,64	0,9317	0,7808	0,8308	0,8459	1,0842	1,1812	0,6611	0,6053
0,65	0,9296	0,7745	0,8332	0,8543	1,1030	1,1852	0,6535	0,6154
0,66	0,9274	0,7681	0,8283	0,8623	1,1226	1,1891	0,6460	0,6256
0,67	0,9252	0,7617	0,8233	0,8701	1,1423	1,1929	0,6386	0,6359
0,68	0,9229	0,7553	0,8183	0,8778	1,1622	1,1967	0,6311	0,6461
0,69	0,9207	0,7488	0,8133	0,8852	1,1822	1,2005	0,6237	0,6565
0,70	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	1,2024	1,2042	0,6163	0,6668
0,71	0,9160	0,7356	0,8030	0,8993	1,2227	1,2076	0,6090	0,6772
0,72	0,9136	0,7289	0,7978	0,9061	1,2431	1,2114	0,6017	0,6876
0,73	0,9112	0,7221	0,7925	0,9126	1,2637	1,2148	0,5944	0,6981
0,74	0,9087	0,7154	0,7872	0,9189	1,2845	1,2183	0,5872	0,7086
0,75	0,9063	0,7086	0,7819	0,9250	1,3054	1,2216	0,5800	0,7192
0,76	0,9037	0,7017	0,7764	0,9308	1,3265	1,2249	0,5729	0,7298
0,77	0,9012	0,6948	0,7710	0,9364	1,3478	1,2280	0,5658	0,7404
0,78	0,8986	0,6878	0,7655	0,9418	1,3692	1,2311	0,5587	0,7511
0,79	0,8960	0,6809	0,7599	0,9469	1,3908	1,2341	0,5517	0,7619
0,80	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	1,4126	1,2370	0,5447	0,7727
0,81	0,8907	0,6668	0,7486	0,9565	1,4346	1,2398	0,5378	0,7835
0,82	0,8879	0,6597	0,7429	0,9610	1,4567	1,2425	0,5309	0,7944
0,83	0,8852	0,6526	0,7372	0,9652	1,4790	1,2451	0,5241	0,8053
0,84	0,8824	0,6454	0,7314	0,9691	1,5016	1,2475	0,5174	0,8163
0,85	0,8796	0,6382	0,7256	0,9729	1,5243	1,2498	0,5107	0,8274
0,86	0,8767	0,6310	0,7197	0,9764	1,5473	1,2520	0,5040	0,8383
0,87	0,8739	0,6238	0,7138	0,9796	1,5704	1,2541	0,4974	0,8496
0,88	0,8709	0,6165	0,7079	0,9826	1,5938	1,2560	0,4908	0,8608
0,89	0,8680	0,6092	0,7019	0,9854	1,6174	1,2579	0,4843	0,8721
0,90	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	1,6412	1,2595	0,4779	0,8833
0,91	0,8620	0,5946	0,6898	0,9902	1,6652	1,2611	0,4715	0,8947
0,92	0,8589	0,5873	0,6838	0,9923	1,6895	1,2625	0,4652	0,9062
0,93	0,8559	0,5800	0,6776	0,9941	1,7140	1,2637	0,4589	0,9177
0,94	0,8527	0,5726	0,6715	0,9957	1,7388	1,2648	0,4527	0,9292

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$q(\lambda)$	$r(\lambda)$	$u(\lambda)$	$f(\lambda)$	$g(\lambda)$	M
0,95	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	1,7638	1,2658	0,4446	0,9409
0,96	0,8464	0,5679	0,6591	0,9981	1,7891	1,2666	0,4405	0,9526
0,97	0,8432	0,5506	0,6528	0,9989	1,8146	1,2671	0,4344	0,9644
0,98	0,8399	0,5431	0,6466	0,9995	1,8404	1,2675	0,4285	0,9761
0,99	0,8367	0,5357	0,6403	0,9999	1,8665	1,2678	0,4225	0,9880
1,00	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,8929	1,2679	0,4167	1,0000
1,01	0,8300	0,5209	0,6276	0,9999	1,9195	1,2678	0,4109	1,0120
1,02	0,8266	0,5135	0,6212	0,9995	1,9464	1,2675	0,4051	1,0241
1,03	0,8232	0,5061	0,6148	0,9989	1,9737	1,2671	0,3994	1,0363
1,04	0,8197	0,4987	0,6084	0,9980	2,0013	1,2664	0,3938	1,0486
1,05	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	2,0291	1,2655	0,3882	1,0609
1,06	0,8127	0,4840	0,5955	0,9957	2,0573	1,2645	0,3827	1,0733
1,07	0,8092	0,4766	0,5890	0,9941	2,0858	1,2633	0,3773	1,0858
1,08	0,8056	0,4693	0,5826	0,9924	2,1147	1,2620	0,3719	1,0985
1,09	0,8020	0,4619	0,5760	0,9903	2,1439	1,2602	0,3665	1,1111
1,10	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	2,1734	1,2584	0,3613	1,1239
1,11	0,7947	0,4473	0,5629	0,9856	2,2034	1,2564	0,3560	1,1367
1,12	0,7909	0,4400	0,5564	0,9829	2,2337	1,2543	0,3508	1,1496
1,13	0,7872	0,4328	0,5498	0,9800	2,2643	1,2519	0,3457	1,1627
1,14	0,7834	0,4255	0,5432	0,9768	2,2954	1,2491	0,3407	1,1758
1,15	0,7796	0,4184	0,5366	0,9735	2,3269	1,2463	0,3357	1,1890
1,16	0,7756	0,4111	0,5300	0,9698	2,3588	1,2432	0,3307	1,2023
1,17	0,7719	0,4040	0,5224	0,9659	2,3911	1,2398	0,3258	1,2157
1,18	0,7679	0,3969	0,5168	0,9620	2,4238	1,2364	0,3210	1,2292
1,19	0,7640	0,3898	0,5102	0,9577	2,4570	1,2326	0,3162	1,2428
1,20	0,7600	0,3827	0,5035	0,9531	2,4906	1,2286	0,3115	1,2566
1,21	0,7560	0,3757	0,4969	0,9484	2,5247	1,2244	0,3068	1,2703
1,22	0,7519	0,3687	0,4903	0,9435	2,5593	1,2200	0,3022	1,2843
1,23	0,7478	0,3617	0,4837	0,9384	2,5944	1,2154	0,2976	1,2974
1,24	0,7437	0,3548	0,4770	0,9331	2,6300	1,2105	0,2931	1,3126
1,25	0,7396	0,3479	0,4704	0,9275	2,6660	1,2054	0,2886	1,3268
1,26	0,7354	0,3411	0,4638	0,9217	2,7026	1,2000	0,2842	1,3413
1,27	0,7312	0,3343	0,4572	0,9159	2,7398	1,1946	0,2798	1,3558
1,28	0,7269	0,3275	0,4505	0,9096	2,7775	1,1887	0,2755	1,3705
1,29	0,7227	0,3208	0,4439	0,9033	2,8158	1,1826	0,2713	1,3853
1,30	0,7183	0,3142	0,4374	0,8969	2,8547	1,1765	0,2670	1,4002
1,31	0,7140	0,3075	0,4307	0,8901	2,8941	1,1699	0,2629	1,4153
1,32	0,7096	0,3010	0,4241	0,8831	2,9343	1,1632	0,2587	1,4305
1,33	0,7052	0,2945	0,4176	0,8761	2,9750	1,1562	0,2547	1,4458
1,34	0,7007	0,2880	0,4110	0,8688	3,0164	1,1490	0,2507	1,4613
1,35	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	3,0586	1,1417	0,2467	1,4769
1,36	0,6917	0,2753	0,3980	0,8538	3,1013	1,1341	0,2427	1,4927
1,37	0,6872	0,2690	0,3914	0,8459	3,1448	1,1261	0,2389	1,5087
1,38	0,6826	0,2628	0,3850	0,8380	3,1889	1,1180	0,2350	1,5248
1,39	0,6780	0,2566	0,3785	0,8299	3,2340	1,1098	0,2312	1,5410
1,40	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	3,2798	1,1012	0,2275	1,5575
1,41	0,6687	0,2445	0,3656	0,8131	3,3263	1,0924	0,2238	1,5741
1,42	0,6639	0,2385	0,3592	0,8046	3,3737	1,0835	0,2201	1,5909

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$\rho(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
1,43	0,6592	0,2326	0,3528	0,7958	3,4219	1,0742	0,2165	1,6078
1,44	0,6544	0,2267	0,3464	0,7869	3,4710	1,0648	0,2129	1,6250
1,45	0,6496	0,2209	0,3401	0,7778	3,5211	1,0551	0,2094	1,6423
1,46	0,6447	0,2152	0,3338	0,7687	3,5720	1,0453	0,2059	1,6598
1,47	0,6398	0,2095	0,3275	0,7593	3,6240	1,0351	0,2024	1,6776
1,48	0,6349	0,2040	0,3212	0,7499	3,6778	1,0249	0,1990	1,6956
1,49	0,6300	0,1985	0,3150	0,7404	3,7308	1,0144	0,1956	1,7137
1,50	0,6250	0,1930	0,3088	0,7307	3,7858	1,0037	0,1923	1,7321
1,51	0,6200	0,1876	0,3027	0,7209	3,8418	0,9927	0,1890	1,7506
1,52	0,6149	0,1824	0,2965	0,7110	3,8990	0,9816	0,1858	1,7694
1,53	0,6099	0,1771	0,2904	0,7009	3,9574	0,9703	0,1825	1,7885
1,54	0,6048	0,1720	0,2844	0,6909	4,0172	0,9590	0,1794	1,8078
1,55	0,5996	0,1669	0,2784	0,6807	4,0778	0,9472	0,1762	1,8273
1,56	0,5944	0,1619	0,2724	0,6703	4,1398	0,9353	0,1731	1,8471
1,57	0,5892	0,1570	0,2665	0,6599	4,2034	0,9233	0,1700	1,8672
1,58	0,5839	0,1522	0,2606	0,6494	4,2860	0,9111	0,1670	1,8875
1,59	0,5786	0,1474	0,2547	0,6389	4,3345	0,8988	0,1640	1,9081
1,60	0,5733	0,1427	0,2489	0,6282	4,4020	0,8861	0,1611	1,9290
1,61	0,5680	0,1381	0,2431	0,6175	4,4713	0,8734	0,1581	1,9501
1,62	0,5625	0,1336	0,2374	0,6067	4,5422	0,8604	0,1552	1,9716
1,63	0,5572	0,1291	0,2317	0,5958	4,6144	0,8474	0,1524	1,9934
1,64	0,5517	0,1248	0,2261	0,5850	4,6887	0,8343	0,1495	2,0155
1,65	0,5463	0,1205	0,2205	0,5740	4,7647	0,8210	0,1467	2,0380
1,66	0,5407	0,1163	0,2150	0,5630	4,8424	0,8075	0,1440	2,0607
1,67	0,5352	0,1121	0,2095	0,5520	4,9221	0,7939	0,1413	2,0839
1,68	0,5296	0,1081	0,2041	0,5409	5,0037	0,7802	0,1386	2,1073
1,69	0,5240	0,1041	0,1988	0,5298	5,0877	0,7664	0,1359	2,1313
1,70	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	5,1735	0,7524	0,1333	2,1555
1,71	0,5126	0,0965	0,1881	0,5075	5,2625	0,7383	0,1306	2,1802
1,72	0,5069	0,0928	0,1830	0,4965	5,3520	0,7243	0,1281	2,2053
1,73	0,5012	0,0891	0,1778	0,4852	5,4449	0,7100	0,1255	2,2308
1,74	0,4954	0,0856	0,1727	0,4741	5,5403	0,6957	0,1230	2,2567
1,75	0,4896	0,0821	0,1677	0,4630	5,6383	0,6813	0,1205	2,2831
1,76	0,4837	0,0787	0,1628	0,4520	5,7390	0,6669	0,1181	2,3100
1,77	0,4779	0,0754	0,1578	0,4407	5,8427	0,6523	0,1156	2,3374
1,78	0,4719	0,0722	0,1530	0,4296	5,9495	0,6378	0,1132	2,3653
1,79	0,4660	0,0691	0,1482	0,4185	6,0593	0,6232	0,1108	2,3937
1,80	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	6,1723	0,6085	0,1085	2,4227
1,81	0,4540	0,0630	0,1389	0,3965	6,2893	0,5938	0,1062	2,4523
1,82	0,4479	0,0602	0,1343	0,3855	6,4091	0,5792	0,1039	2,4824
1,83	0,4418	0,0573	0,1298	0,3746	6,5335	0,5644	0,1016	2,5132
1,84	0,4357	0,0546	0,1253	0,3638	6,6607	0,5497	0,0994	2,5449
1,85	0,4296	0,0520	0,1210	0,3530	6,7934	0,5349	0,0971	2,5766
1,86	0,4234	0,0494	0,1167	0,3423	6,9298	0,5202	0,0949	2,6094
1,87	0,4171	0,0469	0,1124	0,3316	7,0707	0,5055	0,0928	2,6429
1,88	0,4109	0,0445	0,1083	0,3211	7,2162	0,4909	0,0906	2,6772
1,89	0,4047	0,0422	0,1042	0,3105	7,3673	0,4762	0,0885	2,7123
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	7,5243	0,4617	0,0864	2,7481

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$\rho(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
1,91	0,3920	0,0377	0,0962	0,2898	7,6858	0,4472	0,0843	2,7840
1,92	0,3856	0,0356	0,0923	0,2797	7,8540	0,4327	0,0823	2,8225
1,93	0,3792	0,0336	0,0885	0,2695	8,0289	0,4183	0,0803	2,8612
1,94	0,3727	0,0316	0,0848	0,2596	8,2098	0,4041	0,0782	2,9007
1,95	0,3662	0,0297	0,0812	0,2497	8,3985	0,3899	0,0773	2,9414
1,96	0,3597	0,0279	0,0776	0,2400	8,5943	0,3758	0,0743	2,9831
1,97	0,3532	0,0262	0,0741	0,2304	8,7984	0,3618	0,0724	3,0301
1,98	0,3466	0,0245	0,0707	0,2209	9,0112	0,3480	0,0704	3,0701
1,99	0,3400	0,0229	0,0674	0,2116	9,2329	0,3343	0,0685	3,1155
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	9,4641	0,3203	0,0668	3,1622
2,01	0,3267	0,0199	0,0610	0,1934	9,7063	0,3074	0,0648	3,2104
2,02	0,3199	0,0185	0,0579	0,1845	9,9606	0,2942	0,0630	3,2603
2,03	0,3122	0,0172	0,0549	0,1758	10,224	0,2811	0,0612	3,3113
2,04	0,3064	0,0159	0,0520	0,1672	10,502	0,2683	0,0594	3,3642
2,05	0,2996	0,0147	0,0491	0,1588	10,794	0,2556	0,0576	3,4190
2,06	0,2927	0,0136	0,0464	0,1507	11,102	0,2431	0,0558	3,4759
2,07	0,2859	0,0125	0,0437	0,1427	11,422	0,2305	0,0541	3,5343
2,08	0,2789	0,0115	0,0411	0,1348	11,762	0,2189	0,0524	3,5951
2,09	0,2720	0,0105	0,0386	0,1272	12,121	0,2070	0,0507	3,6583
2,10	0,2650	0,0095	0,0361	0,1198	12,500	0,1956	0,0489	3,7240
2,11	0,2580	0,0087	0,0338	0,1125	12,901	0,1843	0,0473	3,7922
2,12	0,2509	0,0079	0,0315	0,1055	13,326	0,1733	0,0457	3,8633
2,13	0,2439	0,0072	0,0293	0,0986	13,778	0,1626	0,0440	3,9376
2,14	0,2367	0,0065	0,0273	0,0921	14,259	0,1522	0,0424	4,0150
2,15	0,2296	0,0058	0,0252	0,0857	14,772	0,1420	0,0408	4,0961
2,16	0,2224	0,0052	0,0233	0,0795	15,319	0,1322	0,0393	4,1791
2,17	0,2152	0,0046	0,0215	0,0735	15,906	0,1226	0,0377	4,2702
2,18	0,2079	0,0041	0,0197	0,0678	16,537	0,1134	0,0361	4,3642
2,19	0,2006	0,0036	0,0180	0,0623	17,218	0,1045	0,0346	4,4633
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	17,949	0,0960	0,0331	4,5674
2,21	0,1860	0,0028	0,0149	0,0520	18,742	0,0878	0,0316	4,6778
2,22	0,1786	0,0024	0,0135	0,0472	19,607	0,0799	0,0301	4,7954
2,23	0,1712	0,0021	0,0121	0,0427	20,548	0,0724	0,0287	4,9201
2,24	0,1637	0,0018	0,0116	0,0408	21,570	0,0695	0,0265	5,0533
2,25	0,1563	0,0015	0,0097	0,0343	22,712	0,0585	0,0258	5,3494
2,30	0,1183	0,0006	0,0048	0,0175	30,658	0,0302	0,0189	6,1033
2,40	0,0400	$0,128 \cdot 10^{-4}$	0,0003	0,0012	94,703	0,0022	0,0059	$10,957 \cdot 10^{-4}$
2,43	0,0158	$0,499 \cdot 10^{-6}$	$0,315 \cdot 10^{-4}$	0,0001	242,16	0,0002	0,0023	17,631

ТАБЛИЦА ДЛЯ $k=1,33$

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$\rho(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
0,00	1	1	1	0	0	1	1	0
0,01	1	0,9999	0,9999	0,0159	0,0159	1	0,9999	0,0092
0,02	0,9999	0,9998	0,9999	0,0318	0,0318	1,00 3	0,9995	0,0185
0,03	0,9999	0,9995	0,9997	0,0476	0,0477	1,0006	0,9990	0,0278
0,04	0,9998	0,9991	0,9993	0,0635	0,0636	1,0009	0,9982	0,0371
0,05	0,9997	0,9986	0,9990	0,0793	0,0750	1,0015	0,9972	0,0463
0,06	0,9995	0,9980	0,9985	0,0952	0,0954	1,0021	0,9959	0,0556
0,07	0,9993	0,9972	0,9979	0,1110	0,1113	1,0028	0,9944	0,0649
0,08	0,9991	0,9964	0,9973	0,1267	0,1272	1,0037	0,9928	0,0742
0,09	0,9989	0,9954	0,9965	0,1425	0,1431	1,0047	0,9908	0,0834
0,10	0,9986	0,9944	0,9958	0,1582	0,1591	1,0057	0,9887	0,0927
0,11	0,9983	0,9932	0,9949	0,1738	0,1750	1,0069	0,9864	0,1020
0,12	0,9980	0,9918	0,9938	0,1894	0,1910	1,0081	0,9838	0,1113
0,13	0,9976	0,9904	0,9928	0,2052	0,2072	1,0096	0,9810	0,1206
0,14	0,9972	0,9889	0,9917	0,2205	0,2222	1,0111	0,9781	0,1299
0,15	0,9968	0,9872	0,9903	0,2360	0,2390	1,0126	0,9749	0,1392
0,16	0,9964	0,9854	0,9890	0,2514	0,2551	1,0143	0,9715	0,1485
0,17	0,9959	0,9836	0,9877	0,2667	0,2712	1,0162	0,9679	0,1578
0,18	0,9954	0,9816	0,9862	0,2820	0,2873	1,0181	0,9642	0,1672
0,19	0,9949	0,9796	0,9846	0,2972	0,3034	1,0202	0,9602	0,1765
0,20	0,9943	0,9774	0,9830	0,3123	0,3195	1,0223	0,9561	0,1858
0,21	0,9938	0,9751	0,9812	0,3273	0,3357	1,0245	0,9518	0,1952
0,22	0,9932	0,9728	0,9795	0,3423	0,3519	1,0269	0,9473	0,2045
0,23	0,9925	0,9702	0,9775	0,3571	0,3681	1,0292	0,9427	0,2139
0,24	0,9918	0,9675	0,9755	0,3719	0,3844	1,0317	0,9378	0,2233
0,25	0,9912	0,9648	0,9734	0,3866	0,4007	1,0343	0,9329	0,2327
0,26	0,9904	0,9619	0,9712	0,4011	0,4170	1,0369	0,9277	0,2426
0,27	0,9897	0,9590	0,9690	0,4156	0,4334	1,0396	0,9224	0,2515
0,28	0,9889	0,9560	0,9667	0,4300	0,4498	1,0425	0,9170	0,2609
0,29	0,9881	0,9529	0,9644	0,4443	0,4662	1,0455	0,9114	0,2703
0,30	0,9873	0,9496	0,9618	0,4584	0,4827	1,0485	0,9057	0,2797
0,31	0,9864	0,9463	0,9594	0,4724	0,4992	1,0516	0,8999	0,2892
0,32	0,9855	0,9428	0,9567	0,4863	0,5158	1,0547	0,8940	0,2986
0,33	0,9846	0,9393	0,9540	0,5001	0,5324	1,0579	0,8879	0,3081
0,34	0,9836	0,9356	0,9512	0,5137	0,5491	1,0612	0,8817	0,3176
0,35	0,9827	0,9319	0,9484	0,5273	0,5658	1,0645	0,8754	0,3271
0,36	0,9817	0,9281	0,9455	0,5407	0,5826	1,0680	0,8690	0,3366
0,37	0,9806	0,9241	0,9424	0,5539	0,5994	1,0714	0,8625	0,3462
0,38	0,9796	0,9201	0,9393	0,5670	0,6162	1,0780	0,8560	0,3557
0,39	0,9785	0,9159	0,9361	0,5799	0,6332	1,0785	0,8493	0,3653
0,40	0,9773	0,9118	0,9329	0,5928	0,6501	1,0822	0,8425	0,3749
0,41	0,9762	0,9075	0,9296	0,6055	0,6672	1,0859	0,8357	0,3845
0,42	0,9750	0,9030	0,9262	0,6179	0,6843	1,0896	0,8288	0,3941
0,43	0,9738	0,8985	0,9227	0,6303	0,7014	1,0933	0,8218	0,4037
0,44	0,9726	0,8940	0,9192	0,6425	0,7187	1,0972	0,8148	0,4134
0,45	0,9713	0,8893	0,9156	0,6545	0,7359	1,1010	0,8078	0,4230
0,46	0,9700	0,8850	0,9123	0,6666	0,7533	1,1049	0,8006	0,4325
0,47	0,9687	0,8797	0,9081	0,6780	0,7707	1,1088	0,7934	0,4424
0,48	0,9674	0,8749	0,9044	0,6806	0,7882	1,1128	0,7862	0,4522

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$\rho(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
0,49	0,9660	0,8699	0,9005	0,7009	0,8058	1,1167	0,7790	0,4619
0,50	0,9646	0,8648	0,8966	0,7121	0,8234	1,1207	0,7717	0,4717
0,51	0,9632	0,8596	0,8929	0,7230	0,8411	1,1246	0,7644	0,4815
0,52	0,9610	0,8518	0,8864	0,7392	0,8678	1,1306	0,7533	0,4913
0,53	0,9602	0,8491	0,8843	0,7445	0,8708	1,1326	0,7496	0,5011
0,54	0,9587	0,8436	0,8799	0,7548	0,8947	1,1365	0,7423	0,5110
0,55	0,9572	0,8382	0,8757	0,7651	0,9128	1,1407	0,7349	0,5208
0,56	0,9556	0,8327	0,8714	0,7752	0,9309	1,1447	0,7275	0,5308
0,57	0,9540	0,8271	0,8670	0,7850	0,9491	1,1487	0,7200	0,5407
0,58	0,9524	0,8214	0,8625	0,7946	0,9674	1,1526	0,7126	0,5506
0,59	0,9507	0,8156	0,8579	0,8040	0,9858	1,1565	0,7052	0,5606
0,60	0,9490	0,8098	0,8533	0,8133	1,0043	1,1605	0,6978	0,5706
0,61	0,9473	0,8040	0,8487	0,8224	1,0229	1,1645	0,6904	0,5807
0,62	0,9456	0,7980	0,8439	0,8312	1,0416	1,1684	0,6830	0,5907
0,63	0,9438	0,7921	0,8393	0,8399	1,0604	1,1724	0,6756	0,6008
0,64	0,9420	0,7860	0,8344	0,8483	1,0792	1,1760	0,6683	0,6109
0,65	0,9402	0,7798	0,8294	0,8564	1,0982	1,1799	0,6609	0,6211
0,66	0,9383	0,7737	0,8246	0,8645	1,1173	1,1838	0,6536	0,6313
0,67	0,9364	0,7674	0,8195	0,8722	1,1366	1,1874	0,6463	0,6415
0,68	0,9345	0,7612	0,8145	0,8798	1,1559	1,1911	0,6390	0,6517
0,69	0,9326	0,7548	0,8094	0,8871	1,1753	1,1947	0,6318	0,6620
0,70	0,9306	0,7483	0,8041	0,8941	1,1949	1,1981	0,6246	0,6723
0,71	0,9286	0,7419	0,7989	0,9011	1,2146	1,2017	0,6174	0,6826
0,72	0,9266	0,7354	0,7937	0,9077	1,2343	1,2051	0,6102	0,6930
0,73	0,9245	0,7289	0,7884	0,9143	1,2543	1,2086	0,6031	0,7044
0,74	0,9224	0,7223	0,7830	0,9204	1,2743	1,2118	0,5961	0,7139
0,75	0,9203	0,7157	0,7777	0,9265	1,2945	1,2151	0,5890	0,7243
0,76	0,9182	0,7090	0,7722	0,9322	1,3148	1,2182	0,5820	0,7348
0,77	0,9160	0,7023	0,7666	0,9377	1,3353	1,2212	0,5751	0,7454
0,78	0,9138	0,6955	0,7611	0,9430	1,3559	1,2241	0,5682	0,7561
0,79	0,9116	0,6887	0,7555	0,9481	1,3766	1,2270	0,5613	0,7666
0,80	0,9094	0,6819	0,7499	0,9529	1,3975	1,2298	0,5545	0,7772
0,81	0,9071	0,6750	0,7442	0,9575	1,4185	1,2324	0,5477	0,7880
0,82	0,9048	0,6681	0,7384	0,9618	1,4397	1,2349	0,5410	0,7987
0,83	0,9024	0,6612	0,7326	0,9660	1,4610	1,2374	0,5343	0,8095
0,84	0,9001	0,6542	0,7268	0,9698	1,4825	1,2397	0,5277	0,8203
0,85	0,8977	0,6472	0,7210	0,9735	1,5042	1,2419	0,5211	0,8312
0,86	0,8953	0,6402	0,7151	0,9769	1,5260	1,2440	0,5146	0,8421
0,87	0,8928	0,6332	0,7092	0,9802	1,5479	1,2461	0,5081	0,8531
0,88	0,8903	0,6261	0,7032	0,9830	1,5701	1,2478	0,5018	0,8641
0,89	0,8878	0,6191	0,6973	0,9859	1,5924	1,2497	0,4954	0,8751
0,90	0,8853	0,6120	0,6913	0,9883	1,6149	1,2512	0,4891	0,8862
0,91	0,8827	0,6047	0,6852	0,9904	1,6376	1,2525	0,4829	0,8974
0,92	0,8801	0,5977	0,6791	0,9925	1,6605	1,2539	0,4767	0,9086
0,93	0,8775	0,5906	0,6730	0,9943	1,6835	1,2552	0,4705	0,9198
0,94	0,8749	0,5834	0,6669	0,9957	1,7068	1,2561	0,4645	0,9311
0,95	0,8722	0,5763	0,6608	0,9972	1,7302	1,2572	0,4584	0,9424
0,96	0,8695	0,5691	0,6545	0,9981	1,7539	1,2577	0,4525	0,9538
0,97	0,8667	0,5619	0,6483	0,9989	1,7778	1,2583	0,4466	0,9653

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$\rho(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
0,98	0,8640	0,5547	0,6420	0,9995	1,8018	1,2586	0,4407	0,9768
0,99	0,8612	0,5476	0,6359	0,9999	1,8261	1,2591	0,4349	0,9884
1,00	0,8584	0,5404	0,6296	1,0000	1,8506	1,2591	0,4292	1,0000
1,01	0,8555	0,5332	0,6233	1,0000	1,8754	1,2590	0,4235	1,0117
1,02	0,8527	0,5260	0,6169	0,9995	1,9003	1,2587	0,4149	1,0234
1,03	0,8497	0,5188	0,6105	0,9989	1,9255	1,2583	0,4123	1,0352
1,04	0,8468	0,5116	0,6042	0,9981	1,9509	1,2576	0,4068	1,0471
1,05	0,8439	0,5045	0,5979	0,9972	1,9766	1,2570	0,4014	1,0590
1,06	0,8409	0,4973	0,5914	0,9958	2,0025	1,2559	0,3960	1,0710
1,07	0,8379	0,4902	0,5850	0,9944	2,0286	1,2548	0,3906	1,0830
1,08	0,8348	0,4830	0,5780	0,9926	2,0550	1,2534	0,3854	1,0951
1,09	0,8317	0,4759	0,5722	0,9907	2,0818	1,2520	0,3801	1,1073
1,10	0,8286	0,4688	0,5658	0,9886	2,1087	1,2503	0,3750	1,1196
1,11	0,8255	0,4617	0,5593	0,9862	2,1360	1,2484	0,3698	1,1319
1,12	0,8223	0,4546	0,5528	0,9835	2,1635	1,2463	0,3648	1,1443
1,13	0,8192	0,4475	0,5463	0,9806	2,1913	1,2439	0,3598	1,1567
1,14	0,8159	0,4405	0,5399	0,9777	2,2194	1,2415	0,3548	1,1693
1,15	0,8127	0,4335	0,5334	0,9744	2,2478	1,2388	0,3499	1,1819
1,16	0,8094	0,4265	0,5269	0,9709	2,2765	1,2359	0,3451	1,1946
1,17	0,8061	0,4196	0,5205	0,9674	2,3055	1,2330	0,3403	1,2073
1,18	0,8028	0,4126	0,5140	0,9634	2,3349	1,2296	0,3356	1,2202
1,19	0,7994	0,4057	0,5075	0,9593	2,3646	1,2261	0,3309	1,2331
1,20	0,7961	0,3986	0,5007	0,9545	2,3940	1,2218	0,3263	1,2461
1,21	0,7926	0,3920	0,4946	0,9506	2,4249	1,2186	0,3217	1,2592
1,22	0,7892	0,3852	0,4881	0,9459	2,4556	1,2146	0,3172	1,2723
1,23	0,7857	0,3784	0,4816	0,9410	2,4867	1,2102	0,3127	1,2856
1,24	0,7822	0,3716	0,4751	0,9357	2,5181	1,2055	0,3083	1,2990
1,25	0,7787	0,3649	0,4686	0,9305	2,5500	1,2008	0,3039	1,3124
1,26	0,7752	0,3583	0,4622	0,9252	2,5821	1,1961	0,2996	1,3259
1,27	0,7716	0,3516	0,4557	0,9193	2,6147	1,1907	0,2953	1,3396
1,28	0,7680	0,3450	0,4493	0,9135	2,6477	1,1853	0,2911	1,3533
1,29	0,7643	0,3385	0,4429	0,9075	2,6811	1,1799	0,2869	1,3671
1,30	0,7606	0,3320	0,4365	0,9014	2,7149	1,1741	0,2828	1,3810
1,31	0,7570	0,3255	0,4300	0,8949	2,7492	1,1680	0,2787	1,3950
1,32	0,7532	0,3191	0,4236	0,8884	2,7838	1,1618	0,2747	1,4091
1,33	0,7495	0,3128	0,4173	0,8816	2,8190	1,1555	0,2707	1,4234
1,34	0,7457	0,3065	0,4110	0,8749	2,8546	1,1491	0,2667	1,4377
1,35	0,7419	0,3002	0,4046	0,8677	2,8905	1,1421	0,2629	1,4521
1,36	0,7380	0,2940	0,3984	0,8606	2,9271	1,1351	0,2590	1,4667
1,37	0,7342	0,2848	0,3920	0,8531	2,9642	1,1277	0,2552	1,4814
1,38	0,7303	0,2817	0,3857	0,8455	3,0017	1,1202	0,2515	1,4960
1,39	0,7264	0,2757	0,3796	0,8381	3,0398	1,1129	0,2477	1,5110
1,40	0,7224	0,2697	0,3733	0,8303	3,0784	1,1051	0,2441	1,5260
1,41	0,7184	0,2637	0,3671	0,8221	3,1176	1,0968	0,2404	1,5412
1,42	0,7144	0,2578	0,3609	0,8140	3,1573	1,0885	0,2368	1,5564
1,43	0,7104	0,2520	0,3548	0,8060	3,1977	1,0803	0,2333	1,5719
1,44	0,7063	0,2463	0,3487	0,7976	3,2386	1,0717	0,2298	1,5875
1,45	0,7022	0,2406	0,3426	0,7891	3,2802	1,0629	0,2263	1,6031
1,46	0,6981	0,2349	0,3365	0,7805	3,3222	1,0539	0,2229	1,6188

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$\rho(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
1,47	0,6940	0,2294	0,3305	0,7718	3,3649	1,0447	0,2195	1,6349
1,48	0,6898	0,2238	0,3245	0,7629	3,4083	1,0353	0,2162	1,6510
1,49	0,6856	0,2184	0,3186	0,7540	3,4524	1,0258	0,2129	1,6672
1,50	0,6813	0,2130	0,3126	0,7449	3,4972	1,0160	0,2097	1,6836
1,51	0,6771	0,2077	0,3067	0,7357	3,5426	1,0061	0,2064	1,7002
1,52	0,6728	0,2024	0,3009	0,7265	3,5890	0,9961	0,2032	1,7169
1,53	0,6685	0,1973	0,2951	0,7172	3,6358	0,9858	0,2001	1,7338
1,54	0,6641	0,1921	0,2893	0,7077	3,6836	0,9754	0,1970	1,7508
1,55	0,6597	0,1871	0,2836	0,6982	3,7321	0,9649	0,1939	1,7680
1,56	0,6553	0,1821	0,2779	0,6886	3,7814	0,9541	0,1909	1,7854
1,57	0,6509	0,1772	0,2722	0,6789	3,8316	0,9432	0,1879	1,8029
1,58	0,6464	0,1723	0,2666	0,6691	3,8835	0,9321	0,1849	1,8207
1,59	0,6420	0,1676	0,2610	0,6593	3,9355	0,9209	0,1820	1,8386
1,60	0,6374	0,1628	0,2554	0,6492	3,9874	0,9093	0,1791	1,8567
1,61	0,6329	0,1582	0,2500	0,6394	4,0409	0,8981	0,1762	1,8750
1,62	0,6283	0,1537	0,2446	0,6294	4,0957	0,8865	0,1734	1,8935
1,63	0,6237	0,1492	0,2392	0,6193	4,1514	0,8746	0,1706	1,9122
1,64	0,6191	0,1448	0,2338	0,6092	4,2080	0,8628	0,1678	1,9311
1,65	0,6144	0,1404	0,2286	0,5991	4,2659	0,8508	0,1651	1,9503
1,66	0,6097	0,1362	0,2233	0,5889	4,3250	0,8387	0,1623	1,9696
1,67	0,6050	0,1320	0,2181	0,5786	4,3849	0,8264	0,1597	1,9892
1,68	0,6003	0,1278	0,2130	0,5684	4,4458	0,8141	0,1570	2,0089
1,69	0,5955	0,1238	0,2079	0,5581	4,5082	0,8016	0,1544	2,0290
1,70	0,5907	0,1198	0,2029	0,5478	4,5718	0,7890	0,1519	2,0493
1,71	0,5859	0,1159	0,1979	0,5374	4,6362	0,7764	0,1493	2,0698
1,72	0,5811	0,1121	0,1929	0,5271	4,7027	0,7637	0,1468	2,0906
1,73	0,5761	0,1083	0,1881	0,5168	4,7703	0,7509	0,1443	2,1112
1,74	0,5712	0,1047	0,1833	0,5065	4,8390	0,7381	0,1418	2,1330
1,75	0,5663	0,1011	0,1785	0,4961	4,9090	0,7250	0,1394	2,1546
1,76	0,5613	0,0975	0,1738	0,4858	4,9808	0,7120	0,1370	2,1765
1,77	0,5563	0,0941	0,1691	0,4755	5,0543	0,6990	0,1346	2,1987
1,78	0,5513	0,0907	0,1645	0,4652	5,1291	0,6858	0,1323	2,2211
1,79	0,5462	0,0874	0,1600	0,4550	5,2057	0,6727	0,1299	2,2439
1,80	0,5411	0,0842	0,1555	0,4447	5,2839	0,6595	0,1276	2,2670
1,81	0,5360	0,0810	0,1511	0,4345	5,3642	0,6462	0,1254	2,2905
1,82	0,5309	0,0779	0,1468	0,4243	5,4459	0,6329	0,1231	2,3143
1,83	0,5257	0,0749	0,1425	0,4142	5,5297	0,6197	0,1209	2,3384
1,84	0,5205	0,0720	0,1383	0,4041	5,6153	0,6063	0,1187	2,3629
1,85	0,5153	0,0691	0,1341	0,3941	5,7036	0,5930	0,1165	2,3877
1,86	0,5100	0,0663	0,1300	0,3841	5,7928	0,5797	0,1144	2,4130
1,87	0,5047	0,0636	0,1260	0,3741	5,8850	0,5664	0,1122	2,4386
1,88	0,4994	0,0609	0,1220	0,3642	5,9795	0,5531	0,1101	2,4647
1,89	0,4941	0,0583	0,1181	0,3545	6,0764	0,5398	0,1081	2,4911
1,90	0,4887	0,0558	0,1142	0,3447	6,1757	0,5266	0,1060	2,5180
1,91	0,4833	0,0534	0,1105	0,3351	6,2779	0,5134	0,1040	2,5454
1,92	0,4779	0,0510	0,1067	0,3256	6,3821	0,5002	0,1020	2,5731
1,93	0,4724	0,0487	0,1031	0,3161	6,4899	0,4871	0,1000	2,6015
1,94	0,4670	0,0465	0,0995	0,3064	6,5999	0,4740	0,0980	2,6302
1,95	0,4615	0,0443	0,0960	0,2973	6,7128	0,4609	0,0961	2,6596
1,96	0,4559	0,0422	0,0925	0,2881	6,8289	0,4480	0,0942	2,6894

λ	$T(\lambda)$	$p(\lambda)$	$\rho(\lambda)$	$q(\lambda)$	$y(\lambda)$	$f(\lambda)$	$r(\lambda)$	M
1,97	0,4504	0,0402	0,0892	0,2790	6,9487	0,4352	0,0923	2,7198
1,98	0,4448	0,0382	0,0858	0,2700	7,0720	0,4224	0,0904	2,7507
1,99	0,4391	0,0363	0,0826	0,2611	7,1985	0,4097	0,0885	2,7822
2,00	0,4335	0,0344	0,0794	0,2523	7,3288	0,3971	0,0867	2,8143
2,01	0,4278	0,0326	0,0763	0,2436	7,4635	0,3845	0,0849	2,8471
2,02	0,4221	0,0309	0,0733	0,2351	7,6020	0,3723	0,0831	2,8806
2,03	0,4164	0,0293	0,0703	0,2267	7,7448	0,3600	0,0813	2,9147
2,04	0,4106	0,0277	0,0674	0,2183	7,8923	0,3477	0,0795	2,9496
2,05	0,4048	0,0262	0,0645	0,2101	8,0444	0,3357	0,0778	2,9852
2,06	0,3990	0,0247	0,0618	0,2022	8,2016	0,3240	0,0761	3,0215
2,07	0,3931	0,0233	0,0591	0,1942	8,3639	0,3122	0,0744	3,0587
2,08	0,3873	0,0219	0,0564	0,1864	8,5323	0,3005	0,0727	3,0967
2,09	0,3814	0,0205	0,0539	0,1788	8,7059	0,2891	0,0710	3,1356
2,10	0,3754	0,0192	0,0514	0,1713	8,8854	0,2778	0,0694	3,1754
2,11	0,3695	0,0180	0,0489	0,1640	9,0725	0,2668	0,0678	3,2162
2,12	0,3635	0,0169	0,0466	0,1569	9,2652	0,2559	0,0662	3,2579
2,13	0,3574	0,0158	0,0443	0,1500	9,4829	0,2451	0,0646	3,3007
2,14	0,3514	0,0148	0,0420	0,1429	9,6737	0,2345	0,0630	3,3446
2,15	0,3453	0,0138	0,0399	0,1362	9,8903	0,2242	0,0614	3,3897
2,16	0,3392	0,0128	0,0378	0,1296	10,1116	0,2140	0,0599	3,4360
2,17	0,3331	0,0119	0,0357	0,1232	10,349	0,2041	0,0583	3,4836
2,18	0,3269	0,0110	0,0338	0,1170	10,592	0,1943	0,0568	3,5324
2,19	0,3207	0,0102	0,0319	0,1109	10,847	0,1847	0,0553	3,5828
2,20	0,3145	0,0095	0,0300	0,1050	11,111	0,1755	0,0539	3,6344
2,21	0,3083	0,0087	0,0282	0,0993	11,388	0,1664	0,0524	3,6877
2,22	0,3020	0,0080	0,0266	0,0937	11,678	0,1575	0,0509	3,7428
2,23	0,2957	0,0074	0,0249	0,0883	11,980	0,1488	0,0495	3,7995
2,24	0,2894	0,0068	0,0233	0,0830	12,297	0,1404	0,0481	3,8579
2,25	0,2830	0,0062	0,0218	0,0780	12,629	0,1323	0,0467	3,9185
2,26	0,2766	0,0056	0,0204	0,0731	12,978	0,1243	0,0453	3,9811
2,27	0,2702	0,0051	0,0190	0,0684	13,345	0,1167	0,0439	4,0458
2,28	0,2638	0,0047	0,0176	0,0638	13,732	0,1092	0,0426	4,1131
2,29	0,2573	0,0042	0,0163	0,0595	14,139	0,1021	0,0412	4,1828
2,30	0,2508	0,0038	0,0151	0,0553	14,568	0,0951	0,0399	4,2551
2,31	0,2443	0,0034	0,0140	0,0512	15,023	0,0885	0,0385	4,3304
2,32	0,2377	0,0031	0,0129	0,0474	15,505	0,0821	0,0372	4,4086
2,33	0,2311	0,0027	0,0118	0,0437	16,014	0,0759	0,0360	4,4903
2,34	0,2245	0,0024	0,0108	0,0402	16,557	0,0700	0,0347	4,5756
2,35	0,2179	0,0022	0,0099	0,0369	17,136	0,0644	0,0334	4,6647
2,36	0,2112	0,0019	0,0090	0,0337	17,751	0,0590	0,0321	4,7578
2,37	0,2045	0,0017	0,0082	0,0307	18,411	0,0539	0,0309	4,8557
2,38	0,1978	0,0015	0,0074	0,0278	19,118	0,0491	0,0297	4,9586
2,39	0,1910	0,0013	0,0066	0,0252	19,876	0,0445	0,0285	5,0665
2,40	0,1842	0,0011	0,0059	0,0226	20,696	0,0402	0,0273	5,1807
2,45	0,1490	0,0005	0,0032	0,0124	26,050	0,0223	0,0214	5,8630
2,50	0,1148	0,0002	0,0014	0,0050	34,587	0,0103	0,0158	6,8355
2,55	0,0791	$0,362 \cdot 10^{-4}$	0,0005	0,0019	51,242	0,0034	0,0105	8,4028
2,60	0,0426	$0,299 \cdot 10^{-5}$	$0,702 \cdot 10^{-4}$	0,0003	96,998	0,0005	0,0055	11,6737
2,65	0,0054	$0,728 \cdot 10^{-8}$	$0,135 \cdot 10^{-4}$	$0,667 \cdot 10^{-5}$	779,120	$0,108 \cdot 10^{-6}$	0,0007	33,3991

ТАБЛИЦА ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $z(\lambda) = \lambda + 1/\lambda$

λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$
0	∞	0,37	3,0727	0,74	2,0914	1,11	2,0109
0,01	100,01	0,38	3,0116	0,75	2,0833	1,12	2,0129
0,02	50,02	0,39	2,9541	0,76	2,0758	1,13	2,0150
0,03	33,363	0,40	2,9000	0,77	2,0687	1,14	2,0172
0,04	25,040	0,41	2,8490	0,78	2,0621	1,15	2,0196
0,05	20,050	0,42	2,8010	0,79	2,0558	1,16	2,0221
0,06	16,727	0,43	2,7556	0,80	2,0500	1,17	2,0247
0,07	14,356	0,44	2,7127	0,81	2,0446	1,18	2,0275
0,08	22,580	0,45	2,6722	0,82	2,0395	1,19	2,0303
0,09	11,201	0,46	2,6339	0,83	2,0348	1,20	2,0333
0,10	10,100	0,47	2,5977	0,84	2,0305	1,21	2,0365
0,11	9,2009	0,48	2,5633	0,85	2,0265	1,22	2,0397
0,12	8,4533	0,49	2,5308	0,86	2,0228	1,23	2,0430
0,13	7,8220	0,50	2,5000	0,87	2,0194	1,24	2,0465
0,14	7,2829	0,51	2,4708	0,88	2,0164	1,25	2,0500
0,15	6,8167	0,52	2,4431	0,89	2,0136	1,26	2,05365
0,16	6,4100	0,53	2,4168	0,90	2,0111	1,27	2,05740
0,17	6,0524	0,54	2,3919	0,91	2,0089	1,28	2,06125
0,18	5,7356	0,55	2,3682	0,92	2,0070	1,29	2,06519
0,19	5,4553	0,56	2,3457	0,93	2,0053	1,30	2,06923
0,20	5,2000	0,57	2,3244	0,94	2,0038	1,31	2,07336
0,21	4,9719	0,58	2,3041	0,95	2,0026	1,32	2,07758
0,22	4,7655	0,59	2,2849	0,96	2,0017	1,33	2,08188
0,23	4,5778	0,60	2,2667	0,97	2,0009	1,34	2,08627
0,24	4,4067	0,61	2,2493	0,98	2,0004	1,35	2,09074
0,25	4,2500	0,62	2,2329	0,99	2,0001	1,36	2,09529
0,26	4,1062	0,63	2,2173	1,00	2,0000	1,37	2,09993
0,27	3,9737	0,64	2,2025	1,01	2,0001	1,38	2,10464
0,28	3,8514	0,65	2,1885	1,02	2,0004	1,39	2,10942
0,29	3,7383	0,66	2,1752	1,03	2,0009	1,40	2,11929
0,30	3,6333	0,67	2,1625	1,04	2,0015	1,41	2,11922
0,31	3,5358	0,68	2,1506	1,05	2,0024	1,42	2,12423
0,32	3,4450	0,69	2,1393	1,06	2,0034	1,43	2,12930
0,33	3,3603	0,70	2,1286	1,07	2,0046	1,44	2,13444
0,34	3,2812	0,71	2,1185	1,08	2,0059	1,45	2,13966
0,35	3,2071	0,72	2,1089	1,09	2,0074	1,46	2,14493
0,36	3,1378	0,73	2,0999	1,10	2,0091	1,47	2,15027

λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$	λ	$z(\lambda)$
1,48	2,15568	1,85	2,38054	2,22	2,67045	2,59	2,97610
1,49	2,16114	1,86	2,39763	2,23	2,67843	2,60	2,98462
1,50	2,16667	1,87	2,40476	2,24	2,68643	2,61	2,99324
1,51	2,17225	1,88	2,41191	2,25	2,69444	2,62	3,00168
1,52	2,17789	1,89	2,41910	2,26	2,70248	2,63	3,01023
1,53	2,18359	1,90	2,42632	2,27	2,71053	2,64	3,01879
1,54	2,18935	1,91	2,43356	2,28	2,71860	2,65	3,02736
1,55	2,19516	1,92	2,44083	2,29	2,72668	2,66	3,03594
1,56	2,20103	1,93	2,44813	2,30	2,73478	2,67	3,04453
1,57	2,20694	1,94	2,45546	2,31	2,74290	2,68	3,05313
1,58	2,21291	1,95	2,46282	2,32	2,75103	2,69	3,06175
1,59	2,21893	1,96	2,47020	2,33	2,75918	2,70	3,07037
1,60	2,22500	1,97	2,47761	2,34	2,76735	2,71	3,07900
1,61	2,23112	1,98	2,48505	2,35	2,77553	2,72	3,08765
1,62	2,23728	1,99	2,49251	2,36	2,78373	2,73	0,09630
1,63	2,24350	2,00	2,50000	2,37	2,79194	2,74	3,10496
1,64	2,24976	2,01	2,50751	2,38	2,80017	2,75	3,11364
1,65	2,25606	2,02	2,51505	2,39	2,80841	2,76	3,12232
1,66	2,26241	2,03	2,52261	2,40	2,81667	2,77	3,13101
1,67	2,26880	2,04	2,53020	2,41	2,82494	2,78	3,13971
1,68	2,27524	2,05	2,53780	2,42	2,83322	2,79	3,14842
1,69	2,28172	2,06	2,54544	2,43	2,84152	2,80	3,15714
1,70	2,28824	2,07	2,55309	2,44	2,84984	2,81	3,16587
1,71	2,29480	2,08	2,56077	2,45	2,85816	2,82	3,17461
1,72	2,30140	2,09	2,56847	2,46	2,86650	2,83	3,18336
1,73	2,30803	2,10	2,57619	2,47	2,87486	2,84	3,19211
1,74	2,31471	2,11	2,58393	2,48	2,88323	2,85	3,19211
1,75	2,32143	2,12	2,59170	2,49	2,89161	2,86	3,20088
1,76	2,32818	2,13	2,59948	2,50	2,90000	2,87	3,20965
1,77	2,33497	2,14	2,60729	2,51	2,90841	2,88	3,21843
1,78	2,34180	2,15	2,61512	2,52	2,91683	2,89	3,22722
1,79	2,34866	2,16	2,62296	2,53	2,92526	2,90	3,23602
1,80	2,35556	2,17	2,63083	2,54	2,93370	2,91	3,24483
1,81	2,36249	2,18	2,63872	2,55	2,94215	2,92	3,2536
1,82	2,36945	2,19	2,64662	2,56	2,95063	2,93	3,2635
1,83	2,37645	2,20	2,65454	2,57	2,95911	2,94	3,27130
1,84	2,38348	2,21	2,66249	2,58	2,96760	2,95	3,28014
						2,96	3,28898
						2,97	3,29784
						2,98	3,30670
						2,99	3,31557
						3,00	3,32445
							3,3333

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ РАСЧЕТА СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С НЕПРЕРЫВНЫМ УВЕЛИЧЕНИЕМ СКОРОСТИ (ТЕЧЕНИЕ ВОКРУГ ВНЕШНЕГО ТУПОГО УГЛА)

С целью облегчения числовых расчетов, а также в связи с тем, что в задачах на обтекание внешнего тупого угла, в которых заданным является угол поворота потока, аналитическое решение затруднено, ниже приводятся таблицы, позволяющие решать задачи подобного типа. Таблицы даны для различных показателей адиабаты $k=1,40, 1,33$ через $30'$ угла поворота потока. Таблицы сосчитаны при участии Н. В. Никифоровой.

ТАБЛИЦА ДЛЯ $k=1,40$

δ	φ	M	λ	α	r/r_0
0°00'	0°00'	1,000	1,000	90°00'	1,000
0°10'	13°08'	1,026	1,022	77°02'	1,027
0°20'	16°05'	1,039	1,032	74°15'	1,041
0°30'	18°24'	1,051	1,042	72°06'	1,049
0°40'	20°25'	1,062	1,051	70°15'	1,065
0°50'	22°06'	1,073	1,060	68°44'	1,077
1°00'	23°32'	1,083	1,067	67°28'	1,087
1°30'	27°06'	1,109	1,088	64°24'	1,108
2°00'	30°00'	1,133	1,107	62°00'	1,147
2°30'	32°33'	1,155	1,125	59°57'	1,176
3°00'	34°54'	1,178	1,142	58°06'	1,205
3°30'	37°00'	1,199	1,157	56°30'	1,234
4°00'	38°52'	1,219	1,172	55°08'	1,262
4°30'	40°39°	1,238	1,186	53°51'	1,290
5°00'	42°18'	1,257	1,200	52°42'	1,312
5°30'	44°02'	1,276	1,213	51°40'	1,342
6°00'	45°24'	1,294	1,227	50°36'	1,372
6°30'	46°51'	1,313	1,240	49°30'	1,405
7°00'	48°18'	1,331	1,253	48°42'	1,437
7°30'	49°50'	1,349	1,265	47°58'	1,467
8°00'	51°00'	1,367	1,277	47°00'	1,498
8°30'	52°21'	1,384	1,288	46°11'	1,528
9°00'	53°28'	1,401	1,300	44°32'	1,559
9°30'	54°39'	1,418	1,311	45°05'	1,593
10°00'	55°50'	1,435	1,323	44°10°	1,626
10°30'	56°57'	1,442	1,344	43°34'	1,658
11°00'	58°06'	1,469	1,345	42°54'	1,690
11°30'	59°07'	1,486	1,356	42°17'	1,731
12°00'	60°20'	1,504	1,367	41°40'	1,772
12°30'	61°23'	1,520	1,378	41°08'	1,808
13°00'	62°24'	1,536	1,388	40°36'	1,845
13°30'	63°30'	1,553	1,398	40°11'	1,883
14°00'	64°24'	1,569	1,408	39°35'	1,923
14°30'	65°34'	1,586	1,418	38°56'	1,964
15°00'	66°24'	1,603	1,428	38°36'	2,005
15°30'	67°33'	1,621	1,438	38°08'	2,049
16°00°	68°24'	1,639	1,448	37°36'	2,094
16°30'	69°25'	1,656	1,458	37°09'	2,139
17°00'	70°18'	1,673	1,467	36°42'	2,183
17°30'	71°10'	1,689	1,476	36°21'	2,237
18°00'	72°06'	1,705	1,486	35°54'	2,291
18°30'	73°06'	1,723	1,495	35°28'	2,343
19°00'	73°57'	1,741	1,505	35°03'	2,394
19°30'	74°41'	1,758	1,514	34°41'	2,447
20°00'	75°42'	1,775	1,528	34°18'	2,500
20°30'	76°35'	1,792	1,532	33°56'	2,556
21°00'	77°27'	1,809	1,542	33°33'	2,612
21°30'	78°22'	1,827	1,551	33°10'	2,673
22°00'	79°12'	1,846	1,559	32°48'	2,735
22°30'	80°05'	1,863	1,567	32°26'	2,797
23°00'	80°52'	1,880	1,576	32°04'	2,858
23°30'	81°38'	1,897	1,585	31°44'	2,925
24°00'	82°30'	1,914	1,594	31°30'	2,993
24°30'	83°19'	1,932	1,602	31°13'	3,078

σ	φ	M	λ	α	r/r_0
25°00'	84°10'	1,951	1,610	30°50'	3,163
25°30'	84°59'	1,978	1,619	30°31'	3,240
26°00'	85°48'	1,988	1,628	30°12'	3,319
26°30'	86°36'	2,003	1,636	29°52'	3,397
27°00'	87°24'	2,023	1,644	29°33'	3,476
27°30'	88°12'	2,045	1,652	29°18'	3,561
28°00'	89°00'	2,063	1,660	29°00'	3,647
28°30'	89°45'	2,080	1,667	28°41'	3,733
29°00'	90°30'	2,096	1,675	28°30'	3,820
29°30'	91°14'	2,113	1,683	28°07'	3,933
30°00'	92°00'	2,130	1,691	28°00'	4,046
30°30'	92°45'	2,153	1,698	27°42'	4,150
31°00'	93°36'	2,173	1,706	27°24'	4,256
31°30'	94°16'	2,191	1,714	27°09'	4,345
32°00'	95°05'	2,209	1,722	26°55'	4,436
32°30'	95°52'	2,227	1,729	26°41'	4,573
33°00'	96°33'	2,245	1,737	26°27'	4,710
33°30'	97°18'	2,265	1,744	26°12'	4,848
34°00'	98°03'	2,285	1,752	25°57'	4,955
34°30'	98°48'	2,306	1,760	25°42'	5,087
35°00'	99°33'	2,327	1,767	25°27'	5,236
35°30'	100°16'	2,345	1,775	25°14'	5,393
36°00'	101°00'	2,366	1,782	25°00'	5,521
36°30'	101°43'	2,388	1,790	24°45'	5,632
37°00'	102°30'	2,411	1,796	24°30'	5,741
37°30'	103°15'	2,433	1,803	24°17'	5,941
38°00'	103°57'	2,454	1,810	24°03'	6,166
38°30'	104°42'	2,475	1,818	23°50'	6,325
39°00'	105°24'	2,498	1,824	23°36'	6,472
39°30'	106°30'	2,518	1,831	23°33'	6,699
40°00'	106°48'	2,539	1,838	23°12'	6,919
40°30'	107°56'	2,558	1,845	23°00'	7,142
41°00'	108°12'	2,581	1,852	22°48'	7,362
41°30'	108°55'	2,609	1,858	22°36'	7,584
42°00'	109°36'	2,624	1,865	22°24'	7,798
42°30'	110°17'	2,646	1,872	22°11'	8,027
43°00'	111°00'	2,670	1,878	22°00'	8,260
43°30'	111°40'	2,694	1,886	21°47'	8,480
44°00'	112°21'	2,717	1,891	21°36'	8,710
44°30'	113°04'	2,741	1,899	21°24'	8,944
45°00'	113°48'	2,765	1,905	21°12'	9,184
45°30'	114°44'	2,790	1,912	21°00'	9,565
46°00'	115°12'	2,816	1,918	20°48'	9,954
46°30'	115°55'	2,844	1,926	20°36'	10,33
47°00'	116°36'	2,869	1,930	20°24'	10,57
47°30'	117°15'	2,890	1,939	20°14'	10,93
48°00'	117°54'	2,910	1,943	20°06'	11,20
48°30'	118°42'	2,934	1,949	19°55'	11,58
49°00'	119°15'	2,959	1,955	19°45'	11,97
49°30'	120°00'	2,984	1,961	19°34'	12,45
50°00'	120°36'	3,010	1,967	19°24'	12,94
50°30'	121°14'	3,037	1,973	19°13'	13,28
51°00'	121°57'	3,064	1,978	19°03'	13,62
51°30'	122°37'	3,091	1,984	18°52'	14,17

σ	φ	М	λ	α	τ/г.
52°00'	123°18'	3,119	1,990	18°42'	14,72
52°30'	123°54'	3,146	1,996	18°32'	15,24
53°00'	124°38'	3,174	2,002	18°22'	15,78
53°30'	125°05'	3,204	2,008	18°11'	16,34
54°00'	126°00'	3,236	2,014	18°00'	16,90
54°30'	126°40'	3,263	2,019	17°51'	17,74
55°00'	127°18'	3,289	2,025	17°42'	18,62
55°30'	127°58'	3,316	2,031	17°32'	19,05
56°00'	128°36'	3,344	2,036	17°24'	19,49
56°30'	129°16'	3,374	2,041	17°14'	20,18
57°00'	129°55'	3,404	2,047	17°05'	20,89
57°30'	130°35'	3,435	2,052	16°55'	21,70
58°00'	131°15'	3,470	2,058	16°45'	22,49
58°30'	131°54'	3,507	2,064	16°34'	23,42
59°00'	132°36'	3,542	2,069	16°24'	24,38
59°30'	133°19'	3,576	2,074	16°15'	25,33
60°00'	133°54'	3,606	2,080	16°06'	26,30
60°30'	134°30'	3,634	2,085	15°58'	27,32
61°00'	135°10'	3,666	2,090	15°50'	28,32
61°30'	135°50'	3,701	2,095	15°40'	29,43
62°00'	136°30'	3,742	2,100	15°30'	30,55
62°30'	137°10'	3,779	2,107	15°21'	32,21
63°00'	137°48'	3,814	2,111	15°12'	33,89
63°30'	138°25'	3,848	2,116	15°05'	35,13
64°00'	139°03'	3,876	2,121	14°57'	36,40
64°30'	139°42'	3,912	2,125	14°48'	38,03
65°00'	140°20'	3,949	2,130	14°40'	39,63
65°30'	140°54'	3,975	2,135	14°33'	41,40
66°00'	141°36'	4,021	2,140	14°24'	43,15
66°30'	142°19'	4,083	2,144	14°13'	45,52
67°00'	142°54'	4,124	2,150	14°02'	47,85
67°30'	143°32'	4,160	2,154	13°55'	49,73
68°00'	144°12'	4,193	2,159	13°48'	51,62
68°30'	144°49'	4,228	2,163	13°41'	54,23
69°00'	145°27'	4,268	2,168	13°33'	56,00
69°30'	146°05'	4,308	2,172	13°26'	59,82
70°00'	146°42'	4,348	2,177	13°18'	62,50
70°30'	147°21'	4,389	2,181	13°10'	65,55
71°00'	147°57'	4,429	2,186	13°03'	68,50
71°30'	148°35'	4,469	2,191	12°55'	71,74
72°00'	149°12'	4,515	2,195	12°48'	75,00
72°30'	149°52'	4,574	2,200	12°39'	78,87
73°00'	150°30'	4,621	2,204	12°30'	82,75
73°30'	151°06'	4,658	2,208	12°24'	86,99
74°00'	151°42'	4,692	2,212	12°18'	91,20
74°30'	152°21'	4,751	2,216	12°09'	96,40
75°00'	153°00'	4,810	2,220	12°00'	101,4
75°30'	153°37'	4,882	2,224	11°52'	106,8
76°00'	154°15'	4,912	2,228	11°45'	111,7
76°30'	154°53'	4,963	2,232	11°37'	117,6
77°00'	155°30'	5,015	2,237	11°30'	123,5
77°30'	156°07'	5,070	2,241	11°22'	133,3
78°00'	156°45'	5,126	2,244	11°15'	143,3
78°30'	157°22'	5,173	2,249	11°07'	149,0

σ	φ	M	λ	α	r/r_0
79°00'	158°00'	5,241	2,252	11°00'	154,8
79°30'	158°37'	5,301	2,256	10°52'	165,8
80°00'	159°15'	5,362	2,260	10°45'	177,0
80°30'	159°45'	5,429	2,263	10°38'	186,8
81°00'	160°30'	5,488	2,267	10°30'	196,8
81°30'	161°06'	5,553	2,270	10°24'	208,2
82°00'	161°42'	5,593	2,274	10°18'	219,8
82°30'	162°19'	5,661	2,278	10°10'	233,3
83°00'	162°57'	5,731	2,282	10°03'	247,0
83°30'	163°34'	5,803	2,285	9°55'	263,1
84°00'	164°12'	5,875	2,289	9°48'	279,3
84°30'	164°50'	5,936	2,292	9°41'	297,8
85°00'	165°27'	6,028	2,296	9°33'	316,2
85°30'	166°04'	6,080	2,299	9°26'	338,6
86°00'	166°42'	6,188	2,302	9°18'	361,0
86°30'	167°18'	6,254	2,306	9°12'	384,7
87°00'	167°54'	6,321	2,309	9°06'	409,0
87°30'	168°30'	6,391	2,312	9°00'	437,2
88°00'	169°06'	6,464	2,315	8°54'	466,0
88°30'	169°43'	6,555	2,318	8°46'	501,3
89°00'	170°21'	6,649	2,321	8°39'	537,0
89°30'	170°59'	6,748	2,324	8°31'	583,8
90°00'	171°36'	6,845	2,328	8°24'	631,0
90°30'	172°12'	6,930	2,331	8°18'	676,0
91°00'	172°48'	7,013	2,334	8°12'	724,5
91°30'	173°24'	7,090	2,337	8°06'	784,2
92°00'	174°00'	7,184	2,340	8°00'	841,2
92°30'	174°38'	7,278	2,343	7°52°	909,1
93°00'	175°15'	7,413	2,345	7°45'	977,0
93°30'	175°51'	7,512	2,348	7°39'	1055
94°00'	176°27'	7,610	2,350	7°33'	1135
94°30'	177°03'	7,723	2,353	7°26'	1234
95°00'	177°40'	7,837	2,356	7°20'	1334
95°30'	178°13'	7,965	2,359	7°13'	1405
96°00'	178°54'	8,091	2,361	7°06'	1478
96°30'	178°57'	8,209	2,364	7°00'	1548
97°00'	179°06'	8,326	2,366	6°54'	1622
97°30'	180°10'	8,483	2,369	6°47'	1931
98°00'	181°21'	8,636	2,371	6°39'	2240
98°30'	182°00'	8,782	2,374	6°33'	2457
99°00'	182°34'	8,928	2,376	6°26'	2640
99°30'	183°08'	9,090	2,378	6°19'	2888
100°00'	183°48'	9,259	2,380	6°12'	3092
100°30'	184°24'	9,406	2,383	6°06'	3489
101°00'	185°00'	9,569	2,385	6°00'	3890
101°30'	185°36'	9,714	2,387	5°54'	4361
102°00'	186°12'	9,891	2,389	5°48'	4730
102°30'	186°48'	10,067	2,391	5°42'	5150
103°00'	187°24'	10,245	2,393	5°36'	6080
103°30'	188°00'	10,433	2,395	5°30'	6760
104°00'	188°36'	10,626	2,397	5°24'	7440
104°30'	189°12'	10,818	2,399	5°18'	8400
105°00'	190°24'	11,037	2,401	5°12'	9360
130°27'	220°27'	∞	2,449	0°00'	∞

ТАБЛИЦА ДЛЯ $k=1,33$

δ	φ	M	λ	α	r/r_0
0°00'	0°00'	1,000	1,000	90°00'	1,000
0°10'	15°00'	1,0352	1,030	75°05'	1,041
0°20'	16°30'	1,0420	1,036	74°10'	1,047
0°30'	19°00'	1,0566	1,048	71°50'	1,062
0°40'	20°12'	1,0638	1,054	70°40'	1,070
0°50'	21°30'	1,0710	1,060	69°30'	1,079
1°00'	22°45'	1,0794	1,067	68°25'	1,088
1°30'	26°00'	1,1024	1,086	65°35'	1,115
2°00'	29°00'	1,1257	1,105	63°00'	1,142
2°30'	31°30'	1,1455	1,121	61°00'	1,168
3°00'	33°48'	1,1655	1,137	59°10'	1,194
3°30'	36°00'	1,1845	1,152	57°25'	1,221
4°00'	38°00'	1,2073	1,170	55°50'	1,247
4°30'	39°45'	1,2253	1,184	54°35'	1,272
5°00'	41°30'	1,2435	1,198	53°20'	1,298
5°30'	43°10'	1,2618	1,212	52°20'	1,324
6°00'	44°45'	1,2803	1,226	51°10'	1,352
6°30'	46°10'	1,2977	1,239	50°25'	1,380
7°00'	47°30'	1,3151	1,252	49°35'	1,409
7°30'	49°00'	1,3341	1,266	48°50'	1,442
8°00'	50°15'	1,3492	1,277	48°00'	1,471
8°30'	51°30'	1,3657	1,289	57°05'	1,503
9°00'	52°45'	1,3838	1,302	46°25'	1,536
9°30'	54°00'	1,3992	1,313	45°30'	1,569
10°00'	56°15'	1,4177	1,326	44°50'	1,602
10°30'	56°30'	1,4363	1,339	44°00'	1,637
11°00'	57°47'	1,4555	1,352	43°25'	1,677
11°30'	58°50'	1,4762	1,363	42°50'	1,717
12°00'	60°00'	1,4902	1,376	42°10'	1,770
12°30'	61°00'	1,5050	1,386	41°30'	1,802
13°00'	62°05'	1,5230	1,398	41°00'	1,850
13°30'	63°00'	1,5382	1,408	40°30'	1,892
14°00'	64°00'	1,5549	1,419	40°00'	1,944
14°30'	65°00'	1,5719	1,428	39°30'	1,995
15°00'	66°00'	1,5862	1,440	39°00'	1,998
15°30'	66°55'	1,6020	1,450	38°40'	1,999
16°00'	67°45'	1,6156	1,458	38°15'	2,000
16°30'	68°50'	1,6333	1,469	37°50'	2,050
17°00'	69°45'	1,6510	1,480	37°25'	2,080
17°30'	70°40'	1,6656	1,489	37°00'	2,090
18°00'	71°30'	1,6820	1,499	36°30'	2,100
18°30'	72°25'	1,6967	1,508	36°10'	2,185
19°00'	73°15'	1,7136	1,518	35°50'	2,250
19°30'	74°05'	1,7270	1,526	35°25'	2,270
20°00'	75°00'	1,7420	1,536	35°05'	2,350
20°30'	75°50'	1,7614	1,546	34°40'	2,450
21°00'	76°50'	1,7767	1,555	34°15'	2,520
21°30'	77°40'	1,7924	1,564	34°00'	2,580
22°00'	78°25'	1,8083	1,573	33°45'	2,620

δ	φ	М	λ	α	г/г ₀
22°30'	79°15'	1,8225	1,581	33°15'	2,730
23°00'	80°00'	1,8380	1,591	33°00'	2,781
23°30'	80°55'	1,8567	1,600	32°45'	2,850
24°00'	81°45'	1,8713	1,608	32°25'	2,950
24°30'	82°30'	1,8879	1,617	32°00'	3,000
25°00'	83°25'	1,9047	1,626	31°45'	3,080
25°30'	84°10'	1,9216	1,635	31°25'	3,190
26°00'	85°00'	1,9369	1,643	31°05'	3,220
26°30'	85°50'	1,9541	1,652	30°50'	3,300
27°00'	86°40'	1,9716	1,661	30°30'	3,420
27°30'	87°15'	1,9853	1,668	30°15'	3,500
28°00'	88°00'	1,9990	1,676	30°03'	3,520
28°30'	88°55'	2,0210	1,686	29°50'	3,680
29°00'	89°40'	2,0351	1,693	29°30'	3,750
29°30'	90°30'	2,0554	1,703	29°10'	3,830
30°00'	91°20'	2,0719	1,711	28°55'	3,980
30°30'	92°00'	2,0906	1,718	28°34'	3,999
31°00'	92°50'	2,1070	1,728	28°25'	4,120
31°30'	93°30'	2,1221	1,735	28°10'	4,200
32°00'	94°15'	2,1416	1,744	27°55'	4,350
32°30'	95°00'	2,1568	1,751	27°40'	4,420
33°00'	95°55'	2,1787	1,761	27°25'	4,580
33°30'	96°40'	2,1943	1,768	27°05'	4,630
34°00'	97°20'	2,2100	1,775	26°55'	4,780
34°30'	98°00'	2,2210	1,783	26°47'	4,862
35°00'	98°50'	2,2462	1,791	26°25'	4,980
35°30'	99°25'	2,2623	1,798	26°10'	5,180
36°00'	100°00'	2,2787	1,806	26°04'	5,219
36°30'	100°55'	2,2977	1,813	25°50'	5,350
37°00'	101°40'	2,3167	1,821	25°30'	5,500
37°30'	102°15'	2,3360	1,829	25°15'	5,620
38°00'	103°00'	2,3555	1,837	25°05'	5,750
38°30'	103°45'	2,3729	1,844	24°55'	5,950
39°00'	104°30'	2,3927	1,852	24°40'	6,150
39°30'	105°05'	2,4079	1,858	24°30'	6,320
40°00'	105°55'	2,4277	1,866	24°15'	6,480
40°30'	106°30'	2,4464	1,873	24°00'	6,630
41°00'	107°15'	2,4673	1,881	23°50'	6,800
41°30'	107°55'	2,4859	1,888	23°40'	7,000
42°00'	108°40'	2,5045	1,895	23°25'	7,250
42°30'	109°20'	2,5235	1,902	23°15'	7,400
43°00'	110°00'	2,5427	1,909	23°05'	7,600
43°30'	110°45'	2,5651	1,917	22°55'	7,850
44°00'	111°25'	2,5845	1,924	22°45'	8,150
44°30'	112°00'	2,6044	1,931	22°30'	8,350
45°00'	112°40'	2,6213	1,937	22°25'	8,550
45°30'	113°10'	2,6387	1,943	22°10'	8,750
46°00'	113°55'	2,6596	1,950	22°00'	9,100
46°30'	114°30'	2,6675	1,956	21°55'	9,250
47°00'	115°10'	2,6985	1,963	21°45'	9,450
47°30'	115°55'	2,7198	1,970	21°30'	9,780
48°00'	116°40'	2,7444	1,978	21°15'	10,150

δ	φ	M	λ	α	r/r_0
48°30'	117°10'	2,7633	1,984	21°10'	10,350
49°00'	118°00'	2,7854	1,991	21°00'	10,650
49°30'	118°40'	2,8079	1,998	20°55'	10,980
50°00'	119°20'	2,8143	2,004	20°41'	11,350
50°30'	120°00'	2,8471	2,012	20°30'	11,75
51°00'	120°40'	2,8602	2,017	20°25'	12,00
51°30'	121°10'	2,8806	2,023	20°20'	12,45
52°00'	122°00'	2,9147	2,030	20°10'	12,85
52°30'	122°30'	2,9321	2,036	20°00'	13,22
53°00'	123°20'	2,9496	2,043	19°55'	13,75
53°30'	123°55'	2,9852	2,050	19°40'	14,15
54°00'	124°40'	3,0033	2,056	19°30'	14,75
54°30'	125°25'	3,0215	2,063	19°25'	15,23
55°00'	126°00'	3,0587	2,070	19°10'	15,75
55°30'	126°40'	3,0777	2,075	19°00'	16,25
56°00'	127°25'	3,1005	2,081	18°55'	16,95
56°30'	127°55'	3,1195	2,086	18°45'	17,35
57°00'	128°30'	3,1432	2,092	18°30'	17,95
57°30'	129°05'	3,1660	2,098	18°25'	18,55
58°00'	129°55'	3,1906	2,104	18°10'	19,18
58°30'	130°20'	3,2096	2,109	18°05'	19,65
59°00'	131°00'	3,2390	2,116	17°58'	20,45
59°30'	131°40'	3,2617	2,121	17°50'	21,00
60°00'	132°10'	3,2845	2,127	17°40'	21,05
60°30'	132°55'	3,3121	2,133	17°30'	22,48
61°00'	133°30'	3,3349	2,139	17°15'	23,22
61°30'	134°05'	3,3598	2,144	17°10'	23,95
62°00'	134°55'	3,3897	2,150	17°00'	24,78
62°30'	135°25'	3,4125	2,156	16°55'	25,55
63°00'	136°00'	3,4360	2,160	16°50'	26,35
63°30'	136°40'	3,4626	2,167	16°40'	27,15
64°00'	137°10'	3,4874	2,171	16°30'	27,95
64°30'	137°55'	3,5176	2,178	16°20'	29,00
65°00'	138°30'	3,5438	2,183	16°10'	29,85
65°30'	139°10'	3,5828	2,190	16°05'	31,18
66°00'	139°55'	3,6018	2,195	16°00'	32,40
66°30'	140°25'	3,6344	2,200	15°55'	33,65
67°00'	141°00'	3,6572	2,206	15°45'	35,25
67°30'	141°55'	3,6953	2,212	15°30'	37,25
68°00'	142°25'	3,7181	2,218	15°25'	38,85
68°30'	142°55'	3,7542	2,223	15°15'	40,80
69°00'	143°40'	3,7732	2,228	15°05'	43,00
69°30'	144°05'	3,8109	2,233	15°00'	44,40
70°00'	144°50'	3,8337	2,239	14°55'	46,65
70°30'	145°25'	3,8819	2,244	14°40'	48,45
71°00'	146°00'	3,9185	2,250	14°30'	50,55
71°30'	146°45'	3,9498	2,255	14°25'	52,74
72°00'	147°20'	3,9811	2,260	14°20'	54,95
72°30'	147°55'	4,0134	2,265	14°15'	57,00
73°00'	148°40'	4,0458	2,270	14°10'	59,45
73°30'	149°10'	4,0794	2,276	14°05'	61,75

δ	φ	М	λ	α	г/г ₀
74°00'	149°50'	4,1191	2,281	14°00'	64,45
74°30'	150°25'	4,1611	2,288	13°55'	66,95
75°00'	151°00'	4,1888	2,291	13°45'	69,65
75°30'	151°45'	4,2248	2,297	13°40'	72,85
76°00'	152°25'	4,2671	2,302	13°30'	76,00
76°30'	152°55'	4,2987	2,306	13°25'	79,55
77°00'	153°40'	4,3424	2,312	13°15'	84,25
77°30'	154°10'	4,3664	2,316	13°10'	89,65
78°00'	154°50'	4,4146	2,321	13°05'	93,45
78°30'	155°25'	4,4564	2,326	13°00'	97,25
79°00'	156°00'	4,4903	2,330	12°55'	102,00
79°30'	156°45'	4,5323	2,336	12°45'	108,55
80°00'	157°20'	4,5756	2,340	12°30'	114,00
80°30'	157°55'	4,6271	2,346	12°25'	119,25
81°00'	158°30'	4,6647	2,350	12°20'	124,25
81°30'	159°05'	4,7112	2,355	12°15'	129,95
82°00'	159°45'	4,7578	2,360	12°10'	135,00
82°30'	160°10'	4,8108	2,363	12°05'	139,60
83°00'	160°55'	4,8455	2,369	12°00'	141,50
83°30'	161°30'	4,8827	2,373	11°55'	150,00
84°00'	162°00'	4,9187	2,377	11°50'	159,55
84°30'	162°45'	4,9586	2,380	11°45'	170,25
85°00'	163°15'	4,9856	2,383	11°30'	179,55
85°30'	164°00'	5,0306	2,388	11°25'	190,55
86°00'	164°30'	5,0845	2,392	11°20'	199,95
86°30'	165°05'	5,1316	2,396	11°15'	210,25
87°00'	165°55'	5,1807	2,400	11°10'	225,00
87°30'	166°20'	5,2329	2,404	11°05'	240,00
88°00'	166°55'	5,2527	2,408	11°00'	255,00
88°30'	167°30'	5,3191	2,412	10°55'	269,00
89°00'	168°10'	5,3739	2,416	10°45'	288,50
89°30'	168°45'	5,4288	2,420	10°40'	305,00
90°00'	169°25'	5,4648	2,424	10°30'	325,50
90°30'	170°00'	5,5645	2,430	10°25'	340,50
91°00'	170°40'	5,6005	2,434	10°15'	363,50
91°30'	171°10'	5,6457	2,436	10°05'	382,00
92°00'	171°50'	5,7089	2,440	10°00'	405,55
92°30'	172°25'	5,7359	2,443	9°55'	425,00
93°00'	173°00'	5,8039	2,447	9°50'	448,00
93°30'	173°40'	5,8630	2,450	9°40'	475,00
94°00'	174°10'	5,9030	2,454	9°30'	508,50
94°30'	174°50'	5,9759	2,458	9°25'	540,00
95°00'	175°25'	6,0388	2,461	9°20'	585,50
95°30'	176°00'	6,0688	2,464	9°15'	625,50
96°00'	176°40'	6,1477	2,468	9°10'	679,50
96°30'	177°10'	6,2167	2,471	9°00'	728,50
97°00'	178°00'	6,3128	2,476	8°55'	788,50
97°30'	178°30'	6,3990	2,479	8°50'	840,50
98°00'	179°00'	6,4190	2,482	8°45'	900,00
98°30'	179°45'	6,5034	2,485	8°40'	958,50
99°00'	180°20'	6,5659	2,488	8°35'	1018,50

δ	φ	М	λ	α	г/г ₀
99°30'	180°55'	6,6496	2,492	8°30'	1085,00
100°00'	181°300'	6,7217	2,495	8°25'	1150,00
100°30'	182°05'	6,8208	2,498	8°20'	1210,0
101°00'	182°45'	6,8565	2,501	8°15'	1275,0
101°30'	183°15'	6,9195	2,504	8°10'	1300,0
102°00'	184°00'	7,0233	2,508	8°05'	1320,0
102°30'	184°15'	7,0851	2,510	8°03'	1350,0
103°00'	185°00'	7,1956	2,514	8°00'	1430,0
103°30'	185°45'	7,3061	2,518	7°55'	1490,0
104°00'	186°10'	7,3614	2,520	7°50'	1600,0
104°30'	186°50'	7,4535	2,523	7°45'	1850,0
105°00'	187°25'	7,5454	2,526	7°40'	2000,0
105°30'	188°00'	7,6681	2,530	7°30'	2250,0
106°00'	188°40'	7,7369	2,532	7°25'	2500,0
106°30'	189°10'	7,8403	2,535	7°20'	2900,0
107°00'	189°50'	7,9441	2,538	7°15'	3100,0
107°30'	190°25'	8,0515	2,541	7°10'	3450,0
108°00'	191°00'	8,1685	2,544	7°05'	3950,0
108°30'	191°30'	8,2465	2,546	7°00'	4250,0
109°00'	192°10'	8,3635	2,549	6°55'	4950,0
109°30'	192°45'	8,4476	2,551	6°50'	5200,0
110°00'	193°15'	8,5818	2,554	6°45'	5950,0
110°30'	193°55'	8,6688	2,556	6°40'	6250
111°00'	194°30'	8,8058	2,559	6°35'	7100
111°30'	195°05'	8,9547	2,562	6°30'	7500
112°00'	195°40'	9,0591	2,564	6°25'	7950
112°30'	196°15'	9,2146	2,567	6°15'	9000
113°00'	196°55'	9,3716	2,570	6°10'	9950
113°30'	197°30'	9,4951	2,572	6°05'	10250
114°00'	198°05'	9,6796	2,575	6°00'	12900
114°30'	198°45'	9,8036	2,577	5°55'	13000
115°00'	199°15'	9,9892	2,580	5°50'	14500
115°30'	199°55'	10,1392	2,582	5°45'	16000
116°00'	200°30'	10,3632	2,585	5°40'	17800
116°30'	201°00'	10,4382	2,586	5°35'	18850
117°00'	201°40'	10,6642	2,589	5°30'	20500
117°30'	202°10'	10,8322	2,591	5°25'	22500
118°00'	202°50'	11,0187	2,593	5°20'	24600
118°30'	203°25'	11,2057	2,595	5°15'	27000
119°00'	204°00'	11,3947	2,597	5°10'	29900
119°30'	204°40'	11,5807	2,599	5°03'	35000
120°00'	205°10'	11,7951	2,601	4°58'	40500
120°30'	205°50'	12,0386	2,603	4°55'	46800
121°00'	206°20'	12,2806	2,605	4°45'	53500
121°30'	206°55'	12,5236	2,607	4°40'	62000
122°00'	207°30'	12,6456	2,608	4°35'	72500
122°30'	208°05'	13,0553	2,611	4°30'	84000
123°00'	208°40'	13,2223	2,612	4°28'	95500
123°30'	209°25'	13,5553	2,614	4°25'	116000
124°00'	209°55'	13,8883	2,616	4°15'	130000
124°30'	210°25'	14,2183	2,618	4°10'	145000

δ	φ	M	λ	α	r/r_0
124°00'	209°55'	13,8883	2,616	4°15'	130000
124°30'	210°25'	14,2183	2,618	4°10'	145000
125°00'	211°00'	14,5579	2,620	4°05'	164800
125°30'	211°40'	14,8099	2,621	4°00'	186300
126°00'	212°10'	15,0619	2,622	3°55'	213800
126°30'	212°55'	15,5679	2,624	3°50'	243500
127°00'	213°25'	16,0679	2,626	3°45'	275500
127°30'	214°00'	16,5679	2,628	3°40'	330000
128°00'	214°35'	16,8229	2,629	3°35'	1,0·10*
128°30'	215°10'	17,0777	2,630	3°30'	1,2·10*
129°00'	215°55'	17,5236	2,631	3°25'	1,46·10*
129°30'	216°25'	18,4227	2,633	3°15'	1,867·10*
130°00'	217°00'	18,8577	2,634	3°12'	
130°30'	217°40'	19,3027	2,635	3°10'	
131°00'	218°10'	19,7577	2,636	3°00'	
131°30'	218°45'	20,1977	2,637	2°58'	
132°00'	219°20'	20,6477	2,638	2°50'	
132°30'	219°55'	21,0977	2,639	2°45'	
133°00'	220°25'	21,5366	2,640	2°43'	
133°30'	221°00'	22,7229	2,641	2°40'	
134°00'	221°35'	23,8066	2,642	2°35'	
134°30'	222°05'	25,0966	2,643	2°30'	
135°00'	222°55'	26,2766	2,644	2°25'	
135°30'	223°20'	27,4566	2,645	2°20'	
136°00'	224°00'	28,6466	2,646	2°15'	
136°30'	224°30'	29,2366	2,647	2°12'	
137°00'	225°05'	29,3366	2,647	2°10'	
137°30'	225°40'	29,8366	2,647	2°05'	
138°00'	226°10'	31,0166	2,648	2°00'	
138°30'	226°45'	31,6266	2,649	1°58'	
139°00'	227°25'	32,2166	2,649	1°55'	
139°30'	227°55'	32,7866	2,650	1°50'	
140°00'	228°30'	33,3991	2,650	1°45'	
140°30'	229°10'	35,6500	2,651	1°40'	
141°00'	229°45'	37,1500	2,652	1°35'	
141°30'	230°20'	38,6520	2,652	1°30'	
142°00'	230°55'	40,2530	2,652	1°25'	
142°30'	231°20'	41,3530	2,653	1°20'	
143°00'	232°00'	43,0000	2,654	1°18'	
143°30'	232°35'	44,8550	2,654	1°15'	
144°00'	233°10'	46,6350	2,654	1°10'	
144°30'	233°45'	48,2550	2,654	1°05'	
145°00'	234°25'	74,7820	2,655	1°00'	
145°30'	234°55'	161,2820	2,656	0°55'	
146°00'	235°30'	213,2820	2,656	0°45'	
146°30'	236°10'	230,2820	2,656	0°40'	
147°00'	236°50'	247,8250	2,656	0°30'	
147°30'	237°20'		2,656	0°25'	
148°00'	237°55'	∞	2,656	0°20'	
148°30'	238°30'		2,657	0°12'	
149°00'	239°00'		2,657	0°00'	

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика. М., Наука, 1976. 888 с.
2. **Фабрикант Н. Я.** Аэродинамика. М., Наука, 1964, 814 с.
3. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1., М., Гостехиздат, 1955, 535 с.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1954. 795 с.
5. **Борисенко А. И.** Газовая динамика двигателей. М., Оборонгиз, 1962. 793 с.
6. **Виноградов Б. С.** Прикладная газовая динамика. М., Издательство Университета дружбы народов им. П. Лумумбы, 1965, 348 с.
7. **Дейч М. Е.** Техническая газодинамика. М., Госэнергониздат, 1974. 671 с.
8. **Бетчелор Ж. К.** Введение в динамику вязкой жидкости, М., Мир, 1973, 758 с.
9. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М., Наука, 1973. 903 с.
10. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М., Гостеоретиздат, 1957. 375 с.
11. **Ильюшин А. А., Ломакин В. А., Шмаков А. П.** Задачи и упражнения по механике сплошных сред. Изд. МГУ, 1973. 164 с.
12. **Осватич К., Шварценберг Р.** Сборник задач и упражнений по газовой динамике. М., Мир, 1967. 272 с.
13. **Давидсон В. Е.** Основы газовой динамики в задачах. М., Высшая школа, 1965. 208 с.
14. **Яблонский В. С., Исаев И. А.** Сборник задач и упражнений по технической гидромеханике. М., Физматгиз, 1963. 200 с.
15. **Задачник по гидравлике.** Под ред. И. И. Куколевского. Л. Г. Подвидза, М., Госэнергониздат, 1960. 440 с.
16. **A. G. Hansen.** Fluid Mechanics. New York — London — Sidney, 1967, 417 p.
17. **A. H. Shapiro.** The Dynamics of Compressible Fluid Flow. New York, The Ronald Press Co, 1953. 540 p.
18. **R. Comolet et J. Bonnin.** Mecanique experimental de fluides. Tome III. Masson et CIL, Editeurs, 1964. 352 p.
19. **Streeter V. L.** Fluid Mechanics. McGraw-Hill Book Co. New York, Toronto, London, 1958. 470 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Параметры потока идеальной жидкости	4
Глава II. Кинематика жидкой среды	34
Глава III. Одномерные течения газа	43
Глава IV. Адиабатические сверхзвуковые течения	52
§ 1. Течения со скачками уплотнения	52
§ 2. Сверхзвуковое течение с непрерывным увеличением скорости	61
Глава V. Движение вязкой жидкости	72
§ 1. Вязкость жидкостей и газов	72
§ 2. Режимы течения вязкой жидкости	73
§ 3. Уравнение Навье—Стокса	75
§ 4. Течение жидкости в трубах	78
§ 5. Пограничный слой	79
§ 6. Свободные турбулентные струи	84
Глава VI. Гидродинамическое подобие и метод анализа размерностей	100
Глава VII. Движение проводящей жидкости в магнитном поле. Ответы на задачи и решения некоторых из них	107
Приложения	115
Таблица для определения скорости сверхзвукового потока по формуле Релея ($k=1,40$)	156
Таблицы газодинамических функций	156
Таблица газодинамической функции $z(\lambda) = \lambda + 1/\lambda$	156
Таблицы для расчета сверхзвукового течения газа с непрерывным увеличением скорости (течение вокруг внешнего тупого угла)	168
Список литературы	170
	181

ИБ № 1828

Александр Александрович Степчиков

ЗАДАЧНИК ПО ГИДРОГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Редактор *Г. Д. Журавлева* Художественный редактор *В. В. Лебедев*
Технические редакторы *А. Ф. Уварова* и *Л. П. Гордеева*
Корректор *В. А. Воробьева*
Переплет художника *В. В. Воронина*

Сдано в набор 24.04.79.	Подписано в печать 21.11.79.	Т-16885.
Формат 60×90 ¹ / ₁₆ .	Бумага типографская № 2.	Гарнитура литературная.
Печать высокая.	Усл. печ. л. 11,5.	Уч.-изд. л. 13,3.
Тираж 3 000 экз.	Зак. 2783.	Цена 50 к.

Издательство «Машинностроение», 107885, Москва, ГСП-6, 1-й Басманный пер. д. 3.

Московская типография № 8
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
Хохловский пер., 7.

Степчиков А. А.

С79 Задачник по гидрогазовой динамике: Учеб. пособие для студентов авиационных специальностей вузов. — М.: Машиностроение, 1980. — 182 с., ил.

50 к.

Книга содержит около 400 задач по основным разделам курса прикладной гидрогазовой динамики. Задачи различной степени трудности снабжены ответами, а в ряде случаев и решениями. В задачнике имеются таблицы и графики, облегчающие численные расчеты. Книга рассчитана на студентов авиационных, энергетических и транспортных вузов.

С 20305-236 — 236-80. 1703040000
038(01)-80

ББК 39.55
6Т5.1