МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А. В. ГУЩИН, В. В. СЕВОСТЬЯНОВА

ИНВАРИАНТЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность

САМАРА
Издательство Самарского университета
2024

УДК 512(075)+514.7(075)
ББК В14я7+В151я7
Г981

Рецензенты:
д-р техн. наук, проф. В. Г. Карташевский,
д-р физ.-мат. наук, проф. А. П. Мартыненко

Гущин, Андрей Викторович
Г981 **Инварианты и линейные операторы** : учебное пособие / *А.В. Гущин, В.В. Севостьянова.* – Самара: Издательство Самарского университета, 2024. – 176 с.

ISBN 978-5-7883-2072-4

В учебном пособии излагаются расширенные теоретические сведения для дисциплин, направленных на изучение анализа и преобразований сигналов, изображений. Практические примеры алгебры операторного преобразования инвариантов.

Издание соответствует требованиям действующего Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность и рабочей программы дисциплины «Математика».

Работа второго автора выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1456).

УДК 512(075)+514.7(075)
ББК В14я7+В151я7

ISBN 978-5-7883-2072-4
© Самарский университет, 2024

Оглавление

Введение **5**

1 Фундаментальные понятия линейности **6**

1.1 Основные сведения о пространствах 6
1.2 Системы векторов 23
1.3 Топологические общие и линейные пространства . 32
1.3.1 Топологические линейные пространства . . 38
1.3.2 Примеры функциональных пространств . . 41
1.4 Множественные структуры алгебры 46
1.4.1 Линейная алгебра множеств 46
1.4.2 Алгебраическое поле 49
Примеры заданий 54

2 Конечномерные векторные пространства **58**

2.1 Подпространства векторных пространств 61
2.2 Сопряженные пространства 64
2.2.1 Линейные функционалы 64
2.2.2 Аннуляторы 67
2.2.3 Прямые суммы 68
2.3 Факторпространства 70
2.4 Билинейные формы 73
2.5 Линейные операторы 76
2.5.1 Матрицы операторов 79
2.5.2 Инвариантность 80
2.5.3 Проекторы 83
2.5.4 Сопряженный оператор 86
2.6 Изменение базиса 88
2.7 Подобные операторы преобразования 90
2.8 Инварианты векторных пространств 94

2.9 Линейные преобразования 96
2.9.1 Обратимые преобразования 98
2.9.2 Инварианты, контравариантные и ковариантные векторы 99
Примеры заданий 102

3 Координаты пространств и связность **105**
3.1 Аффинные пространства 106
3.1.1 Точечно-векторная аксиоматика аффинного пространства 106
3.1.2 Аффинная координатная система 108
3.1.3 Преобразование аффинного репера 113
3.2 Криволинейные координаты 121
3.2.1 Криволинейные координаты на поверхности 121
3.2.2 Криволинейные координаты в E_3 130
3.2.3 Взаимные базисные системы 136
3.3 Угол пересечения и элемент площади 142
Примеры заданий 146

4 Операторы компонент инвариантов **148**
4.1 Векторы и ковекторы 148
4.2 Билинейные формы, линейные операторы 154
4.3 Изменение базиса 157
4.4 Подобие 160

Библиографический список **167**

Приложение

A Криволинейные поверхности **168**

Предметный указатель **174**

Введение

В ситуации, когда объекты исследований — сложные нелинейные системы, актуальным становиться, в предметной постановке задачи, понимание геометрии траектории поиска решения по конструкции сложной поверхности. Требуются знания геометрических свойств пространств, соотношений условных координат и преобразований инвариантов.

Первая глава обобщает фундаментальное понятие линейности. Рассматриваются вопросы векторных, функциональных пространств. Определения алгебраических объектов с теоретико-множественной основой.

Во второй главе исследуются свойства инвариантов в векторных и дуальных к ним пространствах. Вводится понятие линейного оператора, как средства анализа линейных преобразований инвариантов и их подобий.

Координатные системы третьей главы предоставляют способы определения объекта в аффинных и криволинейных координатах. Приводятся примеры законов преобразования аффинных и криволинейных координат инварианта. Соответственно, это примеры преобразования вектора, и других инвариантов, в пространствах частичной и полной связности.

Четвертая глава — это теория и практика программного исполнения преобразования векторов, дуальных к ним функционалов, а также исследование свойств линейных операторов.

Приложение А. Аналитическое описание и примеры изображения криволинейных координатных поверхностей: сферических, цилиндрических, эллиптических и параболических.

1 Фундаментальные понятия линейности

1.1 Основные сведения о пространствах

Определение 1.1. Говорят, что на множестве M задана *метрика*, если на прямом произведении $M \times M$ задана функция

$$\rho : M \times M \to \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

обладающая свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ \rho(x,y) \geqslant 0\ \forall x, y \in M;\\ &2)\ \rho(x,y) = \rho(y,x)\ \forall x, y \in M;\\ &3)\ \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)\ \forall x, y, z \in M;\\ &4)\ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y\ \forall x, y \in M. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Эти свойства называются *аксиомами метрики* (или *расстояния*). В частности, свойство 3 называется *неравенством треугольника.*

Определение 1.2. Множество, на котором задана некоторая метрика, называется *метрическим пространством.* Элементы метрического пространства называются *точками.*

Полнота пространств

Множество $M \subset R$ называется *ограниченным*, если оно содержится целиком в некотором шаре (шар радиуса ε — ε-окрестность точки x_0).

Точка $x \in R$ называется точкой *прикосновения* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Совокупность всех точек прикосновения множества M обозначается $[M]$ и называется *замыканием* этого множества. Таким образом, определена для множеств метрического

пространства *операция замыкания* — переход от множества M к его замыканию $[M]$.

Точка $x \in R$ называется *предельной точкой* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Точка x, принадлежащая M, называется *изолированной точкой* этого множества, если в достаточно малой ее окрестности $O_\varepsilon(x)$ нет точек из M, отличных от x.

Утверждение 1.1. *Всякая точка прикосновения множества M есть либо предельная, либо изолированная точка этого множества.*

Отсюда можно заключить, что замыкание $[M]$ состоит, вообще говоря, из точек трех типов:

1) изолированные точки множества M;

2) предельные точки множества M, принадлежащие M;

3) предельные точки множества M, не принадлежащие M.

Таким образом, замыкание $[M]$ получается присоединением к M всех его предельных точек.

Определение 1.3. Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек имеет предел в этом пространстве. В противном случае метрическое пространство называется *неполным*.

Определение 1.4. Множество M' элементов метрического пространства M называется *плотным* в M, если его замыкание совпадает с M.

Определение 1.5. Полное метрическое пространство M^* называется *пополнением метрического пространства* M, если M содержится в M^* и плотно в нём.

Теорема 1.1. *([1], приводится без доказательства). Любое метрическое пространство имеет пополнение.*

Произвольная совокупность множеств X_α, $\alpha \in A$, точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ (как и для множеств точек пространства $\mathbb{R}^n$) называется *покрытием множества* $X \subset M$, если $X \subset \cup_\alpha X_\alpha$. Покрытие называется *открытым*, если все его множества открытые.

Определение 1.6. Множество X точек метрического пространства
$\{M;\rho\}$ называется *компактным* (или *компактом*), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное число множеств, которые тоже покрывают множество X.

Определение 1.7. Пусть X — некоторое множество точек метрического пространства $\{M;\rho\}$. Множество $B \subset M$ называется ε-*сетью для множества* X, если

$$\forall x \in X \; \exists a \in B : \; \rho(x,a) \in \varepsilon.$$

Определение 1.8. Множество X точек метрического пространства
$\{M;\rho\}$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в M для него существует конечная ε-сеть.

Теорема 1.2. *([1], приводится без доказательства). Если метрическое пространство компактное, то оно полное и вполне ограниченное.*

Теорема 1.3. *([1], приводится без доказательства). Если метрическое пространство полное и вполне ограниченное, то оно компактное.*

Теорема 1.4. *([1], приводится без доказательства). Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, ко-*

гда любая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

Определение 1.9. Отображение f метрического пространства X в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называется *функционалом.*

Теорема 1.5. *([1], приводится без доказательства). Если функционал f определён и непрерывен на компактном метрическом пространстве X, то он на X ограничен и принимает наименьшее и наибольшее значения.*

Действительно, образом компакта X является компакт $f(X) \subset \mathbb{R}$. Он является *ограниченным* и *замкнутым* и, в частности, содержит *наибольшее* и *наименьшее* значения.

Непрерывные отображения

Говорят, что задано отображение f множества X в множество Y

$$f : X \to Y, \tag{1.3}$$

где точка $y \in Y$ ставится в соответствие точке $x \in X$, y называется *образом* точки x при отображении f и обозначается $y = f(x)$, а любая точка $x \in X$, которой в соответствие ставится точка $y \in Y$, называется *прообразом* точки y. Множество всех прообразов точки $y \in Y$ называется *полным прообразом* точки y и обозначается $f^{-1}(y)$.

Пусть $A \subset X,\ x \in A,\ B \subset X,\ y \in B$ и $y = f(x)$, тогда B — образ множества A и обозначается $f(A)$. Соответственно, прообразом множества B определяется множество A и обозначается $f^{-1}(B)$.

Прототипом знака «$\to$» можно принять понятие «инъекция», поэтому, если f определяет однозначно каждому $x \in A$ «инъект» $y \in B$ или $x \to y$, то f — *инъективное отображение*

(*инъекция*). Если f^{-1} определяет однозначно каждому $y \in Y$ прототип («сюръект») $x \in A$ или $x \leftarrow y$, то f — *сюръективное отображение* (*сюръекция*). Если f инъекция и сюръекция, то f — *биекция* и каждая пара элементов однозначно связана $x \leftrightarrow y$ взаимно-обратным отображением f. Подобное взаимно однозначное соответствие A и B, обозначаемое $f : A \to B$, называется: «*изоморфизм* из A в B», «*изоморфизм* f», «*изоморфное отображение*». Далее будет показано распространение понятия *изоморфизма* на *метрические* и *векторные* пространства, пространства с *общей топологией*.

Определение 1.10. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из X, сходящейся к x_0, последовательность точек $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ сходится к $y_0 = f(x_0)$.

Теорема 1.6. *([1], приводится без доказательства). Если отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, а отображение*
$g : Y \to Z$ непрерывно в точке $y_0 \in Y$, то их композиция, заданная формулой $z = g(f(x))$, непрерывна в точке x_0.

Определение 1.11. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным отображением пространства X в пространство Y, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Теорема 1.7. *([1], приводится без доказательства). Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества является открытым множеством.*

Следствие 1.1. *Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества является замкнутым множеством.*

Непрерывные отображения компактов

Теорема 1.8. *([1], приводится без доказательства). Пусть отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно. Тогда если пространство X компактное, то множество $f(x)$ тоже компактное.*

Определение 1.12. Отображение одного метрического пространства на другое называется *гомеоморфизмом* этих пространств, если оно непрерывно, взаимно однозначно, и обратное отображение тоже непрерывно.

Теорема 1.9. *([1], приводится без доказательства). Пусть отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно и взаимно однозначно. Тогда, если пространство X компактное. то обратное отображение непрерывно.*

Определение 1.13. Отображение f метрического пространства X в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называется *функционалом.*

Теорема 1.10. *([1], приводится без доказательства). Если функционал f определён и непрерывен на компактном метрическом пространстве X, то он на X ограничен и принимает наименьшее и наибольшее значения.*

Действительно, образом компакта X является компакт $f(X) \in \mathbb{R}$. Он является ограниченным и замкнутым и. в частности. содержит наибольшее и наименьшее значения.

Сжимающие отображение

Определение 1.14. Отображение метрического пространства $\{X; \rho\}$ в себя называется *сжимающим*, если

$$\exists q \in (0;1) : \ \forall x, y \in X \ \rho(f(x), f(y)) \leqslant q\rho(x, y). \qquad (1.4)$$

Из условия (1.4) видно, что сжимающее отображение $f : X \to X$ непрерывно, и, более того, оно равномерно непрерывно на X.

Определение 1.15. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой отображения* $f : X \to X$, если $f(x) = x$.

Теорема 1.11. *([1], приводится без доказательства). Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.*

Принцип сжимающих отображений позволяет единым методом доказывать теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных, интегральных и других уравнений. С его помощью можно не только доказывать существование и единственность решения уравнения $f(x) = x$, но и находить его с *любой степенью точности* относительно рассматриваемой метрики.

Принцип сжимающих отображений является простейшим из так называемых *принципов неподвижной точки.*

В качестве простейшего примера применения принципа сжимающих
отображений рассмотрим решение систем линейных алгебраических уравнений методом итераций.

Пример. Пусть M_n — метрическое пространство, точками которого являются точки арифметического n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, а метрика введена по формуле

$$\rho(x, y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|,$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$.

Определённое таким образом метрическое пространство M_n полное. Рассмотрим отображение f пространства M_n в себя, заданное равенством

$$f(x) = Ax + b, \tag{1.5}$$

где A — квадратная матрица порядка n, а $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$. Если выполняется условие

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \tag{1.6}$$

то отображение (1.5) будет сжимающим.

Это относится к доказательству следующего утверждения.

Теорема 1.12. *[1] Если матрица A удовлетворяет условию (1.6), то уравнение $x - Ax = b$ имеет единственное решение при любом b. Это решение можно получить методом последовательных приближений при любом выборе начального приближения.*

Заметим, что если точка x_0 является неподвижной для отображения f, то она будет неподвижной и для n-й степени этого отображения. Для сжимающего отображения справедливо обратное утверждение.

Теорема 1.13. *([1], приводится без доказательства). Если некоторая степень отображения полного метрического пространства в себя является сжимающим отображением, то само отображение имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Векторные пространства

Определение 1.16. *Векторным пространством* над *полем действительных (комплексных) чисел* называется множество L элементов $x,\ y,\ z, ...$ произвольной природы, для которых определены операции *сложения двух элементов* и *умножения элементов* на действительные (комплексные) числа, т. е.

1) каждой паре x, y элементов из L поставлен в соответствие некоторый элемент из L. который называется *суммой элементов* x, y и обозначается $x + y$;

2) каждому элементу x из L и каждому действительному (комплексному) числу α поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется *произведением элемента* x на число α и обозначается αx;

причём эти операции удовлетворяют следующим двум группам условий:

I. 1) $x + y = y + x$ (*коммутативность сложения*);

2) $x+(y+z) = (x+y)+z$ (*ассоциативность сложения*);

3) существует элемент, называемый *нулевым* и обозначаемый 0, такой, что

$$x + 0 = x,\ \forall x \in L;$$

4) $\forall x \in L\ \exists y \in L :\ x + y = 0$;

II. 5) $1x = x\ \forall x \in L$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (*ассоциативность умножения*);

7) $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$ (*дистрибутивность относительно числового множителя*);

8) $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$ (*дистрибутивность относительно элементов пространства*);

Для данного элемента $x \in L$ элемент $y \in L$. удовлетворяющий условию $x + y = 0$, называется противоположным элементу x и обозначается $-x$. Таким образом, по определению

$$x + (-x) = 0.$$

Элемент $x + (-y)$ называется разностью элементов x, y и обозначается $x - y$.

Элементы данного пространства обычно называют *векторами*, а операции сложения векторов и умножения вектора на число — *линейными*[1] *операциями*.

Определение 1.17. Векторное пространство L' называется *подпространством векторного пространства* L, если $L' \subset L$ и операции сложения векторов и умножения вектора на число в L' определены так же, как и L.

Из этого определения следует, что операции сложения элементов и умножения элемента на число, определенные в L, *замкнуты* в L', т. е. если x, y из L', то $x + y$ тоже из L', и $\alpha x \in L'$ для любого числа α.

Линейной комбинацией векторов $x_1, ..., x_n$ называется любой вектор вида

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n, \tag{1.7}$$

где $\alpha_1 ... \alpha_n$ — числовые множители. Линейная комбинация (1.7) называется *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n$ отличен от нуля.

Векторы $x_1, x_2 ... x_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация (1.7), равная нулю. Если же только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулю, то векторы $x_1, x_2 ... x_n$ называются *линейно независимыми*.

Определение 1.18. Произвольная система векторов называется *линейно независимой*, если любая ее конечная подсистема *линейно независима*.

[1] Линейность, как следствие непрерывности, полноты и замкнутости пространств, см. [2].

Определение 1.19. Векторное пространство называется *n-мерным*, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Векторное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ в нем существуют n линейно независимых векторов.

Заметим, что в линейной алгебре изучаются в основном только конечномерные пространства. Бесконечномерные пространства являются предметом изучения *математического* или *функционального анализа*.

Определение 1.20. Пусть задана некоторая система элементов векторного пространства L. Совокупность всех линейных комбинаций системы называется её *линейной оболочкой*.

Очевидно, линейная оболочка любой системы элементов векторного пространства L является подпространством этого пространства.

Определение 1.21. Векторное пространство X (над полем действительных или комплексных чисел) называется *нормированным*, если на X определена функция $\|x\| : x \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\begin{aligned} &1)\ \|x\| \geqslant 0\ \forall x \in X;\\ &2)\ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|\ \ \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ (\text{или } \alpha \in \mathbb{C});\\ &3)\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|\ \ \forall x, y \in X;\\ &4)\ \|x\| = 0\ \Rightarrow\ x = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Эта функция называется *нормой* в пространстве X, а число $\|x\|$ — *нормой элемента* или *вектора* x. Свойства 1) — 4) называются *аксиомами нормы*. В частности, свойство 2) называется *однородностью* нормы, а свойство 3) называется *неравенством треугольника*.

Пусть в линейном нормированном пространстве X выделена некоторая система элементов

$$x\alpha,\ \alpha \in A, \tag{1.9}$$

где A — множество индексов.

Определение 1.22. Система элементов (1.9) называется *полной* в пространстве X, если её линейная оболочка плотна в X.

Определение 1.23. Векторное нормированное пространство называется *сепарабельным*, если в нём существует счетная система элементов, линейная оболочка которой плотна в этом пространстве.

Из теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами следует, что в пространстве $C[a;b]$[2] система функций

$$1, x, x^2, ..., x^n, ... \tag{1.10}$$

является полной. Следовательно, *пространство* $C[a;b]$ *сепарабельное.*

Определение 1.24. Последовательность элементов $e_1, e_2, ..., e_n, ...$ векторного нормированного пространства X называется *базисом пространства* X, если каждый элемент $x \in X$ имеет и притом единственное разложение по этой системе, т. е. если существует и притом единственная последовательность чисел λ_n, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \tag{1.11}$$

где n — *размерность* пространства, в данном случае счетная.

[2]Пространство непрерывных функций на отрезке [a;b].

Определение 1.25. Если ортогональная система $\{e_\alpha\}$ полна (т. е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть все $\mathbb{R}$), то она называется *ортогональным базисом.*

Определение 1.26. Если норма каждого элемента ортогонального базиса равна 1, то система $\{e_\alpha\}$ называется *ортогональным нормированным базисом.*

Определение 1.27. Если система $\{e_\alpha\}$ (полная или нет) такова, что

$$(e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta, \\ 1 & \alpha = \beta, \end{cases}$$

то она называется *ортогональной нормированной* (короче *ортонормальной*) системой.

Если $\{e_\alpha\}$ — ортогональная система, то $\left\{\frac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|}\right\}$ — ортогональная нормированная система.

Теорема 1.14. *([1], приводится без доказательства). Во всяком сепарабельном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.*

Очевидно, что система функций (1.10), хотя и является полной в пространстве $C[a;b]$, однако она не будет базисом в этом пространстве. Типичным примером базиса является тригонометрическая система[3]

$$1, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx, ...$$

являющаяся базисом в пространстве $L_2[-\pi;\pi]$ (см. опред. 1.45, стр. 44).

Для важного понятия «*пополнение пространств*» необходимо распространить (дополнить) понятие изоморфизма (1.3) на векторные пространства.

[3]Полнота тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса [2].

Определение 1.28. Два векторных пространства, L и L^* называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если

$$x, y \in L;\ x^*, y^* \in L^*,$$

то

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*,$$

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*.$$

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации о д н о г о и т о г о же пространства. Примерами изоморфных линейных пространств могут служить арифметическое n-мерное пространство (действительное или комплексное) и пространство всех многочленов степени $\leqslant n-1$ (соответственно с действительными или комплексными коэффициентами) с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа.

Полное нормированное пространство X^* называется *пополнением нормированного пространства* X, если в X^* существует подпространство X', которое изоморфно пространству X и плотно в пространстве X^*.

Теорема 1.15. *([1], приводится без доказательства). Любое векторное нормированное пространство имеет пополнение.*

Определение евклидовых пространств

Один из хорошо известных способов введения нормы (1.8) в векторном пространстве — это задание в нем *скалярного произведения.*

Определение 1.29. *Скалярным произведением* в действительном пространстве $\mathbb{R}$, линейным относительно определенных

на нем операций, называется *действительная функция* (x, y), определенная для каждой пары элементов $x, y \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ (x, y) = (y, x), \\ &2)\ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \\ &3)\ (\lambda x, y) = \lambda (x, y), \\ &4)\ (x, x) \geqslant 0,\ x \neq 0;\ (x, x) = 0,\ x = 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Определение 1.30. Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}$ вводится норма с помощью формулы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{1.13}$$

Распространим (дополним) понятие изоморфизма (1.3), определение 1.28) (стр. 19) на евклидовы пространства.

Определение 1.31. Два евклидовых пространства, E и E^* называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если

$$x, y \in E;\ x^*, y^* \in E^*,$$

то

$$(x, y) = (x^*, y^*).$$

Изоморфизм евклидовых пространств — это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее как линейные операции (определение 1.28, стр. 19), заданные в этих пространствах, так и скалярное произведение (1.13).

Рассмотрим важный пример евклидова пространств и ортогонального базиса, который используется для ввода основной

ортонормированной декартовой системы координат в векторных пространствах.

Пример 1.1. n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, элементами которого служат системы действительных чисел $x = (x_1, ..., x_n)$, с линейными операциями сложения и умножения и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{1.14}$$

представляет собой хорошо известный пример евклидова пространства. Ортогональный нормированный базис в нем (один из бесконечного числа возможных) образуют векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} &= (1, 0, 0, ..., 0), \\ \mathbf{e}_2^{\mathrm{T}} &= (0, 1, 0, ..., 0), \\ &... \\ \mathbf{e}_n^{\mathrm{T}} &= (0, 0, 0, ..., 1). \end{aligned} \tag{1.15}$$

В трехмерных пространствах измерений физических объектов базисные вектора обозначаются:

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{j} = \mathbf{e}_2,\ \mathbf{k} = \mathbf{e}_3.$$

Теорема 1.16. *([1], приводится без доказательства). Любое евклидово пространство имеет пополнение.*

Пусть L — некоторое векторное подпространство евклидова пространства E.

Определение 1.32. Элемент $y_0 \in L$ называется *ортогональной проекцией элемента $x_0 \in E$ в подпространство L*, если

$$(x_0 - y_0, y) = 0,\ \forall y \in L. \tag{1.16}$$

Очевидно, любой элемент $x \in E$ может иметь только одну проекцию на данное подпространство L.

Определение 1.33. Если подпространство L евклидова пространства E полное, то у любого элемента $x \in E$ существует ортогональная проекция на подпространство L.

Векторные пространства со счетным базисом

Рассмотрим полные евклидовы пространства с предположением наличия в рассматриваемых пространствах счетного всюду плотного множества. Введем следующее определение.

Определение 1.34. Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется *гильбертовым пространством.*

Таким образом, гильбертовым пространством называется совокупность H элементов $f, g, ...$ произвольной природы, удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам).

I. H есть евклидово пространство (т. е. векторное пространство с заданным в нем скалярным произведением).

II. Пространство H п о л н о в смысле метрики

$$\rho(f, g) = \|f - g\| .$$

III. Пространство Н б е с к о н е ч н о м е р н о, т. е. в нем для любого n можно найти n линейно независимых элементов (счетный базис).

Чаще всего рассматриваются сепарабельные гильбертовы пространства, т. е. пространства, удовлетворяющие еще одной аксиоме.

IV. H с е п а р а б е л ь н о, т. е. в нем существует счетное всюду плотное множество.

Свойства изоморфизма гильбертовых пространств соответствуют определению 1.31 (стр. 20).

Теорема о изоморфизме.

Теорема 1.17. *([2], приводится без доказательства). Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.*

1.2 Системы векторов

В основу исчисления инвариантов положены алгебраические структуры, где перечисление элементов, их совокупностей, тождественно понятию последовательностей векторных величин. Соответственно, необходимо привести минимум определений алгебраических соотношений и структур [3], а также рассмотреть основные свойства перестановок, баз, определителей. Здесь используется алгебраическое понятие таблицы «матрица» для обозначения совокупности элементов, индексируемых по обозначению номера строки и столбца. В исчислении инвариантов буквально термин «матрица» не используется в силу ввода обозначений многоиндексных объектов [4], [5].

Понятие перестановки. Знак перестановки

Перестановка — это множество чисел $\{1, ..., n\}$, расположенное в определенном порядке. Обозначение $(i_1, ..., i_n)$. Говорят, что два числа в перестановке образуют инверсию, если большее стоит раньше меньшего. Говорят, что перестановка четная, если число инверсий в перестановке — четное. Соответственно, перестановка — нечетная, если число инверсий в перестановке

нечетное. По определению, знак перестановки равен 1, если перестановка четная; соответственно, знак равен -1, если перестановка нечетная.

П р и м е ч а н и е. Если $N(i_1, ..., i_n)$ число инверсий в перестановке, то знак перестановки равен

$$(-1)^{N(i_1,...,i_n)}.$$

.

Определение 1.35. Подстановка — это биекция множества натуральных чисел от 1 до n на себя.

Подстановка записывается в виде таблицы

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & ... & \beta_n \end{pmatrix},$$

в которой $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ — перестановки и

$$\sigma(\alpha_1) = \beta_1;\ ...,\ \sigma(\alpha_n) = \beta_n.$$

Говорят, что подстановка σ — четная подстановка, если перестановки
$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ имеют общую четность. Соответственно,
σ — нечетная подстановка, если имеют разную четность. По определению, знак подстановки $\mathrm{sgn}(\sigma)$ равен 1, если подстановка четная; соответственно, равен -1, если подстановка нечетная.

Определитель

Дана $n \times n$ матрица $A = (a_{ij})$. Определителем матрицы A называют сумму

$$\det(A) = \sum (-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \ldots a_{n,i_n},$$

в которой суммирование производится по всем перестановкам $(i_1 1, \ldots, i_n)$.

Равносильная форма определения: определитель — это сумма

$$\det(A) = \sum \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} \alpha_{\alpha_1,\beta_1} \alpha_{\alpha_2,\beta_2} \ldots \alpha_{\alpha_n,\beta_n},$$

в которой суммирование производится по всем подстановкам

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Свойства определителя

1) Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

2) Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то он сменит знак.

3) Если в определителе две строки (столбца) равны, то определитель равен нулю.

4) Если определитель содержит нулевую строку (столбец), то он равен нулю.

5) Если строку определителя домножить на число, то определитель домножится на это же число.

6) Если строка в определителя есть сумма двух строк, то определитель есть сумма двух определителей.

7) Определитель не изменится, если к его строке прибавить линейную комбинацию других его строк.

8) Если строка определителя является линейной комбинацией других его строк, то определитель равен нулю.

Алгебраическое дополнение и дополнительный минор

Представим определитель в виде суммы

$$\det(A) = C_{i1} + C_{i2} + ... + C_{in}, \tag{1.17}$$

где C_{ij} — сумма мономов, содержащих элемент a_{ij}. Тогда $C_{ij} = a_{ij}A_{ij}$. Выражение A_{ij} называется *алгебраическим дополнением* к месту (i, j). *Дополнительный минор* к месту (i, j) — это определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца (обозначается M_{ij}).

Имеет место формула, связывающая алгебраические дополнения и дополнительные миноры:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.18}$$

Разложение определителя по строке (столбцу)

Подставляя (1.18) в (1.17) получаем формулу разложения определителя по i-й строке:

$$\begin{aligned} \det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + ..+ \\ + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Аналогично, имеет место формула разложения определителя по j-му столбцу:

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + .. + \\ + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}. \tag{1.20}$$

С использованием знака суммы итог формул (1.19) и (1.20):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}. \tag{1.21}$$

Минор матрицы

Минор матрицы — это определитель, лежащий на пересечении выделенных строк и столбцов. Если выделена система строк $\{i_1, ..., i_k\}$ и столбцов $\{j_1, ..., j_k\}$, то соответствующий минор обозначается

$$M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}.$$

Для квадратных матриц определяется также дополнительный минор. Дополнительный минор — это определитель, который получается после вычеркивания выделенных строк и столбцов. Обозначается

$$\overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}.$$

Зафиксируем в определителе систему строк $\{i_1, ..., i_k\}$. Имеет место формула Лапласа, обобщающая формулу разложения определителя по строке:

$$\det(A) = \sum (-1)^{i+j} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \overline{M}_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}, \tag{1.22}$$

где $i = i_1 + ... + i_k$ и $j = j_1 + ... + j_k$, суммирование производится по всем наборам k столбцов $j_1 < ... < j_k$.

Формулы Крамера

Дана система n линейных уравнений от n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +...+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +...+ & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}. \tag{1.23}$$

Пусть Δ — определитель матрицы $A = (aj)$ и $\Delta_1, ..., \Delta_n$ система определителей, которые получаются из Δ заменой 1-го (соответственно, 2-го, ..., n-го) столбца на столбец свободных членов. Теорема Крамера утверждает, что если $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений (1.23) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Линейно независимая (зависимая) система

Система векторов $S = \{\overline{f}_1, ..., \overline{f}_k\}$ из координатного n-мерного пространства K^n называется *линейно независимой*, если равенство

$$\alpha_1\overline{f}_1 + ... + \alpha_k\overline{f}_k = \overline{0} \tag{1.24}$$

выполняется только в случае $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$.

П р и м е ч а н и е. Здесь слово «только» не может быть опущено.

Система векторов $S = \{\overline{f}_1, ..., \overline{f}_k\}$ называется *линейно зависимой*, если существует набор чисел $\alpha_1, ..., \alpha_k$ таких, что не все α_i равны нулю и $\alpha_1\overline{f}_1 + ... + \alpha_k\overline{f}_k = \overline{0}$.

П р и м е ч а н и е. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда в ней существует вектор, который линейно выражается через другие векторы этой системы.

Базис n-мерного координатного пространства

Система $B \subset K^n$ называется базисом n-мерного координатного пространства K^n, если

1) система B линейно независима,

2) любой вектор из K^n линейно выражается через B.

Примечание. Базис — это в точности максимальное линейно независимое подмножество в K^n. Число векторов во всяком базисе пространства K^n равно n.

База и ранг системы векторов

Дана система векторов $S \subset K^n$ и подсистема $B \subset S$. Говорят, что B база системы S, если

1) система B линейно независима,

2) любой вектор из S линейно выражается через B.

Примечание. База в S — это в точности максимальное линейно независимое подмножество в S. Во всякой базе системы векторов одинаковое число векторов. Именно этот факт дает возможность ввести понятие ранга системы векторов.

Ранг системы векторов — это число векторов во всякой базе этой системы.

Теорема о ранге матрицы

По определению, ранг матрицы — это ранг системы строк этой матрицы.

Теорема 1.18. *([3], без доказательства). Ранг матрицы равен наивысшему порядку отличного от нуля минора.*

Следствие 1.2. *Ранг системы строк любой матрицы равен рангу системы ее столбцов.*

Следствие 1.3. *Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда система его строк (столбцов) линейно зависима.*

Следствие 1.4. *Система однородных линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +...+ & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +...+ & a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\det(A) = 0.$$

Элементарные преобразования и эквивалентность матриц

Элементарные преобразования бывают 1-го и 2-го рода:

1-го рода. Прибавление к строке другой строки домноженной на произвольное число. Аналогично для столбцов.

2-го рода. Умножение строки (столбца) на произвольное число, отличное от нуля.

Говорят, что две матрицы эквивалентны (обозначение $A \sim B$), если одну можно получить из другой по цепочке элементарных преобразований.

Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Это дает возможность вычислить ранг матрицы, упрощая ее элементарными преобразованиями.

Фундаментальная система решений

Система линейных уравнений называется однородной, если в ней все свободные члены равны нулю (1.25). Система решений

$B = \overline{f}_1, ..., \overline{f}_k$ однородной системы линейных уравнений называется фундаментальной системой решений (далее ФСР), если

1) система B линейно независима,

2) решение системы (1.25) линейно выражается через B.

То есть если B есть ФСР, то любое решение системы (1.25) имеет вид

$$\overline{f} = \alpha_1 \overline{f}_1 + ... + \alpha_k \overline{f}_k,$$

где $\alpha_1, ..., \alpha_k$ — любые числа. Заметим, что $k = n - r$, где r — ранг матрицы $A = (aj)$.

Система линейных уравнений в векторной форме

Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида, заданную выражением (1.23). Соответствующую однородную систему линейных уравнений (1.25), для краткости, будем называться приведенной к (1.23). Любое решение $\overline{f}$ системы линейных уравнений (1.23) записывается ввиде

$$\overline{f} = \alpha_1 \overline{f}_1 + ... + \alpha_k \overline{f}_k,$$

где $\overline{f}_0$ — частное решение (1.23) а $\overline{f}_1, ..., \overline{f}_k$ — ФСР приведенной системы линейных уравнений (1.25).

Произведение матриц

Дана $m \times n$ матрица $A = (aj)$, $n \times k$ матрица $B = (bj)$. Тогда общий элемент матрицы $C = (cj) = AB$, записывается в виде

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}. \qquad (1.26)$$

С использованием знака суммы формула (1.26) имеет вид:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Обращение матриц

Матрица B называется обратной к матрице A, если $AB = BA = E$. Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$. Обратная матрица $B = (b_{ij})$ находятся единственным образом по формуле

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det(A)}.$$

Учитывая формулу (1.17), получаем

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det(A)}. \tag{1.27}$$

1.3 Топологические общие и линейные пространства

В разделе 1.1 было дано определение 1.16 (стр. 13) общего векторного пространства на множестве точек исходного метрического пространства, метризуемого системой аксиом (1.2). Без всяких оговорок свойств исходного множества, вводилось композиционное правило (1.1) и алгебраические операции метрической связи точек множества посредством вещественной функции. Метрика «решала» вопросы сходимости последовательностей множеств, полноты, замкнутости, компактности пространства, непрерывности его отображений. Последовательно вводилась аксиоматика функции нормы (1.8) и скалярного произведения (1.12). Формула скалярного произведения (1.13) позво-

ляет *геометризовать* векторы конечномерного евклидова пространства в смысле величины, угла и направления вектора. Это хороший пример формализации множества точек как системы метрических расстояний и перехода к *инвариантам* векторного пространства. Но тем не менее вещественная функция метрики вводится как аксиома (1.1) теории метрических пространств. По свойствам — это математический объект теории функций, далеко отстоящий от исходных абстрактных математических понятий. То же самое можно сказать об арифметических операция — они заявлены на уровне свойств операций вещественного поля. Но есть возможность более общего и абстрактного способа ввода понятия пространства, не теряющего общности с метрическим пространством. Точнее этот способ можно рассматривать как общий случай всех линейных пространств, в частности — метрического.

Множества, а точнее их системы окрестностей нуля $\{O_r\}$, тоже обладают свойством расстояний или радиусом r открытого шара O, ассоциированного с окрестностью элемента множества — точкой. Таким образом, вопросы сходимости последовательностей точек, полноты, замкнутости, компактности полученных пространств можно решить для произвольной совокупности точек путем ввода вспомогательной подсистемы — *топологии*, определенной на этом же множестве.

Итак, не вводя в данном множестве $\mathbb{R}$ метрику, можно на $\mathbb{R}$ определить систему *открытых множеств* посредством аксиом. Этот путь, обеспечивая значительно бóльшую свободу действий, приводит к топологическим пространствам, по отношению к которым метрические пространства представляют собой хотя и весьма важный, но несколько специальный случай [2].

Определение 1.36. Пусть X — некоторое множество — пространство-носитель. *Топологией* в X называется любая система τ его подмножеств G, удовлетворяющая требованиям:

1. Само множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат τ.

2. Сумма $\bigcup_\alpha G_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) и пересечение $\bigcap_{k=1}^n G_k$ любого конечного числа множеств из τ принадлежат τ.

Множество X с заданной в нем топологией τ, т. е. пара

$$(X, \tau), \tag{1.28}$$

называется *топологическим пространством*. Множества, принадлежащие системе τ, называются *открытыми*.

Топологическое пространство есть совокупность множества точек и введенной в нем топологии. Таким образом, задать топологическое пространство — это значит задать некоторое множество X и задать в нем топологию τ, т. е. указать те подмножества, которые считаются в X *открытыми*. Пару (x, τ), будем обозначать одной буквой T. Элементы топологического пространства, как и метрического, будем называть *точками*. На одном и том же множестве X можно вводить разные топологии, превращая его тем самым в различные топологические пространства.

Пополнение $T \setminus G$ открытых G в T есть *замкнутое* множество топологического пространства G. Из аксиом определения 1.36 следует, что:

а) пустое множество $\varnothing$ и все T замкнуты;

б) пересечение любого (конечного или бесконечного) числа и сумма конечного числа замкнутых множеств замкнуты.

На основе этих определений вводятся во всяком топологическом пространстве понятия окрестности, точки прикосновения, замыкания множества и т. д., как это сделано в разд. 1.1 для метрического пространства.

Окрестностью точки $x \in T$ называется всякое открытое множество $G \subset T$, содержащее точку x; точка $x \in T$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset T$, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M; x называется *предельной точкой* множества M, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M, отличную от x. Совокупность всех точек прикосновения множества M называется *замыканием* множества M и обозначается символом $[M]$. *Замкнутые множества* (определенные выше как дополнения открытых), и только они, удовлетворяют условию $[M] = M$. Как и в случае метрического пространства, [M] есть наименьшее замкнутое множество, содержащее M.

Так же, как и нормированные пространствах, содержащие базы (стр. 29) и базисы (опред. 1.24 на стр. 17, (1.15)), топологии имеют базу, но только множественной основы.

Определение 1.37. Совокупность $\mathbb{B}$ открытых подмножеств называется *базой топологии* пространства T, если всякое открытое множество в T может быть представлено как сумма некоторого числа (конечного или бесконечного) множеств из $\mathbb{B}$.

Так, например, совокупность всех открытых шаров (с произвольным центром и радиусом) образует базу в метрическом пространстве. Итак, топологию τ пространства T можно задать, указав в этом пространстве некоторую ее базу $\mathbb{B}$; эта топология τ совпадает с совокупностью множеств, представимых как суммы множеств из $\mathbb{B}$.

Важный класс топологических пространств образуют пространства со счетной базой, т. е. такие пространства, в которых существует хотя бы одна база, состоящая не более чем из счетного числа множеств. Пространства со счетной базой называют также пространствами со второй аксиомой счетности.

Если в топологическом пространстве T имеется счетная база, то в нем обязательно имеется *счетное всюду плотное мно-*

жество. Это такое счетное множество, замыкание которого есть все T. Действительно, пусть $\{G_n\}$ и есть такая база. Выберем в каждом из элементов этой базы произвольную точку x_n. Счетное множество $X = \{x_n\}$ всюду плотно в T, так как в противном случае непустое открытое множество $G = T \setminus [X]$ не содержало бы ни одной точки из X, что невозможно, поскольку G есть сумма некоторых множеств из системы $\{G_n\}$, а $x_n \in G_n$.

Топологические пространства со счетным всюду плотным множеством, как и метрические, называются *сепарабельными*.

Непрерывность отображений

На топологические пространства легко переносится знакомое в случае метрических пространств понятие *сходящейся последовательности*. Именно, последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ точек из T называется *сходящейся к точке* x, если любая окрестность точки x содержит все точки этой последовательности, начиная с некоторой. Однако в топологических пространствах это понятие сходимости не играет той фундаментальной роли, которая ему принадлежит в метрических пространствах. Дело в том, что в метрическом пространстве R точка x есть точка прикосновения множества $M \subset R$ в том и только том случае, когда в M существует последовательность, сходящаяся к x, тогда как в топологическом пространстве это, вообще говоря, не так. Из того, что x есть точка прикосновения для M (т. е. $x \in [M]$) в топологическом пространстве T, не вытекает существование в M последовательности, сходящейся к x.

Понятие непрерывного отображения, введенное нами для метрических пространств (опред. 1.12, стр. 11), естественно обобщается на произвольные топологические пространства.

Определение 1.38. Пусть X и Y — два топологических пространства. Отображение f пространства X в пространство

Y называется *непрерывным в точке* x_0, если для любой окрестности U_{y_0} точки $y_0 = f(x_0)$ найдется такая окрестность V_{x_0}, точки x_0, что $f(V_{x_0}) \subset U_{y_0}$. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

В частности, непрерывное отображение топологического пространства X в числовую прямую называется *непрерывной функцией* на этом пространстве.

Для метрических пространств выше приведенное определение превращается в то определение непрерывности отображения одного метрического пространства в другое, которое было в определении 1.12, стр. 11.

Определение носит «локальный» характер. Непрерывность отображения f на всем X определяется через непрерывность f в каждой точке. Оказывается, что понятие непрерывности отображения одного топологического пространства в другое можно сформулировать в терминах открытых множеств, т. е. в терминах топологии этих пространств.

Теорема 1.19. *([2], приводится без доказательства). Для того чтобы отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз $\Gamma = f^{-1}(G)$ всякого открытого множества $G \subset Y$ был открыт (в X).*

Теорема 1.20. *([2], приводится без доказательства). Для того чтобы отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y было непрерывно, необходимо и достаточно, чтобы прообраз всякого замкнутого множества из Y был замкнут (в X).*

Отображение называется *открытым*, если оно переводит каждое открытое множество снова в открытое. Отображение, переводящее каждое замкнутое множество в замкнутое, называется *замкнутым*.

На топологические пространства распространяется понятие гомеоморфизма для метрических пространств (опред. 1.12, стр. 11), а именно, отображение f топологического пространства X на топологическое пространство Y называется *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно; пространства X и Y при этом называют *гомеоморфными*. Гомеоморфные пространства обладают одними и теми же топологическими свойствами, и с топологической точки зрения их можно рассматривать просто как два экземпляра одного и того же пространства. Топологии в двух гомеоморфных пространствах служат *образами* и *прообразами* друг друга. Отношение гомеоморфности рефлексивно, симметрично и транзитивно; поэтому любая совокупность топологических пространств распадается на непересекающиеся классы гомеоморфных между собой пространств.

1.3.1 Топологические линейные пространства

Определение 1.39. Множество E называется *топологическим линейным пространством*, если

I. E представляет собой линейное пространство (с умножением элементов на действительные или комплексные числа).

II. E является топологическим пространством.

III. Операции сложения и умножения на числа в E непрерывны относительно заданной в E топологии. Подробнее последнее условие означает следующее:

   1) если $z_0 = x_0 + y_0$, то для каждой окрестности U точки z_0 можно указать такие окрестности V и W точек x_0 и y_0 соответственно, что $x + y = U$ при $x \in V,\ y \in W$;

   2) если $\alpha_0 x_0 = y_0$, то для любой окрестности U точки y_0 существуют такая окрестность V точки x_0 и такое число $\varepsilon > 0$, что $\alpha x \in U$ при $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ и $x \in V$.

Из связи, существующей в линейном топологическом пространстве между алгебраическими операциями и топологией, вытекает, что топология в таком пространстве полностью определяется заданием системы *окрестностей нуля*. Действительно, пусть x — точка линейного топологического пространства E, и U — некоторая окрестность нуля в E. Тогда $U + x$ — «сдвиг» этой окрестности на x — есть окрестность точки x; очевидно, что любая окрестность любой точки $x \in E$ может быть получена таким способом.

Из непрерывности операций сложения и умножения на числа в топологическом линейном пространстве E непосредственно вытекают следующие утверждения.

а) Если U и V — открытые множества в E, то и множество $U + V$ (т. е. совокупность всех элементов вида $x + y$, $x \in U, y \in V$) открыто.

б) Если U открыто, то и множество λU (т. е. совокупность всех элементов вида $\lambda x, x \in U$) при любом $\lambda \neq 0$ открыто.

в) Если F замкнутое множество в E, то и λF замкнуто при любом λ.

К топологическим линейным пространствам относятся прежде всего все нормированные пространства. Действительно, из свойств нормы сразу следует, что операции сложения векторов и умножения их на числа в нормированном пространстве непрерывны в той топологии, которая определяется нормой. Также линейные топологические пространства задают всевозможные счетные вещественные (комплексные) последовательности

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...),$$

определяющие систему окрестностей нуля в пространстве $\mathbb{R}^\infty$. Задаются окрестности $U(k_1, ..., k_r; \varepsilon)$, где $k_1, ..., k_r$ — целые чис-

ла, $\varepsilon > 0$. Окрестность состоит из всех тех чисел $x \in \mathbb{R}^\infty$, которые удовлетворяют условиям:

$$|x_{k_i}| < \varepsilon,\ i = 1, 2, ...,\ r.$$

Важнейшим примером линейной топологии является пространство $K[a, b]$ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Топология в $K[a, b]$ определяется с помощью системы окрестностей нуля [2]. Каждая такая окрестность $U_{m,\varepsilon}$ определяется номером m и числом $\varepsilon > 0$ и состоит из всех функций φ, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi^{(k)}(x)| < \varepsilon,\ k = 0, 1, 2, ...,\ m,$$

где $\varphi^{(k)}$ — производная k-го порядка от функции φ.

Банаховы пространства

Ба́наховы пространства, B-пространства — определяются как расширенные, по свойству линейности, понятия полных нормированных метрических пространств, включающие векторные, евклидовы и гильбертовы пространства. Большее обобщение достигается путем ввода топологии в существующее пространство, при этом выполняются аксиомы расстояний (1.1) и нормы (1.8). За счет дополнительного теоретико множественного обобщения гильбертово пространство однозначно банахово пространство, обратное не верно.

Топологическое расширение метрических пространств приводит к основным пространствам функционального анализа — собственно функциям, которые проявляют себя как элементы пространства при суммировании или интегрировании, при разбиении пространства на классы эквивалентности, а также точками.

Инвариантные свойства функций проявляются при переводе их дифференциалов в аффинные координатные системы (разд. 3), а производные согласуются с направлениями линейного направленного перемещения (разд. 2). Таким образом совершается переход в координатное векторное пространство с характеристиками углов, длин и расстояний.

1.3.2 Примеры функциональных пространств

Рассмотрим важнейшие нормированные пространства функций, где элементами являются классы эквивалентностей функций: суммируемых, интегрируемые по мере, интегрируемые по квадрату (преобразования и координаты Фурье), факторизуемых линейными функционалами сопряженного пространства.

Элементами линейного пространства S (*пространство Шварца*) являются бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ комплекснозначные функции, каждая из которых удовлетворяет условию: как она сама, так и её производные любого порядка при $x \to \pm\infty$ стремятся к нулю быстрее любой степени $1/x$. Такие функции называются *быстро убывающими*.

Понятие сходимости на S

Определение 1.40. Последовательность функций $\varphi(x) \in S$ называется *сходящейся в S к функции* $\varphi(x) \in S$, если для любых целых неотрицательных k и m выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m(\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x))| = 0,$$

т. е. для любых k и m $x^m(\varphi_n^{(k)}(x)$ при $n \to \infty$ сходится к $x^m(\varphi^{(k)}(x)$ равномерно по x на $\mathbb{R}$.

Последовательность функций из S называется *сходящейся в S*, если она в S сходится к некоторой функции из S.

Определение 1.41. Две функции, f и g, заданные на одном и том же измеримом множестве E, называются *эквивалентными* (обозначение: $f \sim g$), если значение меры

$$\mu\{x|f(x) \neq g(x)\} = 0.$$

Определение 1.42. *Пространством* L_1 называется нормированное пространство, элементами которого служат классы *эквивалентных* между собой суммируемых функций; сложение элементов в L_1 и умножение их на числа определяются как обычное сложение и умножение функций; норма задается формулой

$$\|f\| = \int |f(x)| d\mu. \tag{1.29}$$

В L_1, как и во всяком нормированном пространстве, с помощью формулы

$$\rho(f, g) = \|f - g\|$$

вводится расстояние. Сходимость последовательности суммируемых функций в смысле этого расстояния называют *сходимостью в среднем*. Пространство L_1 можно считать состоящим из комплексных функций (комплексное L_1) или из одних только действительных (действительное L_1).

Следует пояснить значение f и μ в (1.29) (Интеграл Лебега). Основная идея построения интеграла Лебега состоит в том, что здесь, в отличие от интеграла Римана, точки x группируются не по признаку их близости на оси, а по признаку близости значений функции в этих точках. Это сразу же позволяет распространить понятие интеграла на весьма широкий класс функций.

Кроме того, интеграл Лебега определяется совершенно одинаково для функций, заданных на любых пространствах с мерой, в то время как интеграл Римана вводится сначала для функций одного переменного, а затем уже с соответствующими изменениями переносится на случай нескольких переменных.

Для функций же на абстрактных пространствах с мерой интеграл Римана вообще не имеет смысла. Например для вероятностного пространства $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, где Ω любое измеримое множество, $\mathbb{F}$ система множеств на Ω, P функция измерения множеств, так что $P(\Omega) = 1$.

Определение 1.43. Функция $f(x)$ определенная на некотором пространстве X с заданной на нем мерой, называется *простой*, если она измерима и принимает не более, чем счётное число значений.

Структура простых функций характеризуется следующей теоремой.

Теорема 1.21. *([2], приводится без доказательства). Функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число различных значений*

$$y_1, y_2, ..., y_n, ...,$$

измерима в том и только том случае, если все множества

$$A_n = \{x | f(x) = y_n\}$$

измеримы.

Теорема 1.22. *([2], приводится без доказательства). Для измеримости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде предела равномерно сходящейся последовательности простых измеримых функций.*

Пусть f — некоторая простая функция, принимающая значения

$$y_1, y_2, ..., ...;\ y) i \neq y_j \text{ при } i \neq j,$$

и пусть A — некоторое измеримое подмножество X.

Можно определить интеграл от функции f по множеству A равенством

$$\int\limits_A f(x)d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \text{ где } A_n = \{x | x \in A, f(x) = y_n\}, \quad (1.30)$$

если ряд справа сходится.

Определение 1.44. Простая функция f называется *интегрируемой* или *суммируемой* (по мере μ) на множестве A, если ряд (1.30) абсолютно сходится. Если f интегрируема, то сумма ряда (1.30) называется *интегралом* от f по множеству A.

Пространство L_1 представляет собой полное нормированное (т. е. банахово) линейное пространство. Однако оно не является евклидовым: определенную в нем норму нельзя задать с помощью какого-либо скалярного произведения. Например, для интегрируемых на отрезке $[0, 2\pi]$ функций $f \equiv 1$, $g = sin\ x$ соотношение

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

в L_1 не выполняется.

Функциональное пространство, не только нормированное, но и евклидово, можно построить, взяв совокупность функций с интегрируемым квадратом. Рассмотрим действительные функции f, определенные на некотором пространстве X, с заданной на нем мерой μ. Все функции предполагаются измеримыми и определенными на X почти всюду. Эквивалентные между собой функции не различаются.

Определение 1.45. Функция f называется *функцией с интегрируемым квадратом на* X, если интеграл

$$\int f^2(x)d\mu$$

существует (конечен). Совокупность всех таких функций обозначим $L_2(X, \mu)$ или, короче, L_2.

Таким образом, *совокупность L_2 функций с интегрируемым квадратом есть линейное пространство.* Скалярное произведение в L_2

$$(f, g) = \int f(x)g(x)d\mu. \tag{1.31}$$

Выполняются все требования, входящие в определение скалярного произведения:

$$\begin{aligned} &1)\ (f, g) = (g, f), \\ &2)\ (f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g), \\ &3)\ (\alpha f, g) = \alpha(f, g), \\ &4)\ (f, f) > 0, \text{ если } f = 0. \end{aligned} \tag{1.32}$$

В частности, выполнение условия 4) обеспечивается тем, что эквивалентные между собой функции не различимы (за нулевой элемент, таким образом, принимается совокупность всех функций на X, эквивалентных $f \equiv 0$).

Определение 1.46. *Евклидовым пространством L_2* называется векторное пространство, состоящее из классов эквивалентных между собой функций с интегрируемым квадратом, в котором скалярное произведение определено формулой (1.31).

Комплексная функция f, определенная на некотором пространстве X с заданной на нем мерой μ, называется *функцией с интегрируемым квадратом*, если интеграл конечен:

$$\int\limits_X |f(x)|^2 d\mu. \tag{1.33}$$

Определив сложение таких функций и умножение их на числа обычным образом и введя скалярное произведение

$(f,g)=\int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu$, получаем евклидово пространство, называемое *комплексным пространством* L_2 (при этом, как и в действительном случае, считаем эквивалентные между собой функции одним и тем же элементом пространства). Это пространство полно, а если мера μ имеет счетный базис, то и сепарабельно. Таким образом, *комплексное пространство* L_2, *отвечающее мере со счетным базисом, есть комплексное сепарабельное гильбертово пространство.*

1.4 Множественные структуры алгебры

1.4.1 Линейная алгебра множеств

Напомним некоторые известные из курса анализа [2] определения и свойства множеств точек на плоскости и несколько дополним их в интересах дальнейшего изложения. Известны правила композиции операций «сложения» $\cup$ и «умножения» $\cap$ множеств. Эти операции объединения и пересечения множеств, по своему определению *коммутативны* и *ассоциативны*, т. е.

$$A\cup B=B\cup A,\ (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$

$$A\cap B=B\cap A,\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), \tag{1.34}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C). \tag{1.35}$$

Множества точек на плоскости

Определение 1.47. Точка z_0 называется *предельной* для некоторого множества E, если каждая окрестность этой точки содержит бесконечное множество точек, принадлежащих E.

Определение 1.48. Множество E точек плоскости называется *ограниченным*, если все его точки заключаются внутри некоторого круга с центром в начале координат.

Определение 1.49. Множество F (ограниченное или неограниченное) называется *замкнутым*, если ни одна точка, не принадлежащая F, не может быть предельной для него. Иными словами, замкнутое множество либо совсем не имеет предельных точек, либо содержит все свои предельные точки.

Кольцо множеств

Определение 1.50. *Системой множеств* называется всякое множество, элементы которого сами представляют собой какие-либо множества.

Если не оговорено противное, то будем рассматривать системы таких множеств, каждое из которых является подмножеством некоторого фиксированного множества X. Системы множеств будем обозначать прописными готическими буквами. Основной интерес будут представлять системы множеств, удовлетворяющие (по отношению к (1.34), (1.35)) некоторым определенным условиям *замкнутости*.

Определение 1.51. Непустая система множеств Re называется *кольцом*, если она обладает тем свойством, что из $A \in \mathrm{Re}$ и $B \in \mathrm{Re}$ следует $A \triangle B \in \mathrm{Re}$ и $AB \cap \mathrm{Re}$ ($\triangle$ – операция симметрической разности) [2].

Так как для любых A и B

$$A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$$

и

$$A \setminus B = A \triangle (A \cap B),$$

то из $A \in \mathrm{Re}$ и $B \in \mathrm{Re}$ вытекает также принадлежность к Re множеств $A \triangle B$ и $A \setminus B$. Таким образом, кольцо множеств есть система множеств, *замкнутая* по отношению к взятию *суммы* и *пересечения*, вычитанию и образованию симметрической разности. Очевидно, что кольцо *замкнуто* и по отношению к образованию любых *конечных сумм* и *пересечений* вида

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \; D = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

Любое кольцо содержит пустое множество $\varnothing$, так как всегда $A \setminus A = \varnothing$. Система, состоящая только из пустого множества, представляет собой наименьшее возможное кольцо множеств.

Определение 1.52. Множество E называется *единицей* системы множеств $\mathfrak{S}$, если оно принадлежит $\mathfrak{S}$ и если для любого $A \in \mathfrak{S}$ имеет место равенство

$$A \cap E = A.$$

Таким образом, единица системы множеств $\mathfrak{S}$ есть не что иное, как максимальное множество этой системы, содержащее все другие входящие в $\mathfrak{S}$ множества.

Определение 1.53. Кольцо множеств с единицей называется *алгеброй* множеств [2].

Примеры.

1. Для любого множества A система $\mathfrak{M}(A)$ всех его подмножеств представляет собой алгебру множеств с единицей $E = A$.

2. Для любого непустого множества A система $\{\varnothing, A\}$, состоящая из множества A и пустого множества $\varnothing$, образует алгебру множеств с единицей $E = A$.

3. Система всех конечных подмножеств произвольного множества A представляет собой кольцо множеств. Это кольцо будет алгеброй в том и только том случае, когда множество A само конечно.

4. Система всех ограниченных подмножеств числовой прямой является кольцом множеств, не содержащим единицы.

1.4.2 Алгебраическое поле

Пусть M — произвольное множество. Обозначим через

$$M \times M, \tag{1.36}$$

т. е. M^2 совокупность всех упорядоченных пар (a, b), где

$$a, b \in M.$$

Определение 1.54. Говорят, что в M задано *бинарное отношение* $\mathfrak{\varphi}$, если в M^2 выделено произвольное подмножество $R_{\mathfrak{\varphi}}$.

Точнее говоря, элемент a находится в отношении $\mathfrak{\varphi}$ к элементу b — обозначение $a\mathfrak{\varphi}b$, $a \overset{\mathfrak{\varphi}}{\sim} b$ — в том и только том случае, когда пара $(a, b) \in R_{\mathfrak{\varphi}}$.

Примером бинарного отношения может служить отношение тождества $\mathfrak{\varepsilon}$; именно, $a\mathfrak{\varepsilon}b$ в том и только том случае, если $a = b$; иначе говоря, это — отношение, задаваемое диагональю $\triangle$ в $M \times M$, т. е. подмножеством пар вида (a, a). Ясно, что всякое отношение эквивалентности $\mathfrak{\varphi}$ в некотором множестве M

$$R_{\mathfrak{\varphi}} \subset M \times M \tag{1.37}$$

есть бинарное отношение, подчиненное следующим условиям:

1) Диагональ $\triangle$ принадлежит $R_{\mathfrak{\varphi}}$ (рефлексивность).

2) Если $(a, b) \in R_\varphi$, то и $(b, a) \in R_\varphi$ (симметричность).

3) Если $(a, b) \in R_\varphi$ и $(b, c) \in R_\varphi$, то и $(a, c) \in R_\varphi$ (транзитивность).

Понятие эквивалентности является частным случаем более общего понятия бинарного отношения.

Определение 1.55. *Эквивалентность* — это бинарное отношение, удовлетворяющее условиям рефлексивности, транзитивности и симметричности.

Формально с бинарного отношения (1.36) начинается построение систем множеств и их отображений. Делается это на основе прямого произведения.

Определение 1.56. Прямое, или декартово произведение двух множеств — это множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных множеств.

Также бинарное отношение (1.36), со свойствами отображения, находится в основе построения алгебраических систем и линейных топологий. Здесь отношение — это *закон композиции* или правило *алгебраических операций*.

Определение 1.57. Внутренним *законом композиции* или *алгебраической операцией*, заданной на множестве M, называется отображение произведения $M \times M$ (декартового квадрата) в M

$$M \times M \to M. \tag{1.38}$$

Иначе говоря, закон композиции обобщает алгебраическую операцию, а операция — это *правило*, согласно которому упорядоченной паре (a, b), где $a, b \in M$, сопоставляется третий элемент[4] $c \in M$.

[4]По существу происходит свертка «два в одно».

Пусть a и b — элементы из M, тогда образ пары (a, b) при отображении (1.38) называется также их произведением относительно закона композиции и будет обозначаться через ab. Иногда обозначается $a \cdot b$, а во многих случаях удобно использовать и аддитивное обозначение и писать, таким образом, $a+b$. Элемент $a + b$ называется *суммой* x и y. Обычно обозначение $a + b$ используют только в том случае, когла выполняется соотношение $a + b = b + a$.

Пусть M — множество, наделенное законом композиции. *Произведение* элементов a, b, c из M можно составить двумя способами: $(ab)c$ и $a(bc)$. Если $(ab)c = a(bc)$ для всех a, b, c из M, то говорят, что закон композиции *ассоциативен* [6].

Ассоциативность (1.38) формирует алгебраические *полугруппы* со одной бинарной операцией, осуществляя переход от множеств к их алгебраическим системам. Введем обозначение *бинарной*[5] операции по закону композиции:

$$\circ : M \times M \to M. \tag{1.39}$$

Алгебраические структуры (алгебры множеств, алгебры), начиная с полугрупп, формируются вводом аксиоматики на основе закона композиции и обозначений бинарных операций, где операции обладают лишь заявленными свойствами, но абстрактны по отношению к конкретному результату отображения.

Алгебры с одной бинарной операцией

Определение 1.58. Композиции элементов из M с одной бинарной операцией:

[5] унарные операции над одним элементом тоже приводят к отображению (1.38), например дополнение в множествах или инверсия в обратный элемент.

1) *Полугруппа* — алгебра с одной ассоциативной бинарной операцией:

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

2) *Моноид* — полугруппа с единицей:

$$\exists e \; \forall a \; a \circ e = e \circ a = a.$$

3) *Группа* — это моноид, в котором

$$\forall a \; \exists a^{-1} \; a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e,$$

где элемент a^{-1} называется *обратным*.

Если для всяких двух элементов a и b имеет место равенство $a \circ b = b \circ a$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Для *аддитивной* абелевой группы групповая операция записывается в виде суммы $+$ или $\oplus$, обратный элемент к a обозначается $-a$, единица группы (нейтральный элемент) обозначается 0 и называется *нулем*.

Для *мультипликативной* абелевой группы групповая операция записывается в виде произведения $\cdot$ или $\otimes$, обратный элемент к a обозначается a^{-1}, единица группы (нейтральный элемент) обозначается e и называется *единицей*.

Алгебры с двумя бинарными операциями.

Алгебры с двумя бинарными операциями $\oplus$ и $\otimes$, которые условно называются «сложение» и «умножение» ($+$ аддитивная, $\cdot$ мультипликативная операция).

Определение 1.59. *Кольцо* — это множество M с двумя бинарными операциями $\oplus$ и $\otimes$, в котором:

1. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ сложение *ассоциативно*;

2. $\exists 0 \in M \; \forall a \;\; a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ существует *нуль*;

3. $\forall a \; \exists -a \;\; a \oplus -a = 0$ существует *обратный элемент*;

4. $a \oplus b = b \oplus a$ сложение коммутативно, то есть кольцо *абелева группа* по сложению;

5. $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$ умножение ассоциативно;

6. $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ умножение *дистрибутивно слева*,

   $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ умножение *дистрибутивно справа*.

   Кольцо называется *коммутативным*, если

7. $a \otimes b = b \otimes a$ умножение коммутативно.

   Коммутативное кольцо называется кольцом с *единицей*, если

8. $\exists 1 \in M \;\; a \oplus 1 = 1 \oplus a = a$ существует единица, то есть кольцо с единицей – моноид по умножению (нет обратного элемента по умножению).

Определение 1.60. *Поле* — это множество M, коммутативное кольцо с единицей, где дополнительно ко всем свойствам кольца существует обратный элемент по умножению:

$$\forall a \neq 0 \; \exists a^{-1} \;\; a^{-1} \otimes a = 1.$$

Поле — также абелева группа по сложению и по умножению.

Примерами полей являются: поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Примерами колец являются перечисленные поля, а также кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, кольцо многочленов $K[x]$, кольцо $n \times n$ матриц, кольцо последовательностей, и т. д.

Определение 1.61. [6] Пусть A — кольцо. *Левый модуль* над A, или левый A-модуль M, — это абелева группа, обычно записываемая аддитивно, вместе с некоторым действием A на M, при этом A рассматривается как мультипликативный моноид[6]. Для всех $a, b \in A$ и $x, y \in M$ выполнены соотношения[7]

$$(a + b)x = ax + bx; \quad a(x + y) = ax + ay. \tag{1.40}$$

Аналогичным образом определяют *правый* A-модуль. В дальнейшем изложении будем называть их просто A-модулями или даже модулями, когда ясно, о каком кольце идет речь.

Другими словами — модуль M, это абелева группа по сложению, на которую действует коммутативное кольцо с единицей. Действие коммутативного кольца на M тождественно действию элементов поля на элементы векторного пространства (произведение на внешний скаляр). «Модуль над A» тождественно «Пространство над полем». Определяем векторное пространство из двух составных частей.

Определение 1.62. [6] Модуль на полем называется *векторным пространством.*

Примеры заданий

1. *Метрические пространства.*

[6] Стр. 52, определение 1.59, пп. 5, 8.

[7] Согласно свойству дистрибутивности кольца, стр. 52, определение 1.59, п. 6.

1.1 Покажите, что для любого множества X функция

$$X \times X \to \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \begin{cases} 0, \text{ если } x = y, \\ 1, \text{ если } x \neq y, \end{cases}$$

является метрикой.

1.2 Докажите, что следующая функция есть метрика:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto |x - y|.$$

1.3 Докажите, что следующая функция есть метрика:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

2. *Векторные пространства.*

2.1 Векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{x}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ сами образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе:

а) $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 1, 2), \mathbf{e}_3 = (1, 2, 3); \mathbf{x} = (6, 9, 14)$;

б) $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -3), \mathbf{e}_2 = (3, 2, -5), \mathbf{e}_3 = (1, -1, 1); \mathbf{x} = (6, 2, -7)$;

в) $\mathbf{e}_1 = (1, 2, -1, -2)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 3, 0, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 2, 1, 3)$, $\mathbf{e}_4 = (1, 3, -1, 0)$; $\mathbf{x} = (7, 14, -1, 2)$.

2.2 Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

а) поменять местами два вектора первого базиса?

б) поменять местами два вектора второго базиса?

в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

2.3 Является ли линейным подпространством соответствующего векторного пространства каждая из следующих совокупностей векторов:

а) все векторы n-мерного векторного пространства, координаты, которых целые числа?

б) все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат $0x$ и $0y$?

в) все векторы плоскости, концы которых лежат на данной прямой (начало любого вектора, если не оговорено противное, предполагается совпадающим с началом координат)?

3. *Евклидовы пространства.*

3.1 Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

а) $(1, -2, 2, -3),\ (2, -3, 2, 4)$.

б) $(1, 1, 1, 2),\ (1, 2, 3, -3)$.

3.2 Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

а) $(2/3, 1/3, 2/3),\ (1/3, 2/3, -2/3)$.

б) $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2),\ (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.

3.3 *Ортогональным дополнением подпространства L пространства R_n* называется совокупность L^* всех векторов из R_n, каждый из которых ортогонален ко всем векторам из L.

Доказать, что:

а) L^* является линейным подпространством пространства R_n;

б) сумма размерностей L и L^* равна n;

в) пространство R_n есть прямая сумма подпространств L и L^*.

4. *Группы, кольца, поля.*

Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами:

а) целые числа относительно сложения;

б) четные числа относительно сложения;

в) целые числа, кратные данному натуральному числу n, относительно сложения.

2 Конечномерные векторные пространства

Рассмотрим основные векторные объекты. Уже были даны определения общему векторному пространству в виде восьми классических аксиом (1.16) на стр. 13. Теперь покажем несколько своеобразный подход в трактовке векторных пространств [7]. Отдельно дается определение алгебраическому полю и векторному пространству, но в обоих случаях строго по прототипу восьми аксиом классического определения (1.16). Совместно аксиомы характеризуют объекты, совокупности которых рассматриваются как инварианты в тензорном анализе. В этом разделе разберемся в особенностях векторного пространства совместно с дуальным его представлением — пространством функционалов.

Поля.

Определим общие факты о скалярах.

Определение 2.1. Множество, на котором выполнены следующие условия

А) каждой паре скаляров α, β отвечает скаляр $\alpha + \beta$, называемый *суммой* α и β, причем

1) сложение *коммутативно*, $\alpha + \beta = \alpha + \beta + \alpha$,

2) сложение *ассоциативно*, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

3) существует однозначно определенный скаляр 0 (называемый *нулем*) такой, что $\alpha + 0 = \alpha$ для каждого скаляра α,

4) каждому скаляру α отвечает однозначно определенный скаляр $-\alpha$ такой, $\alpha + (-\alpha) = 0$;

Б) каждой паре скаляров α, β отвечает скаляр $\alpha\beta$, называемый *произведением* α и β, причем

1) умножение *коммутативно*, $\alpha\beta = \beta\alpha$,

2) умножение *ассоциативно*, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$,

3) существует однозначно определенный ненулевой скаляр 1 (называемый *единицей*) такой, что $\alpha 1 = \alpha$ для каждого скаляра α,

4) каждому ненулевому скаляру α отвечает однозначно определенный скаляр α^{-1} (или $\frac{1}{\alpha}$) такой, что $\alpha\alpha^{-1} = 1$;

В) умножение *дистрибутивно* относительно сложения, $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,

с заданными на нем операциями, называется *полем*.

В нижеследующем определении предполагается, что задано некоторое поле $\mathscr{F}$ и все рассматриваемые скаляры должны быть его элементами.

Определение 2.2. *Векторным пространством* называется множество $\mathscr{V}$ элементов, именуемых векторами, удовлетворяющее следующим аксиомам:

А) Каждой паре x, y векторов из $\mathscr{V}$ отвечает вектор $x + y$, называемый *суммой* x и y, причем

1) *сложение коммутативно*, $x + y = y + x$,

2) *сложение ассоциативно*, $x + (y + z) = (x + y) + z$,

3) в $\mathscr{V}$ существует однозначно определенный вектор $\mathbf{0}$ (называемый *началом*) такой, что $x + \mathbf{0} = x$ для каждого вектора x,

4) каждому вектору x из $\mathscr{V}$ отвечает однозначно определенный вектор $-x$ такой, что $x + (-x) = \mathbf{0}$.

Б) Каждой паре α, x где α — скаляр, а x — вектор из $\mathscr{V}$, отвечает вектор αx, называемый *произведением* α и x, причем

1) умножение на скаляры *ассоциативно*, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

2) $1x = x$ для каждого вектора x.

В) Законы дистрибутивности[1]:

1) умножение на скаляры дистрибутивно относительно сложения векторов, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, и

2) умножение на векторы дистрибутивно относительно сложения скаляров, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Отношение между векторным пространством $\mathscr{V}$ и основным полем $\mathscr{F}$ выражают, говоря, что $\mathscr{V}$ — векторное пространство над $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{F}$ — поле $\mathscr{R}$ вещественных чисел, то $\mathscr{V}$ называется вещественным векторным пространством; аналогично, если $\mathscr{F}$ — поле $\mathscr{Q}$ или $\mathscr{C}$, говорят о рациональном или, соответственно, комплексном векторных пространствах.

Следует сделать несколько замечаний относительно аксиом и обозначений. Существуют черты сходства (и в равной мере различия) между аксиомами поля и аксиомами векторного пространства над полем. В обоих случаях аксиомы А описывают аддитивную структуру системы, аксиомы Б — ее мультипликативную структуру, а аксиомы В устанавливают связь между этими структурами. Кто знаком с алгебраической терминологией, узнает в аксиомах А определяющие условия коммутативной группы; аксиомы Б и В выражают тот факт, что эта группа определяет скаляры своими операторами. Попутно заметим, что когда скаляры являются элементами не поля, а кольца, то соответствующее алгебраическое понятия векторного пространства обобщается модулем (1.61) на стр. 54.[2]

[1] Прототип свойств дистрибутивности операций действия кольца на модуль (1.40) и операций кольца (опред. 1.59, п. 6, стр. 52).

[2] Поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, линейное пространство $\mathbb{L}$, векторное пространство $\mathscr{V}$ (в общем случае линейное, в частном алгебраическое или геометризованное)

Базисы и размерность.

Некоторые замечания частного характера к определению базиса и размерности (опред. 1.24, стр. 17).

Векторное пространство *конечномерно*, если оно имеет конечный базис.

Теорема 2.1. *([7], приводится без доказательства). Все базисы конечномерного векторного пространства $\mathbb{V}$ состоят из одинакового числа векторов.*

Теорема 2.2. *([7], приводится без доказательства). Каждое множество из $n+1$ векторов n-мерного векторного пространства $\mathbb{V}$ линейно зависимо. Множество из n векторов пространства $\mathbb{V}$ является базисом тогда и только тогда, когда оно линейно независимо, или, иначе, тогда и только тогда, когда каждый вектор из $\mathbb{V}$ является линейной комбинацией элементов этого множества.*

2.1 Подпространства векторных пространств

Для геометрии точки — это объекты в аффинных координатных системах, порождаемые при переводе в координаты векторов из некоторого пространства. Совокупности точек (множества) рассматриваются как новые объекты — прямые, плоскости, кривые в пространстве и на плоскости. Все они многомер-

— все они эквивалентны по свойствам действия скаляров на собственные коммутативных группы и замкнутости относительно линейных операций. Таким образом, векторное пространство — это любое расширение $E \supset K$, где поля E и K эквивалентны в определении по классической схеме восьми аксиом линейного пространства. Пространство E — частный случай из множества алгебраических и трансцендентных расширений. Определение линейного пространства — абстракт для объектов такого же уровня, в том числе и вектора. Векторные пространства тождественны линейному по определению, но носят частный характер по способу расширения.

ные элементы в координатных системах, на которые проецируются характеристики инвариантов. Преобразование характеристик, при смене координатной системы, требует изучения аналогов этих объектов — подпространств в общих векторных пространствах.

Определение 2.3. Непустое подмножество $\mathscr{M}$ векторного пространства $\mathscr{V}$ называется *подпространством*, или *линейным многообразием*, если $\mathscr{M}$ вместе с каждой парой своих векторов x, y содержит также все их линейные комбинации $\alpha x + \beta y$.

Соответственно, вместе с каждым вектором x подпространство содержит $x - x$. Значит, при истолковании подпространств как обобщенных прямых и плоскостей, следует рассматривать только те прямые и плоскости, которые проходят через *начало*[3]. Другими словами каждое подпространство содержит начало и каждая прямая и плоскость также проходят через начало координат, в трехмерном пространстве измерений физического объекта.[4] Важны два тривиальных примера подпространств: множество $\mathscr{O}$, состоящее из единственного элемента — начала и всё пространство $\mathscr{V}$.

Действия над подпространствами

Перечислим кратко теоремы, характеризующие действия над подпространствами (доказательства в [7]).

[3]Это общее название нуля, как результата линейной комбинации в векторных пространствах. Соответственно, это результат в координатах есть начало координат, или нуль-вектор, аналог пустого множества.

[4]Конечно, прямые и плоскости, как результат векторных операций, могут не содержать точки «начало координат». На самом деле это геометрические объекты, опорными точками которых будут теже векторы. То есть, эти объекты надо рассматривать как совокупность точек — окончания векторов, исходящих из начала.

Теорема 2.3. *Пересечение любого семейства подпространств — есть подпространство.*

Теорема 2.4. *Подпространство $\mathscr{M}$, порожденное каким-либо множеством $\mathscr{J}$ векторов векторного пространства $\mathscr{V}$, совпадает с множеством всевозможных линейных комбинаций элементов из $\mathscr{J}$.*

Теорема 2.5. *Подпространство $\mathscr{M}$, натянутое на объединение каких-либо подпространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$, совпадает с множеством всевозможных векторов вида $x + y$, где x — вектор из $\mathscr{H}$, а y — из $\mathscr{K}$.*

Для подпространства $\mathscr{M}$ порожденного объединением подпространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$, допустимо обозначение $\mathscr{H} + \mathscr{K}$. А также можно говорить, что подпространство $\mathscr{K}$ векторного пространства $\mathscr{V}$ является дополнением к подпространству $\mathscr{H}$, если $\mathscr{H} \bigcap \mathscr{K} = \mathscr{O}$ и $\mathscr{H} + \mathscr{K} = \mathscr{V}$.

Теорема 2.6. *Подпространство $\mathscr{M}$ n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$ является векторным пространством размерности $\leqslant n$.*

Теорема 2.7. *Каково бы ни было m-мерное подпространство $\mathscr{M}$ n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$, можно найти базис*

$$\{x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n\}$$

пространства $\mathscr{V}$ такой, что $x_1, ..., x_m$ принадлежат подпространству $\mathscr{M}$ и потому образуют его базис.

Размерность векторного пространства $\mathscr{V}$ обозначается символом $\dim \mathscr{V}$. При таком обозначении теорема 2.6 утверждает, что если $\mathscr{M}$ — подпространство конечномерного векторного пространства $\mathscr{V}$, то $\dim \mathscr{M} \leqslant \dim \mathscr{V}$.

2.2 Сопряженные пространства

Преобразования векторов на основе линейных, *билинейных* операций и *прямых сумм* дают значения новым элементам a, которые, в условиях сопряжения с исходными пространствами, преобразуются в *новые* векторные пространства. Сопряжение — это отношение, которое устанавливает двойственность исходного векторного пространства и вновь полученного в результате операций по правилам композиции. Сопряжение[5] задается двумя способами: через изоморфизм базисов исходного и нового пространства с сохранением размерности; посредством прямых сумм, где размерность нового базиса зависит от внутреннего или внешнего типа суммирования.

Определение нового пространства, сопряженного к основному, в первую очередь связано с понятием функционала.

2.2.1 Линейные функционалы

Определение 2.4. *Линейным функционалом* на векторном пространстве $\mathscr{V}$ называется скалярная функция y, определенная для *каждого* вектора x и обладающая свойством

$$y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2).$$

Рассмотрим характерные примеры для понимания смысла сопряженного пространства линейных функционалов.

1) Для всех $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ из $\mathscr{E}^n$. Более общим образом, взяв n любых скаляров $\alpha_1, ..., \alpha_n$, положим

$$y(x) = \alpha_1 \xi_1 + ... + \alpha_n \xi_n.$$

[5] Двойственность, дуальность.

2) Для любого линейного функционала y на любом векторном пространстве

$$y(0) = y(0 \cdot 0) = 0 \cdot y(0) = 0;$$

по этой причине линейный функционал по определению 2.4 называют *однородным*. В частности,

$$y(x) = \alpha_1\xi_1 + ... + \alpha_n\xi_n + \beta$$

не является линейным функционалом, если только β не есть 0.

3) Для любого полинома x из $\mathscr{B}$ положим $y(0) = x(0)$. Более общим образом, взяв n любых скаляров $\alpha_1, ..., \alpha_n$, положим

$$y(x) = \alpha_1 x(t_1) + ... + \alpha_n x(t_n).$$

Этот пример показывает, что полиномы $x(t)$ (многочлены) — это тоже элементы векторных пространств. В алгебраической теории совокупности полиномов — это кольца (опред. (1.59), стр. 52), а по определению (1.61) на стр. 54, модуль — это специальное кольцо над полем, образующее векторное пространство.

4) На произвольном векторном пространстве $\mathscr{V}$ определим y, положив

$$y(x) = 0$$

для каждого x из $\mathscr{V}$.

Теперь, с учетом определения 2.4 (свойство дистрибутивности функционала), линейности относительно операций 1)-3) и последнего примера (нуль-функционал), делаем заключение,

что любому векторному пространству $\mathscr{V}$ соответствует *равномощный* набор элементов $\mathscr{V}'$ из совокупности линейных функционалов, который по перечню выше представленных свойств (нуль, сложение, умножение на скаляр) образует векторное пространство; его называют пространством, *сопряженным* к $\mathscr{V}$.

Пример 1) определяет линейный функционал как линейную форму и показывает, что любой вектор, связанный совокупностью[6] $\alpha_\bullet$, будет разложен в единственном базисе $\xi_\bullet$, строго соответствующему функционалу и имеющий размерность $\dim \xi = \dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{V}'$ (см. пример-задачу). Пример 2) показывает наличие собственного независимого базиса из $\mathscr{V}'$ для каждого функционала из $\mathscr{V}'$; аргумент — нуль вектор, для линейной формы функционала (пример 1)) это нулевой набор коэффициентов линейной формы равной нулю при независимом базисе.

Итак, каждому вектору из $\mathscr{V}$ соответствует, *с точностью до изоморфизма*, функционал из $\mathscr{V}'$.Покажем, что сопряжение пространств, их двойственность, устанавливается через сопряжение (двойственность) их базисов.

Сопряженные базисы

Теорема 2.8. *([7], без доказательства). Пусть $\mathscr{V}$ — n-мерное векторное пространство и $\{x_1, ..., x_n\}$ — его базис. Каковы бы ни были скаляры $\alpha_1, ..., \alpha_n$, существует один и только один линейный функционал y на $\mathscr{V}$ такой, что $y(x_i) = \alpha_i$ для $i = 1, ..., n$.*

Смысл этой теоремы в том, что α однозначно соответствует базису функционала y, нормы обоих базисов совпадают;

[6] α показывает не абсолютную связь с аргументом x, а относительную. Это говорит о возможном перерасчете совокупности инвариантов вектора x в некоторое координаты α, см. пример (3.2) и теорему (2.8).

α — дуальное (сопряженное) значение к базису y, базис y определяется как коэффициенты разложения ξ вектора v, $v = \xi_i x_i$ по базису пространства $\mathscr{V}$. Естественно, что y — функционал, изоморфный v и для любого $z \in \mathscr{V}$

$$y(z) = z_i \xi_i. \tag{2.1}$$

Теперь можно составить альтернативную формулу функционала по сопряженному базису α, которая имеет вид[7]

$$y(z) = z_i \alpha_i. \tag{2.2}$$

Далее теорема об изоморфизме пространств $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$, т. е. возможности установки взаимно-обратного однозначного отображения с сохранением свойств линейности операций и размерности.

Теорема 2.9. *([7], приводится без доказательства). Если $\mathscr{V}$ — n-мерное векторное пространство и $\mathscr{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ — его базис, то в $\mathscr{V}'$ существует единственный базис $\mathscr{X}' = \{y_1, ..., y_n\}$, обладающий тем свойством, что $y_j(x_i) = \delta_{i,j}$. Пространство, сопряженное к n-мерному, n-мерно.*

Коэффициенты линейной формы функционала, в обозначениях математических объектов, записываются как ковектор a_i первого порядка (ранга).

2.2.2 Аннуляторы

Определение 2.5. *Аннулятором* $\mathscr{J}^\circ$ подмножества $\mathscr{J}$ (не обязательно подпространства) векторного пространства $\mathscr{V}$ называется множество всех векторов y из $\mathscr{V}'$ таких, что $y(x) = 0$ для всех x из $\mathscr{J}$, $\mathscr{J}^\circ \subset \mathscr{V}'$.

[7] Пример решений для функционалов см. на стр. 149.

И обратное: подмножество $\mathscr{M} \subset \mathscr{V}$ назовем *ядром линейного функционала* $f \in \mathscr{V}'$, если для каждого $x \in \mathscr{M}$ выполняется $f(x) = 0$. В этом случае ядро обозначается $\ker f = \mathscr{M}$.

Теорема 2.10. *([7], приводится без доказательства). Если $\mathscr{M}$ — m-мерное подпространство n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$, то $\mathscr{M}^\circ$ есть $(n-m)$-мерное подпространство пространства $\mathscr{V}'$.*

2.2.3 Прямые суммы

Прямые суммы — это ряд методов формирования новых пространств, естественно сопряженных с оригинальным, т. е. исходным векторным пространством. В этой части рассматривается простейший способ задания пространств. Далее, на этой основе, познакомимся с сопряженными пространствами *билинейных форм* и *факторпространств*.

Определение 2.6. Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — векторные пространства (над одним и тем же полем). Их *прямой суммой* называется векторное пространство $\mathscr{W}$ (обозначаемое $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$), элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $< x, y >$ с x из $\mathscr{U}$ и y из $\mathscr{V}$, а линейные операции определены формулой

$$\alpha_1 < x_1, y_1 > + \alpha_2 < x_1, y_2 > = < \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 > .$$

Образование прямой суммы аналогично способу построения плоскости по двум ее координатным осям.

Теорема 2.11. *([7], приводится без доказательства). Если $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — подпространства векторного пространства $\mathscr{W}$, то следующие три условия эквивалентны:*

1) $\mathscr{W} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$.

2) $\mathscr{U} \cap \mathscr{V} = \varnothing$ *(дизъюнкты) и* $\mathscr{U} + \mathscr{V} = \mathscr{W}$ *(т. с.* $\mathscr{U}$ *и* $\mathscr{V}$ *служат дополнениями друг к другу).*

3) *Каждый вектор* z *из* $\mathscr{W}$ *может быть записан одним и только одним способом в виде* $z = x + y$*, где* x *принадлежит* $\mathscr{U}$ *а* y *принадлежит* $\mathscr{V}$*.*

Если подпространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ векторного пространства $\mathscr{W}$ дизъюнкты и в совокупности порождают $\mathscr{W}$ (т. е. если они удовлетворяют условию 2)), принято говорить, что $\mathscr{W}$ есть *внутренняя прямая* сумма $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ символически это записывают $\mathscr{W} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$. В общем случае, для новых пространств $\mathscr{W}$ из двух исходных $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$, будем называть $\mathscr{W}$ *внешней прямой* суммой.

Теорема 2.12. *([7], без доказательства). Размерность прямой суммы равна сумме размерностей ее слагаемых.*

Сопряжение к прямой сумме

Рассмотрим сопрягаемые пространства к прямым суммам на подпространствах векторного пространства, в первую очередь связанные с аннуляторами — подмножествами сопряженного пространства линейных функционалов. Ниже приводится теорема об изоморфизме: подпространств векторного пространства на подпространства сопряженного пространства, котрые, в свою очередь изоморфны (сохраняют размерность), на аннуляторам, но сопрягают размерности в некотором «перекрестном» характере. Этот характер связей размерностей должен быть понятен интуитивно из теоремы 2.10. Теорема об изоморфизме подпространств прямых сумм, сопряженных подпространств и их аннуляторов, приводится из [7] без доказательства.

Теорема 2.13. *Если* $\mathscr{M}$ *и* $\mathscr{N}$ *— подпространства векторного пространства* $\mathscr{V}$ *и* $\mathscr{V} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ *то* $\mathscr{M}'$ *изоморфно* $\mathscr{N}^\circ$*,* $\mathscr{N}'$ *изоморфно* $\mathscr{M}^\circ$ *и* $\mathscr{V}' = \mathscr{M}^\circ \oplus \mathscr{N}^\circ$*.*

2.3 Факторпространства

Рассмотрим пример множества, элементы которого — классы объектов (*классы эквивалентностей*), разделенных на заданном отношении эквивалентности (2.6). В алгебре можно найти ряд примеров формирования подобных множеств. Общее название «Класс эквивалентности» заменяется на термин «*Смежный класс*». Классы-элементы группируются около некоторого нейтрального элемента, *фактор-множества* типа «Начало». С этого элемента и начинается *факторизация* (разбиение) нового множества на элементы-классы. Примеры факторизующих элементов: кольца главных идеалов для многочленов, нулевой класс в модальной арифметике, ядро функционала при разбиении пространства на непересекающиеся гиперплоскости [2]. Для получения класса необходимо наличие изоморфизма от исходного множества к факторизованному для сохранения размерностей в новом множестве. Для конечномерных векторных пространств $\mathscr{V}$ рассматриваются эквивалентности отношения пар

$$a, b \in \mathscr{V},\ < a, b > \Rightarrow\ a \sim b \Leftrightarrow (a - b) \in \mathscr{M} \subset \mathscr{V} \tag{2.3}$$

и свойства *внутренних* прямых сумм

$$\mathscr{M} \oplus \mathscr{N} = \mathscr{V},\ \mathscr{M} \cap \mathscr{N} = \varnothing, \tag{2.4}$$

где $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ дизъюнкты и дополнение $\mathscr{N}$ единственно. Здесь нейтральный элемент нового векторного пространства классов эквивалентностей — множество $\mathscr{M}$. Соответственно, распространяется аксиоматика векторных пространств (определение 2.2) на результаты разбиения $\mathscr{V}$ (2.8). В подобных разбиениях нужно доказывать свойства нейтрального элемента $\mathscr{M}$ и изоморфизм объектов исходного пространства $\mathscr{N}$ к полученным классам. Рассмотрим следующее высказывание [7].

Для произвольного вектора x из $\mathscr{V}$ обозначим через $x+\mathscr{M}$ множество всевозможных сумм $x+y$ с y из $\mathscr{M}$; каждое множество вида $x+\mathscr{M}$ называется *смежным классом* по $\mathscr{M}$.

Уточним значение совокупностей в x по отношению к подпространствам $\mathscr{N}$ и $\mathscr{M}$ с учетом (2.3), (2.4), и найдем условия изоморфизма x к $x+\mathscr{M}$. Начнем с пары элементов $< a, b >$.

$$\begin{aligned}
\dim \mathscr{N} = n,\ \dim \mathscr{M} = m,\ \dim \mathscr{V} = (n+m),\\
\mathscr{X} = \{x_1, .., x_n, x_{n+1}, .., x_{n+m}\},\\
\mathscr{X}' = \{x_1, .., x_n, 0_{n+1}, .., 0_{n+m}\},\\
\mathscr{X}'' = \{0_1, .., 0_n, x_{n+1}, .., x_{n+m}\},\\
a = \{a_N^0, .., a_N^n, a_M^1, .., a_M^m\},\\
b = \{b_N^0, .., b_N^n, b_M^1, .., b_M^m\},\\
a-b = \{a_N^0 - b_N^0, .., a_N^n -\\
- b_N^n, a_M^1 - b_M^1, .., a_M^m - b_M^m\} \in \mathscr{M},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}'$, $\mathscr{X}''$ базисы, соответственно, в $\mathscr{V}$, $\mathscr{N}$, $\mathscr{M}$. Из (2.5) очевидно, что условие принадлежности разности к $\mathscr{M}$, а значит и выполнение условия эквивалентности, будет достигнуто, если

$$a-b = \{0, .., 0, a_M^1 - b_M^1, .., a_M^m - b_M^m\} = y,\ y \in \mathscr{M}$$

и каждому

$$z \in \mathscr{N}$$

с учетом

$$\begin{aligned}
&a, b, c \in \mathscr{V},\ a \neq b \neq c,\\
&z = a \wedge \mathscr{X}' = b \wedge \mathscr{X}' = c \wedge \mathscr{X}',\\
&y \in \mathscr{M},\\
&y = a \wedge \mathscr{X}'' \neq y = b \wedge \mathscr{X}'' \neq y = c \wedge \mathscr{X}''
\end{aligned}$$

можно поставить изоморфный класс эквивалентностей

$$\begin{aligned} z \cong (a \sim a) &\Leftrightarrow (a-a) = 0 \in \mathscr{M} \\ z \cong (a \sim b) &\Leftrightarrow (a-b) = z \in \mathscr{M} \\ z \cong (b \sim a) &\Leftrightarrow (b-a) = z \in \mathscr{M} \\ z \cong (b \sim c) &\Leftrightarrow (b-c) = z \in \mathscr{M} \\ z \cong (a \sim c) &\Leftrightarrow (a-c) = z \in \mathscr{M}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

или смежный класс $\mathscr{H}$

$$z \cong \mathscr{H} = x + \mathscr{M},\ z = x \wedge \mathscr{X}'. \tag{2.7}$$

Смежные классы образуют *факторпространство* пространства $\mathscr{V}$ по подпространству (или модулю) $\mathscr{M}$ и обозначается $\mathscr{V}/\mathscr{M}$. Свойство векторного пространства $\mathscr{V}/\mathscr{M}$, относительно линейных операций, проверяются тривиально: $\mathscr{H} + (-\mathscr{H}) = \mathscr{M}$ — (начало, ноль) и

$$\begin{aligned} a, b, \alpha a, \alpha b &\in \mathscr{H}, \\ < a, b >, < \alpha a, \alpha b > &\in \mathscr{M}, \\ \alpha\mathscr{H} &\in \mathscr{V}/\mathscr{M}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Выражение (2.7) подтверждается теоремами о размерности факторпространства [7].

Теорема 2.14. *Если $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — дополнительные друг к другу подпространства векторного пространства $\mathscr{V}$, то соответствие, относящее каждому вектору z из $\mathscr{N}$ смежный класс $(z + \mathscr{M})$, является изоморфизмом между $\mathscr{N}$ и $\mathscr{V}/\mathscr{M}$.*

Теорема 2.15. *Если $\mathscr{M}$ — m-мерное подпространство n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$, то $\mathscr{V}/\mathscr{M}$ имеет размерность $(n$-$m)$.*

2.4 Билинейные формы

В основе билинейных форм бинарные отношения сопряженных пространств (линейных функционалов), устанавливаемые *внешними* прямыми суммами для данных пространств. Отсюда трактовка понятия билинейности может быть дана с различных уровней общности — от отношения пар функционалов и отношения с учетом привязки функционалов к их базисам и базисам основных пространств. Отсюда сложно составить строгое определение, а можно дать несколько трактовок понятия билинейности с различных уровней общности.

1) Прямая сумма $\mathscr{W} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ векторных пространств $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ (над одним и тем же полем) снова есть векторное пространство. Теперь можно определять функции на $\mathscr{W}$. Прямой сумме дано первоначальное определение с помощью упорядоченных пар. Тогда значение функции, скажем w, на некотором элементе $< x, y >$ из $\mathscr{W}$ будем обозначать $w(x, y)$ — скалярная функция на $\mathscr{W}$, главная особенность которой заключается в том, что при фиксированном значении любого аргумента функция линейно зависит от другого. Такая функция называется *билинейным функционалом* или *билинейной формой*.

2) Выберем конечное число элементов из сопряженных пространств $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{V}'$, соответственно $u_1, ..., u_k$ и $v_1, ..., v_k$. Определим билинейную форму на парных отношениях, положив $w(x, y) = u_1(x)v_1(y) + ... + u_k(x)v_k(y)$.

3) Ситуация второго сопряжения: $\mathscr{V}$ — пространство, к нему сопряжено $\mathscr{V} = \mathscr{U}'$, и w линейный функционал

$$w(x, y) = y(x),\ x \in \mathscr{V},\ y \in \mathscr{U}',$$

то $w(x, v)$ — билинейный функционал при втором сопряжении $\mathscr{U} = \mathscr{U}'$, где $v \leftarrow y(x),\ v \in \mathscr{U}$.

4) Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — произвольные векторные пространства над одним и тем же полем, u и v — элементы, соответственно, из $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{V}'$, и $w(x, y) = u(x)v(y)$ для всех x из $\mathscr{U}$ и y из $\mathscr{V}$.

В этом случае, с учетом разбора теоремы (2.8) и приведенных примеров на понимание инвариантности базиса функционала, связи векторов и базисов исходных пространств, подходит 4) определения (2.4).

Множество всех билинейных форм на $\mathscr{W}$ линейно относительно операций и является векторным пространством. Пусть w_1 и w_2 — билинейные формы на $\mathscr{W}$, α_1 и α_2 — скаляры и w — функция на $\mathscr{W}$, определяемая формулой

$$w(x, y) = \alpha_1 w_1(x, y) + \alpha_2 w_2(x, y),$$

где w — билинейная форма, обозначаемая $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$.

В целом $\mathscr{W}$ не является сопряжением к исходным пространствам в смысле изоморфизма, т. к. всевозможные пары устанавливают некоторую нелинейную зависимость размерностей. Смысл составляющих билинейной формы разберем с помощью теоремы с приведенным доказательством.

Теорема 2.16. *[7] Если $\mathscr{U}$ — n-мерное векторное пространство с базисом $\{x_1, ..., x_n\}$ и $\mathscr{V}$ — m-мерное векторное пространство с базисом $\{y_1, ..., y_m\}$, то для всякого множества nm скаляров $\{\alpha_{i,j}\}$ $(i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m)$ существует и притом только одна билинейная форма w на $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ такая, что $w(x_i y_j) = \alpha_{i,j}$ для всех i и j.*

Доказательство. [7] Если $x = \sum_i \xi_i x_i$, $y = \sum_j \eta_j y_j$ и w — билинейная форма на $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ такая, что то $w(x_i y_j) = \alpha_{i,j}$, то

$$w(x, y) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j w(x_i y_j) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \alpha_{ij}. \qquad (2.9)$$

Из этого равенства явствует единственность w.

Из выражений доказательства данной теоремы видно, как соотносятся в билинейной форме коэффициенты разложения по базисам исходных векторов, соответственно и базисы исходных функционалов. Базисы векторов формируют, из совокупности собственных квадратичных значений, объект — ковектор второго порядка $\alpha_{i,j}$, который сворачивается в скаляр по немым индексам коэффициентов разложения векторов по базисам.[8] В выражении (2.1) ξ_i — прототип от линейной формы к $\xi_i \eta_j$ и в (2.2) α_i — прототип от к $\alpha_{i,j}$. Билинейная форма полностью определяет свое значение на векторах базиса основного пространства (см. примеры в разд. (4.2)).

Определение размерности свяжем с теоремой о связи базиса пространства билинейных форм с базисами исходных пространств.

Теорема 2.17. *([7], приводится без доказательства). Если $\mathscr{U}$ — n-мерное векторное пространство с базисом $\{x_1, ..., x_n\}$ и $\mathscr{V}$ — m-мерное векторное пространство с базисом $\{y_1, ..., y_m\}$, то векторное пространство $\mathscr{W}$ всех билинейных форм на $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ обладает однозначно определенным базисом $\{w_{pq}\}$ ($p = 1, ..., n$; $q = 1, ..., m$), удовлетворяющим условиям*

$$w_{pq}(x_i y_j) = \delta_{ip} \delta_{jq}. \qquad (2.10)$$

[8] Здесь запись расположения индексов сделана для общего понимания векторных пространств. Если учесть индексацию по правилам математических объектов, то выражение свертки коэффициентов билинейной формы имело бы вид $\xi^i \eta^j \alpha_{i,j}$.

Следовательно, размерность пространства всех билинейных форм на $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ равна произведению размерностей $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$.

Теорема 2.17 является прототипом теоремы о тензорных произведениях. Теорема служит оправданием использования терминологии, принятой для произведений, и уточняет утверждение о мультипликативности размерности (2.10).

2.5 Линейные операторы

Теория операторов будет рассмотрена только в пределах конечномерных векторных пространств. Без преобразования координат и операторов, как инвариантов, в координатных системах. Действия с операторами в координатных системах будут рассмотрены на упражнениях и примерах линейных преобразований (разд. 4).

Определение 2.7. *Линейным оператором* A на векторном пространстве $\mathscr{V}$ (или *линейным отображением* $\mathscr{V}$ в себя) называется соответствие, относящее каждому вектору x из $\mathscr{V}$ вектор Ax из $\mathscr{V}$ так, что

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \tag{2.11}$$

для любых векторов x и y и скаляров α и β; $A0 = 0$ — *однородные* линейные операторы.

Рассмотрим примеры, помогающие рассмотреть конструктивную суть линейных операторов, точнее — каким исходным элементам векторных пространств они изоморфны.

1) Нуль-оператор и единичный (тождественный) оператор — два специальных оператора, обозначаемые соответственно символами 0 и 1, определяемые (для всех x) равенствами $0x = 0$ и $1x = x$.

2) Пусть x_0 — любой фиксированный вектор пространства $\mathscr{V}$ и y_0 — любой линейный функционал на $\mathscr{V}$; положим

$$Ax = y_0(x) \cdot x_0. \tag{2.12}$$

Более общим образом, пусть $\{x_1, ..., x_n\}$ — произвольное конечное множество векторов из $\mathscr{V}$ и $\{y_1, ..., y_n\}$ — такое же количество линейных функционалов на $\mathscr{V}$; положим

$$Ax = y_1(x)x_1 + ... + y_n(x)x_n. \tag{2.13}$$

В частности, $\mathscr{V}$ n-мерно и векторы $\{x_1, ..., x_n\}$ образуют его базис, то каждый линейный оператор A на $\mathscr{V}$ может быть построен по выражению (2.13).

Выражение (2.13) показывает как сконструировать оператор, пример построения оператора см. разд. 4 на стр. 155. Само выражение «оператор» связано с понятием «действия» на вектор, но по своим свойствам множество линейных операторов линейности операторов является векторным пространством [7]. Это легко доказывается, с учетом данных определений и свойства суммы операторов:

$$Sx = Ax + Bx$$

для всех x Но самые значимое для операторов — это умножение. Оно имеет большую востребованность в теории операторов, чем свойства векторного пространства.

Произведение операторов

Произведение $P = AB$ линейных операторов A и B определяется равенством $Px = A(Bx)$. Понятие умножения одно из основных в теории операторов. Действие составного операто-

ра в умножение над любым вектором x следует читать справа налево. Порядок отображения посредством AB таков: сначала отобразить посредством B, затем — посредством A. Умножение операторов вообще не коммутативно, так что порядок, в котором производится отображение, совсем не безразличен. Приведем простой пример операторного отображения в пространстве гладких функций. Рассмотрим операторы дифференцирования и умножения D и T, которые определяются равенствами $(Dx)(t) = \frac{dx}{dt}$ и $(Tx) = tx(t)$; имеем

$$(DTx)(t) = \frac{d}{dt}(tx(t)) = x(t) + t\frac{dx}{dt},$$

и

$$(TDx)(t) = t\frac{dx}{dt}.$$

Из этого примера не верна коммутативная перестановка операторов, разница коммутаторов не равна нулю $(DT - TD)x = x$ для каждого x, так что $DT - TD = 1$.

Обратимость

Теорема 2.18. *([7], приводится без доказательства). Если A, B и C — такие линейные операторы, что*

$$AB = CA = 1,$$

то A обратим и $A^{-1} = B = C$.

Теорема 2.19. *([7], приводится без доказательства). Линейный оператор A на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ обратим тогда и только тогда, когда $Ax = 0$ влечет $x = 0$, а также тогда и только тогда, когда каждое y из $\mathscr{V}$ может быть записано в виде $y = Ax$.*

Теорема 2.20. *([7], приводится без доказательства). Если A и B обратимы, то AB обратимо и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Если A обратим и $\alpha \neq 0$, то αA обратим и $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$. Если A обратим, то A^{-1} обратим и $(A^{-1})^{-1} = A$.*

2.5.1 Матрицы операторов

Понятие матрицы определено только для конечномерных векторных пространств. Это важное средство изучения линейных операторов.

Определение 2.8. Пусть $\mathscr{V}$ — n-мерное векторное пространство,
$\mathscr{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ — его произвольный базис и A — линейный оператор на $\mathscr{V}$. Так как каждый вектор является линейной комбинацией векторов x_i, имеем, в частности,

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i \tag{2.14}$$

для $j = 1, ..., n$. Множество (α_{ij}) из n^2 скаляров, помеченных двойным индексом i, j, называют *матрицей* оператора A в *координатной системе* $\mathscr{X}$; обозначение системы $[A]$, или $[A; \mathscr{X}]$, если окажется необходимым указание базиса $\mathscr{X}$, к которому она отнесена. Матрицу (α_{ij}) обычно записывают в виде квадратной таблицы [7]:

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \tag{2.15}$$

скаляры $(\alpha_{i1}, ..., \alpha_{in})$ образуют строку, а $(\alpha_{1j}, ..., \alpha_{nj})$ — столбец этой матрицы.

Эта матрица ассоциирована с линейным оператором, но все же содержит отличия от оператора: матрица зависит от координатных систем[9]; матрица должна быть линейно преобразована при переходе их одной системы в другую (оператор инвариантен, не зависит от координатных систем); базис, относительно которого строится оператор, не зависит от перестановки векторов базиса, а матрица оператора не должна менять порядок строк и столбцов.

Само действие (2.14) — в линейной алгебре это обычная матричная операция умножения матрицы (α_{ij}) на любой вектор x из $\mathscr{V}$. Собственно матрица — это совокупность n строк некоторого набора линейных форм (функционалов) (2.1), поэлементно умножаемая на x_i-й вектор базиса в порядке $i = 1..n$. Из получаемых столбцов и составляется (α_{ij}) — матрица линейного оператора, пример расчета (4.3) прил. 4. Учитывая, что любому вектору x из $\mathscr{V}$ изоморфен функционал y из $\mathscr{V}'$, то можно сказать, что любому n-му набору векторов *однозначно* соответствует матрица линейного оператора с учетом базиса $\mathscr{X}$. Связь (α_{ij}) с координатными системами заключается в том, что базис ξ функционала y (2.1) преобразуется при переходе в некоторую координатную систему. Следовательно, будет преобразоваться и матрица оператора с сохранением инвариантных свойств оператора. В обозначениях математических объектов матрица оператора имеет запись *бивектора* второго порядка (ранга) a^i_j.

2.5.2 Инвариантность

Говорят, что $\mathscr{M} \in \mathscr{V}$ *инвариантно* относительно оператора A, если «x принадлежит $\mathscr{M}$» влечет «Ax принадлежит $\mathscr{M}$»:

$$x \in \mathscr{M} \to Ax \in \mathscr{M}.$$

[9]Координатные системы — см. разд. (3.1).

Это не означает однозначность, например, соответствие для каждого элемента y из $\mathscr{M}$, т. е. не всегда выполняется $y = Ax$. Задача показать — как измениться матрица линейного оператора A на n-мерном векторном пространстве, если известно, что некоторое $\mathscr{M}$ инвариантно относительно A.

В качестве ответа можно выбрать из n-размерного базиса $\mathscr{X}$ в $\mathscr{V}$ так, чтобы $x_1, ..., x_m$ принадлежали $\mathscr{M}$, а $x_{m+1}, ..., x_n$ — нет. Выразим Ax_j через $x_1, ..., x_n$. При $m + 1 \leqslant j < n$ нельзя сказать ничего, кроме того, что $Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$. Однако, если $1 \leqslant j \leqslant m$, то x_j принадлежит $\mathscr{M}$, и потому (поскольку $\mathscr{M}$ инвариантно относительно A) также Ax_j, принадлежит $\mathscr{M}$. Следовательно, в этом случае Ax_j есть линейная комбинация векторов $x_1, ..., x_m$; коэффициенты α_{ij}, у которых $m+1 \leqslant i \leqslant n$, все равны нулю. Поэтому матрица $[A]$ оператора A в этой координатной системе принимает вид [7]

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_1] & [B_0] \\ [0] & [A_2] \end{pmatrix},$$

где $[A]$ — (m-строчная) матрица оператора A, рассматриваемого как линейный оператор на пространстве $\mathscr{M}$ (в координатной системе $\{x_1, ..., x_m\}$), $[A_2]$ и $[B_0]$ — некоторые таблицы скаляров (соответственно из $(n - m)$ строк и $(n - m)$ столбцов и из m строк и $(n - m)$ столбцов), а $[0]$ — прямоугольная таблица (из $(n-m)$ строк и m столбцов), состоящая из одних нулей.[10] (Важно отметить то, что матрица $[B_0]$ не обязательно должна быть нулевой.)

Приводимость

Понятие приводимости, как частного случая инвариантности, возникает в результате связи между прямыми суммами и

[10] $[0]$ — маскирует значения в $[A]$, отличные от $[A_1]$, $\det[A] = \det[A_1]$.

линейными операторами. Если $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — два подпространства, такие, что оба они инвариантны относительно A, и $\mathscr{V}$ есть их прямая сумма, то A приводится (разлагается) парой $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$.

Переходим к процессу приведения оператора. Пусть $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — любые два векторных пространства, а A и B — любые линейные операторы (соответственно на $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$). Пусть далее $\mathscr{V}$ — прямая сумма $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$

$$\mathscr{V} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N};$$

на $\mathscr{V}$ можно определить линейный оператор C, называемый прямой суммой A и B, положив

$$Cz = C(x, y) = (Ax, By),$$

где

$$z \in \mathscr{V},\ x \in \mathscr{M},\ y \in \mathscr{N}.$$

Если $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ приводит C и если обозначить через A линейный оператор C, рассматриваемый только на $\mathscr{M}$, а через B линейный оператор C, рассматриваемый только на $\mathscr{N}$, то C будет прямой суммой A и B.

Через надлежащий выбор базисов, $x_1, ..., x_m$ из $\mathscr{M}$ и $x_{m+1}, ..., x_n$ из $\mathscr{N}$, можно привести матрицу прямой суммы A и B к составному виду:

$$[A_1] = [A]\,,\ [B_0] = [0]\,,\ [A_2] = [B]\,.$$

Результат приведения C [7]

$$[C] = \begin{pmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [B] \end{pmatrix}.$$

2.5.3 Проекторы

В понятие проектора — еще одна важная связь между прямыми суммами и линейными операторами.

Определение 2.9. Если $\mathscr{V}$ — прямая сумма $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$, так что каждое z из $\mathscr{V}$ единственным образом записывается в виде $z = x + y$ с x из $\mathscr{M}$ и y из $\mathscr{N}$, то *проектором* на $\mathscr{M}$ параллельно $\mathscr{N}$ называется оператор E, определенный равенством $Ez = x$.

Проекторы выражают геометрический смысл прямых сумм. Наглядно это изображается при вводе координатных систем, не обязательно ортогональных. Прямая сумма осей (многообразий) формирует плоскость (их прямая сумма). Оператор проекции обратным действием от точки на плоскости «возвращает» координату на многообразии, на котором он сам определен. Или возвращает компоненту прямой суммы от своего многообразия. При этом проектор E параллелен второй оси и является линейным оператором. Со специальными свойствами проекторов познакомимся через формулировку теорем, доказательства которых в [7].

Теорема 2.21. *Линейный оператор E является проектором на некоторое подпространство тогда и только тогда, когда он идемпотентен, т. е. $E^2 = E$.*

Нужно понимать, что составной характер проекторов при произведении не меняет действие одиночного оператора. Например, в примитивной теории множеств правило композиции по объединению (пересечению) множеств — идемпотентно. То же правило сумм и произведений в обычной алгебре — нет.

Теорема 2.22. *[7] Если E — проектор на $\mathscr{M}$ параллельно $\mathscr{N}$, то $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ являются соответственно множествами всех решении уравнений $Ez = z$ и $Ez = 0$.*

Исходя из этого действие проектора в определении 2.9 можно переписать в координатной форме $Ez = (x, 0)$. Эта теорема применима при поиске исходных многообразий, в координатных системах — прямолинейных и криволинейных осей, пересекающихся ортогонально в точке начала.

С помощью этих двух теорем (2.21, 2.22) можно, на примере данных определения 2.9, установить симметричность ролей $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ в определении проекторов. Или определить симметричный проектор к E. Если каждому $z = x + y$ поставить в соответствие не x, а y, также получим идемпотентный линейный оператор. Этот оператор (а именно, $1 - E$) будет проектором на $\mathscr{N}$ параллельно $\mathscr{M}$. В итоге понимаем смысл следующей теоремы.

Теорема 2.23. *[7] Линейный оператор E является проектором тогда и только тогда, когда $1 - E$ проектор; если E-проектор на $\mathscr{M}$ параллельно $\mathscr{N}$, то $1 - E$ есть проектор на $\mathscr{N}$ параллельно $\mathscr{M}$.*

Комбинации проекторов

Исследуем условия, при которых различные алгебраические комбинации проекторов также являются проекторами.

Теорема 2.24. *[7] Пусть E_1 и E_2 соответственно проекторы на $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ параллельно $\mathscr{N}_1$ и $\mathscr{N}_2$, и основное поле скаляров таково, что $1 + 1 \neq 0$.*

(i) $E_1 + E_2$ есть проектор тогда и только тогда, когда

$$E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0;$$

при выполнении этого условия $E = E_1 + E_2$ есть проектор на $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2$ параллельно $\mathscr{N} = \mathscr{N}_1 \cap \mathscr{N}_2$.

(ii) $E_1 - E_2$ *— проектор тогда и только тогда, когда*

$$E_1E_2 = E_2E_1 = E_2,$$

при выполнении этого условия $E = E_1 - E_2$ *есть проектор на* $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \cap \mathscr{N}_2$ *параллельно* $\mathscr{N} = \mathscr{N}_1 \oplus \mathscr{M}_2$.

(iii) Если $E_1E_2 = E_2E_1 = E$, *то* E *есть проектор на* $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2$ *параллельно* $\mathscr{N} = \mathscr{N}_1 \cap \mathscr{N}_2$.

Во-первых, отметим, что хотя и в (I), и в (II) $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ были *прямыми* суммами заданных подпространств, в (III) установлено только, что $\mathscr{N} = \mathscr{N}_1 + \mathscr{N}_2$. Рассмотрение возможности $E_1 = E_2 = E$ показывает, что это неизбежно. Кроме того, утверждалась лишь достаточность условия (III); можно построить проекторы E_1 и E_2, произведение которых E_1E_2 будет проектором, но для которых E_1E_2 и E_2E_1 различны. Наконец, можно предположить, что результат (I) распространим по индукции на случай более чем двух слагаемых.

Проекторы и инвариантность

Проекторы помогают изучать понятия инвариантности и приводимости. Следующие теоремы в продолжение предыдущей темы.

Теорема 2.25. *[7] Если подпространство* $\mathscr{M}$ *инвариантно относительно линейного оператора* A, *то* $EAE = AE$ *для каждого проектора* E *на* $\mathscr{M}$. *Обратно, если* $EAE = AE$ *для проектора* E *на* $\mathscr{M}$, *то* $\mathscr{M}$ *инвариантно относительно* A.

Теорема 2.26. *[7] Если* $\mathscr{V} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$, *то линейный оператор* A *на* $\mathscr{V}$ *приводится парой* $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ *тогда и только тогда, когда* $EA = AE$, *где* E *— проектор на* $\mathscr{M}$ *параллельно* $\mathscr{N}$.

2.5.4 Сопряженный оператор

Операторы образуют векторное пространство. Следовательно, возможно изучить свойства пространства, сопряженное к нему. Для начала определим сам сопряженный оператор. Пусть любые $x \in \mathscr{V}$ и $y \in \mathscr{V}'$. Определим функцию

$$y'(x) = y(Ax).$$

Если фиксировать y, то y' будет линейно зависеть от x и y' будет определяться как функционал на $\mathscr{V}$, а каждое y' будет зависеть от y. Положим посредством некоторого оператора $y' = A'y$. Определить A' можно из равенства

$$[Ax, y] = \left[x, A'x\right]. \tag{2.16}$$

Исходя их выражения (2.16), можно определить y' для каждого y. Используя y', можно приступить к построению матрицы оператора A', аналогично матрице A на функционалах y (см. пример в разд. 4.1).

Будем утверждать, что A', определенный на $\mathscr{V}'$, есть линейный оператор на $\mathscr{V}'$. Действительно, если у $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, то

$$\left[x, A'y\right] = [Ax, y] = \alpha_1 \left[Ax, y_1\right] + \alpha_2 \left[Ax, y_2\right] =$$
$$= \alpha_1 \left[x, A'y_1\right] + \alpha_2 \left[x, A'y_2\right] = \left[x, \alpha_1 A'y_1 + \alpha_2 A'y_2\right].$$

Линейный оператор A' называют *сопряженным* к A. Формальные алгебраические правила для линейного оператора [7]:

$$0' = 0, \tag{2.17}$$

$$1' = 1, \tag{2.18}$$

$$(A + B)' = A' + B', \tag{2.19}$$

$$(\alpha A)' = \alpha A', \tag{2.20}$$

$$(AB)' = B'A', \tag{2.21}$$

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}. \tag{2.22}$$

Здесь (2.22) нужно понимать в следующем смысле: если A обратим, то A' также обратим, и имеет место (2.22). Доказательства всех этих соотношений элементарны; чтобы продемонстрировать, как они проводятся, выполним выкладки, приводящие к (2.21) и (2.22). Чтобы доказать (2.21), достаточно просто заметить, что

$$[ABx, y] = \left[Bx, A'y\right] = \left[x, B'A'y\right].$$

Для доказательства формулы (2.22) предположим, что A обратим, так что $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$. Применяя к этим равенствам (2.18) и (2.21), получаем

$$(A^{-1})'A' = A'(A^{-1})' = 1.$$

Теорема 2.18, стр. 78 показывает, что A' обратим и имеет место выражение (2.22).

Сопряженные проекторы и инварианты

Сопряженный к проектору оператор тоже есть проектор. Свойства сопряжений и инвариантов можно рассмотреть на высказываниях двух теорем [7], где используется понятие аннулятора (разд. 2.2.2).

Теорема 2.27. *[7] Если E—проектор на $\mathscr{M}$ параллельно $\mathscr{N}$, то E' — проектор на $\mathscr{N}^\circ$ параллельно $\mathscr{M}^\circ$.*

Теорема 2.28. *[7] Если $\mathscr{M}$ инвариантно относительно A, то $\mathscr{M}^\circ$ инвариантно относительно A'; если A приводится парой $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$, то A' приводится парой $(\mathscr{M}^\circ, \mathscr{N}^\circ)$.*

2.6 Изменение базиса

В качестве приложения теории можно рассмотреть примеры обращения базисов и координат[11] посредством линейного оператора, разд. (4.2) прил. (4). Приведем часть важнейших соотношений координат и базисов, на которые, в свою очередь, ссылаются практические расчеты приложения.

Рассмотрим задачи, возникающие при изменении базиса. Эти задачи могут быть сформулированы без упоминания линейных операторов, но наиболее эффективным образом они решаются в терминах линейных операторов.

Пусть $\mathscr{X} = \{x_1, ..., x_n\}$ и $\mathscr{Y} = \{y_1, ..., y_n\}$ — два базиса в n-мерном векторном пространстве $\mathscr{V}$. Можно задаться следующими двумя вопросами [7].

I. Если x — вектор из $\mathscr{V}$,

$$x = \sum_i \xi_i x_i = \sum_i \eta_i y_i, \tag{2.23}$$

то какова связь между его координатами $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ в базисе $\mathscr{X}$ и его координатами $\{\eta_1, ..., \eta_n\}$ в базисе $\mathscr{Y}$?

[11] Координатные системы будут рассматриваться в разд. 3. В данном контексте координаты ассоциируются с коэффициентами разложения вектора по базису. Для отличия от систем на координатных осях (линиях), базисные коэффициенты можно называть «Общие координаты вектора».

II. Если $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ — упорядоченное множество из n скаляров, то какова связь между векторами

$$x = \sum_i \xi_i x_i \tag{2.24}$$

и

$$y = \sum_i \xi_i y_i. \tag{2.25}$$

На оба эти вопроса можно ответить на языке линейных операторов. А именно, рассмотрим линейный оператор A, определенный равенствами $Ax_i = y_i$, $i = 1, ..., n$. Подробнее [7]:

$$A\left(\sum_i \xi_i x_i\right) = \sum_i \xi_i y_i. \tag{2.26}$$

Пусть (α_{ij}) — матрица оператора A в базисе $\mathscr{X}$, т. е.

$$y_j = Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i. \tag{2.27}$$

Заметим, что A обратим, поскольку

$$\sum_i \xi_i y_i = 0 \;\Rightarrow\; \xi_1 = \xi_2 = ... = \xi_n = 0.$$

Ответим на вопросы [7].

I. Так как выполняется равенство выражений

$$\sum_j \eta_j y_j, \tag{2.28}$$

$$\sum_j \eta_j Ax_j = \sum_j \eta_j \sum_i \alpha_{ij} x_i, \tag{2.29}$$

$$\sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij} \eta_j \right) x_i, \tag{2.30}$$

то

$$\xi_i = \sum_i \alpha_{ij} \eta_j. \tag{2.31}$$

II.

$$y = Ax. \tag{2.32}$$

Обратимый линейный оператор A (*автоморфизм*[12] или матрицу (α_{ij})) можно рассматривать как преобразование координат (2.31), а можно рассматривать (как обычно рассматривали его, в (2.32)) как преобразование векторов.

В классических руководствах но векторным пространствам принято трактовать векторы не как абстрактные объекты, а как упорядоченные системы из n чисел; это делает необходимым введение громоздкой терминологии.

Предыдущий материал о линейных и векторных пространствах и выражения этого раздела показывают, что *только привязка* векторов к любой системе координат приводит к их упорядочению как последовательности скаляров. Отсюда оператор, действующий на координаты, ассоциируется с матрицей.

2.7 Подобные операторы преобразования

Исследуем вопросы подобия матриц операторов и собственно операторов. Другими словами — рассмотрим выражения, где одному оператору соответствуют, в различных координатных системах, много матриц, а одной матрице — много операторов.

В о п р о с ы, в продолжение предыдущего параграфа.

[12] Автоморфизм алгебраической системы — изоморфизм (стр. 10), отображающий алгебраическую систему на себя.

III. Пусть B — линейный оператор на $\mathscr{V}$; какова связь между его матрицами (β_{ij}) и (γ_{ij}) в базисах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$?

IV. Дана матрица (β_{ij}); какова связь между линейными операторами B и C, определенными соответственно равенствами $Bx_j = \sum_i \beta_{ij} x_i$ и $Cy_j = \sum_i \beta_{ij} y_i$?[13]

Ответы на вопросы [7].[14]

III. Имеем

$$Bx_j = \sum_i \beta_{ij} x_i \tag{2.33}$$

и

$$By_j = \sum_i \gamma_{ij} y_i. \tag{2.34}$$

С помощью линейного оператора[15] A, определенного в предыдущем параграфе[16], можем записать равные выражения

$$By_j, \tag{2.35}$$

$$BAx_j, \tag{2.36}$$

$$B\left(\sum_k \alpha_{kj} x_k\right), \tag{2.37}$$

[13] Это выражения перевода в базисы $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ матрицы скаляров β, соответственно формирование подобных операторов B и C в данных базисах.

[14] Примеры построения операторных выражений см. в разд. 4, стр. 162

[15] Собственно оператор A (2.32) — это *автоморфизм*, определенный однозначно для пары базисов. Его матрица — есть инвариант. Прочий произвольный оператор векторного пространства — тоже инвариант, но его матрицы в различных базисах относительны, т. к. представляют из себя коэффициенты системы линейных форм в конкретном базисе. А одинаковые матрицы в разных базисах, естественно, соответствуют разным инвариантам, которые будут называться *подобными операторами*.

[16] Оператор A определялся как автоморфизм векторного пространства, см. пример построения A в разд. 4, стр. 157.

$$\sum_k \alpha_{kj} B x_k, \tag{2.38}$$

$$\sum_k \alpha_{kj} \sum_i \beta_{ik} x_i, \tag{2.39}$$

$$\sum_i \left(\sum_k \beta_{ik} \alpha_{kj} \right) x_i, \tag{2.40}$$

и

$$\sum_k \gamma_{kj} y_k, \tag{2.41}$$

$$\sum_k \gamma_{kj} A x_k, \tag{2.42}$$

$$\sum_k \gamma_{kj} \sum_i \alpha_{ik} x_i, \tag{2.43}$$

$$\sum_i \left(\sum_k \alpha_{ik} \gamma_{kj} \right) x_i. \tag{2.44}$$

Сравнивая (2.33), (2.34) и (2.41-2.44), видим, что

$$\sum_k \alpha_{ik} \gamma_{kj} = \sum_k \beta_{ik} \alpha_{kj}. \tag{2.45}$$

С помощью матричного умножения это записывается в простой форме

$$[A]\,[C] = [B]\,[A]\,, \tag{2.46}$$

где три из четырех матриц в равенстве (2.46) соответствуют своим линейным операторам в базисе $\mathscr{X}$, четвертая, обозначенная через $[C]$ — соответствует оператору B в базисе $\mathscr{Y}$. Формула (2.46) приспособлена, в принципе, к вычислению $[C]$, когда $[A]$ и $[B]$ известны:

$$[C] = [A]^{-1}\,[B]\,[A]\,. \tag{2.47}$$

IV. Для выявления существенно геометрического характера как этого вопроса, так и ответа на него, заметим, что

$$Cy_j = CAx_j \tag{2.48}$$

и

$$\sum_i \beta_{ij} y_i, \tag{2.49}$$

$$\sum_i \beta_{ij} Ax_i, \tag{2.50}$$

$$A\left(\sum_i \beta_{ij} x_i\right), \tag{2.51}$$

$$ABx_j. \tag{2.52}$$

Следовательно, C таково, что

$$CAx_j = ABx_j, \tag{2.53}$$

или, окончательно,

$$C = ABA^{-1}. \tag{2.54}$$

Итак, чтобы найти линейный оператор (не матрицу) C, перемножаем операторы A, B и A^{-1}, без упоминания о координатных системах.

Матрицы $[B]$ и $[C]$ называют *подобными*, если существует обратимая матрица $[A]$, удовлетворяющая соотношению (2.47); линейные операторы B и C называют *подобными*, если существует обратимый оператор A, удовлетворяющий соотношению (2.54). На языке операторов ответы на вопросы III и IV могут быть выражены кратко; в обоих случаях ответ состоит в том, что данные матрицы или операторы должны быть подобны.

2.8 Инварианты векторных пространств

Подведем итоги по свойствам инвариантности объектов общего векторного конечномерного пространства, представленного как специальное кольцо (модуль) над полем вещественных или комплексных чисел. В сущности инвариантность начинает проявляться, как свойство математических объектов типа «вектор», «функционал», «оператор», при *линейных преобразованиях* совокупности их компонент. Преобразование заключается в *относительном* численном представлении инвариантов *общими координатами векторного пространства*, однозначными для каждого конечномерного базиса (см. примеры, прил. 4, разд. 4.1, 4.2).

- Инварианты: вектор и к нему сопряженный функционал. Действие преобразования на вектор осуществляет система векторов любого базиса. Преобразование заключается в разложении вектора по базису (1.11). Результат преобразования (координаты) — коэффициенты линейной формы. Представление функционала: линейная форма (линейная комбинация) есть суть формулы функционала — сопряженного инварианта, однозначного к вектору. Инвариант x (2.23) относительно представлен в двух базисах наборами координат ξ и η. В нормированных пространствах (1.12) инвариантность проявляется равенством норм наборов и равным значением функционалов от одного аргумента.

- Инвариант: линейный оператор. Представление оператора в базисе: а) собственно оператор — системе векторов соответствует система линейных форм (функционалов) в данном базисе ((4.4) прил. 4); б) матрица коэффициентов линейной формы образует *матрицу линейного оператора* или его *координаты* относительно базиса ((4.3) прил. 4).

Действие преобразования на оператор осуществляет система векторов любого базиса (2.33), (2.34). Суть преобразований — инвариант должен быть «погружен» в базис с преобразованием в матрицу оператора. Инвариантность проявляется равенством норм операторов и их матриц, а также тождественностью результата при действии на вектор матрицей оператора в каждом из базисов. Отсюда свойства следующего характера. Одному оператору соответствуют различные, но подобные матрицы (координаты) в разных базисах. Одной матрице в разных базисах соответствуют разные, но подобные операторы.

- Инвариант: обратимый линейный оператор, устанавливающий автоморфизм базисов ((2.32), (4.2) прил. 4). По сути инвариант, представленный только матрицей оператора. Оператор осуществляет прямое действие преобразования на векторы исходного базиса и обратное действие к результату прямого отображения.

При наличии базисов сначала определяется обратимый оператор. Его матрица линейных преобразований рассчитывается путем матричных операций или решением системы уравнений по данным исходных базисов. Векторы и операторы, путем разложения, представляются в каждом из базисов своими координатами. Координаты векторов и операторов могут преобразовываться между базисными системами действием обратимого оператора.

В а ж н о:

- *действие преобразования* (2.29-2.32), (2.33-2.44) векторов со стороны базисов, линейных и обратимых операторов отлично от операции векторов и операторов по *законам композиции* (1.39). Преобразования носят характер *линейных отображений*;

- результат преобразований в базисе типа (1.15) — координаты, по значению эквивалентны инварианту.

2.9 Линейные преобразования

Обобщим и рассмотрим *законы* линейного преобразования координат математических объектов. Эти преобразования будут тождественны всем преобразованиям в любых геометрических системах координат, где координаты статичны, т. е. не зависят от вещественного параметра внутри своей системы. Обобщим операторные преобразования (разд. 2.5) или операторные действия на общие векторные координаты. Это позволит, на общем уровне, понять подобные преобразования в каждой из координатной систем, т. е. можно получить обобщенное представление свойств преобразования координат на примере только векторного пространства. Но сначала дадим определение типам координат, их отношение к пространствам в порядке возрастания частности этих определений.

Определение 2.10.

- *Координаты* — это конечномерная или счетная совокупность компонент[17] *относительного* расширения инвариантных (неизменных) свойств математических объектов.

- *Общие координаты* векторного пространства — это коэффициенты разложения вектора в одной из базисных систем.

- *Координаты объекта в обычной n-мерной прямолинейной декартовой системе координат* (ДСК) тождественны с

[17] Рассматриваем только конечные совокупности, исключаем счетность координат, характерную для гильбертовых пространств.

точностью до единичного множителя коэффициентам разложения вектора в однозначном ортонормированном базисе вещественного векторного пространства R_n. Аналогично тождественны собственно евклидовым пространствам E^n. Число ДСК бесконечно, как и число соответствующих ортогональных базисов.

- *Координаты объекта в ортогональной прямолинейной евклидовой системе координат* (ЕСК) тождественны с точностью до единичного множителя коэффициентам разложения вектора в ортогональном базисе типа (1.15). ЕСК единственно; координаты ЕСК эквивалентны инвариантным свойствам объекта[18].

Определение 2.11. Математический объект, какова бы ни была его природа, является *инвариантом*, если только он остается неизменным при *преобразовании* координат.

В координатных системах точка, совокупность точек, образующих, например, кривую или поверхность, являются инвариантами. Например, кривую можно описать в заданной координатной системе уравнением, которое обычно меняет свою форму с изменением координат и их систем, хотя сама кривая остается неизменной.

Переходим к обобщению операторных преобразований в векторных координатах, где в приводимых выражениях обратные операторы, как структуры действующего закона преобразования, будут обозначаться греческими буквами, преобразуемые координаты — латинскими.

[18] Это система координат традиционной евклидовой геометрии, основанной на системе «самоочевидных истин» и созданной в значительной мере Александрийской школой математиков (около 300 лет до нашей эры). Евклидова геометрия господствовала над мыслью и формировала развитие физики и астрономии на протяжении более двух тысячелетий.

2.9.1 Обратимые преобразования

Пусть переменные $x^1,\ x^2,\ x^3$ преобразуются в новые $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ с помощью линейного преобразования [19]

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 &= c_1^1 x^1 + c_2^1 x^2 + c_3^1 x^3,\\ \bar{x}^2 &= c_1^2 x^1 + c_2^2 x^2 + c_3^2 x^3,\\ \bar{x}^3 &= c_1^3 x^1 + c_2^3 x^2 + c_3^3 x^3,\end{aligned}$$

где c_s^r — константы. Применяя условие о суммировании, можем записать эту систему уравнений в виде

$$\bar{x}^r = c_s^r x^s. \tag{2.55}$$

Предполагаем, что определитель преобразования $c = |c_s^r|$ не равен нулю. Пусть γ_r^s является алгебраическим дополнением элемента c_s^r в определителе c. Тогда

$$c_m^r \gamma_s^m = \gamma_m^r c_s^m = \delta_s^r, \tag{2.56}$$

и можно разрешить систему уравнений (2.55) относительно x

$$x^r = \gamma_m^r \bar{x}^m. \tag{2.57}$$

Это показывает, что данное преобразование *обратимо*. Кроме того, если $c_s^r = \delta_s^r$, имеем

$$\bar{x}^r = x^r,$$

т. е. *тождественное* преобразование.

[19] В сущности это неоднородная система линейных алгебраических уравнений, где системная матрица из $c_{\bullet}^{\bullet}$ элементов тождественна (2.15). По другому — это система линейных функционалов с аргументом в виде вектора x, формирующих вектор $\bar{x}$.

Если перейти сначала от переменных x^r к $\bar{x}^r$ по (2.55), а затем от переменных $\bar{x}^r$ к $\bar{\bar{x}}^r$ при помощи преобразования

$$\bar{\bar{x}}^r = c_s'^r \bar{x}^s,$$

то видно, что переход от первоначальных переменных x^r к $\bar{\bar{x}}^r$ определяется формулой

$$\bar{\bar{x}}^r = c_s''^r x^s,$$

где

$$c_s''^r = c_m'^r c_s^m.$$

Это преобразование, следовательно, также линейное.

2.9.2 Инварианты, контравариантные и ковариантные векторы

Сначала рассмотрим объект *нулевого* порядка, т. е. просто число или функцию. Если этот объект имеет *одно и то же значение* и в новых переменных $\bar{x}^r$ и в старых переменных x^r, то он называется *скаляром*, или *инвариантом*. Следовательно, если a есть инвариант, то

$$\bar{a} = a, \tag{2.58}$$

где $\bar{a}$ есть значение данного объекта в новых переменных.

Теперь рассмотрим объект *первого порядка*. Простейший тип такого объекта есть совокупность самих переменных, а именно x^r. Составляющие этого объекта преобразуются следующим образом:

$$\bar{x}^r = c_s^r x^s.$$

Следовательно, эта формула дает один из способов, с помощью которого может быть преобразован объект первого порядка. Любой объект, составляющие которого преобразуются по этому за-

кону, называется *контравариантным вектором*. Таким образом, a^r есть контравариантный вектор, если при линейном преобразовании переменных (2.55) его преобразованные составляющие определяются формулами

$$\bar{a}^r = c_s^r a^s. \tag{2.59}$$

Имеется и другой способ преобразования элементов объекта первого порядка. Уже было определено, что коэффициенты линейной формы переменных x также образуют объект первого порядка. Таким образом, коэффициенты линейной формы $a_m x^m$ являются составляющими объекта a_r. Предположим, что составляющие a_r преобразуются таким образом, что линейная форма $a_m x^m$ остается *инвариантной* относительно преобразования переменных (2.55). Если обозначить через $\bar{a}_r$ новые составляющие объекта a_r (после преобразования), то получим

$$\bar{a}_m \bar{x}^m = a_m x^m,$$

так как эта линейная форма есть инвариант. Тогда из (2.57) следует

$$\bar{a}_m \bar{x}^m = a_m \gamma_p^m \bar{x}^p.$$

Поскольку немой индекс может быть обозначен любой буквой, то эту систему уравнений можно записать в виде

$$(\bar{a}_p - a_m \gamma_p^m)\bar{x_p} = 0.$$

Если это соотношение справедливо для всех значений переменных $\bar{x}^r$, то должно выполняться равенство

$$\bar{a}_r = \gamma_r^m a_m. \tag{2.60}$$

Это преобразование, очевидно, отлично от преобразования, задаваемого формулой (2.59). Объект первого порядка, составляющие которого преобразуются по этому закону, называется *ковариантным вектором*. Другими словами, *верхний индекс обозначает контравариантность, а нижний индекс — ковариантность*. В качестве заключения, по всем пройденным разделам, делаем вывод.

Важно

Вектор — начальное, абстрактное, формальное понятие инварианта. Уровень общего представления позволяет быть вектору элементом линейного пространства наряду с абстрагированными объектами любой природы. Пространство линейно как следствие его полноты, замкнутости и непрерывности по топологическим или метризуемым свойствам составляющих его множеств. «Собственное» пространство вектор получает лишь как результат расширения некоторого поля. Если алгебраическое поле замкнуто и линейно на свойствах входящих в него колец, то модуль над полем объявляет векторное пространство для объекта *алгебраического*. Если метризуемое (геометризуемое) пространство полное, замкнуто и линейно на свойствах числовой метрики, то над полем вещественных или комплексных чисел определяется векторное пространство для объекта *геометрического*. Отсюда и частный характер векторных пространств по отношению к линейному пространству, не смотря на аксиоматическую тождественность их определений. Вектор для геометризированной механики — это основной объект преобразований, рассматриваемый в локально-евклидовом пространстве [8].

Примеры заданий

1. Пусть x, y, и v — векторы из $\mathscr{L}^4$ а $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — подпространства в $\mathscr{L}^4$, натянутые соответственно на $\{x, y\}$ и $\{u, v\}$. В каких из нижеследующих случаев $\mathscr{L}^4 = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$?

   а) $x = (1, 1, 0, 0),\ y = (1, 0, 1, 0),$
   $u = (0, 1, 0, 1),\ v = (0, 0, 1, 1).$

   б) $x = (-1, 1, 1, 0),\ y = (0, 1, 1, 1),$
   $u = (1, 0, 0, 0),\ v = (0, 0, 0, 1).$

   в) $x = (1, 0, 0, 1),\ y = (0, 1, 1, 0),$
   $u = (1, 0, 1, 0),\ v = (0, 1, 0, 1).$

2. Пусть $\mathscr{I}$ и $\mathscr{J}$ — произвольные подмножества векторного пространства (не обязательно смежные классы по какому-нибудь подпространству); сумму $\mathscr{I} + \mathscr{J}$ определяется точно так, как определялось сложение для смежных классов, и аналогично можно определить $\alpha\mathscr{J}$ (где α скаляр). Какие аксиомы векторного пространства выполнены при наделении класса всех подмножеств векторного пространства этими «линейными операциями»?

3. Факторпространства.

   а) Пусть $\mathscr{M}$ — подпространство векторного пространства $\mathscr{V}$. Два вектора x и y называются сравнимыми по модулю $\mathscr{M}$, символически $x \equiv y(\mathscr{M})$, если $x - y$ принадлежит $\mathscr{M}$. Показать, что сравнимость по модулю $\mathscr{M}$ есть *отношение эквивалентности*, т. е. что оно рефлексивно ($x \equiv x$), симметрично (если $x \equiv y$, то $y \equiv x$) и транзитивно (если $x \equiv y$ и $y \equiv z$, то $x \equiv z$).

   б) Если α_1, α_2 — скаляры, а x_1, x_2, y_1 и y_2 векторы, для которых $x_1 \equiv y_1(\mathscr{M})$ и $x_2 \equiv y_2(\mathscr{M})$, то $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \equiv$
   $\equiv \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2(\mathscr{M})$.

в) Сравнимость по модулю $\mathscr{M}$ разбивает $\mathscr{V}$ на классы эквивалентности, т. е. такие множества, что два вектора принадлежат одному и тому же множеству тогда и только тогда, когда они сравнимы. Доказать, что подмножество векторного пространства $\mathscr{V}$ является классом эквивалентности по модулю $\mathscr{M}$ тогда и только тогда, когда оно является смежным классом по $\mathscr{M}$.

а) Билинейную форму w на $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ называют *вырожденной*, если как функция одного из своих аргументов она тождественно равна нулю для некоторых ненулевых значений другого аргумента; в противном случае ее называют *невырожденной*.

а) Привести пример вырожденной (не тождественно нулевой) билинейной формы на $\mathscr{I}^2 \oplus \mathscr{I}^2$.

б) Привести пример невырожденной билинейной формы на $\mathscr{I}^2 \oplus \mathscr{I}^2$.

4. Более общее определение линейного оператора (как линейного отображения): линейным отображением векторного пространства $\mathscr{U}$ в векторное пространство $\mathscr{V}$ над тем же полем называется соответствие A, относящее каждому вектору x из $\mathscr{U}$ вектор Ax из $\mathscr{V}$ так, что

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Показать, что каждое из описанных ниже соответствий является линейным отображением в обобщенном смысле.

а) $\mathscr{V}$ — поле скаляров пространства $\mathscr{U}$; A — линейный функционал на $\mathscr{U}$.

б) $\mathscr{U}$ — прямая сумма пространства $\mathscr{V}$ с некоторым другим пространством; A отображает каждую пару из $\mathscr{U}$ на ее первую координату.

в) $\mathscr{V}$ — факторпространство пространства $\mathscr{U}$ по некоторому подпространству; A отображает каждый вектор из $\mathscr{U}$ на определяемый им смежный класс.

г) Пусть w — билинейный функционал на прямой сумме $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}_0$ и $\mathscr{V}$ — пространство, сопряженное к $\mathscr{V}_0$; определим $\mathscr{A}$ как соответствие, которое каждому x_0 из $\mathscr{U}$ относит линейный функционал на $\mathscr{V}_0$ получаемый, если первый аргумент в w равен x_0.

5. Если $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица линейного оператора A на $\mathscr{I}^2$ в базисе $\{(1,0),(0,1)\}$, какова будет матрица A в базисе $\{(1,1),(1,-1)\}$ и в базисе $\{(1,0),(1,1)\}$?

6. Если $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица линейного оператора A на $\mathscr{I}^3$ в базисе $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, какова будет матрица A в базисе $\{(0,1,-1),\ (1,-1,1),(-1,1,0)\}$?

3 Координаты пространств и связность

Размещение раздела по координатным системам обусловлено целью выстроить иерархию от общего к частному в понимании *относительного* представления совокупностей скаляров (инвариантов). Все вышеупомянутые координаты, включая составляющие дифференциалов [5], можно было отождествлять с общими координатами векторов для выявления линейных зависимостей производимых преобразований. Если и упоминалось сочетание «система координат», то это для установки связи коэффициентов разложения векторов и координат на линиях. Достаточно понятий из элементарной геометрии о свойствах координатных систем. Теперь рассмотрим координатные системы, в которых размещаются инварианты для *линейных* и *общих* преобразований. В обоих случаях совокупности инвариантов показываются векторами, производные инвариантов (скаляров) — ковекторами.

Линейные преобразования осуществляют по правилам *прямолинейных аффинных координатных систем*. Системы действуют как *оператор сдвига* данных вектора от начала координат. Вектор сворачивается в *точку*, составляющие его инварианты преобразуются в координаты *радиус-вектора*.

Общие преобразования дифференциалов (инвариантов), связанные со структурой дифференциальных квадратичных форм, осуществляется в *криволинейных координатных системах*. Преобразования применяются к геометрическому месту точек в пространстве E_3, называемых *поверхностями*. Вектор-функции криволинейных координат образуют системы касательных к точкам поверхностей, а также формируют объекты метрических характеристик кривых. Частный случай — прямолинейные координаты или декартовы ортогональные системы.[1]

[1] Декартова система координат (ДСК) — координатные линии, (прямые,

3.1 Аффинные пространства

3.1.1 Точечно-векторная аксиоматика аффинного пространства

Произведем выделение аффинных свойств не из числа евклидовых, а рассмотрим формулировку самостоятельной системы аксиом, достаточную для вывода всех аффинных свойств, и притом не только в трехмерном, но и в многомерном пространстве на основе близости к векторным представлениям. Основными понятиями, не подлежащими прямому логическому определению, будут служить точка и вектор [8]. Это, конечно, не означает, что понятия точки и вектора будут лишены содержания. В этой теории они будут определены посредством перечисления их свойств в аксиомах. При этом будем считать, что теория вещественных (равно как и комплексных) чисел уже построена. Тогда достаточно дать определение аффинной геометрии, как *геометризацию общего векторного пространства.*

Определение 3.1. [9] Отображение какой-бы то ни было пространственной или плоской фигуры в пространство называется *аффинным*, если оно сохраняет линейные соотношения между векторами и не вводит новых.

Определение 3.2. [9] *Аффинной геометрией* называется та часть геометрии, в которой изучаются аффинные свойства фигур.

И далее принимаем следующие аксиомы [8].

1°. Существует по меньшей мере одна точка.

кривые) пересекаются в единственной общей точке под прямым углом. Для прямых линий — это координатные системы обычного пространства R_i $(i = 1, 2, 3)$, тождественного собственно евклидову пространству E^i $(i = 1, 2, 3)$. Косоугольные координатные системы в данном издании не рассматриваются.

2°. Каждой паре точек A, B, заданных в определенном порядке, поставлен в соответствие один и только один вектор. Этот вектор будем обозначать $\overrightarrow{AB}$, но, если понадобится, будем пользоваться обозначением и в виде отдельной (жирной) буквы $\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$ и т. п.

3°. Для каждой точки A и каждого вектора $\mathbf{x}$ существует одна и только одна точка B такая, что

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{x}. \tag{3.1}$$

Знак $=$ между векторами (как и между числами) будем понимать в смысле тождества, например, в данном случае $=$ означает, что $\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{x}$ — это просто один и тот же вектор. В связи с этим нет надобности обосновывать особыми аксиомами свойства знака $=$ (например, транзитивность), так как это просто свойства логического тождества. Следует подчеркнуть, что при наглядном истолковании приводимой аксиоматики вектор выступает не в виде направленного отрезка, а в виде параллельного сдвига, которому подвергаются все точки пространства. Поэтому наглядный смысл аксиомы 2° состоит в существовании (единственного) параллельного сдвига, переводящего данную точку A в данную точку B, а аксиома 3° в сущности означает, что каждый вектор $\mathbf{x}$ реализуется в виде сдвига, а именно, каждой точке A ставит в соответствие определенную точку B согласно (3.1).

4°. (Аксиома параллелограмма.) Если

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

то

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Наглядный смысл аксиомы 4° в основном состоит в том, что при равенстве и параллелизме одной пары противоположных сторон четырехугольника то же имеет место и для другой пары.

Перечисленные четыре аксиомы образуют в известном смысле законченную часть аксиоматики: остальные аксиомы относятся к умножению вектора на число.

3.1.2 Аффинная координатная система

Рассмотрим в n-мерном аффинном пространстве наиболее естественные координатные системы, геометрически связанные со свойствами пространства. Указания для первой ориентации в этом направлении дает нам аксиома размерности. В самом деле, согласно ей в пространстве существует n линейно независимых векторов. Выберем их каким-нибудь образом и обозначим $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$. Присоединяя к этим векторам любой вектор $\mathbf{x}$, получим $n+1$ уже линейно зависимых векторов. Запишем эту линейную зависимость

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Будем утверждать, что $\alpha \neq 0$. Действительно, если бы $\alpha = 0$, то осталась бы линейная зависимость между $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$, что противоречит выбору этих векторов. Выражая теперь из линейной зависимости $\mathbf{x}$ через остальные векторы, получаем его разложение:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + ... + x^n\mathbf{e}_n. \tag{3.3}$$

Через $x^1, ..., x^n$ обозначены коэффициенты разложения; $x^1 = -\alpha_1/\alpha$ и т. д. Запись индекса наверху является не случайной — она будет указывать на характер преобразования этих коэффициентов. Итак, *любой* вектор n-мерного аффинного пространства может быть *разложен* по n как-либо выбранным линейно независимым векторам.

В случае $n = 1$ любой вектор $\mathbf{x}$ может быть записан в виде

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1, \tag{3.4}$$

что соответствует положению вещей на прямой линии, где все векторы коллинеарны между собой.

В случае $n = 2$ любой вектор $\mathbf{x}$ разлагается по двум данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2, \tag{3.5}$$

что дает картину плоскости, аффинную геометрию которой в этом случае и получаем.

В случае $n = 3$ любой вектор $\mathbf{x}$ можно разложить но трем данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3. \tag{3.6}$$

Геометрия трехмерного аффинного пространства, которую в этом случае получаем, и есть геометрия обычного пространства с сохранением лишь ее аффинных свойств (разд. 3.1.1). Возвращаемся к n-мерному случаю.

Определение 3.3. Будем называть *аффинным репером* совокупность какой-нибудь точки O (начало репера) и каких-нибудь n занумерованных линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ (которые для наглядности будем представлять себе отложенными из начала O). Пусть некоторый *аффинный репер* нам задан. Тогда любой вектор $\mathbf{x}$ разлагается по векторам репера согласно (3.3). Коэффициенты разложения $x^1, ..., x^n$ будем называть *аффинными координатами вектора* $\mathbf{x}$ относительно данного репера.

Эти координаты определяются единственным образом. Обратно, вектор $\mathbf{x}$ однозначно определяется своими координатами

согласно (3.3), так что соответствие между векторами $\mathbf{x}$ и совокупностями их координат $(x^1, ..., x^n)$ является взаимно однозначным. В частности, вектор-нуль имеет все координаты, равные нулю.

Посмотрим, как выглядят операции над векторами с точки зрения их координатного задания. Пусть даны два вектора:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + ... + x^n\mathbf{e}_n, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{y} = y^1\mathbf{e}_1 + ... + y^n\mathbf{e}_n, \tag{3.8}$$

Складывая эти равенства почленно и преобразуя правую часть при помощи известных правил, получим:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1)\mathbf{e}_1 + ... + (x^n + y^n)\mathbf{e}_n. \tag{3.9}$$

Это означает, что *координаты суммы двух (и аналогично нескольких) векторов получаются сложением соответствующих координат этих векторов.*

Далее, умножая (3.7) на какое-либо число α, получим:

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha x^1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha x^n\mathbf{e}_n. \tag{3.10}$$

Это означает, что при умножении вектора на число α каждая его координата умножается на это число.

Объединяя операции сложения и умножения на число, рассмотрим составление линейной комбинации данных векторов. Пусть дано m векторов:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{x}_1 = x_1^1\mathbf{e}_1 + x_1^2\mathbf{e}_2 + x_1^n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{x}_2 = x_2^1\mathbf{e}_1 + x_2^2\mathbf{e}_2 + x_2^n\mathbf{e}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{x}_m = x_m^1\mathbf{e}_1 + x_m^2\mathbf{e}_2 + x_m^n\mathbf{e}_n. \end{array}\right\} \tag{3.11}$$

Составим их линейную комбинацию $\mathbf{x}$ с произвольными коэффициентами $\alpha_1, ..., \alpha_m$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + ... + \alpha_m \mathbf{x}_m. \tag{3.12}$$

Умножая разложения (3.11) соответственно на $\alpha_1, ..., \alpha_m$ и складывая почленно, убеждаемся, что координаты линейной комбинации $\mathbf{x}$:

$$x^1, x^2, ..., x^n \tag{3.13}$$

образуют линейную комбинацию строк матрицы

$$\left\| \begin{array}{c} x_1^1 x_1^2 ... x_1^n \\ x_2^1 x_2^2 ... x_2^n \\ ..... \\ x_m^1 x_m^2 ... x_m^n \end{array} \right\| \tag{3.14}$$

с теми же коэффициентами $\alpha_1, ..., \alpha_m$, а именно:

$$x^i = \alpha_1 x_1^i + ... + \alpha_m x_m^i. \tag{3.15}$$

Пусть векторы $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ линейно зависимы. Тогда коэффициенты
$\alpha_1, ..., \alpha_m$ (не обращающиеся одновременно в нуль) можно подобрать так, что будет равна нулю линейная комбинация $\mathbf{x}$, а вместе с нею и все ее координаты (3.13). Это значит, что обращается в нуль линейная комбинация строк матрицы (3.14), а следовательно, между строками этой матрицы имеется *линейная зависимость*.

Существование линейной зависимости между строками матрицы (3.14) не только необходимо, но и достаточно для линейной зависимости векторов $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x_m}$, в чем сейчас же убеждаемся, проводя рассуждение в обратном порядке. Были введены координаты для векторов; это нетрудно теперь сделать и для точек.

Пусть M — любая точка пространства. Ей однозначно отвечает вектор $\overrightarrow{OM}$, где O — начало репера. Этот вектор будем называть *радиусом-вектором* данной точки; он, как и всякий вектор, обладает определенными координатами $x^1, ..., x^n$ относительно аффинного репера:

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OM} = x^1\mathbf{e}_1 + ... + x^n\mathbf{e}_n. \tag{3.16}$$

Определение 3.4. *Аффинными координатами* точки M относительно данного репера будем называть аффинные координаты $x^1, ..., x^n$ ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ относительно того же репера.

Очевидно, таким образом, что координаты данной точки M определяются однозначно. Обратно, при задании координат $x^1, ..., x^n$ радиус-вектор точки M однозначно определяется согласно (3.16), а откладывая его затем от начала O, однозначно определим точку M.

Важно

Таким образом, задание аффинного репера влечет построение аффинной координатной системы и для векторов и для точек.

Если точки A и B имеют соответственно координаты x^i и y^i, то такие же координаты имеют и векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, а так как

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB},$$

то

$$y^i = x^i + z^i,$$

где z^i — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, и окончательно

$$z^i = y^i - x^i.$$

Аффинные координатные системы наиболее естественно связаны с геометрическими свойствами рассматриваемого n-мерного аффинного пространства, хотя в нем возможны и другие (криволинейные) координатные системы. На протяжении оставшихся разделов будем рассматривать только аффинные координатные системы и под словами «координатная система» всегда будем понимать аффинную координатную систему.

3.1.3 Преобразование аффинного репера

В этом разделе ответим на вопрос, с какой степенью произвола можно выбирать аффинный репер и каким образом переходить от одного репера к другому. Займемся вопросом о преобразовании векторов репера $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$, так как в связи с переносом его начала O никаких вопросов не возникает: начало O можно по желанию передвигать в любое положение. Кроме того, в интересующих нас вопросах выбор начала O большей частью будет безразличен. Дело в том, что будем пользоваться координатами не столько для точек, сколько для векторов, а в этом случае положение начала O совершенно не играет роли.

Пусть $\mathbf{e}_{1'}, ..., \mathbf{e}_{n'}$ — это 1-й,...,n-й векторы некоторого нового аффинного репера, занумерованные для отличия штрихованными индексами. Каждый из этих векторов согласно (3.3) может быть разложен но векторам старого репера $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$. Коэффициенты этих разложений будем обозначать буквой A с соответствующими индексами:

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{e}_{1'} = A^1_{1'}\mathbf{e}_1 + A^2_{1'}\mathbf{e}_2 + ... + A^n_{1'}\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}_{2'} = A^1_{2'}\mathbf{e}_1 + A^2_{2'}\mathbf{e}_2 + ... + A^n_{2'}\mathbf{e}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}_{n'} = A^1_{n'}\mathbf{e}_1 + A^2_{n'}\mathbf{e}_2 + ... + A^n_{n'}\mathbf{e}_n, \end{array}\right\}. \qquad (3.17)$$

Объединяя эти формулы в общей записи, можно написать:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^1_{i'}\mathbf{e}_1 + A^2_{i'}\mathbf{e}_2 + ... + A^n_{i'}\mathbf{e}_n. \tag{3.18}$$

В этом равенстве, как и во всех дальнейших, будем подразумевать, что буквенному индексу, встречающемуся по одному разу в каждом одночленном выражении, можно давать любые значения $1, 2, ..., n$, т. е. что фактически имеется в виду не одно, а n равенств (если такой индекс один).

В нашем случае имеется буквенный индекс i', которому, где по очереди придаются значения $1', 2', ..., n'$. В результате (3.18) означает в краткой записи то же самое, что и (3.17).

Нетрудно заметить, что при помощи знака Σ можно записать (3.18) следующим образом:

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{n} A^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{3.19}$$

Суммирование происходит здесь лишь по нештрихованному индексу i, в то время как индекс i' сохраняет постоянное значение. Таким образом, здесь и в аналогичных случаях дальше позволим себе рассматривать буквенные индексы, обозначенные одной и той же буквой, но в одном случае штрихованной, а в другом — нештрихованной (как сейчас i и i'), *как принимающие значения один независимо от другого.*

То, что индекс суммирования i встречается дважды, один раз наверху, а другой раз внизу, является, как дальше увидим, далеко не случайным. Такого типа суммы нам будут встречаться часто, и для сокращения записи условимся в этих случаях опускать знак Σ.Так, (3.19) будем записывать:[2]

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \tag{3.20}$$

[2]Свойства математических объектов [8], [5].

подразумевается суммирование по i от 1 до n. Общее правило: *пусть дано выражение, записанное в виде буквы, снабженной индексами; пусть при этом какой-либо буквенный индекс встречается дважды, один раз вверху и один раз внизу; тогда будем считать, что написанное обозначает сумму этого рода выражений для значений* $1, 2, ..., n$, *пробегаемых данным индексом. Если таких (встречающихся один раз вверху и один раз внизу) индексов несколько, то подразумевается суммирование по каждому из них.*

Например, выражение будем понимать так:

$$\Phi_{ikl}^{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ikl}^{ik}, \tag{3.21}$$

так что фактически это выражение будет зависеть лишь от одного индекса, именно l, который будем называть *свободным* в отличие от индексов *суммирования*.

В связи со сказанным обозначения индексов суммирования не играют, конечно, никакой роли; так, если вместо Φ_{ikl}^{ik} написать, например, Φ_{pql}^{pq}, обозначив индексы суммирования p, q вместо l, k, то по смыслу равенства (3.21) результат нисколько не изменится:

$$\Phi_{ikl}^{ik} = \Phi_{pql}^{pq}.$$

Все, что было только сказано относительно сокращенной записи суммы для выражений, обозначенных просто буквой с индексами, полностью относится и к произведениям такого рода выражений. Пример сокращенной записи в этом случае имеем уже в формуле (3.20).

Вернемся к вопросу преобразования аффинного репера. Векторы нового репера $\mathbf{e}_{i'}$ могут быть выбраны произвольно с единственным условием линейной независимости. Но линейная

независимость векторов $\mathbf{e}_{i'}$ равносильна линейной независимости строк матрицы преобразования (3.17):

$$\left\| \begin{array}{l} A^1_{1'}\ A^2_{1'}\ ...\ A^n_{1'}, \\ A^1_{2'}\ A^2_{2'}\ ...\ A^n_{2'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^1_{n'}\ A^2_{n'}\ ...\ A^n_{n'}, \end{array} \right\| . \tag{3.22}$$

Другими словами, соответствующий определитель должен быть отличным от нуля:

$$\det |A^i_{i'}| \neq 0. \tag{3.23}$$

Это и есть единственное условие, наложенное на преобразование векторов репера (3.17). В остальном коэффициенты $A^i_{i'}$ произвольны. Тем самым матрица (3.22) допускает обратную матрицу, элементы которой будем обозначать $A^{i'}_i$ (штрихованный индекс наверху):

$$\left\| \begin{array}{l} A^{1'}_1\ A^{2'}_1\ ...\ A^{n'}_1, \\ A^{1'}_2\ A^{2'}_2\ ...\ A^{n'}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^{1'}_n\ A^{2'}_n\ ...\ A^{n'}_n, \end{array} \right\| . \tag{3.24}$$

Если, обратно, выразить векторы старого репера $\mathbf{e}_i$, через векторы нового репера $\mathbf{e}_{i'}$, то придется применить преобразование, обратное преобразованию (3.17), для чего надо воспользоваться вместо матрицы (3.22) обратной матрицей (3.24). В краткой записи, аналогичной (3.20), получим:

$$\mathbf{e}_i = A^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}. \tag{3.25}$$

По общему соглашению здесь имеется в виду суммирование по индексу i' так что в подробной записи получаем:

$$\mathbf{e}_i = A^{1'}_i \mathbf{e}_{1'} + A^{2'}_i \mathbf{e}_{2'} + ... + A^{n'}_i \mathbf{e}_{n'}.$$

Здесь i нужно давать поочередно значения $1, 2, ..., n$. То, что матрицы (3.22) и (3.24) *взаимно обратные*, означает, что их произведение, в том или другом порядке, дает единичную матрицу. Элементы единичной матрицы будем стандартно обозначать

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

так что связь $A_i^{i'}$ и $A_{i'}^i$ можно записать так:

$$A_k^{j'} A_{i'}^k = \delta_{i'}^{j'}, \; A_{k'}^j A_i^{k'} = \delta_i^j. \tag{3.26}$$

По k, равно как и по k', предполагается суммирование от 1 до n по общему соглашению. Эти формулы можно также получить, подставляя в (3.25) выражение $\mathbf{e}_{i'}$ согласно (3.20) (заменив лишь обозначение индекса суммирования i на какое-нибудь другое, например, j), получим:

$$\mathbf{e}_j = A_j^{i'} A_{i'}^j \mathbf{e}_j.$$

В правой части подразумевается двойное суммирование: по индексам j и i'.

Так как разложение по векторам репера совершается единственным образом, то коэффициенты при $\mathbf{e}_j$ в правой части должны равняться соответствующим коэффициентам в левой части, т. е. нулю, если $j \neq i$, и единице, если $i = j$. В результате

$$A_{i'}^j A_i^{i'} = \delta_i^j,$$

что дает вторую из формул (3.26). Аналогично получается и первая из формул (3.26) — подстановкой (3.25) в (3.20).

При переходе к новому реперу каждый вектор $\mathbf{x}$ получает новые координаты, которые мы будем обозначать $x^{1'}, ..., x^{n'}$ в

отличие от старых $x^1, ..., x^n$. Разумеется, что при этом сам вектор $\mathbf{x}$ остается прежним, и изменение координат идет лишь за счет изменения репера.

Покажем, как будут выражаться новые координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ через старые, и обратно. По определению координат вектора имеем в старом репере

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + ... + x^n\mathbf{e}_n = x^i\mathbf{e}_i \tag{3.27}$$

и аналогично в новом репере

$$\mathbf{x} = x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + ... + x^{n'}\mathbf{e}_{n'} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}. \tag{3.28}$$

В правых частях было использовано сокращение записи с опусканием знака суммы. Теперь, чтобы решить задачу, необходимо сравнить оба разложения, а для этого вставим в (3.27) выражение $\mathbf{e}_i$, согласно (3.25). Тогда (3.27) принимает вид

$$\mathbf{x} = x^i A_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}. \tag{3.29}$$

Здесь происходит двойное суммирование: по i и по i'.

Сравнивая разложения (3.28) и (3.29), необходимо приравнять коэффициенты при $\mathbf{e}_{i'}$ ввиду единственности разложения вектора $\mathbf{x}$ по векторам репера. Получим:

$$x^{i'} = A_i^{i'}x^i, \tag{3.30}$$

где по i происходит суммирование, так что в подробной записи

$$x^{i'} = A_1^{i'}x^1 + A_2^{i'}x^2 + ... + A_n^{i'}x^n. \tag{3.31}$$

Совершенно аналогично при помощи обратного преобразования выразятся старые координаты через новые: $x^i = A_{i'}^i = x^{i'}$. Весьма важно для дальнейшего сравнить формулы преобразования

векторов репера $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ *и координат инвариантного вектора* $x^1, ..., x^n$. Для определенности рассматриваем в обоих случаях переход именно от старого репера к новому и сравниваем формулы (3.20) и (3.30). Матрицы этих преобразований различны, а именно матрица преобразования (3.30) есть *транспонированная обратная матрица* преобразования (3.20) (такие преобразования называются *контрагредиентными*).

Действительно, матрица преобразования (3.30) (как особенно ясно видно из записи (3.31)) имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & \cdots & A_n^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & \cdots & A_n^{2'} \\ & \cdots & \cdots & \\ A_1^{n'} & A_2^{n'} & \cdots & A_n^{n'} \end{matrix} \right\|, \tag{3.32}$$

т. е. получается транспонированием (поворотом на 180° вокруг главной диагонали) матрицы (3.24), а эта последняя матрица — взаимно обратная с матрицей (3.22) преобразования (3.20).

Формулы преобразования *векторов репера и координат инвариантного вектора* при переходе от старого репера к новому

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i} \mathbf{e}_i, \tag{3.33}$$

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i \tag{3.34}$$

являются фундаментальными для тензорного исчисления. Они лежат в основе всех остальных тензорных законов преобразования. Таким образом, преобразование *векторов репера* совершается при помощи произвольной неособенной матрицы ($\det |A_{i'}^{i}| \neq 0$), преобразование *координат вектора* — при помощи транспонированной обратной матрицы.[3] Все выше описанное до сих пор относилось преобразованиям координат вектора,

[3] См. обратимый оператор (2.32): опред. 2.7 на стр. 76.

а не точки. Если меняются лишь векторы репера, а начало O остается неподвижным, то координаты каждой точки M меняются так же, как и координаты ее (неизменного в этом случае) радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, т. е. по закону (3.34). Если же, кроме того, и начало O испытывает сдвиг на вектор $\mathbf{a}$, то радиусы-векторы всех точек M изменяются вследствие этого на вектор $\mathbf{a}$ и тем самым координаты x^i всех точек M увеличиваются на $A^{i'}$, где $A^{i'}$ — координаты вектора $\mathbf{a}$. В результате окончательная формула для преобразования координат x^i неподвижной точки M имеет вид

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}.$$

Важно

Таким образом, переход от одной аффинной системы координат к другой эквивалентен линейному преобразованию переменных. Можно определять *инварианты (скаляры) и их совокупности (векторы) относительно преобразования аффинных координат* (2.55), (2.57).

Очевидно, что аффинное преобразование инвариантов тождественно преобразованию математических объектов в общих векторных координатах (2.57), (3.34). При сравнении (2.31) и (3.33) очевидна линейная зависимость нового репера (3.17), где каждая строчка линейной комбинации определет прямую — *координатную линию*, коллинеарную базисному вектору нового репера. Для приведенных выражений преобразования отсутствует параметризация и, соответственно, производная по параметру $t \in [a, b]$ для систем векторов равна нулю (касательная совпадает с координатной линией). Смещение репера $\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i + A_{i'}$ на ковектор $A_{i'}$ сохраняет направление линий, что соответствует прямолинейной ДСК (опред. 2.10, стр. 96).[4]

[4]Полный перечень аксиоматики и связанных с ней теорем аффинной гео-

3.2 Криволинейные координаты

3.2.1 Криволинейные координаты на поверхности

Внутренняя геометрия поверхности

В разделе криволинейных координат будем изучать свойства поверхностей, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. Здесь будет показано, что некоторые из этих свойств могут быть исследованы независимо от пространства, заключающего в себе эту изучаемую поверхность, и что эти свойства связаны со структурой дифференциальной квадратичной формы для элемента дуги кривой, проведенной на поверхности. Все такого рода свойства поверхностей называются *внутренними* свойствами, а геометрия, основанная на изучении дифференциальной квадратичной формы, называется *внутренней геометрией* поверхности. Условимся, во внутренней геометрии, геометрическое место точек, ассоциированное с пространством E_3, называть поверхностью S, а двумерное многообразие в пространстве назовем плоскостью S.

Будем удобно относить пространство с расположенной в нем поверхностью к системе ортогональных декартовых осей (прямолинейных) Y и рассматривать геометрическое место точек (поверхность) на основании двух способов.

1) *Теория неявных функций.* Геометрическое место точек удовлетворяет уравнению

$$F(y^1, y^2, y^3) = 0, \tag{3.35}$$

как аналитическое определение поверхности S. Здесь предполагаем, что только две из переменных y^i в (3.35) являются независимыми и что указание, например, y^1 и y^2

метрии можно найти в источниках [10], [9].

в какой-либо области плоскости Y^1Y^2 определяет однозначно вещественное число y^3, так что левая часть уравнения (3.35) обращается в нуль. Если предположить, что $F(y^1, y^2, y^3)$, рассматриваемая как функция трех независимых переменных, принадлежит классу C^1 в некоторой области R в окрестности точки $P_0(y_0^1, y_0^2, y_0^3)$, причем $\partial F/\partial y^3|_{P_0} \neq 0$ и $F(y_0^1, y_0^2, y_0^3) = 0$, то *основная теорема о неявных функциях* гарантирует существование единственного решения $y^3 = f(y^1, y^2)$ такого, что $y_0^3 = f(y_0^1, y_0^2)$.

2) *Метод Гаусса.* Поверхность определяется как геометрическое место точек, удовлетворяющих трем уравнениям типа

$$y^i = y^i(u^1, u^2), \tag{3.36}$$

где $u_1^1 \leqslant u^1 \leqslant u_2^1$ и $u_1^2 \leqslant u^2 \leqslant u_2^2$, а y^i и — вещественные функции класса C^1 в области определения независимых параметров u^1, u^2. Для того чтобы совместить эти два различных определения от функций $y^i = (u^1, u^2)$, следует потребовать, чтобы матрица-якобиан

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial u^1} & \frac{\partial y^2}{\partial u^1} & \frac{\partial y^3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial y^1}{\partial u^2} & \frac{\partial y^2}{\partial u^2} & \frac{\partial y^3}{\partial u^2} \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

была второго ранга (независимость 2-х переменных), так чтобы не все составленные из этой матрицы детерминанты второго порядка обращались тождественно в нуль в области определения параметров u^i. Это требование гарантирует возможность решения двух уравнений в (3.36) для u^1 и u^2, выраженных в парах переменных y^i. Подстановка же этих решений в остающееся третье уравнение приводит к уравнению типа $y^3(u^1, u^2)$.

Дальнейшее рассмотрение материала будет связано с методом Гаусса. Следует заметить, что если два каких-либо детерминанта, образованных из матрицы (3.37), обращаются в нуль, то при этом обращается в нуль также и третий, если только поверхность S не является плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей.

Так как u^1 и u^2 — независимые переменные, то геометрическое место, определяемое уравнениями (3.36) — двумерно, причем эти уравнения дают координаты y^i точки на поверхности, в то время как u_1 и u_2 принимают конкретные частные значения. С такой точки зрения поверхность приходится рассматривать как двумерное многообразие S, помещенное в трехмерное обволакивающее пространство E_3. Таким образом, можно исследовать поверхности, не относя их к окружающему пространству, и рассматривать параметры u_1 и u_2 как координаты точек на поверхности. Знакомым примером такой практики является применение широты и долготы как координат пунктов, расположенных на поверхности земного шара.

Если придать координате u^1 в (3.36) определенное фиксированное значение $u^1 = c$, то получим геометрическое место точек, образующих одномерное многообразие

$$y^i = y^i(c, u^2) \ (i = 1, 2, 3),$$

которое является кривой, лежащей на поверхности S, определенной уравнениями (3.36). Будем называть эту кривую u^2-кривой. Аналогично, положив $u^2 = \text{const}$ в (3.36), определим u^1-кривую, вдоль которой изменяется лишь u^1. Придавая u^1 и u^2 последовательность фиксированных значений, получаем сетку кривых иа поверхности, называемых *координатными кривыми*. Пересечение пары координатных кривых при фиксированных значениях $u^1 = u_0^1$, $u^2 = u_0^2$ определяет точку P_0.

Переменные u^1, u^2, определяющие P_0 на S, называются *криволинейными* или *гауссовыми координатами на поверхности.*[5]

Параметрическое представление поверхности уравнениями (3.36) не является, очевидно, единственно возможным: существует бесконечно много криволинейных координатных систем, которыми можно пользоваться для определения точек на заданной поверхности S. Так, например, если ввести преобразование

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \\ u^2 &= u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

где $u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ принадлежат классу C^1 и не обращают якобиан $J = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}$ в нуль в какой-либо области переменных $\bar{u}^i$, то значения (3.38) можно ввести в (3.36) и получить иную систему параметрических уравнений

$$y^i = f^i(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \ (i = 1, 2, 3), \tag{3.39}$$

определяющих ту же поверхность S. Уравнения (3.38) можно рассматривать как *уравнения преобразования координат* на поверхности точно так же, как уравнения $x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ $(i = 1, 2, 3)$ как определяющие преобразование координат в E_3.

Первая фундаментальная квадратичная форма

В предыдущем параграфе было отмечено, что свойства поверхностей, которые могут быть описаны без обращения к пространству, в котором помещается эта поверхность, называются *внутренними* свойствами. Изучение внутренних свойств поставлено там в зависимость от определенной квадратичной дифференциальной формы, описывающей метрические свойства по-

[5] Естественно, что точка пересечения координат должна быть единственной, а кривые должны пересекаться под прямым углом в своих координатных плоскостях, что соответствует ДСК.

верхности. Рассмотрим вывод этой квадратичной формы. Примем прежде всего некоторые соглашения о значениях индексов, которыми будем пользоваться в настоящем и в последующих параграфах этой главы. Здесь предстоит иметь дело с двумя различными совокупностями переменных:

1) с теми, которые имеют отношение к пространству E_3, в которое помещена изучаемая поверхность (таких переменных имеется три);

2) с двумя криволинейными координатами u^1 и u^2, относящимися к двумерному многообразию S.

Для того чтобы не путать эти совокупности переменных, будем пользоваться латинскими индексами для переменных, относящихся к пространству, и греческими — для переменных, относящихся к поверхности. Латинские индексы будут поэтому принимать значения 1, 2, 3, греческие 1, 2. Преобразование T координат пространства из одной системы X в другую систему $\bar{X}$ будем записывать выражением

$$T : x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3),$$

преобразование же гауссовых координат поверхности, описанных уравнениями (3.38), выразится формулой

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2).$$

Повторение греческого индекса в каком-либо члене обозначает суммирование от 1 до 2. Повторение латинского индекса обозначает суммирование в интервале 1-3. Если не оговорено обратное, то будем предполагать, что в дальнейшем изложении этой главы все участвующие в наших выкладках функции входят в класс C^2 в области их определения.

Рассмотрим поверхность S, определенную уравнением

$$y^i = y^i(u^1, u^2), \tag{3.40}$$

где y^i — ортогональные декартовы прямолинейные координаты пространства E_3, в котором расположена поверхность S, и на этой поверхности кривую C, заданную уравнениями [6]

$$u^\alpha = u^\alpha(t),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{3.41}$$

где u^α — гауссовы координаты поверхности S. Рассматриваемая из окружающего пространства кривая, определенная уравнением (3.41), представляет собой кривую в трехмерном евклидовом пространстве, а элемент ее дуги дан формулой

$$ds^2 = dy^i dy^i. \tag{3.42}$$

Из (3.40) выводим

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha} du^\alpha, \tag{3.43}$$

где, как это ясно из (3.41) [7],

$$du^\alpha = \frac{du^\alpha}{dt} dt.$$

Подставляя (3.43) в (3.42), получаем $ds^2 = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$.

[6] Параметризация гладких кривых внутренними уравнениями.

[7] Следует сравнить полученное выражение преобразования dy^i и закон преобразования координат скоростей [9], из которого можно получить $dh^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^j} dz^j$ — закон преобразования координат.

Обозначим преобразование ds^2 как[8]

$$a_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}. \tag{3.44}$$

Выражение для ds^2, а именно

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \tag{3.45}$$

представляет собой квадрат *линейного элемента кривой* C, *лежащей на поверхности* S, и правая часть формулы (3.45) называется *первой фундаментальной квадратичной формой поверхности*.[9] Длина дуги кривой, определяемой из (3.41), выражается формулой

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}\, dt,$$

где $\dot{u}^\alpha = du^\alpha/dt$. Поскольку в нетривиальном случае $ds^2 > 0$, то, положив сначала $u^2 = \text{const}$, а затем $u^1 = \text{const}$, найдем непосредственно из (3.45), что $ds^2_{(1)} = a_{11}(du^1)^2$ и $ds^2_{(2)} = a_{22}(du^2)^2$.[10] На этом основании заключаем, что a_{11} и a_{22} — положительные функции от u^1 и u^2.

Если параметризацию $u^\alpha = u^\alpha(t)$ (3.41) координатных функций двумерного многообразия S (плоскость Y^1Y^2) заменить преобразованием координат поверхности

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2),\ du^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} d\bar{u}^\gamma,\ \left|\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}\right| \neq 0, \tag{3.46}$$

[8] Закон преобразования $a_{\alpha\beta}$ квадрата дифференциала дуги ds также тождественен закону преобразования координат [9] квадрата скорости.

[9] Выражение формы тождественно квадрату скаляра скорости [9] в теории вариаций.

[10] Индексы заключенные в скобки — это фиксированное обозначение переменных. В данном случае показана линейная зависимость пары координат ds на двумерном многообразии S от дифференциала d преобразования u.

то можно сделать переход к определению *ковариантного метрического тензора* $a_{\alpha\beta}$ поверхности S.[11] Метрический тензор, совместно с законом преобразования координат $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta}$ на двумерном многообразии S, будет выражать квадрат линейного элемента кривой C на поверхности S:

$$ds^2 = a_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta}d\bar{u}^\gamma d\bar{u}^\delta.$$

Если положить

$$\bar{a}_{\gamma\delta} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\delta},$$

то увидим, что совокупность величин $a_{\alpha\beta}$ представляет собой симметричный ковариантный тензор второго ранга относительно допустимых преобразований (3.46) координат поверхности. То обстоятельство, что $a_{\alpha\beta}$ являются компонентами тензора, следует также из (3.45), так как ds^2 — инвариант, а величины $a_{\alpha\beta}$ симметричны. *Симметричный, метрический тензор* $a_{\alpha\beta}$ (3.44) называется *ковариантным метрическим тензором поверхности.* Все существенные метрические свойства евклидова пространства полностью определятся этим метрическим тензором.

Поскольку форма (3.45) является положительно определенной, то детерминант

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

и можно определить обратный тензор $a^{\alpha\beta}$ формулой

$$a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma. \tag{3.47}$$

[11] Параметризация поверхности с помощью замены внутренних координат [8].

В результате получаем

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a},\ a^{12} = a^{21} = \frac{-a_{12}}{a},\ a^{22} = \frac{a_{11}}{a}.$$

Контравариантный тензор $a^{\alpha\beta}$ называется *контравариантным метрическим тензором*. Так, например, направление линейного элемента на поверхности может быть указано либо *направляющими косинусами* dy^i/ds $(i = 1, 2, 3)$, либо *направляющими параметрами*

$$\lambda^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{ds}. \tag{3.48}$$

Так, например,

$$\frac{dy^i}{ds} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{ds}$$

и du^α/ds определяются однозначно, если указаны направляющие косинусы dy^i/ds, и наоборот.

Контравариантные $a^{\alpha\beta}$ и ковариантные тензоры $a_{\alpha\beta}$, обладающие свойством (3.47), играют существенную роль в исследованиях и по этой причине называются *фундаментальными тензорами*.

Тензор, получаемый процессом внутреннего перемножения произвольного тензора $A^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$ с одним из фундаментальных тензоров g_{ij} или g^{ij}, называется тензором, *ассоциированным* с заданным тензором. В качестве примера такого определения рассмотрим тензор A_{ijk} и получим следующие внутренние произведения: $g^{\alpha i}A_{ijk} \equiv A^\alpha_{\cdot jk}$, $g^{\alpha j}A_{ijk} \equiv A^\alpha_{i\cdot k}$, $g^{\alpha k}A_{ijk} \equiv A^\alpha_{ij\cdot}$. Все эти тензоры ассоциированы с тензором A_{ijk}. Действуя на эти тензоры тензором g^{ij}, можно получить и другие ассоциированные тензоры. Следует заметить, что операция внутреннего умножения g_{ij} с любым тензором, например A^{ijk}_{lm}, опускает индекс, по которому производится суммирование. Например, $g_{\alpha\beta}A^{ij\alpha}_{lm} = A^{ij\cdot}_{lm\beta}$.

3.2.2 Криволинейные координаты в E_3

Рассмотрим в данном разделе пример работы аппарата тензорного анализа на исследовании свойств кривых и поверхностей, находящихся в пространстве E_3

Рассмотрим точку $P(y)$ в евклидовом пространстве E_3 к системе прямоугольных декартовых координат Y. Рассмотрим преобразование общего вида

$$T : x^i = x^i(y^1, y^2, y^3) \ (i = 1, 2, 3),$$

в котором x^i принадлежат к классу C^1, а $J = \left|\frac{\partial x^i}{\partial y^i}\right| \neq 0$ в некоторой области R пространства E_3. Обратное преобразование

$$T^{-1} : y^i = y^i(x^1, x^2, x^3) \ (i = 1, 2, 3)$$

будет поэтому однозначным, а преобразования T и T^{-1} установят взаимно однозначное соответствие между тройками значений (x^1, x^2, x^3) и (y^1, y^2, y^3). Назовем тройки этих чисел (x^1, x^2, x^3) *криволинейными координатами точек* P в R. Эта терминология принимается здесь по следующим соображениям: если положим $x^1(y^1, y^2, y^3) = \text{const}$ в T, то

$$x^1(y^1, y^2, y^3) = \text{const} \tag{3.49}$$

определяет поверхность. Если же этой постоянной позволить принимать различные значения, то получим семейство поверхностей с одним параметром. И подобным же образом

$$x^2(y^1, y^2, y^3) = \text{const и } x^3(y^1, y^2, y^3) = \text{const}$$

определят два семейства поверхностей.

Условие, требующее, чтобы якобиан $J \neq 0$ в рассматриваемой области, выражает тот факт, что поверхности

$$x^1 = c_1,\ x^2 = c_2,\ x^3 = c_3 \tag{3.50}$$

пересекаются в одной и только в одной точке.

Поверхности, определяемые уравнениями (3.50), будем называть *координатными поверхностями*, а их попарные пересечения — *координатными линиями*; так, например, линией пересечения поверхностей $x^1 = c_1$ и $x^2 = c_2$ является координатная линия $x^3 = c_3$, поскольку именно по этой линии переменная x^3 остается единственной изменяющейся переменной. В качестве примера рассмотрим координатную систему, определяемую преобразованием

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \sin x^2 \cos x^3, \\ y^2 &= x^1 \sin x^2 \sin x^3, \\ y^3 &= x^1 \cos x^2. \end{aligned}$$

Поверхности $x^1 = \text{const}$ представляют собой сферы, $x^2 = \text{const}$ — круговые конусы, $x^3 = \text{const}$ — плоскости, проходящие через ось Y^3 (все примеры координатных линий и плоскостей см. в приложении А). Обратное преобразование в этом случае дается уравнениями

$$x^1 = \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2},\ x^2 = \arctan \frac{\sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}}{y^3},$$

$$x^3 = \arctan \frac{y^2}{y^1},$$

если $x^1 > 0$, $0 < x^2 < \pi$, $0 \leqslant x^3 < 2\pi$. Это — обычная сферическая координатная система.

Другим примером может служить преобразование

$$y^1 = x^1 \cos x^2,$$
$$y^2 = x^1 \sin x^2,$$
$$y^3 = x^3,$$

определяющее систему цилиндрических координат.

Пусть точки $P(y^1, y^2, y^3)$ и $Q(y^1 + dy^1, y^2 + dy^2, y^3 + dy^3)$ расположены в непосредственной близости одна от другой в области R. Евклидово расстояние между парой таких точек определяется квадратичной формой

$$(ds)^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 = dy^i dy^i,$$

поскольку же $dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$, то можно это выразить сжато:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \tag{3.51}$$

где

$$g_{ij} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j} \ (\alpha = 1, 2, 3).$$

Очевидно, символ g_{ij} симметричен. Кроме того, это тензор, поскольку $(ds)^2$ — инвариант, вектор же dx^i произволен. Обозначим через g детерминант $|g_{ij}|$; в области R ему следует приписать положительное значение, поскольку $g_{ij} dx^i dx^j$ — положительно определенная форма. Можно ввести сопряженный симметричный тензор g^{ij}, определенный формулой $g^{ij} = G/g$, где G^{ij} — алгебраическое дополнение элемента g_{ij} в g.

Рассмотрим теперь контравариантный вектор $A^i(x)$ и образуем инвариант

$$A = (g_{ij} A^i A^j)^{1/2}. \tag{3.52}$$

Так как в прямоугольной декартовой системе координат инвариант (3.52) принимает вид $[(A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)]^{1/2}$, то убежда-

емся, что A представляет собой длину вектора A^i. Аналогично длина ковариантного вектора определяется формулой

$$A = (g^{ij} A_i A_j)^{1/2}. \tag{3.53}$$

В прямоугольной декартовой системе $g^{ij} = \delta^{ij}$ и получаем $A = (A_i A_i)^{1/2}$.

Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным вектором*. Из формулы (3.51) убеждаемся, что

$$1 = g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds},$$

так что $dx^i/ds \equiv \lambda^i$ является единичным вектором. Если $x^i = y^i$ так, что координатная система является декартовой, то

$$dx^1/ds = \lambda^1,\ dx^2/ds = \lambda^2,\ dx^3/ds = \lambda^3$$

являются направляющими косинусами углов вектора перемещения (dx^1, dx^2, dx^3). В соответствии с этим вектор λ^i будет для нас определять направление в пространстве относительно криволинейной координатной системы X.

Рассмотрим геометрическое применение тензора g_{ij} для измерения длин, углов в криволинейных координатах. Пусть два направления определенны единичными векторами λ^i и μ^i в некоторой точке P (рис. 3.1). Значение инварианта равно [5]

$$\cos\theta = g_{ij} \lambda^i \mu^j. \tag{3.54}$$

Формулу (3.54) можно использовать для определения угла θ между двумя направлениями λ^i и μ^i, если положим в основу точное определение для $\sin\theta$.

Имея два произвольных вектора A^i и B^i и зная определение длины вектора, находим

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}A^iB^j}{\sqrt{g_{ij}A^iA^j}\sqrt{g_{ij}B^iB^j}}.$$

Это приводит к формуле $AB\cos\theta = g_{ji}A^iB^j$, определяющей инвариант, который совпадает со «скалярным произведением» $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ элементарного векторного анализа.

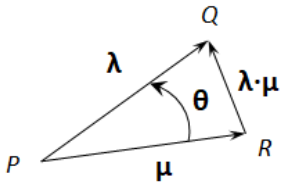

Рис. 3.1. Угол θ между двумя направлениями единичных векторов λ и μ

Из выражения

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j$$

для квадрата элемента дуги ds между

$$P_1(x^1, x^2, x^3) \text{ и } P_2(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$$

следует, что длины элементов дуги, измеренные вдоль координатных линий криволинейной системы X, измеряются произведениями

$$ds_{(1)} = \sqrt{g_{11}}dx^1,\ ds_{(2)} = \sqrt{g_{22}}dx^2,\ ds_{(3)} = \sqrt{g_{33}}dx^3. \qquad (3.55)$$

Таким образом, длина вектора смещения $(dx^1, 0, 0)$ определяется значением $\sqrt{g_{11}}dx^1$, вектора $(0, dx^2, 0)$ — значением $\sqrt{g_{22}}dx^2$, вектор же $(0, 0, dx^3)$ измеряется длиной $\sqrt{g_{33}}dx^3$.

Из (3.54) выводим вдобавок, что косинусы углов $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ между координатными линиями могут быть вычислены из формул

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}},\ \cos\theta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}},\ \cos\theta_{13} = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}, \quad (3.56)$$

ибо если $\lambda^i_{(1)} : (dx^1/ds_{(1)}, 0, 0)$ и $\mu^i_{(2)} : (0, dx^2/ds_{(2)}, 0)$ — два единичных вектора, направленных соответственно по координатным линиям X^1 и X^2, то

$$\cos\theta_{12} = g_{ij}\lambda^i_{(1)}\mu^j_{(2)} = \frac{g_{12}dx^1dx^2}{ds_{(1)}ds_{(2)}} = \frac{g_{(12)}}{\sqrt{g_{(11)}g_{(22)}}}.$$

Поскольку g_{11}, g_{22}, g_{33} никогда не обращаются в нуль [см. (3.55)], то уравнение (3.56) позволяет сформулировать теорему.

Теорема 3.1. *([5], без доказательства). Необходимое и достаточное условие для того, чтобы заданная криволинейная координатная система X была ортогональна, заключается в том, чтобы $g_{ij} = 0$ для $i \neq j$ в любой области R.*

Из определения объемного элемента dV в криволинейных координатах

$$dV = \pm \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| dx^1dx^2dx^3,$$

где $\pm \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|$ — абсолютное значение якобиана J преобразования, связывающего декартовы переменные y^i с криволинейными x^i, можно вывести непосредственно

$$dV = dy^1dy^2dy^3 = \sqrt{g}dx^1dx^2dx^3, \quad (3.57)$$

т. к.

$$J^2 = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \cdot \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| = \left|\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}\right| = |g_{ij}| = g,$$

где будем использовать определение g_{ij} [см. уравнение (3.51)] и правило умножения детерминантов. Детерминант g представляет собой относительный скаляр веса 2, поскольку $\sqrt{g}$ — скалярная плотность.

Итак, было установлено, что метрические характеристики пространства E_3, отнесенного к криволинейной координатной системе X, полностью определяются тензором g_{ij}. На этом основании тензор g_{ij} называется *метрическим* (3.44), а квадратичная форма $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ получила наименование *фундаментальной квадратичной формы* (3.45).

3.2.3 Взаимные базисные системы

С учетом выводов предыдущего раздела и обозначений элементарного векторного анализа обобщим понятие аффинного репера (опред. 3.3 на стр. 109, разд. 3.1.3) на пространство ортогональных криволинейных координат.

Определим декартову систему осей (рис. 3.2) пучком ортонормальных базисных векторов (b_1, b_2, b_3). В таком случае радиус-вектор r точки $P(y^1, y^2, y^3)$ можно будет представить выражением

$$r = b_i y^i \ (i = 1, 2, 3), \tag{3.58}$$

так как базисные векторы не зависят от положения точки $P(y^1, y^2, y^3)$, выводим из (3.58), что

$$dr = b_i dy^i. \tag{3.59}$$

По определению квадрат элемента дуги между точками

$$(y^1, y^2, y^3) \text{ и } (y^1 + dy^1, y^2 + dy^2, y^3 + dy^3)$$

дается формулой [5]

$$ds^2 = dr \cdot dr. \tag{3.60}$$

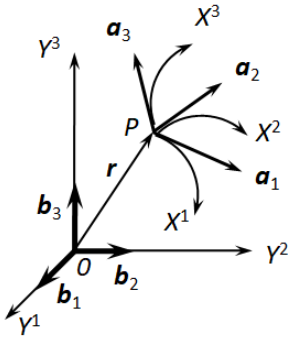

Рис. 3.2. Декартова **b** и взаимная **a** базисные системы

Подстановка из (3.59) в (3.60) дает

$$ds^2 = b_i \cdot b_j dy^i dy^j = \delta_{ij} dy^i dy^j = dy^i dy^j,$$

т. е. знакомое выражение для квадрата элемента дуги в прямоугольных декартовых координатах.

Пусть система уравнений преобразования

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3) \ (i = 1, 2, 3)$$

определяет криволинейную координатную систему X. Радиус-вектор r можем теперь рассматривать как функцию координат x^i. Записываем это выражениями

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x^i} dx^i \tag{3.61}$$

и

$$ds^2 = dr \cdot dr = \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial r}{\partial x^j} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dy^j,$$

где

$$g_{ij} \frac{\partial r}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^j}. \tag{3.62}$$

Геометрический смысл вектора $\partial r/\partial x^i$ прост: он представляет собой базисный вектор, направленный касательно к координатной кривой X^i. Положим

$$\frac{\partial r}{\partial x^i} = a_i \tag{3.63}$$

и перепишем формулы (3.61) и (3.62):

$$dr = a_i dx^i \tag{3.64}$$

и

$$g_{ij} = a_i \cdot a_j.$$

Заметим, что базисные векторы a_i, здесь уже не являются независимыми от координат (x^1, x^2, x^3).

Применение ковариантных обозначений для базисных векторов a_i, и b_i может быть оправдано, если сопоставить на основе формул (3.59) и (3.64), что

$$a_j dx^j = b_i dy^i = b_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j.$$

Здесь видно, что базисные векторы a_j преобразуются по закону преобразования компонентов ковариантных векторов

$$a_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} b_i,$$

поскольку dx^j произвольны.

Компоненты базисных векторов a_j, будучи отнесенными к координатной системе X, принимают вид $a_1 : (a_1, 0, 0)$, $a_2(0, a_2, 0)$, $a_3 : (0, 0, a_3)$, откуда замечаем, что они не обязательно получаются единичными векторами, поскольку вообще (см. (3.62)) $g_{11} = a_1 \cdot a_1 \neq 1$, $g_{22} = a_2 \cdot a_2 \neq 1$, $g_{33} = a_3 \cdot a_3 \neq 1$. Если криволинейная координатная система X ортогональна, то $g_{ij} = a_i \cdot a_j =$

$= |a_i||a_j| \cos\theta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Заметим, что любой вектор A можно записать в виде произведения $A = k \cdot dr$, где k — соответствующий скаляр. Так как $dr = (\frac{\partial r}{\partial x^i})dx^i$, то получаем [5]

$$A = \frac{\partial r}{\partial x^i} \cdot (k \cdot dx^i) = a_i A^i,$$

где $A^i \equiv k \cdot dx^i$. Числа A^i — контравариантные компоненты вектора A и векторов $A^1 a_1, A^2 a_2, A^3 a_3$, образующих ребра параллелепипеда, диагональю которого является A. Поскольку a_i вообще не являются единичными векторами, то убеждаемся, что длины ребер этого параллелепипеда, т. е. *физические компоненты* A определяются формулами

$$A^1\sqrt{g_{11}},\ A^2\sqrt{g_{22}},\ A^3\sqrt{g_{33}}$$

на том основании, что $g_{11} = a_1 \cdot a_1,\ g_{22} = a_2 \cdot a_2,\ g_{33} = a_3 \cdot a_3$.

Введем теперь три некомпланарных вектора

$$a^1 = \frac{a_2 \times a_3}{[a_1 a_2 a_3]},\ a^2 = \frac{a_3 \times a_1}{[a_1 a_2 a_3]},\ a^3 = \frac{a_1 \times a_2}{[a_1 a_2 a_3]}, \tag{3.65}$$

где $a_2 \times a_3$ и т. д. обозначает векторное произведение a_2 и a_3, а $a_1 a_2 a_3$ — тройное скалярное произведение: $a_1 \cdot a_2 \times a_3$.

Здесь следует напомнить, что $a_1 \times a_2$ представляет собой вектор длиной $a_1 a_2 [\sin(a_1, a_2)]$, ориентированный таким образом, что a_1, a_2 и $a_1 \times a_2$ образуют правую систему. Тройное скалярное произведение $[a_1, a_2, a_3]$, с другой стороны, численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах a_1, a_2, a_3. Если $\{a_i\}$ — совокупность базисных векторов пространства E_n, то взаимный базис $\{a^i\}$ определяется произведением $a_i \cdot a^j = \delta_i^j$.

Из определений (3.65) очевидно, что $a^i \cdot a_j = \delta_j^i$, что, как в этом легко убедиться, $[a_1, a_2, a_3] = \sqrt{g}$, где $g = |g_{ij}|$, и что $[a^1, a^2, a^3] = 1/[a_1, a_2, a_3]$, в силу чего $[a^1 a^2 a^3] = 1/\sqrt{g}$.

Кроме того,

$$a_1 = \frac{a^2 \times a^3}{[a^1 a^2 a^3]},\ a_2 = \frac{a^3 \times a^1}{[a^1 a^2 a^3]},\ a_3 = \frac{a^1 \times a^2}{[a^1 a^2 a^3]}, \tag{3.66}$$

что легко можно проверить с помощью формул (3.65). Учитывая это, естественно назвать систему векторов a_1, a_2, a_3 *взаимной базисной системой.*

Заметим, что если векторы a_1, a_2, a_3 — *единичные векторы, отнесенные к прямоугольной декартовой системе координат, то взаимная система векторов определяет ту же систему координат.*

Пользуясь взаимной базисной системой, можно записать дифференциал вектора r в виде $dr = a^i dx_i$ где dx_i — компоненты dr. Получаем в результате

$$ds^2 = dr \cdot dr = (a^i dx_i) \cdot (a^j dx_j) = a^i \cdot a^j dx_i dx_j = g^{ij} dx_i, dx_j,$$

где

$$g^{ij} \equiv a^i \cdot a^j = g^{ji}. \tag{3.67}$$

Нетрудно установить, что коэффициенты g^{ij}, определенные формулой (3.67), совпадают с ранее определенными величинами g^{ij}. Таким путем с помощью формул (3.65) и (3.66) легко показать, что $g_{i\alpha} = g^{j\alpha} = \delta_i^j$, а решение этой системы уравнений для $g^{j\alpha}$ дает $g^{j\alpha} = G^{j\alpha}/g$, где $G^{j\alpha}$ — алгебраическое дополнение элемента $g_{j\alpha}$ в детерминанте $|g_{ij}|$. Таким образом, приведенное в предыдущем разделе определение g^{ij} следует как теорема из определения (3.67).

Система базисных векторов, определенных из (3.65), может быть использована для того, чтобы представить произвольный вектор A в форме $A = a^i A_i$, где A_i — ковариантные компоненты A. Если определим скалярное произведение вектора $A_i a^i$ с базисным вектором a_j и заметим, что последний направлен по

координатной линии X^j, то придем к следующим равенствам: $A_i a^i \cdot a_j = A_i \delta^i_j = A_j$. Таким образом, $A_j/\sqrt{g_{jj}}$ (без суммирования по j) *представляет собой длину ортогональной проекции вектора A на касательную к координатной кривой X^j в точке P (рис. 3.3), вектор же $A_j\sqrt{g_{jj}}$ представляет длину ребра параллелепипеда. диагональю которого является вектор A*:

$$A = a_i A^i = a^i A_i,$$

то можно установить равенство

$$a_i \cdot a_j A^i = a^i \cdot a_j A_i,$$

и следовательно,

$$g_{ij} A^i = \delta^j_i A_i = A_j.$$

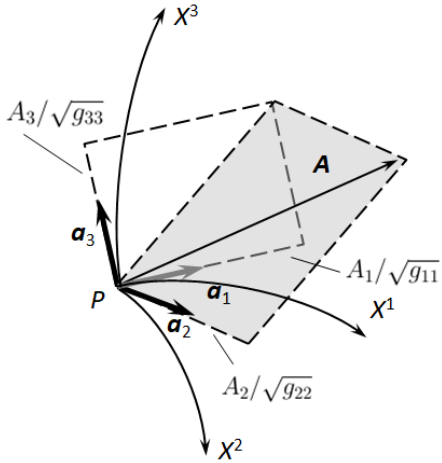

Рис. 3.3. Ортогональные проекции вектора **A**

Видно, что вектор, *полученный опусканием индекса в A^i, является ковариантным вектором A_i*. Два ряда величин A^i и

A_i, очевидно, представляют один и тот же вектор A, отнесенный к двум различным базисным системам. Как уже ранее было отмечено, различие между ковариантным и контравариантным компонентами A исчезает в тех случаях, когда базисные векторы a_i ортонормальны.

Подобным же образом, если рассмотреть коэффициенты A_{ijk} в полилинейной форме $A_{ijk}a^i a^j a^k$ и потребовать, чтобы $A_{ijk}a^i a^j a^k = A^{ijk}a_i a_j a_k$, то совокупность величин $\{A^{ijk}\}$ представит тот же самый тензор A, отнесенный к базису $\{a_i\}$. Все ассоциированные тензоры (стр. 129) представят этот же тензор A в соответствующих базисных системах.

3.3 Угол пересечения и элемент площади

Уравнения кривой C, лежащей па поверхности S, могут быть написаны в виде:

$$C : u^\alpha = u^\alpha(t),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

При этом предполагается, что $u^\alpha(t)$ принадлежит классу C^2, то кривая C должна иметь непрерывно вращающуюся касательную. Пусть C_1 и C_2 — две такие кривые, пересекающиеся в точке P кривой S (рис. 3.4). Воспользуемся уравнениями кривой S, отнесенными к прямоугольным декартовым осям Y, имеющими вид

$$y^i = y^i(u^1, u^2), \tag{3.68}$$

и обозначим косинусы направлений касательных линий к C_1 и C_2 в P соответственно через ξ^i и η^i. Косинус угла θ между C_1 и C_2, вычисляемый геометрически в объемлющем пространстве E_3, равен [5]

$$cos\theta = \xi^i \eta^i. \tag{3.69}$$

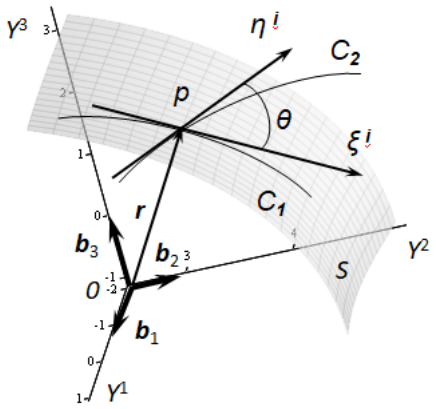

Рис. 3.4. Пересечение кривых C_1 и C_2 в точке P на поверхности S

С другой стороны,

$$\xi^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{d_1 u^\alpha}{ds_1} \equiv \frac{d_1 y^i}{ds_1},$$

$$\eta^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\frac{d_2 u^\beta}{ds_2} \equiv \frac{d_2 y^i}{ds_2},$$

где индексы 1 и 2 относятся к элементам кривых C_1 и соответственно C_2. Пользуясь определением (3.48), можно записать единичные векторы по направлениям касательных к C_1 и C_2 выражениями

$$\lambda^\alpha = \frac{d_1 u^\alpha}{ds_1},\ \mu^\alpha = \frac{d_2 u^\alpha}{ds_2}$$

и

$$\xi^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\lambda^\alpha,\ \eta^i = \frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\mu^\beta \tag{3.70}$$

Вводя в (3.69) выражения из (3.70), получаем $\cos\theta = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial u^\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta$, а поскольку $a_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial y^i}{\partial y^\beta}$, то $\cos\theta = a_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta$.

Если кривые C_1, и C_2 ортогональны, то

$$a_{\alpha\beta}\lambda^{\alpha}\mu^{\beta} = 0. \tag{3.71}$$

В частности, если поверхностные векторы λ^{α} и μ^{β} расположены по координатным кривым

$$(\lambda^1 = 1/\sqrt{a_{11}}, \lambda^2 = 0, \mu^1 = 0, \mu^2 = 1/\sqrt{a_{22}}),$$

то из (3.71) следует, что *координатные кривые образуют ортогональную сетку в том и лишь в том случае, если* $a_{12} = 0$ *в каждой точке поверхности.*

Можно дать наглядное истолкование этих результатов (см. подобный пример в разд. 3.2.3). Так, например, если r обозначает радиус-вектор какой-либо точки P на поверхности S, а b_i — единичные векторы, направленные по ортогональным координатным осям Y, то уравнения (3.40) поверхности S могут быть записаны в векторной форме (рис. 3.5) как

$$r(u^1, u^2) = b_i y^i(u^1, u^2).$$

Из такого представления S следует, что [5]

$$ds^2 = dr \cdot dr = \frac{\partial r}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial r}{\partial u^{\beta}} du^{\alpha} du^{\beta} = a_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta},$$

где

$$a_{\alpha\beta} = \frac{\partial r}{\partial u^{\alpha}} \cdot \frac{\partial r}{\partial u^{\beta}}. \tag{3.72}$$

Положив $\partial r/\partial u^{\alpha} = a_{\alpha}$, где a_1 и a_2, — очевидно, касательные векторы к координатным кривым, тогда понятно, что

$$a_{11} = a_1 \cdot a_1,\ a_{12} = a_1 \cdot a_2,\ a_{22} = a_2 \cdot a_2.$$

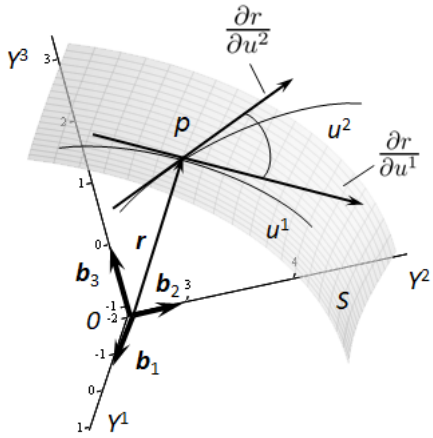

Рис. 3.5. Компоненты уравнения (3.40) на поверхности S

В обозначениях (3.70) пространственные компоненты векторов a_1 и a_2 записываются через ξ^i и соответственно через η^i.

Можно определить элемент площади $d\sigma$ поверхности S

$$d\sigma = |a_1 \times a_2| du^1 du^2,$$

из которой легко заметить, что ее правую часть можно преобразовать в

$$d\sigma = \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\, du^1 du^2 = \sqrt{a}\, du^1 du^2. \qquad (3.73)$$

Эта формула имеет в точности ту же самую структуру, что и выражение (3.57) для элемента объема.

Кососимметричные e-системы в двумерном многообразии могут быть определены формулами ([5], § 40):

$$e_{11} = e_{22} = e^{11} = e^{22} = 0,\ e^{12} = -e^{21} = e_{12} = -e_{21} = 1$$

и эти системы являются *относительными тензорами* ([5], § 28).

Примеры заданий

1. Пусть в E_3 введена декартова ортогональная система координат x^i и дано преобразование этой системы

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 \sin y^2 \cos^3, \\ x^2 &= y^1 \sin y^2 \sin^3, \\ x^3 &= y^1 \cos y^2, \end{aligned}$$

   где y^i — сферические полярные координаты ($y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$). Найти значения метрических коэффициентов $g_{ij}(y)$.

2. Пусть в E_3 введена декартова ортогональная система координат x^i, и пусть

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 \cos y^2, \\ x^2 &= y^1 \sin y^2, \\ x^3 &= y^3, \end{aligned}$$

   выражают преобразование к цилиндрическим координатам y^i. Найти выражение для ds^2 в цилиндрических координатах.

3. В E_3 введена система декартовых ортогональных координат x^i, и пусть $x^i = a^i_j y^i$, $|a^i_j| \neq 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ — линейное преобразование координат. Определить метрические координаты $g_{ij}(y)$. Исследовать случай ортогонального преобразования.

4. Показать, что косинус угла θ между координатными кривыми u^1 и u^2 на S равен $\cos\theta = a_{12}/\sqrt{a_{11}a_{22}}$.

5. Показать, что квадратичная форма $g_{mn}dx^m dx^n$ положительно определена.

6. Проверить выражение для ds^2 в каждой из следующие координатных систем.

   а) *Ортогональная декартова* $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + + (dx^3)^2$.

   б) *Сферическая* $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + + (x^1)^2(\sin x^2)^2(dx^3)^2$.

   в) *Цилиндрическая* $ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2$.

7. Найти элемент площади иа поверхности сферы радиуса r, если уравнения поверхности заданы выражениями

$$y^1 = r\,\sin u^1\,\cos u^2,\; y^2 = r\,\sin u^1\,\sin u^2, y^3 = r\,\cos u^1,$$

   где y^i — ортогональные декартовы координаты (обратить внимание иа то, что в данном случае $a_{11} = r^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = r^2\,\sin^2\,u^1$).

8. Исследовать преобразования, в которых координаты y^i — прямоугольные декартовы:

   а)
$$\begin{cases} y^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}x^1 + \frac{2}{\sqrt{6}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x^3, \\ y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x^3, \\ y^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x^1 + \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^3. \end{cases}$$

   б)
$$\begin{cases} y^1 = x^1\cos\,x^2, \\ y^2 = x^1\sin\,x^2, \\ y^3 = x^3. \end{cases}$$

4 Операторы компонент инвариантов

Приведем примеры представления инварианта наборами компонент в аффинных координатах собственно евклидова пространства. Преобразования компонентов выполнены на входном языке программирования математического пакета Mathcad. Вывод решений в формате того же пакета. Пакет выбран для буквального понимания производимых операций, т. к. формулы пакета максимально приближены к привычной математической нотации. Условимся принимать обозначения переменных в тексте близко к программным, т. е. сделать некоторые допущения к символьному написанию переменных. Имена математических объектов возможно будут содержать не одну литеру, а индексация имен переменных будет обозначаться последними цифрами в имени. Текст программных данных и фрагменты алгоритма выполнены машинописным шрифтом, расположены на отдельных строках, смещенных в общем тексте влево.

4.1 Векторы и ковекторы

Исходные конечномерные базисы, для евклидовой размерности $n = 8$, будут представлять имена переменных: $e0$ — базис евклидов (1.15); $e1$ — базис Хара; $e2$ — собственные вектора некоторой симметричной вещественной матрицы скаляров.

$$e1 = \begin{pmatrix} 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 \\ 0.354 & 0.354 & 0.354 & 0.354 & -0.354 & -0.354 & -0.354 & -0.354 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.707 & -0.707 \end{pmatrix} \quad e2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.926 & 0.053 & -0.368 & 0.019 & 0.012 & -0.026 & -0.054 \\ 0.97 & 0.019 & 0.067 & 0.077 & -0.13 & 0.11 & -0.072 & -0.118 \\ 0 & 0.192 & -0.892 & 0.374 & -0.069 & -0.018 & -0.049 & -0.14 \\ -0.242 & 0.076 & 0.267 & 0.308 & -0.518 & 0.441 & -0.287 & -0.473 \\ 0 & 0.017 & 0.096 & 0.185 & 0.826 & 0.162 & -0.21 & -0.451 \\ 0 & -0.305 & -0.334 & -0.757 & -0.043 & 0.345 & -0.1 & -0.301 \\ 0 & -0.067 & 0.062 & -0.106 & -0.156 & -0.771 & 0.015 & -0.602 \\ 0 & 0.033 & 0.027 & 0.073 & 0.011 & 0.232 & 0.925 & -0.29 \end{pmatrix}$$

Рассчитываем обратимые матрицы преобразований $A01$ и $A12$, соответственно для базисов $e0 \mapsto e1$ и $e1 \mapsto e2$. Определим

инвариант Inv и назначим ему координаты в $e0$, содержащиеся в одноименном векторе. Разложение Inv по базису $e1$ и $e2$ можно решить с помощью СЛАУ (2.55, коэффициенты ξ и η) или посредством матриц преобразований $A01$ и $A12$ (2.57), где коэффициенты разложения записываются в вектора $x1$ и $x2$. Инвариантность проверяем по нормам ((1.13), $|\cdot| \equiv \|\cdot\|$) полученных векторов, которые содержат коэффициенты разложения Inv в различных базисах. Проверка восстановления вектора Inv по линейным комбинациям в каждом из базисов $e1$ и $e2$ записывается в вектор $RestInv$. Обозначение $\cdot^{\mathrm{T}}$ транспонирует вектора для их компактного представления на изображениях.

$$\mathrm{Inv}^{\mathrm{T}} = (2 \;\; 4 \;\; -3 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 6 \;\; 3 \;\; -1) \quad |\mathrm{Inv}| = 10.05$$

$$\mathrm{A01} := \mathrm{e1} \cdot \mathrm{e0}^{-1} \qquad \mathrm{A12} := \mathrm{e2} \cdot \mathrm{e1}^{-1}$$

$$\xi_i := 0 \quad \text{Given} \quad \mathrm{e1} \cdot \xi = \mathrm{Inv} \qquad \xi := \mathrm{Find}(\xi)$$

$$\xi^{\mathrm{T}} = (1.328 \;\; -0.086 \;\; 7.864 \;\; -0.622 \;\; 3.914 \;\; -0.328 \;\; -3.914 \;\; -2.5) \quad | = 10.05$$

$$\mathrm{RestInv}_j := \sum_{i=0}^{7} \xi_i \cdot \mathrm{e1}_{j,i} \qquad \mathrm{RestInv}^{\mathrm{T}} = (2 \;\; 4 \;\; -3 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 6 \;\; 3 \;\; -1)$$

$$\eta_i := 0 \,\mathrm{Given} \quad \mathrm{e2} \cdot \eta = \mathrm{Inv} \qquad \eta := \mathrm{Find}(\eta)$$

$$\eta^{\mathrm{T}} = (2.668 \;\; -0.314 \;\; 2.633 \;\; -4.762 \;\; -2.777 \;\; 2.412 \;\; -3.318 \;\; -6.296) \quad = 10.05$$

$$\mathrm{RestInv}_j := \sum_{i=0}^{7} \eta_i \cdot \mathrm{e2}_{j,i} \qquad \mathrm{RestInv}^{\mathrm{T}} = (2 \;\; 4 \;\; -3 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 6 \;\; 3 \;\; -1)$$

Последовательное контравариантное преобразование Inv из $e0$ в $e1$, $e2$ в наборы компонент — вектора $x1$ и $x2$ по закону (2.57).

$$\mathrm{x1} := \mathrm{A01}^{-1} \cdot \mathrm{Inv}$$

$$\mathrm{x1}^{\mathrm{T}} = (1.328 \;\; -0.086 \;\; 7.864 \;\; -0.622 \;\; 3.914 \;\; -0.328 \;\; -3.914 \;\; -2.5 \;\; |\mathrm{x1}| = 10.05$$

$$\mathrm{x2} := \mathrm{A12}^{-1} \cdot \mathrm{x1}$$

$$\mathrm{x2}^{\mathrm{T}} = (1.048 \;\; -1.32 \;\; 3.293 \;\; 4.52 \;\; -2.097 \;\; -7.356 \;\; 0.777 \;\; -2.787) \;\; |\mathrm{x2}| = 10.05$$

Построим линейный функционал, согласно определению (2.4) на стр. 64. Возьмем некоторый вектор a и зададим скалярную функцию $f1$ для данного вектора. Сначала строим базис $fe1$ (ковектор) функционала f от a. Определяем норму $fe1$, чтобы убедится в дальнейшем, что базис функционала — тензор (набор компонент) некоторого инварианта. После определения базиса $fe1$, дуального и сопряженного с $e1$, составляем алгоритм функционала как реализацию скалярной функцию f от векторного аргумента v. Выводим значение функции f от аргумента-вектора $x1$.

$a^T = (2.4 \;\; 4.1 \;\; -3.7 \;\; 5.3 \;\; 1.7 \;\; 6.8 \;\; 3.3 \;\; -1.2)$

$fe1_{0,i} := a^T \cdot e1^{\langle i \rangle} \qquad |fe1^T| = 11.217$

$fe1 = (1.65 \;\; -0.754 \;\; 8.957 \;\; -0.66 \;\; 4.382 \;\; -0.285 \;\; -4.1 \;\; -2.403)$

$f(v) :=$ for $i \in 0..7$; $s_i \leftarrow fe1_{0,i} \cdot v_i$; return $\sum s$

$f(x1) = 112.4$

Здесь $fe1_j = a^i \cdot e1_i^j$ — погружение инварианта a в базис $e1$. Это аналогично представлению операторов в базисах (4.4) и $a \equiv \alpha$, где α матрица (4.3) коэффициентов (координат) A. Функция $f = fe1_j \cdot v^j$ осуществляет действие на произвольный вектор v аналогично действию оператора (4.4) в базисе $e1$. Нормы a и $fe1$ равны, также как равны нормы оператора A (4.2) и его представления в базисе (4.4). Эти нормы равны норме α.

Программный тест функционала

а) Основное свойство линейного функционала, обозначенное в его определении (2.4, стр. 64), проверяем на векторах

$3 \cdot x1$ и $6 \cdot a$.

$$f(3 \cdot x1 + 6 \cdot a) = 91.82$$

$$3 \cdot f(x1) + 6 \cdot f(a) = 91.82$$

б) Проверка по утверждению [2] о геометрическом смысле линейного функционала. Приводятся выражения двух векторов, содержащих координаты точек гиперплоскости [2], не проходящей через начало координат и параллельной подпространству L (коразмерности 1).

$$\left(\frac{x1}{f(x1)}\right)^T = \begin{pmatrix} 0.012 & -7.658 \times 10^{-4} & 0.07 & -5.531 \times 10^{-3} & 0.035 & -2.921 \times 10^{-3} & -0.035 & -0.022 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\frac{x1}{f(x1)}\right) = 1$$

$$\left(\frac{a}{f(a)}\right)^T = \begin{pmatrix} -0.059 & -0.1 & 0.09 & -0.13 & -0.042 & -0.166 & -0.081 & 0.029 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\frac{a}{f(a)}\right) = 1$$

в) По теореме 2.8 (стр. 66) определим набор скаляров $\alpha 1$, которому единственно соответствует функционал f вектора a в базисе $e1$. Нормы базиса и набора скаляров совпадают.

$$\alpha 1_i := f\left(e1^{\langle i \rangle}\right) \quad \alpha 1^T = \begin{pmatrix} 7.894 & 1.697 & -4.362 & -3.96 & -2.379 & 3.419 & -0.519 & 2.879 \end{pmatrix}$$

$$|\alpha 1| = 11.217 \quad \left|fe1^T\right| = 11.217$$

Составим проверочное выражение единственности такого соответствия: равенство значения функционала $f(x1)$ и результата скалярного произведения коэффициентов вектора $x1$ по базису $e1$ с вектором $\alpha 1$.

$\theta_i := 0$ Given $e1 \cdot \theta = x1$ $\theta := \text{Find}(\theta)$

$\theta^T = (7.139 \;\; 1.603 \;\; -3.725 \;\; -3.261 \;\; -2.579 \;\; 2.957 \;\; -0.957 \;\; 2.578) \;\; = 10.05$

$\theta^T \cdot \alpha 1 = 112.4$ $f(x1) = 112.4$

Здесь $\alpha 1^k = \sum_j fe1_j \cdot e1_k^j$ осуществляет действие на θ как $\sum_j fe1_j \cdot \cdot \sum_i \left(e1_i^j \cdot \theta^i\right)$. Это аналогично действию $f(x1) = \sum_j fe1_j \cdot x1^j$, а преобразование $a \cdot x1 = fe1 \cdot \theta$ тождественно действию операторов (4.2) и (4.4)

$$A \cdot x1 = Ax \cdot \theta = \sum_i \left(\sum_k \alpha_k^i \cdot \theta^k \right) \cdot e1_i = \sum_i \left(\sum_k \alpha_i^k \cdot e1_k \right) \cdot \theta^i.$$

Полученные преобразования можно нормировать.

$|\alpha 1| = 11.217$ $\left|fe1^T\right| = 11.217$

$|e1| = 1$ $\dfrac{|\alpha 1|}{|a|} = 1$ $\dfrac{|\alpha 1|}{\left|fe1^T\right|} = 1$ $\dfrac{\left|fe1^T\right|}{|a|} = 1$

Ковариантное преобразование координат $fe1$ линейного функционала из базиса $e1$ в базис $e2$ производится по закону (2.60). Получен инвариантный базис $fe2$. Формируем формулу новой функции $f2$ на базисе функционала $fe2$. Нормы базисов совпадают, как и значения функций f и $f2$ с аргументами соответствующих преобразований Inv в базисах $e1$ и $e2$.

$fe1 = (1.65 \;\; -0.754 \;\; 8.957 \;\; -0.66 \;\; 4.382 \;\; -0.285 \;\; -4.1 \;\; -2.403)$

$fe2 := fe1 \cdot A12$ $\quad fe2 = (0.887 \;\; -1.74 \;\; 3.567 \;\; 4.937 \;\; -2.904 \;\; -8.275 \;\; 0.99 \;\; -2.648)$

$\left|fe1^T\right| = 11.217$

$\left|fe2^T\right| = 11.217$

$f(x1) = 112.4$

$f2(x2) = 112.4$

$f2(v) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..7 \\ \quad s_i \leftarrow fe2_{0,i} \cdot v_i \\ \text{return } \sum s \end{array} \right.$

Проверка по утверждению [2] о геометрическом смысле линейного функционала. Рассчитываются вектора $m1$ и $m2$, содержащих координаты точек гиперплоскости [2], не проходящей через начало координат и параллельной подпространству L (коразмерности 1).

$$m1 := \frac{x2}{f2(x2)}$$

$$m1^T = \left(9.325 \times 10^{-3} \;\; -0.012 \;\; 0.029 \;\; 0.04 \;\; -0.019 \;\; -0.065 \;\; 6.916 \times 10^{-3} \;\; -0.025\right)$$

$f2(m1) = 1$

$$m2 := \frac{a}{f2(a)}$$

$m2^T = (-0.051 \;\; -0.088 \;\; 0.079 \;\; -0.113 \;\; -0.036 \;\; -0.145 \;\; -0.071 \;\; 0.026)$

$f2(m2) = 1$

4.2 Билинейные формы, линейные операторы

Данные преобразований: матрица A, вектора $x1$ и $y1$.

$x1^T = (0.5 \;\; 0.266 \;\; 0.647 \;\; 0.264 \;\; 0.46 \;\; 0.352 \;\; 0.477 \;\; 0.404)$ $\quad |x1| = 1.239$

$y1^T = (0.028 \;\; 0.597 \;\; 0.432 \;\; 0.383 \;\; 0.01 \;\; 0.865 \;\; 0.7 \;\; 0.602)$ $\quad |y1| = 1.514$

$$A = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.378 & 0.937 & 0.964 & 0.584 & 0.407 & 0.499 & 0.875 \\ 0.781 & 0.588 & 0.279 & 0.874 & 0.301 & 0.867 & 0.191 & 0.89 \\ 0.029 & 0.059 & 0.257 & 0.116 & 0.495 & 0.049 & 0.338 & 0.515 \\ 0.412 & 0.601 & 0.476 & 0.951 & 0.835 & 0.802 & 0.87 & 0.939 \\ 0.943 & 0.128 & 0.473 & 0.027 & 0.455 & 0.136 & 0.213 & 0.797 \\ 0.659 & 0.781 & 0.842 & 0.499 & 0.076 & 0.356 & 0.41 & 0.298 \\ 0.745 & 0.058 & 0.359 & 0.159 & 0.132 & 0.181 & 0.249 & 0.347 \\ 0.665 & 0.932 & 0.105 & 0.558 & 0.895 & 0.872 & 0.388 & 0.672 \end{pmatrix}$$

Формируем базис билинейной формы $Fbe1$ (квадратичного функционала) размерности $n \times n$, сопряженный к базису $e1$. Записываем формулу квадратичной функции $B1$, определяющей проекции скалярного произведения векторов в базисе билинейной формы.

$Fbe1_{i,j} := e1^{\langle i \rangle^T} \cdot e1^{\langle j \rangle}$ $\quad |Fbe1| = 1$

$B1(x,y) := x^T \cdot Fbe1 \cdot y$

$B1(x1,y1) = 1.439$

Используя матрицу линейных преобразований $A12$, переводим в базис $e2$: базис $Fbe1$ билинейной формы в $Fbe2$, сопряженный базису $e2$; координаты $x1$ и $y1$ в координаты $x2$ и $y2$. Проверяем инвариантность билинейной формы и длину проекции скалярного произведения векторов по новой формуле $B2$.

$Fbe2 := A12^{T} \cdot Fbe1 \cdot A12 \qquad |Fbe2| = 1$

$x2 := A12^{-1} \cdot x1 \qquad y2 := A12^{-1} \cdot y1$

$B2(x, y) := x2^{T} \cdot Fbe2 \cdot y2$

$B2(x2, y2) = 1.439$

Будем полагать, что A — произвольная матрица линейных преобразований (линейный оператор), тогда относительно векторов базиса $e1$ ей инвариантен оператор $AL1$, строки которого — ковариантные образы базиса $e1$. Действуем: на инвариант $x1$ оператором A; в базисе $e1$ на координаты x_1 вектора $x1$ оператором $AL1$. Определяем норму полученных векторов, показываем равенство $x1A$ и $x1Ae1$ в результате выполненных преобразований.

$AL1^{\langle i \rangle} := A \cdot e1^{\langle i \rangle}$

$|AL1| = 1.384 \times 10^{-3} \qquad |A| = 1.384 \times 10^{-3}$

$x1A := A \cdot x1 \qquad |x1A| = 4.994$

$x1A^{T} = (2.244 \quad 1.853 \quad 0.841 \quad 2.385 \quad 1.499 \quad 1.689 \quad 1.046 \quad 1.971)$

$x1Ae1 := AL1 \cdot x_1 \qquad |x1Ae1| = 4.994$

$x1Ae1^{T} = (2.244 \quad 1.853 \quad 0.841 \quad 2.385 \quad 1.499 \quad 1.689 \quad 1.046 \quad 1.971)$

Получим инвариант $AL2$ оператора A в координатной системе $e2$. Действуем на координаты x_2 вектора $x1$ в $e2$. Результат — инвариантное операторное преобразование вектора, $x1Ae1 = x1Ae2$.

$AL2^{\langle i \rangle} := A \cdot e2^{\langle i \rangle}$

$|AL2| = 1.384 \times 10^{-3}$ $\quad |AL1| = 1.384 \times 10^{-3}$

$x1Ae2 := AL2 \cdot x_2$ $\quad |x1Ae2| = 4.994$

$x1Ae2^{T} = (2.244 \;\; 1.853 \;\; 0.841 \;\; 2.385 \;\; 1.499 \;\; 1.689 \;\; 1.046 \;\; 1.971)$

Определим закон перевода инвариантов оператора A в различные базисы. Например, $AL1$ в $e1$ отображаем в $AL2$ базиса $e2$. Через выражения операторов в базисах $e1$ и $e2$

$$AL1 = A \cdot e1,\ A = AL1 \cdot e1^{-1};\ AL2 = A \cdot e2,\ A = AL2 \cdot e2^{-1}$$

сформируем тождество

$$AL1 \cdot e1^{-1} = AL2 \cdot e2^{-1}$$

и выразим закон преобразования

$$A = e1^{-1} \cdot e2, \tag{4.1}$$

соответственно получаем

$$AL2 = AL1 \cdot A.$$

Результат подтверждаем проверкой на инвариантность преобразований x_2 полученным оператором.

$$AL2 := AL1 \cdot \left(e1^{-1} \cdot e2\right)$$

$$|AL2| = 1.384 \times 10^{-3} \quad |AL1| = 1.384 \times 10^{-3}$$

Инвариантность

$$x1Ae2 := AL2 \cdot x_2 \qquad |x1Ae2| = 4.994$$

$$x1Ae2^{T} = (2.244 \quad 1.853 \quad 0.841 \quad 2.385 \quad 1.499 \quad 1.689 \quad 1.046 \quad 1.971)$$

4.3 Изменение базиса

Обозначим матрицами X и Y базисные системы $e1$ и $e2$. Разложим вектор Inv по координатам ξ и η в базисах X и Y.

$$Inv^{T} = (2 \quad 4 \quad -3 \quad 5 \quad 1 \quad 6 \quad 3 \quad -1)$$

$$\xi := X^{-1} \cdot Inv \qquad (X \cdot \xi)^{T} = (2 \quad 4 \quad -3 \quad 5 \quad 1 \quad 6 \quad 3 \quad -1)$$

$$\eta := Y^{-1} \cdot Inv \qquad (Y \cdot \eta)^{T} = (2 \quad 4 \quad -3 \quad 5 \quad 1 \quad 6 \quad 3 \quad -1)$$

Практически покажем, по материалам раздела 2.6, как решаются вопросы зависимостей координат (2.23) и векторов (2.25), (2.24) с участием оператора и его матричных структур [7]. Оператор A определим из выражениям (2.27, 2.26) как

$$Y = A \cdot X, \; A = Y \cdot X^{-1}, \tag{4.2}$$

где X и Y базисы, отличные от евклидова базиса и $x \in X$, $y \in Y$. Корректность оператора A_x в базисе X проверяем по (2.27)

$$Y = A \cdot X = Ax^{\langle j \rangle} := \sum_{i} \alpha_{i,j} \cdot X^{\langle i \rangle} = X \cdot \alpha$$

и по (2.26).

$$(Y \cdot \xi) = (Ax \cdot \xi)^T = (0.871 \quad 1.796 \quad -6.99 \quad 1.708 \quad 5.766 \quad -1.27 \quad 1.65 \quad -2.767)$$

$$(Y \cdot \xi) = \left[\sum_j A^{\langle j \rangle} \cdot \left(\sum_i \xi_i \cdot X_{j,i} \right) \right] = \sum_i \xi_i \cdot Y_{j,i}$$

Координаты α оператора $A_x = A \cdot X$ определяли как

$$\alpha = X^{-1} \cdot (A \cdot X) = X^{-1} \cdot A_x \tag{4.3}$$

в базисе X для заданного линейного преобразования A, здесь A_x — это оператор в базисе X, соответственно, по условию определения оператора (4.2), следует, что

$$A_x = A \cdot X = (Y \cdot X^{-1}) \cdot X = Y. \tag{4.4}$$

Также видно, что A_x восстанавливается по координатам α в базисе X, а значит X линейно преобразует α в Y.

Сначала ответим на первый вопрос (2.23) векторными преобразованиями координат. Пусть ξ и η — координаты $z = Inv$ в базисах X и Y. Выразим закон их преобразования:

$$z = X \cdot \xi, \; z = Y \cdot \eta,$$

$$X \cdot \xi = Y \cdot \eta,$$

$$\xi = (X^{-1} \cdot Y) \cdot \eta,$$

где $X^{-1} \cdot Y$ закон преобразования. Закон можно интерпретировать, исходя из свойств операторов: определяем, что Y размещается в координатах X, следовательно Y — оператор в координатной системе X, а выражение $\alpha = X^{-1} \cdot Y$ определяет α как матрицу оператора Y, который в свою очередь является базисной системой по условию (2.27).

Тогда искомая связь (2.31) выражается как

$$\xi = \alpha \cdot \eta.$$

Таким образом, итогом обобщения преобразования стала операторная форма, а точнее матрица коэффициентов линейного оператора.

Решим тот же первый вопрос (2.27) в операторной форме [7]. Сначала выведем равенство выражения (2.28) разложения вектора Inv в базисе Y и выражения (2.29).

$$\sum_i \eta_i \cdot Y^{\langle i \rangle} = \sum_i \eta_i \cdot Y_{j,i} = (Y \cdot \eta)^T = (2 \;\; 4 \;\; -3 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 6 \;\; 3 \;\; -1)$$

$$(Ax \cdot \eta)^T = [(A \cdot X) \cdot \eta]^T = \sum_j \eta_j \cdot \left(A \cdot X^{\langle j \rangle}\right) = \sum_j \eta_j \cdot \left(\sum_i \alpha_{i,j} \cdot X_{k,i}\right)$$

Переходим к выражению (2.30) вектора через координаты α оператора A_x и демонстрируем преобразование координат вектора между базисами матрицей коэффициентов (2.31).

$$\left[\sum_i \left(\sum_j \alpha_{i,j} \cdot \eta_j\right) \cdot X^{\langle i \rangle}\right]^T = (2 \;\; 4 \;\; -3 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 6 \;\; 3 \;\; -1)$$

$$\sum_j \alpha_{i,j} \cdot \eta_j = \xi^T = (1.328 \;\; -0.086 \;\; 7.864 \;\; -0.622 \;\; 3.914 \;\; -0.328 \;\; -3.914 \;\; -2.5)$$

Также можно рассмотреть еще один альтернативный вывод зависимости (2.31), используя свойства операторов. Если A произвольная матрица в евклидовом базисе, A_x — ее оператор в базисе X. Тогда по условию (2.27) *базис* Y является этим оператором (4.4). Рассчитываем матрицу коэффициентов α оператора Y и делаем выводы о свойствах полученной матрицы:

$$\alpha = X^{-1} \cdot Y \ - \text{ матрица преобразований из } Y \text{ в } X,$$

$$\alpha^{-1} = Y^{-1} \cdot X \ - \text{ матрица преобразований из } X \text{ в } Y,$$

следовательно,

$$\xi = \alpha \cdot \eta, \ \eta = \alpha^{-1} \cdot \xi.$$

Ответ на второй вопрос (2.24, 2.25) очевиден по выражению (4.4) в операторной форме. Рассмотрим векторный «аналог» подобного вывода. Пусть определены вектора:

$$\begin{aligned} y = Y \cdot \xi, \ x = X \cdot \xi, \\ \xi = Y^{-1} \cdot y, \ \xi = X^{-1} \cdot x, \\ Y^{-1} \cdot y = X^{-1} \cdot x, \\ y = (Y \cdot X^{-1}) \cdot x, \end{aligned}$$

где преобразование $Y \cdot X^{-1}$ не обобщается каким либо смыслом, но если учесть (4.4), то смысл наполняется операторным принципом преобразований, согласно (2.32).

4.4 Подобие

Определение 4.1. Квадратные матрицы A и B одинакового порядка называются подобными, если существует невырожденная матрица P того же порядка, такая что:

$$B = P^{-1}AP.$$

Подобные матрицы получаются при задании одного и того же линейного преобразования матрицей в разных координатных системах; при этом матрица P является матрицей перехода от одной системы к другой. Если две матрицы подобны, то говорят,

что одна из матриц может быть получена преобразованием подобия из другой.

Разберем выражения подобия и определим матричные подобие в разных базисах для алгебраических структур одного оператора. Также рассмотрим обратную задачу — найдем подобные операторы для равных алгебраических структур в разных базисах.

Прямая задача. Определим смысл подобий B_α и B_β оператора B в базисах X и Y, т. е. когда операторами подобия выступают матрицы базисов:

$$\begin{aligned} B_\alpha &= X^{-1} \cdot (B \cdot X), \\ B_\beta &= Y^{-1} \cdot (B \cdot Y), \end{aligned} \tag{4.5}$$

где

$$\begin{aligned} B_x &= B \cdot X, \\ B_y &= B \cdot Y \end{aligned} \tag{4.6}$$

матрицы линейных преобразований оператора B в базисах X и Y. Тогда

$$\begin{aligned} B_\alpha &= X^{-1} \cdot B_x, \\ B_\beta &= Y^{-1} \cdot B_y \end{aligned} \tag{4.7}$$

представляют матрицы коэффициентов линейных преобразований B_x и B_y в базисах X и Y. Очевиден смысл подобных оператору B матриц B_α и B_β — это *координаты* Bx и By в базисах X и Y. Теперь, на основании выражения подобий оператора B (4.5), определим отношение самих подобий B_α и B_β и найдем формулу оператора подобия T этих координат.

$B\alpha := X^{-1} \cdot B \cdot X \qquad B\beta := Y^{-1} \cdot B \cdot Y$

$B\alpha := X^{-1} \cdot (B \cdot X) \qquad B\beta := Y^{-1} \cdot (B \cdot Y)$

$B\alpha := X^{-1} \cdot Bx \qquad B\beta := Y^{-1} \cdot By$

Выражения оператора через его подобия

$B := X \cdot B\alpha \cdot X^{-1} \qquad B := Y \cdot B\beta \cdot Y^{-1}$

Отношение подобий

$B\alpha := X^{-1} \cdot Y \cdot B\beta \cdot Y^{-1} \cdot X$

Определяем оператор подобия T
координат (матриц коэффициентов)

$T := Y^{-1} \cdot X \qquad |T| = 1$

$B\alpha := T^{-1} \cdot B\beta \cdot T$

Операторы Bx и By подобными *не являются*. Найдем линейную зависимость не подобных линейных преобразований Bx и By через подобие их координат $B\alpha$ и B_β в базисах X и Y.

Линейные отображения оператора B

$Bx := B \cdot X \qquad By := B \cdot Y \qquad (1)$

Координаты (матриц коэффициентов)

$B\alpha := X^{-1} \cdot Bx \qquad B\beta := Y^{-1} \cdot By \qquad (2)$

Подобие матриц коэффициентов

$B\alpha := T^{-1} \cdot B\beta \cdot T \qquad (3)$

Оператор подобия выражаем из (3) с заменой
координат (2) отображений (1)

$\left(X^{-1} \cdot Bx\right) = T^{-1} \cdot \left(Y^{-1} \cdot By\right) \cdot T$

Находим линейную зависимость
линейных отображений оператора B

$Bx = X \cdot T^{-1} \cdot \left(Y^{-1} \cdot By\right) \cdot T$

$Bx = X \cdot \left(X^{-1} \cdot Y\right) \cdot \left(Y^{-1} \cdot By\right) \cdot T$

$Bx = Y \cdot Y^{-1} \cdot (By \cdot T)$

$Bx = By \cdot T \qquad By = Bx \cdot T^{-1}$

Таким образом, оператор подобия T преобразуется посредством отображений B в базисах X и Y.

Обратная задача. Пусть B_α и B_β — равные матрицы координат коэффициентов в базисах X и Y некоторых операторов A_x и A_y. Восстановим операторы в евклидовом базисе, используя выражение (4.6)

$$A_x = X \cdot B_\alpha \cdot X^{-1},\ A_y = Y \cdot B_\beta \cdot Y^{-1},$$

а также восстановим линейные отображения операторов B_x и B_y в базисах X и Y по выражению (4.7)

$$B_x = X \cdot B_\alpha,\ B_y = Y \cdot B_\beta$$

и проверим инвариантность преобразований координат ξ и η вектора Inv полученными линейными отображениями в каждом из базисов X и Y.

$\xi := X^{-1} \cdot Inv \quad \eta := Y^{-1} \cdot Inv$

$(Ax \cdot Inv)^T = (7.31\ \ -1.477\ \ 1.935\ \ 2.591\ \ 3.488\ \ 0.279\ \ -0.775\ \ 0.722)$

$(Bx \cdot \xi)^T = (7.31\ \ -1.477\ \ 1.935\ \ 2.591\ \ 3.488\ \ 0.279\ \ -0.775\ \ 0.722)$

$(Ay \cdot Inv)^T = (-1.76\ \ -8.549\ \ 0.506\ \ 1.058\ \ -2.261\ \ 14.389\ \ 6.82\ \ -0.268)$

$(By \cdot \eta)^T = (-1.76\ \ -8.549\ \ 0.506\ \ 1.058\ \ -2.261\ \ 14.389\ \ 6.82\ \ -0.268)$

Теперь решим задачу нахождения оператора подобия для найденных операторов A_x и A_y. Приравняем выражения подобий восстановленных операторов, учитывая равенство их коэффициентов. Определим оператор подобия S для восстановленных операторов в евклидовом базисе.

$$X^{-1} \cdot Ax \cdot X = Y^{-1} \cdot Ay \cdot Y$$

$$Ax := X \cdot \left(Y^{-1} \cdot Ay \cdot Y\right) \cdot X^{-1}$$

$$S := Y \cdot X^{-1} \qquad |S| = 1$$

$$Ax := S^{-1} \cdot Ay \cdot S$$

$$Ay := S \cdot Ax \cdot S^{-1}$$

Решив задачу подобия операторов, найдем, как и в прямой задаче, матрицу K линейной зависимости линейных отображений: B_x оператора A_x в базисе X, B_y оператора A_y в базисе Y. Сначала определяем B_x и B_y, далее выражаем через них координаты B_α и B_β. Приравниваем выражения координат и находим выражение оператора K.

$$Bx := Ax \cdot X \qquad By := Ay \cdot Y$$

$$B\alpha := X^{-1} \cdot Bx \qquad B\beta := Y^{-1} \cdot By$$

$$X^{-1} \cdot Bx = Y^{-1} \cdot By$$

$$Bx := X \cdot Y^{-1} \cdot By$$

$$K := X \cdot Y^{-1} \qquad |K| = 1$$

$$By := K^{-1} \cdot Bx$$

Сделаем вводы по зависимостям операторов, матриц их коэффициентов, матриц линейных преобразований в каждом из рассмотренных случаев.

В ы в о д ы по результатам решений.

- В базисах X и Y матрицы коэффициентов B_α и B_β (4.7) подобны собственному оператору B (4.5). В свою очередь матрицы коэффициентов взаимно подобны через оператор подобия T:

$$T = Y^{-1} \cdot X,$$
$$B_\alpha = T^{-1} \cdot B_\beta \cdot T,$$
$$B_\beta = T \cdot B_\alpha \cdot T^{-1}.$$

Линейные отображения B (4.6) линейно зависимы посредством преобразования оператором подобия T

$$B_x = B_y \cdot T,$$
$$B_y = B_x \cdot T^{-1}.$$

- Операторы A_x и A_y подобны, если матрица коэффициентов B_α оператора A_x равна матрице B_β оператора A_y соответственно в базисах X и Y

$$A_x = S^{-1} \cdot A_y \cdot S,$$
$$S = Y \cdot X^{-1}.$$

- Линейные отображения B_x и B_y операторов A_x и A_y в базисах X и Y линейно зависимы

$$K = X^{-1} \cdot Y,$$
$$B_x = K \cdot B_y,$$
$$B_y = K^{-1} \cdot B_x.$$

По результатам выводов очевидно, что оператор подобия T тождественен (4.1), значит переводит любой оператор из базиса Y в базис X, а K — матрица преобразований координат векторов из базиса Y в координаты базиса X. Оператор K обратим, обеспечивает изоморфизм собственных преобразований.

Если понимать K как матрицу коэффициентов оператора Y в базисе X, то можно определить Y_0 от Y в евклидовых координатах через подобие Y_0 координатам K

$$\begin{aligned} K &= X^{-1} \cdot (Y_0 \cdot X), \\ Y &= (Y_0 \cdot X), \\ Y_0 &= Y \cdot X^{-1}, \\ X^{-1} &= Y^{-1} \cdot Y_0, \\ X &= Y_0^{-1} \cdot Y. \end{aligned}$$

Подставляем X^{-1} и X в выражения подобия K и Y_0

$$\begin{aligned} K &= (Y^{-1} \cdot Y_0) \cdot Y_0 \cdot (Y_0^{-1} \cdot Y), \\ K &= Y^{-1} \cdot Y_0 \cdot (Y_0 \cdot Y_0^{-1}) \cdot Y), \\ K &= Y^{-1} \cdot (Y_0 \cdot Y), \\ K &= X^{-1} \cdot (Y_0 \cdot X) \end{aligned}$$

и получаем решение, которое показывает, что у оператора Y_0 *координаты совпадают в разных базисах*. При этом представление оператора Y_0 в базисах X и Y различно, а Y_0 в базисе X равен оператору Y.

Библиографический список

[1] Яковлев Г. Н. Функциональные пространства: учеб. пособие. — М.: МФТИ, 2000. — 128 с.

[2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 542 с.

[3] Панов А. Н. Задачи по линейной алгебре и геометрии: учеб. пособие для вузов. — Самара: Издательство «Самарский университет», 2005. — 38 с.

[4] Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1965. — 411 с.

[5] Сокольников И. С. Тензорный анализ (теория и применение в геометрии и механике сплошных сред) / пер. с англ. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 376 с.

[6] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968. — 572 с.

[7] Халмош П. Конечномерные векторные пространства / пер. с англ. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. — 264 с.

[8] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М: Наука, 1967. — 664 с.

[9] Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия: учеб. пособие. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 672 с.

[10] Яглом И. М., Ашкинузе В. Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. — М: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения, 1962. — 246 с.

Приложение

A Криволинейные поверхности

Положение точки в пространстве определяется ее координатами в ортогональной декартовой системе координат (y^1, y^2, y^3). Применяя линейное преобразование можно получить систему аффинных координат (3.1.2). Рассмотрим более общее функциональное преобразование

$$x^r = f^r(y^1, y^2, y^3), \tag{A.1}$$

где f^1, f^2, f^3 — произвольные функции от y, которые дифференцируемы столько раз, сколько это потребуется. Если определитель

$$\left|\frac{\partial x^r}{\partial y^s}\right| \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(y^1, y^2, y^3)} \tag{A.2}$$

отличен от нуля, то преобразование (A.1) обратимо, т. е. можно разрешить (A.2) относительно y:

$$y^r = g^r(x^1, x^2, x^3). \tag{A.3}$$

Из формул (A.1) и (A.3) видно, что любой совокупности y^r соответствует только одна совокупность x^r, и наоборот. Следовательно, переменные x^r определяют точку в пространстве единственным образом; в виду общего характера гладких функций назовем их *криволинейными координатами точки.*

Геометрический смысл координат выясняется, если для уравнения

$$f^r(y^1, y^2, y^3) = \text{const} \tag{A.4}$$

последовательно задавать $x^r = \text{const}$ и решать семейство поверхностей, которому принадлежит x^r. Поверхности $x^r = \text{const}$

называются *координатными поверхностями*, или кратко x^r-*поверхностями*, с учетом конкретного значения r. Определитель (А.2) не обращается в нуль, следовательно, уравнение имеет одно решение и три поверхности, выбранные из разных семейств, пересекаются в одной и только одной точке. Таким образом, положение точки в криволинейной системе координат определяется однозначно.

Решая (А.4), при последовательном изменении только x^r координаты, получаем кривую, которая называется *координатной кривой* x^r, чем и оправдывается название «криволинейные координаты». Координатные плоскости, попарно пересекаясь, образуют координатные кривые, пересекающиеся в точке P заданного пространства. Таким образом, точка P в криволинейных координатах задается тройкой поверхностей из семейства поверхностей, таких, что точка P есть точка их пересечения.

Очевидно, что аффинные координаты (разд. 3.1.2) суть частного случая криволинейных координат, когда функции f^r в (А.4) — линейные функции.

Графически продемонстрируем свойства основных криволинейных систем, предварительно указав на выражения координатных функций и типы координатных поверхностей.

Сферические координаты (рис. А.1, А.2)

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \sin x^2 \cos x^3, \\ y^2 &= x^1 \sin x^2 \sin x^3, \\ y^3 &= x^1 \cos x^2. \end{aligned} \tag{А.5}$$

Здесь x^1-поверхности — сферы с центром в начале координат, x^2-поверхности — круговые конусы, x^3-поверхности — плоскости, проходящие через ось y^3.

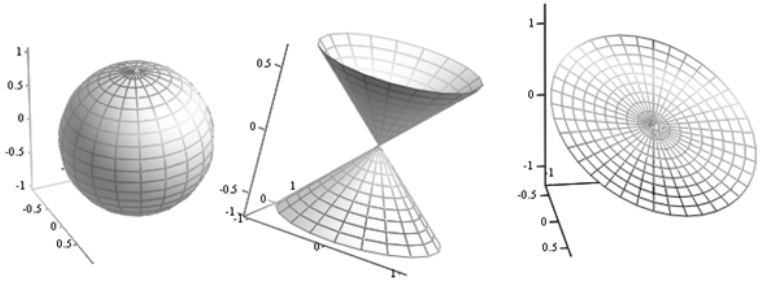

Рис. А.1. Координатные поверхности семейства поверхностей сферической системы координат: сфера, круговые конусы, плоскость

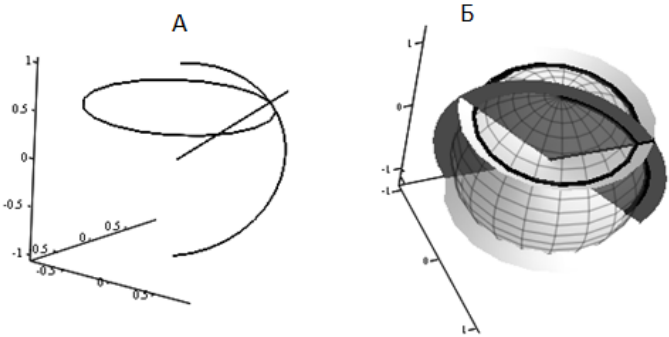

Рис. А.2. Точка в пространстве сферической системы координат: А – точка на пересечении 3-х координатных кривых; Б – пересечение координатных кривых и поверхностей

Цилиндрические координаты (рис. А.3, А.4)

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 \cos x^2, \\ y^2 &= x^1 \sin x^2, \\ y^3 &= x^3. \end{aligned} \tag{А.6}$$

Здесь x^1-поверхности — цилиндры, имеющие общую ось, совпадающую с y^3-осью, x^2-поверхности — плоскости, проходящие черев ось y^3, а x^3-поверхности совпадают с y^3-поверхностями.

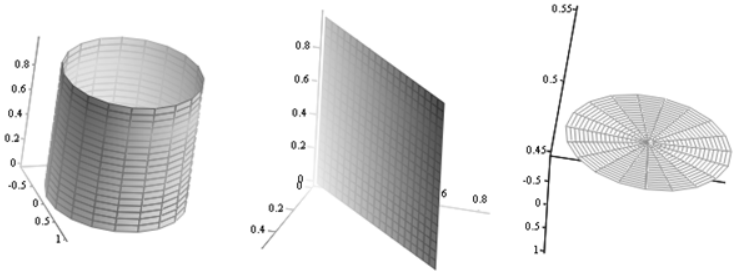

Рис. А.3. Координатные поверхности семейства поверхностей цилиндрической системы координат: цилиндр; плоскость, проходящая через ось y^3; плоскость, совпадающая с y^3 поверхностью

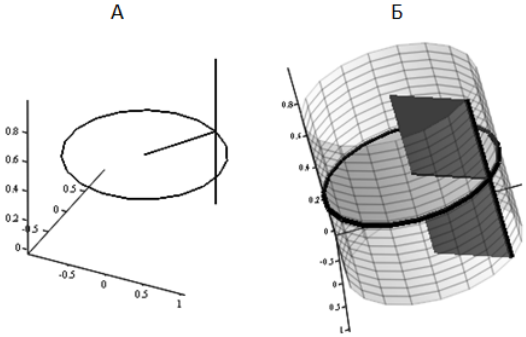

Рис. А.4. Точка в пространстве цилиндрической системы координат: А – точка на пересечении 3-х координатных кривых; Б – пересечение координатных кривых и поверхностей

Эллиптические координаты (рис. А.5, А.6)

$$
\begin{aligned}
y^1 &= \left\{ \frac{(x^1-a)(x^2-a)(x^3-a)}{(b-a)(c-a)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
y^2 &= \left\{ \frac{(x^1-b)(x^2-b)(x^3-b)}{(c-b)(a-b)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\
y^3 &= \left\{ \frac{(x^1-c)(x^2-c)(x^3-c)}{(a-c)(b-c)} \right\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

где $a > b > c > 0$. Координаты удовлетворяют неравенствам $x^1 \geqslant a > x^2 \geqslant b > x^3 \geqslant c$. Здесь x^1-поверхности — эллипсоиды, x^2-поверхности есть однополостные гиперболоиды и x^3-поверхности — двухполостные гиперболоиды. Все координатные поверхности второго порядка принадлежат к софокусному семейству

$$\frac{(y^1)^2}{(x-a)} + \frac{(y^2)^2}{(x-b)} + \frac{(y^3)^2}{(x-c)} = 1.$$

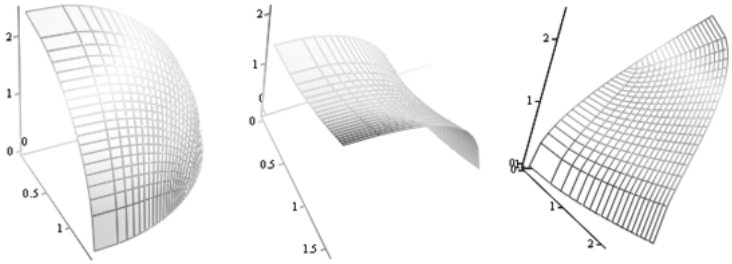

Рис. А.5. Координатные поверхности семейства поверхностей эллиптической системы координат: эллипсоид, однополостный гиперболоид, двухполостный гиперболоид

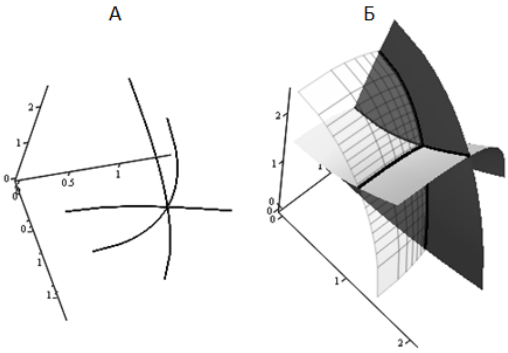

Рис. А.6. Точка в пространстве эллиптической системы координат: А – точка на пересечении 3-х координатных кривых; Б – пересечение координатных кривых и поверхностей

Параболические координаты (рис. А.7, А.8)

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 x^2 \cos x^3, \\ y^2 &= x^1 x^2 \sin x^3, \\ y^3 &= \frac{1}{2}\left[(x^1)^2 - (x^2)^2\right]. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Здесь x^1-поверхности и x^2-поверхности — параболоиды вращения, а x^3-поверхности — плоскости, проходящие черев ось y^3.

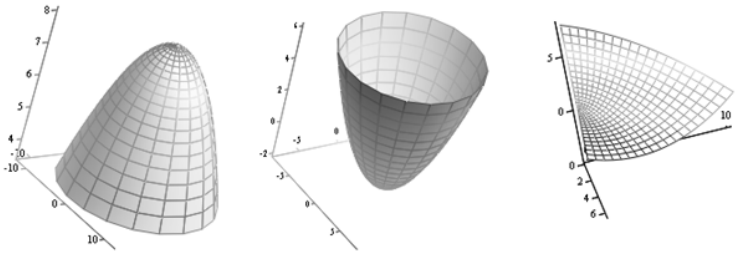

Рис. А.7. Координатные поверхности семейства поверхностей параболической системы координат: параболоиды вращения; плоскость, проходящая через ось y^3

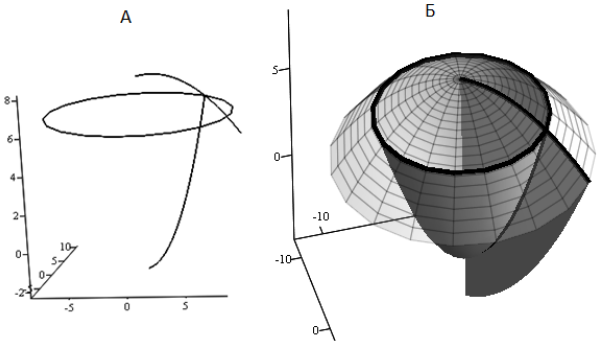

Рис. А.8. Точка в пространстве параболической системы координат: А – точка на пересечении 3-х координатных кривых; Б – пересечение координатных кривых и поверхностей

Предметный указатель

Базис
  координатного пространства, 29

Вектор, 15
  алгебраический, 54
  база, 29
  базис, 17, 29
    билинейных форм, 75
    взаимный, 139
    евклидов, 21
    конечный, 61
    нормированный, 18
    ортогональный, 18
    сопряженный, 67
    счетный, 22, 46
    функционала, 80
  инвариант, 99
  ковариантный, 101
  контравариантный, 100
  линейная комбинация, 15
  линейная независимость, 15
  линейная операция, 15
  норма, 16
  обобщенный, 13
  подстановка, 24
  привязка к координатам, 90
  радиус-вектор, 112
  ранг, 29
Взаимная базисная система, 140, *см.* базис взаимный

Геометрия
  аффинная, 106
    аксиома параллелограмма, 107
  внутренняя (поверхности), 121

Квадратичная форма
  первая фундаментальная, 127
  фундаментальная, 136
Координаты
  аффинные, 108
  базис
    n-мерный, 29
  Гауссовы, *см.* криволинейные
  криволинейные, *см.* Гауссовы

Линейная алгебра
  алгебраическая операция, 50
    бинарная, 51
  алгебраическое дополнение, 26
  группа, 52
    абелева (коммутативная), 52
  дополнительный минор, 26
  закон композиции, 50
  минор, 27
  множество
    алгебра, 48
    единица, 48
    замкнутое, 47
    кольцо, 47, 52
    модуль, 54
    поле, 53, 58
  моноид, 52
  обращение матриц, 32
  определитель
    матрицы, 25
  подгруппа, 52
  формула Лапласа, 27
Линейные преобразования, 96
  обратимые, 98
Линейный оператор, 76
  матрица, 79
  обратимый, 90
    автоморфизм, 90
  однородный, 76
  подобие, 93
  проектор, 83
  сопряженный, 86

Математический объект
  инвариант, 97
Метод Гаусса, 122
Метрика, 6
  аксиомы метрики, 6
Множество
  вполне ограниченное, 8
  замыкание, 7
  компактное, 8
  метрика, 6
  метрическое пространство, 6
  ограниченное, 6
  открытое, 8
  отображение, 9
  плотное, 7
  функционал, 11

Норма
  евклидова, 20
  пространства L_1, 42

Отображение, 9
  биекция, 10

геоморфизм, 38
гомоморфизм, 11
изоморфизм, 10
компакт, 11
непрерывное, 10, 37
открытое, 37
сжимающее, 11

Поверхность
координатная, 131
линии, 131
Преобразование
вектора, 119
векторов репера, *см.* репер
координат точки, 120
Призведение
скалярное, 19
Произведение
векторное, 139
множеств, 50
операторов, 77
скалярное, 21, 22
тройное, 139
Пространство
аффинное, 106, 108
координаты, 109
репер, 109
базис, 17
нормированный, 18
банахово, 40
векторное, 13, 54, 59
аннуляторы, 67
билинейные формы, 73
изоморфное, 19
инвариантность, 80
линейная оболочка, 16
нормированное, 16
прямые суммы, 68
сопряженные базисы, 67
факторпространство, 72
гильбертово, 22
евклидово, 20
норма, 20
компакт, 8
метрическое, 6
ε-сеть, 8
плотное, 7
подпространство, 62
полное, 7
сепарабельное, 17
сопряжение, 64
сопряженное, 64
топологическое, 34
геоморфизм, 38
линейное, 38
сепарабельное, 36
топологическое расширение, 40
функциональное
L_1, 42
L_2, 45
евклидово L_2, 45
Шварца, 41

Система
линейно независимая, 15, 28
фундаментальных решений, 31
Скаляр
произведение, 19

Тензор
ассоциированный, 129
ковариантный, 128
коваринтный
метрический (поверхности), 128
метрический, 128, 136
симметричный, 128
фундаментальный, 129
Теорема
Крамера, 28
о изоморфизме, 23
о ранге матрицы, 29
Топология, 33
база, 35
непрерывность, 37
Точка
изолированная, 7
предельная, 7
прикосновения, 6

Формула
Крамера, 28
Функционал, 9
билинейный, 73, *см.* Пространство сопряженное
линейный, 64
Функция
измеримая, 43
инвариантные свойства, 41
непрерывная, 37
неявная (теория), 121
простая, 43
суммируемая, 44
эквивалентность, 42

Учебное издание

Гущин Андрей Викторович,

Севостьянова Виктория Владимировна

ИНВАРИАНТЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебное пособие

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 21.10.2024. Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Печ. л. 11, 0.
Тираж 120 экз. (1-й з-д 1-27). Заказ № Арт. 6 (Р2УП)/2024.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.