

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

В.М. Чернов, М.А. Чичева

**Алгебро-арифметические методы синтеза
быстрых алгоритмов
дискретных ортогональных преобразований**

Электронное учебное пособие

САМАРА

2010

Авторы: ЧЕРНОВ Владимир Михайлович,
ЧИЧЕВА Марина Александровна,

Учебное пособие содержит описание алгебро-арифметических методов синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований (БА ДОП). Рассмотрены как классические БА ДОП, так и оригинальные авторские методы, существенно снижающие вычислительную сложность алгоритмов. Приведены различные алгоритмы одно- и двумерного дискретного преобразования Фурье, дискретного косинусного преобразования, синтезированные в рамках единого алгебраического подхода. Также дано практическое применение части описанных алгоритмов.

Пособие предназначено для магистров по направлению 010400.68 “Прикладная математика и информатика”, обучающихся по программе «Математические и компьютерные методы обработки изображений и геоинформатики».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Предварительные сведения.....	5
1.1 О проблеме синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований	5
1.2 Конечномерные ассоциативные алгебры	9
1.3 Основные схемы редукции	10
1.3.1 Декомпозиция Кули-Тьюки "по основанию 2"	10
1.3.2 Декомпозиция Кули-Тьюки "по основанию 4"	11
1.3.3 Декомпозиция Кули-Тьюки с расщеплением основания (сплит-радикс алгоритм)	12
1.3.4 Декомпозиция ДПФ Гуда-Томаса	13
2 Совмещенные алгоритмы дискретных ортогональных преобразований.....	15
2.1 Двумерный БА ДПФ с совмещением в алгебре кватернионов.....	16
2.2 БПФ с представлением данных в алгебре (2×2)-матриц	18
2.3 Кватернионное двумерное ДПФ	20
2.3.1 Алгоритм КДПФ с декомпозицией по основанию 2	21
2.3.2 Алгоритм КДПФ с декомпозицией по основанию 4	23
2.3.3 Алгоритм КДПФ с расщеплением основания.....	25
2.4 Совмещенные алгоритмы дискретного косинусного преобразования	28
2.4.1 Алгоритм одномерного ДКП четной длины	29
2.4.2 Алгоритм двумерного ДКП четной длины	32
3 Быстрые алгоритмы ДОП при специальном представлении данных.....	39
3.1 Представление данных в круговых кодах	39
3.1.1 Декомпозиция Кули-Тьюки "по основанию p"	39
3.2 Алгоритмы одномерного ДПФ при длине преобразования $N=3^k$	40
3.3 Алгоритмы дискретного косинусного преобразования длиной $N=3^k$	42
3.4 Алгоритмы дискретных ортогональных преобразований, реализуемые в кодах Гамильтона-Эйзенштейна.	44
3.4.1 Быстрый алгоритм двумерного ДПФ	47
3.4.2 Быстрый алгоритм дискретного косинусного преобразования	49
3.5 Алгоритмы дискретного косинусного преобразования коротких длин.....	53
3.5.1 Алгебраические принципы синтеза БА ДКП коротких длин.....	53

3.5.2 Алгоритм дискретного косинусного преобразования длиной $N = 8$	56
3.5.3 Алгоритм дискретного косинусного преобразования длиной $N = 9$	59
3.5.4 Алгоритм дискретного косинусного преобразования длиной $N = 10$	60
3.5.5 Алгоритм дискретного косинусного преобразования длиной $N = 12$	62
3.5.6 Алгоритм дискретного косинусного преобразования длиной $N = 15$	63
4 Унифицированный метрический подход к синтезу быстрых алгоритмов многомерного ДПФ	68
4.1 Альтернативная интерпретация редукции Кули-Тьюки	69
4.2 Алгоритмы двумерного ДПФ с покоординатным прореживанием области суммирования	70
4.3 "Чесс-алгоритмы" двумерного ДПФ для $N = 2^r$	74
4.4 Алгоритмы двумерного ДПФ - алгоритмы с расщеплением основания нецелого порядка	81
4.5 Алгоритмы двумерного ДПФ с "мультипокрытиями" области суммирования	84
5 Некоторые приложения	88
5.1 Задача вычисления ДПФ последовательности произвольной длины	88
5.2 Исследование алгоритмов ДКП в методе блочного кодирования с преобразованием	93
Библиографический список	99

1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 О проблеме синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований

Одними из наиболее эффективных методов цифровой обработки сигналов являются методы, связанные с использованием дискретных ортогональных преобразований.

Определение 1.1. Пусть $f(n) \in \mathbb{C}$ - периодическая с периодом N комплекснозначная последовательность, $\{h_m(n)\}_{m=0}^{N-1}$ - семейство N -периодических комплекснозначных функций с условием ортогональности

$$\langle h_m, h_k \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} h_m(n) \overline{h_k(n)} = \delta_{mk} \quad (1.1)$$

(δ_{mk} - дельта-символ Кронекера, черта означает комплексное сопряжение).

Преобразование

$$\mathbf{f} = (f(0), \dots, f(N-1)) \mapsto (F(0), \dots, F(N-1)) = \mathbf{F}, \quad (1.2)$$

определяемое соотношением,

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) h_m(n) \quad (m=0, 1, \dots, N-1) \quad (1.3)$$

называется *дискретным ортогональным преобразованием* (ДОП) с базисом $\{h_m(n)\}_{m=0}^{N-1}$.

Преобразование (1.3) линейно и может быть записано в матричной форме

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{H} \mathbf{f}^T, \quad (1.4)$$

где $\mathbf{f}^T$, $\mathbf{F}^T$ - транспонированные к векторам (1.2) векторы-столбцы,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0(0) & \dots & h_0(N-1) \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{N-1}(0) & \dots & h_{N-1}(N-1) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Определение 1.2. Матрица $\mathbf{H}$, определенная равенством (1.5), называется

матрицей дискретного ортогонального преобразования (1.3).

Пример 1.1. Преобразование (1.3) с базисными функциями

$$h_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left\{2\pi i \frac{mn}{N}\right\} \quad (1.6)$$

называется *дискретным преобразованием Фурье* (ДПФ).

Пример 1.2. Преобразование (1.3) с базисными функциями

$$h_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\cos \frac{2\pi mn}{N} + \sin \frac{2\pi mn}{N} \right) \quad (1.7)$$

называется *дискретным преобразованием Хартли*.

Пример 1.3. Преобразование (1.3) с базисными функциями

$$h_m(n) = \lambda_m \cos \frac{\pi \left(n + \frac{1}{2}\right) m}{N}, \quad (1.8)$$

где нормирующие коэффициенты λ_m определены равенством

$$\lambda_m = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{N}} & \text{при } m \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{при } m = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

называется *дискретным косинусным преобразованием* (ДКП).

Непосредственное матричное умножение в (1.4) или, что то же самое, вычисление массива $F(m)$ в (1.3) требует $\sim N^2$ арифметических операций. Поэтому в практических задачах предпочтение отдается таким ДОП, для которых арифметическая природа базисных функций позволяет синтезировать алгоритмы с существенно более низкой вычислительной сложностью. Отличительной особенностью преобразований примеров 1.1, 1.2, 1.3 является возможность синтеза таких высокоскоростных алгоритмов.

Определение 1.3. Число вещественных арифметических операций сложения и умножения, достаточных для реализации преобразования (1.3), будем называть (вещественной) *аддитивной и мультипликативной сложностью* алгоритма вычисления ДОП и обозначать $A(N)$ и $M(N)$, соответственно.

Если для данного алгоритма вычисления ДОП при $N \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\frac{A(N) + M(N)}{N^2} \rightarrow 0,$$

то алгоритм принято называть *быстрым* (БА ДОП).

В частности, известен БА вычисления дискретного преобразования Фурье, для которого при $N = 2^k$

$$A(N), M(N) = O(N \log_2 N).$$

Историю быстрых алгоритмов обработки сигналов принято отсчитывать с 1965г., когда Кули и Тьюки [33] опубликовали свой быстрый алгоритм вычисления дискретного преобразования Фурье (далее - БПФ), хотя ранее Гуд (1960г.) и Томас (1963г.) опубликовали в практически незамеченных современниками работах [35, 42] свои быстрые алгоритмы дискретного преобразования Фурье, базирующиеся на несколько ином подходе.

За время, прошедшее с первых публикаций, дискретный спектральный анализ стал одним из основных средств решения задач цифровой обработки сигналов, распознавания образов, машинного зрения, компьютерной оптики и т.д. Разработке эффективных (быстрых) алгоритмов вычисления спектров различных дискретных преобразований посвящено большое количество публикаций, как у нас в стране, так и за рубежом [1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 24, 32, 39, 43, 47]. Значительный вклад в развитие общей теории дискретных преобразований и их быстрых алгоритмов внесли С.С.Агаян, Н.Н.Айзенберг, В.А.Власенко, В.Г.Лабунец, А.М.Крот, А.М.Трахтман, Л.П.Ярославский; Р.Агарвал, Ш.Виноград, Г.Нуссбаумер, Ч.Рейдер и др. Высокоэффективные алгоритмы конкретных преобразований, адаптированные к характеристикам применяемых вычислительных средств разработаны И.Е.Капориным, Е.Е.Тыртышниковым, А.М.Григорьяном и другими исследователями [7, 8, 11, 34, 40, 45, 46].

До последнего времени наиболее известными общими подходами являлись метод кронекеровской факторизации матриц ДОП [1, 6, 19, 24] и метод полиномиальных преобразований [2, 12, 17, 47].

Первый из них опирается на известную теорему Гуда (см., например, [19]): если матрица ДОП представима в виде кронекеровской степени некоторой матрицы, то она представима и в виде обычной матричной степени некоторой "слабозаполненной" матрицы. К сожалению, отсутствие общих теорем о

кронекеровской факторизации матриц ограничивает возможности этого метода, по существу, классификацией алгоритмов, синтезированных независимыми методами.

Метод полиномиальных преобразований (дискретного преобразования Лапласа, z -преобразования) существенно опирается на наличие априорной информации о факторизации некоторых полиномов, что уже является весьма сложной вычислительной задачей, и, что еще более существенно, на использование индивидуальных арифметических свойств коэффициентов этих полиномиальных сомножителей (например, метод Винограда).

В то же время анализ структур конкретных быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований позволяет утверждать, что их авторы используют весьма ограниченный набор решений, базирующихся на действительно глубоких алгебраических идеях, в сочетании с эвристическими соображениями, специфичными либо именно для данного ДОП, либо для конкретно используемого вычислительного устройства. Структура БА представляет, как правило, некоторую рекурсивную процедуру, последовательно реализующую редукцию вычисления ДОП заданного объема к ДОП меньшего объема или более простых преобразуемых массивов. Типичными схемами таких редукций являются:

- редукция Кули-Тьюки для $N = p^k$ (p – простое число);
- редукция Гуда-Томаса для $N=PQ$ (P, Q – взаимно простые числа);
- редукция Рейдера для $N=p$ (p – простое число);
- методы "совмещенного" вычисления ДОП вещественных сигналов.

По мнению авторов, алгоритмы, использующие все вышеперечисленные методы редукции могут быть интерпретированы единообразно:

- вложение поля, содержащего значения входного сигнала и базисных функций преобразования в некоторую конечномерную алгебру (*кодирование*);
- вычисление некоторого вспомогательного преобразования со значениями в этой алгебре;
- отображение полученного результата в поле, содержащее значения выходного сигнала (*декодирование*).

Следует отметить, что выбор алгебры для вычисления вспомогательного преобразования определяет не только эффективность того или иного БА, но и неявным образом задает структуру этого алгоритма.

Именно такая трехэтапная процедура принята в книге за основу достаточно

общей методики синтеза быстрых алгоритмов ДОП, примеры реализации которой описаны в настоящей главе.

1.2 Конечномерные ассоциативные алгебры

Пусть $\mathbb{A}$ – конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$ с базисом:

$$\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{d-1}\}$$

с обычными (покоординатными) правилами сложения и умножения на элемент поля $\mathbb{F}$.

Определим бинарный закон $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \mapsto \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \in \mathbb{A}$ умножения базисных элементов и распространим его на все множество векторов из пространства $\mathbb{A}$ посредством равенства

$$\xi \eta = \sum_{k,j=0}^{d-1} \xi_k \eta_j (\mathbf{e}_k \mathbf{e}_j), \quad (1.10)$$

где

$$\xi = \xi_0 \mathbf{e}_0 + \dots + \xi_{d-1} \mathbf{e}_{d-1},$$

$$\eta = \eta_0 \mathbf{e}_0 + \dots + \eta_{d-1} \mathbf{e}_{d-1}.$$

Определение 1.4. Множество $\mathbb{A}$ с введенными операциями сложения, умножения на элемент из $\mathbb{F}$, индуцированных операциями исходного векторного пространства, и умножением, определенным равенством (1.10), называется *конечномерной (d -мерной) ассоциативной алгеброй* над полем $\mathbb{F}$ (или, короче, $\mathbb{F}$ -алгеброй).

Определение 1.5. Пусть $\mathbb{A}$ есть некоторая $\mathbb{F}$ -алгебра и $\mathbf{1} \in \mathbb{A}$ – такой элемент, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{A}$ выполняются равенства

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{x}.$$

Такой элемент $\mathbf{1}$ называется *единицей* алгебры $\mathbb{A}$, а сама алгебра – *алгеброй с единицей*.

Определение 1.6. Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ – две $\mathbb{F}$ -алгебры. Взаимно однозначное отображение $\phi: \mathbb{A} \mapsto \mathbb{B}$ называется *изоморфизмом* алгебр, если для любых $\xi, \eta \in \mathbb{A}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$ выполняются равенства

- (a) $\phi(\xi + \eta) = \phi(\xi) + \phi(\eta)$
 (b) $\phi(\lambda\xi) = \lambda\phi(\xi)$
 (c) $\phi(\xi\eta) = \phi(\xi) \cdot \phi(\eta)$

Если $\mathbb{A} = \mathbb{B}$, то отображение ϕ называется *автоморфизмом*.

Приведем несколько примеров конечномерных ассоциативных алгебр, рассматриваемых в настоящем разделе при синтезе БА ДОП.

Пример 1.4. Четырехмерная $\mathbb{R}$ -алгебра с базисом $\{1, i, j, k\}$ и правилами умножения базисных элементов

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k$$

называется *алгеброй кватернионов*.

Пример 1.5. Двумерные $\mathbb{R}$ -алгебры с базисом $\{1, e\}$ называются *алгебрами комплексных, дуальных или двойных чисел*, если, соответственно, $e^2 = -1$, $e^2 = 1$ или $e^2 = 0$.

Пример 1.6. Пусть $\mathbb{G}$ – конечномерная d -элементная группа с групповой операцией $(*)$ и нейтральным элементом $\mathbf{g}_0 = \mathbf{1} \in \mathbb{G}$. Рассмотрим векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{d-1}\}$ и определим умножение (1.10) элементов этого пространства равенством

$$\xi\eta = \sum_{\mathbf{g} \in \mathbb{G}} \left(\sum_{\langle \mathbf{g}, \mathbf{g}_j = \mathbf{g} \rangle} \xi_i \eta_j \right) \mathbf{g}.$$

Введенная алгебра называется *групповой алгеброй* группы $\mathbb{G}$.

Другие необходимые примеры алгебр рассматриваются в разделе по мере их использования.

1.3 Основные схемы редукции

1.3.1 Декомпозиция Кули-Тьюки "по основанию 2"

Пусть $f(n) \in \mathbb{C}$ есть N -периодическая последовательность, $N = 2^k$, $F(m)$ – её дискретный спектр Фурье:

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w^{mn}, \quad w = \exp\left\{2\pi i / N\right\}, \quad 0 \leq m \leq N-1, \quad (1.11)$$

Сумма в правой части соотношения (1.11) может быть представлена для $0 \leq m \leq N/2 - 1$ в виде двух сумм длиной $N/2$:

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} f(2n) (w^2)^{mn} + w^m \sum_{n=0}^{N/2-1} f(2n+1) (w^2)^{mn} = F_0(m) + w^m F_1(m). \quad (1.12)$$

Здесь

$$F_0(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} f(2n) (w^2)^{mn}, \quad F_1(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} f(2n+1) (w^2)^{mn}$$

- спектры Фурье $N/2$ -периодичных подпоследовательностей. Таким образом, ДПФ длиной N сведено к двум преобразованиям Фурье длиной $N/2$ и к $N/2$ дополнительным умножениям на степени w для $0 \leq m \leq N/2 - 1$. Так как $w^{N/2} = -1$, то вычисление $F(m)$ для $N/2 \leq m \leq N-1$ выполняется без дополнительных умножений:

$$F(m^* + N/2) = F_0(m^*) - w^{m^*} F_1(m^*), \quad 0 \leq m^* \leq N/2 - 1. \quad (1.13)$$

Мультипликативная $M(N)$ и аддитивная $A(N)$ сложность такого алгоритма равны, соответственно:

$$M(N) \leq \frac{3}{2} N \log_2 N - \frac{9}{2} N, \quad A(N) \leq \frac{7}{2} N \log_2 N - \frac{9}{2} N, \quad (1.14)$$

Изложенный алгоритм принято называть быстрым преобразованием Фурье (БПФ) по основанию 2.

1.3.2 Декомпозиция Кули-Тьюки "по основанию 4"

Аналогичным образом строится алгоритм БПФ "по основанию 4" при $N = 4^k$. Сумма для $F(m)$ в (1.11) разбивается на четыре части:

$$\begin{aligned}
F(m) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f(4n) \left(w^4\right)^{mn} + w^m \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f(4n+1) \left(w^4\right)^{mn} + \\
&+ w^{2m} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f(4n+2) \left(w^4\right)^{mn} + w^{3m} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f(4n+3) \left(w^4\right)^{mn} = \\
&= F_0(m) + w^m F_1(m) + w^{2m} F_2(m) + w^{3m} F_3(m) \\
0 \leq m &\leq \frac{N}{4} - 1.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Соотношение (1.15) редуцирует вычисление ДПФ (1.11) к вычислению четырех ДПФ длиной $\frac{N}{4}$ и к $3\frac{N}{4}$ дополнительным умножениям на степени w . Так как при стандартном машинном представлении комплексных чисел умножения на степени мнимой единицы i являются тривиальными, значения спектра при $\frac{N}{4} \leq m \leq N-1$ вычисляются без дополнительных умножений следующим образом:

$$\begin{pmatrix} F(m^*) \\ F\left(\frac{N}{4} + m^*\right) \\ F\left(\frac{N}{2} + m^*\right) \\ F\left(\frac{3N}{4} + m^*\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(m^*) \\ w^{m^*} F_1(m^*) \\ w^{2m^*} F_2(m^*) \\ w^{3m^*} F_3(m^*) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq m^* \leq \frac{N}{4} - 1. \tag{1.16}$$

Оценки вычислительной сложности такого алгоритма имеют вид:

$$M(N) \leq \frac{9}{8} N \log_2 N - \frac{13}{4} N, \quad A(N) \leq \frac{25}{8} N \log_2 N - \frac{13}{4} N. \tag{1.17}$$

1.3.3 Декомпозиция Кули-Тьюки с расщеплением основания (сплит-радикс алгоритм)

Пусть $N = 2^k$, тогда преобразование (1.11) для $0 \leq m \leq \frac{N}{4} - 1$ может быть записано в следующем виде [6]:

$$F(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n) \left(w^2\right)^{mn} + w^m \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f(4n+1) \left(w^4\right)^{mn} + w^{3m} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f(4n+3) \left(w^4\right)^{mn}.$$

Здесь ДПФ длиной N сведено к одному ДПФ длиной $\frac{N}{2}$, двум ДПФ длиной $\frac{N}{4}$ и к $2\frac{N}{4}$ дополнительным умножениям на степени w . Вычисление $X(m)$ для $\frac{N}{4} \leq m \leq N-1$ выполняются без дополнительных умножений:

$$\begin{pmatrix} F(m^*) \\ F\left(\frac{N}{4} + m^*\right) \\ F\left(\frac{N}{2} + m^*\right) \\ F\left(\frac{3N}{4} + m^*\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 & -i \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(m^*) \\ w^{m^*} F_1(m^*) \\ F_0\left(\frac{N}{4} + m^*\right) \\ w^{3m^*} F_3(m^*) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq m^* \leq \frac{N}{4} - 1$$

где

$$F_0(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2n) \left(w^2\right)^{mn}, \quad F_1(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f(4n+1) \left(w^4\right)^{mn},$$

$$F_3(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f(4n+3) \left(w^4\right)^{mn}.$$

Оценки вычислительной сложности для этого алгоритма равны:

$$M(N) \leq N \log_2 N - 3N, \quad A(N) \leq 3N \log_2 N - 3N. \quad (1.18)$$

1.3.4 Декомпозиция ДПФ Гуда-Томаса

Другим известным способом быстрого вычисления ДПФ является декомпозиция Гуда-Томаса [35, 42], применяемая в тех случаях, когда длина преобразования $N = P \cdot Q$, где P и Q - взаимно просты.

Пусть $\alpha = \exp\left\{2\pi i / P\right\}$, $\beta = \exp\left\{2\pi i / Q\right\}$ - первообразные комплексные корни из единицы степени P и Q , соответственно. Представим индексы входной и выходной последовательности в виде:

$$\begin{cases} n \equiv Pn_1 + Qn_2 \\ m \equiv P a m_1 + Q b m_2 \end{cases}, \quad (1.19)$$

где a и b определяются из условий

$$\begin{cases} P a \equiv 1 \pmod{Q} \\ Q b \equiv 1 \pmod{P} \end{cases}. \quad (1.20)$$

После введения обозначений $\tilde{x}(n_1, n_2) = x(Pn_1 + Qn_2)$,

$\tilde{F}(m_1, m_2) = F(P a m_1 + Q b m_2)$ соотношение (1.11) примет вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(m_1, m_2) &= \sum_{n_1=0}^{Q-1} \sum_{n_2=0}^{P-1} \tilde{f}(n_1, n_2) w^{(Pn_1+Qn_2)(Pam_1+Qbm_2)} = \\
&= \sum_{n_1=0}^{Q-1} \sum_{n_2=0}^{P-1} \tilde{f}(n_1, n_2) w^{P^2 an_1 m_1 + PQ(bn_1 m_2 + an_2 m_1) + Q^2 bn_2 m_2}.
\end{aligned}$$

В силу (1.20) справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(m_1, m_2) &= \sum_{n_1=0}^{Q-1} \sum_{n_2=0}^{P-1} \tilde{f}(n_1, n_2) w^{Pn_1 m_1} w^{PQ(bn_1 m_2 + an_2 m_1)} w^{Qn_2 m_2} = \\
&= \sum_{n_1=0}^{Q-1} \sum_{n_2=0}^{P-1} \tilde{f}(n_1, n_2) \beta^{n_1 m_1} \alpha^{n_2 m_2},
\end{aligned} \tag{1.21}$$

где $\beta = \exp\left\{2\pi i P/N\right\} = \exp\left\{2\pi i/Q\right\} = w^P$, $\alpha = \exp\left\{2\pi i Q/N\right\} = \exp\left\{2\pi i/P\right\} = w^Q$. Из

последнего равенства (1.21) следует:

$$\tilde{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_2=0}^{P-1} \left(\sum_{n_1=0}^{Q-1} \tilde{f}(n_1, n_2) \beta^{n_1 m_1} \right) \alpha^{n_2 m_2} \tag{1.22}$$

или

$$F(Pam_1 + Qbm_2) = \sum_{n_2=0}^{P-1} \left(\sum_{n_1=0}^{Q-1} f(Pn_1 + Qn_2) \beta^{n_1 m_1} \right) \alpha^{n_2 m_2}. \tag{1.23}$$

Так как для описанного шага декомпозиции справедливо неравенство:

$$M(N) = M(P) \cdot Q + M(Q) \cdot P \leq QP^2 + PQ^2 = N(P+Q) < N^2, \tag{1.24}$$

то применение этого приема тем эффективнее, чем на большее число взаимно простых сомножителей разлагается число N .

2 СОВМЕЩЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИСКРЕТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Совмещенные алгоритмы одномерного дискретного преобразования Фурье

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w^{mn}, \quad w \in \mathbb{C}, \quad w^N = 1 \quad (2.1)$$

вещественных N -периодических последовательностей хорошо известны и подробно описаны [6, 13, 23]. В их основе лежит возможность получения дополнительных вычислительных преимуществ за счет избыточности представления вещественных чисел в комплексной арифметике.

Типичный пример: представляя (2.1) в форме

$$F(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} f(2n) (w^2)^{mn} + w^m \sum_{n=0}^{N/2-1} f(2n+1) (w^2)^{mn} \quad (2.2)$$

и вводя комплексную функцию

$$z(n) = f(2n) + i f(2n+1), \quad (2.3)$$

можно свести вычисление преобразования (2.1) к вычислению ДПФ $Z(m)$ комплексной последовательности $z(n)$ периода $N/2$ и некоторому (относительно небольшому) числу дополнительных вычислений, позволяющих найти по известному спектру $Z(m)$ спектры $F_0(m)$, $F_1(m)$ последовательностей $f(2n)$, $f(2n+1)$ и реконструировать полный спектр $F(m)$. В самом деле, такая возможность следует из равенств:

$$\begin{cases} 2F_0(m) = Z(m) + \overline{Z(-m)}, \\ 2F_1(m) = i(\overline{Z(-m)} - Z(m)), \\ F(m) = F_0(m) + w^m F_1(m). \end{cases} \quad (2.4)$$

Выделение из $Z(m)$ частичных спектров $F_0(m)$, $F_1(m)$ обеспечивается наличием в алгебре комплексных чисел $\mathbb{C}$ двух автоморфизмов (тождественного и комплексного сопряжения), действующих на $\mathbb{R}$ тождественно, причем переход к комплексно-сопряженному числу при стандартной машинной реализации не требует дополнительных арифметических действий.

В случае двумерного ДПФ с реализацией быстрого алгоритма в простейшей построчно-столбцовой форме:

$$F(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) w^{m_1 n_1 + m_2 n_2} = \sum_{n_1=0}^{N-1} w^{m_1 n_1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) w^{m_2 n_2}, \quad (2.5)$$

применение описанного выше алгоритма приема затруднительно из-за невещественности внутренних сумм в правой части соотношения (2.5). Другими словами, поле $\mathbb{C}$ имеет "слишком мало" автоморфизмов, позволяющих осуществить многократное совмещение по каждому из аргументов с возможностью последующего разделения спектров.

2.1 Двумерный БА ДПФ с совмещением в алгебре кватернионов

Естественным обобщением идеи комплексного совмещения является вложение преобразуемого вещественного d -мерного массива $f(n)$ ($n \in \mathbb{Z}^d$) в другие, отличные от поля $\mathbb{C}$, алгебры с достаточным числом тривиально реализуемых автоморфизмов.

В книге мы подробно анализируем только двумерные совмещенные алгоритмы, что объясняется широким использованием именно двумерного ДПФ в задачах обработки и анализа изображений, в компьютерной оптике и т.п.

Напомним, что алгебра $\mathbb{H}$ кватернионов определяется как четырехмерная $\mathbb{R}$ -алгебра:

$$\mathbb{H} = \{q = a + bi + cj + dk; a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \quad (2.6)$$

с определяющими соотношениями для умножений базисных элементов:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i j = -j i = k.$$

Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ канонически вкладывается в $\mathbb{H}$:

$$a + bi \rightarrow a + bi + 0 \cdot j + 0 \cdot k. \quad (2.7)$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$q = a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di) j. \quad (2.8)$$

Умножение кватерниона q общего вида на комплексное число $z = \alpha + \beta i$ в

кватернионной форме (2.7) требует шести вещественных умножений:

$$zq = ((\alpha - \beta)b + \alpha(a - b)) + (a(\alpha + \beta) - \alpha(a - b))i + \\ + ((\alpha - \beta)d + \alpha(c - d))j + (c(\alpha + \beta) - \alpha(c - d))k.$$

Отображения

$$\varepsilon_i : q \mapsto i^{-1} q i, \quad \varepsilon_j : q \mapsto j^{-1} q j, \\ \varepsilon_k : q \mapsto k^{-1} q k, \quad \varepsilon_o : q \mapsto q$$

являются автоморфизмами $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$, причем

$$\begin{cases} \varepsilon_0(q) = a + bi + cj + dk \\ \varepsilon_i(q) = a + bi - cj - dk \\ \varepsilon_j(q) = a - bi + cj - dk \\ \varepsilon_k(q) = a - bi - cj + dk \end{cases} \quad (2.9)$$

Система уравнений (2.9), рассматриваемая относительно a, b, c, d , разрешима при любых значениях левых частей и требует для решения только сложений и умножений на степени двойки:

$$\begin{cases} 4a = \varepsilon_0(q) + \varepsilon_i(q) + \varepsilon_j(q) + \varepsilon_k(q) \\ 4bi = \varepsilon_0(q) + \varepsilon_i(q) - \varepsilon_j(q) - \varepsilon_k(q) \\ 4cj = \varepsilon_0(q) - \varepsilon_i(q) + \varepsilon_j(q) - \varepsilon_k(q) \\ 4dk = \varepsilon_0(q) - \varepsilon_i(q) - \varepsilon_j(q) + \varepsilon_k(q) \end{cases} \quad (2.10)$$

Пусть $f(n_1, n_2)$ - вещественная N - периодическая по каждому аргументу функция, $w^{m/2}$. Преобразуем выражение для двумерного ДПФ (2.5) к виду:

$$F(m_1, m_2) = \sum_{a, b=0}^1 w^{am_1 + bm_2} S(m_1, m_2; a, b), \quad (2.11)$$

где

$$S(m_1, m_2; a, b) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1} x(n_1 + a, n_2 + b) \left(w^2\right)^{m_1 n_1 + m_2 n_2}. \quad (2.12)$$

Положим $f_{ab}(n_1, n_2) = f(2n_1 + a, 2n_2 + b)$ и введем функцию $q(n_1, n_2)$ со

значениями в алгебре $\mathbb{H}$:

$$f_{00}(n_1, n_2) + f_{01}(n_1, n_2)i + f_{10}(n_1, n_2)j + f_{11}(n_1, n_2)k = q(n_1, n_2). \quad (2.13)$$

Определим "полукватернионный спектр" $Q(m_1, m_2)$, равенством:

$$Q(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1} q(n_1, n_2) (w^2)^{m_1 n_1 + m_2 n_2}. \quad (2.14)$$

Для реконструкции $F(m_1, m_2)$ достаточно вычислить массив $Q(m_1, m_2)$ для $m_1, m_2 = 0, 1, \dots, N_1 - 1$, а затем с помощью (2.10) найти $x(n_1, n_2)$:

$$4S(m_1, m_2; 0, 0) = Q(m_1, m_2) + Q^i(m_1, m_2) + Q^j(m_1, m_2) + Q^k(m_1, m_2);$$

$$4iS(m_1, m_2; 0, 1) = Q(m_1, m_2) + Q^i(m_1, m_2) - Q^j(m_1, m_2) - Q^k(m_1, m_2);$$

$$4jS(m_1, m_2; 1, 0) = Q(m_1, m_2) - Q^i(m_1, m_2) + Q^j(m_1, m_2) - Q^k(m_1, m_2);$$

$$4kS(m_1, m_2; 1, 1) = Q(m_1, m_2) - Q^i(m_1, m_2) - Q^j(m_1, m_2) + Q^k(m_1, m_2),$$

где

$$Q^i(m_1, m_2) = \varepsilon_i(Q(m_1, m_2)), \quad Q^j(m_1, m_2) = \varepsilon_j(Q(-m_1, -m_2)),$$

$$Q^k(m_1, m_2) = \varepsilon_k(Q(-m_1, -m_2)),$$

и, наконец, выполнить $3(N_1 - 1)^2$ умножений на степени константы w в соотношении (2.11).

Таким образом, вычислительная сложность преобразований (2.11) и (2.14) определяется, в основном, сложностью кватернионного аналога двумерного БПФ. Различные реализации таких аналогов рассматривались в [18, 31].

2.2 БПФ с представлением данных в алгебре (2×2)-матриц

Идея двойного совмещения может быть реализована и в иной форме - при рассмотрении вложения значений преобразуемой последовательности в четырехмерную $\mathbb{R}$ -алгебру (2×2)-матриц $\mathbb{M}_2$ с базисом

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ изоморфно вкладывается в алгебру (2×2) -матриц $\mathbb{M}_2$:

$$a + b i \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим преобразование

$$\hat{\Psi}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} \Psi(n_1, n_2) (\mathbf{W}^2)^{m_1 n_1 + m_2 n_2}, \quad (2.15)$$

где

$$\hat{\Psi}(n_1, n_2) = \begin{pmatrix} f_{00}(n_1, n_2) & f_{01}(n_1, n_2) \\ f_{10}(n_1, n_2) & f_{11}(n_1, n_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix},$$

$$c = \cos(2\pi/N), \quad s = \sin(2\pi/N).$$

Умножение матрицы общего вида из $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ на матрицу $\mathbf{W}^k$ может быть реализовано с помощью шести вещественных умножений:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(c+s) - (\alpha+\beta)s & \alpha(c+s) + (\beta-\alpha)c \\ \gamma(c+s) - (\gamma+\delta)s & \gamma(c+s) + (\delta-\gamma)c \end{pmatrix}.$$

Поэтому мультипликативная сложность вычисления (2.15) такая же, как и (2.12).

Пусть

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^\tau = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \quad \mathbf{A}^\sigma = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}, \quad \mathbf{A}^\rho = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}.$$

При реконструкции $F(m_1, m_2)$ для разделения частичных спектров воспользуемся непосредственно проверяемыми матричными тождествами:

$$\mathbf{A}^\tau = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^\sigma = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^\rho = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{W}^\tau = \mathbf{W}^\sigma = \mathbf{W}^\rho = \mathbf{W}^{-1}.$$

Отображения

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^\tau, \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^\sigma, \mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^\rho$$

являются автоморфизмами $\mathbb{M}_2$. Справедливы также равенства:

$$\begin{cases} (\mathbf{R} + \mathbf{E})(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\rho) = 4\alpha \mathbf{D}_{11}, \\ (\mathbf{R} + \mathbf{E})(\mathbf{A}^\tau - \mathbf{A}^\sigma) = 4\beta \mathbf{D}_{11}, \\ (\mathbf{R} + \mathbf{E})(\mathbf{A}^\tau - \mathbf{A}^\sigma)\mathbf{T} = 4\gamma \mathbf{D}_{11}, \\ (\mathbf{R} + \mathbf{E})(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\rho)\mathbf{T} = 4\delta \mathbf{D}_{11}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Пользуясь соотношениями [\(2.16\)](#), при известном матричном спектре [\(2.15\)](#) нетрудно найти "частичные спектры"

$$F_{ab}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1-1} f_{ab}(n_1, n_2) \left(w^2 \right)^{m_1 n_1 + m_2 n_2}$$

из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} 4 F_{00}(m_1, m_2) &= \mathbf{e} \left(\hat{\Psi}(m_1, m_2) + \hat{\Psi}^\rho(-m_1, -m_2) \right) \mathbf{J}^T; \\ 4 F_{01}(m_1, m_2) &= \mathbf{e} \mathbf{T} \left(\hat{\Psi}^\tau(-m_1, -m_2) - \hat{\Psi}^\sigma(-m_1, -m_2) \right) \mathbf{J}^T; \\ 4 F_{10}(m_1, m_2) &= \mathbf{e} \left(\hat{\Psi}^\tau(-m_1, -m_2) - \hat{\Psi}^\sigma(-m_1, -m_2) \right) \mathbf{T} \mathbf{J}^T; \\ 4 F_{11}(m_1, m_2) &= \mathbf{e} \left(\hat{\Psi}(m_1, m_2) + \hat{\Psi}^\rho(-m_1, -m_2) \right)^\tau \mathbf{J}^T, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e} = (1, 0)$, $\mathbf{J} = (1, i)$, $\mathbf{J}^T$ - транспонированный вектор-столбец, подпоследовательности $f_{ab}(n_1, n_2)$ определены в предыдущем [разделе](#). Реконструкция полного спектра $F(m_1, m_2)$ осуществляется согласно [\(2.11\)](#).

2.3 Кватернионное двумерное ДПФ

Определение 2.1. Двумерным кватернионным спектром вещественного массива $f(n_1, n_2)$ размера $N \times N$ далее будем называть [\[20, 27\]](#) двумерный массив кватернионов

$$\tilde{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} w_1^{m_1 n_1} f(n_1, n_2) w_2^{m_2 n_2}, \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq N-1, \quad (2.17)$$

где $w_1 = \exp\left\{2\pi i / N\right\}, \quad w_2 = \exp\left\{2\pi j / N\right\}.$

Кватернионный спектр (2.17) связан с комплексным спектром Фурье

$$F(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{2N-1} f(n_1, n_2) w^{m_1 n_1 + m_2 n_2} \quad (2.18)$$

соотношением

$$F(m_1, m_2) = \langle \tilde{F}(m_1, m_2) \rangle \mathbf{L} \mathbf{I}, \quad (2.19)$$

где матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{I}$ имеют вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

а через $\langle \tilde{F}(m_1, m_2) \rangle$ для кватерниона

$$\tilde{F}(m_1, m_2) = \chi_0(m_1, m_2) + \chi_1(m_1, m_2) i + \chi_2(m_1, m_2) j + \chi_3(m_1, m_2) k$$

обозначен вектор его компонент

$$(\chi_0(m_1, m_2), \chi_1(m_1, m_2), \chi_2(m_1, m_2), \chi_3(m_1, m_2)).$$

Переход от кватернионного спектра (2.17) к комплексному спектру (2.18) осуществляется без дополнительных вещественных умножений и требует всего двух операций вещественного сложения на отсчет.

Далее приведены три способа декомпозиции кватернионного ДПФ (КДПФ), являющиеся аналогами различных схем алгоритмов двумерного комплексного БПФ.

2.3.1 Алгоритм КДПФ с декомпозицией по основанию 2

Пусть кватернионный спектр вещественного $(N \times N)$ -сигнала задан соотношением (2.17). По аналогии с редукцией одномерного ДПФ каждое из множеств индексов n_1, n_2 входного сигнала разбивается на подмножества четных и

нечетных индексов, при этом равенство (2.17) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(m_1, m_2) &= \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} w_1^{m_1 n_1} f(n_1, n_2) w_2^{m_2 n_2} = \\
 &= \sum_{a, b=0}^1 w_1^{am_1} \sum_{n_1, n_2=0}^{N/2-1} (w_1^2)^{m_1 n_1} f_{ab}(n_1, n_2) (w_2^2)^{m_2 n_2} w_2^{bm_2} = \\
 &= \sum_{a, b=0}^1 w_1^{am_1} F_{ab}(m_1, m_2) w_2^{bm_2},
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_{ab}(n_1, n_2) &= f(2n_1 + a, 2n_2 + b), \\
 \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) &= \sum_{n_1, n_2=0}^{N/2-1} (w_1^2)^{m_1 n_1} f_{ab}(n_1, n_2) (w_2^2)^{m_2 n_2}, \\
 0 \leq m_1, m_2 &\leq N/2 - 1.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Вычисление спектра для остальных значений пар (m_1, m_2) , лежащих вне области (2.21), производится без дополнительных умножений и может быть записано в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}(m_1, m_2) \\ \tilde{F}(m_1 + N/2, m_2) \\ \tilde{F}(m_1, m_2 + N/2) \\ \tilde{F}(m_1 + N/2, m_2 + N/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \tilde{F}_{00}(m_1, m_2) \\ w_1^{m_1} \tilde{F}_{10}(m_1, m_2) \\ \tilde{F}_{01}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \\ w_1^{m_1} \tilde{F}_{11}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Кроме того, умножения на множители $w_1^{m_1}$, $w_2^{m_2}$ достаточно выполнять только для фундаментальной области

$$\{0 \leq m_1, m_2 \leq N/4\} = \Omega_0.$$

Остальные значения спектра определяются с использованием автоморфизмов поля кватернионов (2.9) без дополнительных умножений. Действительно, пусть вычислены значения

$$w_1^{am_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) w_2^{bm_2} \quad \text{для } (m_1, m_2) \in \Omega_0, \quad \text{и} \quad \mu_1 = N/2 - m_1, \quad \mu_2 = N/2 - m_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} w_1^{a\mu_1} \tilde{F}_{ab}(\mu_1, m_2) w_2^{bm_2} &= (-1)^a \varepsilon_j \left(w_1^{am_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) w_2^{bm_2} \right), \\ w_1^{am_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, \mu_2) w_2^{b\mu_2} &= \varepsilon_i \left(w_1^{am_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) w_2^{bm_2} \right) (-1)^b, \\ w_1^{a\mu_1} \tilde{F}_{ab}(\mu_1, \mu_2) w_2^{b\mu_2} &= (-1)^a \varepsilon_k \left(w_1^{am_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) w_2^{bm_2} \right) (-1)^b. \end{aligned}$$

Окончательное вычисление значений кватернионного спектра $\tilde{F}(m_1, m_2)$ производится в следующем порядке. Находятся значения суммы в (2.20) для $(m_1, m_2) \in \Omega_0$. По формуле (2.22) вычисляются элементы спектра в областях, отличающихся от Ω_0 сдвигом на $N/2$ по каждой из координат. Наконец, остальные области заполняются на основании следующих свойств КДПФ вещественного сигнала:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(N - m_1, m_2) &= \varepsilon_j \left(\tilde{F}(m_1, m_2) \right), \\ \tilde{F}(m_1, N - m_2) &= \varepsilon_i \left(\tilde{F}(m_1, m_2) \right), \\ \tilde{F}(N - m_1, N - m_2) &= \varepsilon_k \left(\tilde{F}(m_1, m_2) \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Схема заполнения кватернионного спектра по формулам (2.20) - (2.23) приведена на рисунке 2.1.

Таким образом, для оценок вычислительной сложности КДПФ по основанию 2 справедливы рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} M(N \times N) &= 4M\left(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}\right) + 6\frac{N^2}{16} 2 + 9\frac{N^2}{16}, \\ A(N \times N) &= 4A\left(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}\right) + 6\frac{N^2}{16} 2 + 15\frac{N^2}{16} + 8\frac{N^2}{16} 4. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Отсюда следуют оценки вычислительной сложности описанного алгоритма КДПФ:

$$M(N \times N) \leq \frac{21}{16} N^2 \log_2 N - \frac{21}{16} N^2, \quad A(N \times N) \leq \frac{59}{16} N^2 \log_2 N - \frac{27}{16} N^2. \quad (2.25)$$

2.3.2 Алгоритм КДПФ с декомпозицией по основанию 4

Рассмотрим алгоритм КДПФ вещественного сигнала объемом $N \times N$ ($N = 4^r$) с декомпозицией по основанию 4. Пусть в (2.17) множество индексов n_1, n_2 разбивается на 16 подмножеств в зависимости от остатков $n_1 \pmod{4}$, $n_2 \pmod{4}$.

Тогда равенство (2.17) принимает вид:

$$\tilde{F}(m_1, m_2) = \sum_{a,b=0}^3 w_1^{am_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) w_2^{bm_2}, \quad (2.26)$$

где

$$\tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N/4-1} \left(w_1^4\right)^{m_1 n_1} f_{ab}(n_1, n_2) \left(w_2^4\right)^{m_2 n_2}, \quad (2.27)$$

$$f_{ab}(n_1, n_2) = f(4n_1 + a, 4n_2 + b), \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq N/4 - 1.$$

Значения спектра для остальных пар (m_1, m_2) , лежащих вне области (2.27), вычисляются без дополнительных умножений, а именно:

$$\tilde{F}\left(m_1 + r\frac{N}{4}, m_2 + p\frac{N}{4}\right) = \sum_{a,b=0}^3 i^{ar} w_1^{am_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) w_2^{bm_2} j^{bp}, \quad r, p = 0, 1, 2, 3. \quad (2.28)$$

Умножения на степени базисных элементов i и j тривиальны, они сводятся к перестановкам компонент кватернионов и/или смене знака компонент.

Кроме того, при вещественном входном сигнале умножения на фазовые множители $w_1^{am_1}$, $w_2^{bm_2}$ достаточно производить только в фундаментальной области

$$\left\{0 \leq m_1, m_2 \leq N/8\right\} = \Omega_1.$$

Действительно, пусть для $(m_1, m_2) \in \Omega_1$ найдены значения

$$w_1^{am_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) w_2^{bm_2},$$

и на основании равенства (2.26) вычислены значения кватернионного спектра $\tilde{F}(m_1, m_2)$. Тогда значения $\tilde{F}(m_1, m_2)$ в областях, отличающихся от Ω_1 аддитивными сдвигами на $N/4$, вычисляются по формуле (2.28), а остальные находятся на основании симметрий кватернионного спектра вещественного сигнала (2.23). Схема заполнения кватернионного спектра по формулам (2.25) - (2.28) приведена на рисунке 2.2.

Оценки вычислительной сложности такого алгоритма определяются из соотношений:

$$M(N \times N) = 16M\left(\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}\right) + 6\frac{N^2}{64}6 + 9\frac{N^2}{64}9,$$

$$A(N \times N) = 16A\left(\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}\right) + 6\frac{N^2}{64}6 + 15\frac{N^2}{64}9 + 64\frac{N^2}{64}4$$

и равны:

$$M(N \times N) \leq \frac{117}{128} N^2 \log_2 N - \frac{117}{64} N^2, \quad A(N \times N) \leq \frac{427}{128} N^2 \log_2 N - \frac{235}{64} N^2. \quad (2.29)$$

2.3.3 Алгоритм КДПФ с расщеплением основания

Рассмотрим еще одну схему декомпозиции кватернионного спектра, в которой ДПФ объемом $(N \times N)$ сводится к ДПФ объемом $(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2})$ для элементов входного массива с четными индексами и двенадцати ДПФ объемом $(\frac{N}{4} \times \frac{N}{4})$ для элементов входного массива, имеющих хотя бы один нечетный индекс. Пусть

$$A = \{(0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)\},$$

тогда

$$\begin{aligned} \tilde{F}(m_1, m_2) = & \sum_{n_1, n_2=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(w_1^2\right)^{m_1 n_1} f(2n_1, 2n_2) \left(w_2^2\right)^{m_2 n_2} + \\ & + \sum_{(a,b) \in A} w_1^{a m_1} \sum_{n_1, n_2=0}^{\frac{N}{4}-1} \left(w_1^4\right)^{m_1 n_1} f_{ab}(n_1, n_2) \left(w_2^4\right)^{m_2 n_2} w_2^{b m_2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

При этом, по-прежнему, умножения на множители $w_1^{m_1}$, $w_2^{m_2}$ достаточно выполнять для области Ω_1 .

Рекуррентное соотношение для оценки мультипликативной сложности описанного алгоритма в этом случае имеет вид:

$$M(N \times N) = M\left(\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}\right) + 12M\left(\frac{N}{4} \times \frac{N}{4}\right) + 6\frac{N^2}{64}4 + 9\frac{N^2}{64}8 \quad (2.31)$$

откуда следует оценка для $M(N \times N)$:

$$M(N \times N) = \frac{6}{7} N^2 \log_2 N + O(N^2). \quad (2.32)$$

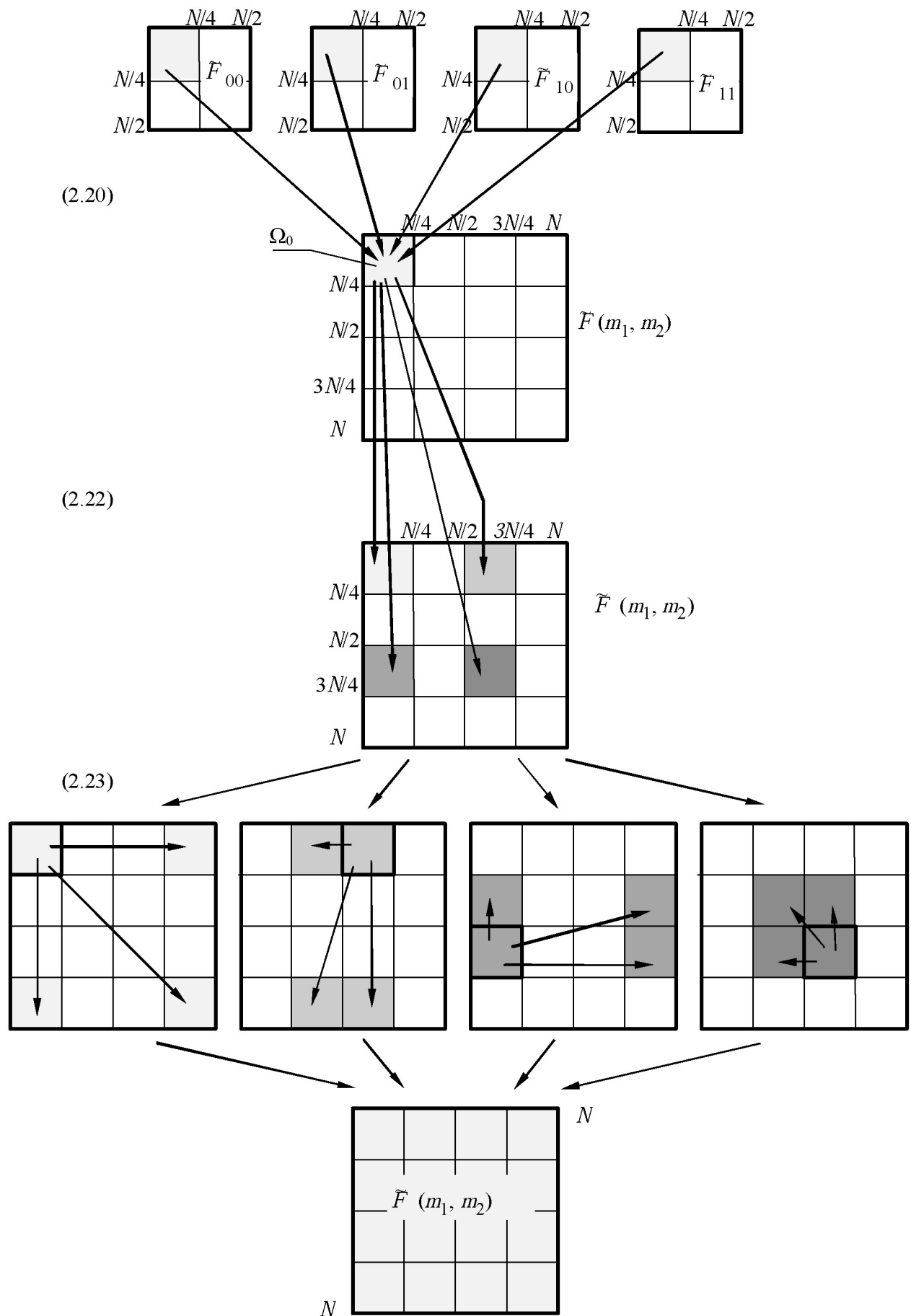


Рисунок 2.1 - Порядок заполнения значений кватернионного спектра в алгоритме КДПФ по основанию 2

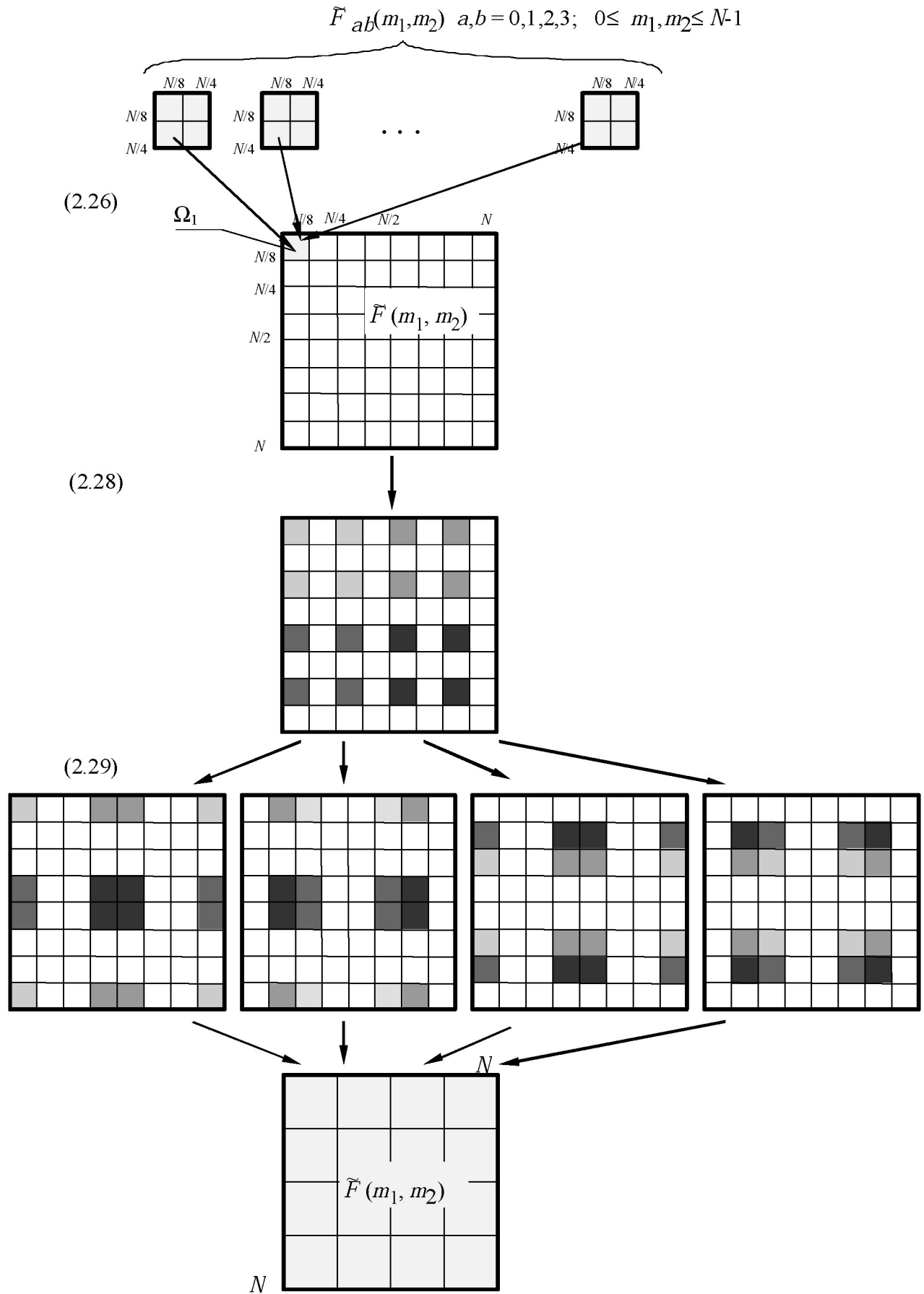


Рисунок 2.2 - Порядок заполнения значений кватернионного спектра в алгоритме КДПФ по основанию 4

2.4 Совмещенные алгоритмы дискретного косинусного преобразования

Косинусное преобразование (см. пример 1.3) является одним из основных дискретных преобразований, используемых в цифровой обработке изображений. Так, на нем основаны известные методы кодирования изображений (например, JPEG [44]); методы восстановления и фильтрации (например, метод гибридного спектрально-рекуррентного восстановления изображений [5]), методы извлечения признаков [1]. Такое широкое применение дискретного косинусного преобразования (ДКП) обусловлено целым рядом причин.

Во-первых, базисные функции ДКП хорошо аппроксимируют собственные функции преобразования Карунена-Лоэва для широкого класса стационарных случайных процессов, то есть позволяют описывать сигнал с достаточно малой среднеквадратичной погрешностью минимальным числом спектральных компонент

$$\left\| \xi - \sum_{k=1}^L \xi_k \psi_k \right\| \rightarrow \min ;$$

во-вторых, ДКП входит как составная часть в некоторые эффективные алгоритмы дискретного преобразования Фурье (ДПФ) (например, алгоритм Капорина-Уэнга [6]);

в-третьих, ДКП обладает рядом других полезных свойств, позволяющих, например, избежать краевых эффектов при блочном кодировании изображений.

Хорошо известен способ вычисления ДКП, основанный на его сведении к ДПФ вещественной последовательности двойной длины [1] или при использовании совмещенных алгоритмов [23] к ДПФ комплексной последовательности той же длины.

Описанный в [1] быстрый алгоритм сводит (ненормированное) ДКП

$$\hat{f}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos \left(\pi \frac{(n+1/2)m}{N} \right) \quad (2.33)$$

к вычислению ДПФ вещественной последовательности длины $2N$:

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2} \left(w^{m/2} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w^{mn} + w^{-m/2} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w^{-mn} \right) = \frac{1}{2} w^{m/2} \sum_{k=0}^{2N-1} g(k) w^{mk}, \quad (2.34)$$

где $w = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{2N} \right\}$, $g(k)$ - вещественная $2N$ -периодическая последовательность,

полученная четным продолжением $f(n)$:

$$g(k) = \begin{cases} f(k) & \text{при } 0 \leq k \leq N-1 \\ f(2N-k-1) & \text{при } N \leq k \leq 2N-1 \end{cases} . \quad (2.35)$$

Сложность такого алгоритма ДКП равна:

$$M_{ДКП}(N) = M_{ДПФ}(2N) + 3N, \quad A_{ДКП}(N) = A_{ДПФ}(2N) + 3N, \quad (2.36)$$

где $M_{ДПФ}(2N)$, $A_{ДПФ}(2N)$ - оценки сложности ДПФ вещественной последовательности двойной длины.

2.4.1 Алгоритм одномерного ДКП четной длины

Пусть вещественная последовательность $g(k)$ длины $2N$ получена четным продолжением исходной последовательности $f(n)$ по формуле (2.35), и ДКП связано с ДПФ соотношением (2.34).

Для вспомогательного ДПФ

$$G(m) = \sum_{k=0}^{2N-1} g(k) w^{km} \quad (2.37)$$

длиной $2N$ проведем один шаг стандартной декомпозиции Кули-Тьюки (1.12):

$$G(m) = \sum_{k=0}^{N-1} g(2k) w^{2km} + w^m \sum_{k=0}^{N-1} g(2k+1) w^{2km} \quad (2.38)$$

Из (2.35) следует, что последовательности четных $g(2k)$ и нечетных $g(2k+1)$ отсчетов связаны между собой соотношением:

$$g(2k+1) = g(2N - (2k+1) - 1) = g(2(N-k-1)) = g(2l) \quad \text{при } l = N-k-1 .$$

Пусть

$$\tilde{g}(m) = \sum_{k=0}^{N-1} g(2k) w^{2km} ,$$

тогда

$$w^m \sum_{k=0}^{N-1} g(2k+1) w^{2km} = w^m \sum_{l=0}^{N-1} g(2l) w^{2(N-l-1)m} = w^{-m} \sum_{l=0}^{N-1} g(2l) w^{-2lm} = \overline{w^m \tilde{g}(m)} . \quad (2.39)$$

Из (2.38) и (2.39) следует:

$$G(m) = \tilde{g}(m) + \overline{w^m \tilde{g}(m)} . \quad (2.40)$$

Тогда равенство (2.34) с учетом (2.38), (2.39) примет вид:

$$\hat{f}(m) = \frac{1}{2} w^{m/2} \left(\tilde{g}(m) + \overline{w^m \tilde{g}(m)} \right) = \frac{1}{2} \left(w^{m/2} \tilde{g}(m) + \overline{w^{m/2} \tilde{g}(m)} \right) = \operatorname{Re} \left\{ w^{m/2} \tilde{g}(m) \right\} , \quad (2.41)$$

где $\tilde{g}(m)$ - ДПФ вещественного сигнала длины N , $0 \leq m \leq N-1$.

Из соотношения (2.41) следует, что при выполнении комплексных умножений на $w^{m/2}$ достаточно вычислять только действительную часть произведения, что потребует двух умножений и одного сложения на отсчет:

$$\operatorname{Re} \{ (a + ib)(\mu + i\nu) \} = a\mu - b\nu . \quad (2.42)$$

Таким образом, ДКП сведено к ДПФ вещественного сигнала той же длины, $2N$ дополнительным умножениям и N сложениям. Обобщенная схема изложенного алгоритма приведена на рисунке 2.3.

Мультипликативная и аддитивная сложности описанного алгоритма вычисления ДКП равны:

$$M_{ДКП}(N) = M_{ДПФ}(N) + 2N , \quad A_{ДКП}(N) = A_{ДПФ}(N) + N . \quad (2.43)$$

где $M_{ДПФ}(N)$, $A_{ДПФ}(N)$ - оценки сложности ДПФ вещественной последовательности той же длины N .



Рисунок 2.3 - Обобщенная схема алгоритма ДКП

2.4.2 Алгоритм двумерного ДКП четной длины

Пусть $f(n_1, n_2)$ - входной вещественный сигнал объемом $N \times N$,
 $w = \exp\{2\pi i / 2N\}$ - корень степени $2N$ из единицы, вспомогательный сигнал $g(k_1, k_2)$
связан с $f(n_1, n_2)$ соотношениями

$$g(k_1, k_2) = \begin{cases} f(k_1, k_2) & \text{при } 0 \leq k_1 \leq N-1; \quad 0 \leq k_2 \leq N-1; \\ f(2N - k_1 - 1, k_2) & \text{при } N \leq k_1 \leq 2N-1; \quad 0 \leq k_2 \leq N-1; \\ f(k_1, 2N - k_2 - 1) & \text{при } 0 \leq k_1 \leq N-1; \quad N \leq k_2 \leq 2N-1; \\ f(2N - k_1 - 1, 2N - k_2 - 1) & \text{при } N \leq k_1 \leq 2N-1; \quad N \leq k_2 \leq 2N-1. \end{cases} \quad (2.44)$$

Принцип построения такой вспомогательной функции проиллюстрирован на рисунке 2.4. На рисунке 2.4а показан пример входного сигнала $f(n_1, n_2)$, заданного в области $0 \leq n_1, n_2 < N$. Вспомогательный сигнал $g(k_1, k_2)$ совпадает с $f(n_1, n_2)$ в области $0 \leq k_1, k_2 < N$ и симметричен относительно прямых $k_1 = \frac{(N+1)}{2}$ и $k_2 = \frac{(N+1)}{2}$ (рисунок 2.4б). На рисунке 2.4в приведен пример переупорядочивания индексов при формировании вспомогательного сигнала при $N = 4$.

Тогда для двумерного ДКП справедливо соотношение, аналогичное (2.34), связывающее ДКП с двумерным ДПФ (2.18) вещественной последовательности:

$$\hat{f}(m_1, m_2) = \frac{1}{4} w^{(m_1+m_2)/2} \left(\sum_{k_1, k_2=0}^{2N-1} g(k_1, k_2) w^{m_1 k_1 + m_2 k_2} \right) \quad (2.45)$$

На основании соотношения (2.19) вместо двумерного ДПФ

$$G(m_1, m_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{2N-1} g(k_1, k_2) w^{m_1 k_1 + m_2 k_2}$$

в равенстве (2.45) можно использовать КДПФ соответствующего размера

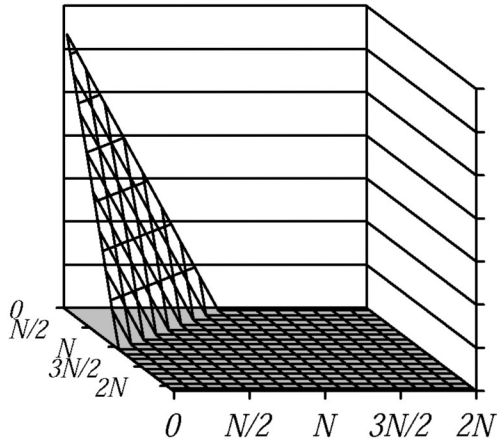
$$\tilde{G}(m_1, m_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{2N-1} w_1^{m_1 k_1} g(k_1, k_2) w_2^{m_2 k_2}, \quad (2.46)$$

где $w_1 = \exp\{2\pi i / 2N\}$, $w_2 = \exp\{2\pi i / 2N\}$. Учет симметрий сигнала $g(k_1, k_2)$

позволяет находить значения кватернионного спектра $\tilde{G}(m_1, m_2)$ по следующей схеме.

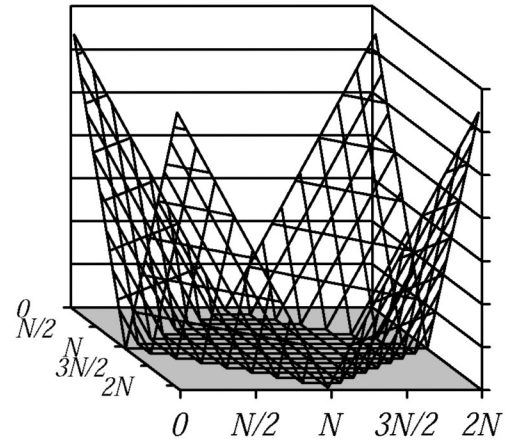
а)

$$f(n_1, n_2)$$



б)

$$g(k_1, k_2)$$



в)

	0	1	2	3	4	5	6	7	k_2
0	$f(0,0)$	$f(0,1)$	$f(0,2)$	$f(0,3)$	$f(0,3)$	$f(0,2)$	$f(0,1)$	$f(0,0)$	
1	$f(1,0)$	$f(1,1)$	$f(1,2)$	$f(1,3)$	$f(1,3)$	$f(1,2)$	$f(1,1)$	$f(1,0)$	
2	$f(2,0)$	$f(2,1)$	$f(2,2)$	$f(2,3)$	$f(2,3)$	$f(2,2)$	$f(2,1)$	$f(2,0)$	
3	$f(3,0)$	$f(3,1)$	$f(3,2)$	$f(3,3)$	$f(3,3)$	$f(3,2)$	$f(3,1)$	$f(3,0)$	
4	$f(3,0)$	$f(3,1)$	$f(3,2)$	$f(3,3)$	$f(3,3)$	$f(3,2)$	$f(3,1)$	$f(3,0)$	
5	$f(2,0)$	$f(2,1)$	$f(2,2)$	$f(2,3)$	$f(2,3)$	$f(2,2)$	$f(2,1)$	$f(2,0)$	
6	$f(1,0)$	$f(1,1)$	$f(1,2)$	$f(1,3)$	$f(1,3)$	$f(1,2)$	$f(1,1)$	$f(1,0)$	
7	$f(0,0)$	$f(0,1)$	$f(0,2)$	$f(0,3)$	$f(0,3)$	$f(0,2)$	$f(0,1)$	$f(0,0)$	
k_1									$g(k_1, k_2)$

Рисунок 2.4 - Построение вспомогательного сигнала по формуле (2.44):
а) пример исходного сигнала $f(n_1, n_2)$; б) вспомогательный сигнал $g(k_1, k_2)$;
в) соответствие индексов исходного и вспомогательного сигнала при $N=4$

Пусть

$$\tilde{g}(m_1, m_2) = \sum_{k_1, k_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 k_1} g(2k_1, 2k_2) w_2^{2m_2 k_2} .$$

После одного шага декомпозиции по основанию 2, соотношение (2.46) для КДПФ примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(m_1, m_2) = & \sum_{k_1, k_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 k_1} g(2k_1, 2k_2) w_2^{2m_2 k_2} + \\ & + w_1^{m_1} \sum_{k_1, k_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 k_1} g(2k_1 + 1, 2k_2) w_2^{2m_2 k_2} + \\ & + \sum_{k_1, k_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 k_1} g(2k_1, 2k_2 + 1) w_2^{2m_2 k_2} w_2^{m_2} + \\ & + w_1^{m_1} \sum_{k_1, k_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 k_1} g(2k_1 + 1, 2k_2 + 1) w_2^{2m_2 k_2} w_2^{m_2} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Так как из соотношения (2.44) следует

$$\begin{aligned} g(2k_1 + 1, 2k_2) &= g(2l_1, 2l_2) \quad \text{при} \quad l_1 = N - k_1 - 1, \quad l_2 = k_2 , \\ g(2k_1, 2k_2 + 1) &= g(2l_1, 2l_2) \quad \text{при} \quad l_1 = k_1, \quad l_2 = N - k_2 - 1 , \\ g(2k_1 + 1, 2k_2 + 1) &= g(2l_1, 2l_2) \quad \text{при} \quad l_1 = N - k_1 - 1, \quad l_2 = N - k_2 - 1 , \end{aligned}$$

то вторая сумма в (2.47) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} w_1^{m_1} \sum_{k_1, k_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 k_1} g(2k_1 + 1, 2k_2) w_2^{2m_2 k_2} = \\ = w_1^{m_1} \sum_{l_1, l_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 (N-l_1-1)} g(2l_1, 2l_2) w_2^{2m_2 l_2} = w_1^{-m_1} \sum_{l_1, l_2=0}^{N-1} w_1^{-2m_1 l_1} g(2l_1, 2l_2) w_2^{2m_2 l_2} = \\ = \varepsilon_j \left\{ w_1^{m_1} \sum_{l_1, l_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 l_1} g(2l_1, 2l_2) w_2^{2m_2 l_2} \right\} = \varepsilon_j \left\{ w_1^{m_1} \tilde{g}(m_1, m_2) \right\} . \end{aligned}$$

Аналогично, третья и четвертая сумма могут быть представлены как:

$$\sum_{k_1, k_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 k_1} g(2k_1, 2k_2 + 1) w_2^{2m_2 k_2} w_2^{m_2} = \varepsilon_i \left\{ \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \right\}$$

$$w_1^{m_1} \sum_{k_1, k_2=0}^{N-1} w_1^{2m_1 k_1} g(2k_1+1, 2k_2+1) w_2^{2m_2 k_2} w_2^{m_2} = \varepsilon_k \left\{ w_1^{m_1} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \right\}.$$

Таким образом, кватернионные спектры $\tilde{G}(m_1, m_2)$ и $\tilde{g}(m_1, m_2)$ связаны между собой соотношением:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(m_1, m_2) = & \varepsilon_o \left\{ \tilde{g}(m_1, m_2) \right\} + \varepsilon_j \left\{ w_1^{m_1} \tilde{g}(m_1, m_2) \right\} + \\ & + \varepsilon_i \left\{ \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \right\} + \varepsilon_k \left\{ w_1^{m_1} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \right\}, \end{aligned}$$

где ε_o , ε_i , ε_j , ε_k - автоморфизмы алгебры кватернионов, реализация действий которых сводится к смене знака части компонент в кватернионном представлении.

Учитывая, что $\hat{g}(m_1, m_2) = \tilde{G}(m_1, m_2) \mathbf{LI}$ (см. (2.19)), равенство (2.45) может быть переписано в форме:

$$\begin{aligned} \hat{g}(m_1, m_2) = & \frac{1}{4} w^{(m_1+m_2)/2} \left(\varepsilon_o \left\{ \tilde{g}(m_1, m_2) \right\} + \varepsilon_j \left\{ w_1^{m_1} \tilde{g}(m_1, m_2) \right\} + \right. \\ & \left. + \varepsilon_i \left\{ \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \right\} + \varepsilon_k \left\{ w_1^{m_1} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \right\} \right) \mathbf{LI}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Отметим, что оператор $A = \mathbf{LI}$ коммутирует с оператором умножения на степени w . Действительно, пусть A есть линейный оператор $A: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, такой что

$$A(1) = 1; \quad A(i) = i; \quad A(j) = i; \quad A(k) = -1, \quad (2.49)$$

$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ - произвольный кватернион, $w_1 = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}_1$ есть i -кватернион, $w_2 = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}_2$ есть j -кватернион. Вычисляя непосредственно произведение кватернионов указанного вида, получим

$$\begin{aligned} w_1 q w_2 = & (\alpha a \gamma - \beta b \gamma - \alpha c \delta + \beta d \delta) + \\ & + (\beta a \gamma + \alpha b \gamma - \beta c \delta - \alpha d \delta) i + \\ & + (\alpha a \delta - \beta b \delta + \alpha c \gamma - \beta d \gamma) j + \\ & + (\beta a \delta + \alpha b \delta + \beta c \gamma + \alpha d \gamma) k. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Тогда, из соотношений (2.49), (2.50) следует:

$$\begin{aligned} A(w_1 q w_2) = & [(\alpha a \gamma - \beta b \gamma - \alpha c \delta + \beta d \delta) - (\beta a \delta + \alpha b \delta + \beta c \gamma + \alpha d \gamma)] \\ & + [(\beta a \gamma + \alpha b \gamma - \beta c \delta - \alpha d \delta) + (\alpha a \delta - \beta b \delta + \alpha c \gamma - \beta d \gamma)] i. \end{aligned}$$

С другой стороны, произведение трех комплексных чисел

$$A(w_1) = \alpha + \beta i, \quad A(w_2) = \gamma + \delta i, \quad A(q) = (a - d) + (b + c)i$$

также представляется в форме:

$$A(w_1) A(q) A(w_2) = \left[(\alpha a \gamma - \beta b \gamma - \alpha c \delta + \beta d \delta) - (\beta a \delta + \alpha b \delta + \beta c \gamma + \alpha d \gamma) \right] + \left[(\beta a \gamma + \alpha b \gamma - \beta c \delta - \alpha d \delta) + (\alpha a \delta - \beta b \delta + \alpha c \gamma - \beta d \gamma) \right] i.$$

Значит справедливо соотношение

$$A(w_1 q w_2) = A(w_1) A(q) A(w_2).$$

Поэтому в соотношении (2.48) проектирование кватернионов в поле комплексных чисел посредством оператора **LI** может быть выполнено после умножений на степени w_1 и w_2 , следовательно, справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \hat{f}(m_1, m_2) &= \frac{1}{4} \left(w_1^{m_1/2} \left\{ \varepsilon_o \{ \tilde{g}(m_1, m_2) \} + \varepsilon_j \left\{ w_1^{m_1} \tilde{g}(m_1, m_2) \right\} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon_i \left\{ \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \right\} + \varepsilon_k \left\{ w_1^{m_1} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2} \right\} \right\} w_2^{m_2/2} \right) \mathbf{LI} = \\ &= \frac{1}{4} \left(\varepsilon_o \left\{ w_1^{m_1/2} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2/2} \right\} + \varepsilon_j \left\{ w_1^{m_1/2} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2/2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_i \left\{ w_1^{m_1/2} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2/2} \right\} + \varepsilon_k \left\{ w_1^{m_1/2} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2/2} \right\} \right) \mathbf{LI}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства легко следует, что:

$$\hat{f}(m_1, m_2) = \operatorname{Re} \left\{ w_1^{m_1/2} \tilde{g}(m_1, m_2) w_2^{m_2/2} \right\}. \quad (2.51)$$

Из (2.50) следует равенство:

$$\operatorname{Re} \{ w_1 q w_2 \} = \alpha \gamma a - \beta \gamma b - \alpha \delta c + \beta \delta d.$$

Поэтому вычисление двумерного ДКП отличается от вычисления КДПФ того же объема тремя операциями сложения и четырьмя операциями умножения на отсчет входного массива, необходимыми для выполнения дополнительных умножений на степени w_1, w_2 , одновременно со взятием вещественной части в (2.51) (мы, как обычно, предполагаем, что произведения $\alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\delta$ и $\beta\delta$ вычислены заранее, так как в рассматриваемом случае они представляют собой константы - значения базисных функций). Следовательно, оценки сложности описанного алгоритма ДКП имеют вид:

$$\begin{aligned}
 M_{ДКП} (N \times N) &= M_{КДПФ} (N \times N) + 4N^2, \\
 A_{ДКП} (N \times N) &= A_{КДПФ} (N \times N) + 3N^2,
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

где $M_{КДПФ} (N \times N)$, $A_{КДПФ} (N \times N)$ - оценки сложности используемого алгоритма КДПФ при вещественном входном сигнале.

На рисунке [2.5](#) приведена обобщенная схема описанного алгоритма ДКП.

В таблице [2.1](#) даны оценки сложности разработанного алгоритма при использовании алгоритмов КДПФ, описанных в разделе [2.3](#).

Таблица 2.1 - Оценки сложности двумерного ДКП

Алгоритм КДПФ	Оценки сложности КДПФ	Оценки сложности ДДКП
по основанию 2	$M_{КДПФ} (N \times N) \leq \frac{21N^2}{16} \log_2 N - \frac{21N^2}{16}$ $A_{КДПФ} (N \times N) \leq \frac{59N^2}{16} \log_2 N - \frac{27N^2}{16}$	$M_{ДДКП} (N \times N) \leq \frac{21N^2}{16} \log_2 N + \frac{43N^2}{16}$ $A_{ДДКП} (N \times N) \leq \frac{59N^2}{16} \log_2 N + \frac{21N^2}{16}$
по основанию 4	$M_{КДПФ} (N \times N) \leq \frac{117N^2}{128} \log_2 N - \frac{117N^2}{64}$ $A_{КДПФ} (N \times N) \leq \frac{427N^2}{128} \log_2 N - \frac{235N^2}{64}$	$M_{ДДКП} (N \times N) \leq \frac{117N^2}{128} \log_2 N + \frac{139N^2}{64}$ $A_{ДДКП} (N \times N) \leq \frac{427N^2}{128} \log_2 N - \frac{133N^2}{64}$



Рисунок 2.5 - Обобщенная схема двумерного ДКП при четном размере блока.

3 БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ДОП ПРИ СПЕЦИАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДАННЫХ

3.1 Представление данных в круговых кодах

3.1.1 Декомпозиция Кули-Тьюки "по основанию p "

Пусть $N = p^r$, преобразование входной последовательности $f(n)$ определено соотношением (1.13). Тогда при $m = 0, 1, \dots, N/p - 1$ спектр $F(m)$ может быть представлен в виде:

$$\begin{pmatrix} F(m) \\ F\left(m + \frac{N}{p}\right) \\ F\left(m + 2\frac{N}{p}\right) \\ \dots \\ F\left(m + (p-1)\frac{N}{p}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma & \dots & \gamma^{p-1} \\ 1 & \gamma^2 & \dots & \gamma^{2(p-1)} \\ & & \dots & \\ 1 & \gamma^{p-1} & \dots & \gamma^{(p-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(m) \\ w^m F_1(m) \\ w^{2m} F_2(m) \\ \dots \\ w^{(p-1)m} F_{p-1}(m) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где $F_j(m)$ ($j = 0, 1, \dots, p-1$) есть ДПФ длиной N/p :

$$F_j(m) = \sum_{n=0}^{N/p-1} f(pn + j) \left(w^p\right)^{mn}, \quad (3.2)$$

$w = \exp\left\{2\pi i / N\right\}$, $\gamma = \exp\left\{2\pi i / p\right\}$ - первообразные корни из единицы степени N и p соответственно.

Равенства (3.1), (3.2) сводят вычисление ДПФ длиной N к вычислению p раз ДПФ длиной N/p с последующей последовательной редукцией к вычислению одноточечных преобразований. Спецификой случая $N = p^r$ при $p \neq 2, 4$ является наличие в правой части (2.36) умножений на степени константы γ , что увеличивает вычислительную сложность алгоритма по сравнению с БПФ по основанию 2 и 4 [2, 17], где аналогичные умножения тривиальны (умножение на $\pm 1, \pm i$).

В работе [29] предложено специальное представление данных (значений преобразуемого сигнала $f(n)$ и комплексных параметров) в, так называемых, γ -

кодах, которое позволяет сделать эти умножения тривиальными.

Пусть $\gamma = \exp\left\{2\pi i/p\right\}$ - первообразный комплексный корень степени p из единицы. Тогда для комплексного числа c наряду с обычной алгебраической формой представления $c = a + bi$ возможна и форма

$$c = c_1\gamma + c_2\gamma^2 + \dots + c_{p-1}\gamma^{p-1} = a + bi, \quad (3.3)$$

где вещественные $c_1, \dots, c_{p-1}$ связаны с вещественными a, b соотношениями

$$\begin{cases} a = \sum_{k=1}^{p-1} c_k \cos 2\pi k/p, \\ b = \sum_{k=1}^{p-1} c_k \sin 2\pi k/p. \end{cases}$$

Упорядоченный набор из $(p-1)$ числа $(c_1, \dots, c_{p-1})$, ассоциированный с представлением c в форме (3.3), будем называть γ -кодом числа z .

Арифметические действия над комплексными числами индуцируют правила действий над кодами. Сложение чисел в γ -кодах производится покомпонентно, умножение чисел в γ -кодах сводится к нахождению циклической свертки γ -кодов. Умножения на $\gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{p-1}$ выполняются с помощью γ -кодов без вещественных умножений и сводятся лишь к смене знака, суммированию и перестановке части компонент кода [29].

Так как вычисление циклической свертки произвольной длины есть типичная (и непростая) задача цифровой обработки сигналов, то в настоящей главе мы ограничиваемся рассмотрением случая $p=3$, для которого переход к γ -кодам наиболее эффективен и нагляден.

3.2 Алгоритмы одномерного ДПФ при длине преобразования $N=3^k$

Пусть $p=3$, $N=3^k$,

$$\gamma = \exp\left(2\pi i/3\right) = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}),$$

тогда равенство (3.3) примет вид (см. рисунок 3.1):

$$c = a + bi = x\gamma + y\bar{\gamma},$$

где

$$x = \left(\frac{b}{\sqrt{3}} \right) - a, \quad y = \left(-\frac{b}{\sqrt{3}} \right) - a.$$

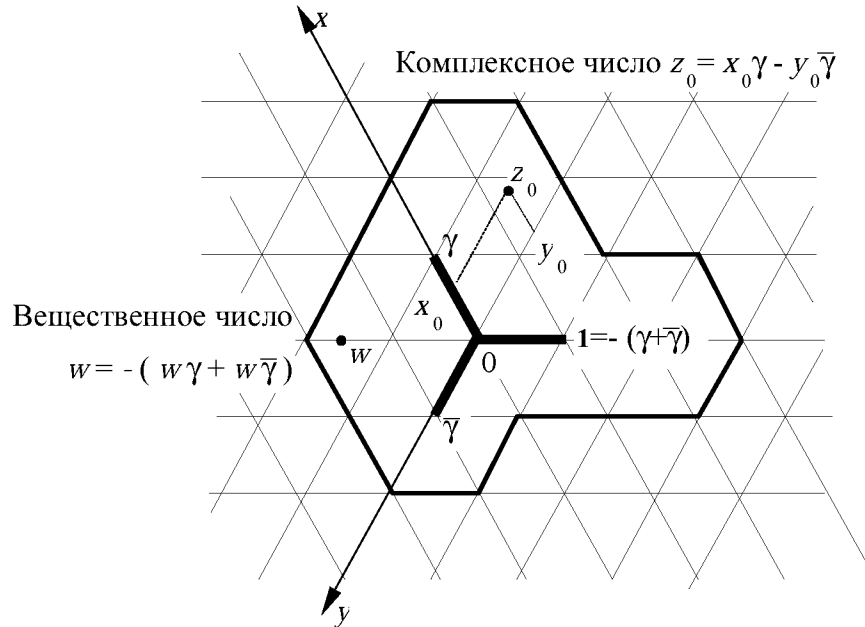


Рисунок 3.1 - Представление комплексных чисел в γ -кодах

Арифметические операции над кодами определяются равенствами:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), \quad (3.4)$$

$$(x, y) \cdot (u, v) = ((y - x)(v - u) - xu, (y - x)(v - u) - yv).$$

Поэтому сложность операций сложения и умножения в кодах совпадает со сложностью сложения и умножения комплексных чисел, а именно, сложение в кодах реализуется при помощи двух вещественных сложений, умножение в кодах реализуется через три вещественных умножения и три вещественных сложения (как обычно, считается, что сложения компонент кода базисных функций выполнены заранее).

Умножение на числа γ и $\bar{\gamma}$, имеющие коды $(1, 0)$ и $(0, 1)$, соответственно, определяется равенствами:

$$\begin{aligned} (1, 0) \cdot (u, v) &= (-v, u - v) \\ (0, 1) \cdot (u, v) &= (v - u, -u) \end{aligned}$$

и не содержит нетривиальных вещественных умножений.

Этот факт позволяет снизить вычислительную сложность алгоритма БПФ именно благодаря простой реализации умножений на степени γ , удельный вклад которых в быстрый алгоритм ДПФ, реализуемый на основе декомпозиции (3.1) весьма высок.

При $p=3$ соотношение (3.1) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} F(m) \\ F(m + N/3) \\ F(m + 2N/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \gamma & \bar{\gamma} \\ 1 & \bar{\gamma} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(m) \\ w^m F_1(m) \\ w^{2m} F_2(m) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

и нетрудно показать, что оценки вычислительной сложности такого алгоритма для вещественного сигнала имеют вид [21, 29]:

$$M(N) \leq N \log_3 N - N, \quad A(N) \leq 3N \log_3 N + \frac{N}{3}. \quad (3.6)$$

3.3 Алгоритмы дискретного косинусного преобразования длиной $N=3^k$

Следуя [21], представим ДКП нечетной длины N в виде

$$\hat{f}(m) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos\left(\pi \frac{(n + 1/2)m}{N}\right) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} f(n) w^{(2n+1)m} \right\}, \quad (3.7)$$

где $w = \exp\left\{\frac{2\pi i}{4N}\right\}$ - первообразный корень степени $4N$ из единицы. Пусть

$$g(k) = \begin{cases} f(n) & \text{при } k = 2n+1; \\ 0 & \text{при } k = 2n; \end{cases}$$

тогда соотношение (3.7) примет вид:

$$\hat{f}(m) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{2N-1} g(k) w^{km} \right\}. \quad (3.8)$$

При нечетном N числа 4 и N взаимно просты, декомпозиция Гуда-Томаса (см. п.1.3) по формулам (1.22), (1.23) при $P=4$ и $Q=N$ выполняется без дополнительных умножений.

Преобразование индексов (1.22), ограничения в (3.7) и (3.8) на диапазон изменения индексов m и k , а также обращение в нуль функции $g(k)$ при четных k

выделяют в двумерных массивах размера $4 \times N$ “допустимые” подмножества K и M для пар (k_1, k_2) (аналог (n_1, n_2) в (1.22) - (1.24)) и (m_1, m_2) (см. рисунки 3.2, 3.3). Кроме того, при $P=4$ корень α в (2.33) равен мнимой единице i . Тогда из (3.8) по аналогии с (1.24) получается:

$$G(m_1, m_2) = \sum_{k_2=0}^3 \left(\sum_{k_1=0}^{N-1} \tilde{g}(k_1, k_2) \beta^{k_1 m_1} \right) i^{k_2 m_2}. \quad (3.9)$$

Так как “допустимое” подмножество индексов K сформировано так, что $\tilde{g}(k_1, k_2)$ отлично от нуля только при $(k_1, k_2) \in K$, то и суммирование в (3.9) выполняется только при $(k_1, k_2) \in K$, то есть при $k_2 = 1, 3$. Этот факт позволяет привести выражение (3.9) к виду:

$$\hat{f}(m) = \operatorname{Re} \left\{ i^{m_2} \sum_{k_1=0}^{N-1} z(k_1) \beta^{k_1 m_1} \right\}, \quad (3.10)$$

где $z(k_1) = \begin{cases} \tilde{g}(k_1, 1) & \text{при } (k_1, 1) \in K \\ \tilde{g}(N - k_1, 3) & \text{при } (k_1, 3) \in K \end{cases}, \quad \beta = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{N} \right\}.$

Таким образом, ДКП нечетной длины N сведено к вещественному преобразованию Фурье той же длины. При $N = 3^r$ и использовании ДПФ, описанного в п.3.2, оценки вычислительной сложности такого алгоритма ДКП имеют вид [21]:

$$M(N) = N \log_3 N - N, \quad A(N) = 3N \log_3 N - \frac{2}{3}N. \quad (3.11)$$

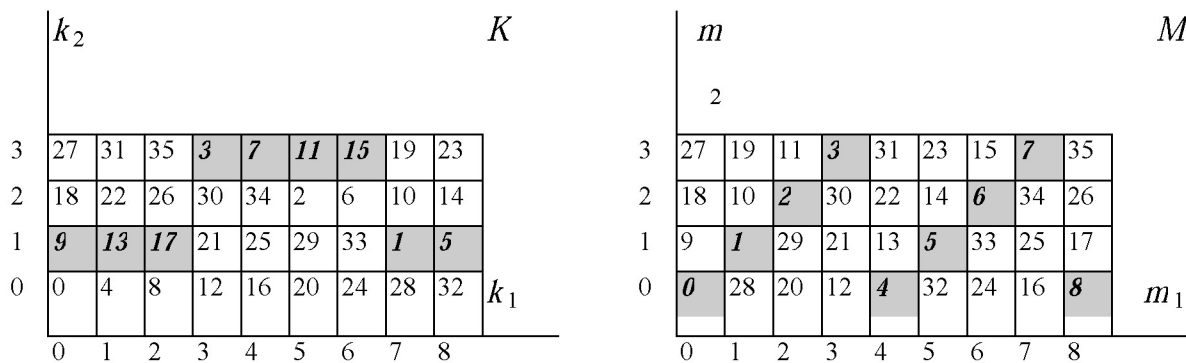


Рисунок 3.2 - Допустимые области значений пар (k_1, k_2) и (m_1, m_2) при $N = 9$

		k_2																										K		
3	81	85	89	93	97	101	105	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	k_1		
2	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	50			
1	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103	107	3	7	11	15	19	23			
0	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104			
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26		

		m_2																										M		
3	27	55	83	3	31	59	87	7	35	63	91	11	39	67	95	15	43	71	99	19	47	75	103	23	51	79	107	m_1		
2	54	82	2	30	58	86	6	34	62	90	10	38	66	94	14	42	70	98	18	46	74	102	22	50	78	106	26			
1	81	1	29	57	85	5	33	61	89	9	37	65	93	13	41	69	97	17	45	73	101	21	49	77	105	25	53			
0	0	28	56	84	4	32	60	88	8	36	64	92	12	40	68	96	16	44	72	100	20	48	76	104	24	52	80			
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26		

Рисунок 3.3 - Допустимые области значений пар (k_1, k_2) и (m_1, m_2) при $N = 27$

3.4 Алгоритмы дискретных ортогональных преобразований, реализуемые в кодах Гамильтона-Эйзенштейна.

Использование представлений элементов $\mathbb{R}$ -алгебр, размерностей больших двух приводит к синтезу БА многомерных ДОП с уменьшенной вычислительной сложностью.

Пусть кватернионы γ_1 и γ_2 - примитивные корни третьей степени из единицы, лежащие в различных экземплярах поля комплексных чисел $\mathbb{C}_1 = \mathbb{R}(i)$ и $\mathbb{C}_2 = \mathbb{R}(j)$, каноническим образом вложенных в $\mathbb{H}$:

$$\gamma_1 = \exp\left\{2\pi i/3\right\}, \quad \gamma_2 = \exp\left\{2\pi j/3\right\};$$

кватернионы $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ - соответствующие образы в $\mathbb{H}$ элементов, сопряженных в $\mathbb{C}_1$ и $\mathbb{C}_2$ элементами γ_1 и γ_2 :

$$\bar{\gamma}_1 = \exp\left\{-2\pi i/3\right\}, \quad \bar{\gamma}_2 = \exp\left\{-2\pi j/3\right\};$$

Кватернионы $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ с $q_2 = q_3 = 0$ будем называть i -кватернионами. Аналогично определяются j - и k -кватернионы.

Ряд свойств алгебры кватернионов сформулируем для удобства чтения в форме лемм, доказательства которых сводятся к непосредственной проверке тождеств для комплексных чисел.

Лемма 3.1. Для любого $q \in \mathbb{H}$ существуют единственные $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ такие,

что справедливо представление:

$$q = (a\gamma_1 + b\bar{\gamma}_1)\gamma_2 + (c\gamma_1 + d\bar{\gamma}_1)\bar{\gamma}_2. \quad (3.12)$$

Определение 3.1. Следуя [20], четверку вещественных чисел (a, b, c, d) в представлении (3.12) для q назовем кодом Гамильтона-Эйзенштейна кватерниона q и будем обозначать $\langle q \rangle$.

В частности, кватернионы специального вида имеют коды:

$$\begin{aligned} \langle q_0 + q_1 i \rangle &= (a, b, a, b), \text{ где } q_0 = \frac{1}{2}(a+b), \quad q_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(b-a), \\ \langle q_0 + q_2 j \rangle &= (a, a, c, c), \text{ где } q_0 = \frac{1}{2}(a+c), \quad q_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(c-a), \\ \langle \gamma_1 \rangle &= (-1, 0, -1, 0), \quad \langle \bar{\gamma}_1 \rangle = (0, -1, 0, -1), \\ \langle \gamma_2 \rangle &= (-1, -1, 0, 0), \quad \langle \bar{\gamma}_2 \rangle = (0, 0, -1, -1). \end{aligned}$$

Далее, если $q = a \in \mathbb{R}$, то $\langle q \rangle = (a, a, a, a)$.

Операции в теле кватернионов и автоморфизмы $\mathbb{H}$ как четырехмерной $\mathbb{R}$ -алгебры, индуцируют преобразования ассоциированных кодов.

Лемма 3.2. Пусть $\langle q \rangle = (a, b, c, d)$, $s \in \mathbb{C}_1$, $t \in \mathbb{C}_2$,

$$\langle s \rangle = (\alpha, \beta, \alpha, \beta), \quad \langle t \rangle = (\sigma, \sigma, \tau, \tau).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle sq \rangle &= ((\beta - \alpha)(a - b) + \alpha a, \quad (\beta - \alpha)(a - b) + \beta b, \\ &\quad (\beta - \alpha)(c - d) + \alpha c, \quad (\beta - \alpha)(c - d) + \beta d) \end{aligned}, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \langle qt \rangle &= ((\tau - \sigma)(a - c) + \sigma a, \quad (\tau - \sigma)(b - d) + \sigma b, \\ &\quad (\tau - \sigma)(a - c) + \tau c, \quad (\tau - \sigma)(b - d) + \tau d) \end{aligned}. \quad (3.14)$$

В частности, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_1 q \rangle &= (-b, a - b, -d, c - d), \quad \langle \bar{\gamma}_1 q \rangle = (b - a, -a, d - c, -c), \\ \langle q \gamma_2 \rangle &= (-c, -d, a - c, b - d), \quad \langle q \bar{\gamma}_2 \rangle = (c - a, d - b, -a, -b). \end{aligned}$$

Таким образом, умножения (3.13) и (3.14) кватерниона q общего вида на i - или j -кватернионы требуют не более шести нетривиальных вещественных умножений и

шести вещественных сложений (если считать, что сложения компонент кодов i - и j -кватернионов выполнены заранее); умножения кватернионов q общего вида на γ_1 , $\bar{\gamma}_1$, γ_2 или $\bar{\gamma}_2$ требуют только двух вещественных сложений. Непосредственное последовательное умножение кватерниона общего вида на i - и j -кватернионы требует 12 вещественных умножений. Покажем, что одновременное выполнение такой пары умножений требует в 1,5 раза меньшего числа вещественных умножений.

Лемма 3.3. Пусть q, s, t -кватернионы, определенные в лемме 3.2. Тогда вычисление кода произведения sqt требует не более девяти нетривиальных вещественных умножений и пятнадцати вещественных сложений.

Доказательство. В обозначениях леммы 3.2 последовательным применением (3.13) и (3.14) получаем равенство:

$$\begin{aligned} \langle sqt \rangle = & ((\tau - \sigma)[(\beta - \alpha)(d - c - b + a) - \alpha(c - a)] - \sigma(\beta - \alpha)(b - a) + \sigma\alpha a, \\ & (\tau - \sigma)[(\beta - \alpha)(d - c - b + a) - \beta(d - b)] - \sigma(\beta - \alpha)(b - a) + \sigma\beta b, \\ & (\tau - \sigma)[(\beta - \alpha)(d - c - b + a) - \alpha(c - a)] - \tau(\beta - \alpha)(d - c) + \tau\alpha c, \\ & (\tau - \sigma)[(\beta - \alpha)(d - c - b + a) - \beta(d - b)] - \tau(\beta - \alpha)(d - c) + \tau\beta d). \end{aligned}$$

Также непосредственно легко убедиться, что автоморфизмы ε_i , ε_j и ε_k (см. (2.9) п.2.)) алгебры $\mathbb{H}$:

$$\varepsilon_i : q \mapsto i^{-1} q i, \quad \varepsilon_j : q \mapsto j^{-1} q j, \quad \varepsilon_k : q \mapsto k^{-1} q k$$

индуцируют преобразования кодов, описываемые следующим предложением.

Лемма 3.4. Пусть $\langle q \rangle = (a, b, c, d)$, тогда

$$\langle \varepsilon_i(q) \rangle = (c, d, a, b), \quad \langle \varepsilon_j(q) \rangle = (b, a, d, c), \quad \langle \varepsilon_k(q) \rangle = (d, c, b, a),$$

и, следовательно, переход от кватерниона q к его автоморфному образу реализуется в кодах тривиально.

Лемма 3.5. Пусть $\langle q \rangle = (a, b, c, d)$, тогда

$$\langle (d - b - c)\gamma_1 + (a - b - c)\bar{\gamma}_1 \rangle = (a, b, c, d) \mathbf{L},$$

где

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем кватернион $q' = (d - b - c)\gamma_1 + (a - b - c)\bar{\gamma}_1$ получен из кватерниона q формальной заменой в представлении (3.12) элементов γ_2 и $\bar{\gamma}_2$ элементами γ_1 и $\bar{\gamma}_1$ с последующим применением тождеств:

$$\gamma_1 + \bar{\gamma}_1 = -1, \quad \gamma_1 \bar{\gamma}_1 = 1.$$

Лемма 3.6. Пусть $s \in \mathbb{C}_1$, $\langle s \rangle = (\alpha, \beta, \alpha, \beta)$,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + i\sqrt{3} \\ 1 - i\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливо равенство:

$$\operatorname{Re} s + i \operatorname{Im} s = (\alpha, \beta, \alpha, \beta) \mathbf{V}.$$

Леммы 3.5 и 3.6 обеспечивают возможность рассмотрения ДОП как "проекций" некоторых вспомогательных преобразований, базисных функций которых принимают значения не в изоморфных копиях алгебры $\mathbb{C}$, а являются кватернионами общего вида. Это позволяет более полно учесть симметрии алгебры $\mathbb{H}$, ассоциированные с ее автоморфизмами.

3.4.1 Быстрый алгоритм двумерного ДПФ

Пусть $f(n_1, n_2) \in \mathbb{R}$ - преобразуемый двумерный $(N \times N)$ - массив, $N = 3^r$, $F(m_1, m_2)$ - двумерный дискретный спектр Фурье:

$$F(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) w^{n_1 m_1 + n_2 m_2}, \quad w = \exp\left\{\frac{2\pi i}{N}\right\}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим двумерный кватернионный спектр (2.17) (КДПФ)

$$\tilde{F}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} w_1^{n_1 m_1} f(n_1, n_2) w_2^{n_2 m_2}, \quad (3.16)$$

$$w_1 = \exp\left\{2\pi i / N\right\}, \quad w_2 = \exp\left\{2\pi j / N\right\}, \quad (m_1, m_2 = 0, 1, \dots, N-1).$$

Константы w_1 , w_2 будем считать заданными кодами Гамильтона-Эйзенштейна. Из лемм 3.5 и 3.6 следует следующее утверждение.

Лемма 3.7. Пусть матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{V}$ определены в леммах [3.5](#) и [3.6](#). Тогда

$$F(m_1, m_2) = \langle \tilde{F}(m_1, m_2) \rangle \mathbf{L} \mathbf{V}.$$

Таким образом, вычисление спектра $F(m_1, m_2)$ только $2N$ вещественными умножениями отличается от вычисления кватернионного спектра [\(3.16\)](#). Представление [\(3.12\)](#) кватернионов кодами позволяет учесть мультипликативную тривиальность умножения на константы γ_1 , γ_2 в быстрых алгоритмах. Вычисление спектра $F(m_1, m_2)$ с помощью кватернионного спектра позволяет в максимальной степени использовать симметрии, связанные с автоморфизмами алгебры $\mathbb{H}$ при выборе фундаментальной области индексов выходного сигнала.

Действительно, представим [\(3.16\)](#) в форме

$$\tilde{F}(m_1, m_2) = \sum_{a, b=0}^2 w_1^{a m_1} \tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) w_2^{b m_2},$$

где

$$\tilde{F}_{ab}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N/3-1} w_1^{3n_1 m_1} f(3n_1 + a, 3n_2 + b) w_2^{3n_2 m_2},$$

и оценим мультипликативную сложность вычисления кватернионного спектра.

Значения $\tilde{F}_{ab}(m_1, m_2)$ достаточно вычислить для пар $(m_1, m_2) = (m_1^*, m_2^*) \in \Omega_0$, где Ω_0 - фундаментальная область:

$$\Omega_0 = \left\{ (m_1^*, m_2^*) : 0 \leq m_1^*, m_2^* \leq N/3 - 1 \right\}.$$

Значения $\tilde{F}_{ab}(m_1, m_2)$ для пар (m_1, m_2) , лежащих в областях, полученных из Ω_0

аддитивными сдвигами на векторы

$$a = \left(\alpha \frac{N}{3}, \beta \frac{N}{3} \right) \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2,$$

отличаются от соответствующих $\tilde{F}_{ab}(m_1^*, m_2^*)$ лишь множителями $\gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_2, \bar{\gamma}_2$ и не требуют для вычисления дополнительных вещественных умножений. При вычислении $\tilde{F}_{ab}(m_1^*, m_2^*)$ достаточно ограничиться значениями $(m_1^*, m_2^*) \in \Omega_1 \subset \Omega_0$:

$$\Omega_1 = \left\{ (m_1^*, m_2^*) : 0 \leq m_1^*, m_2^* \leq \frac{1}{2} \left(\frac{N}{3} + 1 \right) \right\}.$$

Действительно, непосредственно проверяются тождества:

$$\begin{aligned} \gamma_1^a \varepsilon_j \left(w_1^{am_1^*} \tilde{F}_{ab}(m_1^*, m_2^*) w_2^{bm_2^*} \right) &= w_1^{a(N/3 - m_1^*)} \tilde{F}_{ab}(N/3 - m_1^*, m_2^*) w_2^{bm_2^*}, \\ \varepsilon_i \left(w_1^{am_1^*} \tilde{F}_{ab}(m_1^*, m_2^*) w_2^{bm_2^*} \right) \gamma_2^b &= w_1^{am_1^*} \tilde{F}_{ab}(m_1^*, N/3 - m_2^*) w_2^{b(N/3 - m_2^*)}, \\ \gamma_1^a \varepsilon_k \left(w_1^{am_1^*} \tilde{F}_{ab}(m_1^*, m_2^*) w_2^{bm_2^*} \right) \gamma_2^b &= w_1^{a(N/3 - m_1^*)} \tilde{F}_{ab}(N/3 - m_1^*, N/3 - m_2^*) w_2^{b(N/3 - m_2^*)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

И так как умножения на γ_1^a, γ_2^b и выполнение отображений $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ и ε_k не требуют нетривиальных вещественных умножений, то для мультипликативной сложности $M(N)$ рассмотренного алгоритма вычисления спектра (3.15) имеем окончательно:

$$M(N \times N) = C N^2 \log_3 N + O(N^2), \quad (3.18)$$

где $C = \frac{5}{3}$ для вещественных и $C = \frac{10}{3}$ для комплексных входных данных.

3.4.2 Быстрый алгоритм дискретного косинусного преобразования

В ряде работ [21, 36, 37] показано, что одномерное дискретное косинусное преобразование (ДКП) нечетной длины N может быть сведено к ДПФ вещественного сигнала той же длины, полученного из исходного перестановкой отсчетов (см п. 2).

Следуя [21], получаем аналогичное утверждение для двумерного дискретного косинусного преобразования.

Рассмотрим двумерное (ненормированное) ДКП в форме:

$$\hat{f}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) \cos \pi \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)m_1}{N} \cos \pi \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)m_2}{N}.$$

Пусть

$$G(m_1, m_2) = \sum_{t_1, t_2=0}^{2N-1} \exp\left\{\pi i \frac{t_1 m_1}{2N}\right\} g(t_1, t_2) \exp\left\{\pi j \frac{t_2 m_2}{2N}\right\},$$

где

$$g(t_1, t_2) = \begin{cases} f(n_1, n_2), & \text{при } t_1 = 2n_1 + 1, t_2 = 2n_2 + 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \\ t_1, t_2 = 0, 1, \dots, 2N-1. \end{cases}$$

Тогда

$$\hat{f}(m_1, m_2) = \frac{1}{4} \left[G(m_1, m_2) + \varepsilon_i(G(m_1, m_2)) + \varepsilon_j(G(m_1, m_2)) + \varepsilon_k(G(m_1, m_2)) \right], \quad (3.19)$$

и основную трудность представляет вычисление $G(m_1, m_2)$.

Пусть целые α и β выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{cases} 4^2 \alpha \equiv 4 \pmod{4N}; \\ N^2 \beta \equiv N \pmod{4N}. \end{cases}$$

Находя для каждого нечетного t_s ($0 \leq t_s < 2N$; $w=1, 2$) пару (t_{s1}, t_{s2}) как решение сравнения

$$t_s \equiv 4t_{s1} + Nt_{s2} \pmod{4N} \quad (3.20)$$

и для каждого m_s ($0 \leq m_s < N$) пару (m_{s1}, m_{s2}) как решение сравнения

$$m_s \equiv 4\alpha m_{s1} + N\beta m_{s2} \pmod{4N} \quad (3.21)$$

с условиями

$$0 \leq t_{s1}, m_{s1} < N; \quad 0 \leq t_{s2}, m_{s2} < 4, \quad (3.22)$$

получаем системы сравнений

$$\begin{cases} t_s \equiv 4t_{s1} \pmod{N}; \\ t_s \equiv Nt_{s2} \pmod{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} m_s \equiv m_{s1} \pmod{N}; \\ m_s \equiv m_{s2} \pmod{4}. \end{cases}$$

Пусть T - множество четверок чисел $(t_{11}, t_{12}; t_{21}, t_{22})$, являющихся решениями сравнений (3.20) с условиями (3.22). Так как t_s нечетно, то t_{s2} также нечетные, поэтому множество T представимо в виде объединения четырех непересекающихся множеств $T = T_{11} \cup T_{13} \cup T_{31} \cup T_{33}$, где

$$T_{ab} = \{(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) \in T : t_{12} = a, t_{22} = b\}.$$

Отметим ряд легко проверяемых свойств множеств T_{ab} :

(а) преобразования

$$(t_{11}, 3, t_{21}, 1) \mapsto (N - t_{11}, 3, t_{21}, 1); \quad (3.23)$$

$$(t_{11}, 1, t_{21}, 3) \mapsto (t_{11}, 1, N - t_{21}, 3); \quad (3.24)$$

$$(t_{11}, 3, t_{21}, 3) \mapsto (N - t_{11}, 3, N - t_{21}, 3) \quad (3.25)$$

являются биекциями множеств T_{31} , T_{13} , T_{33} , соответственно;

(b) если $\text{card } A$ - число элементов множества A , то

$$\text{card } T_{13} = \text{card } T_{31} = \frac{(N-1)(N+1)}{4}; \quad \text{card } T_{33} = \frac{(N-1)^2}{4};$$

(с) при $(t_{11}, t_{12}; t_{21}, t_{22}) \in T$ переменные t_{11} и t_{21} принимают независимо все значения $0, 1, \dots, N-1$ ровно по одному разу:

$$G(t_{11}, t_{12}; t_{21}, t_{22}) = g(4t_{11} + N t_{12}, 4t_{21} + N t_{22}),$$

$$F(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}) = \hat{f}(4\alpha m_{11} + N \beta m_{12}, 4\alpha m_{21} + N \beta m_{22})$$

и производя в (3.19) замены переменных (3.20) и (3.21), получаем после преобразований (декомпозиция Гуда-Томаса):

$$F(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}) = \frac{1}{4} \left[Q(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}) + \varepsilon_i(Q(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})) + \right. \\ \left. + \varepsilon_j(Q(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})) + \varepsilon_k(Q(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})) \right],$$

где

$$\begin{aligned}
 Q(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}) &= \sum_{(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) \in T} i^{t_{12}m_{12}} w_1^{t_{11}m_{11}} G(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) w_2^{t_{21}m_{21}} j^{t_{22}m_{22}} = \\
 &= \sum_{a, b=1,3} \sum_{(t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}) \in T_{ab}} i^{am_{12}} w_1^{t_{11}m_{11}} G(t_{11}, a, t_{21}, b) w_2^{t_{21}m_{21}} j^{bm_{22}} = \\
 &= \sum_{a, b=1,3} Q_{ab}(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Так как $i^3 = -i = i^{-1}$, $j^3 = -j = j^{-1}$, то, производя в выражении для T_{ab} при a и/или b равных 3 замену переменных t_{11} , t_{21} согласно (3.23)-(3.25), получаем после несложных преобразований:

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(m_1, m_2) &= F(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}) = \\
 &= \frac{1}{4} \left[\sum_{r=0,i,j,k} \varepsilon_r \left(\sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} i^{m_{12}} w_1^{n_1 m_{11}} Z(n_1, n_2) w_2^{n_2 m_{21}} j^{m_{22}} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

где

$$Z(n_1, n_2) = \begin{cases} G(n_1, 1, n_2, 1), & \text{при } (n_1, 1, n_2, 1) \in T; \\ G(N - n_1, 3, n_2, 1), & \text{при } (N - n_1, 3, n_2, 1) \in T; \\ G(n_1, 1, N - n_2, 3), & \text{при } (n_1, 1, N - n_2, 3) \in T; \\ G(N - n_1, 3, N - n_2, 3), & \text{при } (N - n_1, 3, N - n_2, 3) \in T. \end{cases}$$

Равенство (3.27) доказано для любого нечетного N . В случае $N = 3^r$ вычисление (3.27) можно реализовать в кодах с помощью алгоритма предыдущего раздела, что приводит к оценке

$$M(N \times N) = \frac{5}{3} N^2 \log_3 N + O(N^2).$$

В этом случае, вычисление $\hat{f}(m_1, m_2)$ для m_1, m_2 одной четности не требует дополнительных умножений; при m_1, m_2 разной четности умножение на константу i в кодах требует не более одного умножения на отсчет выходного массива. В конкретных алгоритмах обработки сигналов эти умножения могут быть объединены с нормированием косинусного спектра.

3.5 Алгоритмы дискретного косинусного преобразования коротких длин

3.5.1 Алгебраические принципы синтеза БА ДКП коротких длин

Рассматриваемый метод синтеза быстрых алгоритмов дискретного косинусного преобразования базируется на следующих алгебраических идеях.

1. Матрица ДКП имеет *блочную структуру*. Результат умножения такой матрицы на входной вектор сводится к умножению векторов из подпространств сигнального пространства на матрицы меньших размеров со специфическими свойствами "симметрии".
2. Умножение этих подматриц на векторы соответствующих подпространств эквивалентно умножениям элементов некоторых *конечномерных алгебр*.
3. В большинстве рассматриваемых случаев умножение элементов таких алгебр эквивалентно умножению в *полиномиальных кольцах* (или циклической свертке). Это позволяет воспользоваться известными быстрыми алгоритмами циклических свертки с минимальным числом умножений.

В данном разделе рассматриваются следующие конечномерные алгебры.

1. Двумерная алгебра $\mathbb{A}_1^{(2)}$ с базисом $\{1, e_1\}$ и правилами умножения базисных элементов:

$$e_1^2 = -1 .$$

(Алгебра $\mathbb{C}$ комплексных чисел).

2. Двумерная алгебра $\mathbb{A}_2^{(2)}$ с базисом $\{1, e_1\}$ и правилами умножения базисных элементов:

$$e_1^2 = 1 .$$

(Алгебра "двойных" чисел, изоморфная прямой сумме $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ см. пример [1.5.](#))

3. Трехмерная алгебра $\mathbb{A}_1^{(3)}$ с базисом $\{1, e_1, e_2\}$ и правилами умножения базисных элементов:

$$e_1^2 = e_2 , \quad e_2^2 = -e_1 , \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = -1 .$$

4. Четырехмерная алгебра $\mathbb{A}_1^{(4)}$ с базисом $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ и правилами умножения

базисных элементов:

$$\mathbf{e}_1^2 = -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2^2 = -\mathbf{1}, \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}.$$

5. Четырехмерная алгебра $\mathbb{A}_2^{(4)}$ с базисом $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и правилами умножения базисных элементов:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{1}, \mathbf{e}_3^2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{1}.$$

6. Четырехмерная алгебра $\mathbb{A}_3^{(4)}$ с базисом $\{\mathbf{1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и правилами умножения базисных элементов:

$$\mathbf{e}_1^2 = -\mathbf{1}, \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{1}, \mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{1}, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2. \quad (3.28)$$

Непосредственно проверяются следующие утверждения.

Лемма 3.8.

а) Умножение элементов $(\alpha_0 + \alpha_1\mathbf{e}_1), (\beta_0 + \beta_1\mathbf{e}_1) \in \mathbb{A}_1^{(2)}$ равносильно умножению полиномов

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t)(\beta_0 + \beta_1 t) \left(\text{mod} (t^2 + 1) \right)$$

и требует согласно [17] 3 умножений и 3 сложений.

б) Умножение элементов $(\alpha_0 + \alpha_1\mathbf{e}_1), (\beta_0 + \beta_1\mathbf{e}_1) \in \mathbb{A}_2^{(2)}$ равносильно умножению полиномов

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t)(\beta_0 + \beta_1 t) \left(\text{mod} (t^2 - 1) \right)$$

и требует согласно [17] 2 умножений и 4 сложений.

в) Умножение элементов $(\alpha_0 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2), (\beta_0 + \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2) \in \mathbb{A}^{(3)}$ равносильно умножению полиномов

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2) \left(\text{mod} (t^3 + 1) \right)$$

и требует согласно [17] 4 умножений и 14 сложений.

г) Умножение элементов $(\alpha_0 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3), (\beta_0 + \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3) \in \mathbb{A}_1^{(4)}$ равносильно умножению полиномов

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t - \alpha_2 t^2 - \alpha_3 t^3\right) \left(\beta_0 + \beta_1 t - \beta_2 t^2 - \beta_3 t^3\right) \left(\bmod(t^4 + 1)\right)$$

и требует согласно [17] 9 умножений и 15 сложений.

д) Умножение элементов $(\alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3)$, $(\beta_0 + \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3) \in \mathbb{A}_2^{(4)}$ равносильно умножению полиномов

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3\right) \left(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3\right) \left(\bmod(t^4 - 1)\right)$$

и требует согласно [17] 5 умножений и 15 сложений.

Лемма 3.9. Алгебра $\mathbb{A}_3^{(4)}$ изоморфна прямой сумме $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$:

$$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \left\{ (z_1, z_2) : z_1 = a_1 + b_1 i_1, z_2 = a_2 + b_2 i_2, i_1^2 = i_2^2 = -1, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Доказательство. Элементы

$$\mathbf{E}_0 = (1, 1), \mathbf{E}_1 = (i_1, -i_2), \mathbf{E}_2 = (-1, 1), \mathbf{E}_3 = (i_1, i_2) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

образуют базис алгебры $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$. Отображение ϕ , определенное для базисных элементов алгебр $\mathbb{A}_3^{(4)}$ и $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ как

$$\phi : \mathbf{e}_1 \mapsto (i_1, -i_2), \phi : \mathbf{e}_2 \mapsto (-1, 1), \phi : \mathbf{e}_3 \mapsto (i_1, i_2), \phi : 1 \mapsto (1, 1)$$

продолжается $\mathbb{R}$ -линейно до изоморфизма соответствующих четырехмерных пространств и сохраняет равенства (3.28).

Линейный оператор L , определенный на пространстве алгебры $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ образами базисных элементов

$$\begin{aligned} L(\mathbf{E}_0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_2), \quad L(\mathbf{E}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3), \\ L(\mathbf{E}_2) &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_2), \quad L(\mathbf{E}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_1), \end{aligned}$$

преобразует базис $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ в "стандартный" базис $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ алгебры $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, рассматриваемой как четырехмерная $\mathbb{R}$ -алгебра:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= L(\mathbf{E}_0) = (1 + 0 \cdot i_1, 0 + 0 \cdot i_2), \quad \sigma_1 = L(\mathbf{E}_1) = (0 + i_1, 0 + 0 \cdot i_2), \\ \sigma_2 &= L(\mathbf{E}_2) = (0 + 0 \cdot i_1, 1 + 0 \cdot i_2), \quad \sigma_3 = L(\mathbf{E}_3) = (0 + 0 \cdot i_1, 0 + i_2). \end{aligned}$$

Следствие. Умножение постоянного элемента $\mathbf{a} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$ на вектор $\mathbf{b} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3$ алгебры $\mathbb{A}_3^{(4)}$ требует 6 вещественных умножений и 10 вещественных сложений.

Доказательство. Сложность рассматриваемого умножения складывается из умножения двух пар комплексных чисел (элементов алгебры $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ в базисе $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$) и сложности преобразования элементов при замене базиса $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ на базис $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Для умножения двух пар комплексных чисел достаточно 3+3 умножений и 3+3 сложений [17]. Для преобразования элементов переменного вектора достаточно 4 сложений.

3.5.2 Алгоритм дискретного косинусного преобразования длиной $N = 8$

Рассмотрим (ненормированное) ДКП (2.33) в матричной форме (1.4), где

$$\mathbf{F} = (F(0), \dots, F(7)), \quad \mathbf{f} = (f(0), \dots, f(7)).$$

После переупорядочивания компонент входного и выходного векторов

$$\mathbf{G} = (G(0), \dots, G(7)) = (F(1), F(5), F(7), F(3), F(2), F(6), F(4), F(0)),$$

$$\mathbf{g} = (g(0), \dots, g(7)) = (f(0), f(2), f(4), f(6), f(7), f(5), f(3), f(1)),$$

матричное представление ДКП может быть записано в форме $\mathbf{G}^t = \mathbf{T} \mathbf{g}^t$, где t – знак транспонирования,

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a & c & -d & -b & -a & -c & d & b \\ c & d & -b & a & -c & -d & b & -a \\ d & b & a & c & -d & -b & -a & -c \\ b & -a & c & d & -b & a & -c & -d \\ \hline u & -l & -u & l & u & -l & -u & l \\ l & u & -l & -u & l & u & -l & -u \\ \hline v & -v & v & -v & v & -v & v & -v \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{16}\right), \quad b = \cos\left(\frac{3\pi}{16}\right), \quad c = \cos\left(\frac{5\pi}{16}\right), \quad d = \cos\left(\frac{7\pi}{16}\right),$$

$$I = \cos\left(\frac{6\pi}{16}\right), \quad u = \cos\left(\frac{2\pi}{16}\right), \quad v = \cos\left(\frac{4\pi}{16}\right).$$

Формирование из компонент вектора $\mathbf{g}$ вспомогательного массива:

$$\begin{aligned} z(0) &= g(0) - g(4), \quad z(1) = g(1) - g(5), \quad z(2) = g(2) - g(6), \quad z(3) = g(3) - g(7), \\ z(4) &= (g(0) + g(4)) - (g(2) + g(6)), \quad z(5) = (g(1) + g(5)) - (g(3) + g(7)), \\ z(6) &= [(g(0) + g(4)) + (g(2) + g(6))] - [(g(1) + g(5)) + (g(3) + g(7))], \quad (3.29) \\ z(7) &= [(g(0) + g(4)) + (g(2) + g(6))] + [(g(1) + g(5)) + (g(3) + g(7))]. \end{aligned}$$

требует 14 операций вещественного сложения. После этого выполнение косинусного преобразования сводится к следующим матричным вычислениям:

$$\begin{pmatrix} G(0) \\ G(1) \\ G(2) \\ G(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & -d & -b \\ c & d & -b & a \\ d & b & a & c \\ b & -a & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ z(3) \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\begin{pmatrix} G(4) \\ G(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & -I \\ I & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(4) \\ z(5) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} G(6) &= v z(6), \\ G(7) &= z(7). \end{aligned} \quad (3.32)$$

а) Вычисление матричного произведения (3.30) эквивалентно вычислению произведения элементов $\mathbf{s}, \mathbf{p} \in \mathbb{A}_1^{(4)}$:

$$\mathbf{sp} = (c + a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_3)(z(0) + z(1)\mathbf{e}_1 + z(2)\mathbf{e}_2 + z(3)\mathbf{e}_3)$$

и, в соответствии с леммой 3.8(г), требует 9 операций вещественного умножения и 15 операций вещественного сложения.

б) Вычисление матричного произведения (5.107) эквивалентно вычислению произведения элементов $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{A}_1^{(2)}$:

$$\mathbf{qr} = (u + I\mathbf{e}_1)(z(4) + z(5)\mathbf{e}_1)$$

и, в соответствии с леммой 3.8(а) требует 3 операций вещественного умножения и 3

операций вещественного сложения.

в) Вычисление по формуле (3.32) требует одной операции вещественного умножения.

Суммарная сложность алгоритма ДКП длиной $N=8$ с учетом формирования вспомогательных переменных $z_0, \dots, z_7$ составляет $9+3+1=13$ операций умножения и $14+15+3=32$ операции сложения.

Структура рассмотренного алгоритма не зависит от конкретных значений параметров $a, b, \dots, v$. Пусть

$$v' = l' = c' = 1, \quad u' = u/l, \quad a' = a/c, \quad d' = d/c, \quad b' = b/c.$$

Тогда умножение в (3.32) становится тривиальным, в матричном произведении (3.31) остается два умножения. Вычисление правой части соотношения (3.30) требует 8 операций умножения, а умножения на v, e, c объединяются с нормализацией компонент косинусного спектра (с умножениями на λ_m в (1.8)).

Таким образом, рассмотренный алгоритм ДКП длиной $N=8$ требует $2+8=10$ операций умножения и 32 операции сложения, его схема приведена на рисунке 3.4.

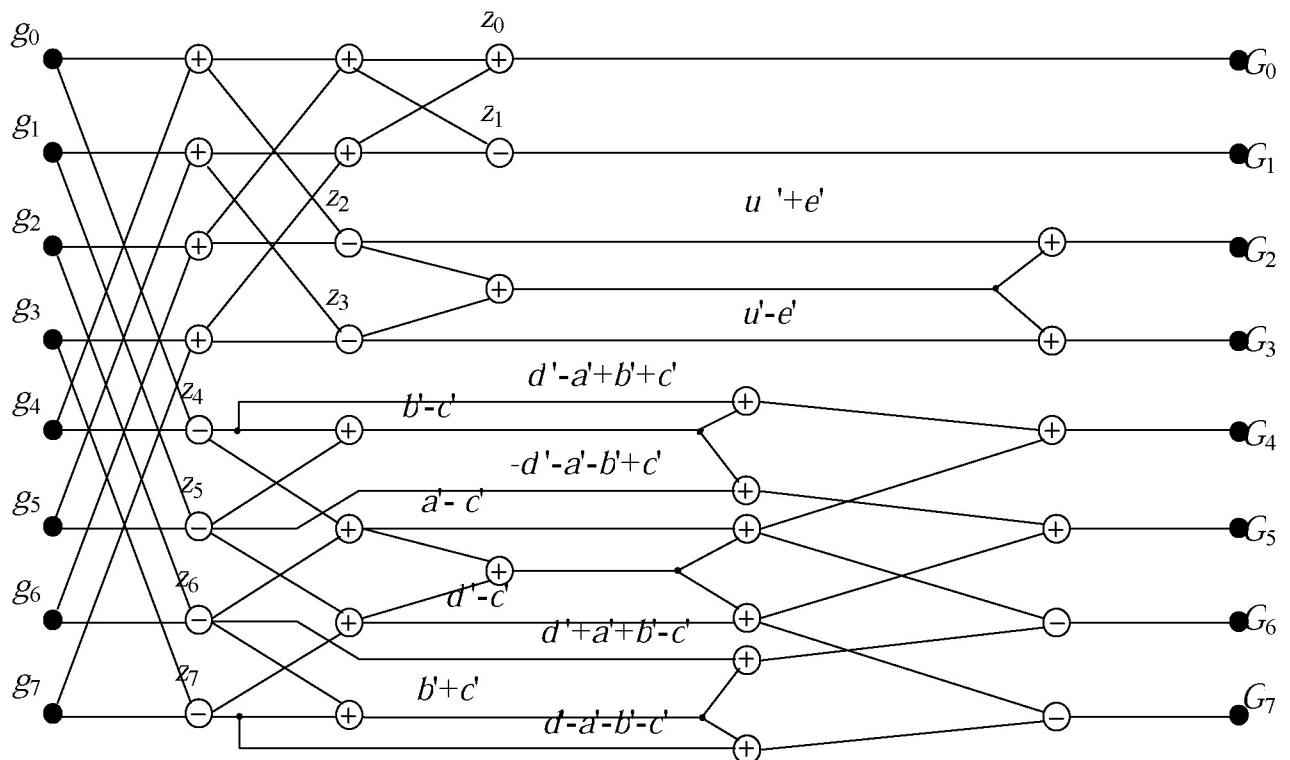


Рисунок 3.4 - Направленный граф алгоритма ДКП длиной 8

3.5.3 Алгоритм дискретного косинусного преобразования длиной $N = 9$

После перестановки ряда строк и столбцов матрица ДКП длиной 9 принимает вид

$$\mathbf{T}_9 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|cc|c} a & c & d & -d & -c & -a & b & -b & 0 \\ c & -d & a & -a & d & -c & -b & b & 0 \\ d & a & -c & c & -a & -d & -b & b & 0 \\ \hline e & -u & -v & -v & -u & e & h & h & -1 \\ v & -e & u & u & -e & v & -h & -h & 1 \\ u & v & -e & -e & v & u & -h & -h & 1 \\ \hline b & -b & -b & b & b & -b & 0 & 0 & 0 \\ h & h & h & h & h & h & -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

Матричные умножения

$$\begin{pmatrix} a & c & d \\ c & -d & a \\ d & a & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & -u & -v \\ v & -e & u \\ u & v & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(5) \\ z(6) \\ z(7) \end{pmatrix},$$

эквивалентны умножению элементов алгебры $\mathbb{A}^{(3)}$:

$$(-ae_2 - ce_1 + d)(z(0)e_1 + z(1)e_2 + z(2)) \text{ и } (fe_2 - ge_1 - e)(z(6)e_2 - z(5)e_1 + z(7))$$

соответственно и требуют согласно лемме 3.8(в) 4 вещественных умножений и 14 вещественных сложений каждое.

Таким образом, ДКП длиной $N=9$ посредством умножения на матрицу $\mathbf{T}_9$ выполняется за 8 умножений и 44 сложения (то есть требует менее одного умножения и около пяти сложений на отсчет). Схема рассмотренного алгоритма приведена на рисунке [3.5](#).

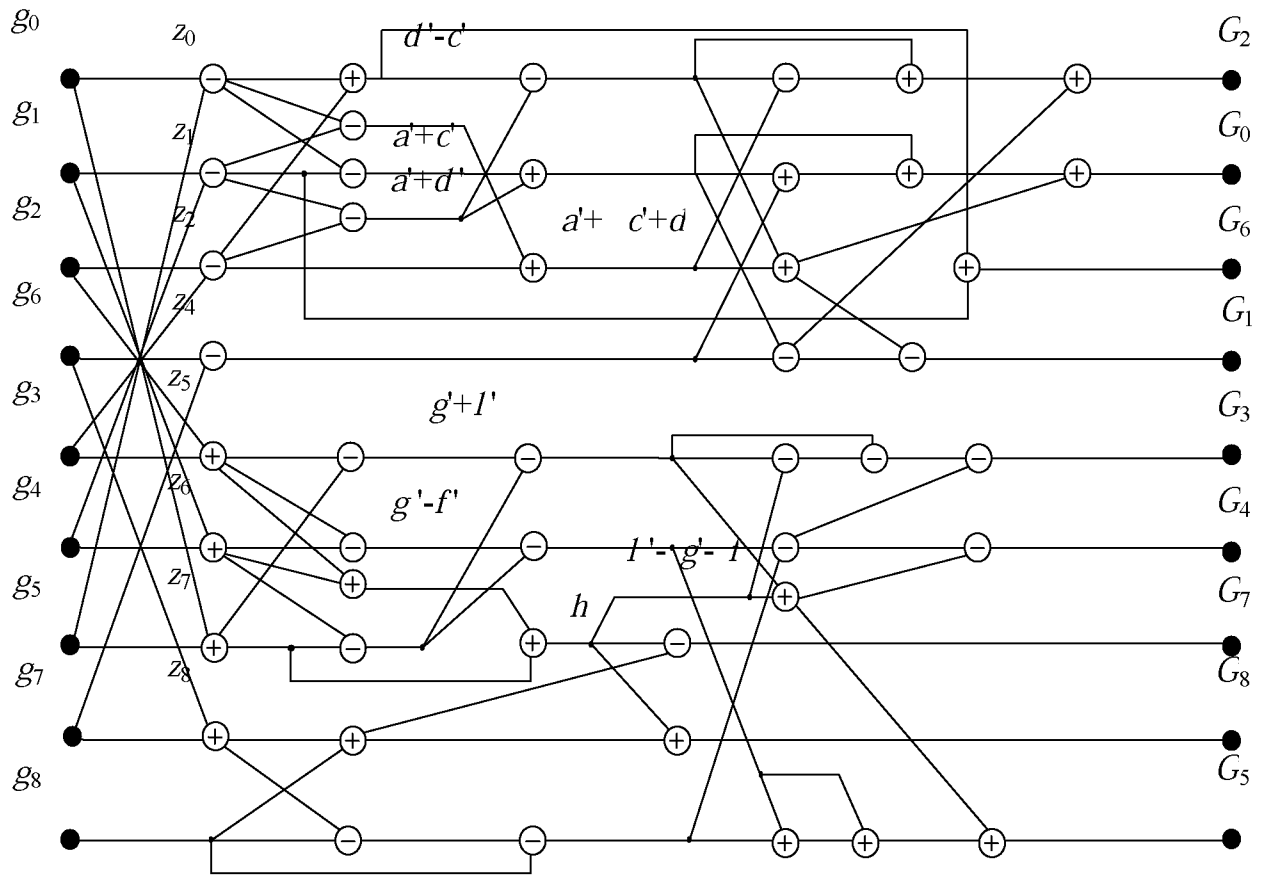


Рисунок 3.5 - Направленный граф алгоритма ДКП длиной 9

3.5.4 Алгоритм дискретного косинусного преобразования длиной $N = 10$

После перестановки ряда строк и столбцов матрица ДКП длиной 10 принимает вид

$$T_{10} = \left(\begin{array}{cccc|cccc|cc} a & b & c & d & -d & -c & -b & -a & q & -q \\ b & d & -a & -c & c & a & -d & -b & -q & q \\ c & -a & d & -b & b & -d & a & -c & q & -q \\ d & -c & -b & a & -a & b & c & -d & q & -q \\ \hline l & u & -u & -l & -l & -u & u & l & 0 & 0 \\ u & -l & l & -u & -u & l & -l & u & 0 & 0 \\ \hline v & -h & -h & v & v & -h & -h & v & -1 & -1 \\ h & -v & -v & h & h & -v & -v & h & 1 & 1 \\ \hline q & -q & q & q & -q & -q & q & -q & -q & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Матричное умножение

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & -a & -c \\ c & -a & d & -b \\ d & -c & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z(1) \\ z(2) \\ z(3) \end{pmatrix}$$

эквивалентно вычислению произведения элементов алгебры $\mathbb{A}_2^{(4)}$

$$(be_1 + ae_2 - ce_3 + d)(z(0)e_1 + z(1)e_2 + z(4)e_3 - z(3)) .$$

и требует согласно лемме 3.8(д) 5 вещественных умножений и 15 вещественных сложений.

Вычисление матричного произведения

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ u & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(4) \\ z(5) \end{pmatrix}$$

эквивалентно вычислению произведения элементов алгебры $\mathbb{A}_1^{(2)}$:

$$(1 + ue_1)(z(4) - z(5)e_1)$$

и, в соответствии с леммой 3.8(а) требует 3 операций вещественного умножения и 3 операций вещественного сложения.

Вычисление матричного произведения

$$\begin{pmatrix} v & -h \\ h & -v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(6) \\ z(7) \end{pmatrix}$$

эквивалентно вычислению произведения элементов алгебры $\mathbb{A}_2^{(2)}$:

$$(v + he_1)(z(6) - z(7)e_1)$$

и, в соответствии с леммой 3.8(б) требует 2 операций вещественного умножения и 4 операций вещественного сложения.

Таким образом, ДКП длиной $N=10$ посредством умножения на матрицу T_{10} выполняется за 9 умножений и 43 сложения. Схема алгоритма приведена на рисунке [3.6](#).

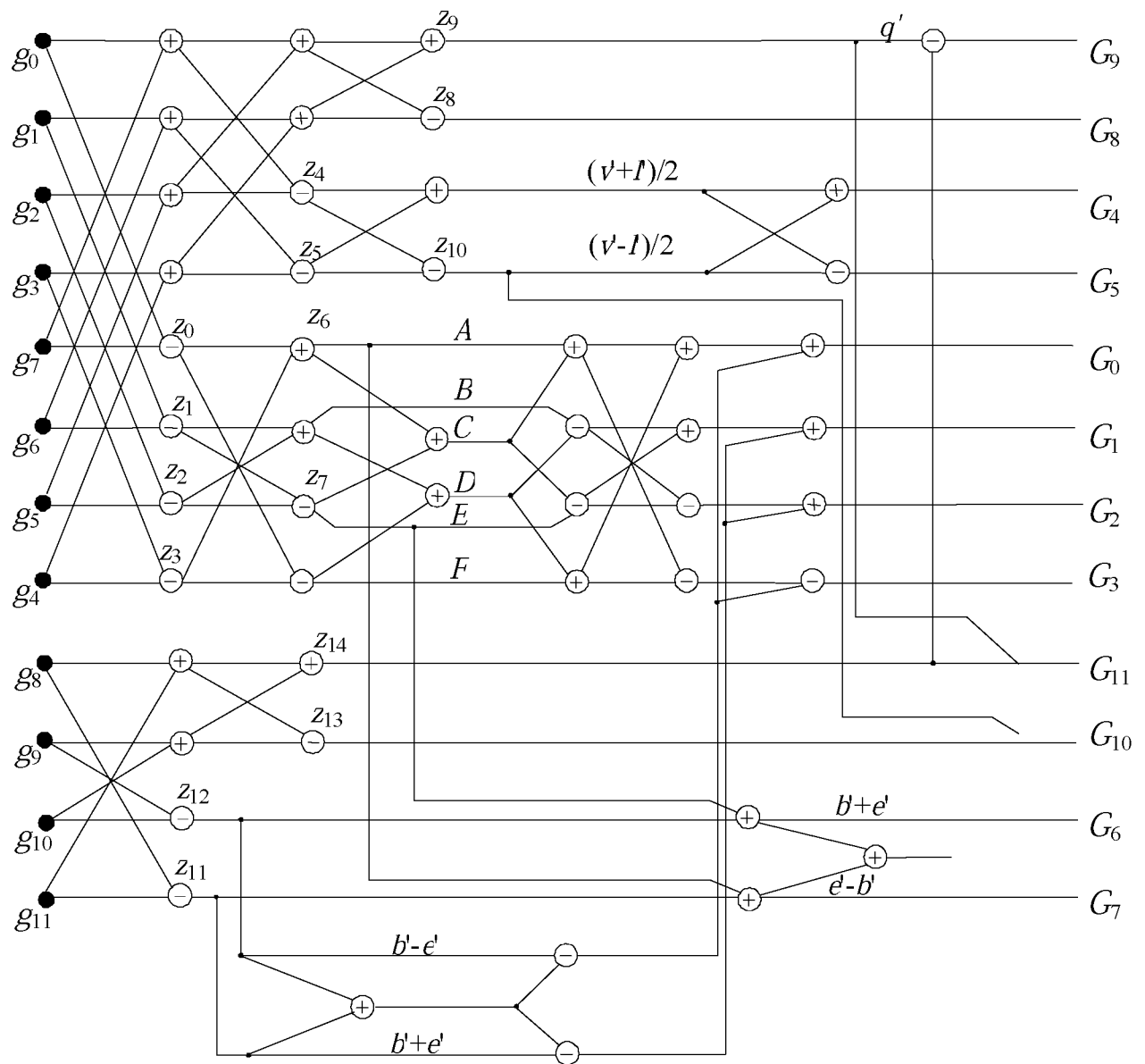


Рисунок 3.7 - Направленный граф алгоритма ДКП длины 12

Умножение матрицы ДКП длиной 15 на входной вектор эквивалентно

- а) двум умножениям переменного элемента алгебры $\mathbb{A}_2^{(4)}$ на постоянный элемент этой же алгебры;
- б) умножению переменного элемента алгебры $\mathbb{A}_1^{(2)}$ на постоянный элемент этой же алгебры;
- в) умножению переменного элемента алгебры $\mathbb{A}_2^{(2)}$ на постоянный элемент этой же алгебры;
- г) дополнительным умножениям констант на переменные и вспомогательным сложениям.

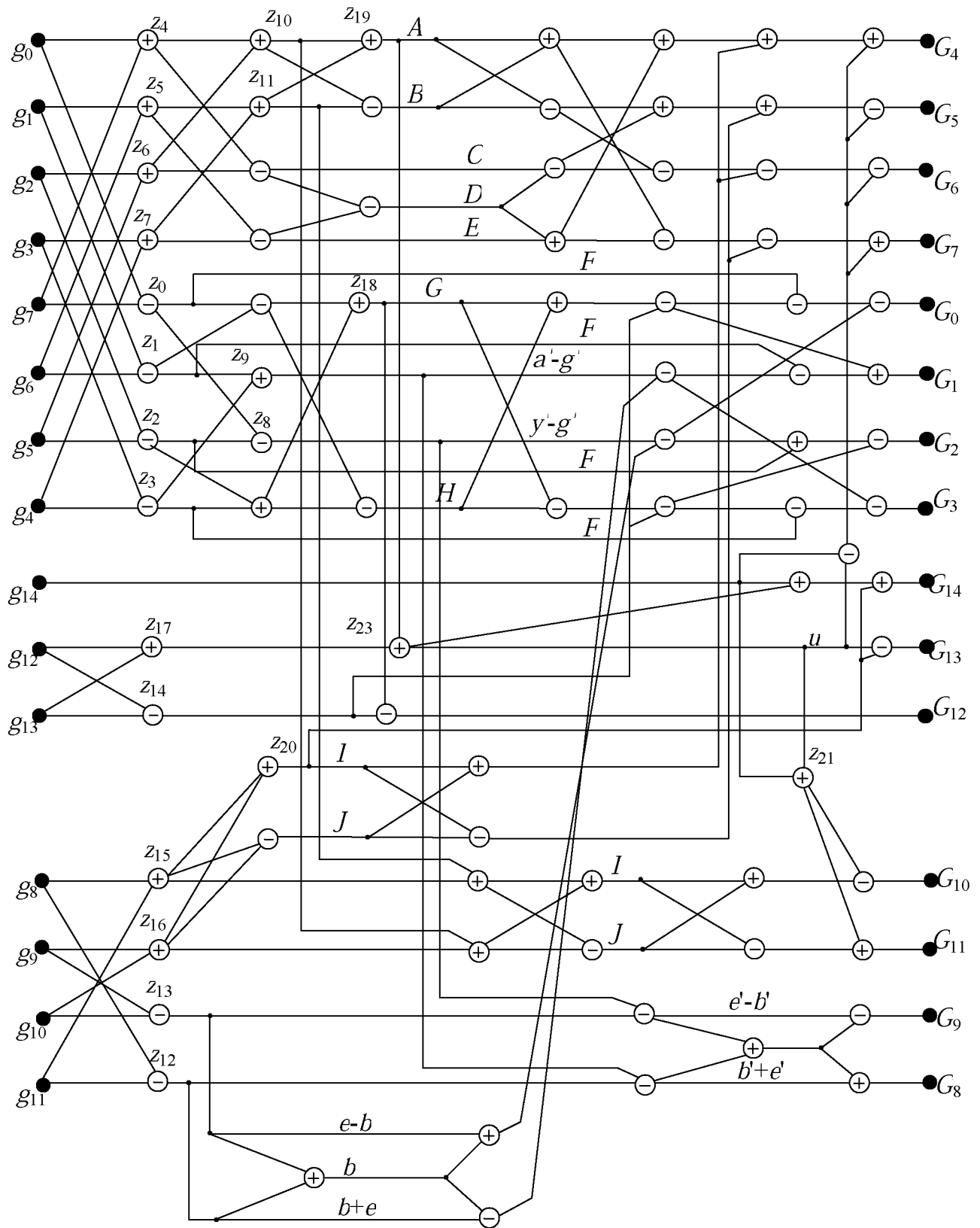
ДКП длиной $N=15$ посредством умножения на матрицу T_{15} выполняется за 24 умножения и 83 сложения. Схема алгоритма приведена на рисунке [3.8](#).

В качестве основы для сравнительного анализа вычислительной сложности синтезированных алгоритмов был использован алгоритм работы [\[26\]](#) синтезированный для ДКП произвольных длин, оценки сложности которого при $N=2^k$ совпадают с оценками сложности лучших из известных алгоритмов ДКП [\[38, 41\]](#).

В таблице [2.2](#) приведено количество операций необходимых для вычисления ДКП предложенным алгоритмом и известным способом. На рисунке [3.9](#) приводится зависимость удельной мультипликативной сложности алгоритмов от длины преобразования.

Таблица 2.2 - Количество операций для вычисления ДКП

N	Описанные алгоритмы		Алгоритм работы [26]	
	*	+	*	+
8	10	32	12	29
9	8	44	11	44
10	9	43	15	36
12	13	51	20	43
15	21	82	35	89



$$\begin{aligned}
 A &= (h-s+p-q)/2; & B &= (h-s-p+q)/2; & C &= (p+q-h-s)/2; & D &= (h+s)/2; & E &= (h+s+p+q)/2; \\
 F &= a'+d'+y'-v'; & G &= (d'-v')/2; & H &= (d'+v')/2; & I &= (1-r)/2; & J &= (1+r)/2;
 \end{aligned}$$

Рисунок 3.8 - Направленный граф алгоритма ДКП длиной 15

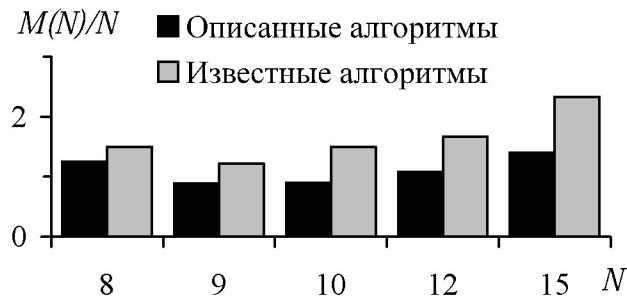


Рисунок 3.9 - Удельная мультипликативная сложность алгоритмов

На рисунке [3.10](#) показана зависимость времени τ_N обработки изображения блочным ДКП от размера квадратного блока N в виде относительной характеристики τ_N/τ_8 , где τ_8 - это время обработки изображения блоками 8×8 ($\tau_N/\tau_8 = 1$ при $N=8$), размер изображения - 1024×1024 пикселя

Таким образом, синтезированные алгоритмы ДКП гарантируют скорость обработки изображения близкую к скорости обработки лучшим из известных алгоритмов ДКП длиной $N=8$. Время обработки практически не возрастает с ростом N . В то же время как будет показано в разделе [5](#) использование алгоритмов блочного кодирования на основе ДКП объемом $(N \times N)$ для "неканонических" размеров блока ($N \neq 8$) позволяет в ряде случаев получить больший коэффициент сжатия при той же среднеквадратичной ошибке восстановления изображения.

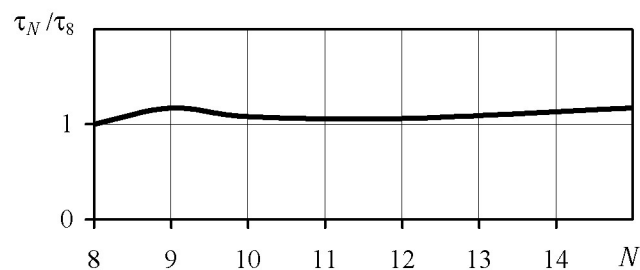


Рисунок 3.10 - Относительное время обработки изображения 1024×1024 пикселя блочным ДКП

4 УНИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ БЫСТРЫХ АЛГОРИТМОВ МНОГОМЕРНОГО ДПФ

Анализ соотношения [\(2.5\)](#), определяющего структуру простейшего (так называемого, *построчно-столбцового* или *каскадного*) алгоритма двумерного ДПФ, показывает, что, например, его мультипликативная сложность удовлетворяет равенству

$$M(N \times N) = 2N M(N).$$

Таким образом, при $N = 2^k$ верно соотношение

$$M(N \times N) = 2N (CN \log_2 N) = CN^2 \log_2 N^2.$$

Другими словами, сложность вычисления ДПФ двумерного массива объема $(N \times N)$ с помощью каскадного алгоритма равна сложности одномерного ДПФ длины N^2 . Но у двумерного $(N \times N)$ -ДПФ число "степеней свободы" (различных корней из единицы) равно N , а не N^2 , как у одномерного. То есть каскадный алгоритм полностью игнорирует двумерную природу обрабатываемого массива и, естественно, несмотря на простую структуру, очевидно, не является наилучшим.

К настоящему времени разработано большое количество быстрых алгоритмов многомерных ДПФ, базирующихся на принципиально различных подходах: на факторизации матриц преобразований [\[1, 2, 6\]](#), на полиномиальных преобразованиях [\[12, 13\]](#), тензорной технике [\[8\]](#), преобразовании Радона [\[14, 15, 19\]](#) и т.д. Несмотря на то, что арифметическая сложность таких алгоритмов существенно ниже, чем у простейшего "построчно-столбцового" (каскадного) алгоритма, относительно сложная структура делает эти алгоритмы весьма неудобными для реализации и массового использования. Поэтому наиболее широкое распространение у пользователей получили различные модификации двумерного БПФ Кули-Тьюки: "по основанию два", "по основанию четыре", БПФ с векторным основанием (многомерное обобщение сплит-радикс БПФ)

В данном разделе предлагается альтернативная интерпретация известной схемы Кули-Тьюки редукции ДПФ. Если при ее классической интерпретации множество входных и выходных индексов *разбиваются* на подмножества, определяющие конкретный выбор схемы редукции, то альтернативный авторский подход связан с *покрытиями* области суммирования подмножествами (возможно,

пересекающимися) со специальными метрическими свойствами.

4.1 Альтернативная интерпретация редукции Кули-Тьюки

В одномерном случае классическая редукция БПФ Кули-Тьюки сводит вычисления ДПФ длины $N=2^r$ к двум ДПФ длины $N/2$ и некоторому числу дополнительных умножений на степени первообразного корня w степени N из единицы:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) w^{mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f(2n) w^{2mn} \pm w^m \sum_{n=0}^{N/2-1} f(2n+1) w^{2mn}. \quad (4.1)$$

При этом область суммирования оказывается разбитой на два подмножества (четных и нечетных чисел). Введем в рассмотрение *2-адическую норму* на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел

$$\|n\|_2 = \begin{cases} 2^{-v_2(n)}, & \text{при } n \neq 0; \\ 0, & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

где $v_2(u)$ есть *2-адический показатель* целого числа u :

$$u = 2^{v_2(u)} v, \quad (2, v) = 1.$$

Тогда область суммирования в левой части соотношения (4.1) покрывается двумя множествами с 2-адическими диаметрами, равными $1/2$: *главной подрешеткой* четных чисел и множеством нечетных чисел - *аддитивным сдвигом главной подрешетки*. Мультипликативная сложность БПФ определяется сложностью умножений на коэффициенты при сумме в правой части (4.1), соответствующей сдвигу главной решетки.

Альтернативная интерпретация соотношения (4.1) связана с действием проектирующего оператора $\mathbf{A}: n \mapsto 2n \ (n \in \mathbb{Z})$.

Пусть $D = 2\mathbb{Z}$ - множество целых четных чисел, $\chi_D(n)$ - характеристическая функция множества D , положим:

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \chi_D(n), \quad L^k(S) = \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{A}^k n),$$

тогда справедливы равенства:

$$2S = L^1(S), \quad f(\mathbf{A}^k n) = f(2^k n),$$

и соотношение (4.1) принимает форму

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n) w^{mn} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{A} n) w^{m \mathbf{A} n} \pm \frac{1}{2} w^m \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{A} n) w^{m \mathbf{A} n}, \quad (4.2)$$

определяющую схему редукции. В отличие от традиционной интерпретации, вычисление ДПФ редуцируется не к вычислению более коротких сумм, а к вычислению ДПФ той же длины, но для все более "простых" функций все с более коротким периодом и, в конце концов, к вычислению ДПФ постоянных функций.

Мультипликативная сложность БА определяется в этом случае сложностью умножений на коэффициенты при суммах, соответствующих сдвигу (сдвигам) главной подрешетки, то есть тем, насколько "большую часть" области суммирования можно покрыть главной подрешеткой.

Рассмотрим некоторые примеры развития многомерной версии этой идеи.

4.2 Алгоритмы двумерного ДПФ с покоординатным прореживанием области суммирования

Целью настоящего раздела является явное описание алгоритма двумерного ДПФ с достаточно простой структурой, имеющего меньшую сложность, чем наилучший из известных БА (алгоритм с векторным основанием), использующий *традиционную* интерпретацию двумерной редукции типа Кули-Тьюки. Основным результатом данного раздела является следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $f(n) \in \mathbb{C}$; $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2$:

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad \mathbf{m} = (m_1, m_2), \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = n_1 m_1 + n_2 m_2;$$

$$\Omega_N = \{ \mathbf{n} = (n_1, n_2) : 0 \leq n_j \leq N-1; 1 \leq j \leq 2 \} \subseteq \mathbb{Z}^2.$$

Пусть $F(\mathbf{m})$ - двумерный дискретный спектр Фурье:

$$F(\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega_N} f(\mathbf{n}) w^{\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle}, \quad \mathbf{m} \in \Omega_N, \quad N = 2^k, \quad (4.3)$$

$w \in \mathbb{C}$ - первообразный корень степени N из единицы.

Тогда существует алгоритм вычисления преобразования (4.2), для которого справедлива оценка мультипликативной сложности

$$M(N^2) \leq \frac{6}{5} N^2 \log_2 N. \quad (4.4)$$

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Пусть комплекснозначная N -периодическая по каждому скалярному аргументу функция $s(n)$ определена на $\mathbb{Z}^2$,

$$D = \{\mathbf{n} = (2n_1, n_2) : 0 \leq n_j \leq N-1; 1 \leq j \leq d\} \subset \mathbb{Z}^2,$$

функция $\chi_D(n)$ - характеристическая функция множества D .

Лемма 4.1. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ - линейные операторы из $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbf{A}\mathbf{n} = (2n_2, n_1), \quad \mathbf{B}\mathbf{n} = (n_2, 2n_1),$$

($\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$ - оператор, сопряженный к $\mathbf{A}$).

Положим:

$$S = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega_N} s(\mathbf{n}) \chi_D(\mathbf{n}), \quad L^t(S) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega_N} s(\mathbf{A}^t \mathbf{n}).$$

Тогда справедливы равенства:

$$2S = L^1(S), \quad s(\mathbf{A}^{2t} \mathbf{n}) = s(2^t \mathbf{n}), \quad s(\mathbf{B}^{2t} \mathbf{n}) = s(2^t \mathbf{n}).$$

Последовательное преобразование области суммирования при переходе от S к $L^t(S)$ показано на рисунке 4.1. Новая область суммирования выделена серым фоном.

Положим далее $T_a s(\mathbf{n}) = s(\mathbf{n} + \mathbf{a})$. Следующее утверждение является основным в описании схемы редукции, учитывающей тривиальность умножений на $(\pm i)$ и непосредственно следует из леммы 4.1.

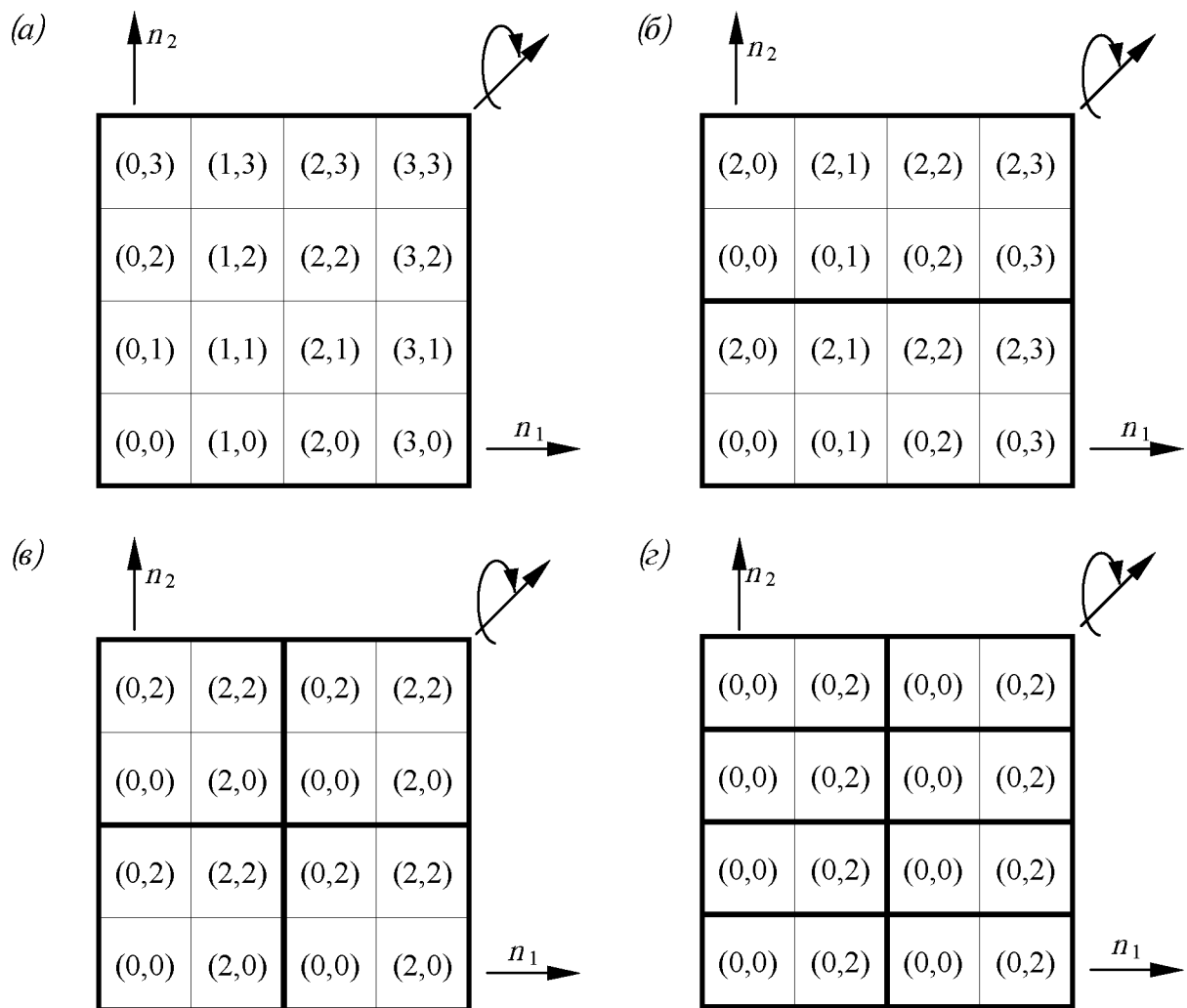


Рисунок 4.1 - Пошаговое преобразование области суммирования для $L^t(S)$

Лемма 4.2. При $N = 2^T$ и $t = 0, 1, \dots$ справедливо соотношение:

$$L^t(F(\mathbf{m})) = 2^{-1} L^1\left(F_0(\mathbf{B}^t \mathbf{m})\right) + 2^{-4} \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda} w^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{B}^t \mathbf{m} \rangle} L^4\left(Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{B}^t \mathbf{m})\right), \quad (4.5)$$

где

$$Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{m}) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega_N} w^{\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle} T_{\mathbf{a}} f(\mathbf{n}),$$

$$\Lambda = \left\{ \mathbf{a} = (a_1, a_2) : a_1 \neq 0; a_j = 0, 1; 1 \leq j \leq 2 \right\}.$$

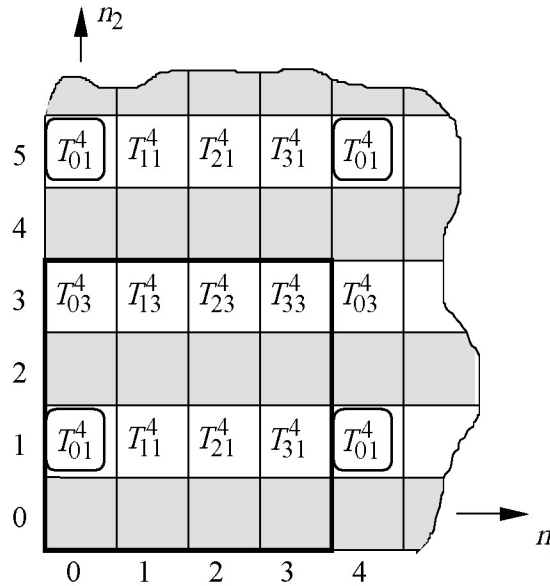


Рисунок 4.2 - Покрытие области суммирования непересекающимися множествами для алгоритма теоремы 4.1 (T_{pq}^r - сдвиг решетки $\mathbf{A}^r \mathbb{Z}^2$ на вектор $\mathbf{a} = (p \ q)$)

Лемма 4.3. Пусть $\mathbf{a} \in \Lambda$, $t = 2q + \tau$, $0 \leq \tau < 2$,

$$G_a^{q,\tau}(\mathbf{m}) = w^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{B}^t \mathbf{m} \rangle} L^{2q} \left(Q_a(\mathbf{B}^\tau \mathbf{m}) \right), \quad N_q = 2^{-q} N.$$

Тогда при фиксированном векторе $\mathbf{a}$ арифметическая сложность вычисления массива $G_a^{q,\tau}(\mathbf{m})$ для $\mathbf{m} \in \Omega_N$ равна сложности вычисления массива $G_a^{q,\tau}(\mathbf{m})$ для $\mathbf{m} \in \Omega^{q,\tau}$, где $\Omega^{q,\tau}$ - фундаментальная область:

$$\Omega^{q,\tau} = \begin{cases} \left\{ \mathbf{m} : 0 \leq m_1 < N_{q+2}, 0 \leq m_2 < N_{q+1} \right\}, & \text{при } t = 1; \\ \left\{ \mathbf{m} : 0 \leq m_u < N_{q+1}, u = 1, 2 \right\} & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Доказательство. При $\tau = 0$, например, функция $G_a^{q,0}(\mathbf{m})$ инвариантна относительно преобразований сдвигов $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m} + \mathbf{b}N_q$ для $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^2$ и, самое большее, меняет знак при преобразованиях

$$\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m} + 2^{-1} \mathbf{b}N_q = \mathbf{m} \mapsto \mathbf{m} + \mathbf{b}N_{q+1}.$$

Аналогично рассматривается случай $\tau = 1$.

Доказательство теоремы 4.1. Соотношение редукции (4.5) определяет покрытие решетки $\mathbb{Z}^2$ непересекающимися подрешетками (см. рисунок 4.2) и, например, при

$t=0$, сводит вычисление спектра (4.3) к вычислению спектров более простых функций: функции $f(\mathbf{A}\mathbf{n})$, являющейся $N/2$ - периодической по аргументу n_1 и N -периодической по аргументу n_2 ; $N/2$ - периодических функций $f_a(\mathbf{A}^2\mathbf{n})$ и некоторому числу дополнительных умножений на константы $w^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{m} \rangle}$ для $\mathbf{a} \in \Lambda$.

При переходе от t к $(t+1)$ периодичность преобразуемых функций попеременно по каждому из скалярных аргументов уменьшается в 2 раза. В конце концов, $2r$ -кратное применение соотношения (4.5) приводит к вычислению ДПФ постоянных функций, для вычисления которых не требуется умножений. Поэтому равенство (4.4) следует из (4.5) и леммы 4.3.

4.3 "Чесс-алгоритмы" двумерного ДПФ для $N = 2^r$

В данном разделе для $N = 2^r$ описывается семейство алгоритмов двумерного ДПФ усложняющейся структуры, мультипликативная сложность лучшего из которых меньше, чем у алгоритмов с векторным основанием. В отличие от алгоритмов раздела 4.2, схемы редукции порождаются несколько иными покрытиями области суммирования. Характерная "шахматная" структура новых областей суммирования в этих алгоритмах определила введенное для них название "чесс-алгоритмов" (чесс-БПФ). Мы рассматриваем дополнительное, хотя и необязательное, условие вещественности преобразуемой последовательности, учет которого позволяет еще приблизительно в два раза снизить мультипликативную сложность алгоритма,

Теорема 4.2. Пусть $f(n_1, n_2) \in \mathbb{R}$ - преобразуемый двумерный $(N \times N)$ - массив, $N = 2^r$. Тогда существуют алгоритмы вычисления двумерного ДПФ (4.3), мультипликативная сложность $M(N^2)$ которых имеет оценку:

$$M(N^2) \leq A N^2 \log_2 N, \quad (4.6)$$

где $A = 1; 3/4; 3/5$.

Доказательству теоремы предпослём ряд лемм - аналогов лемм 4.1, 4.2, 4.3.

Пусть комплексная функция $s(n_1, n_2)$ определена на $\mathbb{Z}^2$ и N -периодична по

каждому аргументу; множество $D \subset \mathbb{Z}^2$ состоит из пар целых чисел одной четности:

$$D = \{(n_1, n_2) : n_1 \equiv n_2 \pmod{2}\}. \quad (4.7)$$

Лемма 4.4. Пусть

$$(\mathfrak{R}s)(u_1, u_2) = s(u_2 - u_1, u_1 + u_2) \chi_D(u_2 - u_1, u_1 + u_2);$$

$\mathfrak{R}^t$ - t -я итерация оператора $\mathfrak{R}$; пусть далее

$$S = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} s(n_1, n_2), \quad L^t(S) = \sum_{u_1, u_2=0}^{N-1} (\mathfrak{R}^t s)(u_1, u_2).$$

Тогда $2S = L^1(S)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любой пары целых чисел (n_1, n_2) с условиями:

$$(n_1, n_2) \in D, \quad 0 \leq n_1, n_2 \leq N-1$$

существуют ровно два решения системы сравнений

$$\begin{cases} u_2 - u_1 \equiv n_1 \pmod{N} \\ u_2 + u_1 \equiv n_2 \pmod{N} \end{cases} \quad (4.8)$$

Так как $(n_1, n_2) \in D$, то все решения системы (4.8) являются решениями системы сравнений:

$$\begin{cases} u_1 \equiv \frac{(n_1 + n_2)}{2} \pmod{N/2} \\ u_2 \equiv \frac{(n_1 - n_2)}{2} \pmod{N/2}. \end{cases}$$

Пусть u_1 и u_2 - вычеты чисел $v^\pm = \frac{(n_1 \pm n_2)}{2} \pmod{N/2}$, соответственно.

Тогда из четырех пар чисел

$$\left(u_1 + \frac{Na}{2}, u_2 + \frac{Nb}{2} \right), \quad a, b = 0, 1$$

только две являются решениями системы (4.8) с условием (4.9).

$$0 \leq n_1, n_2 \leq N-1. \quad (4.9)$$

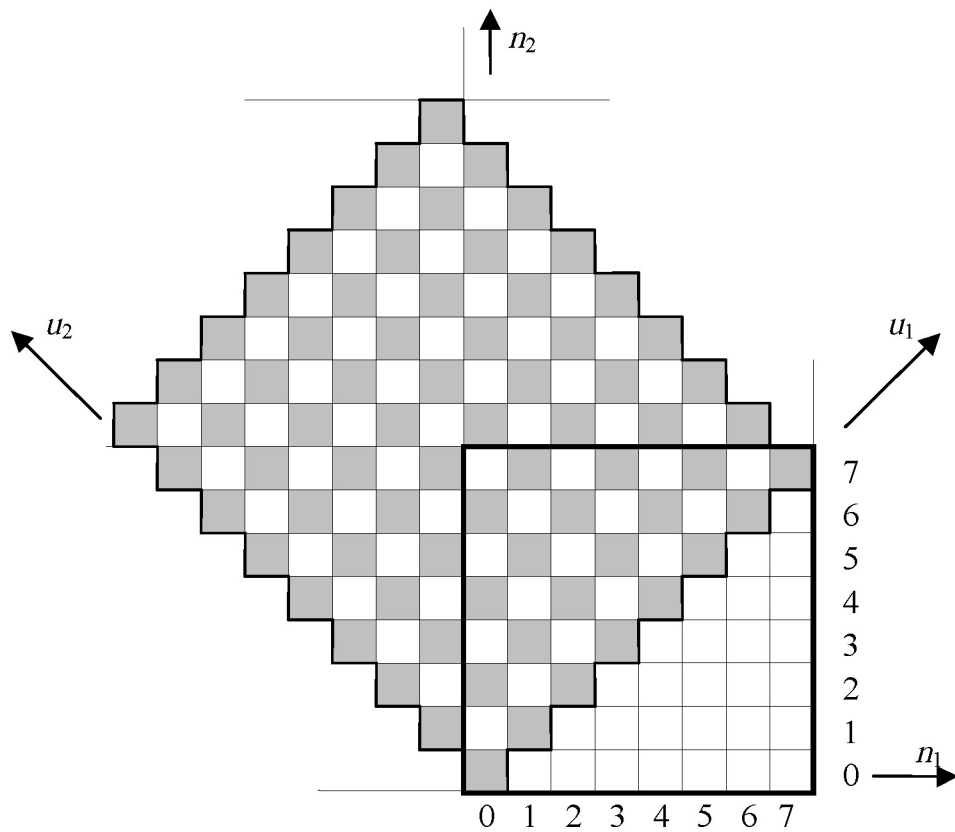


Рисунок 4.3 - Главная подрешетка и новая система координат в алгоритме теоремы [4.2](#)

Преобразование области суммирования при переходе от S к $L^1(S)$ изображено на рисунке [4.4](#). серым фоном выделены индексы, принадлежащие области суммирования по главной подрешетке.

Отметим очевидные равенства

$$\left(\mathfrak{R}^{2^t} s\right)\left(u_1, u_2\right)=s\left(2^t u_1, 2^t u_2\right) \chi_D\left(2^t u_1, 2^t u_2\right), \quad t=0, 1, \dots \quad (4.10)$$

Последовательное изменение областей суммирования в $L^t(S)$ изображено на рисунках [4.4а](#) - [4.4г](#).

Пусть далее $T_{ab}s\left(n_1, n_2\right)=s\left(n_1+a, n_2+b\right)$. Следующая лемма является основной при описании предлагаемой схемы декомпозиции.

Лемма 4.5. При $N=2^r$ ($r \geq 3$), $t=0, 1, \dots$ и $\sigma=2, 3, 4$ справедливы равенства:

$$L^{2^t}\left(F\left(m_1, m_2\right)\right)=\frac{1}{2} L^1\left(F_{00}\left(2^t m_1, 2^t m_2\right)\right)+\frac{1}{2^{\sigma}} \sum_{a, b \in \Lambda_{\sigma}} w^{2^t\left(a m_1+b m_2\right)} L^{\sigma}\left(F_{ab}\left(2^t m_1, 2^t m_2\right)\right),$$

$$L^{2^{t+1}}(F(m_1, m_2)) = \frac{1}{2} L^1 \left(F_{00}(2^t(m_2 - m_1), 2^t(m_1 + m_2)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2^\sigma} \sum_{a, b \in \Lambda_\sigma} w^{2^t(a(m_2 - m_1) + b(m_1 + m_2))} L^\sigma(2^t(m_2 - m_1), 2^t(m_1 + m_2)) \right),$$

где

$$F_{ab}(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} w^{n_1 m_1 + n_2 m_2} T_{ab}(f(n_1, n_2)), \quad (4.11)$$

$$\Lambda_\sigma = \begin{cases} \{0 \leq a, b \leq 1; & a \neq b \pmod{2}\}, & \text{если } \sigma = 2; \\ \{0 \leq a, b \leq 3; & a, b \neq 0 \pmod{2}\}, & \text{если } \sigma = 3; \\ \{0 \leq a, b \leq 1; & a \neq b \pmod{2}\}, & \text{если } \sigma = 4. \end{cases} \quad (4.12)$$

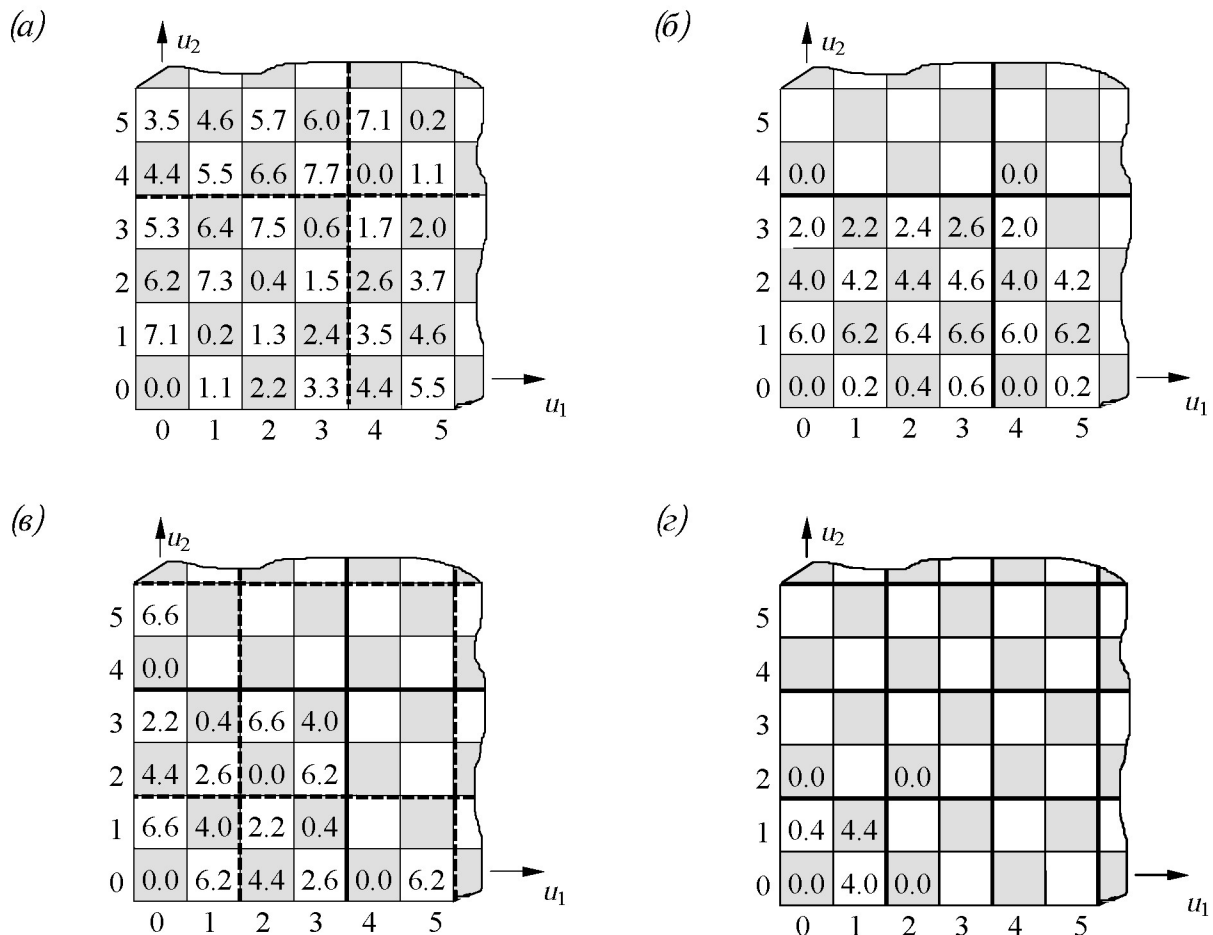


Рисунок 4.4 - Пошаговое преобразование области суммирования для chess-БПФ теоремы [4.2](#)

Таким образом, с помощью леммы 4.5 вычисление спектра $F(m_1, m_2)$ редуцируется к вычислению ДПФ того же размера, но для функций все более

простого вида и, в конце концов, к вычислению ДПФ константы.

Следующая лемма является аналогом леммы 4.3 для рассматриваемого покрытия области суммирования.

Лемма 4.6. Пусть $N_t = N/2^t$,

$$G_{ab}^{\sigma,t}(m_1, m_2) = w^{2^t(am_1 + bm_2)} L^\sigma \left(F_{ab} \left(2^t m_1, 2^t m_2 \right) \right),$$

$$Z_{ab}^{\sigma,t}(m_1, m_2) = w^{2^t(a(m_2 - m_1) + b(m_1 + m_2))} L^\sigma \left(F_{ab} \left(2^t(m_2 - m_1), 2^t(m_1 + m_2) \right) \right).$$

Тогда при фиксированных σ, a, b, t массив $G_{ab}^{\sigma,t}(m_1, m_2)$ достаточно найти для $(m_1, m_2) \in \Omega_{\sigma,G}^t$; а массив $Z_{ab}^{\sigma,t}(m_1, m_2)$ достаточно найти для $(m_1, m_2) \in \Omega_{\sigma,Z}^t$; где $\Omega_{\sigma,G}^t$ и $\Omega_{\sigma,Z}^t$ - фундаментальные области:

$$\Omega_{\sigma,G}^t = \begin{cases} \left\{ (m_1, m_2) : 0 \leq m_1 \leq N_t/2; 0 \leq m_2 \leq N_t/4 \right\}, & \text{если } \sigma = 2; \\ \left\{ (m_1, m_2) : 0 \leq m_1, m_2 \leq N_t/4 \right\}, & \text{если } \sigma = 3; \\ \left\{ (m_1, m_2) : 0 \leq m_1 \leq N_t/4; 0 \leq m_2 \leq N_t/8 \right\}, & \text{если } \sigma = 4; \end{cases}$$

$$\Omega_{\sigma,Z}^t = \begin{cases} \left\{ (m_1, m_2) : 0 \leq m_1 \leq N_t/2; 0 \leq m_2 \leq N_t/8 \right\}, & \text{если } \sigma = 2; \\ \left\{ (m_1, m_2) : 0 \leq m_1 \leq N_t/4; 0 \leq m_2 \leq N_t/8 \right\}, & \text{если } \sigma = 3; \\ \left\{ (m_1, m_2) : 0 \leq m_1 \leq N_t/4; 0 \leq m_2 \leq N_t/16 \right\}, & \text{если } \sigma = 4. \end{cases}$$

Доказательство. Подробное доказательство проведем для $\sigma = 4$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть $\tau_{\alpha\beta}^j$ (сдвиг) и $\rho_{\xi\eta}^j$ (зеркальное отражение) - преобразования фундаментальных областей:

$$\tau_{\alpha\beta}^j : (m_1, m_2) \mapsto \left(m_1 + \alpha \frac{N_t}{2^j}, m_2 + \beta \frac{N_t}{2^j} \right),$$

$$\rho_{\xi\eta}^j : (m_1, m_2) \mapsto \left((-1)^\xi m_1 + \xi \frac{N_t}{2^j}, (-1)^\eta m_2 + \eta \frac{N_t}{2^j} \right),$$

$$j = 1, 2, 3; \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots, 2^j - 1; \quad \xi, \eta = 0, 1.$$

Пусть $\sigma = 4$. Тогда функции

$$L^4 \left(F_{ab} \left(2^t m_1, 2^t m_2 \right) \right)$$

инвариантны относительно преобразований $\tau_{\alpha\beta}^1$ и $\tau_{\alpha\beta}^2$ и N_t -периодичны. Кроме того, справедливо равенство:

$$G_{ab}^{\sigma,t} \left(\mu_{11}^j(m_1, m_2) \right) = \left(G_{ab}^{\sigma,t}(m_1, m_2) \right)^* \quad (j = 1, 2)$$

(* - знак комплексного сопряжения). Пусть

$$\Omega_k = \{ (m_1, m_2) : 0 \leq m_1, m_2 \leq N_t \},$$

тогда доказываемое утверждение для $G_{ab}^{\sigma,t}(m_1, m_2)$ следует из соотношения:

$$\Omega_k \subseteq \bigcup_{\alpha, \beta} \left(\tau_{\alpha\beta}^2 \left(\rho_{11}^2 \left(\Omega_{\sigma, G}^t \right) \right) \cup \tau_{\alpha\beta}^2 \left(\Omega_{\sigma, G}^t \right) \right).$$

Аналогично, функции

$$L^4 \left(F_{ab} \left(2^t (m_2 - m_1), 2^t (m_1 + m_2) \right) \right)$$

инвариантны относительно преобразований $\tau_{\alpha\beta}^1$ и $\tau_{\alpha\beta}^2$ и умножаются на $\pm 1, \pm i$ при преобразованиях $\tau_{\alpha\alpha}^3$. Доказываемое утверждение для $Z_{ab}^{\sigma,t}(m_1, m_2)$ следует, например, из соотношения:

$$\Omega_k \subseteq \bigcup_{\xi=0}^1 \rho_{\xi\xi}^0 \left(\bigcup_{\alpha=0}^3 \tau_{\alpha 0}^2 \left(\bigcup_{\beta=0}^7 \tau_{\beta\beta}^3 \left(\Omega_{\sigma, Z}^t \right) \right) \right).$$

Доказательство теоремы 4.2. Из лемм 4.5 и 4.6, а также вида фундаментальной областей $\Omega_{\sigma, G}^t$ и $\Omega_{\sigma, Z}^t$ для $\sigma = 2, 3, 4$ легко получаем рекуррентные соотношения для мультипликативной сложности $Q_N(t)$ вычисления $D^t(\hat{f}(m_1, m_2))$:

$$Q_N(t) = \begin{cases} Q_N(t+1) + 2Q_N(t+2) + 3N^2/2^{t+2}, & \text{если } \sigma = 2; \\ Q_N(t+1) + 4Q_N(t+3) + 3N^2/2^{t+2}, & \text{если } \sigma = 3; \\ Q_N(t+1) + 8Q_N(t+4) + 3N^2/2^{t+2}, & \text{если } \sigma = 4. \end{cases} \quad (4.13)$$

Как обычно, считаем, что умножения комплексных чисел реализованы по схеме "три сложения, три умножения", а умножения на степени двойки не учитываются. Так как

$$Q_N(0) = M(N^2), \quad Q_N(2r) = 0,$$

то из (4.13) следуют неравенства основной теоремы:

$$M(N^2) = \begin{cases} N^2 \log_2 N, & \text{если } \sigma = 2; \\ 3/4 N^2 \log_2 N, & \text{если } \sigma = 3; \\ 3/5 N^2 \log_2 N, & \text{если } \sigma = 4. \end{cases}$$

Замечание. Как и в одномерном случае, покрытия, определяющие тот или иной вариант чесс-редукции, допускают понятную метрическую (неархимедову) интерпретацию. отождествим пару индексов (n_1, n_2) входного сигнала с целым гауссовым числом:

$$(n_1, n_2) \leftrightarrow n_1 + n_2 i.$$

Функция

$$\Psi_1(a_1 + a_2 i) = \sqrt{2^{-v_2(a_1^2 + a_2^2)}}, \quad \Psi_1(0) = 0; \quad a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$$

является продолжением 2-адической нормы с $\mathbb{Q}$ на алгебраическое расширение $\mathbb{Q}(i)$ и индуцирует на множестве индексов (n_1, n_2) метрику, причем неравенство $\Psi_1(n_1, n_2) \leq 1/2$ равносильно соотношению $n_1, n_2 \equiv 0 \pmod{2}$.

Именно относительно нормы Ψ_1 неявно рассматриваются покрытия области определения входных данных, определяющие схему редукции в известных алгоритмах.

Пусть теперь

$$\psi_2(a_1 + a_2 i) = 2^{-v_2(a_1 + a_2)}, \quad \psi_2(0) = 0.$$

Тогда нетрудно проверить, что функция ψ_2 индуцирует на $\mathbb{Q}(i)$ метрику, совпадающую на $\mathbb{Q}$ с метрикой, индуцированной 2-адической нормой. Покрытия области определения входных данных в chess-алгоритмах, определяющие схему редукции, рассматриваются относительно ψ_2 .

Неравенство $\psi_2(n_1, n_2) \leq \frac{1}{2}$ равносильно соотношению $n_1, n_2 \equiv 0 \pmod{2}$ и т.д. Таким образом, сложность рассмотренных в разделе 4.3 алгоритмов ДПФ при $\sigma = 2, 3, 4$ определяется тем, "насколько экономно" покрыта подобласть $\psi_2(n_1, n_2) \geq \frac{1}{2}$ области суммирования 2-адическими ψ_2 -шарами с меньшими диаметрами.

Несмотря на то, что традиционные схемы редукции двумерного ДПФ неявно используют метрические свойства покрытий относительно метрики, индуцированной нормой Ψ_1 , эти схемы могут быть также интерпретированы в терминах метрических свойств относительно нормы ψ_2 .

4.4 Алгоритмы двумерного ДПФ - алгоритмы с расщеплением основания нецелого порядка

В настоящем разделе показывается, что известные БА двумерных ДПФ (БПФ "по основаниям два и четыре", БПФ с векторным основанием) также допускают описание в терминах соотношений редукции, аналогичных (4.5) но реализуемым "с шагом два".

Пример 4.1. Двумерный БА ДПФ "по основанию два".

Традиционная интерпретация схемы редукции этого алгоритма имеет вид

$$\begin{aligned} F(m_1, m_2) = & \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) w^{n_1 m_1 + m_2 n_2} = \sum_{n_1, n_2=0}^{N/2-1} f(2n_1, 2n_2) (w^2)^{n_1 m_1 + m_2 n_2} + \\ & + \sum_{\substack{a, b=0 \\ (a, b) \neq (0,0)}}^1 w^{a m_1 + b m_2} \sum_{n_1, n_2=0}^{N/2-1} f(2n_1 + a, 2n_2 + b) (w^2)^{n_1 m_1 + m_2 n_2}. \end{aligned}$$

Это соотношение редукции равносильно соотношению

$$F(\mathbf{m}) = \frac{1}{4} L^2 \left((Q_0(\mathbf{m})) + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda_1} w^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{m} \rangle} L^2(Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{m})) \right),$$

где

$$\Lambda_1 = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2); a_1, a_2 = 0, 1\} \setminus \{\mathbf{0}\},$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2), \quad \mathbf{m} = (m_1, m_2), \quad \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = n_1 m_1 + m_2 n_2;$$

$$\mathbf{Bm} = (m_2, 2m_1).$$

Соответствующее покрытие области суммирования показано на рисунке [4.5](#).

Закрашены элементы главной подрешетки $\mathbf{A}^2 \mathbb{Z}^2$. Элементы подрешетки, сдвинутой на вектор $\mathbf{a} = (p, q)$ обозначены T_{pq}^2 .

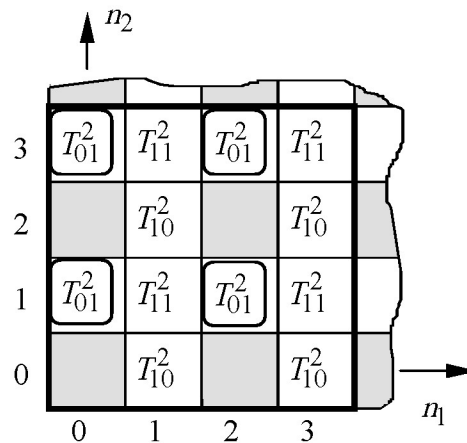


Рисунок [4.5](#) - Покрытие для двумерного БПФ "по основанию 2"

Пример 4.2. Двумерный БА ДПФ "по основанию четыре".

$$F(m_1, m_2) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) w^{n_1 m_1 + m_2 n_2} = \sum_{n_1, n_2=0}^{N/4-1} f(4n_1, 4n_2) (w^4)^{n_1 m_1 + m_2 n_2} +$$

$$+ \sum_{\substack{a, b=0 \\ (a, b) \neq (0,0)}}^3 w^{a m_1 + b m_2} \sum_{n_1, n_2=0}^{N/4-1} f(4n_1 + a, 4n_2 + b) (w^4)^{n_1 m_1 + m_2 n_2}.$$

В обозначениях предыдущего примера это соотношение редукции равносильно соотношению

где

$$\Lambda_3 = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2); a_1, a_2 = 0, 1, 2, 3\} \setminus \{\mathbf{a} = 2(a_1, a_2); a_1, a_2 = 0, 1\}.$$

Соответствующее покрытие области суммирования показано на рисунке [4.7](#). Закрашены элементы главной подрешетки $\mathbf{A}^2\mathbb{Z}^2$. Элементы подрешетки, сдвинутой на вектор $\mathbf{a} = (p, q)$ обозначены T_{pq}^4 .

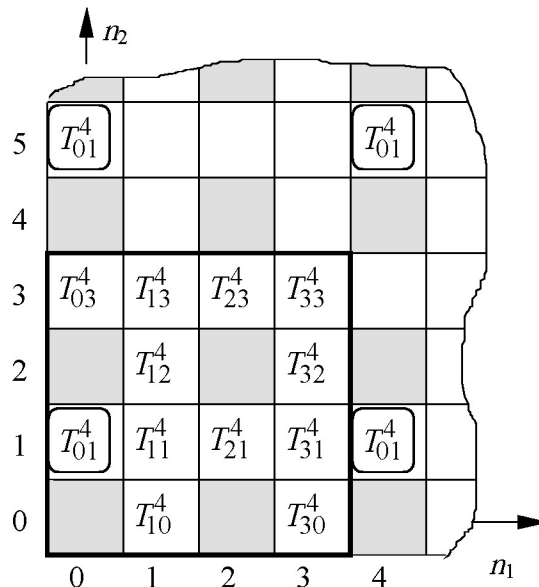


Рисунок 4.7 - Покрытие для двумерного БПФ с векторным основанием

4.5 Алгоритмы двумерного ДПФ с "мультипокрытиями" области суммирования

Анализ доказательств предыдущих теорем раздела и примеров [4.1](#), [4.2](#), [4.3](#) показывает, что мультипликативная сложность алгоритмов с расщеплением основания нецелого порядка определяется количеством умножений на степени w сумм, соответствующих покрытию области суммирования неглавными (сдвинутыми) подрешетками. Другими словами, чем бóльшая часть области суммирования покрывается главной (главными) подрешетками, тем меньшую мультипликативную сложность имеет алгоритм.

Как известно [\[2\]](#), оценка мультипликативной сложности БА двумерного ДПФ при $N = 2^F$ имеет вид:

$$M(N^2) \leq C N^2 \log_2 N + O(N^2). \quad (4.14)$$

Наилучшим значением константы C в (4.14), а именно $C = 9/7$, для БА типа Кули-Тьюки обладает алгоритм с векторным основанием (Vector Radix FFT). Абсолютно лучшее, неулучшаемое, по мнению авторов монографии, значение константы $C=1$ у алгоритма Нуссбаумера [15], синтезированного с применением принципиально иной техники полиномиальных преобразований.

Ниже мы покажем, что, во-первых, алгоритм двумерного ДПФ с мультипликативной сложностью, равной сложности алгоритма Нуссбаумера может быть синтезирован в рамках рассматриваемого подхода; во-вторых, может быть синтезирован алгоритм, для которого значение константы C равно $2/3$.

Снижение сложности обеспечивается применением рассматриваемой схемы декомпозиции с покрытием области суммирования несколькими главными *перекрывающимися подрешетками*.

Теорема 4.3. Существует алгоритм вычисления преобразования (4.3) с мультипликативной сложностью:

$$M(N^2) \leq N^2 \log_2 N. \quad (4.15)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ - линейные операторы из $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{n} = (2n_2, n_1), \quad \mathbf{B}_1 \mathbf{n} = (n_2, 2n_1); \quad \mathbf{A}_2 \mathbf{n} = (n_2, 2n_1), \quad \mathbf{B}_2 \mathbf{n} = (2n_2, n_1).$$

Тогда справедливо соотношение редукции

$$F(\mathbf{m}) = 2^{-1} L_1^1(Q_0(\mathbf{m})) + 2^{-1} (L_2^1(Q_0(\mathbf{m})) - 2^{-1} L_1^2(Q_0(\mathbf{m}))) + 2^{-4} \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda} w^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{m} \rangle} L_1^4(Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{m})) \quad (4.16)$$

где $\Lambda = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2); a_1, a_2 = 1, 3\}$.

Соответствующее покрытие области суммирования изображено на рисунке 4.8. Цифрами 1 и 2 обозначены элементы подрешеток $\mathbf{A}_1 \mathbb{Z}^2$ и $\mathbf{A}_2 \mathbb{Z}^2$, соответственно; T_{pq}^4 - элементы подрешеток $\mathbf{A}_1^4 \mathbb{Z}^2 = \mathbf{A}_2^4 \mathbb{Z}^2$, сдвинутых на вектор $\mathbf{a} = (p, q)$.

Отметим, что $\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{A}_2^2$ и $L_1^2(Q_0(\mathbf{m})) = L_2^2(Q_0(\mathbf{m}))$. Поэтому для мультипликативной сложности $V(t)$ вычисления $L^t(F(\mathbf{m}))$ справедливо рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}
V(t) &= V(t+1) + (V(t+1) - V(t+2)) + 4V(t+4) + 3 \cdot 4 \cdot \frac{N}{16} = \\
&= 2V(t+1) - V(t+2) + 4V(t+4) + 3 \frac{N^2}{4}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

	T_{11}^4		T_{31}^4		T_{11}^4
1,2	2	1,2	2	1,2	
1	T_{13}^4	1	T_{33}^4	1	T_{13}^4
1,2	2	1,2	2	1,2	
1	T_{11}^4	1	T_{31}^4	1	T_{11}^4
1,2	2	1,2	2	1,2	

Рисунок 4.8 - Мультипокрытие для двух главных подрешеток в теореме 4.3

Из соотношения (4.17) с помощью рассуждений, аналогичных соответствующей аргументации при доказательствах предыдущих теорем, следует утверждение теоремы 4.4.

Теорема 4.4. Существует алгоритм вычисления преобразования (4.3) с мультипликативной сложностью:

$$M(N^2) \leq \frac{2}{3} N^2 \log_2 N. \tag{4.18}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ - линейные операторы из $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbf{A}_3 \mathbf{n} = (2n_2, n_1), \quad \mathbf{B}_3 \mathbf{n} = (n_2, 2n_1); \quad \mathbf{A}_4 \mathbf{n} = (n_2, 4n_1), \quad \mathbf{B}_4 \mathbf{n} = (4n_2, n_1).$$

$\mathbf{C} = \mathbf{A}_5$ - оператор, отображающий решетку $\mathbb{Z}^2$ на чесс-решетку теоремы 4.2:

$$\mathbf{C} \mathbf{n} = (n_2 - n_1, n_1 + n_2).$$

Тогда справедливо соотношение редукции

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{m}) &= 2^{-1} L_2^1(Q_0(\mathbf{m})) + (2^{-1} L_5^1(Q_0(\mathbf{m})) - 2^{-2} L_2^2(Q_0(\mathbf{m}))) + \\
&+ (2^{-2} L_3^1(Q_0(\mathbf{m})) - 2^{-3} (L_2^1 \cdot L_3^1)(Q_0(\mathbf{m}))) + 2^{-4} \sum_{\mathbf{a} \in \Lambda} w^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{m} \rangle} L_2^4(Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{m})), \tag{4.19}
\end{aligned}$$

где $\Lambda = \{\mathbf{a} = (1, 2), (3, 2)\}$, из которого следует равенство [\(4.18\)](#).

Соответствующее покрытие области суммирования изображено на рисунке [4.9](#).

3	5	$T_{21}\Gamma_4$	5	3	5
2,3,5	2	2,5	2	2,3,5	2
3	5	$T_{23}\Gamma_4$	5	3	5
2,3,5	2	2,5	2	2,3,5	2
3	5	$T_{21}\Gamma_4$	5	3	5
2,3,5	2	2,5	2	2,3,5	2

Рисунок 4.9 - Мультипокрытие для трех главных подрешеток в теореме [4.4](#)

5 НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1 Задача вычисления ДПФ последовательности произвольной длины

Неблагоприятным следствием популярности БПФ-алгоритма Кули-Тьюки для $N = 2^r$ является широкое распространение мнения о том, что применять дискретное преобразование Фурье практически лишь при такой длине последовательности. В результате БПФ-алгоритмы стали диктовать параметры применяемых устройств вместо того, чтобы приложения диктовали выбор подходящего алгоритма БПФ [2].

В задачах, не предполагающих жестких аппаратных требований к длине обрабатываемого сигнала применение только традиционных алгоритмов БПФ Кули-Тьюки приводит к необходимости увеличивать период обрабатываемых сигналов - добавлять нулевые отсчеты до ближайшего "хорошего" целого числа вида $N^* = 2^r$. Такие числа расположены в натуральном ряду весьма редко, что приводит к почти двукратному увеличению удельной вычислительной сложности для "плохих" N , равных, например, $2^r + 1 = N$ (см. рисунок 5.1 график 1).

Задача вычисления дискретного спектра последовательности произвольной длины может быть решена на основе знания арифметических особенностей базисных функций ДПФ, минимальной информации о последовательности и информации о всевозможных алгоритмах БПФ. Цель раздела – показать возможность синтеза "наилучших" алгоритмов, ориентированных на вычисление ДПФ последовательностей (массивов) произвольного периода при наличии ограниченного количества базовых эффективных алгоритмов дискретного преобразования Фурье, реализованных для относительно небольшого числа длин преобразования. Такая задача решается в несколько этапов.

На первом этапе специалист в области синтеза БА ДОП формирует набор алгоритмов БПФ, ориентированных на различные типы входных данных (целые, вещественные, комплексные), длины входных последовательностей (четные, нечетные, равные целой степени простого числа и т.п), размерность входного сигнала и т.д. и описывает их свойства. Например, алгоритм Кули-Тьюки наиболее эффективен для преобразования Фурье комплексной последовательности, длина которой равна целой степени двойки. При этом сформированный набор алгоритмов должен быть не слишком велик (для ускорения последующей работы по его анализу и

формированию наилучшего алгоритма) и, в то же время, содержать разнообразные алгоритмы, учитывающие различные особенности параметров входного сигнала. Особое значение на этом этапе имеет квалификация специалиста в предметной области.

На втором этапе производится комплексный анализ вычислительной сложности алгоритмов, исследуются возможности формирования на их основе новых алгоритмов, например, алгоритмов промежуточных длин с использованием декомпозиции Гуда-Томаса] или специализированных алгоритмов для вещественного входного сигнала с использованием идеи совмещения или уменьшения размера фундаментальной области. При подготовке системы к работе на конкретной ЭВМ исследуется также время выполнения отдельных алгоритмов на данном компьютере, для того чтобы впоследствии система могла вырабатывать рекомендации по выбору конкретного алгоритма в зависимости от пожеланий пользователя как по теоретической (арифметической) или структурной сложности, так и по реальному времени работы программы.

Предложенный специалистом набор алгоритмов и технологических приемов по их использованию, а также информация о теоретической сложности и реальном быстродействии алгоритмов составляют первоначальное заполнение базы знаний.

Как уже отмечалось выше, типичными схемами редукции ДПФ являются редукция Кули-Тьюки, редукция Гуда-Томаса, редукция Рейдера, методы совмещенного вычисления ДОП.

Редукция Кули-Тьюки сводит, например, вычисление одномерного ДПФ длины $N = p^k$ к вычислению преобразований длины $N_1 = p^{k-1}$ и неявно использует арифметические свойства представления значений преобразуемого сигнала, согласованные с конкретной машинной арифметикой, а также топологические свойства множества индексов входных и выходных данных [27].

Редукция Гуда-Томаса использует изоморфизм прямого произведения циклических групп взаимно простых порядков и циклической группы порядка, равного произведению порядков прямых сомножителей.

Редукция Рейдера основана на известном факте цикличности мультипликативной группы простого конечного поля и существенно использует алгебраичность значений базисных функций ДОП.

Методы "совмещенного" вычисления ДОП используют избыточность

представления вещественного входного сигнала по отношению к представлению значений базисных функций ДОП в базисе некоторого объемлющего поля или алгебры. Их эффективность определяется наличием достаточно большого числа автоморфизмов этой объемлющей структуры, реализуемых тривиально.

Таким образом, гипотетическая автоматизированная система "должна уметь" анализировать для каждого значения N , ту арифметическую информацию, которая в "рафинированном виде" проявляет себя при синтезе БПФ-алгоритмов для специальных длин $N_k \leq N$.

Автоматизированная система производит выбор оптимальной структуры БПФ-алгоритма длины N на основе информации о следующих БПФ-алгоритмах:

- 1) БПФ Кули-Тьюки с декомпозицией по основанию 2;
- 2) БПФ Кули-Тьюки с декомпозицией по основаниям 3 и 6;
- 3) редукция Гуда-Томаса, для формирования алгоритмов промежуточных длин;
- 4) специальные алгоритмы ДПФ коротких длин.

Большинство алгоритмов представлены в интерпретации данной главы, например алгоритм преобразования Фурье по основанию 3 построен на основании декомпозиции типа Кули-Тьюки, однако в нем использовано специальное представление данных в γ -кодах, что позволяет существенно снизить арифметическую сложность преобразования по сравнению с известными аналогами.

Для обработки конкретной последовательности системе предоставляется информация о типе данных и длине последовательности, ее размерности, пользователь выбирает способ оптимизации алгоритма – по теоретической сложности или реальному быстродействию. Результатом работы системы является подготовленный набор аргументов для некоторого метаалгоритма ДПФ [22, 29], по которым система формирует окончательный вид оптимального алгоритма преобразования последовательности с заданными характеристиками. После чего может быть непосредственно выполнено вычисление дискретного спектра заданной последовательности.

Система способна накапливать информацию, обучаться, поэтому для вычисления спектра другой последовательности с теми же характеристиками не требуется повторения анализа. Система сразу готова к выполнению преобразования.

Таким образом, информация, представленная в системе, обладает конструктивными особенностями присущими базам знаний: внутренней

интерпретируемостью, структурированностью, связностью. Знания, накопленные в системе легко адаптируются к изменениям, например, к замене или дополнению алгоритмов в базовое множество.

На рисунке [5.1](#) представлены графики удельной арифметической сложности вычисления спектра комплексной одномерной последовательности произвольной длины. Здесь N - реальный период; $W^*(N)$ - удельная арифметическая сложность (число арифметических операций на один отсчет входного сигнала) вычисления БПФ сигнала с увеличенным периодом $N^* > N$. На графике 1 приведена сложность вычисления спектра традиционным способом – на базе БПФ Кули-Тьюки по основанию 2. График 2 получен после предоставления системе информации об алгоритмах БПФ по основаниям 3 и 6. Вычислительная сложность снижена в среднем на 5,2% (или в 1,1 раза). После того как система была дополнена знаниями об использовании декомпозиции Гуда-Томаса (график 3) выигрыш в среднем составил 27,6% (1,4 раза). Последний график 4 получен для случая, когда система в дополнении к перечисленным получила знания о специальных алгоритмах преобразования Фурье коротких длин. При этом выигрыш возрастает до 37,2% или 1,6 раза в среднем. Отметим, что для ряда длин удельная сложность вычисления спектра в случае 1 и 4 отличается более чем в два раза. Из графика явно следует, что с ростом объема знаний, которыми обладает система, растет и ее эффективность.

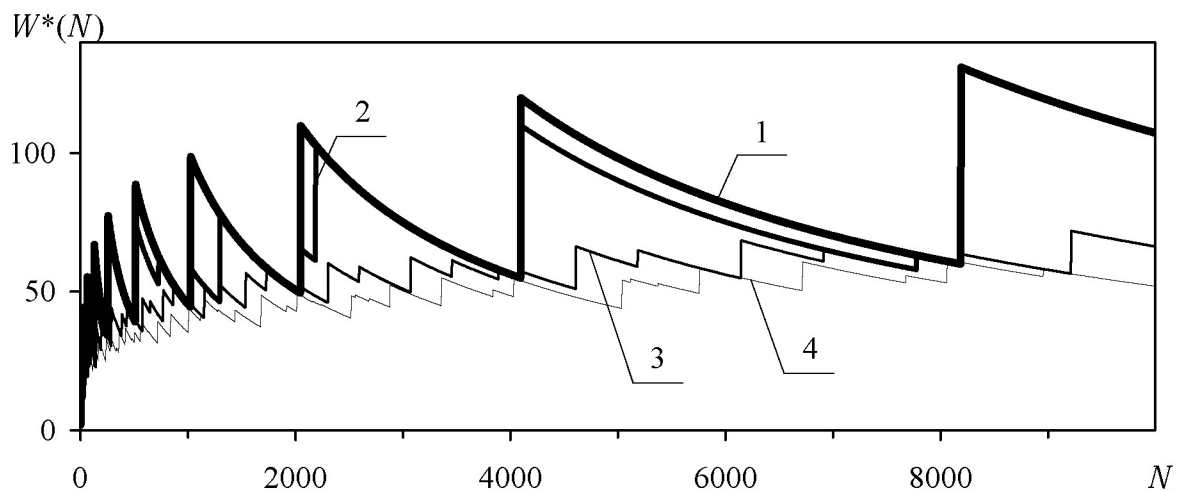


Рисунок 5.1 - Удельная сложность вычисления спектра комплексной одномерной последовательности

Гистограммы распределения вычислительного выигрыша для случаев 2, 3, 4 по отношению к традиционному способу представлены на рисунке [5.2](#) детально (а, б, в)

и более крупными группами (г, д, е). Из них следует, что при увеличении объема информации, которой обладает система, заметно возрастает доля "больших" выигрышей. Если при использовании алгоритмов групп 1 и 2 практически весь выигрыш (91 случай из 100) не превышает 10%, то при использовании всех знаний, доступных системе, удельная сложность вычисления спектра может быть снижена в 2 и более раз в 37% случаев.

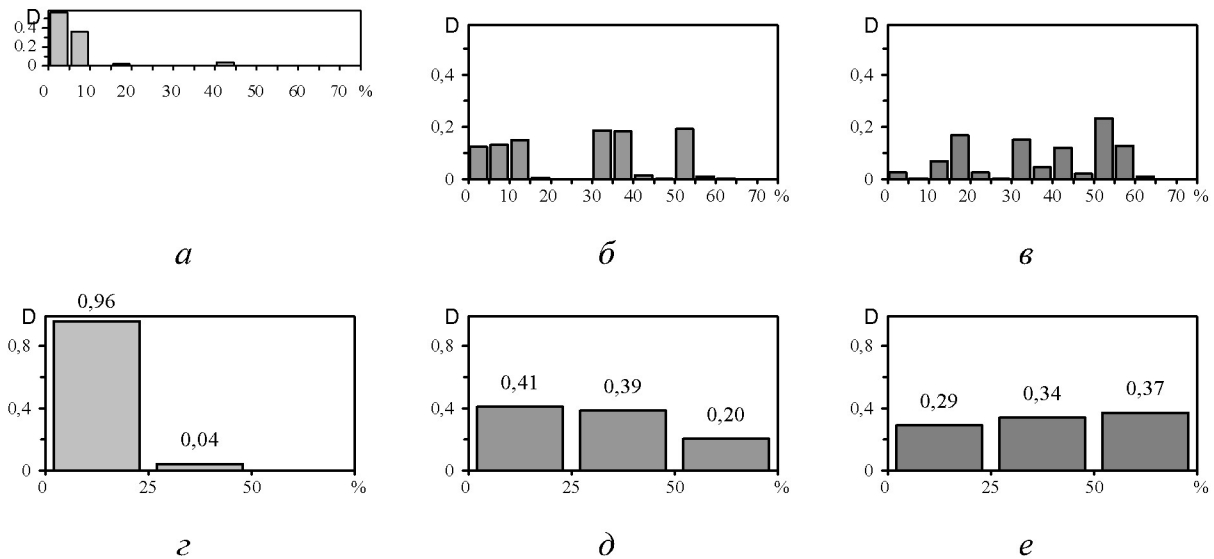


Рисунок 5.2 - Гистограмма распределения вычислительного выигрыша в одномерном случае

Построение аналогичной системы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований для двумерного случая, позволяет достигнуть еще более существенного снижения вычислительной сложности. На рисунке [5.3](#) приведены гистограммы распределения вычислительного выигрыша, рассчитанные для тех же групп алгоритмов, использованных для двумерного сигнала объема $N \times N$. Здесь максимальный выигрыш достигает 80%, причем в 52% случаев сложность может быть снижена более чем в два раза.

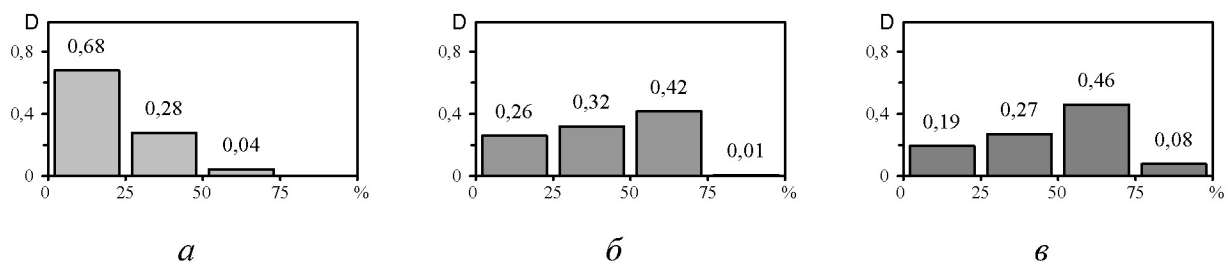


Рисунок 5.3 - Гистограмма распределения вычислительного выигрыша в двумерном случае

5.2 Исследование алгоритмов ДКП в методе блочного кодирования с преобразованием

В обработке изображений хорошо известен метод блочного кодирования изображений, который в настоящее время получил чрезвычайно широкое распространение. Он базируется на использовании обобщенного спектрального представления сигнала. Эффективность метода обуславливается тем, что спектральные компоненты изображения (трансформанты) могут быть статистически более независимы, чем сами отсчеты сигнала, и, следовательно, нести ту же информацию при меньшем объеме передаваемых цифровых данных.

Выбор преобразования в этом методе обусловлен следующими требованиями: преобразование должно быть обратимым, основная информация о сигнале должна быть сосредоточена по возможности в меньшем числе трансформант для обеспечения эффекта сжатия, прямое и обратное преобразование должны легко вычисляться. Идеальным по второму требованию является преобразование Хотеллинга (дискретная версия Карунена-Лоэва), у которого наиболее быстро убывают дисперсии трансформант. Однако на практике оно не используется, так как его базис жестко привязан к автоковариационной функции сигнала и его необходимо строить заново для каждого нового класса сигналов. Кроме того это преобразование не обладает быстрым алгоритмом. Поэтому, как правило, используются известные алгоритмы спектральных преобразований, несколько проигрывающие в качестве, но выигрывающие в скорости. Наиболее близким по своим характеристикам к преобразованию Карунена-Лоэва для широкого класса изображений является дискретное косинусное преобразование [\(1.8\)](#).

Схема метода представлена на рисунке [5.4](#). Входное изображение разбивается на квадратные блоки размером $N \times N$ отсчетов, в каждом блоке выполняется двумерное дискретное косинусное преобразование. Затем производится отбор существенных трансформант и их квантование. Совокупность отобранных и квантованных трансформант для всех блоков составляет содержание сжатых данных.

Ниже описываются некоторые экспериментальные результаты по кодированию изображений с помощью ДКП блоками $N \times N$ при различных значениях N .

Входное изображение подвергалось кодированию с заданными коэффициентом сжатия K_c , размером блока N и типом преобразования $Type$, затем восстанавливалось, и по разности исходного и восстановленного изображений

определялась среднеквадратичная ошибка (ошибка сжатия), внесенная в данные сквозной процедурой кодирования/декодирования. Ниже для краткости будем называть ее ошибкой сжатия (см. рисунок [5.5](#)).

На рисунках [5.6](#), [5.7](#), [5.8](#) приведены тестовые изображения "Портрет", "Аэрофотосъемка", "Глазное дно" и результаты их сжатия/восстановления. Приведенные зависимости позволяют сделать вывод о том, что в принятом методе компрессии применение ДКП устойчиво даст хорошее качество сжатия. Расширение набора длин, для которых существуют эффективные алгоритмы ДКП, позволяет выбрать размер блока, при котором ошибка сжатия при заданном коэффициенте сжатия будет наименьшей. Использование блоков нестандартных размеров ($N \neq 8$) позволяет уменьшить ошибку сжатия в 1,3 - 1,5 раза. Полученные результаты подтверждаются и визуальным качеством восстановленных изображений.

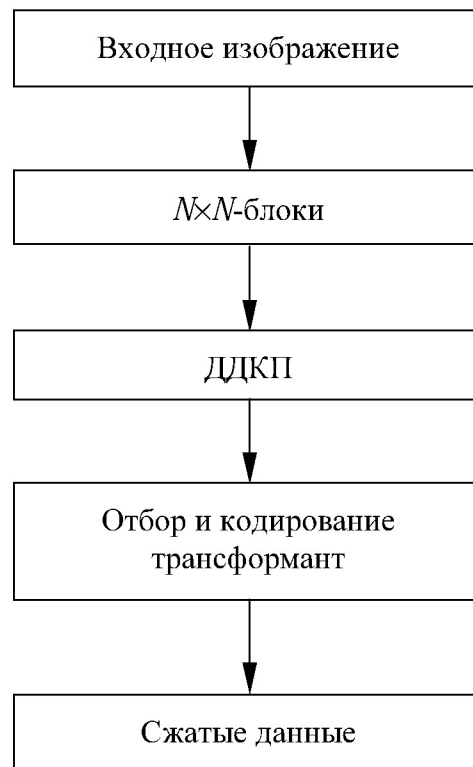


Рисунок 5.4 - Схема метода кодирования с преобразованием.

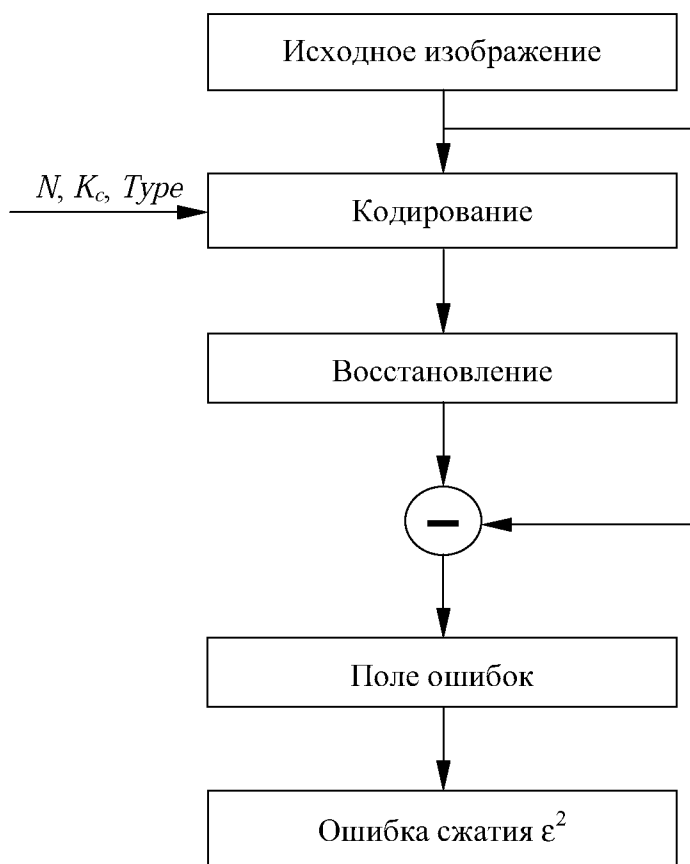


Рисунок 5.5 - Схема эксперимента по кодированию изображений.

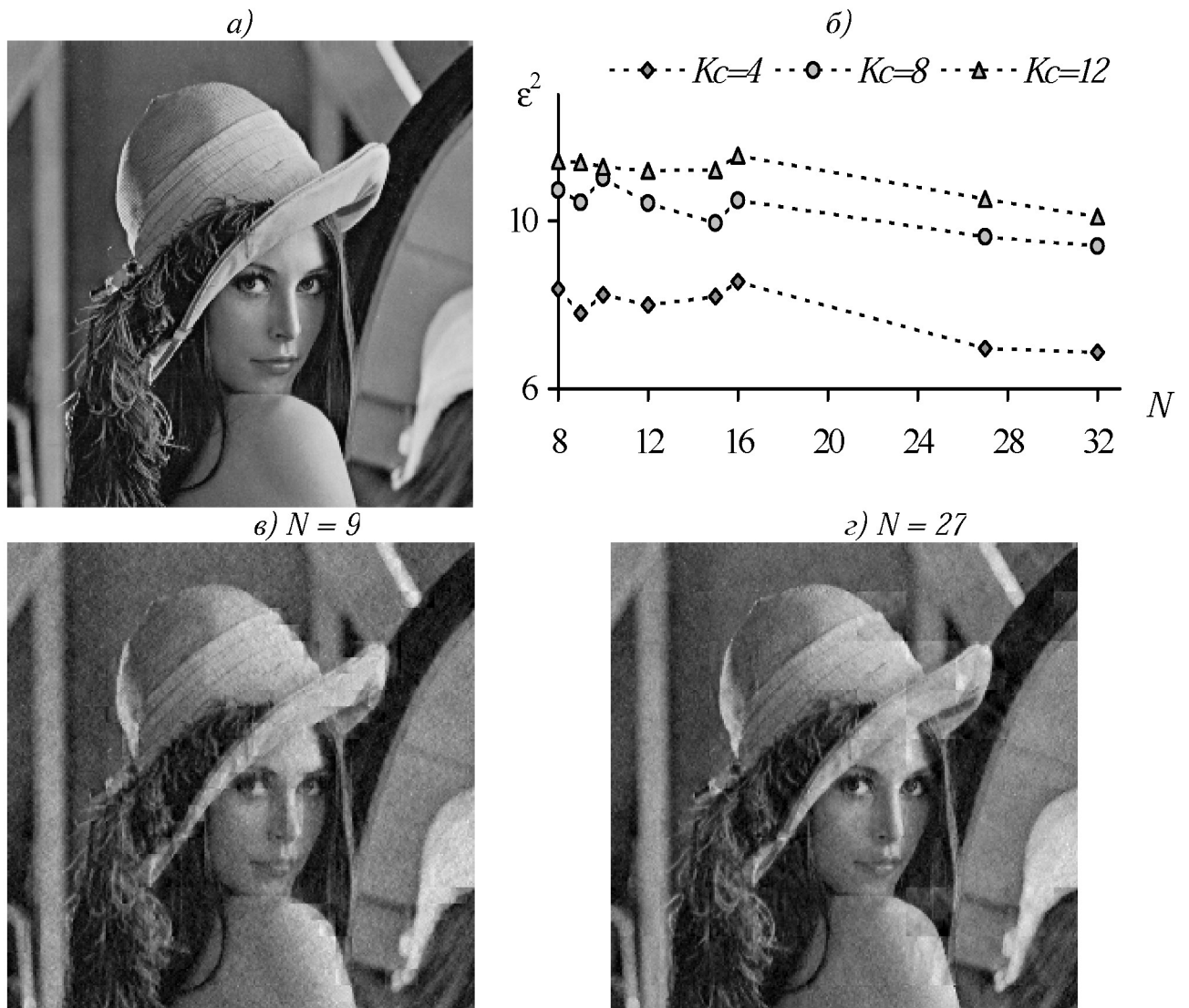


Рисунок 5.6 - Результаты кодирования изображения "Портрет".

a) Исходное изображение.

б) Зависимость ошибки сжатия от размера блока.

в) Восстановленное изображение после кодирования при коэффициенте сжатия $K_c=6$ размере блока $N=9$.

г) Восстановленное изображение после кодирования при коэффициенте сжатия $K_c=6$ размере блока $N=27$.

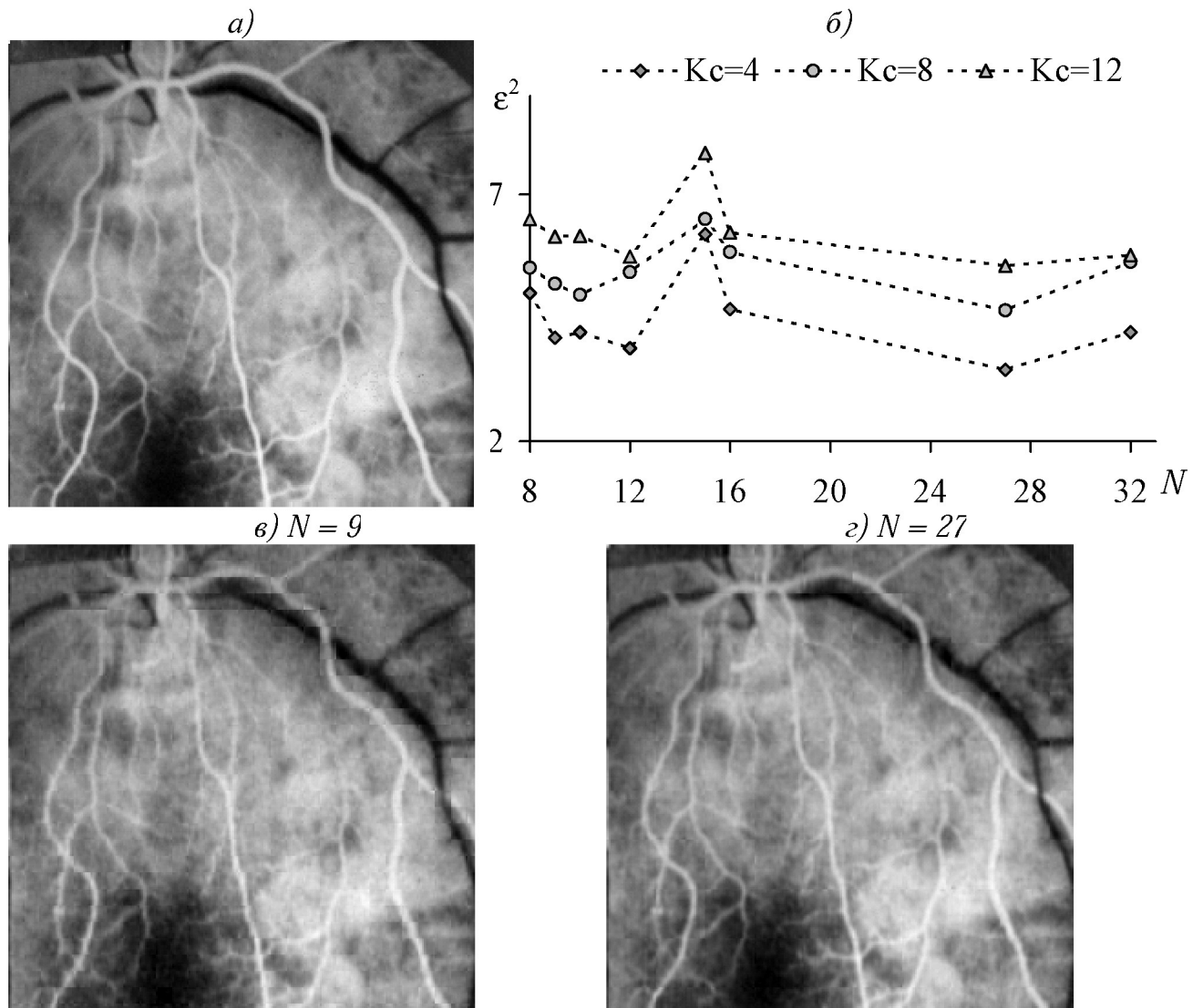


Рисунок 5.7 - Результаты кодирования изображения "Глазное дно".

а) Исходное изображение

б) Зависимость ошибки сжатия от размера блока.

в) Восстановленное изображения после кодирования при коэффициенте сжатия $K_c=10$ размере блока $N=9$

г) Восстановленное изображения после кодирования при коэффициенте сжатия $K_c=10$ размере блока $N=27$

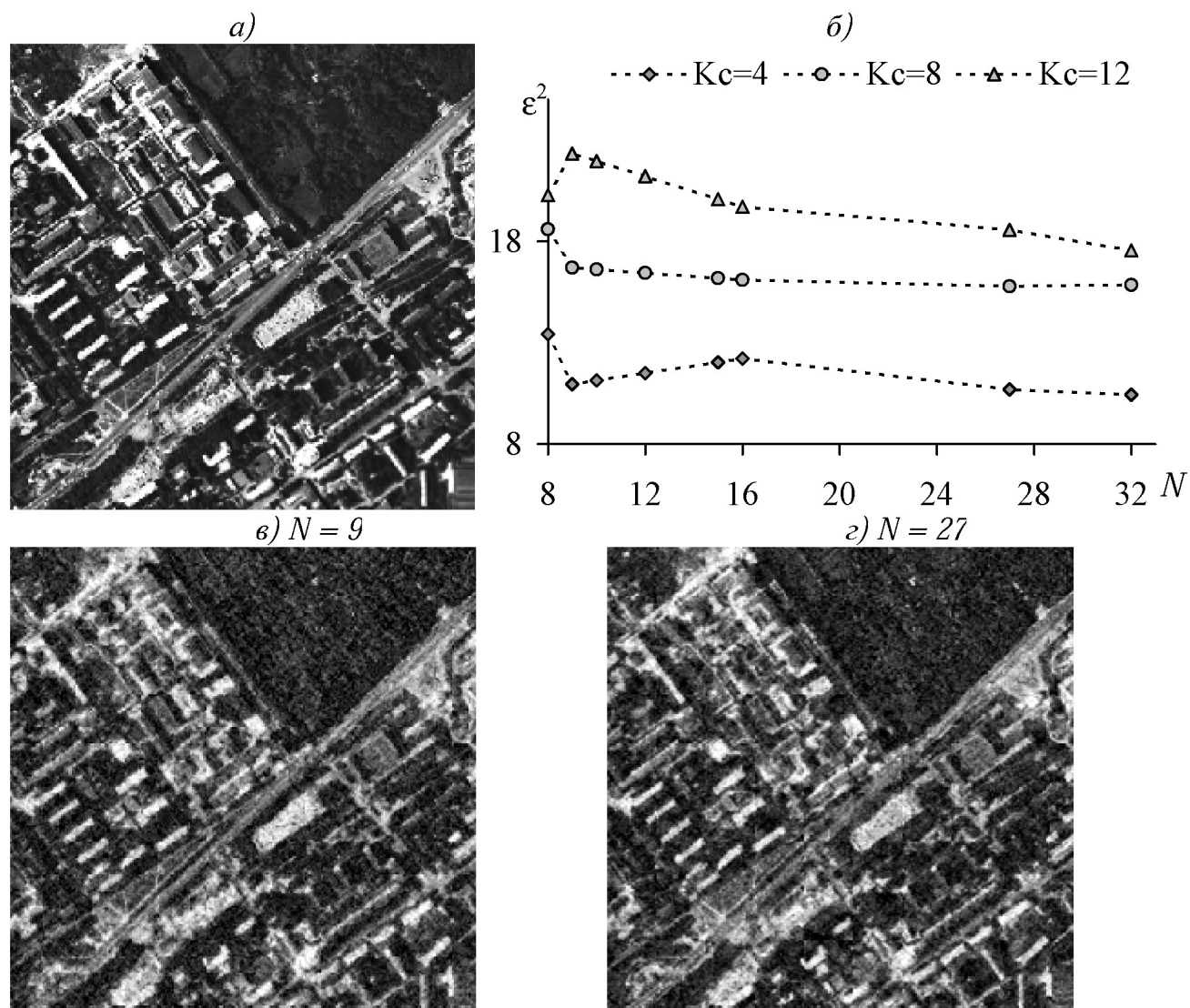


Рисунок 5.8 - Результаты кодирования изображения "Аэрофотосъемка".

а) Исходное изображение

б) Зависимость ошибки сжатия от размера блока.

в) Восстановленное изображение после кодирования при коэффициенте сжатия $K_c=8$ размере блока $N=9$

г) Восстановленное изображение после кодирования при коэффициенте сжатия $K_c=8$ размере блока $N=27$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ахмед, Н. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов [Текст] / Н.Ахмед, К.Р.Рао. - М.: Связь, 1980. – 248 с.
2. Блейхут, Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов [Текст] / Р. Блейхут; пер. с англ. - М.: Мир, 1989. – 448 с.
3. Брейсуэлл, Р. Преобразование Хартли [Текст] /Р. Брейсуэлл; пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 176 с.
4. Вариченко, Л.В. Абстрактные алгебраические системы и цифровая обработка сигналов [Текст] / Л.В.Вариченко, В.Г. Лабунец, М.А. Раков. - Киев: Наукова думка, 1986. – 248 с.
5. Виттих, В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований [Текст] / В.А. Виттих, В.В. Сергеев, В.А. Сойфер. - М.: Наука, 1982. – 214 с.
6. Власенко, В.А. Методы синтеза быстрых алгоритмов свёртки и спектрального анализа сигналов [Текст] / В.А. Власенко, Ю.М. Лапа, Л.П. Ярославский. - М.: Наука, 1990. - 180 с.
7. Гречишников, А.И. Модифицированные алгоритмы БПФ с уменьшенным числом операций умножения. [Текст] / А.И. Гречишников // Радиотехника и электроника. – 1984. - Том 27, №10. – С. 52-57.
8. Григорян, А.М. Алгоритм вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье с произвольными порядками [Текст] / А.М. Григорян // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1991. – Том 31, №10. – С. 1576-1581.
9. Дагман, Э.Е. Быстрые дискретные ортогональные преобразования [Текст] / Э.Е.Дагман, Г.А. Кухарев. - Новосибирск: Наука, 1983. – 233с.
10. Залманзон, Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях [Текст] / Л.А. Залманзон. - М.: Наука, 1989. - 496 с.
11. Капорин, И.Е. Новый алгоритм быстрого преобразования Фурье [Текст] / И.Е. Капорин // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1980. – Том 20, №4. – С. 1054-1058.
12. Крот, А.М. Дискретные модели динамических систем на основе полиномиальной алгебры [Текст] / А.М. Крот. - Минск: Навука і тэхніка, 1990. - 311с.
13. Крот, А.М. Синтез алгоритмов дискретного преобразования Фурье для

- действительных последовательностей на основе полиномиальной алгебры [Текст] / А.М. Крот, Е.Б. Минервина // РЭ. - 1987. – Том 22, №6. – С. 1217-1229.
14. Лабунец, В.Г. Алгебраическая теория сигналов и систем: Быстрое многомерное преобразование Фурье [Текст] / В.Г. Лабунец. - Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1989. – 196 с.)
 15. Лабунец, В.Г. Алгебраическая теория сигналов и систем: Цифровая обработка сигналов [Текст] / В.Г. Лабунец. - Красноярск: Изд-во красноярского университета, 1984. – 244с.
 16. Маккелан, Дж.Х. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов [Текст] / Дж.Х. Маккелан, Ч.М. Рейдер. - М.: Радио и связь, 1983. – 264с.
 17. Нуссбаумер, Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свёрток [Текст] / Г. Нуссбаумер. - М.: Радио и связь, 1985. - 248 с.
 18. Першина, М.В. Декомпозиция двумерного ДПФ с представлением данных в алгебре кватернионов [Текст] / М.В. Першина, М.А. Чичева // Компьютерная оптика, Часть 2. - 1985. - №14-15. – С. 13-21.
 19. Трахтман, А.М. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах [Текст] / А.М. Трахтман, В.А Трахтман. - М.: Советское радио. - 1975. – 208 с.
 20. Чернов, В.М. Алгоритмы двумерных дискретных ортогональных преобразований, реализуемые в кодах Гамильтона-Эйзенштейна [Текст] / В.М. Чернов // Проблемы Передачи Информации. - 1995. – Том 31, №3. – С. 38-46
 21. Чернов, В.М. Быстрый алгоритм дискретного косинусного преобразования нечетной длины [Текст] / В.М. Чернов // Автомат. и вычисл. техн. - 1994. - № 3. – С. 62-70.
 22. Чернов, В.М. Об иерархии групповых алгебр, связанных с параметризацией быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований [Текст] / В.М. Чернов // Доклады Академии наук. - 1997. – Том 357, №3. – С. 317-319.
 23. Ярославский, Л.П. Введение в цифровую обработку изображений [Текст] / Л.П. Ярославский, – М.: Сов. радио, 1979. – 312 с.
 24. Ярославский, Л.П. Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии. Введение в цифровую оптику [Текст] / Л.П. Ярославский. – М.: Радио и связь, 1987. – 296 с.
 25. Briggs, W.L. The DFT: An owner's manual for the discrete Fourier transform [Текст] / W.L. Briggs, E. Van Henson. - SIAM, 1995. - 434p.

26. Chan, S.-C. Fast algorithms for computing the discrete cosine transform [Текст] / S.-C. Chan, K.-L. Ho // IEEE Trans. on Circuits and Systems. - 1992. – Vol.39, №3. – P. 185-190.
27. Chernov, V.M. Arithmetic methods in the theory of discrete orthogonal transforms [Текст] / V.M. Chernov // Workshop on Digital Image Processing and Computer Graphics. Proceedings SPIE. - 1994. – Vol. 2363. – P. 134-141.
28. Chernov, V.M. Discrete Stokes Theorem and Multidimensional Discrete Fourier Transform [Текст] / V.M. Chernov // Pattern Recognition and Image Analysis. - 1998. – Vol.8, №2. – P.506-508.
29. Chernov, V.M. Fast algorithms of discrete orthogonal transforms for data represented in cyclotomic fields [Текст] / V.M. Chernov // Pattern Recognition and Image Analysis. - 1993. – Vol.3, №4. – P. 455-458.
30. Chernov, V.M. On the parametrization of fast algorithms of discrete orthogonal transforms [Текст] / V.M. Chernov // Pattern Recognition and Image Analysis. - 1996. – Vol. 6, №1. – P.73
31. Chichyeva, M.A. On various schemes of 2D-DFT decomposition with data representation in the quaternion algebra [Текст] / MA. Chichyeva, M.V. Pershina // Image Processing and Communications, Institute of Telecommunications Bydgoszcz, Poland. - 1996. – Vol. 2, №1. – P. 13-20.
32. Čížek, V. Discrete Fourier transforms and their applications [Текст] / V. Čížek. - A.Hilger Publ., 1986. – 141 p.
33. Cooley, J.W. An algorithm for the machine computation of complex Fourier series [Текст] / J.W. Cooley, J.W. Tukey // Math. Comp. - 1965. - №19. – P. 297-301.
34. Duhamel, L. Split-radix FFT algorithm [Текст] / L. Duhamel, H. Hollman // Electron. Lett. - 1984. – Vol. 20, №17. – P. 14-16.
35. Good, I.J. The interaction algorithm and practical Fourier analysis [Текст] / I.J. Good // J. Royal Statist. Soc., Ser. B. - 1958. - №20. – P. 361-375.
36. Heideman, M.T. Computation of an odd-length DCT from a real-valued DFT of the same length [Текст] / M.T. Heideman // IEEE Trans. Signal Process. - 1992. – Vol. 40 №1. – P. 54-61.
37. Hou, H.S. A fast recursive algorithm for computing the discrete cosine transform [Текст] / H.S. Hou // IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing. - 1987. - Vol. ASSP-35, No. 10. - P. 1455-1461.
38. Hou, H.S. Interesting properties of the discrete cosine transform. [Текст] / H.S. Hou,

- D.K. Tretter // J. Visual Commun. and Image Represent. – 1992. – Vol. 3, №1. – P.73-83.
39. Schipp, F. Walsh series: An introduction to the dyadic harmonic analysis [Текст] / F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon. - A.Hilger Publ., 1990. – 560p.
 40. Sorensen, H.V. On computing the split-radix FFT [Текст] / H.V. Sorensen, M.T. Heideman, C.S. Burrus // IEEE Trans. – Vol. ASSP-34, №1. – P.152-156.
 41. Suheiro, N. Fast algorithms for the DFT and other sinusoidal transforms [Текст] / N. Suheiro // IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. – 1986. – Vol. ASSP-34, №6. – P. 642-644.
 42. Thomas, L.H. Using a computer to solve problems in physics, in applications and of digital computer [Текст] / L.H. Thomas . - Boston, Mass.: Ginn and Co., 1963. – 153p.
 43. Van Loan, C. Computational frameworks for the fast Fourier transform [Текст] / C. Van Loan. - SIAM, 1992. – 269p.
 44. Wallace, G.K. The JPEG still picture compression standard [Текст] / G.K. Wallace // Communications of the ACM. – 1991. – Vol. 34, №4. – P.31-44.
 45. Wang, Z. Fast Algorithms for the discrete W transform and for the discrete Fourier transform [Текст] / Z. Wang // IEEE Transactions on Acoustic, Speech, and Signal Processing. - 1984. - Vol. ASSP-32, No. 4. - P. 803-816.
 46. Winograd, S. On computing the discrete Fourier transform [Текст] / S. Winograd // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1976. – Vol. 73. – P.1005-1006.
 47. Winograd, S. Arithmetic complexity of computations [Текст] / S. Winograd. - SIAM, 1980. – 93p.