

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Л.М. САВЕЛЬЕВ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика

Самара
Издательство Самарского университета
2020

ISBN 978-5-7883-1547-8
© Самарский университет, 2020

УДК 624.04(075)
ББК 38.112я7
С 128

Рецензенты: начальник отдела АО «РКЦ «Прогресс» В. К. Д у п л и х и н;
канд. техн. наук, доц. В. К. Ш а д р и н

Савельев, Леонид Макарович

С 128 Строительная механика стержневых систем : учебное пособие /
Л. М. Савельев; Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации, Самарский университет. – Самара: Издательство Самарского
университета, 2020. – 1 CD-ROM (1,20 Мб). – Загл. с титул. экрана. –
Текст : электронный.

ISBN 978-5-7883-1547-8

Предназначено для подготовки к традиционным занятиям и самостоя-
тельного освоения курса «Строительная механика стержневых систем» сту-
дентами, обучающимися по направлению подготовки бакалавров 15.03.03
Прикладная механика по профилю «Основы прочности машиностроительных
конструкций».

Подготовлено на кафедре космического машиностроения имени гене-
рального конструктора Д.И. Козлова.

УДК 624.04(075)
ББК 38.112я7

Минимальные системные требования:

PC, процессор Pentium, 160 МГц;
Microsoft Windows XP; мышь;
дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

© Самарский университет, 2020

Редактор Н.С. Куприянова
Компьютерная вёрстка А.В. Ярославцевой

Подписано для тиражирования 19.10.2020.
Объем издания 1,20 Мб.
Количество носителей 1 диск.
Тираж 10 дисков.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
1 СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ.....	7
1.1 Расчётная схема сооружения	7
1.2 Необходимые условия геометрической неизменяемости и статической определимости ферм.....	9
1.3 Способы образования ферм	11
1.4 Методы исследования геометрической неизменяемости стержневых систем	15
1.5 Методы определения усилий в стержнях ферм	19
1.6 Способы образования рам и комбинированных систем	24
2 ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	28
2.1 Работа статически приложенных внешних сил	28
2.2 Потенциальная энергия деформации стержневой системы	30
2.3 Теорема Кастильяно.....	34
2.5 Интеграл Мора для стержневой системы.	36
2.6 Монтажные и температурные перемещения.....	38
3 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ	43
3.1 Расчёт статически неопределимых стержневых систем методом сил	43
3.2 Учёт симметрии стержневой системы	48
3.3 Проверка правильности раскрытия статической неопределимости.....	50
4 МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	52
4.1 Понятие о матрице жёсткости	52
4.2 Матрица жёсткости в местной и общей системах координат	57
4.3 Матрица жёсткости ферменного элемента.....	60
4.4 Матрица жёсткости балочного элемента в местной системе координат	64
4.5 Матрица жёсткости балочного элемента при изгибе его в одной плоскости	68

4.6 Матрица жёсткости балочного элемента в общей системе координат .	71
4.7 Учёт внеузловой нагрузки.....	75
4.8 Объединение элементов в стержневую систему и построение её матрицы жёсткости.....	77
4.9 Сокращение матрицы жёсткости стержневой системы и определение узловых перемещений.....	82
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	87

ВВЕДЕНИЕ

В сопротивлении материалов основное внимание уделяется технической теории растяжения, изгиба и кручения отдельного стержня (или бруса). В настоящем курсе рассматриваются конструкции, образованные соединением стержней друг с другом тем или иным способом.

Всякая конструкция или сооружение должны быть геометрически неизменяемыми. В геометрически неизменяемой системе невозможны перемещения одних точек относительно других без деформации. Такая система не допускает взаимных кинематических перемещений составляющих её конструктивных элементов. Этим сооружения отличаются от механизмов. Исследованию геометрической неизменяемости стержневых систем в данном курсе уделяется значительное внимание.

В строительной механике стержневых систем даётся обобщение методов расчёта напряжений и перемещений, относящихся к отдельному стержню, на случай плоских и пространственных ферм и рам. Рассматривается, в частности, метод сил для расчёта статически неопределимых систем. Для сложных конструкций более удобным может оказаться метод перемещений, который в матричной формулировке также изучается в настоящем курсе.

1 СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

1.1 РАСЧЁТНАЯ СХЕМА СООРУЖЕНИЯ

В расчётах на прочность реальная конструкция заменяется некоторой расчётной схемой (или моделью) путём игнорирования тех или иных второстепенных свойств системы и выделения наиболее существенных особенностей, определяющих силовую работу конструкции. Для стержневых систем подобными расчётными схемами служат фермы и рамы.

Фермой называется расчётная схема такой стержневой системы, геометрическая неизменяемость которой обеспечивается в предположении о шарнирном соединении стержней в узлах. Каждый стержень заменяется в расчётной схеме прямолинейным отрезком, представляющим его геометрическую ось. Концы стержней, образующие узел, считаются сходящимися в одной точке. Принимается, что в ферменных конструкциях стержни между собой соединяются в узлах посредством идеальных шарниров и что силы приложены в узловых точках. При таких предположениях в стержнях будут возникать только осевые силы. Подчеркнём, что на самом деле в реальной конструкции соединение стержней может осуществляться, скажем, с помощью заклёпок или сваркой. В качестве примера на рисунке 1.1 показаны сварная стержневая конструкция *а* и её расчётная схема в виде фермы *б*.

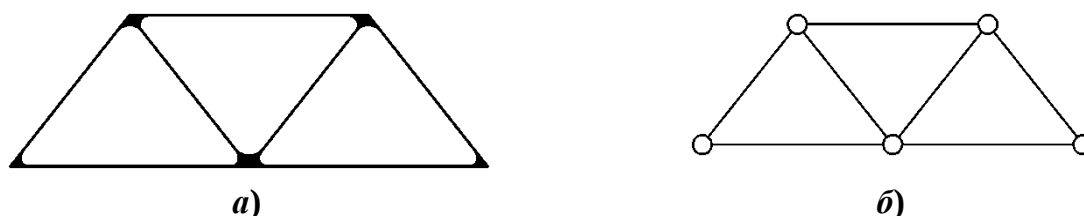


Рисунок 1.1 – Стержневая конструкция и её расчётная схема в виде фермы

Если оси всех стержней лежат в одной плоскости, ферма называется плоской, в противном случае речь идёт о пространственной ферме. Плоская ферма может воспринимать только нагрузки, лежащие в её плоскости.

Рамой называется стержневая система, геометрическая неизменяемость которой обеспечивается при жёстком соединении стержней в узлах. Жёсткое соединение даёт возможность передавать с одного стержня на другой любую систему сил, включая моменты. В общем случае пространственной рамы её стержни могут испытывать изгиб в двух плоскостях, осевое растяжение или сжатие и кручение. Рама называется плоской, если оси всех стержней лежат в одной плоскости, причём в этой же плоскости лежит одна из главных

осей инерции поперечного сечения каждого стержня. В случае, когда некоторые стержни рамы присоединяются с помощью шарниров, а поперечная нагрузка на эти стержни отсутствует, стержневая система называется комбинированной.

Стержневая система статически определима, если при любой внешней нагрузке все силовые факторы в сечениях стержней могут быть найдены с помощью одних только уравнений равновесия, без привлечения деформационных соотношений. В противном случае система является статически неопределимой.

Геометрическая неизменяемость системы может быть обеспечена при определённом соотношении между общим числом степеней свободы элементов, составляющих систему, и числом наложенных на них связей. Напомним, что числом степеней свободы какой-либо системы называется количество независимых параметров, определяющих её положение в пространстве. Напри-

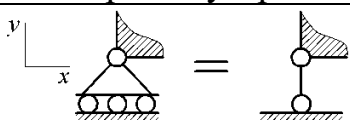
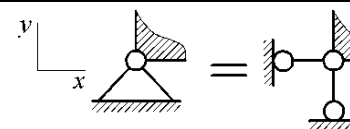
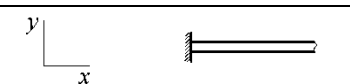
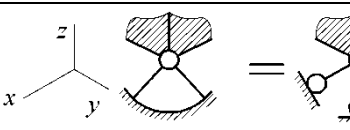
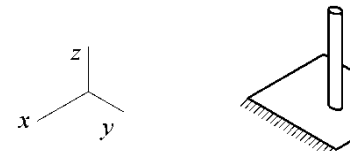
№ п/п	Схема опорного устройства	Класс
1		1
2		1
3		2
4		3
5		3
6		6

Рисунок 1.2 – Примеры опорных устройств

мер, шарнирный узел в пространстве обладает тремя степенями свободы, шарнирный узел на плоскости – двумя. Всякое устройство, уменьшающее число степеней свободы, называется связью. Так, стержень, соединяющий два шарнирных узла, запрещает взаимное кинематическое смещение узлов вдоль своей оси, то есть накладывает одну связь. Соединение одной части плоской стержневой системы с другой через шарнир устраняет их взаимное смещение в соединяемом узле в двух направлениях. Следовательно, шарнир выступает в этом случае как двойная связь.

Стержневая система может быть закреплена в пространстве посредством тех или иных опорных устройств. Последние разделяются на классы, которые определяются числом накладываемых связей. Некоторые типичные опорные устройства схематично изображены на рисунке 1.2. Из них первые четыре относятся к плоским системам, а последние два – к пространственным.

1.2 НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ И СТАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛИМОСТИ ФЕРМ

Ферму можно рассматривать как совокупность узлов, взаимная неподвижность которых обеспечивается соединением их стержнями. Если система закреплена на опорах, то неподвижность узлов и всей системы в целом обеспечивается помимо стержней ещё и опорными связями.

Пусть закреплённая стержневая система имеет U узлов и C стержней, а также C_0 опорных связей. Наложённые на узлы связи должны устранить $2U$ степеней свободы в случае закреплённой плоской системы и $3U$ степеней свободы в случае пространственной. Следовательно, минимально необходимое количество связей должно подчиняться условию

$$C + C_0 = 2U \quad (1.1)$$

для плоской системы и

$$C + C_0 = 3U \quad (1.2)$$

для пространственной системы.

Если же стержневая система не закреплена, то она как жёсткое тело обладает тремя степенями свободы в случае плоской системы и шестью степенями свободы – в случае пространственной. Тогда минимально необходимое число связей определится для соответствующих систем равенствами

$$C = 2U - 3 \quad (1.3)$$

и

$$C = 3U - 6. \quad (1.4)$$

Мысленно вырежем далее из плоской фермы некоторый узел и рассмотрим его равновесие (рисунок 1.3). Через N_{i1} , N_{i2} и т.д. на рисунке 1.3 обозначены осевые силы в стержнях, сходящихся в этом узле, а через P_{ix} , P_{iy} – компоненты внешней силы, действующей на узел. Можно составить два уравнения равновесия узла, спроецировав все силы на оси x и y :

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

Уравнение моментов $\sum M = 0$ удовлетворяется тождественно, так как направления действия всех внешних и внутренних сил проходят через одну

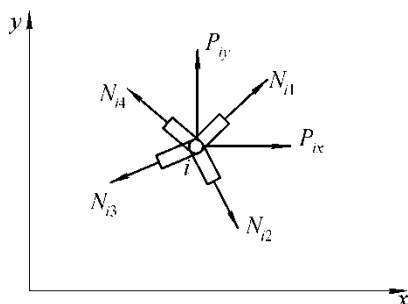


Рисунок 1.3 – Силы, действующие на плоский узел

точку – ось шарнира. Общее число уравнений равновесия, которыми мы располагаем для нахождения осевых сил, будет, таким образом, равно $2U$, где U – количество узлов. Для пространственной фермы это число будет $3U$, поскольку для каждого узла могут быть составлены три уравнения равновесия.

С учётом реакций опорных связей общее число неизвестных составит для закреплённой фермы $C + C_0$, так что в статически определимой системе должно выполняться условие

$$C + C_0 = 2U \quad (1.5)$$

для плоской системы или

$$C + C_0 = 3U \quad (1.6)$$

для пространственной.

Если ферма не закреплена, то внешние нагрузки должны подчиняться трём уравнениям равновесия фермы в целом в случае плоской и шести уравнениям – в случае пространственной системы. Соответственно уменьшается число независимых уравнений равновесия для определения усилий в стержнях фермы. Необходимое условие статической определимости запишется поэтому для незакреплённой системы как

$$C = 2U - 3 \quad (1.7)$$

для плоской фермы и

$$C = 3U - 6 \quad (1.8)$$

для пространственной.

Равенства (1.5)...(1.8), устанавливающие необходимые условия статической определимости, совпадают с необходимыми условиями геометрической неизменяемости (1.1)...(1.4). Следует только иметь в виду, что для того, чтобы ферма была статически определимой, равенства (1.5)...(1.8) должны выполняться строго. В случае же геометрической неизменяемости число стержней может быть и больше, чем это определяется равенствами (1.1)...(1.4). Последние устанавливают лишь минимально необходимое количество стержней, позволяющее обеспечить геометрическую неизменяемость системы.

Можно доказать следующую теорему. *Всякая геометрически неизменяемая стержневая система, имеющая минимально необходимое число связей,*

статически определима. Справедливо и обратное утверждение: *статически определяемая стержневая система геометрически неизменяема и имеет минимально необходимое число связей*. Отсюда следует, что если при минимально необходимом числе стержней система оказывается статически неопределимой, то она геометрически изменяема, то есть некоторые стержни ориентированы неправильно.

На рисунке 1.4 показаны четыре плоские незакреплённые стержневые системы, у каждой из которых $C = 9$, $U = 6$. Необходимое условие геометрической неизменяемости $C = 2U - 3$ выполняется. Геометрическая неизменяемость системы на рисунке 1.4,а очевидна. Геометрически неизменяемой является также система на рисунке 1.4,б. Система на рисунке 1.4,в представляет собой механизм, где штриховыми линиями показано возможное положение стержней при кинематическом перемещении. Наконец, в системе на рисунке 1.4,г также возможны кинематические перемещения, хотя и бесконечно малые. Такие системы называются мгновенно геометрически изменяемыми и они считаются недопустимыми наряду с системами типа в. Последние две системы на рисунке 1.4, в отличие от первых двух, являются и статически неопределимыми.

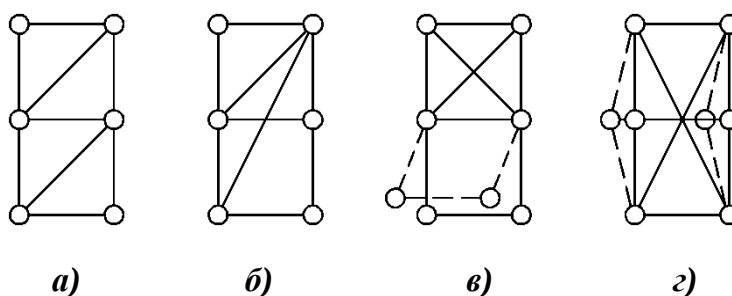


Рисунок 1.4 – Примеры геометрически неизменяемых (а,б) и геометрически изменяемых (в,г) стержневых систем

1.3 СПОСОБЫ ОБРАЗОВАНИЯ ФЕРМ

Следующие способы гарантируют получение геометрически неизменяемых систем с помощью минимально необходимого числа связей.

1.3.1 Способ последовательного присоединения узлов. К исходному геометрически неизменяемому элементу каждый последующий узел присоединяется с помощью двух стержней, не лежащих на одной прямой, в случае плоской фермы и с помощью трёх стержней, не лежащих в одной плоскости, в случае пространственной.

На рисунке 1.5 данный способ показан на примере плоской фермы. К исходному элементу 1-2-3, который на рисунке заштрихован и геометрическая неизменяемость которого очевидна, последовательно присоединены узлы 4, 5

и 6. Относительная неподвижность этих узлов обеспечена. Узел 7 присоединён двумя стержнями, лежащими на одной прямой и не препятствующими бесконечно малым его перемещениям в направлении, перпендикулярном к этим стержням. Следовательно указанное на рисунке присоединение узла 7 недопустимо.

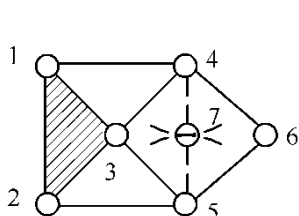


Рисунок 1.5 – Последовательное присоединение узлов для плоской фермы

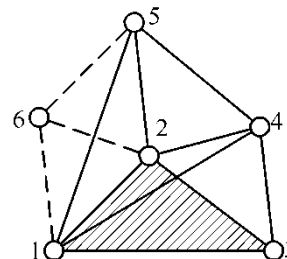
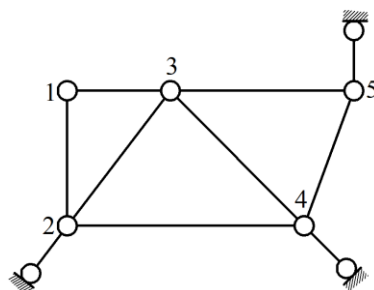


Рисунок 1.6 – Последовательное присоединение узлов для пространственной фермы

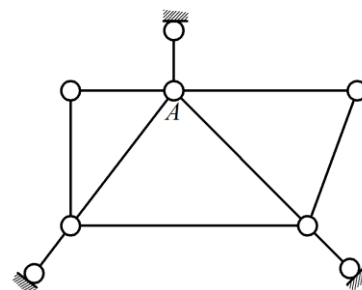
Другой пример, относящийся к пространственной ферме, представлен на рисунке 1.6. Здесь к исходному элементу 1-2-3 последовательно присоединены узлы 4 и 5. Показанное на рисунке присоединение узла 6 недопустимо, так как три стержня, осуществляющие его прикрепление, лежат в одной плоскости и узел 6 может совершать бесконечно малые кинематические перемещения перпендикулярно этой плоскости.

Фермы, которые могут быть образованы последовательным присоединением узлов, называются простыми.

В процессе образования плоская ферма может быть закреплена неподвижно с помощью трёх связей, направления которых не пересекаются в одной точке и не параллельны друг другу (рисунок 1.7,а). В примере на рисунке 1.7,б точка А является мгновенным центром вращения фермы.

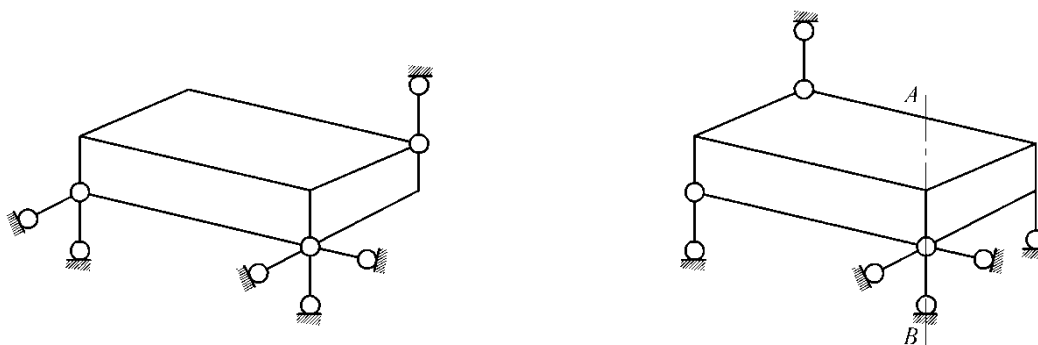


а) правильное закрепление



б) неправильное закрепление

Рисунок 1.7 –Закрепление плоской фермы



а) правильное закрепление

б) неправильное закрепление

Рисунок 1.8 – Закрепление пространственной фермы

Пространственная ферма может быть закреплена неподвижно с помощью шести связей. Их направления не должны пересекаться на одной прямой в конечной или бесконечно удалённой точках (рисунок 1.8,а). В противном случае эта прямая будет мгновенной осью вращения (прямая AB на рисунке 1.8,б).

После закрепления процесс последовательного присоединения узлов может быть продолжен, причём для присоединения узлов могут быть использованы в дальнейшем новые опорные стержни. На рисунке 1.9 показана ферма, изображённая выше на рисунке 1.7,а, к которой дополнительно присоединены узлы 6 и 7.

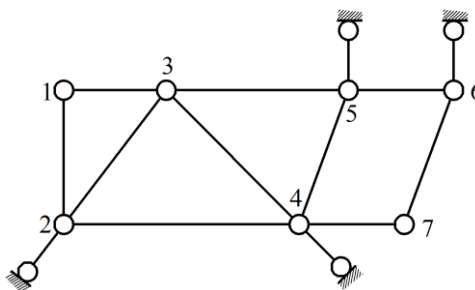


Рисунок 1.9 – Присоединение узлов 6 и 7 к закреплённой ферме

1.3.2 Способ последовательного соединения ферм. Две или несколько простых незакреплённых ферм соединяются между собой так, чтобы была обеспечена их взаимная неподвижность.

На рисунке 1.10,а показаны две простые плоские фермы. Каждая из них, будучи геометрически неизменяемой, имеет три степени свободы в своей плоскости. Соединив их посредством трёх связей, получим более сложную систему. В варианте, показанном на рисунке 1.10,б, фермы соединены в узле, что означает наложение двух связей, и ещё одним стержнем. В другом варианте

(рисунок 1.10,в) соединение осуществлено тремя стержнями. При этом соединяющие стержни не должны пересекаться в одной точке или быть параллельными. В представленном примере оба варианта приводят к такой ферме, которую нельзя получить методом последовательного присоединения узлов.

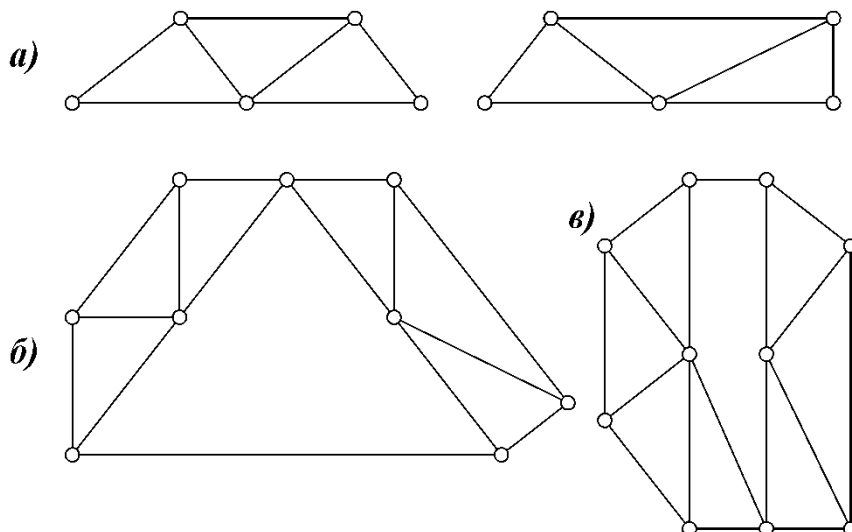


Рисунок 1.10 – Соединение двух плоских ферм

Чтобы обеспечить взаимную неподвижность двух *пространственных* ферм, нужно устранить шесть степеней свободы, наложив такое же число правильно ориентированных связей. Соединение можно выполнить с помощью пространственного шарнира, накладывающего три связи, и трёх стержней, направления которых не пересекаются в одной точке и не параллельны. Можно соединить фермы шестью стержнями, направления которых не пересекаются на одной прямой (рисунок 1.11). В частности, оси стержней не должны лежать в двух параллельных плоскостях.

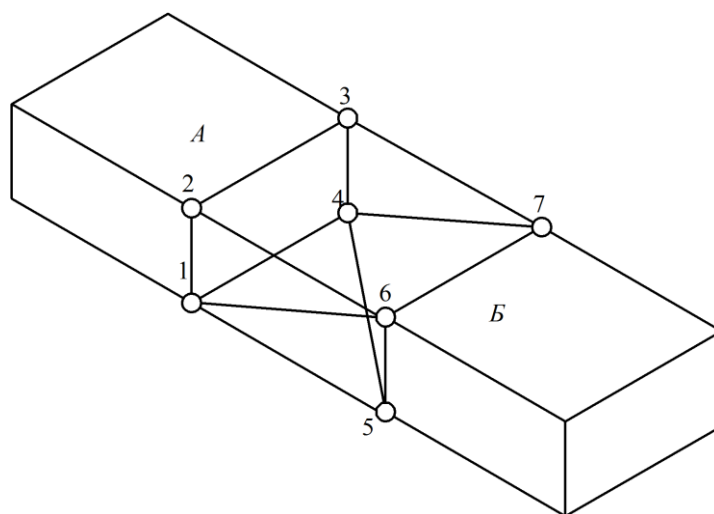


Рисунок 1.11 – Соединение двух пространственных ферм

1.3.3 Способ замены стержней. В исходной геометрически неизменяемой системе удаляется один из стержней. Взамен него устанавливается другой с таким расчётом, чтобы устранить появившуюся степень свободы.

На рисунке 1.12,а показана плоская ферма, которая может быть образована последовательным присоединением узлов к исходному элементу 2-4-5. Если удалить стержень 4-5, то получим геометрически изменяемую систему. Замечая, что взаимное сближение или удаление узлов 4 и 5 сопровождается взаимным смещением узлов 6 и 7, устраним эту подвижность путём постановки стержня 6-7. В итоге получим изображённую на рисунке 1.11,б геометрически неизменяемую систему. Нетрудно видеть, что она не может быть образована первыми двумя способами.

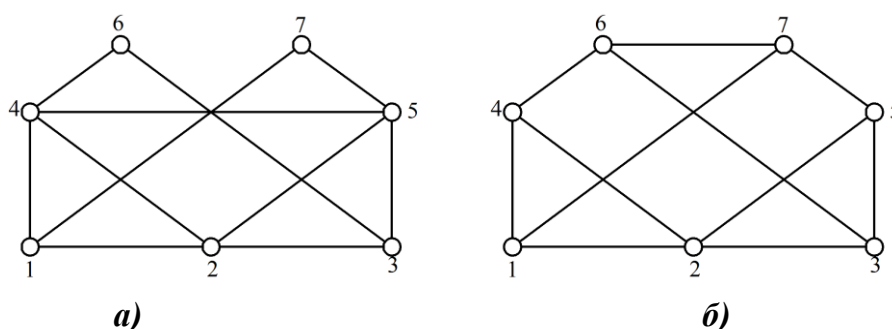


Рисунок 1.12 Образование фермы способом замены стержней

1.4 МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕИЗМЕНЯЕМОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Анализ геометрической неизменяемости стержневой системы должен всегда начинаться с проверки выполнения необходимого условия в соответствии с одним из равенств (1.1)...(1.4). Система, однако, может оказаться геометрически изменяемой и в случае выполнения этого условия, если какие-либо стержни поставлены неправильно. Далее рассмотрено несколько методов, позволяющих убедиться в том, что система действительно геометрически неизменяема.

1.4.1 Метод построения. Этот метод, пригодный для простых систем, заключается в воспроизведении процесса образования системы. Если при этом не будет обнаружено неправильно присоединённых узлов или частей, то система геометрически неизменяема.

1.4.2 Метод разрушения. Данный метод по существу эквивалентен методу построения, но здесь анализ геометрической неизменяемости выполняется в обратном порядке. Последовательно отбрасываются узлы или части стержневой системы, прикрепленные к остающейся структуре посредством минимально необходимого числа связей. Если удастся разрушить таким образом всю систему, не встретив при этом неправильно установленных связей, то

система геометрически неизменяема. В процессе «разрушения» можно снимать систему с опор, если число опорных связей минимально необходимо и они правильно ориентированы. В практическом применении метод разрушения обычно более удобен, чем метод построения.

Проиллюстрируем метод разрушения двумя примерами. Стержневая система, показанная на рисунке 1.13, имеет 7 узлов, 10 стержней и 4 опорных стержня; необходимое условие $C + C_0 = 2U$ выполняется. Убедимся, что все связи расположены должным образом. Отбросим вначале узел 4, который присоединён двумя стержнями, не лежащими на одной прямой. Далее можно отбросить узел 7, после чего получим систему, закреплённую посредством трёх опорных стержней, не пересекающихся в одной точке и не параллельных друг другу. Снимем систему с опор, а затем продолжим отбрасывание узлов, пока геометрическая неизменяемость оставшегося фрагмента не станет очевидной.

Для системы, изображённой на рисунке 1.14, имеем $U = 9$, $C = 15$, $C_0 = 3$, и необходимое условие геометрической неизменяемости также выполняется. Освобождаем систему от опорных связей, учитывая, что число этих связей минимально и что поставлены они правильно. Следующим шагом является попытка разделения двух частей системы, соединённых между собой тремя стержнями 1-2, 5-6 и 7-8. Поскольку эти стержни параллельны друг другу, заключаем, что соединение двух частей осуществлено неправильно. Это означает, что данная стержневая система геометрически изменяема.

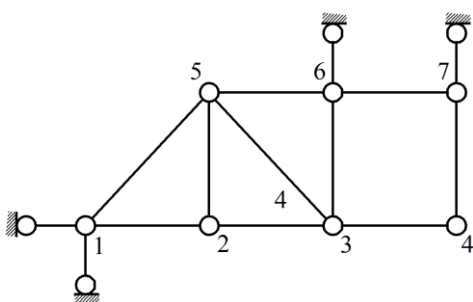


Рисунок 1.13 – Геометрически неизменяемая система

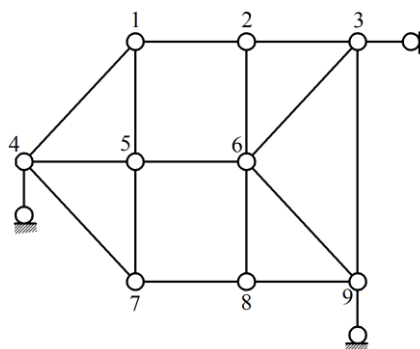


Рисунок 1.14 – Геометрически изменяемая система

1.4.3 Метод нулевых нагрузок. Метод основан на анализе статической определимости системы. Если система статически определима, то она геометрически неизменяема. Исследование статической определимости выполняется исходя из следующих соображений. В статически определимой системе осевые силы в стержнях однозначно определяются при любых внешних нагрузках из уравнений равновесия. В частности, при отсутствии внешней нагрузки все осевые силы должны быть нулевыми. Если удастся доказать, пользуясь при

этом одними только уравнениями равновесия, что осевые силы во всех стержнях ненагруженной системы равны нулю, то это будет означать, что система статически определима и, следовательно, геометрически неизменяема.

При практическом применении метода нулевых нагрузок могут быть использованы любые уравнения равновесия как для отдельных узлов, так и для тех или иных частей или для всей системы в целом. Хорошим подспорьем могут здесь оказаться следующие две леммы.

Лемма 1. Если к плоскому узлу, содержащему два стержня, которые не лежат на одной прямой (рисунок 1.15,а), или к пространственному узлу, содержащему три стержня, которые не лежат в одной плоскости (рисунок 1.15,б), не приложено внешней нагрузки, то усилия в стержнях равны нулю. Справедливость данного утверждения очевидна, поскольку для определения усилий мы располагаем необходимым числом независимых уравнений равновесия. Если условие леммы относительно расположения стержней не выполняется, то одно из уравнений равновесия (равенство нулю суммы сил в проекции на ось, перпендикулярную направлению стержней, – в случае плоской системы или на ось, перпендикулярную плоскости стержней, – в случае пространственной системы) удовлетворяется тождественно независимо от значений сил в стержнях. В этом случае, конечно, нельзя утверждать, что силы будут равны нулю.

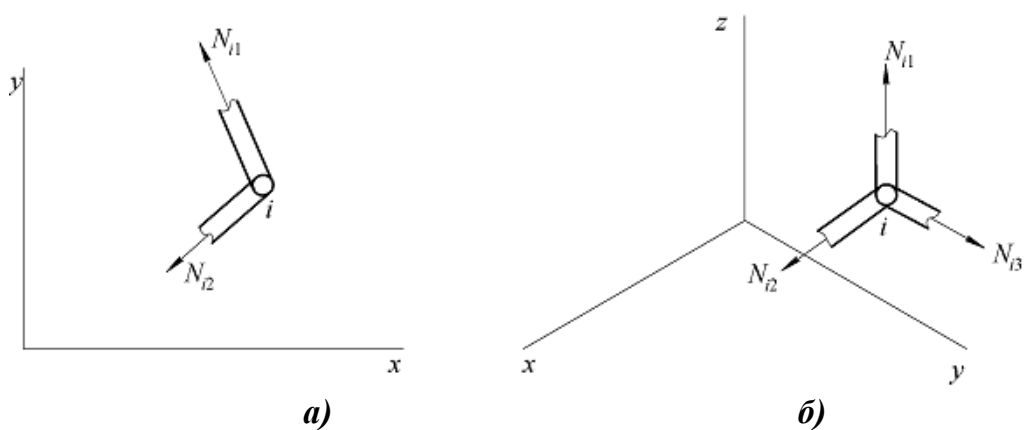


Рисунок 1.15 – К расчёту усилий в стержнях ненагруженной системы

Лемма 2. Если к плоскому узлу, содержащему три стержня, из которых два лежат на одной прямой (рисунок 1.16,а), или к пространственному узлу, содержащему n стержней, из которых $n - 1$ лежат в одной плоскости (рисунок 1.16,б), не приложено внешней нагрузки, то усилие в отдельно стоящем стержне равно нулю. Чтобы доказать лемму, достаточно воспользоваться

условием равновесия узла в проекции на ось, перпендикулярную к тем стержням, которые лежат на одной прямой, – в случае плоской системы, или располагаются в одной плоскости, – в случае пространственной системы. Заметим попутно, что это же уравнение равновесия позволяет найти усилие в отдельно стоящем стержне в том случае, когда на узел действует внешняя нагрузка.

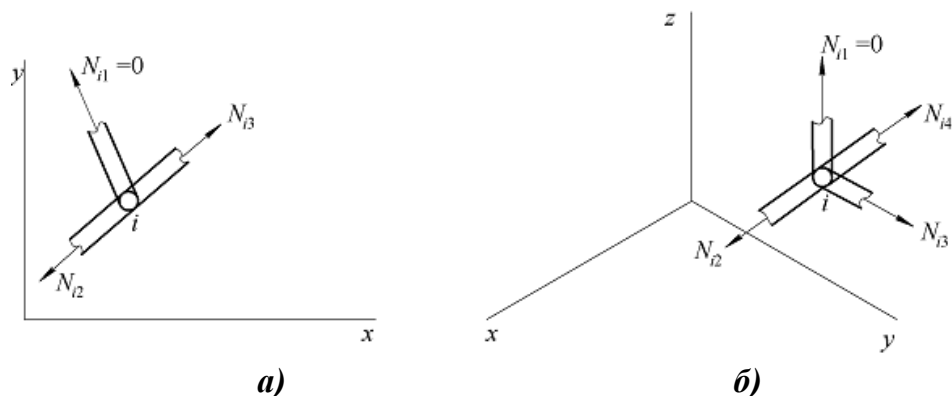


Рисунок 1.16 – Усилия в отдельно стоящих стержнях

В качестве примера рассмотрим стержневую систему, показанную на рисунке 1.17. Для неё $C = 10$, $C_0 = 4$, $Y = 7$, так что необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Убедиться в геометрической неизменяемости системы методом разрушения нельзя. Обратимся к методу нулевых нагрузок.

В узле 2 сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, а третий – стержень 2-5 – отдельно стоящий. Согласно лемме 2 усилие в нём равно нулю. Переходим далее к узлу 5. Учитывая, что в стержне 5-2 усилие отсутствует, для узла 5 можно воспользоваться леммой 1, на основании которой усилия в стержнях 5-1 и 5-6 равны нулю. Рассматривая далее равновесие узла 1, а затем 2, устанавливаем с помощью леммы 1, что усилия в стержнях 1-2, 2-3, а также в опорном стержне 1-0 нулевые. Следующий шаг заключается в рассмотрении равновесия всей системы в целом под действием реакций опор. Из условия равенства нулю суммы моментов всех сил относительно точки 4 вытекает, что реакция опоры в узле 6 равна нулю. Завершается исследование последовательным рассмотрением равновесия узлов 6, 7, 3 и 4 с применением леммы 1. Это приводит к заключению, что все стержни имеют нулевые усилия. Следовательно данная система геометрически неизменяема.

Подчеркнём, что в методе нулевых нагрузок мы оперируем только с условиями равновесия узлов, частей или всей системы в целом. Никакие отбрасывания узлов, стержней или иных фрагментов системы в духе метода разрушения здесь недопустимы. Смешение двух методов является распространённой ошибкой при исследовании геометрической неизменяемости.

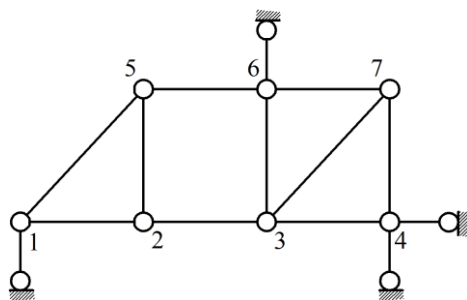


Рисунок 1.17 – К методу нулевых нагрузок

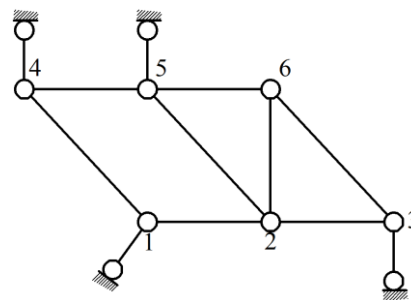


Рисунок 1.18 – Другой пример использования метода нулевых нагрузок

Другой пример представлен на рисунке 1.18. Для данной системы $C = 8$, $C_0 = 4$, $U = 6$, то есть необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Переходя к исследованию геометрической неизменяемости, заметим, что из четырёх опорных стержней три ориентированы параллельно друг другу. Четвёртый (опорный стержень 1-0) можно назвать отдельно стоящим опорным стержнем. Условие равновесия всей системы в целом под действием опорных реакций в проекции на горизонтальную ось показывает, что усилие в отдельно стоящей опоре равно нулю. Последовательно переходя далее к узлам 1 и 4 и применяя лемму 1, устанавливаем, что усилия в стержнях 1-2, 1-4 и 1-5, а также в опорном стержне 4-0, равны нулю. Затем следует вернуться к рассмотрению всей системы в целом и составить, скажем, условие равновесия моментов относительно точки 3. Отсюда получим, что сила в опорном стержне 5-0 равно нулю. Наконец, последовательное приложение леммы 1 к узлам 5, 6, 2 и 3 показывает, что и в остальных стержнях усилия равны нулю. Система геометрически неизменяема.

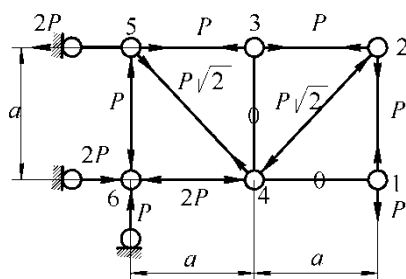
Если не удастся доказать, что при отсутствии внешних нагрузок усилия во всех стержнях равны нулю, то вопрос о геометрической неизменяемости системы остаётся открытым. Наиболее универсальным средством исследования геометрической неизменяемости является метод замены связей, который будет рассмотрен позже.

1.5 МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМ

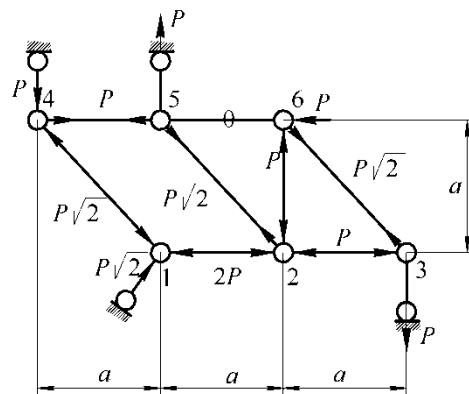
1.5.1 Метод вырезания узлов. Если вырезать мысленно каждый из узлов статически определимой фермы и составить для них уравнения равновесия под действием внешних нагрузок и осевых сил в стержнях, то получится система уравнений, из которой можно всегда найти искомые силы. Однако порядок системы уравнений может оказаться слишком высоким. Целесообразно составлять уравнения равновесия таким образом, чтобы можно было находить

осевые силы поочерёдно, шаг за шагом. Такая последовательность расчёта возможна для ферм, геометрическая неизменяемость которых может быть установлена методом разрушения или методом нулевых нагрузок. Собственно говоря, в методе нулевых нагрузок как раз и осуществляется определение усилий в стержнях, но только для ненагруженной системы. Сохраняя тот же порядок расчёта, что и при исследовании геометрической неизменяемости, можно найти усилия во всех стержнях. При этом термин «вырезание узлов» должен трактоваться расширительно, поскольку помимо собственно узлов в рассмотрение могут попасть части фермы или вся ферма целиком.

На рисунке 1.19 показана ферма ($C = 9$, $C_0 = 3$, $U = 6$), в геометрической неизменяемости которой можно убедиться в соответствии с методом разрушения, последовательно отбрасывая узлы 1-2-3-4-5-6. В таком же порядке выполним расчёт усилий в стержнях. Результаты вычислений представлены на рисунке 1.19. Стрелками указано действие стержней на узлы: для растянутых стержней стрелки направлены от узла, для сжатых – к узлу.



**Рисунок 1.19 – Метод
вырезания узлов**



**Рисунок 1.20 – Другой пример
метода вырезания узлов**

Другой пример расчёта относится к показанной на рисунке 1.20 ферме, геометрическая неизменяемость которой доказывается методом нулевых нагрузок (см. выше, рисунок 1.18).

Расчёт начинаем с определения реакции «отдельно стоящей» опоры 1-0. Из условия равновесия всей фермы в горизонтальном направлении находим её значение $N_{1-0} = -P\sqrt{2}$. Далее вычисляем силы в стержнях 1-4 и 1-2 из условий равновесия узла 1, а затем – в стержнях 4-5 и 4-0. После этого находим реакцию опорного стержня 5-0 из условия равенства нулю моментов всех сил, действующих на фрагмент системы с узлами 2-5-6-3, относительно точки 3, что даёт $N_{5-0} = P$. Остаётся рассмотреть равновесие узлов 5-2-6-3, чем завершается решение. Результаты вычислений представлены на рисунке 1.20.

1.5.2 Метод замены связей. Метод состоит в следующем. В исходной стержневой системе удалим один из стержней – скажем, соединяющий узлы a и b , приложив вместо него к узлам a и b неизвестные пока силы N_{ab} . Местоположение удаляемого стержня выбирается таким образом, чтобы остающаяся система поддавалась разборке в духе метода разрушения. Поскольку была удалена связь, в процессе разрушения будет обнаружена нехватка стержня. Поставив в этом месте заменяющий стержень mn , получим взамен исходной новую систему, которая заведомо геометрически неизменяема и имеет простую структуру. Усилия в стержнях двух систем будут совпадать, если осевая сила в заменяющем стержне, которую мы обозначим через T_{mn} , будет отсутствовать:

$$T_{mn} = T_{mn}^0 + \bar{T}_{mn} \cdot N_{ab} = 0. \quad (1.9)$$

Здесь T_{mn}^0 – усилие в заменяющем стержне от действия внешних нагрузок, $\bar{T}_{mn}$ – усилие в нём от действия единичных сил, приложенных к узлам a и b вместо удалённого стержня. Величина N_{ab} выступает в равенстве (1.9) как множитель, который показывает, во сколько раз усилие в заменённом стержне больше единицы. На основании равенства (1.9) получаем

$$N_{ab} = -\frac{T_{mn}^0}{\bar{T}_{mn}}. \quad (1.10)$$

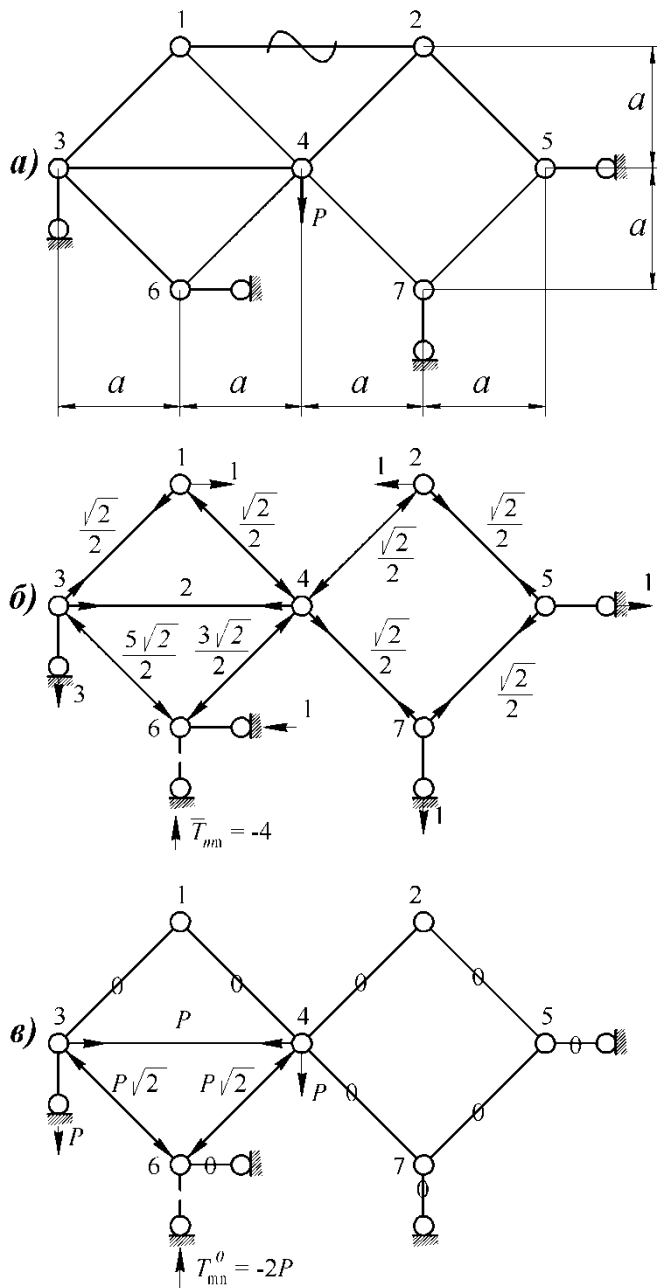
Как следует из этого выражения, для вычисления N_{ab} необходимо произвести два расчёта новой системы – от действия внешних сил и от действия единичных сил, приложенных к узлам a и b . Целью этих расчётов является определение силы в заменяющем стержне – в первом случае T_{mn}^0 , а во втором – $\bar{T}_{mn}$. Далее по формуле (1.10) находим искомую величину.

Для вычисления осевых усилий в других стержнях можно использовать результаты, полученные в ходе отыскания T_{mn}^0 и $\bar{T}_{mn}$. Усилие в стержне, соединяющем какие-либо два узла r и s , определится по формуле

$$N_{rs} = N_{rs}^0 + \bar{N}_{rs} \cdot N_{ab}, \quad (1.11)$$

где N_{rs}^0 и $\bar{N}_{rs}$ – значения осевой силы в стержне rs , найденные в заменяющей системе от действия внешней нагрузки и от действия единичных сил соответственно.

Пусть, например, требуется найти усилия в стержнях 1-2 и 3-4 системы, показанной на рисунке 1.21,а, для которой $C = 10$, $C_0 = 4$, $U = 7$. Решить задачу с помощью метода вырезания узлов здесь не удаётся,



**Рисунок 1.21 – Расчёт сил
методом замены связей**

системы.

Расчёт силы T_{mn}^0 отображён на рисунке 1.21,в. В соответствии с формулой (1.10) устанавливаем теперь значение силы в заменённом стержне:

$$N_{1-2} = -\frac{T_{mn}^0}{\bar{T}_{mn}} = -\frac{(-2P)}{(-4)} = -\frac{P}{2}.$$

Усилие в стержне 3-4 согласно (1.11) имеет в исходной системе значение

$$N_{3-4} = N_{3-4}^0 + \bar{N}_{3-4} \cdot N_{1-2} = P + 2 \cdot \left(-\frac{P}{2}\right) = 0.$$

поэтому воспользуемся методом замены связей. В качестве заменяемого желательно брать стержень, в котором требуется определить усилие, ибо его значение даётся непосредственно формулой (1.10). Из двух интересующих нас стержней подходящим является стержень 1-2, поскольку после его удаления можно осуществить разрушение системы путём последовательного снятия узлов 1-2-5-7-4-3. После этих отбрасываний остаётся узел 6 с одним опорным стержнем 6-0. Для получения геометрически неизменяемой системы установим заменяющий стержень в виде вертикального опорного стержня в узле 6; на рисунках 1.21,б и в он показан штриховой линией.

На рисунке 1.21,б показаны результаты расчёта силы $\bar{T}_{mn}$ в единичной системе, в которой в узлах 1 и 2 приложены противоположно направленные силы, равные единице. Расчёт производится рассмотрением равновесия узлов в том порядке, в котором до этого производилось разрушение си-

Приступая к данному расчёту, мы оставили в стороне вопрос о статической определимости или геометрической неизменяемости системы, негласно подразумевая, что система обладает этими свойствами. На самом же деле выполняется лишь необходимое условие статической определимости и геометрической неизменяемости

$$C + C_o = 2U.$$

Однако решение по методу замены связей даёт попутно ответ и на этот вопрос. Действительно, в статически определимой системе усилие в каждом стержне должно иметь при любой внешней нагрузке вполне определённое конечное значение. Как видно из формулы (1.10), это требование выполняется, если усилие в заменяющем стержне в единичной системе

$$\bar{T}_{mn} \neq 0. \quad (1.12)$$

В противном случае величина N_{ab} будет либо бесконечно большой (когда $T_{mn}^0 \neq 0$), либо неопределённой (если $T_{mn}^0 = 0$). И тот, и другой варианты соответствуют статически неопределимой и, следовательно, геометрически изменяемой системе.

Отсюда вытекает *способ исследования геометрической неизменяемости по методу замены связей*. В соответствии с ним следует преобразовать исходную стержневую систему в геометрически неизменяемую с простой структурой путём подходящей замены одного из стержней. Взамен устранённого стержня прикладываются единичные силы и вычисляется сила в заменяющем стержне. Если окажется, что эта сила отлична от нуля, исходная система статически определима и геометрически неизменяема. В противном случае она геометрически изменяема.

Рассмотрим, например, стержневую систему, для которой $C = 8$, $C_o = 4$, $U = 6$ (рисунок 1.22,а). Её геометрическую неизменяемость нельзя исследовать ни методом разрушения, ни методом нулевых нагрузок. Обратимся поэтому к методу замены связей, устранив опорный стержень в узле 2 (он помечен волнистой линией). Последовательно снимая узлы 2-4-6-5, обнаруживаем отсутствие необходимой связи в узле 1, где и устанавливаем заменяющий опорный стержень (показан на рисунке 1.21,б штриховой линией). Далее прикладываем единичную силу в узле 2 в направлении устранённого стержня и выполняем расчёт (рисунок 1.21,б), из которого следует, что усилие в заменяющем стержне равно нулю. Вывод: предложенная к анализу стержневая система геометрически изменяема.

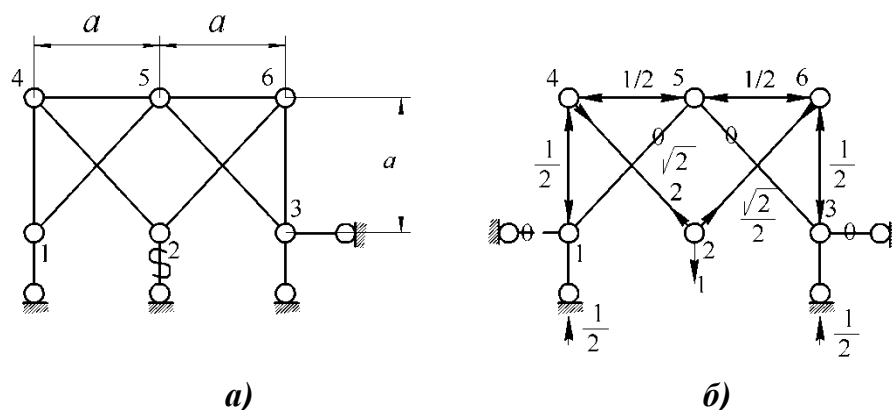


Рисунок 1.22 – Исследование геометрической неизменяемости методом замены связей

В некоторых случаях может оказаться недостаточно одной замены для получения преобразованной геометрически неизменяемой системы простой структуры. Тогда можно осуществить замену двух стержней. Предположим, что удалены стержни ab и cd , а вместо них установлены заменяющие стержни mn и kl . Обозначим через T_{mn}^0 и T_{kl}^0 усилия в заменяющих стержнях от внешней нагрузки, через $\bar{T}_{mn}^{ab}$ и $\bar{T}_{kl}^{ab}$ – усилия в них от единичных сил, приложенных в преобразованной системе к узлам a и b , а через $\bar{T}_{mn}^{cd}$ и $\bar{T}_{kl}^{cd}$ – от единичных сил, приложенных к узлам c и d . Приравнявая нулю суммарные силы в заменяющих стержнях, приходим к системе уравнений относительно N_{ab} и N_{cd} :

$$\begin{aligned} T_{mn}^0 + \bar{T}_{mn}^{ab} \cdot N_{ab} + \bar{T}_{mn}^{cd} \cdot N_{cd} &= 0; \\ T_{kl}^0 + \bar{T}_{kl}^{ab} \cdot N_{ab} + \bar{T}_{kl}^{cd} \cdot N_{cd} &= 0. \end{aligned}$$

Полученная система имеет единственное решение, если её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{T}_{mn}^{ab} & \bar{T}_{mn}^{cd} \\ \bar{T}_{kl}^{ab} & \bar{T}_{kl}^{cd} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Отсюда следует, что выполнение условия

$$\Delta \neq 0$$

означает, что система статически определима и геометрически неизменяема. Если же

$$\Delta = 0,$$

то система статически неопределима и, следовательно, геометрически изменяема.

1.6 СПОСОБЫ ОБРАЗОВАНИЯ РАМ И КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Простые рамы могут быть получены последовательным присоединением стержней к исходному элементу посредством жёстких узлов. В примере,

показанном на рисунке 1.23, пространственная рама образована последовательным присоединением стержней 2-3 и 3-4 к консольному стержню 1-2. Геометрическая неизменяемость и статическая определимость получаемой таким

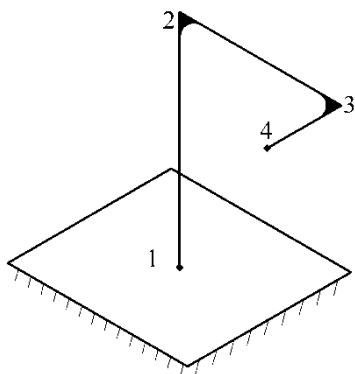


Рисунок 1.23 – Образование рамы последовательным присоединением стержней

образом рамы очевидны.

Более сложные системы могут быть получены соединением простых рам. На рисунке 1.24 показана плоская рама, полученная соединением трёх звеньев *A*, *B* и *C* с помощью шарниров. Каждое звено до соединения обладало в своей плоскости тремя степенями свободы. Соединение их между собой тремя шарнирами означает наложение шести связей, после чего остаются три степени свободы для всей системы в целом. Таким образом, полученная система

геометрически неизменяема и статически определима. Следует только иметь в виду, что шарниры не должны располагаться на одной прямой. Так, пред-

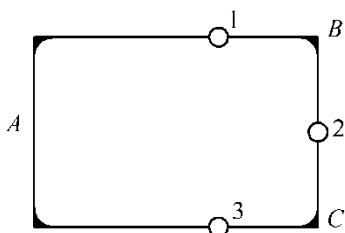


Рисунок 1.24 – Соединение простых рам

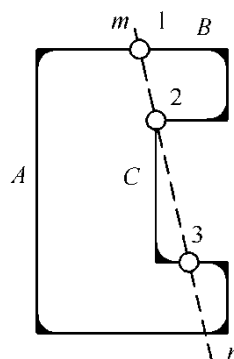


Рисунок 1.25 – Геометрически изменяемая система

ставленная на рисунке 1.25 стержневая система является мгновенно геометрически изменяемой, поскольку узел 2 может совершать бесконечно малое кинематическое перемещение перпендикулярно прямой *mn*.

Продолжая процесс последовательного присоединения стержней или рам, можно прийти к плоским многозамкнутым структурам типа изображённой на рисунке 1.26. Заметим, что три шарнира могут лежать здесь и на одной прямой, если они все не находятся в одной ячейке.

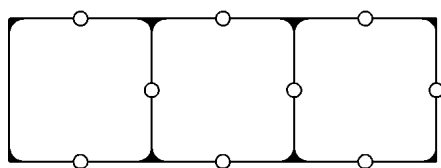


Рисунок 1.26 – Многозамкнутая рама

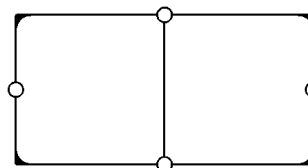


Рисунок 1.27 – Простые и сложные шарниры

Нетрудно видеть, что любая подобная система будет геометрически неизменяемой и статически определимой при выполнении условия

$$III = 3K, \quad (1.13)$$

где K – число замкнутых ячеек, III – число простых шарниров. Простым называется шарнир, соединяющий два стержня. Шарнир, соединяющий три стержня, эквивалентен двум простым (двойной шарнир), соединяющий четыре стержня – трём простым (тройной шарнир) и т.д. В примерах, показанных на рисунках 1.26 и 1.27, имеем соответственно $III = 9$, $K = 3$ и $III = 6$, $K = 2$, так что условие (1.13) в обоих случаях выполняется.

При неподвижном закреплении плоской рамы исключаются три степени свободы рамы в целом и необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости для плоской закреплённой рамы запишется так:

$$III = 3K + C_o - 3, \quad (1.14)$$

где C_o – число опорных связей.

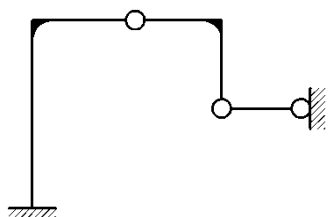


Рисунок 1.28 – Пример плоской стержневой системы

Это соотношение имеет силу для плоской рамы произвольной структуры. Например, для показанной на рисунке 1.28 плоской стержневой системы имеем $K = 0$, $III = 1$, $C_o = 4$, и условие (1.14) выполняется. Заметим, что при подсчёте величины III не должны приниматься во внимание шарниры, посредством которых крепятся опорные стержни.

В заключение отметим, что для образования плоских рам можно брать в качестве исходных систем геометрически неизменяемые фермы и применять метод замены связей. При этом используется модель сплошного узла в виде шарнирного соединения стержней с дополнительной связью, как показано на рисунке 1.29, где цифрами 1 и 2 отмечены два стержня, соединяемые сплошным узлом.

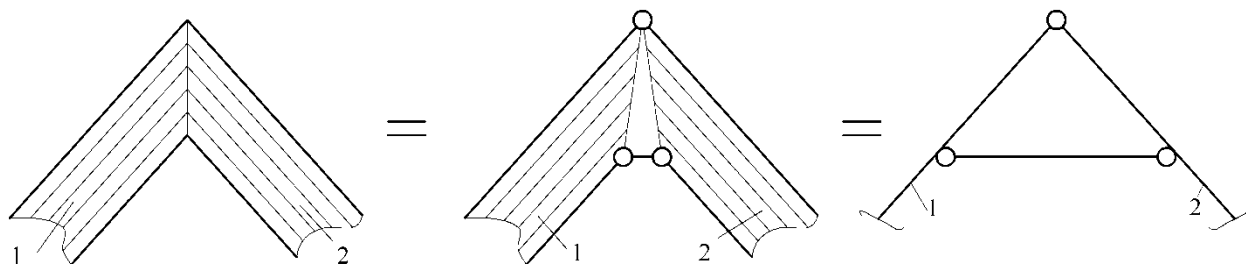


Рисунок 1.29 – Модель сплошного узла

Схема образования рамы по методу замены связей проиллюстрирована двумя примерами на рисунке 1.30. Удаляемые стержни заменяются такими

связями, которые исключают возникающую подвижность, что обеспечивает геометрическую неизменяемость получаемой системы.

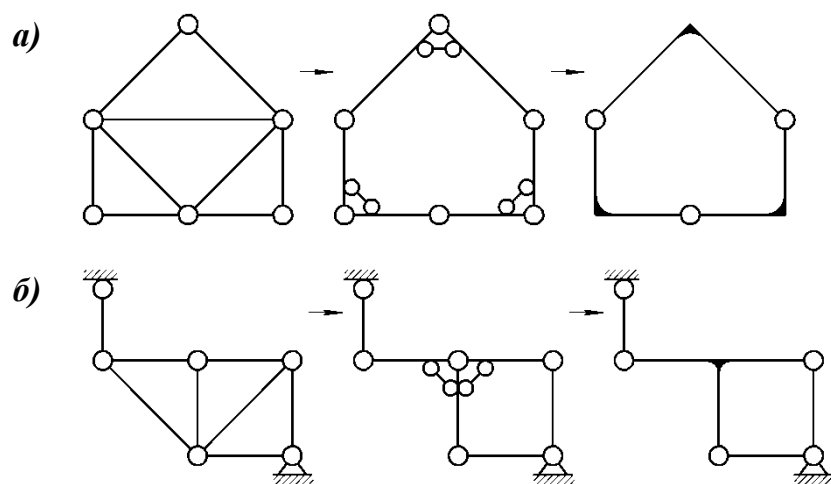


Рисунок 1.30 – Образование рам методом замены связей

2 ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1 РАБОТА СТАТИЧЕСКИ ПРИЛОЖЕННЫХ ВНЕШНИХ СИЛ

Будем предполагать, что стержневая система является линейно-деформируемой. В таком случае работа, производимая статически приложенными внешними силами, не зависит от порядка приложения сил, а определяется лишь их конечными значениями.

Пусть стержневая система испытывает действие произвольной системы сил $P_1, P_2, \dots, P_n$ (рисунок 2.1). Примем, что все силы возрастают одновременно от нуля до своих конечных значений, причём между ними всё время сохраняется неизменное соотношение. В результате деформирования системы точка m_i , в которой приложена сила P_i , переходит в новое положение m'_i . Проекцию полного перемещения точки m_i на направление линии действия силы P_i будем обозначать через v_i и называть перемещением силы P_i .

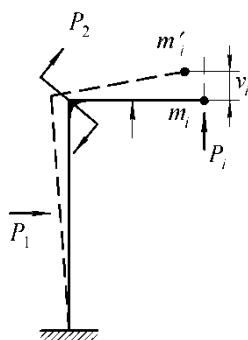


Рисунок 2.1 – Стержневая система под действием произвольной нагрузки

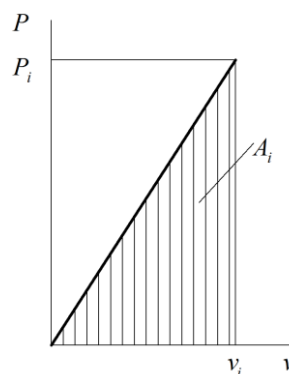


Рисунок 2.2 – Зависимость $P_i - v_i$ для линейно-деформируемой системы

Для линейно-деформируемой системы зависимость между силой P_i и перемещением v_i является линейной (рисунок 2.2). Нарастая от нуля до конечного значения, сила P_i производит работу, численно равную площади треугольника, заштрихованного на рисунке 2.2:

$$A_i = \frac{1}{2} P_i v_i.$$

Суммарная работа, затрачиваемая на деформирование системы, определится, очевидно, выражением

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i. \quad (2.1)$$

Это равенство выражает теорему Клапейрона, согласно которой работа, производимая при нагружении линейно-деформируемого тела, равна полусумме произведений окончательных значений сил на окончательные значения соответствующих перемещений.

Основываясь на принципе независимости действия сил, можно доказать важную теорему о взаимности работ. Пусть на тело действуют в точках m_1 и m_2 две силы P_1 и P_2 (рисунок 2.3). Обозначим через v_{12} перемещение точки m_1 по направлению силы P_1 , производимое силой P_2 , а через v_{21} – перемещение точки m_2 по направлению силы P_2 , производимое силой P_1 .

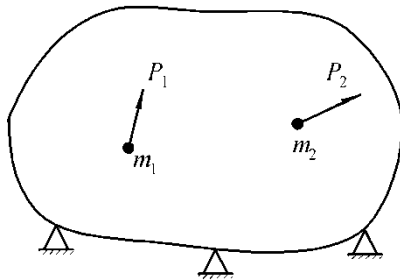


Рисунок 2.3 – К теореме о взаимности работ

Пусть, далее, A_1 и A_2 – работы соответственно сил P_1 и P_2 при их раздельном приложении. Предположим, что вначале тело нагружается силой P_1 ; при этом будет совершена работа A_1 . Затем приложим силу P_2 . Нарастая от нуля до своего конечного значения, она произведёт работу A_2 . Кроме того, первоначально применённая сила P_1 совершит работу $P_1 v_{12}$ на перемещении v_{12} , вызванном силой P_2 .

Эта работа вычисляется без множителя $1/2$, поскольку при создании перемещения v_{12} сила P_1 сохраняет неизменное окончательное значение. Таким образом, полная работа, затраченная на деформирование тела, определится как сумма

$$A = A_1 + A_2 + P_1 v_{12}.$$

Если предположить, что вначале прикладывается сила P_2 , а потом P_1 , те же рассуждения приводят к выражению

$$A = A_2 + A_1 + P_2 v_{21}.$$

Приравнявая правые части полученных соотношений, устанавливаем равенство

$$P_1 v_{12} = P_2 v_{21}, \quad (2.2)$$

которое и выражает *теорему Бетти о взаимности работ*. Согласно этой теореме *работа одной силы на перемещении, вызванном действием другой, равна работе второй силы на перемещении, вызванном действием первой*.

Положив $P_1 = P_2 = P$, получим из (2.2) соотношение

$$v_{12} = v_{21}, \quad (2.3)$$

которое называется *теоремой Максвелла о взаимности перемещений*. Она устанавливает, что *перемещение точки m_1 по заданному направлению 1 от*

действия силы P , приложенной в точке m_2 в заданном направлении 2, равно перемещению точки m_2 по направлению 2 от действия силы той же величины P , приложенной в точке m_1 в направлении 1.

Если, в частности, $P = 1$, то вместо v_{12} и v_{21} будем использовать обозначения δ_{12} и δ_{21} . Эти величины, называемые коэффициентами податливости или коэффициентами влияния подчиняются, очевидно, равенству

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (2.4)$$

2.2 ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Стержневая система при нагружении накапливает потенциальную энергию деформации, численно равную работе внутренних сил, возникающих в процессе деформирования. Для её нахождения рассмотрим стержень пространственной рамы (рисунок 2.4). Отнесём его к декартовой системе координат x, y, z , направив ось x вдоль оси стержня и совместив оси y, z с главными центральными осями инерции поперечного сечения.

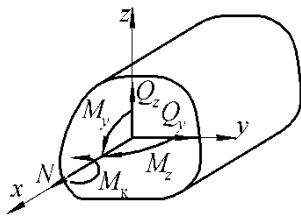


Рисунок 2.4 – Стержень пространственной рамы

В сечении стержня действуют в общем случае силы и моменты, показанные на рисунке 2.4. Положительными будем считать растягивающую силу N и такие изгибающие моменты M_y, M_z , для которых растянутыми оказываются волокна с положительными координатами соответственно z и y . Положительные перерезывающие силы Q_y, Q_z в сечении, нормаль к которому направлена в положительную сторону оси x , действуют в положительных направлениях осей y и z ; положительный крутящий момент M_x в том же сечении действует против часовой стрелки при взгляде с положительного направления оси x .

Заметим, что благодаря вышеуказанному выбору координатных осей каждому из шести силовых факторов соответствует такое обобщённое перемещение, на котором ни один из пяти остальных не производит работу. Поэтому при вычислении потенциальной энергии деформации вклады этих факторов можно рассматривать по отдельности.

Выделив из стержня бесконечно малый элемент длиной dx , найдём его потенциальную энергию деформации dU как работу, совершаемую внутренними силами. Одно из крайних сечений элемента можно условно принять неподвижным, учитывая тем самым лишь взаимные смещения крайних сечений.

На рисунке 2.5 показано действие на выделенный элемент осевой силы N . Нарастая от нуля до своего конечного значения, сила совершит работу, равную

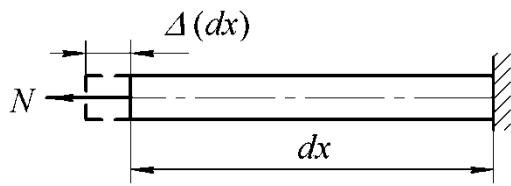


Рисунок 2.5 – Действие осевой силы

$$dU_N = \frac{1}{2} N \Delta(dx),$$

где $\Delta(dx)$ – производимое силой удлинение элемента. Согласно закону Гука

$$\Delta(dx) = \frac{N dx}{EF},$$

где E – нормальный модуль упругости материала стержня; F – площадь сечения. Отсюда получаем выражение для вклада осевой силы в потенциальную энергию деформации выделенного элемента:

$$dU_N = \frac{N^2}{2EF} dx.$$

Рассмотрим затем действие изгибающего момента M_y (рисунок 2.6). Деформированная ось элемента dx будет при изгибе в плоскости xz представлять собой приближённо дугу окружности радиуса ρ с центральным углом $d\theta = \frac{dx}{\rho}$. Производимая моментом работа равна

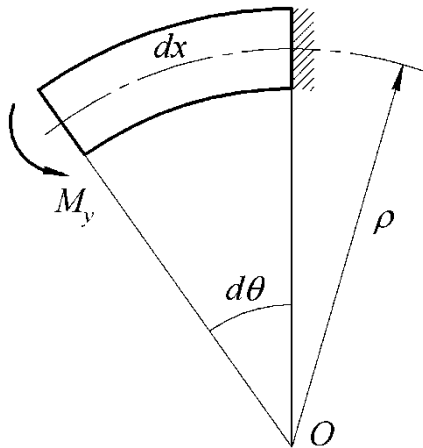


Рисунок 2.6 – Действие изгибающего момента M_y

$$dU_{M_y} = \frac{1}{2} M_y d\theta = \frac{1}{2} \frac{M_y}{\rho} dx.$$

Как известно из теории изгиба бруса, кривизна изогнутой оси при плоском изгибе связана с изгибающим моментом соотношением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y},$$

где I_y – момент инерции сечения относительно оси y . Отсюда следует, что

$$dU_{M_y} = \frac{M_y^2}{2EI_y} dx.$$

Аналогичным образом определяется вклад в потенциальную энергию элемента, вносимый изгибающим моментом M_z :

$$dU_{M_z} = \frac{M_z^2}{2EI_z} dx,$$

где I_z – момент инерции сечения относительно оси z .

Обозначив далее через $d\varphi$ угол поворота незакреплённого сечения относительно оси x , запишем выражение для работы, производимой крутящим моментом M_k :

$$dU_{M_k} = \frac{1}{2} M_k d\varphi.$$

Но, как известно из курса сопротивления материалов,

$$d\varphi = \frac{M_k dx}{GI_k},$$

где GI_k – жёсткость стержня на кручение (G – модуль сдвига материала, I_k – геометрическая характеристика жёсткости на кручение). С учётом этого приходим к выражению

$$dU_{M_k} = \frac{M_k^2}{2GI_k} dx.$$

Перейдём теперь к вычислению работы перерезывающей силы Q_z (рисунок 2.7). Выделим в рассматриваемом элементе продольное волокно с

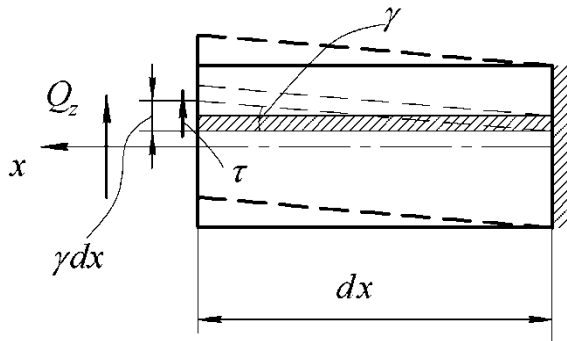


Рисунок 2.7 – Действие перерезывающей силы Q_z

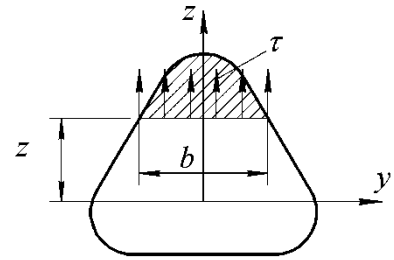


Рисунок 2.8 – Отсечённая часть сечения

поперечным сечением dF . В результате сдвига оно составит с осью x некоторый угол γ . Сила τdF , где τ – касательное напряжение в площадке dF , нарастая от нуля до конечного значения, переместится на расстояние γdx . Произведённая ей работа составит величину $\frac{1}{2} \tau dF \gamma dx$. Учитывая, что по закону Гука

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

и интегрируя выражение для работы по площади поперечного сечения, получим выражение для dU_{Q_z} в виде

$$dU_{Q_z} = \frac{dx}{2G} \int_F \tau^2 dF.$$

Воспользуемся далее формулой Журавского для касательного напряжения при изгибе

$$\tau = \frac{Q_z S_y}{I_y b},$$

где S_y – статический момент части площади поперечного сечения, отсекаемой прямой $z = \text{const}$ (эта часть сечения на рисунке 2.8 заштрихована); b – ширина сечения на расстоянии z от оси y . Тогда для dU_{Q_z} получим

$$dU_{Q_z} = \frac{Q_z^2 dx}{2GI_y^2} \int_F \frac{S_y^2}{b^2} dF.$$

Это выражение принято представлять в виде

$$dU_{Q_z} = k_z \frac{Q_z^2 dx}{2GF},$$

где через k_z обозначена безразмерная величина, определяемая по формуле

$$k_z = \frac{F}{I_y^2} \int_F \frac{S_y^2}{b^2} dF.$$

Аналогично для работы силы Q_y будем иметь выражение

$$dU_{Q_y} = k_y \frac{Q_y^2 dx}{2GF},$$

где

$$k_y = \frac{F}{I_z^2} \int_F \frac{S_z^2}{c^2} dF.$$

Здесь c – ширина сечения на расстоянии y от оси z .

Коэффициенты k_y и k_z , учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений по сечению, зависят от формы поперечного сечения. Для прямоугольного сечения, например, $k_y = k_z = 6/5$, для круглого $k_y = k_z = 10/9$.

Просуммировав теперь полученные вклады, придём к следующему выражению для потенциальной энергии деформации бесконечно малого элемента:

$$dU = \left(\frac{N^2}{2EF} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{M_{\kappa}^2}{2GI_{\kappa}} + k_z \frac{Q_z^2}{2GF} + k_y \frac{Q_y^2}{2GF} \right) dx.$$

Если далее проинтегрировать это выражение по длине стержня, а затем просуммировать по всем стержням, то получим формулу для расчёта потенциальной энергии деформации стержневой системы. Система может содержать криволинейные стержни; применительно к этому общему случаю заменим дифференциальный отрезок dx на элемент дуги ds и запишем окончательно

$$U = \sum_{j=1}^n \left(\int_{l_j} \frac{N^2 ds}{2EF} + \int_{l_j} \frac{M_y^2 ds}{2EI_y} + \int_{l_j} \frac{M_z^2 ds}{2EI_z} + \int_{l_j} \frac{M_k^2 ds}{2GI_k} + k_z \int_{l_j} \frac{Q_z^2 ds}{2GF} + k_y \int_{l_j} \frac{Q_y^2 ds}{2GF} \right), \quad (2.5)$$

где l_j – длина j -го стержня; n – общее число стержней.

В случае фермы единственным силовым фактором в сечениях стержней является осевая сила. Учитывая, что стержни фермы прямолинейны и что осевые силы в них постоянны по длине, получаем для потенциальной энергии деформации фермы выражение

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{N^2 l}{EF} \right)_j. \quad (2.6)$$

2.3 ТЕОРЕМА КАСТИЛЬЯНО

Рассмотрим стержневую систему, нагруженную произвольной системой сил $P_1, P_2, \dots, P_n$. Предположим, что определены внутренние силовые факторы в сечениях стержней и в соответствии с формулой (2.5) или (2.6) найдена потенциальная энергия деформации системы как функция действующих нагрузок:

$$U = U(P_1, P_2, \dots, P_n).$$

Пусть требуется найти перемещение v_i точки приложения некоторой силы P_i по направлению её действия (рисунок 2.9). Для вычисления v_i пред-

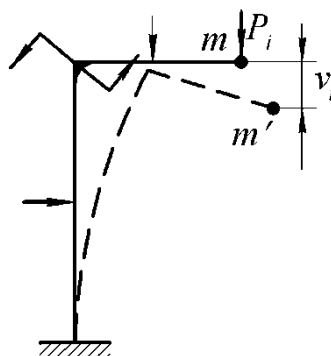


Рисунок 2.9 – К определению перемещения v_i

положим, что сила P_i получила бесконечно малое приращение dP_i . Величина потенциальной энергии деформации станет равной

$$\tilde{U} = U + \frac{\partial U}{\partial P_i} dP_i. \quad (2.7)$$

Приращение получит и работа A . Для его нахождения предположим, что вначале к системе прикладывается только сила dP_i . Она создаёт перемещение dv_i и производит работу, равную $\frac{1}{2} dP_i dv_i$. Затем прикладывается полная система сил, в результате чего затраченная на деформирование системы работа окажется равной

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} dP_i dv_i + A + v_i dP_i.$$

Здесь последнее слагаемое учитывает работу, совершаемую первоначально приложенной силой на перемещении v_i . Первое слагаемое, имеющее второй порядок малости, следует отбросить, после чего получим

$$\tilde{A} = A + v_i dP_i. \quad (2.8)$$

Совершаемая внешними силами работа равна накапливаемой в теле потенциальной энергии деформации. Приравнявая выражения (2.7) и (2.8) и учитывая, что $U = A$, придём к равенству

$$v_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}, \quad (2.9)$$

выражающему *теорему Кастильяно*. Согласно этой теореме *перемещение точки приложения силы в её направлении равно частной производной от потенциальной энергии деформации системы по этой силе*.

Проиллюстрируем использование теоремы Кастильяно двумя примерами. На рисунке 2.10,а показана балка, шарнирно закреплённая по концам и



Рисунок 2.10 – Примеры определения перемещений по теореме Кастильяно

нагруженная на правом конце моментом M . Реакции опор будут по абсолютной величине равны M/l . В сечении балки, расположенном на расстоянии x от левой опоры, изгибающий момент имеет величину

$$M_y = \frac{M}{l} x.$$

Потенциальная энергия деформации балки определяется так:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2}{EI_y} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{l^2 EI_y} x^2 dx = \frac{M^2 l}{6EI_y}.$$

Обобщённым перемещением для момента M является угол поворота θ сечения балки на правом конце. По теореме Кастильяно находим его значение:

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M} = \frac{Ml}{3EI_y}.$$

В другом примере (рисунок 2.10,б) балка длиной l нагружена посередине силой P . Реакции опор равны $P/2$ каждая, а изгибающий момент M_y на расстоянии $x < l/2$ от начала координат

$$M_y = \frac{P}{2} x.$$

Учитывая симметрию, проинтегрируем выражение для U в пределах от 0 до $l/2$ и удвоим результат. Это даёт

$$U = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{l/2} \frac{M_y^2}{EI_y} dx = \int_0^{l/2} \frac{P^2}{4EI_y} x^2 dx = \frac{P^2 l^3}{96EI_y}.$$

По теореме Кастильяно находим далее прогиб балки под силой:

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl^3}{48EI_y}.$$

2.5 ИНТЕГРАЛ МОРА ДЛЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Определение перемещений с помощью теоремы Кастильяно требует составления функциональной зависимости потенциальной энергии деформации от внешних сил, которая может оказаться весьма громоздкой. Кроме того, такой путь позволяет находить только перемещения точек приложения сил и только в направлении их действия. Более общий подход основывается на использовании интеграла Мора, который в сопротивлении материалов рассматривался применительно к изгибу балки. Установим общее выражение интеграла Мора для произвольной стержневой системы.

Пусть в стержнях системы, нагруженной произвольным образом, найдено распределение внутренних сил N , M_y , M_z , M_k , Q_z , Q_y и пусть требуется найти перемещение некоторой точки m в направлении $i-i$ (рисунок 2.11,а). Введём единичную систему, в которой в точке m в заданном направлении приложена единичная сила (рисунок 2.11,б). Внутренние силовые факторы в единичной системе обозначим через $\bar{N}$, $\bar{M}_y$, $\bar{M}_z$, $\bar{M}_k$, $\bar{Q}_z$, $\bar{Q}_y$.

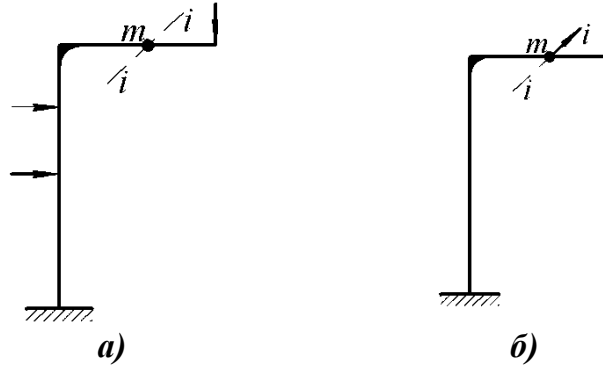


Рисунок 2.11 – К выводу интеграла Мора

После приложения единичной силы нагрузим стержневую систему дополнительно заданными внешними силами. Работа $\tilde{A}$, произведённая при таком деформировании системы, выразится в виде суммы трёх слагаемых:

$$\tilde{A} = \bar{A} + A + 1 \cdot v_i, \quad (2.9)$$

где $\bar{A}$ и A – работа единичной силы и работа внешних сил при их раздельном действии. Последнее слагаемое в выражении (2.9) представляет работу, которую совершает первоначально приложенная единичная сила на перемещении v_i , производимом внешней нагрузкой.

По завершении второго этапа нагружения внутренние силовые факторы в стержнях системы будут иметь значения $\tilde{N} = N + \bar{N}$, ..., $\tilde{Q}_y = Q_y + \bar{Q}_y$, так что для потенциальной энергии деформации в соответствии с формулой (2.5) получим

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\int_{l_j} \frac{\tilde{N}^2 ds}{EF} + \dots + k_y \int_{l_j} \frac{\tilde{Q}_y^2 ds}{GF} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\int_{l_j} \frac{(N + \bar{N})^2}{EF} ds + \dots + k_y \int_{l_j} \frac{(Q_y + \bar{Q}_y)^2}{GF} ds \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\int_{l_j} \frac{(N^2 + 2N\bar{N} + \bar{N}^2)}{EF} ds + \dots + k_y \int_{l_j} \frac{(Q_y^2 + 2Q_y\bar{Q}_y + \bar{Q}_y^2)}{GF} ds \right]. \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие N^2 , ..., Q_y^2 , согласно (2.5) дают в сумме потенциальную энергию деформации U системы, нагруженной только внешними силами, а слагаемые, содержащие $\bar{N}^2$, ..., $\bar{Q}_y^2$ – потенциальную энергию деформации $\bar{U}$ единичной системы. Таким образом, приходим к выражению

$$\tilde{U} = U + \bar{U} + \sum_{j=1}^n \left(\int_{l_j} \frac{N\bar{N}}{EF} ds + \dots + k_y \int_{l_j} \frac{Q_y\bar{Q}_y}{GF} ds \right). \quad (2.10)$$

Приравняем теперь правые части соотношений (2.9) и (2.10) и учтём равенства $A = U$; $\bar{A} = \bar{U}$. В итоге придём к искомой формуле для вычисления v_i :

$$v_i = \sum_{j=1}^n \left(\int_{l_j} \frac{N\bar{N}}{EF} ds + \int_{l_j} \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} ds + \int_{l_j} \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} ds + \right. \\ \left. + \int_{l_j} \frac{M_{\kappa} \bar{M}_{\kappa}}{GI_{\kappa}} ds + k_z \int_{l_j} \frac{Q_z \bar{Q}_z}{GF} ds + k_y \int_{l_j} \frac{Q_y \bar{Q}_y}{GF} ds \right). \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) называется интегралом Мора для стержневой системы.

Можно показать, что в случае пространственных рам и комбинированных систем основной вклад в перемещения вносят изгиб и кручение стержней. Слагаемые, учитывающие осевую деформацию и сдвиг, могут быть опущены без ущерба для точности расчёта. Таким образом, практические вычисления для таких систем можно выполнять по формуле

$$v_i = \sum_{j=1}^n \left(\int_{l_j} \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} ds + \int_{l_j} \frac{M_z \bar{M}_z}{EI_z} ds + \int_{l_j} \frac{M_{\kappa} \bar{M}_{\kappa}}{GI_{\kappa}} ds \right). \quad (2.12)$$

Заметим, что здесь интегрирование по длине прямолинейных стержней можно выполнять по правилу Верещагина.

В случае плоской рамы или плоской комбинированной системы расчётная формула принимает вид

$$v_i = \sum_{j=1}^n \int_{l_j} \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} ds. \quad (2.13)$$

Для ферм единственным источником перемещений узлов являются осевые деформации стержней. Учитывая, что в этом случае стержни прямолинейны и что осевые силы в них постоянны, получаем следующую расчётную формулу для ферменных конструкций:

$$v_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{N\bar{N}l}{EF} \right)_j. \quad (2.14)$$

2.6 МОНТАЖНЫЕ И ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Под монтажными понимаются перемещения, вызванные неточностью изготовления стержней конструкции. В статически определимых системах, о которых сейчас идёт речь, погрешности монтажа не сопровождаются появлением внутренних усилий, но вызывают определённые смещения точек относительно положений, предусмотренных проектом.

Пусть некоторые из прямолинейных стержней статически определимой системы имеют по длине отклонения от проектных размеров (рисунок 2.12,а). Обозначим через Δl_j отклонение длины j -го стержня от точного размера. Будем считать $\Delta l_j > 0$, если стержень выполнен длиннее, чем по чертежу, и $\Delta l_j < 0$, если короче. Требуется найти вызванное этим перемещение v_i некоторой точки m в направлении $i - i$.

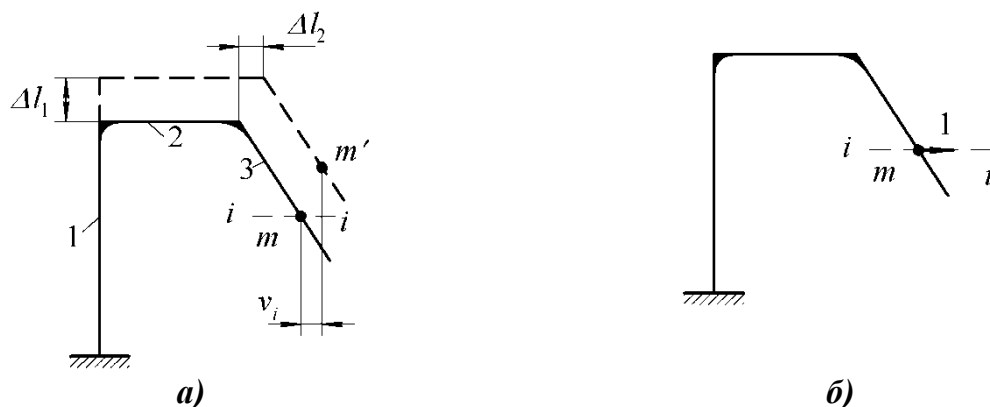


Рисунок 2.12 – К расчёту монтажных перемещений

Для решения задачи можно воспользоваться методом Мора. В самом деле, если в статически определимой системе нагрузить какой-либо стержень по концам равными и противоположно направленными осевыми силами, то напряжения и деформации возникнут только в этом стержне. Стержень изменит свою длину на величину Δl , и в стержневой системе возникнут такие же перемещения, как если бы стержень был изготовлен с отклонением по длине на величину Δl . Таким образом, выполненную с погрешностями стержневую систему можно трактовать как идеальную, но нагруженную силами, которые создают соответствующие удлинения стержней. Если j -й стержень имеет погрешность изготовления Δl_j , то осевая сила в стержне N_j , создающая такое же удлинение, определяется равенством

$$N_j = \left(\frac{\Delta l}{l} EF \right)_j. \quad (2.15)$$

Теперь можно приложить в точке m единичную силу в направлении $i - i$ (рисунок 2.12,б) и воспользоваться для определения v_i интегралом Мора. Поскольку при действии вводимых таким путём внешних нагрузок в сечениях стержней возникают только осевые силы N_j , выражение для перемещения v_i будет иметь вид (2.14):

$$v_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{N \bar{N} l}{EF} \right)_j.$$

Подставив сюда вместо N_j соотношение (2.15), приходим к следующей формуле для расчёта монтажных перемещений:

$$v_i = \sum_{j=1}^n \bar{N}_j \Delta l_j. \quad (2.16)$$

Как и следовало ожидать, монтажные перемещения в статически определимой системе не зависят от жесткостей стержней.

В качестве примера рассмотрим ферму, показанную на рисунке 2.13,а.

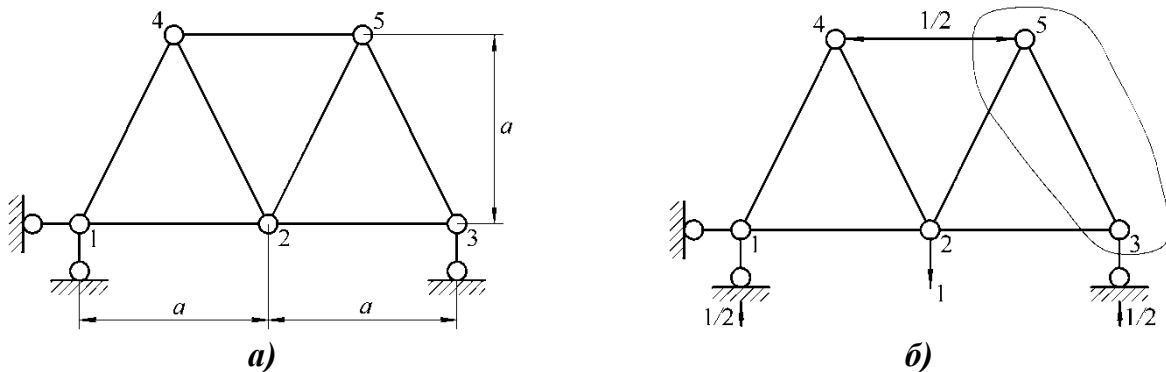


Рисунок 2.13 – Пример расчёта монтажных перемещений

Пусть стержень 4-5 выполнен длиннее, чем по чертежу, на величину

$$\Delta l_{4-5} = 5 \text{ мм}.$$

Требуется найти вызванное этим вертикальное смещение v узла 2.

Приложим в узле 2 вертикальную силу, равную 1. Реакции каждой из вертикальных опор равны $1/2$. Вырежем далее фрагмент фермы, очерченный на рисунке 2.13,б замкнутой кривой, и составим условие равенства нулю моментов сил, действующих на этот фрагмент, относительно узла 2. Из этого условия находим, что осевая сила в стержне 4-5:

$$\bar{N}_{4-5} = -1/2.$$

По формуле (2.16), где остаётся только одно слагаемое, вычисляем

$$v = \bar{N}_{4-5} \cdot \Delta l_{4-5} = (-1/2) \cdot 5 = -2,5 \text{ мм}.$$

Соотношение (2.16) можно взять за основу определения перемещений, возникающих от просадки опор. Смещения опор от заданного положения можно представить как удлинения или укорочения опорных стержней. Формула (2.16) преобразуется в этом случае к виду

$$v_i = \sum_{j=1}^{n_0} \bar{R}_j d_j, \quad (2.17)$$

где d_j – смещение j -го опорного стержня; $\bar{R}_j$ – реакция со стороны j -го опорного стержня в единичной системе; суммирование выполняется по всем опорным стержням. Сила $\bar{R}_j$ должна приниматься положительной, если она направлена против смещения опоры, и отрицательной – если в ту же сторону.

Монтаж стержневой системы производится при определённой температуре, и эту температуру при сборке имеют все стержни. При эксплуатации температура стержней может измениться, что сопровождается температурной деформацией и вызывает перемещения точек стержневой системы.

При изменении температуры на t градусов происходит относительное удлинение волокон материала на величину

$$\varepsilon_t = \alpha t,$$

где α – коэффициент линейного расширения материала. Стержень длиной l при равномерном прогреве получит удлинение

$$\Delta l = l \varepsilon_t = \alpha t l.$$

Эффект от нагрева стержня будет таким же, как и в случае изготовления его с погрешностью Δl . Исходя из формулы (2.15), можно написать аналогичное выражение для вычисления перемещения v_i применительно к случаю воздействия температуры:

$$v_i = \sum_{j=1}^n (\alpha t l \bar{N})_j, \quad (2.18)$$

где суммирование выполняется по всем стержням. Подчеркнём, что буква t обозначает здесь не температуру стержня (абсолютную или, скажем, по шкале Цельсия), а её отклонение от того начального значения, при котором стержневая система была смонтирована. При этом $t_j > 0$, если происходит нагрев, и $t_j < 0$ – в случае понижения температуры стержня.

Продемонстрируем использование полученного результата на примере рамы, изображённой на рисунке 2.14, *а* сплошными линиями.

Предположим, что температура стержня 2-3 изменилась на t градусов, в то время как температура остальных стержней осталась неизменной. Требуется найти угол поворота θ стержня 1-2. Поскольку обобщённой силой, соответствующей углу поворота, является пара, прикладываем единичный момент в узле 1 (рисунок 2.14, *б*). Заметим, что стержень 1-2 поворачивается на угол θ , оставаясь прямолинейным. Поэтому единичный момент можно прикладывать в любом месте стержня 1-2.

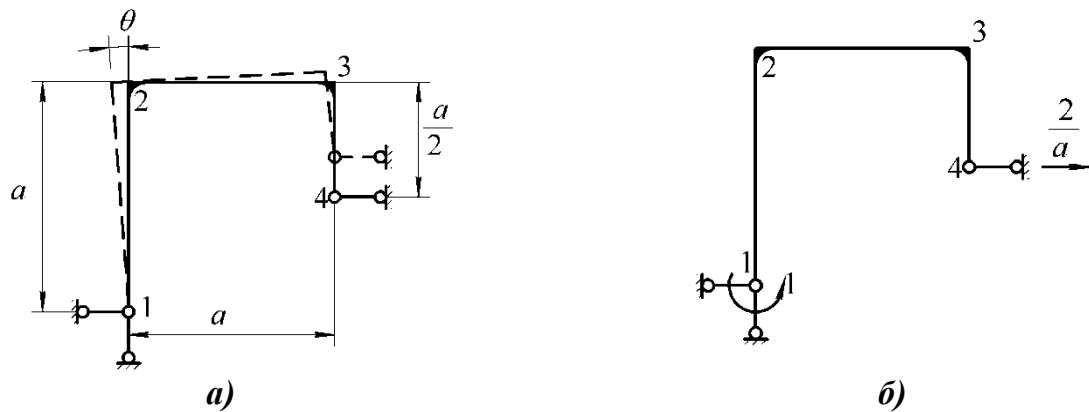


Рисунок 2.14 – Пример расчёта температурных перемещений

Составив условие равновесия моментов относительно узла 1, устанавливаем, что реакция опоры в узле 4 равна $\frac{2}{a}$. Далее находим осевую силу

$\bar{N}_{2-3} = \frac{2}{a}$ в стержне 2-3. По формуле (2.18) выводим

$$\theta = \alpha t l_{2-3} \bar{N}_{2-3} = 2\alpha t.$$

Схема температурных перемещений рамы при положительном значении t показана на рисунке 2.14, a штриховыми линиями.

3 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

3.1 РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Мы говорили ранее о минимальном числе связей, необходимом для обеспечения геометрической неизменяемости стержневой системы. Это же число связей характеризует статическую определимость системы. Если число связей превышает минимально необходимое количество, система будет статически неопределимой. Связи системы сверх минимально необходимого количества называют «лишними». Для определения числа L лишних связей следует обратиться к выведенным ранее необходимым условиям геометрической неизменяемости стержневых систем. На основании этих условий устанавливаем формулы для подсчёта числа лишних связей, представленные в таблице 3.1.

Таблица 3.1 Определение числа лишних связей

Тип системы	Характер закрепления	
	Незакреплённая	Закреплённая
Плоская ферма	$L = C - 2U + 3$	$L = C + C_0 - 2U$
Пространственная ферма	$L = C - 3U + 6$	$L = C + C_0 - 3U$
Плоские рамы и комбинированные системы	$L = 3K - III$	$L = 3K - III + C_0 - 3$

Примеры подсчёта числа лишних связей приведены на рисунке 3.1.

Расчёт статически неопределимой системы можно выполнить методом сил. Первым шагом в методе сил является образование основной системы, под которой понимается статически определимая система, получаемая из исходной удалением лишних связей.

Приложив помимо внешних нагрузок неизвестные пока силы X_i вместо удалённых связей, получим так называемую эквивалентную систему. Требование, чтобы суммарные перемещения в эквивалентной системе в направлении сил X_i равнялись нулю, приводит к системе уравнений относительно неизвестных сил. Эти уравнения можно записать в канонической форме, если ввести единичные системы, в каждой из которых в направлении одной из неизвестных X_i действует единичная сила $\bar{X}_i = 1$.

Обозначим через Δ_i перемещение в направлении i -й связи. Оно представляется как сумма

$$\Delta_i = \Delta_{i0} + \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n = \Delta_{i0} + \sum_{k=1}^n \delta_{ik} X_k,$$

где Δ_{i0} есть перемещение от внешних сил, а δ_{ik} означает перемещение в направлении i -й связи, вызванное действием единичной силы $\bar{X}_k$ (n – общее число неизвестных сил). Приравнявая Δ_i нулю, приходим к системе канонических уравнений метода сил:

$$\Delta_{i0} + \sum_{k=1}^n \delta_{ik} X_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.1)$$

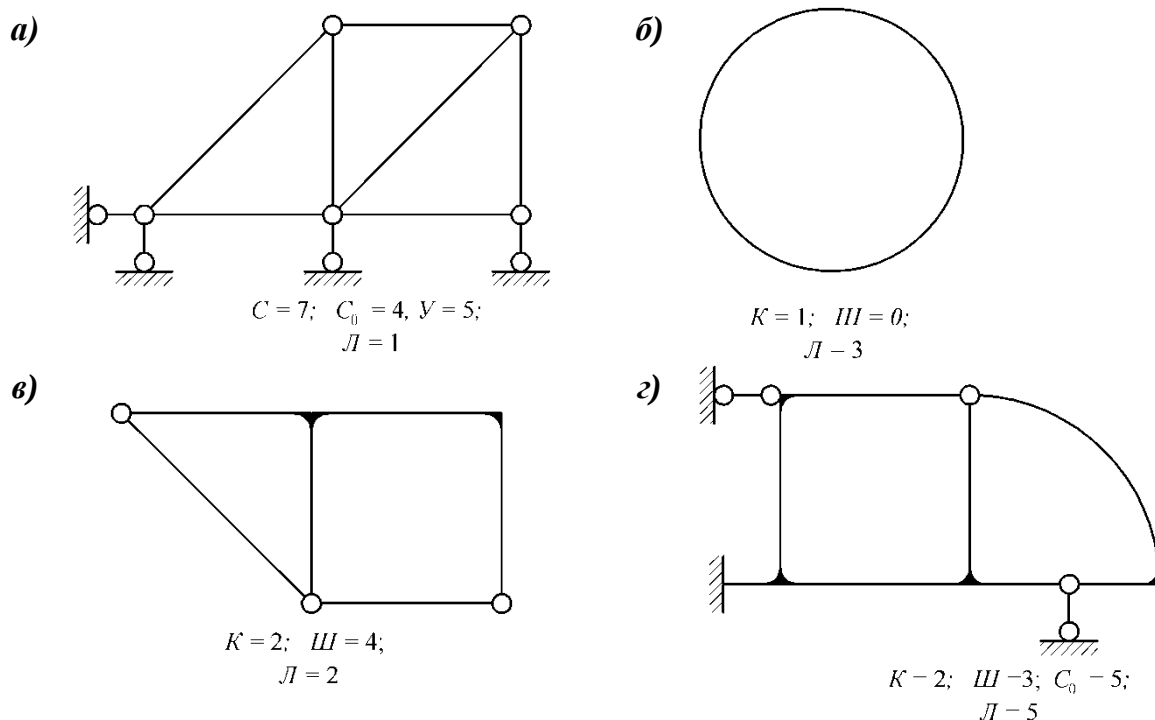


Рисунок 3.1 – Примеры статически неопределимых стержневых систем

Матрица коэффициентов

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

системы уравнений (3.1) симметрична благодаря свойству взаимности коэффициентов влияния

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Коэффициентами системы (3.1) являются перемещения и определяются они должны с помощью интеграла Мора. Так, для пространственной рамы

$$\Delta_{i0} = \sum_j \left(\int_{l_j} \frac{M_{y0} \bar{M}_{yi}}{EI_y} ds + \int_{l_j} \frac{M_{z0} \bar{M}_{zi}}{EI_z} ds + \int_{l_j} \frac{M_{\kappa 0} \bar{M}_{\kappa i}}{GI_{\kappa}} ds \right);$$

$$\delta_{ik} = \sum_j \left(\int_{l_j} \frac{\bar{M}_{yi} \bar{M}_{yk}}{EI_y} ds + \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{zi} \bar{M}_{zk}}{EI_z} ds + \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{\kappa i} \bar{M}_{\kappa k}}{EI_{\kappa}} ds \right), \quad (3.2)$$

где M_{y0} , M_{z0} и $M_{\kappa 0}$ – изгибающие и крутящий моменты в сечениях стержня в основной системе от действия внешней нагрузки; $\bar{M}_{yi}$, $\bar{M}_{zi}$, $\bar{M}_{\kappa i}$ – изгибающие и крутящий моменты в i -й единичной системе; $\bar{M}_{yk}$, $\bar{M}_{zk}$, $\bar{M}_{\kappa k}$ – то же в k -й единичной системе; суммирование выполняется по всем стержням.

Для плоской рамы, расположенной в плоскости xz , будем иметь

$$\Delta_{i0} = \sum_j \int_{l_j} \frac{M_{y0} M_{yi}}{EI_y} ds; \quad \delta_{ik} = \sum_j \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{yi} \bar{M}_{yk}}{EI_y} ds, \quad (3.3)$$

а для фермы

$$\Delta_{i0} = \sum_j \left(\frac{N_0 \bar{N}_i l}{EF} \right); \quad \delta_{ik} = \sum_j \left(\frac{N_i \bar{N}_k l}{EF} \right), \quad (3.4)$$

где N_0 , $\bar{N}_i$, $\bar{N}_k$ – осевые силы в стержнях в основной системе от внешних сил и от действия единичных сил $\bar{X}_i = 1$ и $\bar{X}_k = 1$.

Решив систему уравнений (3.1), находим неизвестные силы X_i . Далее можно найти силовые факторы в сечениях стержней по формулам

$$N = N_0 + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n;$$

$$M_y = M_{y0} + \bar{M}_{y1} X_1 + \bar{M}_{y2} X_2 + \dots + \bar{M}_{yn} X_n;$$

$$Q_z = Q_{z0} + \bar{Q}_{z1} X_1 + \bar{Q}_{z2} X_2 + \dots + \bar{Q}_{zn} X_n \quad (3.5)$$

и т.д.

Трудоёмкость расчёта стержневой системы методом сил в значительной степени зависит от того, насколько удачно выбрана основная система. Обсудим это более подробно.

Безусловное требование, которому должна удовлетворять основная система, – она должна быть геометрически неизменяемой. Это накладывает определённые ограничения на выбор тех связей, которые удаляются при образовании основной системы. Кроме того, основная система должна быть по возможности простой.

На рисунке 3.2 приведена трижды статически неопределимая ($L = 3$) плоская рама. Для устранения лишних связей можно вводить шарниры, освобождая с помощью каждого из них по одной связи, отбрасывать имеющиеся шарниры (удаляя каждый раз по две связи), делать разрезы (каждый из них удаляет три связи) либо отбрасывать те или иные опорные связи.

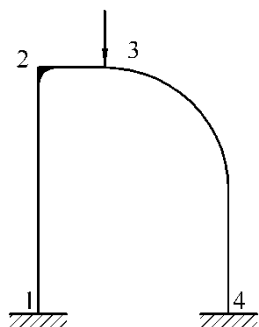
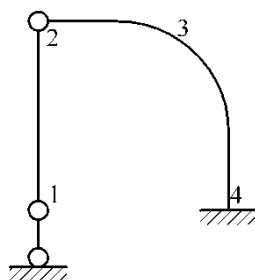
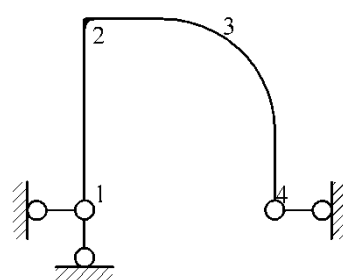


Рисунок 3.2 – Статически неопределимая рама



а)

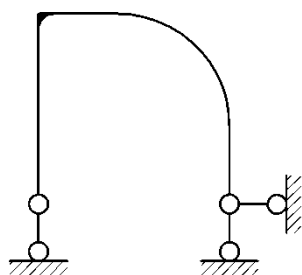


б)

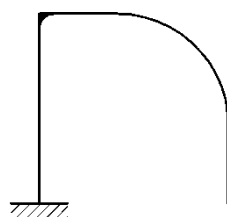
Рисунок 3.3 – Примеры неправильного выбора основной системы

На рисунке 3.3 показаны ошибочные варианты выбора основной системы. В случае, изображённом на рисунке 3.3, *а* узел 1 может совершать бесконечно малые кинематические перемещения в горизонтальном направлении, а в варианте *б* такие же перемещения, но в вертикальном направлении возможны в узле 4.

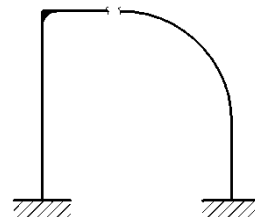
Примеры правильного образования основной системы представлены на рисунке 3.4; из них предпочтительными являются варианты *б* и *в*. Эквивалентные системы, соответствующие этим трём вариантам, показаны на рисунке 3.5. Заметим, что неизвестные «силы» понимаются в обобщённом смысле. Ими могут оказаться, в частности, сила, момент (когда при удалении связи освобождается линейное или угловое перемещение), две равные противоположно направленные силы или два равных противоположно направленных момента (когда речь идёт о взаимном линейном или угловом перемещении смежных сечений).



а)



б)



в)

Рисунок 3.4 – Примеры правильного выбора основной системы

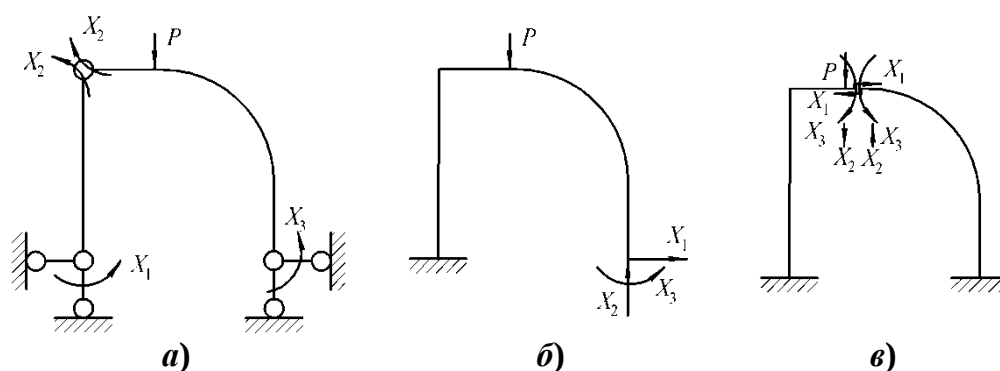


Рисунок 3.5 – Эквивалентные системы

Особо остановимся на случае статически неопределимой фермы. Если в качестве лишних связей выступают стержни, то при образовании основной системы следует их не отбрасывать, а разрезать, как показано в примере на рисунке 3.6. Тогда условия отсутствия перемещений в направлении устранённых связей запишутся в стандартной форме $\Delta_i = 0$, так что система канонических уравнений останется в силе. Конечно, разрезанные стержни должны учитываться при суммировании по формулам (3.4).

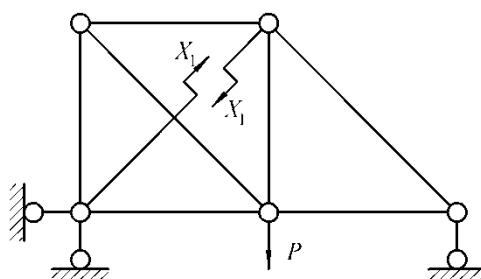


Рисунок 3.6 – Случай статически неопределимой фермы

Отметим также особенность расчёта плоских рам, нагруженных перпендикулярно их плоскости. Координатные оси выберем таким образом, чтобы ось z для каждого стержня была перпендикулярна плоскости рамы, как показано в примере на рисунке 3.7.

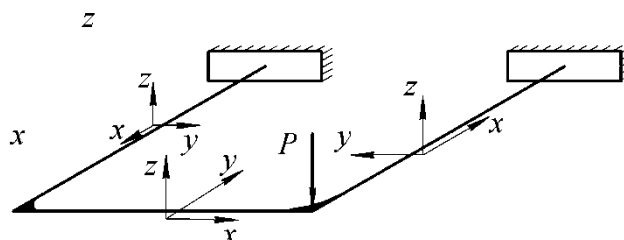


Рисунок 3.7 – Плоская рама, нагруженная перпендикулярно плоскости

Силы в направлении устранённых связей можно разбить в этом случае на две группы (рисунок 3.8). Неизвестные X_1, X_2, X_3 деформируют раму из плоскости, а неизвестные X_4, X_5, X_6 вызывают её деформацию в своей плоскости. В первых трёх единичных системах будут отсутствовать изгибающие моменты в плоскости рамы, а в последних трёх – изгибающие моменты из плоскости и крутящие моменты:

$$\begin{aligned}\bar{M}_{yi} &= 0 \text{ для } i = 1, 2, 3; \\ \bar{M}_{zi} &= 0 \text{ и } \bar{M}_{ki} = 0 \text{ для } i = 4, 5, 6.\end{aligned}$$

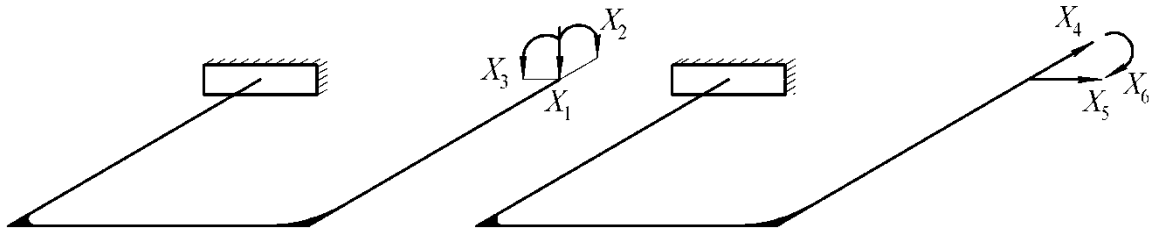


Рисунок 3.8 – Две группы неизвестных сил

Вследствие этого коэффициенты δ_{ik} канонических уравнений метода оказываются нулевыми, когда $i = 1, 2$ или 3 , а $k = 4, 5$ или 6 . Канонические уравнения распадаются на две независимые системы:

$$\Delta_{i0} + \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} X_k = 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.6)$$

$$\Delta_{i0} + \sum_{k=4}^6 \delta_{ik} X_k = 0; \quad i = 4, 5, 6. \quad (3.7)$$

От действия внешней нагрузки изгибающие моменты $M_{y0} = 0$, поэтому будем иметь

$$\Delta_{i0} = 0 \text{ для } i = 4, 5, 6.$$

Таким образом, система (3.7) оказывается однородной. Поскольку её определитель отличен от нуля, она имеет нулевое решение:

$$X_4 = 0; \quad X_5 = 0; \quad X_6 = 0.$$

Отсюда следует вывод: при нагружении плоской рамы из плоскости никаких внутренних усилий в плоскости рамы не возникает.

3.2 УЧЁТ СИММЕТРИИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Расчёт статически неопределимой системы методом сил можно упростить, если она обладает симметрией. Упрощение достигается в том случае, когда не нарушается симметрия при образовании основной системы. Рассмотрим, например, симметричную раму, показанную на рисунке 3.9, а. Образует

основную систему, сделав разрез в сечении, находящемся на оси симметрии (рисунок 3.9, б).

На рисунке 3.10 представлены эпюры изгибающих моментов в единичных системах. Изгибающие моменты $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ имеют симметричный характер относительно оси симметрии, $\bar{M}_3$ – обратно-симметричный. Коэффициенты влияния, содержащие в интеграле Мора произведение симметричных функций на обратно-симметричные, будут равны нулю:

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

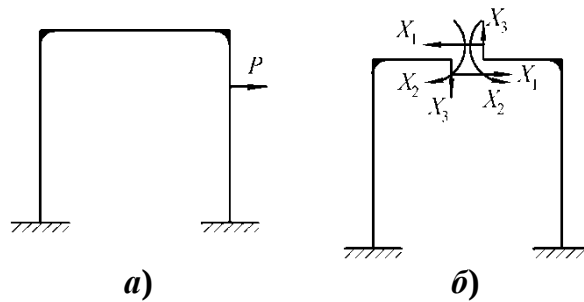


Рисунок 3.9 – Симметричная рама (а) и основная система для неё (б)

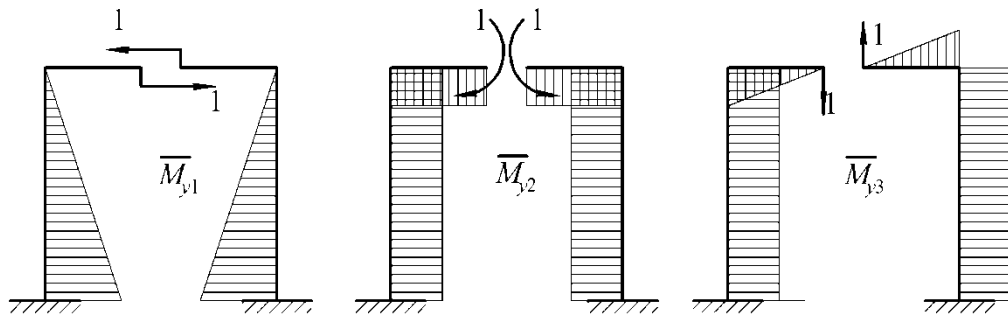


Рисунок 3.10 – Изгибающие моменты в единичных системах

В результате система трёх канонических уравнений метода сил распадётся на два уравнения относительно неизвестных X_1 и X_2 и отдельное уравнение относительно X_3 :

$$\begin{cases} \Delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0; \\ \Delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0; \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\Delta_{30} + \delta_{33}X_3 = 0. \quad (3.9)$$

Дальнейшие упрощения возникают в тех случаях, когда внешние нагрузки симметричны или обратно-симметричны по отношению к оси симметрии. Действительно, если нагрузки симметричны относительно оси сим-

метрии стержневой системы, то эпюра M_{y0} будет также симметричной. Коэффициент Δ_{30} при этом окажется нулевым, и из (3.9) находим, что $X_3 = 0$. Таким образом, при симметричной нагрузке отличными от нуля будут только «симметричные» неизвестные X_1 и X_2 . Неизвестная X_3 , которая вызывает обратно-симметричную деформацию системы, будет в этом случае заведомо равна нулю.

В случае же обратно-симметричного нагружения эпюра изгибающих моментов M_{y0} будет также обратно-симметричной. Коэффициенты Δ_{10} и Δ_{20} окажутся при этом нулевыми, и система уравнений (3.8) будет однородной. Её определитель отличен от нуля, так что симметричные неизвестные X_1 и X_2 будут нулевыми. Следовательно при обратно-симметричном нагружении отысканию подлежит лишь обратно-симметричная неизвестная X_3 , в то время как симметричные неизвестные будут заведомо нулевыми.

3.3 ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ РАСКРЫТИЯ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ

Контролем правильности раскрытия статической неопределимости может служить равенство нулю перемещения в направлении той или иной связи. Самая простая, но и самая ненадёжная проверка заключается в вычислении перемещений в направлении одной (или нескольких) из удалённых связей при найденных по формулам (3.5) значениях внутренних силовых факторов. Например, для плоской рамы можно вычислить перемещение в направлении i -й устранённой связи по формуле

$$\Delta_i = \sum_j \int_{l_j} \frac{M_y \bar{M}_{yi}}{EI_y} ds. \quad (3.10)$$

Так как $M_y = M_{y0} + \sum_{i=1}^n X_i \bar{M}_{yi}$, с учётом формул (3.3) преобразуем выражение (3.10) к виду

$$\Delta_i = \Delta_{i0} + \sum_{k=1}^n \delta_{ik} X_k.$$

Но именно равенство нулю этого выражения лежит в основе соответствующего канонического уравнения (3.1). Поэтому определяя Δ_i по формуле (3.10), мы, по существу, снова повторим те же вычисления, которые были выполнены при раскрытии статической неопределимости.

Более надёжная проверка заключается в образовании новой основной системы, отличной от той, которая использовалась при раскрытии статической неопределимости. Приложив в направлении какой-либо устранённой связи единичную силу, вычислим перемещение в её направлении. Применительно к плоской раме будем иметь, например,

$$\Delta = \sum_j \int_{l_j} \frac{M_y \bar{M}_y}{EI_y} ds,$$

где $\bar{M}_y$ – изгибающий момент от действия данной единичной силы. Выполнение равенства

$$\Delta = 0$$

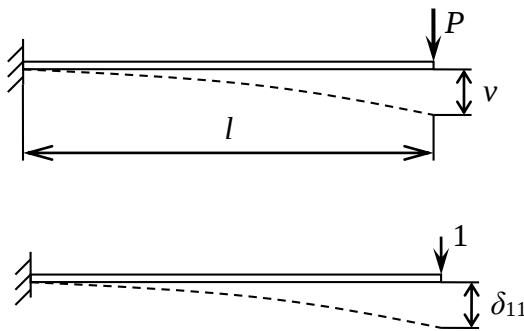
свидетельствует о правильности расчёта. Такие же проверки можно осуществить и по отношению к остальным устранённым связям в новой основной системе.

В заключение отметим следующее. Пусть выполнено раскрытие статической неопределимости стержневой системы и пусть требуется найти перемещение какой-либо её точки в заданном направлении. Расчёт можно выполнить с помощью интеграла Мора, прикладывая единичную силу *в статически определимой эквивалентной системе*. В качестве внутренних силовых факторов от действия внешних сил должны при этом использоваться суммарные величины, подсчитанные по формулам вида (3.5).

4 МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

4.1 ПОНЯТИЕ О МАТРИЦЕ ЖЁСТКОСТИ

Рассмотрим консольную балку, нагруженную силой на свободном конце (рисунок 4.1). Вертикальное перемещение точки приложения силы, как известно, равно



$$v = \delta_{11} P,$$

где $\delta_{11} = l^3 / (3EI)$ – коэффициент податливости (численно равный перемещению от единичной силы); E – модуль упругости; I – момент инерции поперечного сечения балки.

Рисунок 4.1 – Консольная балка с силой на конце

силу, необходимую для его создания:

$$P = \frac{1}{\delta_{11}} v = k v,$$

где

$$k = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3EI}{l^3}.$$

Величина k называется *коэффициентом жёсткости консольной балки*. Если положить $v = 1$, то сила P будет равна k . Отсюда вытекает физический смысл коэффициента жёсткости: k есть сила, которую необходимо приложить на конце балки, чтобы её прогиб равнялся единице.

Пусть далее к балке приложены две силы, как показано на ри-

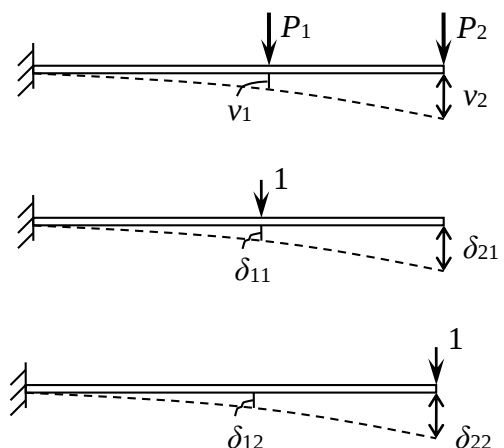


Рисунок 4.2 – Консольная балка под действием двух сил

сунке 4.2. Используя известные методы сопротивления материалов, можно найти перемещения v_1 и v_2 в направлении этих сил:

$$v_1 = \delta_{11}P_1 + \delta_{12}P_2;$$

$$v_2 = \delta_{21}P_1 + \delta_{22}P_2,$$

где коэффициенты влияния δ_{ij} зависят от геометрических размеров балки и модуля упругости E . Запишем эти соотношения в матричной форме

$$[v] = [\Delta][P],$$

где

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad [P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}; \quad [\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрица $[\Delta]$ называется *матрицей податливости*.

Если принять, что перемещения $[v]$ заданы, то из этого выражения можно найти силы $[P]$, вызывающие данные перемещения:

$$[P] = [\Delta]^{-1}[v] = [K][v].$$

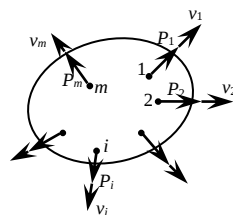
Матрица $[K] = [\Delta]^{-1}$ имеет следующую структуру:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

и называется *матрицей жёсткости рассматриваемой системы*.

Согласно теореме Максвелла о взаимности перемещений имеем $\delta_{12} = \delta_{21}$, то есть матрица $[\Delta]$ является симметричной. Обратная к ней матрица $[K]$ будет также симметричной (т.е. $K_{12} = K_{21}$).

Теперь рассмотрим общий случай, когда на произвольное упругое тело действует система m сил (рисунок 4.3), которую представим матрицей



$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}.$$

Рисунок 4.3 – Произвольная система сосредоточенных сил

Пусть перемещения точек приложения сил $[P]$ (в дальнейшем эти точки будем называть узлами) в направлении этих сил образуют матрицу

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Предположим, что перемещения $[v]$ задаются, а силы, необходимые для их создания, определяются соотношением

$$[P] = [K][v]. \quad (4.1)$$

Матрица $[K]$, связывающая силы $[P]$ с соответствующими им перемещениями $[v]$, называется *матрицей жёсткости рассматриваемого тела*.

Представим это соотношение в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \cdots & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Если положить перемещение $v_j = 1$, а все остальные перемещения равными нулю, то силы окажутся равными

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \cdots & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ m \end{matrix} = \begin{bmatrix} K_{1j} \\ K_{2j} \\ \vdots \\ K_{mj} \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает физический смысл коэффициентов жёсткости K_{ij} . Эти коэффициенты представляют собой *силы, которые должны быть приложены в узлах, чтобы в узле j перемещение равнялось единице, а все остальные перемещения равнялись нулю*. Иначе говоря, если закрепить тело во всех узлах, кроме узла j , и приложить в узле j такую силу, чтобы $v_j = 1$, то силы P_i в

остальных узлах (то есть реакции на тело со стороны наложенных связей) будут равны K_{ij} , сама же приложенная сила P_j будет численно равна K_{jj} .

Применяя теорему Бетти о взаимности работ, можно показать, что матрица жёсткости всегда симметрична.

Если силы P_i имеют произвольные направления, то удобно разложить их по координатным осям x, y, z и ввести для каждого узла матрицу сил

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{bmatrix}.$$

Тогда $[v_i]$ будет также матрицей-столбцом, элементы которой суть перемещения узла i по координатным осям:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}.$$

В этом случае связь между силами и перемещениями можно по-прежнему определить соотношением (4.1), только элементами $[K_{ij}]$ матрицы $[K]$, представляющей уже блочную матрицу, будут квадратные подматрицы размера 3×3 .

Для практических вычислений удобнее иногда пользоваться сквозной нумерацией компонент узловых сил и перемещений. В этом случае силы P_{1x}, P_{1y}, P_{1z} , действующие в узле 1, обозначаются соответственно через P_1, P_2 и P_3 ; силы P_{2x}, P_{2y}, P_{2z} , действующие в узле 2, – через P_4, P_5, P_6 и т.д. При такой индексации элементы матрицы сил для узла i будут иметь номера $3i - 2, 3i - 1$ и $3i$, т.е.

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{3i-2} \\ P_{3i-1} \\ P_{3i} \end{bmatrix}.$$

Аналогично для перемещений будем иметь

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{3i-2} \\ v_{3i-1} \\ v_{3i} \end{bmatrix}.$$

Наконец, в самом общем случае в каждом узле могут помимо сил действовать моменты относительно координатных осей. Тогда подматрицы $[P_i]$ и $[v_i]$ будут состоять из шести компонент, которые мы условимся перечислять в следующем порядке:

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}; \quad [v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix},$$

где M_{iq} и θ_{iq} — моменты и углы поворота относительно оси q . Если использовать сквозную нумерацию сил и перемещений, то будем иметь

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{6i-5} \\ P_{6i-4} \\ P_{6i-3} \\ P_{6i-2} \\ P_{6i-1} \\ P_{6i} \end{bmatrix}; \quad [v_i] = \begin{bmatrix} v_{6i-5} \\ v_{6i-4} \\ v_{6i-3} \\ v_{6i-2} \\ v_{6i-1} \\ v_{6i} \end{bmatrix}.$$

Подматрицы $[K_{ij}]$ будут иметь размер 6×6 .

Если известна матрица жёсткости, то при заданных узловых силах соотношение (4.1) можно использовать для определения узловых перемещений. В случае стержневой системы знания перемещений узлов достаточно для вычисления внутренних сил и напряжений в стержнях. На этом основан матричный метод перемещений для стержневых систем.

4.2 МАТРИЦА ЖЁСТКОСТИ В МЕСТНОЙ И ОБЩЕЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Компонентами матриц $[P_i]$, $[v_i]$ являются проекции сил и перемещений на координатные оси, поэтому они зависят от принятой системы координат. Выбор этой системы произволен. Для расчёта конструкции обычно применяют общую координатную систему, используемую в чертежах. Однако для вычисления матриц жёсткости отдельных конструктивных элементов может оказаться выгоднее воспользоваться местной системой координат. Для каждого конструктивного элемента местная система координат выбирается так, чтобы свести к минимуму вычислительную работу. В таких случаях после отыскания матрицы жёсткости в местных координатах необходимо выполнить переход к общей системе координат.

Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и x, y, z – соответственно местная и общая системы координатных осей. Перемещения в этих системах координат будем обозначать через $[\bar{v}]$ и $[v]$, а силы – через $[\bar{P}]$ и $[P]$.

Если перемещения (линейные и угловые) произвольного узла i в общей системе координат спроектировать на местные координатные оси, то получим связь между $[\bar{v}_i]$ и $[v_i]$ вида

$$[\bar{v}_i] = [\lambda_0][v_i], \quad (4.2)$$

где $[\lambda_0]$ – матрица, составленная из косинусов углов между осями $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и x, y, z .

Подобные соотношения могут быть записаны для всех узлов рассматриваемого тела. Сведём их в одно матричное равенство

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее разделительные штриховые линии означают, что матрица является блочной и её элементы суть подматрицы.

Введя обозначение

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

представим последнее соотношение в форме

$$[\bar{v}] = [\lambda][v]. \quad (4.3)$$

Матрица $[\lambda]$ представляет собой *матрицу преобразования координат*.

Придадим точкам тела дополнительные бесконечно малые перемещения и обозначим через $[\delta\bar{v}]$ матрицу этих перемещений в узловых точках в местной системе координат, а через $[\delta v]$ – в общей. На основании вышеизложенного

$$[\delta\bar{v}] = [\lambda][\delta v]. \quad (4.4)$$

Если узловые силы отнесены к местной системе координат, то на перемещениях $[\delta\bar{v}]$ они произведут работу, равную

$$[\delta\bar{v}_1]^T [\bar{P}_1] + [\delta\bar{v}_2]^T [\bar{P}_2] + \dots + [\delta v_m]^T [\bar{P}_m] = [\delta\bar{v}]^T [\bar{P}],$$

если же они отнесены к общей системе координат, то работа будет равна

$$[\delta v]^T [P].$$

Поскольку работа не зависит от того, в какой системе координат производятся вычисления, можно записать

$$[\delta v]^T [P] = [\delta\bar{v}]^T [\bar{P}]$$

или, с учётом (4.4),

$$[\delta v]^T [P] = [\delta v]^T [\lambda]^T [\bar{P}],$$

откуда в силу произвольности элементов матрицы $[\delta v]$ находим

$$[P] = [\lambda]^T [\bar{P}]. \quad (4.5)$$

Выразим теперь силы $[\bar{P}]$ через перемещения:

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}] = [\bar{K}][\lambda][v],$$

где $[\bar{K}]$ – матрица жёсткости в местных координатах. Тогда из равенства (4.5) получим

$$[P] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda] [v].$$

Это соотношение связывает силы и перемещения в общей системе координат в стандартной форме

$$[P] = [K] [v],$$

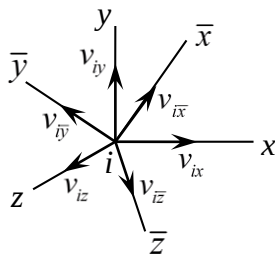
где матрица

$$[K] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda] \quad (4.6)$$

представляет собой матрицу жёсткости в общей системе координат.

Таким образом, если матрица жёсткости $[\bar{K}]$ в местной системе координат известна, то для вычисления матрицы жёсткости в общей системе координат достаточно построить матрицу $[\lambda]$ и воспользоваться формулой (4.6). Следовательно, всё сводится к составлению матрицы $[\lambda_0]$, фигурирующей в соотношении (4.2).

В качестве примера рассмотрим формирование матрицы $[\lambda_0]$ для случая, когда в каждом узле имеется по три линейных перемещения в направлении координатных осей. На рисунке 4.4 показаны проекции перемещения узла i на координатные оси двух систем – местной и общей. Обе матрицы $[v_i]$ и $[\bar{v}_i]$ будут состоять здесь из трёх элементов:



$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ v_{i\bar{z}} \end{bmatrix}.$$

Рисунок 4.4 – Местная и общая системы координат

, v_{iy} , v_{iz} на ось $\bar{x}$, получим

$$v_{i\bar{x}} = v_{ix} \lambda_{\bar{x}x} + v_{iy} \lambda_{\bar{x}y} + v_{iz} \lambda_{\bar{x}z} = [\lambda_{0\bar{x}}] [v_i],$$

где

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}\bar{x}} \quad \lambda_{\bar{x}\bar{y}} \quad \lambda_{\bar{x}\bar{z}}].$$

Аналогично выразим $v_{i\bar{y}}$ и $v_{i\bar{z}}$ через $[v_i]$:

$$v_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][v_i]; \quad v_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][v_i].$$

Здесь

$$[\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{\bar{y}\bar{x}} \quad \lambda_{\bar{y}\bar{y}} \quad \lambda_{\bar{y}\bar{z}}]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [\lambda_{\bar{z}\bar{x}} \quad \lambda_{\bar{z}\bar{y}} \quad \lambda_{\bar{z}\bar{z}}].$$

Отсюда находим

$$[\bar{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ v_{i\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} \\ \lambda_{0\bar{y}} \\ \lambda_{0\bar{z}} \end{bmatrix} [v_i].$$

Сопоставляя эту запись с определением $[\lambda_0]$, получим

$$[\lambda_0] = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} \\ \lambda_{0\bar{y}} \\ \lambda_{0\bar{z}} \end{bmatrix}.$$

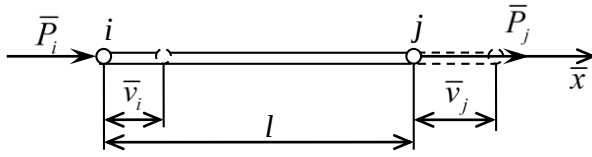
Заметим, что матрица $[\lambda]$ имеет блочно-диагональный вид лишь в том случае, когда в матрицах $[\bar{v}]$ и $[v]$ узловые перемещения перечисляются в одном и том же порядке:

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_m \end{bmatrix}; \quad [v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

4.3 МАТРИЦА ЖЁСТКОСТИ ФЕРМЕННОГО ЭЛЕМЕНТА

Ферменным элементом будем называть прямолинейный стержень, который присоединяется к другим конструктивным элементам посредством идеальных шарниров. Если к нему не приложены поперечные силы, то он будет испытывать лишь растяжение или сжатие. Выведем матрицу жёсткости такого элемента, выбрав местные координаты таким образом, чтобы ось $\bar{x}$ совпадала с продольной осью стержня (рисунок 4.5). Узлами являются концы стержня i

и j , в которых действуют силы $\bar{P}_i$ и $\bar{P}_j$, направленные вдоль оси $\bar{x}$. Перемеще-



**Рисунок 4.5 – Ферменный элемент
в местной системе координат**

ния этих узлов вдоль оси стержня обозначим через $\bar{v}_i$ и $\bar{v}_j$. Узловые силы и перемещения в местной системе координат образуют матрицы

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix},$$

которые связаны зависимостью $[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}]$ или

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{ij} \\ \bar{K}_{ji} & \bar{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Для вычисления коэффициентов матрицы жёсткости воспользуемся известной формулой для удлинения стержня

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

где N – осевая сила в сечении стержня; l , F – длина и площадь сечения; E – модуль упругости материала. Полагая, что осевая сила положительна и равна $\bar{P}_j$, удлинение Δl следует взять равным $\bar{v}_j - \bar{v}_i$. Отсюда устанавливаем связь узловой силы $\bar{P}_j$ с узловыми перемещениями:

$$\bar{P}_j = \frac{EF}{l}(\bar{v}_j - \bar{v}_i) = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Исходя из условия равновесия стержня, получим и аналогичное выражение для $\bar{P}_i$:

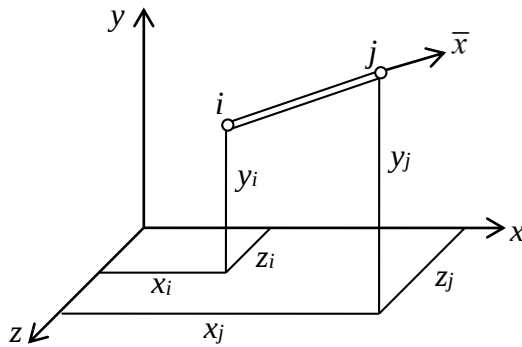
$$\bar{P}_i = -\bar{P}_j = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Объединяя эти два равенства, приходим к соотношению

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

Отсюда вытекает следующее выражение для искомой матрицы жёсткости:

$$[\bar{K}] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$



Отнесем теперь ферменный элемент $i-j$ к общей системе координат (рисунок 4.6). Пусть ось стержня составляет с осями x, y, z углы, косинусы которых равны

$$\lambda_{xx} = \frac{l_x}{l}; \quad \lambda_{xy} = \frac{l_y}{l}; \quad \lambda_{xz} = \frac{l_z}{l},$$

где

Рисунок 4.6 – Ферменный элемент в общей системе координат

$l_x = x_j - x_i$; $l_y = y_j - y_i$; $l_z = z_j - z_i$ – проекции стержня на координатные оси;

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}.$$

Перемещение каждого узла имеет составляющие по всем трём осям общей системы координат, так что в этой системе матрица перемещений узла i будет иметь три элемента:

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}.$$

Силы, действующие в узле i , образуют матрицу

$$[P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \\ P_{iz}^e \end{bmatrix}.$$

Индексом “ e ” будем отмечать в общей системе координат те величины, которые относятся к отдельному стержневому элементу. Так, $[P_i^e]$ будет озна-

чать подматрицу сил, действующих в узле i на элемент e , в отличие от подматрицы $[P_i]$ внешних сил, приложенных к узлу i конструкции. Ясно, что $[v_i^e] = [v_i]$.

Проектируя перемещения узла i в общей системе координат на направление местной оси $\bar{x}$, запишем

$$\bar{v}_i = v_{ix} \lambda_{\bar{x}x} + v_{iy} \lambda_{\bar{x}y} + v_{iz} \lambda_{\bar{x}z}.$$

Если ввести обозначение

$$[\lambda_0] = [\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}x} \ \lambda_{\bar{x}y} \ \lambda_{\bar{x}z}],$$

то можно представить это соотношение в виде

$$\bar{v}_i = [\lambda_0][v_i].$$

Для стержня в целом получим

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}$$

или

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e],$$

где

$$[\lambda]_{(2 \times 6)} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Выражение для матрицы жёсткости в общей системе координат будет

$$[K^e] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_0^T & 0 \\ 0 & \lambda_0^T \end{bmatrix} \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} g & -g \\ -g & g \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

где

$$[g] = [\lambda_0]^T [\lambda_0]$$

– подматрица размером 3×3 .

Используя блочное представление для матриц сил и перемещений вида

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix}; \quad [v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix},$$

можно записать и матрицу жёсткости в блочной форме:

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

где

$$[K_{ii}^e] = [K_{jj}^e] = -[K_{ij}^e] = -[K_{ji}^e] = \frac{EF}{l} [\lambda_0]^T [\lambda_0].$$

Если рассматриваемый стержень i - j является элементом плоской фермы, то в общей системе координат каждый узел имеет перемещения лишь в направлении двух осей (например, x и y):

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad [P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \end{bmatrix},$$

а матрица $[\lambda_0] = [\lambda_{xx} \ \lambda_{xy}]$.

Подматрица $[g]$ будет иметь размер 2×2 .

4.4 МАТРИЦА ЖЁСТКОСТИ БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В МЕСТНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Балочным элементом будем называть прямолинейный брус, способный воспринимать в общем случае все виды нагрузок (растяжение-сжатие, изгиб в двух плоскостях и кручение). В качестве узлов i, j элемента возьмём его концы. Местные оси координат выберем так, чтобы ось $\bar{x}$ совпадала с продольной осью стержня, а оси $\bar{y}$ и $\bar{z}$ совпадали с главными центральными осями его поперечного сечения. В каждом узле будем рассматривать шесть перемещений (три линейных и три угловых) и соответствующие им силовые факторы, как показано на рисунке 4.7.

Матрицы сил и перемещений для всего стержня можно составить, как и ранее, перечисляя сначала силы (перемещения) узла i , а затем j , т.е.

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{bmatrix}.$$

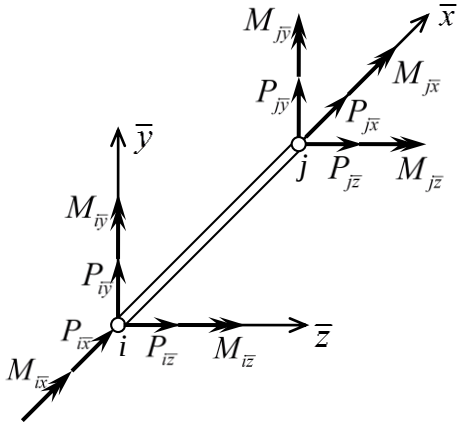


Рисунок 4.7 – Балочный элемент в местной системе координат

Однако здесь удобнее расположить перемещения и силы в ином порядке. При выбранной системе местных осей узловые силы распадаются на четыре группы, которые можно рассматривать независимо друг от друга. Так, силы P_{ix} и P_{jx} вызывают только осевую деформацию бруса и определяются перемещениями v_{ix} и v_{jx} . образуем из них соответствующие подматрицы, которые обозначим через $[\bar{P}_a]$ и $[\bar{v}_a]$:

$$[\bar{P}_a] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{jx} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_a] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{jx} \end{bmatrix}.$$

Эти подматрицы связаны равенством

$$[\bar{P}_a] = [\bar{K}_a][\bar{v}_a],$$

где $[\bar{K}_a]$ – некоторая квадратная матрица размером 2×2 .

Далее, силы P_{iy} , P_{jy} , а также моменты M_{iz} , M_{jz} вызывают изгиб бруса только в плоскости $\bar{x}\bar{y}$ и определяются перемещениями v_{iy} , v_{jy} и углами поворота θ_{iz} , θ_{jz} . Из этих компонент составим подматрицы

$$[\bar{P}_b] = \begin{bmatrix} P_{iy} \\ M_{iz} \\ P_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_b] = \begin{bmatrix} v_{iy} \\ \theta_{iz} \\ v_{jy} \\ \theta_{jz} \end{bmatrix};$$

тогда

$$[\bar{P}_b] = [\bar{K}_b][\bar{v}_b].$$

Аналогично образуем подматрицы сил и перемещений

$$[\bar{P}_c] = \begin{bmatrix} P_{i\bar{z}} \\ M_{i\bar{y}} \\ P_{j\bar{z}} \\ M_{j\bar{y}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_c] = \begin{bmatrix} v_{i\bar{z}} \\ \theta_{i\bar{y}} \\ v_{j\bar{z}} \\ \theta_{j\bar{y}} \end{bmatrix},$$

определяющих изгиб бруса в плоскости $\bar{x}\bar{z}$; при этом

$$[\bar{P}_c] = [\bar{K}_c][\bar{v}_c].$$

Наконец, кручение стержня вокруг оси $\bar{x}$ характеризуют подматрицы

$$[\bar{P}_d] = \begin{bmatrix} M_{i\bar{x}} \\ M_{j\bar{x}} \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}_d] = \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix},$$

причём

$$[\bar{P}_d] = [\bar{K}_d][\bar{v}_d].$$

Образуем теперь матрицы $[\bar{P}]$ и $[\bar{v}]$ в следующем виде:

$$[\bar{P}] = \begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix}; \quad [\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \end{bmatrix}.$$

Тогда соотношение

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}]$$

в развернутом виде запишется как

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_a \\ \bar{P}_b \\ \bar{P}_c \\ \bar{P}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{K}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \end{bmatrix}.$$

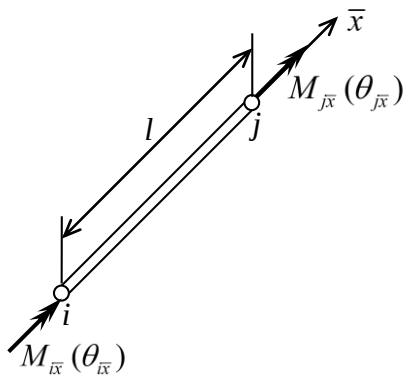
Таким образом, при выбранном расположении компонент $[\bar{P}]$ и $[\bar{v}]$ матрица жёсткости $[\bar{K}]$ оказывается блочно-диагональной:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{K}_d \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Подматрицы $[\bar{K}_a]$ и $[\bar{K}_d]$ имеют размер 2×2 , а подматрицы $[\bar{K}_b]$ и $[\bar{K}_c]$ – размер 4×4 .

Переходя к вычислению отдельных блоков матрицы жёсткости, начнём с подматрицы $[\bar{K}_a]$. Эта матрица, очевидно, совпадает с матрицей жёсткости ферменного элемента в местной системе координат:

$$[\bar{K}_a] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$



Рассмотрим далее кручение балочного элемента. Сечение j относительно сечения i закручивается на угол $\theta_{j\bar{x}} - \theta_{i\bar{x}}$ (рисунок 4.8). Из курса сопротивления материалов известно, что крутящий момент в сечении бруса $M_{j\bar{x}}$, необходимый для создания такого угла закручивания, равен

Рисунок 4.8 – Кручение балочного элемента

$$M_{j\bar{x}} = \frac{GI_k}{l} (\theta_{j\bar{x}} - \theta_{i\bar{x}}) = \frac{GI_k}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix},$$

где GI_k – жёсткость стержня на кручение.

Из уравнения равновесия имеем также

$$M_{i\bar{x}} = -M_{j\bar{x}} = \frac{GI_k}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

Объединяя эти равенства, получим

$$\begin{bmatrix} M_{i\bar{x}} \\ M_{j\bar{x}} \end{bmatrix} = \frac{GI_k}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$[\bar{K}_d] = \frac{GI_{\kappa}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

4.5 МАТРИЦА ЖЁСТКОСТИ БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ ИЗГИБЕ ЕГО В ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Особо рассмотрим изгиб балочного элемента в плоскости $\bar{x}\bar{y}$. Пусть $u_{\bar{y}}$ – его прогиб на расстоянии $\bar{x}$ от левого конца (рисунок 4.9).

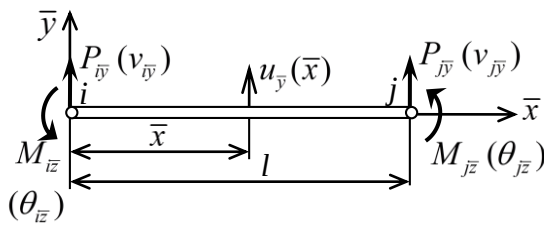


Рисунок 4.9 – Изгиб балочного элемента в плоскости $\bar{x}\bar{y}$

Согласно технической теории изгиба бруса прогиб $u_{\bar{y}}$ однозначно определяется узловыми перемещениями $[\bar{v}_b]$. В матричных обозначениях это означает существование равенства

$$u_{\bar{y}}(\bar{x}) = [\alpha(\bar{x})][\bar{v}_b], \quad (4.13)$$

где $[\alpha(\bar{x})]$ – матрица-строка, четыре элемента которой являются функциями координаты $\bar{x}$. Эта матрица будет получена позже, а сейчас перейдём к вычислению подматрицы $[\bar{K}_b]$, считая, что матрица $[\alpha(\bar{x})]$ известна.

Зная прогиб $u_{\bar{y}}$, можно найти изгибающие моменты и перерезывающие силы по формулам сопротивления материалов

$$M = EI_{\bar{z}} \frac{d^2 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^2}; \quad Q = EI_{\bar{z}} \frac{d^3 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^3}$$

или, с учётом (4.13),

$$M = EI_{\bar{z}} [\alpha''(\bar{x})][\bar{v}_b]; \quad Q = EI_{\bar{z}} [\alpha'''(\bar{x})][\bar{v}_b]. \quad (4.14)$$

Положительные направления изгибающих моментов и перерезывающих сил приведены на рисунке 4.10. В узлах i и j должны выполняться следующие условия:

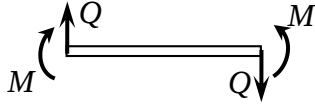


Рисунок 4.10 – Положительные направления Q и M

$$P_{i\bar{y}} = Q(0) = EI_{\bar{z}}[\alpha'''(0)][\bar{v}_b];$$

$$M_{i\bar{z}} = -M(0) = -EI_{\bar{z}}[\alpha''(0)][\bar{v}_b];$$

$$P_{j\bar{y}} = -Q(l) = -EI_{\bar{z}}[\alpha'''(l)][\bar{v}_b];$$

$$M_{j\bar{z}} = M(l) = EI_{\bar{z}}[\alpha''(l)][\bar{v}_b]$$

или, в матричной форме,

$$\begin{bmatrix} P_{i\bar{y}} \\ M_{i\bar{z}} \\ P_{j\bar{y}} \\ M_{j\bar{z}} \end{bmatrix} = EI_{\bar{z}} \begin{bmatrix} \alpha'''(0) \\ -\alpha''(0) \\ -\alpha'''(l) \\ \alpha''(l) \end{bmatrix} [\bar{v}_b].$$

Таким образом,

$$[\bar{K}_b] = EI_{\bar{z}} \begin{bmatrix} \alpha'''(0) \\ -\alpha''(0) \\ -\alpha'''(l) \\ \alpha''(l) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Приступим к отысканию матрицы $[\alpha]$. Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса имеет вид

$$EI_{\bar{z}} \frac{d^4 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^4} = q_{\bar{y}},$$

где $I_{\bar{z}}$ – момент инерции поперечного сечения относительно оси $\bar{z}$; $q_{\bar{y}}$ – погонная поперечная нагрузка.

В рассматриваемом случае распределенная поперечная нагрузка $q_{\bar{y}}$ отсутствует, поэтому дифференциальное уравнение изгиба бруса сведётся к равенству

$$\frac{d^4 u_{\bar{y}}}{d\bar{x}^4} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_{\bar{y}} = C_1 + C_2 \bar{x} + C_3 \bar{x}^2 + C_4 \bar{x}^3, \quad (4.16)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_4$ – произвольные постоянные, подлежащие определению из граничных условий:

$$\text{при } \bar{x} = 0 \quad 1) u_{\bar{y}} = v_{i\bar{y}}; \quad 2) u'_{\bar{y}} = \theta_{i\bar{z}};$$

$$\text{при } \bar{x} = l \quad 3) u_{\bar{y}} = v_{j\bar{y}}; \quad 4) u'_{\bar{y}} = \theta_{j\bar{z}}.$$

Дифференцируя перемещение по $\bar{x}$, будем иметь

$$\frac{du_{\bar{y}}}{d\bar{x}} = C_2 + 2C_3\bar{x} + 3C_4\bar{x}^2.$$

Из граничных условий 1) и 2) находим

$$C_1 = v_{i\bar{y}}; \quad C_2 = \theta_{i\bar{z}},$$

а граничные условия 3) и 4) приводят к равенствам

$$C_3l^2 + C_4l^3 = v_{j\bar{y}} - v_{i\bar{y}} - \theta_{i\bar{z}}l;$$

$$2C_3l + 3C_4l^2 = \theta_{j\bar{z}} - \theta_{i\bar{z}}.$$

Решение этой системы даёт

$$C_3 = \frac{3}{l^2}(v_{j\bar{y}} - v_{i\bar{y}}) - \frac{1}{l}(\theta_{j\bar{z}} + 2\theta_{i\bar{z}});$$

$$C_4 = -\frac{2}{l^3}(v_{j\bar{y}} - v_{i\bar{y}}) + \frac{1}{l^2}(\theta_{j\bar{z}} + \theta_{i\bar{z}}).$$

Если подставить найденные значения постоянных в уравнение изогнутой оси (4.16), то можно получить следующее выражение:

$$u_{\bar{y}} = \left(1 - 3\frac{\bar{x}^2}{l^2} + 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)v_{i\bar{y}} + \left(\frac{\bar{x}}{l} - 2\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l\theta_{i\bar{z}} + \left(3\frac{\bar{x}^2}{l^2} - 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)v_{j\bar{y}} + \left(-\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l\theta_{j\bar{z}}.$$

Таким образом,

$$[\alpha(\bar{x})] = \left[\left(1 - 3\frac{\bar{x}^2}{l^2} + 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right) \quad \left(\frac{\bar{x}}{l} - 2\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l \quad \left(3\frac{\bar{x}^2}{l^2} - 2\frac{\bar{x}^3}{l^3}\right) \quad \left(-\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{x}^3}{l^3}\right)l \right];$$

$$[\alpha''(\bar{x})] = \frac{1}{l^2} \left[\left(-6 + 12\frac{\bar{x}}{l}\right) \quad \left(-4 + 6\frac{\bar{x}}{l}\right)l \quad \left(6 - 12\frac{\bar{x}}{l}\right) \quad \left(-2 + 6\frac{\bar{x}}{l}\right)l \right];$$

$$[\alpha'''(\bar{x})] = \frac{1}{l^3} [12 \quad 6l \quad -12 \quad 6l].$$

Подставив, наконец, значения производных в формулу (4.15), окончательно устанавливаем

$$[\bar{K}_b] = \frac{EI_{\bar{z}}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Рассмотрим теперь изгиб балочного элемента в плоскости $\bar{x}\bar{z}$ (рисунок 4.11). В этой плоскости положительные узловые моменты (а также углы поворота) направлены по сравнению с предыдущим случаем в противоположную

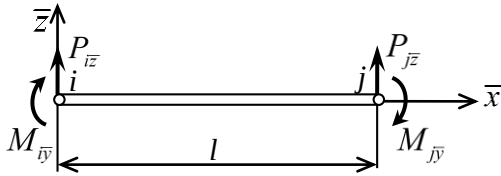


Рисунок 4.11 – Изгиб балочного элемента в плоскости $\bar{x}\bar{z}$

сторону. В остальном же оба случая идентичны. Следовательно, подматрицу $[\bar{K}_c]$ можно получить из $[\bar{K}_b]$, меняя знаки во втором и четвертом столбцах и одновременно во второй и четвертой строках, соответствующих моментам и углам поворота. Кроме того, вместо $I_{\bar{z}}$ следует писать $I_{\bar{y}}$. В итоге получим

$$[\bar{K}_c] = \frac{EI_{\bar{y}}}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Формулы для $[\bar{K}_a]$, $[\bar{K}_b]$, $[\bar{K}_c]$ и $[\bar{K}_d]$ определяют матрицу жёсткости балочного элемента в местной системе координат.

4.6 МАТРИЦА ЖЁСТКОСТИ БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Принятый при выводе матрицы $[\bar{K}]$ порядок расположения элементов матриц сил и перемещений для дальнейших рассуждений оказывается неудобным. Поэтому в общей системе координат матрицу $[v^e]$ для балочного элемента i - j образуем привычным образом:

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Здесь, например,

$$[v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix}.$$

Если ввести обозначения

$$[\tilde{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{bmatrix}; \quad [\theta_i] = \begin{bmatrix} \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix},$$

то будем иметь следующее представление матрицы перемещений узла i :

$$[v_i] = \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \end{bmatrix};$$

аналогично представляются перемещения узла j :

$$[v_j] = \begin{bmatrix} \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}.$$

Матрица соответствующих узловых сил имеет вид

$$[P^e] = \begin{bmatrix} P_i^e \\ \vdots \\ P_j^e \end{bmatrix},$$

где, например,

$$[P_i^e] = \begin{bmatrix} P_{ix}^e \\ P_{iy}^e \\ P_{iz}^e \\ M_{ix}^e \\ M_{iy}^e \\ M_{iz}^e \end{bmatrix}.$$

Выразим перемещения $[\bar{v}]$ в местной системе координат через перемещения $[v^e]$ в общей системе координат, т.е. построим матрицу $[\lambda]$ в соответствии с равенством

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e].$$

В местной системе координат мы имеем

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \end{bmatrix}.$$

Проектируя линейные перемещения узла i в общей системе координат на ось $\bar{x}$, получим

$$v_{i\bar{x}} = [\lambda_{0\bar{x}}][\tilde{v}_i], \quad \text{где } [\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}x} \ \lambda_{\bar{x}y} \ \lambda_{\bar{x}z}].$$

Точно так же будем иметь

$$v_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][\tilde{v}_i]; \quad v_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][\tilde{v}_i],$$

где

$$[\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{\bar{y}x} \ \lambda_{\bar{y}y} \ \lambda_{\bar{y}z}]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [\lambda_{\bar{z}x} \ \lambda_{\bar{z}y} \ \lambda_{\bar{z}z}].$$

Для углов поворота получаются аналогичные выражения:

$$\theta_{i\bar{x}} = [\lambda_{0\bar{x}}][\theta_i]; \quad \theta_{i\bar{y}} = [\lambda_{0\bar{y}}][\theta_i]; \quad \theta_{i\bar{z}} = [\lambda_{0\bar{z}}][\theta_i].$$

Построим в итоге связь между матрицами $[\bar{v}]$ и $[v^e]$ в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{j\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{z}} \\ v_{j\bar{y}} \\ \theta_{j\bar{z}} \\ v_{i\bar{z}} \\ \theta_{i\bar{y}} \\ v_{j\bar{z}} \\ \theta_{j\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{x}} \\ \theta_{j\bar{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0\bar{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{z}} \\ \lambda_{0\bar{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{z}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} \\ 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \\ \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}.$$

Фигурирующая в этом равенстве квадратная матрица размером 12×12 есть искомая матрица $[\lambda]$.

Зная матрицу преобразования координат $[\lambda]$, можно вычислить матрицу жёсткости в общей системе координат. Для этого следует воспользоваться формулой (4.6):

$$[K^e] = [\lambda]^T [\bar{K}] [\lambda].$$

Если общая система координат совпадает с местной, то

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [1 \ 0 \ 0]; \quad [\lambda_{0\bar{y}}] = [0 \ 1 \ 0]; \quad [\lambda_{0\bar{z}}] = [0 \ 0 \ 1].$$

В этом случае данное преобразование будет заключаться в простой перестановке расположения элементов матрицы жёсткости.

Рассмотрим особо частный случай, когда балочный элемент является стержнем плоской рамы. При этом каждый узел получает поступательные перемещения в направлении двух координатных осей и угловое перемещение в плоскости этих осей (рисунок 4.12).

Матрица перемещений в местной системе координат имеет вид

$$[\bar{v}] = \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \end{bmatrix}.$$

В общей системе координат имеем

$$[v^e] = \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \\ \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix},$$

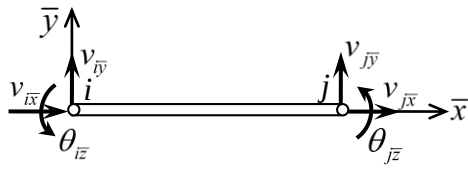
где, например,

$$[\tilde{v}_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{bmatrix}; \quad \theta_i = \theta_{iz} = \theta_{i\bar{z}}.$$

Вводя теперь новые обозначения

$$[\lambda_{0\bar{x}}] = [\lambda_{\bar{x}\bar{x}} \ \lambda_{\bar{x}\bar{y}}]; \quad [\lambda_{0\bar{y}}] = [\lambda_{\bar{y}\bar{x}} \ \lambda_{\bar{y}\bar{y}}]$$

и проектируя компоненты матрицы $[v^e]$ на направления местных осей, получим



$$\begin{bmatrix} v_{i\bar{x}} \\ v_{j\bar{x}} \\ v_{i\bar{y}} \\ \theta_{i\bar{z}} \\ v_{j\bar{y}} \\ \theta_{j\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ \theta_i \\ \tilde{v}_j \\ \theta_j \end{bmatrix}.$$

Рисунок 4.12 – Элемент плоской рамы

Отсюда для случая плоской рамы

находим

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{0\bar{x}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{x}} & 0 \\ \lambda_{0\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{0\bar{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

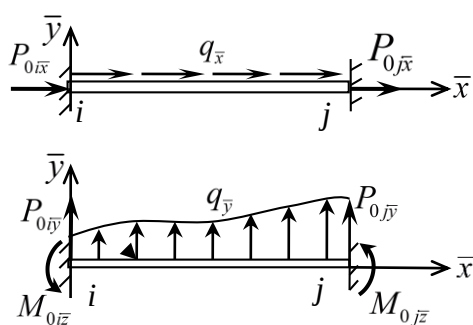
Как можно видеть, для любого стержневого элемента (ферменного или балочного) мы имеем в общей системе координат одинаковую запись в блочном виде соотношения, связывающего узловые силы и узловые перемещения:

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

4.7 УЧЁТ ВНЕУЗЛОВОЙ НАГРУЗКИ

До сих пор мы предполагали, что внешняя нагрузка действует на конструкцию только в узлах. Обратимся к случаю, когда на элемент бруса действуют и внеузловые нагрузки. Рассмотрим типовой элемент $i-j$ в местных координатах.

Если узловые перемещения элемента равны нулю, то внешняя нагрузка вызовет появление реакций в виде сил и моментов (рисунок 4.13). образуем из них подматрицы $[\bar{P}_{0a}]$, $[\bar{P}_{0b}]$, $[\bar{P}_{0c}]$ и $[\bar{P}_{0d}]$, соблюдая тот же порядок перечисления сил, что и в матрицах $[\bar{P}_a]$, $[\bar{P}_b]$, $[\bar{P}_c]$ и $[\bar{P}_d]$:



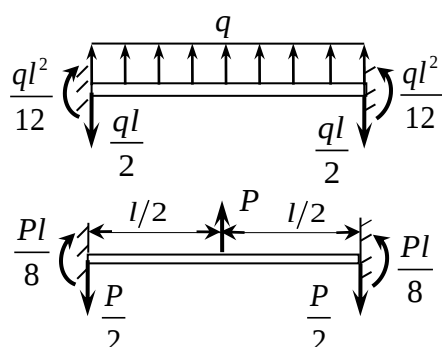
**Рисунок 4.13 – Действие
внеузловой нагрузки**

$$[\bar{P}_{0a}] = \begin{bmatrix} P_{0i\bar{x}} \\ P_{0j\bar{x}} \end{bmatrix}; [\bar{P}_{0b}] = \begin{bmatrix} P_{0i\bar{y}} \\ M_{0i\bar{z}} \\ P_{0j\bar{y}} \\ M_{0j\bar{z}} \end{bmatrix};$$

$$[\bar{P}_{0c}] = \begin{bmatrix} P_{0i\bar{z}} \\ M_{0i\bar{y}} \\ P_{0j\bar{z}} \\ M_{0j\bar{y}} \end{bmatrix}; [\bar{P}_{0d}] = \begin{bmatrix} M_{0i\bar{x}} \\ M_{0j\bar{x}} \end{bmatrix}.$$

Значения реакций для многих встречающихся на практике видов нагружения имеются в справочной литературе.

В частном случае действия постоянной распределенной нагрузки (рисунок 4.14,а) будем иметь



**Рисунок 4.14 – Примеры
внеузловых нагрузок**

$$[\bar{P}_{0b}] = \begin{bmatrix} -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \end{bmatrix},$$

а при действии сосредоточенной силы P , приложенной в среднем сечении (рисунок 4.14,б),

$$[\bar{P}_{0b}] = \begin{bmatrix} -\frac{P}{2} \\ \frac{P}{8} \\ \frac{P}{2} \\ \frac{Pl}{8} \end{bmatrix}.$$

Объединяя все подматрицы, можно записать

$$[\bar{P}_0] = \begin{bmatrix} \bar{P}_{0a} \\ \bar{P}_{0b} \\ \bar{P}_{0c} \\ \bar{P}_{0d} \end{bmatrix}.$$

При вычислении $[\bar{P}_0]$ предполагалось, что узловые перемещения отсутствуют. Если же узлы элемента получают перемещения, определяемые матрицей $[\bar{v}]$, то дополнительные узловые силы, необходимые для их создания, находятся, как и ранее, произведением $[\bar{K}][\bar{v}]$. Таким образом, при наличии внеузловой нагрузки матрицу узловых сил можно найти по формуле

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}] + [\bar{P}_0]. \quad (4.20)$$

Перейдём в этом соотношении к общей системе координат

$$[P^e] = [\lambda]^T [\bar{P}] = [\lambda]^T [\bar{K}][\bar{v}] + [\lambda]^T [\bar{P}_0].$$

Используя связь $[\bar{v}] = [\lambda][v^e]$, получим далее

$$[P^e] = [\lambda]^T [\bar{P}] = [\lambda]^T [\bar{K}][\lambda][v^e] + [\lambda]^T [\bar{P}_0].$$

Это равенство можно записать в виде

$$[P^e] = [K^e][v^e] + [P_0^e], \quad (4.21)$$

где

$$[P_0^e] = [\lambda]^T [\bar{P}_0].$$

Равенству (4.21) можно придать блочную форму

$$\begin{bmatrix} P_i^e \\ P_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^e & K_{ij}^e \\ K_{ji}^e & K_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0i}^e \\ P_{0j}^e \end{bmatrix}.$$

4.8 ОБЪЕДИНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ В СТЕРЖНЕВУЮ СИСТЕМУ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЁ МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ

Будем исходить из того, что для любого стержневого элемента мы имеем матрицу жёсткости в общей системе координат, записанную в блочном виде.

Обозначим через $[v_i]$ матрицу перемещений типового узла i . Общее число узлов в системе обозначим через m . Матрицу внешних сил, действующих в направлении перемещений $[v_i]$, обозначим через $[P_i]$. Матрицы узловых сил и перемещений для всей конструкции составим следующим образом:

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}; \quad [v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Для каждого из узлов в самом общем случае имеем

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}; \quad [v_i] = \begin{bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \end{bmatrix}.$$

При отсутствии внеузловой нагрузки связь между матрицами $[P]$ и $[v]$ может быть представлена в виде

$$[P] = [K][v], \quad (4.22)$$

где $[K]$ – матрица жёсткости системы.

Если же помимо узловых сил действуют внеузловые нагрузки, то можно рассуждать так же, как и в случае отдельного стержня. Предположим, что все узлы заземлены. Тогда в результате действия внеузловой нагрузки со стороны наложенных связей возникнут силы реакций. Перечисляя реакции, действующие в узле i , в том же порядке, что и для $[P_i]$, образуем подматрицу $[P_{0i}]$. Для всей конструкции можно составить матрицу

$$[P_0] = \begin{bmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0m} \end{bmatrix}.$$

Если, далее, узлы имеют некоторые смещения $[v]$, то для их создания необходимо дополнительно приложить силы, величина которых зависит от жесткостных характеристик системы. Таким образом, будем иметь

$$[P] = [K][v] + [P_0], \quad (4.23)$$

Выясним, каким образом можно найти матрицы $[K]$ и $[P_0]$, зная матрицы $[K^e]$ и $[P_0^e]$ для всех элементов, образующих систему.

Запишем уравнение (4.23) в блочной форме

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1i} & K_{1j} & \dots & K_{1m} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2i} & K_{2j} & \dots & K_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & K_{i2} & \dots & K_{ii} & K_{ij} & \dots & K_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & \dots & K_{mi} & K_{mj} & \dots & K_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ v_j \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ \vdots \\ P_{0i} \\ \vdots \\ P_{0m} \end{bmatrix},$$

где подматрицы $[K_{ij}]$ в общем случае имеют размер 6×6 .

Выпишем i -ю строку этого равенства:

$$[P_i] = [K_{i1}][v_1] + [K_{i2}][v_2] + \dots + [K_{ii}][v_i] + [K_{ij}][v_j] + \dots + [K_{im}][v_m] + [P_{0i}]. \quad (4.24)$$

Для вычисления подматриц $[K_{ij}]$ и $[P_{0i}]$ рассмотрим равновесие узла i (рисунок 4.15). В этом узле могут соединяться несколько стержней. В узле приложена внешняя нагрузка, образующая матрицу $[P_i]$.

Мысленно разомкнем стержни. В узле i каждого из стержневых элементов возникают узловые силы, определяемые перемещениями $[v^e]$ и внеузловыми нагрузками. Так, например, для стержня a можно записать

$$[P^a] = [K^a][v^a] + [P_0^a]$$

или в блочном виде

$$\begin{bmatrix} P_i^a \\ P_r^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^a & K_{ir}^a \\ K_{ri}^a & K_{rr}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{0i}^a \\ P_{0r}^a \end{bmatrix}.$$

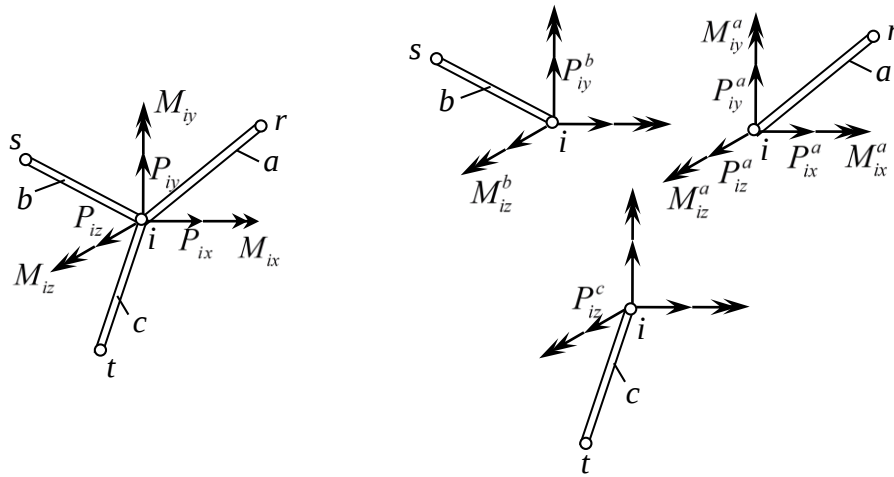


Рисунок 4.15 – Схема действия сил и моментов в узле i

Отсюда получим выражение для матрицы сил, действующих в узле i на рассматриваемый элемент a :

$$[P_i^a] = [K_{ii}^a][v_i] + [K_{ir}^a][v_r] + [P_{0i}^a]. \quad (4.25)$$

Аналогично для двух других стержней b и c :

$$\begin{aligned} [P_i^b] &= [K_{ii}^b][v_i] + [K_{is}^b][v_s] + [P_{0i}^b]; \\ [P_i^c] &= [K_{ii}^c][v_i] + [K_{it}^c][v_t] + [P_{0i}^c]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Соединив теперь стержни в узле i , будем иметь, очевидно,

$$P_{ix} = P_{ix}^a + P_{ix}^b + P_{ix}^c;$$

$$M_{ix} = M_{ix}^a + M_{ix}^b + M_{ix}^c;$$

или в матричной форме

$$[P_i] = [P_i^a] + [P_i^b] + [P_i^c].$$

Подставляя сюда выражения (4.25) и (4.26), получим

$$[P_i] = ([K_{ii}^a] + [K_{ii}^b] + [K_{ii}^c])[v_i] + [K_{ir}^a][v_r] + [K_{is}^b][v_s] + [K_{it}^c][v_t] + ([P_{0i}^a] + [P_{0i}^b] + [P_{0i}^c]).$$

Сопоставим данный результат с общим выражением (4.24). Прежде всего замечаем, что в полученном выражении отсутствуют члены, содержащие перемещения тех узлов j , которые не связаны с узлом i непосредственно с помощью стержня. Это означает, что соответствующие подматрицы $[K_{ij}]$ являются нулевыми. Если же узлы i и j связаны стержнем e , то множителем при $[v_j]$ является подматрица жёсткости $[K_{ij}^e]$ этого стержня в общей системе координат. Наконец, множитель при $[v_i]$, являющийся диагональным элементом матрицы $[K]$, равен сумме

$$[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e],$$

где суммирование производится по всем стержням, сходящимся в узле i .

Аналогичное правило суммирования получается и для вычисления матрицы $[P_{0i}]$, которая находится по формуле

$$[P_{0i}] = \sum_e [P_{0i}^e].$$

Таким образом, матрицу жёсткости стержневой системы можно образовывать из матриц жёсткости разрозненных элементов по следующему правилу:

- 1) $[K_{ij}] = [0]$, если узлы i и j не принадлежат одновременно к одному из стержней;
- 2) $[K_{ij}] = [K_{ij}^e]$, если узлы i и j связаны стержнем e ;
- 3) $[K_{ii}] = \sum_e [K_{ii}^e]$, где суммирование производится по всем стержням, сходящимся в узле i .

Матрица реакций на внеузловую нагрузку формируется по правилу

$$[P_{0i}] = \sum_e [P_{0i}^e].$$

В случае ферменной конструкции все рассуждения остаются в силе, только размер подматриц $[K_{ij}]$ будет 3×3 .

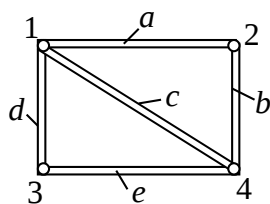


Рисунок 4.16 – Пример стержневой системы

В качестве примера покажем схему формирования матрицы жёсткости стержневой системы, изображённой на рисунке 4.16:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11}^a + K_{11}^c + K_{11}^d & K_{12}^a & K_{13}^d & K_{14}^c \\ K_{21}^a & K_{22}^a + K_{22}^b & 0 & K_{24}^b \\ K_{31}^d & 0 & K_{33}^d + K_{33}^e & K_{34}^e \\ K_{41}^c & K_{42}^b & K_{43}^e & K_{44}^b + K_{44}^c + K_{44}^e \end{bmatrix}.$$

4.9 СОКРАЩЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ УЗЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

До сих пор мы предполагали, что зависимость

$$[P] = [K][v] + [P_0] \quad (4.27)$$

служит для определения сил $[P]$, необходимых для создания заданных перемещений. Если же, наоборот, заданы силы, действующие в узлах стержневой системы, то равенство (4.27) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно перемещений $[v]$:

$$[K][v] = [P] - [P_0]. \quad (4.28)$$

Если конструкция закреплена, то перемещения соответствующих узлов в направлении опорных связей равны нулю, остальные же перемещения подлежат определению.

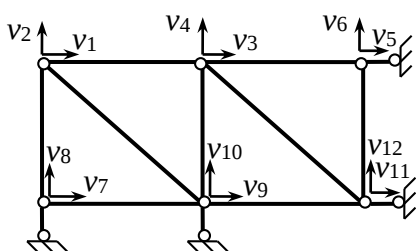


Рисунок 4.17 – Закреплённая стержневая система

Рассмотрим пример фермы (рисунок 4.17). Все компоненты перемещений можно расположить таким образом, чтобы в матрице $[v]$ сначала перечислялись все неизвестные, а затем известные (нулевые) перемещения. Матрицу неизвестных перемещений будем обозначать $[v_\alpha]$. Для нашего случая она равна

$$[v_\alpha] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_9 \\ v_{12} \end{bmatrix}.$$

Матрицу известных (нулевых) перемещений будем обозначать через $[v_\beta]$:

$$[v_\beta] = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_8 \\ v_{10} \\ v_{11} \end{bmatrix} = [0].$$

Тогда будем иметь

$$[v] = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ \dots \\ v_\beta \end{bmatrix}.$$

Поскольку порядок перечисления сил в матрицах $[P]$ и $[P_0]$ всегда должен строго соответствовать порядку следования перемещений в матрице $[v]$, то необходимо записать

$$[P] = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ \dots \\ P_\beta \end{bmatrix}; \quad [P_0] = \begin{bmatrix} P_{0\alpha} \\ \dots \\ P_{0\beta} \end{bmatrix}.$$

В матрицу $[P_\alpha]$ входят известные внешние силы, действующие в направлении неизвестных перемещений $[v_\alpha]$. Подматрица $[P_\beta]$ содержит неизвестные силы, действующие по направлению наложенных связей и представляющие собой реакции опор. Матрицу жёсткости конструкции также представим в блочной форме, придав равенству (4.27) следующий вид:

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_\alpha \\ P_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{0\alpha} \\ P_{0\beta} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Отсюда следуют два матричных равенства:

$$[K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] + [K_{\alpha\beta}][v_\beta] = [P_\alpha] - [P_{0\alpha}];$$

$$[K_{\beta\alpha}][v_\alpha] + [K_{\beta\beta}][v_\beta] = [P_\beta] - [P_{0\beta}].$$

Учитывая, что $[v_\beta] = [0]$, их можно переписать так:

$$[K_{\alpha\alpha}][v_\alpha] = [P_\alpha] - [P_{0\alpha}]; \quad (4.30)$$

$$[K_{\beta\alpha}][v_\alpha] = [P_\beta] - [P_{0\beta}]. \quad (4.31)$$

Равенство (4.30) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных перемещений $[v_\alpha]$. Решая данную систему, находим $[v_\alpha]$. Соотношение же (4.31) может быть использовано для определения неизвестных реакций:

$$[P_\beta] = [K_{\beta\alpha}][v_\alpha] + [P_{0\beta}].$$

На практике обычно достаточно найти перемещения $[v_\alpha]$ из решения системы (4.30). Матрица коэффициентов системы $[K_{\alpha\alpha}]$ есть так называемая сокращённая матрица жёсткости, которая получается из полной путём вычёркивания строк и столбцов, имеющих номера известных перемещений $[v_\beta]$.

Если перемещения узлов конструкции найдены, то для любого элемента e (с узлами i и j) будет известна матрица перемещений узлов в общей системе координат

$$[v^e] = \begin{bmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Используя формулу преобразования координат, можно найти матрицу перемещений в местных координатах

$$[\bar{v}] = [\lambda][v^e]$$

и далее по формуле

$$[\bar{P}] = [\bar{K}][\bar{v}] + [\bar{P}_0]$$

определить узловые силы в местной системе координат. Зная силы, действующие на концах стержня, можно найти усилие в ферменном элементе или построить эпюры перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов для балочного элемента. Подобные вычисления могут быть выполнены для всех стержней.

Если конструкция не закреплена, то непосредственно из уравнения (4.28) перемещения найти нельзя, так как *полная матрица жёсткости* $[K]$ для всей конструкции является вырожденной. Действительно, силы, действующие на свободную конструкцию, не могут быть произвольными; они должны удовлетворять уравнениям равновесия. Таких уравнений будет шесть для пространственной системы и три – для плоской. Таким образом, в случае пространственной конструкции шесть элементов матрицы $[P] - [P_0]$ в уравнении (4.28) определяются через остальные, являясь некоторыми линейными комбинациями последних. Но тогда и соответствующие шесть элементов матрицы-столбца $[K][v]$ будут также линейными комбинациями остальных. Это говорит о том, что строки матрицы жёсткости связаны между собой линейными зависимостями. Определитель подобной матрицы равен нулю, т.е. матрица жёсткости для свободного тела является вырожденной.

Физический смысл этого состоит в том, что перемещения свободного тела не определяются однозначно действующими на него силами, поскольку оно может получить произвольное перемещение в пространстве как жёсткое целое.

Поэтому для расчёта свободной стержневой системы её нужно предварительно закрепить с помощью минимально необходимого числа правильно ориентированных связей так, чтобы устранить возможность её перемещения как жёсткого целого.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (4.30) используются различные методы – как точные (прямые), так и приближённые (итерационные). Чаще всего применяется одна из разновидностей метода прямого исключения по Гауссу. При этом учитываются такие специфические свойства матрицы жёсткости как симметрия, положительная определенность и разреженная структура.

Данный метод расчёта стержневых систем называется матричным методом перемещений, так как в качестве основных неизвестных принимаются перемещения узлов. Он позволяет решать как статически определимые, так и

неопределимые конструкции. Причём чем больше внешних связей, тем ниже порядок разрешающей системы уравнений (4.30). Этим данный метод выгодно отличается от метода сил, который используется для раскрытия статической неопределимости. Но главное его достоинство заключается в возможности полной автоматизации вычислений, которые могут быть выполнены с помощью ЭВМ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев, Л. М. Строительная механика ракет [Электронный ресурс] : учебное пособие / *Л.М. Савельев, Ю.В. Скворцов*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – on-line.
2. Тарасов, Ю.Л. Статически определимые системы [Текст]: учебно-методическое пособие / *Ю.Л. Тарасов*. – Куйбышев, 1975. – 32 с.
3. Снитко, Н. К. Строительная механика [Текст] : учебник / *Н. К. Снитко*. – 3-е изд., перераб. – Москва : Высшая школа, 1980. – 431 с.