

5. Келдыш, В.В. Подъёмная сила крыла малого удлинения с корпусом, Учёные записки ЦАГИ, Т.6, №5, 1975. 15-28.

6. Холявко, В.И. Расчёт аэродинамических характеристик самолёта. Ч.1.: учебное пособие, Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1991. 72 с.

7. Милн-Томсон, Л.М. Теоретическая гидродинамика, М.: Мир. 1964. 665 р.

8. Джонс, Р.Т. Теория крыла: пер. с англ. В.Н. Голубкина; М.: Мир, 1995. 208 с.

УДК 539.3

Алипова Б. Н.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СВЕРХРЕЛАКСАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Из элементарного численного анализа, метод последовательной сверхрелаксации (Successive Overrelaxation Method – SOR) с фиксированной точкой экстраполируется как версия итерации Гаусса-Зейделя (которая сама по себе является производной от предыдущих итераций Якоби).

Рассмотрим линейную систему $Au = b$, где A - разреженная обратная $N \times N$ матрица, и разложим A как $A = D - L - U$.

В данном случае мы определяем

$$\mathcal{L} \equiv (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U, \quad (1)$$

$$k \equiv (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b, \quad (2)$$

и записываем
$$u^{(n+1)} = \mathcal{L}u^{(n)} + k. \quad (3)$$

Напомним, что последовательная сверхрелаксация получается из итерации Гаусса-Зейделя путём введения *параметра релаксации* ω посредством экстраполяции [1]

$$u^{(n+1)} = (1 - \omega)u^{(n)} + \omega u^{(n+1)*}, \quad (4)$$

где $u^{(n+1)*}$ был получен из (3) и, как правило, $\omega \in (1, 2)$. (Обратите внимание, что $\omega = 2$ соответствовало бы линейной экстраполяции с использованием полиномиального подхода Лагранжа). Это приводит нас к формуле с фиксированной точкой для итераций SOR:

$$u^{(n+1)} = (1 - \omega)u^{(n)} + \omega [D^{-1}Lu^{(n+1)} + D^{-1}Uu^{(n)} + D^{-1}b] \quad (5)$$

или

$$u^{(n+1)} = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}[\omega D^{-1}U + (1 - \omega)I]u^{(n)} + \omega(I - \omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b. \quad (6)$$

Отметим, что уравнение, предшествующее (6) легко получается из «вычислительной» формы итераций Гаусса-Зейделя [2-5],

$$u^{(n+1)*} = D^{-1}Lu^{(n+1)} + D^{-1}Uu^{(n)} + D^{-1}b, \quad (7)$$

перестановка уравнения (3). Если мы теперь определим

$$\mathcal{L}_\omega \equiv (I - \omega D^{-1}L)^{-1}[\omega D^{-1}U + (1 - \omega)I], \quad (8)$$

$$k_\omega \equiv \omega(I - \omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}b, \quad (9)$$

мы можем записать уравнение (6) как

$$u^{(n+1)} = \mathcal{L}_\omega u^{(n)} + k_\omega, \quad (10)$$

- *форма SOR с фиксированной точкой*. Важно отметить, что, хотя эта форма имеет решающее значение для анализа SOR, она неэффективна для численных расчётов. Для этой цели всегда следует использовать комбинацию (5) и (7).

Согласованная упорядоченность и свойства матрицы A

Введём некоторые важные определения и теоремы, содержащие соотношения для оптимального параметра SOR и спектрального радиуса $\mathcal{L}_\omega$. Есть два важнейших понятия, которые, в конечном счёте, служат необходимыми гипотезами в большинстве теорем, связанных с SOR: согласованная упорядоченность и свойства A.

Чтобы мотивировать необходимость первого из них, напомним, что в отличие от итераций Якоби, в SOR порядок, в котором оцениваются отдельные уравнения системы, влияет на скорость сходимости и даже на то, происходит ли сходимость. Это легко исследовать, вспомнив вычислительные формулы для SOR, написанные здесь для центрированной конечно-разностной аппроксимации второго порядка уравнения Пуассона:

$$u_{i,j}^{(n+1)*} = \frac{1}{4} \left[u_{i-1,j}^{(n+1)} + u_{i,j-1}^{(n+1)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i+1,j}^{(n)} - h^2 f_{i,j} \right], \quad (11)$$

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \omega u_{i,j}^{(n+1)*} + (1 - \omega) u_{i,j}^{(n)},$$

для точки сетки (i, j) . Очевидно, что изменение порядка вычисления $u_{i,j}$ изменит значения, которые известны на продвинутом уровне итерации в правой части уравнения (11). В свою очередь, это окажет влияние на матричное представление формы с фиксированной точкой этой процедуры и, следовательно, также на спектральный радиус. В частности, существуют задачи, для которых некоторые порядки могут быть сходящимися, а другие расходящимися. Для того чтобы сделать точные утверждения относительно сходимости SOR, нам понадобится понятие *согласованно упорядоченной матрицы*.

Для случая 5-полосного дискретного Лапласиана в двумерном пространстве и соответствующего 7-полосного трёхмерного случая существует простой геометрический подход, который можно использовать для проверки согласованного упорядочения. Рис. 1 демонстрирует это, в части а) мы представляем сетку с порядком, в котором уравнения итерационной схемы должны оцениваться согласно указанным рядом с соответствующими точками сетки. Геометрический тест на согласованность порядка выполняется направлением стрелок, указывающих направление от нижнего индекса к более высокому, вдоль каждого сегмента линии сетки. Затем проверяется, что количество стрелок, направленных по часовой стрелке, равно количеству стрелок, направленных против часовой стрелки, в каждой ячейке сетки. Это оказывается верным для части а).

Чтобы показать, что понятие несогласованного упорядочения не-тривиально, мы в части б) привели пример несогласованного упорядочения (см. две ячейки сетки в правом нижнем углу).

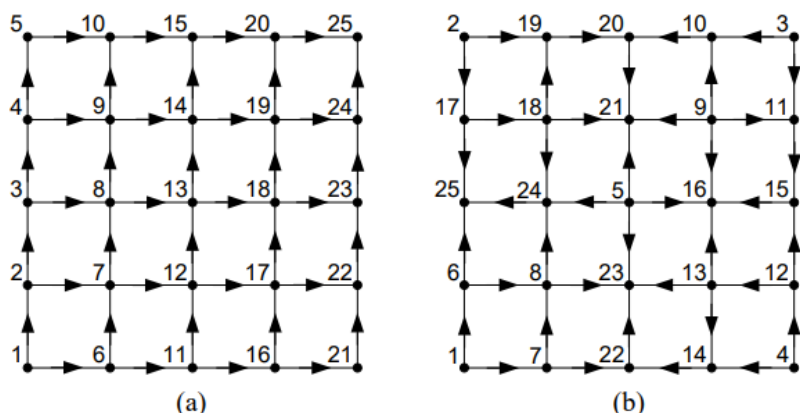


Рис. 1. Геометрический тест на согласованный порядок:
(а)- согласованный порядок; (б)- несогласованный порядок

Мы также отмечаем, что порядок в части а) рис. 1 является одним из двух *естественных порядков*, другой соответствует увеличению индекса сначала в горизонтальном направлении. Оба порядка широко используются на практике.

Важность свойства А заключается в том, что оно немного расширяет класс матриц, к которым может быть применена теория SOR, и в то же время оно обеспечивает более проверяемую характеристику этих матриц. Однако не каждая матрица, обладающая свойством А, согласованно упорядочена. Пусть матрица А обладает свойством А. Тогда $\exists$ матрица перестановок $P \ni A' = P^{-1}AP$ согласованно упорядочена.

Ясно, что если матрица P генерирует преобразование подобия, и, следовательно, A' , которая согласованно упорядочена, имеет тот же спектр, что и A , который обладает только свойством А. Таким образом, любые спектральные свойства (в частности, спектральный радиус), которые справедливы для согласованно упорядоченной матрицы, также справедливы для матрицы, обладающей свойством А.

Но преобразование подобия теоремы не приводит к согласованному упорядочению для всех матриц перестановок P , поэтому анализ, включающий эти идеи, должен включать поиск соответствующей матрицы P .

Оптимальный параметр SOR

Представим формулу для оптимального параметра итерации SOR, обозначаемого ω_b и иногда называемого параметром «релаксации». Отмечаем, что аналогичные результаты могут быть получены из геометрических аргументов, как приведено в [6-8]. Для согласованно упорядоченных матриц можно показать, что собственные значения итерационной матрицы SOR связаны с собственными значениями итерационной матрицы Якоби (которые часто могут быть вычислены точно) по формуле, приведённой ниже.

Предположим, что матрица A согласованно упорядочена, и пусть B и $\mathcal{L}_\omega$ итерационные матрицы Якоби и SOR, соответственно, связанные с A . Пусть $\mu \in \sigma(B)$ и $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega)$, ω является параметром итерации SOR. Тогда

$$\lambda - \omega\mu\lambda^{1/2} + \omega - 1 = 0. \quad (12)$$

A - согласованно упорядочена с неисчезающими диагональными элементами и такова, что итерационная матрица Якоби B имеет действительные собственные значения с $\rho(B) < 1$. Тогда $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$ iff $0 < \omega < 2$.

Теперь мы излагаем, без доказательств, основной результат, касающийся оптимального параметра SOR, ω_b .

Предположим, что A является согласованно упорядоченной матрицей, а итерационная матрица Якоби имеет $\sigma(B) \in \mathbb{R}$ с $\bar{\mu} \equiv \rho(B) < 1$. Тогда оптимальный параметр итерации SOR задаётся формулой

$$\omega_b = \frac{2}{1+(1-\bar{\mu}^2)^{1/2}}. \quad (13)$$

Более того, $\forall \omega \in (0,2)$

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \begin{cases} \left[\frac{\omega \bar{\mu} + (\omega^2 \bar{\mu}^2 - 4(\omega - 1))^{1/2}}{2} \right]^2 & 0 < \omega \leq \omega_b, \\ \omega - 1 & \omega_b \leq \omega < 2. \end{cases} \quad (14)$$

Кроме того, $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ является строго убывающей функцией от ω для $\omega \in (0, \omega_b)$ и $\rho(\mathcal{L}_\omega) > \rho(\mathcal{L}_{\omega_b})$ для $\omega \neq \omega_b$.

Здесь важно отметить, аналогично тому, что упоминалось ранее в контексте итераций Якоби, что основные гипотезы здесь достаточны, но не всегда необходимы, как часто можно видеть в численных экспериментах с использованием алгоритмов SOR.

Поведение $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ как функции ω для различных значений $\bar{\mu}$ представлено на рис. 2. Точка, где нелинейная часть каждой кривой пересекается с прямой линией, соответствующей $\omega - 1$, является местоположением ω_b для конкретного значения $\bar{\mu}$. Важно отметить, что $\rho(\mathcal{L}_\omega)$, очевидно, на данный момент не поддается дифференцированию, и, как следствие, невозможно вывести формулу для оптимального параметра ω_b с помощью простых методов минимизации из [9].

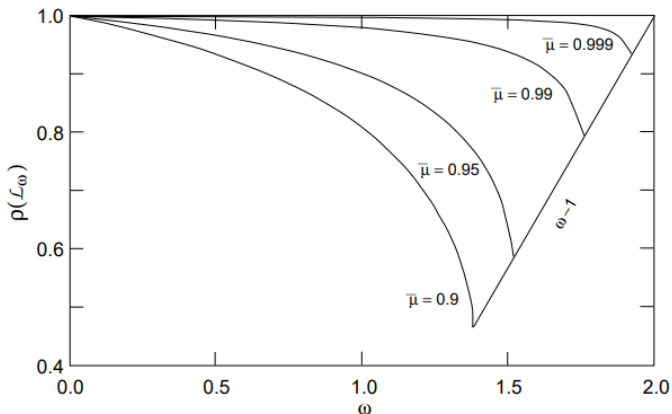


Рис. 2. Спектральный радиус итерационной матрицы SOR по сравнению с ω

Из рис. 2 видно, что $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ довольно чувствителен к ω , а следовательно, и к скорости сходимости SOR. Таким образом, важно

предсказать ω_b с разумной точностью. Мы также видим, что нелинейная часть кривой увеличивается несколько быстрее для $\omega < \omega_b$, чем линейная правая часть для $\omega > \omega_b$. Это приводит к тому, что, если кто-то не может точно предсказать ω , лучше выбрать несколько высокое значение, а не низкое. С другой стороны, известно, что некоторые из собственных значений $\mathcal{L}_\omega$ больше не являются реальными, когда $\omega > \omega_b$, что затрудняет проверку сходимости решения из-за колебаний ошибки итерации, вызванных комплексными собственными значениями. Наконец, видно, что ω_b монотонно увеличивается с $\bar{\mu}$ ($= \rho(B)$), который монотонно увеличивается с уменьшением расстояния между сетками h , как ясно из постановки метода SOR.

Скорость сходимости SOR

Предоставим оценку скорости сходимости для оптимального SOR и будем прогнозировать общие требования к арифметике с плавающей запятой так же, как делалось ранее для итераций Якоби. Пусть A - согласованно упорядоченная матрица с неисчезающими диагональными элементами $\exists \sigma(B) \in \mathbb{R}$ и $\bar{\mu} \equiv \rho(B) < 1$. Тогда

$$2\bar{\mu}[R(\mathcal{L})]^{1/2} \leq R(\mathcal{L}_{\omega_b}) \leq R(\mathcal{L}) + 2[R(\mathcal{L})]^{1/2}, \quad (15)$$

с сохранением правого неравенства, когда $R(\mathcal{L}) \leq 3$. Кроме того,

$$\lim_{\bar{\mu} \rightarrow 1^-} \left[R(\mathcal{L}_{\omega_b}) / 2(R(\mathcal{L}))^{1/2} \right] = 1. \quad (16)$$

Используем этот результат для вычисления асимптотической скорости сходимости для оптимального SOR для задачи Лапласа–Дирихле, поставленной на единичном квадрате. Напомним, что спектральный радиус итерационной матрицы Якоби для этого случая равен $\cos \pi h$, где h представляет собой равномерное конечно-разностное расстояние между сетками в обоих пространственных направлениях. Кроме того, $R(B) = \frac{1}{2} \pi^2 h^2 + \mathcal{O}(h^4)$. Теперь легко показать, что итерации Гаусса–Зейделя сходятся ровно в два раза быстрее, чем итерации Якоби для этого случая; *т. е.*, $R(\mathcal{L}) = 2R(B)$.

Чтобы подтвердить это, вспомним уравнение (12) и установим $\omega = 1$ в этой формуле. Отсюда следует, что $\lambda = \mu^2$, и из этого мы интуитивно ожидали бы, что

$$\rho(\mathcal{L}) = \bar{\mu}^2,$$

из чего следует результат. Однако отметим, что есть некоторые недостающие технические детали, которые мы упомянем, но не будем пытаться доказать. В частности, хотя соответствие $\lambda = \mu^2$ легко выполняется, обеспечивая взаимосвязь между собственными значениями итерационных матриц Гаусса-Зейделя и Якоби, само по себе это не означает, что их спектральные радиусы аналогично связаны — в некотором смысле, это проблема “подсчёта”(или упорядочивания): собственное значение, соответствующее спектральному радиусу B , не обязательно связано с приведённым выше собственным значением, соответствующим спектральному радиусу $\mathcal{L}$ [10-12].

Теперь из (16), как $h \rightarrow 0$ ($\bar{\mu} \rightarrow 1^-$) у нас есть

$$R(\mathcal{L}_{\omega_b}) \rightarrow 2[R(\mathcal{L})]^{1/2} \simeq 2\pi h. \quad (17)$$

Интересно рассмотреть практические следствия этого результата. Используя вышесказанное, вместе с $R(\mathcal{L}) = 2R(B) = \pi^2 h^2$ получаем

$$\frac{R(\mathcal{L}_{\omega_b})}{R(\mathcal{L})} \simeq \frac{2}{\pi h},$$

что подразумевает, что даже для очень грубой сетки, скажем, $h = 1/20$, это соотношение скоростей сходимости итераций SOR и Гаусса-Зейделя больше 12. Это указывает на то, что скорость сходимости оптимального SOR более чем на порядок больше, чем у Гаусса-Зейделя, даже на грубой сетке. Приведённая выше формула ясно показывает, что при $h \rightarrow 0$ коэффициент улучшения, полученный при использовании оптимального ω , становится очень большим.

С этим связан тот факт (из (17)), что $R(\mathcal{L}_{\omega_b}) \sim \mathcal{O}(h)$; то есть скорость сходимости уменьшается только линейно с N_x (или N_y), когда $\omega = \omega_b$, в отличие от скорости уменьшения, пропорционального N ($= N_x N_y$), найденного для итераций Якоби и Гаусса-Зейделя. Это сразу подразумевает, что требуемая общая арифметика на конечно-разностной сетке $N_x \times N_y$ равна $\mathcal{O}(N^{1.5})$ для SOR с оптимальным параметром релаксации. В трёхмерном пространстве общая арифметика для оптимального результата равна $\mathcal{O}(N^{1.33\dots})$.

Способ уменьшения погрешности в процессе решения также отличается для оптимального SOR. Напомним, что при типичной линейной итерации с фиксированной точкой ошибка первоначально уменьшается довольно быстро; но по мере приближения к асимптотическому режиму уменьшение ошибки резко замедляется. SOR, выполненный с неоптимальным ω ведет себя таким образом с итерациями Гаусса-Зейделя, представляющими крайний случай. С другой стороны, оптимальный SOR ведёт себя совершенно по-другому и, в частности, обычно демонстрирует логарифмически линейное уменьшение ошибки с почти постоянным наклоном на протяжении всего процесса итерации. Более того, такое поведение полностью не зависит от выбранной допускаемой погрешности - что, в общем случае, неверно для обычных линейных итераций с фиксированной точкой.

Библиографический список

1. J.M. McDonough. Advanced algorithms of CFD equations. Department of Mechanical Engineering of the University of Kentucky, KY, USA, 2019
2. Mitchell A. R. The finite difference method in partial differential equations/ A. R. Mitchell, D. F. Griffiths.- New York: A Wiley-InterScience Publication, 1980.
3. Richard S. Varga. 2002 Matrix Iterative Analysis, Second ed. (of 1962 Prentice Hall edition), Springer-Verlag.

4. E. Isaacson and H. B. Keller. Analysis of Numerical Methods. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1966.

5. Apostol T. M. Mathematical Analysis. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, MA, second edition, 1974.

6. R. D. Richtmyer and K. W. Morton. Difference Methods for Initial-Value Problems. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, second edition, 1967.

7. Berg P. W and McGregor J. L. Elementary Partial Differential Equations. Holden-Day, San Francisco, 1966.

8. G. Strang and G. J. Fix. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1973.

Thompson J. F, Warsi V. A, and C. W. Mastin. Numerical Grid Generation: Foundations and Applications. North-Holland, New York, NY, 1985.

9. Duff I. S, Erisman A. M, and Reid J. K. Direct Methods for Sparse Matrices. Clarendon Press, Oxford, 1986.

10. Stoer and Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. Springer-Verlag, New York, 1980.

11. Andrew Ronald Mitchell and David Francis Griffiths. The finite difference method in partial differential equations. A Wiley-Interscience Publication, 1980.