

Кусюмов А. Н., Кусюмов С. А.

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПУЛЬСАЦИЙ СИГНАЛА

Из литературы известны различные подходы к анализу энергетических характеристик сигнала. Для непрерывного во времени реального сигнала  $u(t)$  энергия сигнала  $ES$  определяется выражением

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} U(t) dt, \quad (1)$$

где  $U(t) = u^2(t)$ . Спектральный анализ для ограниченного во времени сигнала (в диапазоне  $-T/2 \leq t \leq T/2$ ) проводится с помощью преобразования Фурье [1]:

$$\hat{u}_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2\pi i t f} dt.$$

Использование теоремы Парсеваля [2] позволяет определить спектральные плотность энергии  $ESD$  и мощность сигнала  $PSD$ :

$$E_D(f) = |\hat{u}(f)|^2. \quad (2)$$

$$P_D(f) = \frac{1}{T} |\hat{u}(f)|^2. \quad (3)$$

Из (1) следует, что энергия сигнала  $E_T$  определяется интегралом величины  $U(t)$ . Наряду с выражениями (2), (3) для оценки энергетических свойств сигнала в [3], [4] введена функция  $ESS$  (Energy Signal Spectra):

$$E_S(f) = |\hat{U}_T(f)|, \quad (4)$$

где

$$\hat{U}_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} U(t) e^{-2\pi i t f} dt. \quad (5)$$

Из выражений (2), (3) следует, что спектральные характеристики  $E_D(f)$  и  $P_D(f)$  определяются преобразованием Фурье сигнала  $u(t)$  в первой степени. Из (4) следует, что функция  $E_S(f)$  определяется преобразованием Фурье сигнала  $u(t)$  во второй степени. Отметим, что при определении пространственного спектра можно ввести

преобразование Фурье дискретизированного по пространству сигнала  $u(x)$  (в диапазоне  $-X/2 \leq x \leq X/2$ ).

$$E_S(k) = |\widehat{U}_X(k)|, \quad (6)$$

где  $U(x) = u^2(x)$ ,  $k$  – волновое число. Функция  $\widehat{U}_X(k)$  определяется пространственным преобразованием Фурье

$$\widehat{U}_X(k) = \int_{-X/2}^{X/2} U(x) e^{-2\pi i x k} dx. \quad (7)$$

Можно ввести также энергетическую характеристику сигнала  $P_P(f)$ , которая определяется преобразованием Фурье сигнала  $u(t)$  в третьей степени

$$P_P(f) = \left| \int_{-T/2}^{T/2} u^3(t) e^{-2\pi i t f} dt \right|. \quad (8)$$

Мотивацией для введения функции  $P_P(f)$  является тот факт, что некоторые энергетические характеристики летательного аппарата (мощность) пропорциональны третьей степени характеристической скорости – скорости полёта летательного аппарата.

Одно из приложений, в котором используются спектральные характеристики сигнала ESD и PSD (соответственно  $E_D(f)$  и  $P_D(f)$ ), ориентировано на анализ спектра пульсаций скорости для плохо обтекаемых тел. Как правило полученные характеристики сравниваются с спектральным распределением, определяемым законом «-5/3» А.Н. Колмогорова (закон K41 [5]). В соответствии с законом «-5/3» референтный пространственный спектр энергии сигнала определяется выражением

$$EI_{ij}(k) \sim \alpha_{ij} \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (9)$$

где  $\epsilon$  – скорость диссипации энергии турбулентности. Для изотропных течений  $\alpha_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \approx 0.5$ . Отметим, что размерность величины  $EI_{ij}(k)$  совпадает с размерностью функции  $E_S(k)$ . Следовательно, пространственный спектр  $E_S(k)$  можно сравнивать с законом А.Н. Колмогорова «-5/3».

В [4] функция  $E_S(f)$  сравнивается с референтным спектром энергии сигнала во временной области

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \beta_{ij}\varepsilon\omega^{-2}, \quad (10)$$

где  $\beta_{ij} = \text{const}$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – частота колебаний сигнала.

Из анализа размерностей следует, что референтный спектр для энергетической характеристики (8) определяется выражением

$$P_{ij} = \sigma_{ij}\varepsilon^{3/2}\omega^{-5/2}, \quad (11)$$

где  $\sigma_{ij} = \text{const}$ .

Функция  $P_p(f)$  в данной работе использовались для оценки энергетического спектра сигнала, определяемого поперечной компонентой скорости потока в следе за отсеком кругового цилиндра (3D постановка). Численное моделирование проводилось для числа Рейнольдса  $Re=3900$ , где число Рейнольдса определялось по величине диаметра цилиндра  $d$ . При проведении расчётов в пакете ANSYS Fluent использовались нестационарные уравнения Навье-Стокса в рамках модели несжимаемой жидкости.

Расчётная область представляла собой прямоугольник с размерами  $20d \times 5d \times \pi d$ . Расчётные гекса-сетки с количеством элементов около  $12 \cdot 10^6$  (Case I) и  $17 \cdot 10^6$  (Case II) построены в сеточном генераторе

ANSYS ICEM. Расчётные сетки имели сгущение около поверхности цилиндра. Размер первой ячейки по нормали к поверхности составлял около  $10^{-3}$  от диаметра цилиндра, что обеспечивало значение  $y^+$  не превышающее значение 1,03.

На входной границе расчётной области и боковых границах задавалось однородное поле потока с вектором скорости  $(u, v, w)^T = (1, 0, 0)^T V_\infty$ , где  $V_\infty$  – скорость набегающего потока. Компоненты вектора скорости соответствуют продольной  $x$ , нормальной  $y$  и поперечной координате  $z$ . На боковых сторонах расчётной области (ортогональных координате  $z$ ) применялись граничные условия «симметрии». При решении уравнений Навье-Стокса использовалась дискретизация второго порядка по пространству и первого порядка по времени. Временной шаг составлял  $\Delta t = 0.0565 d/V_\infty$ . Статистические данные были собраны примерно за 100 циклов образования вихрей ( $T \approx 500d/V_\infty$ ).

Осреднённые по времени значения коэффициента лобового сопротивления для Case I и Case II составляли, соответственно,  $c_{xa I} = 0,95$  и  $c_{xa II} = 0,96$ . Для сравнения полученное в эксперименте значение коэффициента лобового сопротивления  $c_{xa} = 0,99 \pm 0.05$  [6]. Визуализация результатов численного моделирования позволяет также выделить пространственные периодические структуры течения в различные фиксированные моменты времени. Наличие этих структур связано с отрывом ламинарного пограничного слоя около поверхности цилиндра и образованием дорожки Кармана. Число Струхала  $Sh = 0,224$  (Case II), рассчитанное для частоты  $f_K$  дорожки Кармана, находится в удовлетворительном согласии с экспериментальным значением  $Sh = 0,215 \pm 0.05$ , представленным в [6].

На рис. 1 в логарифмическом масштабе представлено распределение нормированных функций  $P_p(f)$  в сопоставлении с законами «-5/3» А.Н. Колмогорова и зависимостью, определяемой выражением (11).

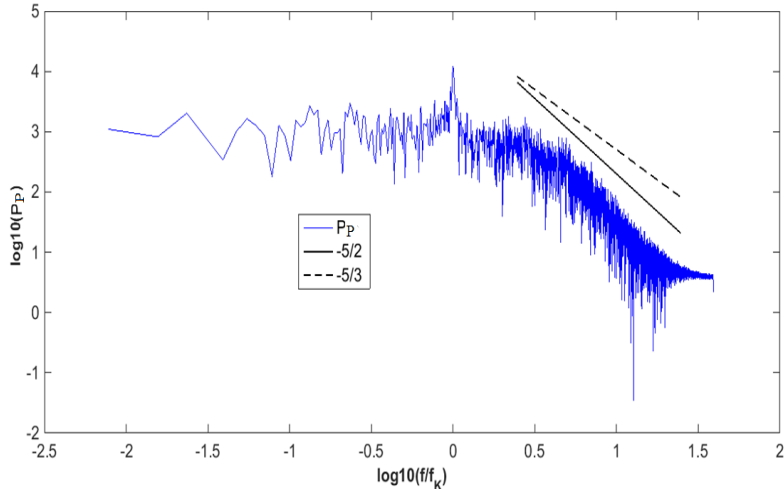


Рис. 1. Спектральные характеристики поперечной скорости  $v$  в точке  $x = 3.5d$  на осевой линии

Нормированная функция  $P_p(f)$  определяется выражением

$$\bar{P}_P(\bar{f}) = \frac{P_P(\bar{f})\tau}{V_\infty^3}, \bar{f} = \frac{f}{f_K}.$$

Здесь  $\tau$  – некоторое характерное время (масштаб), определяемое формулой

$$\tau = \sqrt{\frac{V}{\epsilon}}.$$

Из рис. 1 следует, что на кривой  $\bar{P}_P(\bar{f})$  можно выделить пиковое значение, соответствующее частоте дорожки Кармана. В инерциальном поддиапазоне имеются области, где наклон кривой  $\bar{P}_P(\bar{f})$  соответствует как закону «-5/3», так и закону «-2». При этом в целом градиент кривой  $\bar{P}_P(\bar{f})$  в инерциальном поддиапазоне частот лучше согласуется закону «-2» в сравнении с законом «-5/3».

### **Благодарности**

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации тема 123030100016-5 FZSU-2023-0005.

### **Библиографический список**

1. Lathi, B.P. Modern digital and analog communication systems / B.P. Lathi, Z. Ding. – Oxford University press, 2019. 993 p.
2. Prandoni, P. Signal Processing for Communications / Prandoni P., Vetterli M. – EPFL Press; 1st edition (August 19, 2008), 300 p.
3. Кусюмов, А.Н. Спектральный анализ пульсаций при 3d обтекании цилиндра / Кусюмов А.Н., Кусюмов С.А., Михайлов С.А., Романова Е.В. Научная молодёжная школа: Теплофизика и физическая гидродинамика: современные вызовы. Тезисы докладов. – Сочи, Научно-технологический университет «Сириус» (2022). С. 184.
4. Кусюмов, А.Н. Спектральный анализ энергии пульсаций / Кусюмов А.Н., Кусюмов С.А. Современные проблемы математики и математического образования: LXXVI Герценовские чтения: сборник научных статей. – Санкт – Петербург, РГПУ им. А.И. Герцена (2023). С. 303-307.

5. Кадер, Б.А. Спектры анизотропных турбулентных пульсаций скорости и температуры в пристеночных турбулентных потоках / Б.А. Кадер, А.М. Яглом //Сб.: Проблемы турбулентных течений. – М.: Наука, 1987. – С. 65–74.

6. Ong, L. The velocity field of the turbulent very near wake of a circular cylinder / Ong, L., Wallace, J. // Exp. Fluids. – 1996. – V. 20. P. 441-453.

УДК 533.69.048

*Germato A.Y.*

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОРПУСА С ОДНИМ ВНЕШНИМ БЛОКОМ, РАСПОЛОЖЕННЫМ СВЕРХУ**

Работа посвящена определению несущей способности двухблочной компоновки, у которой внешний блок расположенный сверху параллельно корпусу. 3D-модели показаны на рис. 1. Эксперименты проводились в аэродинамической трубе Т-3 Самарского университета [1].

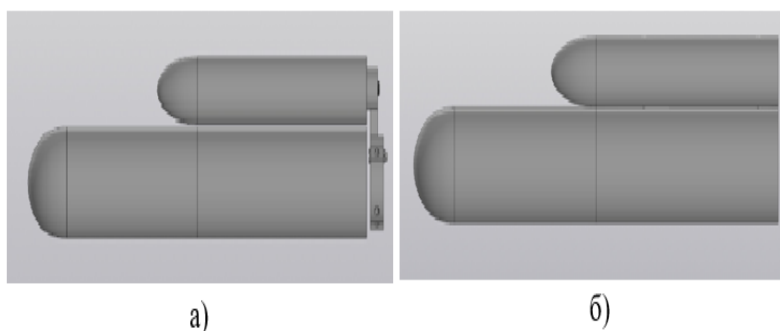


Рис. 1. Компоновка корпуса с боковым блоком, расположенным сверху:  
а) крепление бокового блока специальным кронштейном на штанге позади тензоголовки; б) крепление бокового блока жёстко к корпусу