

Кусюмов А. Н., Кусюмов С. А., Романова Е.В., Тихомирова Р.Л.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПУЛЬСАЦИЙ СИГНАЛА

При проведении спектрального анализа пульсаций непрерывного во времени реального сигнала $u(t)$ в различных технических областях используются преобразования Фурье [1]:

$$\hat{u}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-2\pi i t f} dt.$$

Здесь t – время, f – частота спектра. Спектральный анализ для ограниченного во времени сигнала (в диапазоне $-T/2 \leq t \leq T/2$) проводится

с помощью преобразования Фурье:

$$\hat{u}_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-2\pi i t f} dt. \quad (1)$$

Использование теоремы Парсеваля [2] позволяет определить спектральную плотность энергии ESD сигнала:

$$E_D(f) = |\hat{u}(f)|^2. \quad (2)$$

Отметим, что при определении пространственного спектра можно ввести преобразование Фурье сигнала $u(x)$ в диапазоне $-X/2 \leq x \leq X/2$:

$$E_S(k) = |\hat{U}_X(k)|. \quad (3)$$

Здесь $U(x) = u^2(x)$, x – пространственная координата, k – волновое число. Функция $\hat{U}_X(k)$ определяется пространственным преобразованием Фурье

$$\hat{U}_X(k) = \int_{-X/2}^{X/2} U(x) e^{-2\pi i x k} dx. \quad (4)$$

Одно из приложений, в котором используются спектральные характеристики сигнала ESD (соответственно $E_D(f)$), ориентировано на анализ спектра пульсаций скорости для плохо обтекаемых

тел. Как правило полученные характеристики сравниваются с спектральным распределением, определяемым законом «-5/3» А.Н. Колмогорова (закон К41 [3]). В соответствии с законом «-5/3» референтный пространственный спектр энергии сигнала определяется выражением

$$EI_{ij}(k) \sim \alpha_{ij} \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (5)$$

где ϵ – скорость диссипации энергии турбулентности. Для изотропных течений $\alpha_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \approx 0.5$. Отметим, что размерность величины $EI_{ij}(k)$ совпадает с размерностью функции $E_S(k)$. Следовательно, можно предположить, что пространственный спектр $E_S(k)$ можно сравнивать с законом А.Н. Колмогорова «-5/3».

Закон К41 получен А.Н. Колмогоровым в рамках статистической теории турбулентности и в основе его лежат две гипотезы, определяющие спектральные характеристики турбулентного течения в инерционном диапазоне спектра. С учётом комментариев, сделанных в [4], гипотезы подобия А.Н. Колмогорова можно изложить в упрощённой формулировке.

Первая гипотеза подобия. В случае турбулентности с достаточно большим числом Рейнольдса многомерные распределения вероятностей в пространственно-временной области, в которой турбулентность локально изотропна, однозначно определяются значениями параметров: скорости диссипации энергии турбулентности ϵ и коэффициента кинематической вязкости ν .

Вторая гипотеза подобия. В энергетическом режиме соответствующих турбулентных движений доминирующим процессом будет передача энергии к движениям меньших масштабов благодаря действию сил инерции без сколько-нибудь заметного перехода энергии непосредственно в теплоту. Поэтому и статистические закономерности, отвечающие этому интервалу масштабов, по видимому, не должны зависеть от коэффициента вязкости ν .

Рассмотрим вопрос, касающийся референтной оценки $S_{ij}(f)$ сигнала $u_{ij}(t)$, определяемого пульсациями продольной или поперечной компонентами вектора скорости течения при условии изотропной турбулентности.

Для получения референтной оценки $S_{ij}(f)$ сделаем предположение: гипотезы подобия А.Н. Колмогорова справедливы не только для оценки спектра энергии сигнала, но и для оценки спектра компонент вектора скорости, т.е. $S_{ij}(f) = \varphi(\epsilon, f)$, где $\varphi(\epsilon, f)$ – некоторая функция. Тогда из анализа размерностей преобразования Фурье функции $u(t)$ следует, что референтный спектр для оценки сигнала $u(t)$ определяется выражением

$$S_{ij}(f) = \gamma_{ij} \epsilon^{1/2} \omega^{-3/2}, \quad (6)$$

где $\gamma_{ij} = const$, $\omega = 2\pi f$.

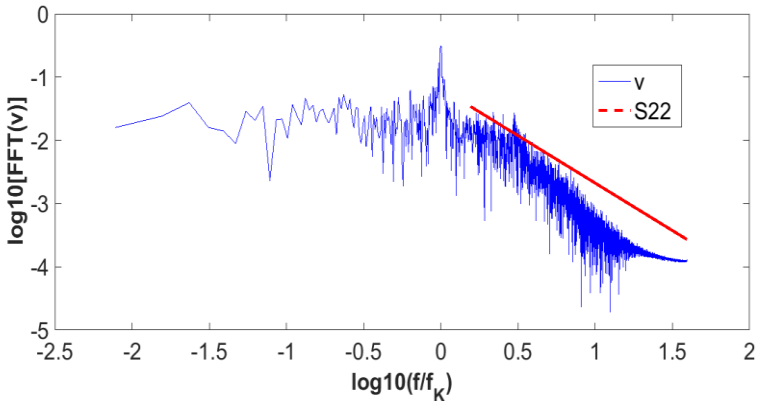
Функция $S_{ij}(f)$ использовались для оценки спектра сигнала, определяемого поперечной компонентой скорости потока в следе за отсеком кругового цилиндра (3D постановка). Численное моделирование проводилось для числа Рейнольдса $Re=3900$, где число Рейнольдса определялось по величине диаметра цилиндра d . При проведении расчетов в пакете ANSYS Fluent использовались нестационарные уравнения Навье-Стокса в рамках модели несжимаемой жидкости.

Расчётная область представляла собой прямоугольник с размерами $20d \times 5d \times \pi d$. Расчётная гекса-сетка с количеством элементов около $17 \cdot 10^6$ построена в сеточном генераторе ANSYS ICEM. Размер первой ячейки по нормали к поверхности составлял около 10^{-3} от диаметра цилиндра, что обеспечивало значение y^+ , не превышающее на всей поверхности значения 1.03.

На входной границе расчётной области и боковых границах задавалось однородное поле потока с вектором скорости $(u, v, w)^T = (1, 0, 0)^T V_\infty$, где V_∞ – скорость набегающего потока. Компоненты вектора скорости соответствуют продольной x , нормальной y и поперечной координате z . На боковых сторонах расчётной области

(ортогональных координате z) применялись граничные условия «симметрии». При решении уравнений Навье – Стокса использовалась дискретизация второго порядка по пространству и первого порядка по времени. Временной шаг составлял $\Delta t = 0.0565 d/V_\infty$. Статистические данные были собраны примерно за 100 циклов образования вихрей ($T \approx 500d/V_\infty$). Более подробные детали моделирования обтекания цилиндра можно найти в [5].

На рисунке в логарифмическом масштабе представлено распределение нормированных функций $\hat{v}_T(f)$ в сопоставлении с зависимостью $S_{22}(f)$, определяемой выражением (6). В качестве сигнала рассматривалась поперечная компонента $v(t)$ вектора скорости течения.



Спектральные характеристики поперечной скорости v в точке $x = 3.5d$ на осевой линии

Нормированная функция $\bar{v}_T(f)$ определяется выражением:

$$\bar{v}_T(\bar{f}) = \frac{\hat{v}_T(f)}{V_\infty T}, \bar{f} = \frac{f}{f_K}.$$

Здесь f_K – частота дорожки Кармана. На кривой $\bar{v}_T(\bar{f})$ можно выделить пиковое значение, соответствующее частоте дорожки Кармана. В начале инерционного поддиапазона имеется область, где наклон кривой $\bar{v}_T(\bar{f})$ соответствует как закону «-3/2».

При больших значениях частоты спектра в инерционном поддиапазоне наклон средней части кривой $\bar{v}_T(\bar{f})$ превышает наклон кривой $S_{22}(f)$.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, тема 123030100016-5 FZSU-2023-0005.

Библиографический список

1. Lathi, B. P. Modern digital and analog communication systems / B. P. Lathi, Z. Ding. – Oxford university press, 2019. 993 p.
2. Prandoni, P. Signal Processing for Communications / Prandoni P., Vetterli M. –EPFL Press; 1st edition (August 19, 2008), 300 p.
3. Колмогоров, А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. – 1941. – Т. 30. С. 299 – 304.
4. Монин, А.С. Статистическая гидромеханика, механика турбулентности / Монин А.С., Яглом А.М.– Изд-во: СПб: Гидрометеоиздат, 1996. 742 с.
5. Кусюмов, А.Н. Спектральные характеристики трехмерного обтекания кругового цилиндра / Кусюмов А.Н., Кусюмов С.А., Романова Е.В. // Авиационная техника. – 2023. – №. 2. С. 75–80.

УДК 531.533

Степанов Р.П., Кусюмов А. Н.

О МОДЕЛИРОВАНИИ КОНЦЕВОГО ВИХРЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Выбор подходящего метода идентификации вихревых структур, сходящих с различных несущих поверхностей летательных аппаратов (ЛА), является важной задачей. Анализ ядра вихря, гене-