

**САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.Королева**

**А.Б. Прокофьев
Е.В. Шахматов**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ВИБРОАКУСТИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ
В ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ**

Самара 2008

УДК 532.542
ББК 39.7

Моделирование виброакустических процессов в трубопроводных системах. / А.Б. Прокофьев, Е.В. Шахматов – Самарский государственный аэрокосмический университет, г. Самара, 2008. – 168 с.

ISBN 978-5-9900760-5-1

В монографии обобщены результаты научных исследований в области моделирования виброакустических процессов в трубопроводных системах. Основное внимание уделено изложению двух методов моделирования: твердотельному конечно-элементному моделированию с помощью программного комплекса ANSYS и конечно-разностному моделированию на базе разработанной обобщенной математической модели, рассматривающей трубопровод с точки зрения механики стержней. В данных моделях авторами впервые учтено воздействие волновых процессов в рабочей жидкости на динамику трубопроводной системы. Представлены результаты моделирования виброакустических характеристик трубопроводов на ряде тестовых задач.

Книга предназначена для специалистов, занимающихся проектированием и эксплуатацией трубопроводных систем, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

Рецензенты: д.т.н., проф. Кулаков Г.А.
д.ф.-м.н., проф. Радченко В.П.

УДК 532.542
ББК 39.7

ISBN 978-5-9900760-5-1

© А.Б. Прокофьев, Е.В. Шахматов, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.	4
Глава 1. Анализ методов математического моделирования виброакустических характеристик элементов пневмогидро- механических систем.	7
1.1. Аналитическое моделирование динамических харак- теристик элементов пневмогидромеханических систем. . .	8
1.2. Методы численного моделирования виброакустиче- ских характеристик элементов пневмогидромеханических систем.	19
Глава 2. Методика проектирования трубопроводных сис- тем с учетом комплексной взаимосвязи статических, ди- намических процессов и прочностных характеристик тру- бопроводов.	23
Глава 3. Конечно-элементное моделирование виброаку- стических характеристик трубопроводов в программном комплексе ANSYS.	52
Глава 4. Обобщенная математическая модель виброаку- стических процессов в трубопроводных системах.	66
Глава 5. Расчет прочностных характеристик трубопрово- дов.	
Список использованных источников.	161

ВВЕДЕНИЕ

Современный гидропривод различных технических объектов характеризуется высокой энергонасыщенностью его узлов и элементов. Трубопроводы, являющиеся важным элементом гидропривода, работают в условиях воздействия на них широкого спектра возмущений как статического, так и динамического характера. При этом требования к надежности и работоспособности трубопроводов непрерывно растут. Одним из основных факторов, снижающих работоспособность трубопроводных систем, являются виброакустические нагрузки. Виброакустические процессы в трубопроводных системах представляют собой взаимодействующую совокупность пульсаций рабочей среды и вибраций механических элементов. Они характеризуются широким спектром частот (20 Гц – 5 кГц) и амплитуд колебаний (размах колебаний давления рабочей жидкости – до 20 МПа, виброускорение – до 1000 м/с^2). Причем именно колебания давления, амплитуда которых может достигать 50% от среднего значения, являются одной из причин, приводящих к вибрации, усталостным поломкам трубопроводов.

Важной задачей при оценке вибрационной прочности трубопроводных систем является определение их вибрационных характеристик. Известны нормативные документы, ограничивающие параметры вибрации эксплуатируемых трубопроводов, призванные обеспечить их надежность. Однако все они носят эмпирический характер и не являются универсальными на все случаи. Кроме того, такие нормы используются лишь для оценки безотказности уже созданных трубопроводных систем. В них не содержится никаких рекомендаций по вопросу, что делать, если уровень вибрации недопустим, если заданная работоспособность не обеспечивается. Большую сложность к настоящему времени представляет также и прогнозирование вибропараметров трубопроводов с пульсирующим потоком рабочей жидкости на стадии проектирования. Известные методики расчета вибропараметров трубопровода при его силовом нагружении пульсирующим потоком рабочей жидкости характеризуются весьма существенной идеализацией: заменой воздействия от пульсирующего потока сосредоточенной силой; предположением о несжимаемости жидкости, о сосредоточенности ее параметров и т.д. Нередко также и пренебрежение резонансными характеристиками механической подсистемы трубопровода. Все это при-

водит к погрешности расчета относительно эксперимента в 500% и более.

Таким образом, актуальной научно-технической задачей является формирование математического описания виброакустических процессов в трубопроводных системах. Решение такой задачи позволит обеспечить работоспособность трубопроводных систем путем рационального выбора параметров трубопроводов, мест расположения и характеристик опор, устройств коррекции динамических характеристик (вибродемпферов, динамических виброгасителей, гасителей колебаний рабочей жидкости).

Задача моделирования виброакустических процессов в трубопроводных системах весьма широка. Очевидно, подходы к ее решению для трубопроводных систем различного назначения (например, нефте- и газопроводов и трубопроводов гидропривода) будут отличаться.

В данной монографии внимание сосредоточено на трубопроводах, вибрация которых определяется, в основном, изгибными колебаниями. Деформации поперечного сечения трубопровода при этом предполагаются малыми по сравнению с амплитудами изгибных колебаний. Данным условиям соответствуют, в первую очередь, трубопроводы различных технических объектов – ракетно-космических комплексов, авиационных двигателей, самолетных систем, сельскохозяйственной техники, гидравлических прессов, компрессорных станций и т.д. Сразу ограничим и частотный диапазон применимости представленных в монографии математических моделей. Верхний предел анализируемых частот должен быть ниже:

- 1) частоты, при которой начинает проявляться распределенность параметров рабочей жидкости в поперечном сечении трубопровода;
- 2) одной трети первой собственной частоты поперечного сечения (оболочки) трубопровода.

Таким образом, настоящая монография представляет обобщение научных результатов, посвященных решению задачи анализа и моделирования виброакустических характеристик трубопроводных систем при их силовом нагружении пульсирующим потоком рабочей жидкости и кинематическом возбуждении со стороны присоединенных агрегатов и систем.

В первой главе рассмотрены методы моделирования виброакустических характеристик элементов пневмогидромехани-

ческих систем.

Во второй главе представлена разработанная методика проектирования трубопроводных систем, обеспечивающая их требуемые виброакустические и прочностные характеристики в условиях одновременного воздействия на трубопроводы статического нагружения давлением и динамического нагружения пульсациями рабочей жидкости, кинематического возбуждения со стороны опор и присоединенных агрегатов, температурных и внешних силовых нагрузок.

В третьей главе рассмотрены подходы к конечно-элементному моделированию виброакустических процессов в трубопроводных системах с использованием программного комплекса ANSYS. Приведены результаты расчетного и экспериментального исследования виброакустических характеристик на базе предложенного метода моделирования.

Четвертая глава посвящена формированию обобщенной математической модели виброакустических процессов в трубопроводных системах. Обобщенная математическая модель рассмотрена в двухсвязанной постановке, когда не только пульсации давления вызывают вибрацию трубопровода, но и колебания механической подсистемы воздействуют на волновые процессы в рабочей жидкости. Показано, что из обобщенной математической модели виброакустических процессов в трубопроводной системе как частные случаи получаются: модель малых колебаний, модель односвязанных колебаний, модель свободных колебаний трубопровода. Приведены примеры решения с помощью разработанной модели ряда тестовых задач, сравнение результатов с данными, полученными другими методами моделирования.

Пятая глава посвящена расчету внутренних напряжений в трубопроводах и оценке их прочности. Показаны пути использования результатов анализа виброакустических характеристик трубопроводов для определения их напряженного состояния.

Авторы выражают благодарность коллективу Института акустики машин Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева, а также д.т.н., профессору Астафьеву В.И., и к.т.н., доценту Макарьянцу Г.М. за поддержку при подготовке материалов для написания монографии.

Глава 1. АНАЛИЗ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИБРОАКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ ПНЕВМОГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

При математическом моделировании виброакустических характеристик пневмогидромеханическая система (или ее элемент) представляется некоторым объектом, имеющим ряд входных величин (входов), которыми определяется воздействие окружающей среды или других систем, и ряд выходных величин (виброакустических характеристик), которыми характеризуется воздействие данной системы на окружающую среду или другие системы. Математическое описание виброакустических процессов в определяемых таким образом пневмогидромеханических системах складывается из описаний нестационарного движения рабочей среды (жидкости или газа), взаимодействия рабочей среды с подвижными или неподвижными окружаемыми или окружающими элементами механической подсистемы, взаимодействия их с окружающей средой и другими элементами, которые по каким-либо причинам не были включены в данную систему. При этом очень важно избегать неоправданного усложнения математических моделей из-за загромождения их учетом второстепенных факторов, не оказывающих сколь-либо заметного влияния на результаты решаемой задачи. Математическое описание виброакустических процессов в пневмогидромеханических системах в наиболее общем виде представляет собой системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, причем необходимые для решения этих уравнений граничные условия также описываются нелинейными дифференциальными, алгебраическими или интегральными уравнениями.

Наиболее общие закономерности изучаемых явлений позволяют выявить лишь аналитические методы, предоставляющие возможность получить решение задачи в общем виде. Однако для нестационарных виброакустических процессов в пневмогидромеханических системах получить решение в аналитическом виде и в дальнейшем проанализировать его получается далеко не всегда. Поэтому все большее распространение получают численные методы моделирования. Наиболее перспективно с точки зрения получения научных результатов объединение этих методов. При этом задача моделирования виброакустиче-

ских процессов формулируется и начинает решаться в аналитическом виде. Когда проводимые преобразования приводят к дифференциальным уравнениям, дальнейший аналитический анализ которых невозможен или слишком сложен, подключаются численные методы анализа.

1.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ ПНЕВМОГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Поскольку основное внимание в монографии уделено процессам виброакустического взаимодействия в пневмогидромеханических системах, то и обзор математических моделей необходимо начать с математических моделей связанных колебаний рабочей среды и окружающей ее оболочки. Так как изучение процессов в рабочих средах со свободной поверхностью не входит в задачи монографии, анализ таких процессов будет опущен. Следует отметить, что результаты теоретического исследования явлений виброакустического взаимодействия чрезвычайно малочисленны и к настоящему времени еще не создано описывающей их единой стройной теории. Некоторые теоретические результаты представлены в [32, 36, 46, 47, 48, 70, 82, 83]. При этом многие исследования ограничены предположением о возможности описания акустических процессов в рабочей среде одномерным волновым уравнением. Кроме того, в большинстве работ принято допущение о гармоническом законе изменения параметров рабочей среды:

$$p = A_p(x) \exp(j(\omega t - k_x x)), \quad (1.1)$$

где $A_p(x)$ – амплитуда колебаний давления рабочей среды;

k_x – волновое число в рабочей среде с учетом упругости ограничивающих поверхностей;

x – текущая координата, вдоль которой изменяются параметры пульсирующего потока рабочей среды.

Тогда, уравнение вибрации поверхности ограничивающей поток поверхности, например, в случае плоской поверхности, может быть записано в виде:

$$u(x, y) = A_u(x, y) \exp(j(\omega t - k_x x)) \quad (1.2)$$

где $u(x, y)$ – вибросмещение точек ограничивающей поверхности;

$A_u(x, y)$ - амплитуда вибро смещения точек ограничивающей поверхности;

y – координата в плоскости ограничивающей поверхности, перпендикулярная направлению распространения акустических волн.

Здесь следует отметить, что указанные соотношения будут справедливы только в случаях аксиальных колебаний частиц жидкости, которые реализуются при определенных соотношениях между линейными размерами сечений и длинами волн. Например, для цилиндрического трубопровода [23]:

$$r < 0,61\lambda,$$

где r – радиус трубопровода;

λ - длина волны.

В [82] моделирование процессов виброакустического взаимодействия реализовано для канала прямоугольного сечения с одной податливой и тремя жесткими ограничивающими поверхностями (рис.1.1). Показано, что форма вибрации податливой пластины, возбуждаемой пульсациями давления рабочей среды, представляет собой суперпозицию по меньшей мере двух собственных форм колебаний. Для рассматриваемого частного случая связанных колебаний составлен функционал As-tley [70]:

$$\Phi = \rho\omega^2 \frac{g}{2} U_0^2 \left(2S \left(\frac{\pi}{S} \right)^4 + S k_x^2 \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 + \frac{3}{8} S (k_x^4 - k_p^4) \right) - \\ - \rho\omega^2 \frac{A_p U_0 S}{2} - (k^2 - k_x^2) \frac{A_p^2 R}{2},$$

где U_0 - максимальная в сечении поверхности амплитуда вибро смещения;

k_p - волновое число в ограничивающей пластине;

R – площадь поперечного сечения канала.

Приравнивая частные производные от функционала Φ по переменным U_0 и A_p к нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U_0} = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial A_p} = 0,$$

получено два линейных однородных уравнения относительно переменных U_θ и A_p , которые преобразуются к кубическому уравнению:

$$K^3 + \left[\frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{S} \right)^2 - k^2 \right] K^2 + \left[\frac{16}{3} \left(\frac{\pi}{S} \right)^4 - k_p^4 \right] K + \left[k^2 k_p^4 - \frac{16}{3} k^2 \left(\frac{\pi}{S} \right)^4 - \frac{2}{3} \frac{\rho \omega^2 S}{gR} \right] = 0,$$

где $K = k_x^2$. Решение этого уравнения позволяет найти k_x , входящее в выражения (1.1) и (1.2) и устанавливающее связь между распределением параметров пульсаций рабочей среды и вибрации ограничивающей поверхности.

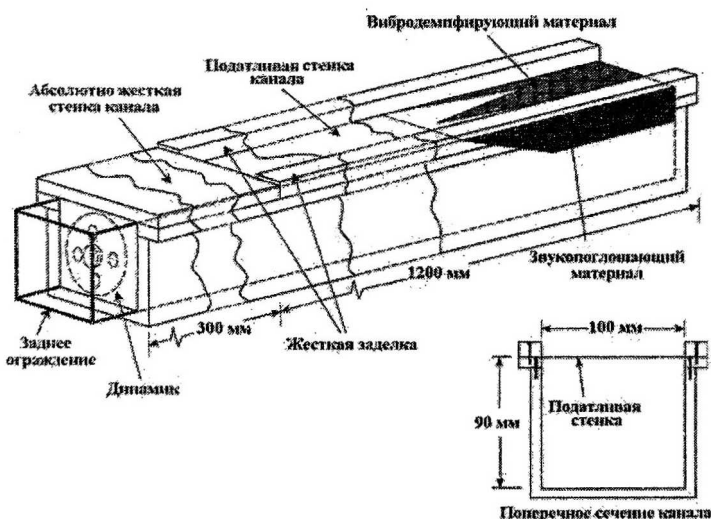


Рис. 1.1 – Экспериментальная установка для исследования процессов виброакустического взаимодействия [82].

На примере работы [82] можно показать наиболее общие подходы к аналитическому описанию процессов виброакустического взаимодействия в пневмогидромеханических системах. Однако математическая модель разработана для конкретного частного случая и никак не может быть преобразована в обобщенное математическое описание процессов виброакустическо-

го взаимодействия. Более того, можно отметить, что современное состояние науки не позволяет решить указанную задачу в общем случае. Настоящий этап развития этого научного направления как раз и состоит в разработке математического описания тех или иных частных случаев, накоплении экспериментального материала.

Большое внимание в настоящее время уделяется созданию методов моделирования динамических характеристик гидронасосов [11, 12, 14, 26, 27, 31, 32, 40, 42, 46, 65, 68, 79, 80]. Связано это, как уже отмечалось выше, с тем, что на стадии проектирования наиболее эффективным способом обеспечения виброакустического качества гидромеханической системы является снижение пульсационной производительности насосного агрегата. А это невозможно без тщательного моделирования его динамических характеристик.

Из приведенных выше работ, посвященных математическому моделированию характеристик насосов, лишь небольшая часть рассматривает и использует аналитические методы моделирования. В [26] представлены математические модели динамических характеристик аксиально-плунжерных гидромашин. Показано, что подача такого насоса в нагнетательный трубопровод складывается из двух составляющих – кинематической подачи и подачи сжатия, обусловленной сжимаемостью рабочей жидкости. Приводятся формулы для расчета временных зависимостей этих составляющих подачи. Однако в работе принят ряд серьезных допущений. Так, например, для простоты принимается трапецеидальная форма индикаторной диаграммы с линейным изменением давления по углу поворота блока цилиндров. Кроме того, в модели довольно упрощенно задаются граничные условия.

В [14, 32, 68] приведена математическая модель динамики шестеренного насоса. Шестеренный насос представлен в виде эквивалентной разветвленной гидравлической цепи, в которую входят цепи периферийных утечек в зоне зацепления. Система уравнений, описывающая процессы внутри насоса, замыкается уравнениями нагрузок, присоединенных к нему по линиям всасывания, нагнетания и механического привода. Полученная модель позволяет достаточно точно моделировать пульсационную производительность насоса, однако никаких уравнений, описывающих его вибрационное состояние, в модель не входит. Одним из серьезных допущений является не учет сжимаемости

рабочей жидкости. Кроме того, модель чрезвычайно громоздка при анализе и практически не позволяет получить никаких аналитических выражений для выходных процессов насоса.

В [40, 42, 65] основное внимание уделено моделированию динамических характеристик лопастных насосов. В [40] разработаны аналитические модели для расчета пульсаций давления и скорости в лопастных насосах, методы оптимизации динамических, габаритных и эксплуатационных характеристик. Однако в уравнения разработанных математических моделей зачастую входят эмпирические коэффициенты, что снижает общность проделанного анализа. Кроме того, как и во многих других работах, недостаточно внимания уделено описанию граничных условий – динамических характеристик присоединенных гидравлических цепей. В [42, 65] акцент сделан на моделировании динамических характеристик лопастных насосов, работающих в условиях кавитации (как развитой, так и скрытой). Поскольку в данной научной области еще нет однозначного понимания физики происходящих явлений, то и разработанные математические модели (при всей их безусловной научной ценности) зачастую многовариантны и взаимопротиворечивы. В [27] также сформулирована математическая модель динамики шнеко-центробежного насоса, в том числе и в условиях кавитации. Модель работы [27] имеет большую общность, чем [40]. В ней детально учтены динамические характеристики присоединенных гидравлических цепей. Однако, в [27], как и в [40] используется ряд коэффициентов, определяемых по экспериментальным графикам напорной и расходной характеристик, что сдерживает использование этой математической модели на стадии проектирования как насоса, так и системы в целом.

В [46] математическая модель шнеко-центробежного насоса рассматривается с точки зрения распространения с выхода на вход насоса внешних вынужденных пульсаций давления. При этом учитываются кавитационные явления в полостях шнеко-центробежного насоса. Ряд коэффициентов, входящих в эту модель взят из работы [42, 65], где они определены эмпирически. Таким образом, нельзя не отметить полуэмпирический характер аналитической модели работы [46], что также сдерживает возможность ее использования на стадии проектирования насосного агрегата. Модель основана на применении импедансного метода, что ограничивает область ее использования установившимися режимами работы гидравлической системы.

Проделанный анализ позволяет сделать вывод, что решение задачи расчета виброакустических характеристик насосных агрегатов различных типов аналитическими методами представляет собой весьма сложную и очень редко до конца разрешимую проблему.

Другим, не менее важным, чем насос, элементом гидромеханических систем, которому посвящены обширные экспериментальные и теоретические исследования, является трубопровод. Результаты аналитического моделирования виброакустических характеристик трубопроводов представлены в работах [14, 15, 17, 18, 19, 27, 32, 43, 46, 57, 69, 75, 84]. Влияние трубопровода учитывается, в основном, путем коррекции значения модуля упругости рабочей жидкости, например, из [43]:

$$B_{np} = \frac{B}{1 + \frac{2r_0 B}{\delta E_{cm}}},$$

где r_0 - внутренний радиус трубопровода;

δ - толщина стенки трубопровода;

E_{cm} - модуль упругости материала стенки трубопровода.

В указанных работах разработано чрезвычайно полное и точное описание распространения волновых процессов в трубопроводах, как для случаев ламинарного, так и турбулентного движения сред. Наиболее наглядно динамические процессы в трубопроводах описываются матрицей передачи [46, 64, 69], связывающей колебательные параметры рабочей жидкости на входе и выходе из трубопровода:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\omega) & B(\omega) \\ C(\omega) & D(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где P_1 и P_2 - комплексные амплитуды пульсаций давления на входе и выходе трубопровода соответственно;

Q_1 и Q_2 - комплексные амплитуды пульсаций расхода на входе и выходе трубопровода соответственно;

$$\begin{aligned} A(\omega) &= ch(\gamma l); \quad B(\omega) = Z_B sh(\gamma l); \\ C(\omega) &= \frac{1}{Z_B} sh(\gamma l); \quad D(\omega) = ch(\gamma l); \end{aligned} \quad (1.4)$$

где Z_B - волновое сопротивление трубопровода;
 γ - постоянная распространения волнового процесса;
 l – длина трубопровода.

Вопросы воздействия пульсирующего потока рабочей жидкости на вибрационные характеристики трубопровода рассмотрены в существенно меньшем числе работ. Аналитическому моделированию виброакустических характеристик трубопроводов при их силовом возбуждении колебаниями давления рабочей жидкости посвящены работы [1, 29, 47, 54]. Пионерской в этом направлении является работа [29]. В ней решается задача определения вибропараметров при параметрических колебаниях прямолинейного участка трубопровода на податливых опорах с линейными упругими характеристиками с учетом демпфирования. Несмотря на очевидную важность работы [29], нельзя не отметить ее недостатков. Во-первых, автор ставил перед собой цель решения узкой задачи получения аналитического выражения для расчета вибропараметров трубопровода при моногармоническом резонансном возбуждении с частотой $\omega \approx 2\omega_c$ (где ω_c - первая собственная круговая частота колебаний), а во многих случаях интересно решение этой задачи для любых частот возбуждения и полигармонического сигнала. Во-вторых, определенную некорректность в общем случае вызывает допущение о возможности записи закона изменения давления в рабочей жидкости в виде:

$$p = p_0 + \Delta p \cos \omega t, \text{ где } \Delta p = \text{const},$$

т.е. в сосредоточенных параметрах. Автор сам отмечает это, подчеркивая, что на высоких частотах полученное решение приводит к завышенным значениям амплитуды вибрации.

В работе [1] разработан аналитический метод исследования устойчивости трубопроводной системы с учетом расширенного спектра внешних воздействий, таких как старение материала, воздействие неустановившегося потока жидкости (газа), вязкоупругого основания, сжимающего (растягивающего) продольного усилия. Исследования проводились на основе следующего модельного уравнения:

$$M \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI \left[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^l \frac{\partial Q}{\partial \tau} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d\tau \right] + \xi \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial t \partial x^2} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} +$$

$$+ \beta \left[y(x, t) - \int_0^l \frac{\partial V}{\partial \tau} y d\tau \right] + f(x, t, y) + g \left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \alpha \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t \partial x} = 0;$$

где $M = \rho_{\text{ж}}(x)S_{\text{ж}}(x) + \rho_{\text{жк}}(x)S_{\text{жк}}(x)$ - погонная масса трубопровода с жидкостью;

$\xi(x)$ - коэффициент внутреннего демпфирования материала трубопровода;

$\eta(x) = \rho_{\text{ж}}(x)J(x)$ - коэффициент, учитывающий инерцию вращения сечений.

Разработанный метод [1] основан на построении функционала типа Ляпунова для представленного выше интегродифференциального уравнения с частными производными. На основе исследования этого функционала получены достаточные условия устойчивости колебаний трубопровода по Ляпунову. Однако полученное аналитическое условие справедливо только для прямолинейных участков трубопроводных систем, что существенно ограничивает его значимость. Кроме того, оно чрезвычайно громоздко и отвечает только на вопрос об устойчивости системы, оставляя открытыми вопросы о величинах вибропараметров в системе. Автор [1] подчеркивает целесообразность использования численных методов при решении подобных задач, чему и посвящена вторая часть его работы.

В работах [47, 48] разработаны аналитические модели для расчета параметров вибрации прямолинейных участков неоднородных трубопроводов под действием силового возбуждения со стороны пульсирующего потока рабочей жидкости. Кроме того, имеется возможность включения в математическую модель дополнительных гидромеханических агрегатов, однако они рассматриваются в сосредоточенных параметрах. Решение полученной системы дифференциальных уравнений в частных производных осуществляется методом Бубнова – Галеркина. Модельным объектом и в этом случае является прямолинейный участок трубопровода, в то время как трубопроводные системы

реальных технических объектов имеют сложную пространственную конфигурацию.

Таким образом, проделанный анализ позволяет установить, что аналитических методов моделирования виброакустических характеристик трубопроводных систем сложной пространственной конфигурации с пульсирующим потоком рабочей жидкости на сегодняшний день не существует. Кроме того, большинство исследователей в данной области говорят о целесообразности использования численных методов моделирования виброакустических характеристик трубопроводов.

В пневмогидромеханических системах существует множество других элементов, воздействующих на виброакустические характеристики: клапаны, золотниковые распределители, емкости, жиклеры и т.п. Для управления потоками рабочих сред, расходами и давлениями в машинах и аппаратах применяют различные по принципу действия и конструктивному исполнению распределительные устройства, примерами которых могут служить золотниковые распределители и клапаны. Проточные элементы таких устройств представляют собой короткие каналы и отверстия с постоянными или изменяющимися во времени проходными сечениями. Динамические характеристики таких устройств мало исследованы [18, 44, 53, 69]. Связано это с тем, что нестационарное истечение среды через отверстия является очень сложным гидродинамическим процессом. Более изучены динамические характеристики рассматриваемых устройств в пределах границ квазистационарности. При этих условиях они описываются линеаризованным уравнением вида [44]:

$$T \frac{d(\Delta v_c)}{dt} + \Delta v_c = k \Delta p_{1-2},$$

где T – постоянная времени, учитывающая инерцию среды при истечении через устройство;

Δv_c - отклонение разности скоростей потока от установившихся значений в сечениях непосредственно до и после устройства;

Δp_{1-2} - отклонение разности давлений от установившихся значений в сечениях непосредственно до и после устройства;

k – коэффициент преобразования (передачи), определяющий стационарное отклонение скорости потока в зависимости от отклонения разности Δp_{1-2} давлений.

Для диафрагмы [44]:

$$T = \frac{\beta_l l_{np}}{\left(\alpha_2 - \alpha_1 \frac{\varepsilon_c^2 F_0^2}{F_1^2} + \xi_{kc} \right) v_{cy}},$$

$$k = \frac{1}{\left(\alpha_2 - \alpha_1 \frac{\varepsilon_c^2 F_0^2}{F_1^2} + \xi_{kc} \right) \rho v_{cy}},$$
(1.5)

где l_{np} - приведенная к отверстию длина участка, на котором проявляется инерция среды;

α_1 , α_2 , β_l - коэффициенты;

ξ_{kc} - квазистационарный коэффициент сопротивления отверстия в диафрагме.

Для золотниковых распределительных устройств [44]:

$$T = \frac{\beta_l l_k \left[1 + \frac{4 \beta_k l_k \varepsilon'_c b_{ок} x_0 \sin \theta}{\beta_l \pi (d_3^2 - d_{uc}^2)} \right]}{\left[\alpha_2 - \alpha_1 \frac{16 (\varepsilon'_c b_{ок} x_0 \sin \theta)}{\pi^2 (d_3^2 - d_{uc}^2)} + \xi_{kc} \right] v_{cy}},$$

$$k = \frac{1}{\left[\alpha_2 - \alpha_1 \frac{16 (\varepsilon'_c b_{ок} x_0 \sin \theta)}{\pi^2 (d_3^2 - d_{uc}^2)} + \xi_{kc} \right] \rho v_{cy}},$$
(1.6)

где l_k - длина кольцевого канала;

β_k - коэффициент количества движения потока среды в кольцевом канале;

ε'_c - коэффициент сжатия потока.

Невыполнение условий квазистационарности при увеличении частоты колебаний рабочей жидкости приводит к необходимости замены в выражениях (1.5) и (1.6) ξ_{kc} на ξ_n (нестационарный коэффициент сопротивления), величина которого уменьшается относительно ξ_{kc} с ростом частоты колебаний.

В большинстве аналитических моделей емкостей, целиком заполненных жидкостью, учитывается только изменение потен-

циальной энергии рабочей среды внутри емкости. Емкости рассматриваются как реактивные сопротивления и их динамические свойства определяются импедансом [69]:

$$Z_n = -j \frac{\rho a^2}{\omega V_{np}}.$$

Матричное уравнение связи между параметрами на входе и выходе полости, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} P_{BX} \\ Q_{BX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_n} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{ВЫХ} \\ Q_{ВЫХ} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Динамические свойства емкостей с газовыми подушками, вставками из податливого материала и корпусами малой жесткости также можно рассчитывать по формуле (1.7) в той области частот, в которой доминирующую роль играет изменение потенциальной энергии элементов емкости. При этом в каждом случае будет свое выражение для V_{np} . Так, приведенный объем емкости, имеющей газовую подушку, при условии изотермичности процессов внутри емкости, определяется зависимостью:

$$V_{np} = \frac{V}{1 + \delta} \left(\frac{\rho a^2}{p_0} \delta + 1 \right),$$

где $\delta = \frac{V_r}{V_{жс}}.$

Существует множество других элементов пневмогидромеханических систем, описываемых аналитическими моделями. Однако целью данного раздела было не описание всех известных математических моделей, а иллюстрация того, что формулирование математических моделей виброакустических процессов в пневмогидромеханических системах и их аналитическое решение возможно далеко не всегда, да и в разрешимых случаях сопровождается серьезными допущениями и упрощениями. Своеобразной альтернативой аналитическим являются численные методы моделирования, получившие в последнее время значительное расширение в связи с развитием быстродействующей вычислительной техники [11, 12, 26, 31, 46, 78, 79, 80].

1.2. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИБРОАКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ ПНЕВМОГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящее время численные методы являются мощным средством приближенного решения многих прикладных задач, описывающих различные физические процессы. Можно с полным основанием сказать, что без них многие задачи не могли бы быть решены.

Все большее распространение численные методы приобретают в решении задач моделирования виброакустических характеристик насосных агрегатов [11, 12, 31, 79, 80]. Связано это, в первую очередь, с чрезвычайной сложностью протекающих в них процессов, упрощенное аналитическое описание которых приводит к неадекватным результатам.

В работах [11, 12, 31] представлена разработанная гидродинамическая модель структуры течения в шнекоцентробежном насосе. Задача решается методом контрольных объемов в пакете Star-CD. Результатом расчета являются, в частности, пульсации давления в различных областях полости насосного агрегата. Однако, при задании граничных условий определяется только взаимодействие жидкости с ротором и статором насоса, а также равномерные поля скоростей на входе в насос и сливных патрубках. При этом ничего не говорится об акустических характеристиках (например, импедансах) присоединенных гидравлических линий. По-видимому, расчет пульсаций давления ведется только из соображений кинематической подачи, а волновые процессы в магистрях и в полости насоса не учитываются.

В работах [26, 77, 80] также представлена численная модель виброакустических процессов в шнекоцентробежном насосе в двумерной постановке. Однако в отличие от [11, 12, 31] решение задачи здесь разбито на два этапа. На первом этапе с использованием метода дискретных вихрей производится расчет поля скоростей в полости насоса. Основные сделанные допущения:

- характерные числа Маха намного меньше единицы;
- при определении поля скоростей сжимаемостью рабочей среды можно пренебречь;
- вход в насос рассматривается в виде точечного источника;
- лопатки центробежного колеса – бесконечно тонкие.

На втором этапе результаты определения поля скоростей рабочей жидкости являются исходными данными для расчета

пульсаций давления. Колебания давления жидкости в основном генерируются в процессе взаимодействия лопатки и языка улитки. Главным механизмом генерирования колебаний давления предполагается воздействие неустановившихся поверхностных сил на лопатку крыльчатки. Эти силы достигают максимума, когда поток жидкости из полости, образованной двумя соседними лопатками, перекрывается языком улитки. При этом возникает импульс давления, который передается в трубопроводную систему в виде звуковых волн. Акустическими источниками являются движущиеся (вращающиеся) диполи. Влияние источников – монополей в хорошо спроектированном (спрофилированном) насосе обычно мало. Источники – квадруполь обнаруживаются в неустановившемся, сильно турбулентном потоке. Проведено исследование параметров численного моделирования (плотность сетки на лопатках, на улитке, в выходном канале, шаг дискретизации по времени) на сходимость результатов расчета. Расчетным путем показано, что наибольший вклад в пульсации давления и скорости вносят роторная, лопастная и ее высшие гармоники. Так как основным источником колебаний давления являются процессы виброакустического взаимодействия вращающихся лопаток и языка улитки, численно исследовано влияние трех форм языка на генерируемые пульсации давления. Показано, что уровень колебаний может быть значительно уменьшен путем увеличения зазора между языком и крыльчаткой до величины в 20% от радиуса крыльчатки (у обычных насосов зазор – 5...10%). Но увеличение зазора вызывает снижение гидравлической эффективности, что крайне нежелательно. Численно исследовано влияние частоты вращения ротора на уровень генерируемых пульсаций давления. Показано, что снижение частоты вращения ротора с 890 до 600 об/мин приводит к снижению уровня пульсаций давления на 15 дБ. Численные результаты сравниваются с экспериментальными данными. Показана хорошая сходимость. Пульсации, полученные в результате численного анализа, несколько выше экспериментальных. Это объясняется использованием двумерной модели, не учитывающей торцевых утечек и эффектов пространственной скругленности языка. К недостаткам модели можно отнести отсутствие описания динамических характеристик присоединенной цепи.

В [22] разработана математическая модель для расчета динамических характеристик пневматического привода, которая описывает газодинамические процессы в камерах роторного

пневмодвигателя, а также в каналах и элементах выхлопной системы. Динамические характеристики пневматического привода описаны системой дифференциальных и алгебраических уравнений. Решение полученной системы осуществляется численным методом Рунге – Кутта – Фелберга на базе системы компьютерной математики Maple. В работе [22] используется отмеченный выше подход, когда объединяются аналитические и численные методы моделирования. При сделанных допущениях аналитическими методами формируется математическая модель в виде системы уравнений, которая затем решается численно. К недостатку модели следует отнести то, что в ней, как и в [11, 12, 31] рассматривается только динамика кинематической подачи и упускаются из виду волновые процессы в рабочей среде.

Адекватный расчет виброакустических характеристик пространственно сложных, криволинейных трубопроводов можно проводить только с использованием численных методов моделирования [1, 27, 46, 73, 76, 78, 81]. К сожалению, работ в этой области еще крайне немного. Связано это с тем, что при своей кажущейся простоте геометрии и изученности свойств трубопроводов, математическое описание их виброакустических характеристик представляет очень сложную задачу.

Большой интерес в этом отношении представляет математическая модель динамики криволинейных трубопроводов, изложенная в работе [27]. В ней, в частности, отмечена сложность явлений при движении пульсирующего потока жидкости по криволинейной трубе. Возникающие в жидкости инерционные силы не имеют осевой симметрии и, нагружая трубу, приводит к изгибным и крутильным колебаниям. Колебания трубы в свою очередь возмущают движение жидкости. Построенная математическая модель базируется на условиях равновесия участка криволинейной трубы, уравнениях связи сил и моментов с упругими перемещениями, массовых распределенных сил, движения жидкости в упругой трубе. Авторами работы [27] отмечается, что полученную систему нелинейных дифференциальных уравнений можно решить конечно-разностным способом, однако ни методики, ни примера интегрирования системы уравнений не приводится.

Кроме того, авторами настоящей монографии были опробованы различные конечно-разностные схемы аппроксимации данной задачи. Все они приводили к неустойчивому решению,

что говорит, по меньшей мере, о сложности подбора хотя бы условно устойчивой схемы конечно-разностной аппроксимации системы дифференциальных уравнений работы [27].

В работе [78] приведен интересный пример решения задачи конечно-элементного моделирования процессов виброакустического взаимодействия в трубопроводной системе. Полость клапана генерировала установившиеся колебания давления рабочей жидкости, которые распространялись по потоку в трубопроводную систему, вызывая ее вибрацию. При этом трубопровод моделировался оболочечным конечным элементом, а жидкость – твердотельным. Результаты расчета по разработанной конечно-элементной модели хорошо коррелируют с экспериментом.

В работе [76] рассматривается задача конечно-разностного моделирования вибрации спирального металлического трубопровода, применяемого в теплообменнике, под действием кипящего потока рабочей среды. Хотя данная задача по своему содержанию стоит несколько в стороне от целей настоящей монографии, она здесь рассмотрена потому, что заложенные в ней подходы аналогичны подходам, использованным при формировании разработанной математической модели виброакустических характеристик трубопроводов сложной пространственной конфигурации (см. главу 4). В [76] анализируется случай, когда по мере продвижения среды по трубопроводу вследствие дальнейшего подвода тепла жидкость продолжает кипеть. Со стороны жидкости на трубопровод действуют силы вязкого трения и центробежные инерционные силы. Составленная математическая модель взаимного движения рабочей среды и трубопровода представляет собой систему дифференциальных уравнений, в частных производных 15-го порядка. Для решения полученной системы используется метод конечных разностей. Моделирование проводилось для двух случаев: с учетом и без учета трения среды о стенку трубопровода. Исследована возможность стабильных и неустойчивых режимов вибрации, которые зависят от сочетания следующих варьируемых параметров:

- длины жидкостного участка на входе;
- скорости испарения жидкости;
- начальной скорости движения жидкости.

Показана сложность выделения трехмерной формы вынужденной вибрации трубопровода, так как динамические процессы в нем не являются установившимися.

Глава 2. МЕТОДИКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ КОМПЛЕКСНОЙ ВЗАИМОСВЯЗИ СТАТИЧЕСКИХ, ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРУБОПРОВОДОВ

Разветвленные трубопроводные цепи, находящие широкое распространение в гидравлических, топливных, пневматических системах самых различных технических объектов, подвержены широкому спектру воздействий как статического, так и динамического характера. При этом, в ряде случаев, деление нагрузок на статические и динамические бывает условным. Примером этому являются температурные нагрузки. При температурных деформациях трубопроводных систем, срок службы которых варьируется от нескольких часов до нескольких десятков лет, возникают силы, которые являются причиной появления изгибающих и крутящих моментов, а следовательно, и дополнительных напряжений. Количество циклов температурных воздействий на такие трубопроводы изменяется в чрезвычайно широком диапазоне – от нескольких десятков циклов до миллионов циклов. Поэтому в одних системах температурные нагрузки следует рассматривать как статические, в других – как динамические. Другим интересным примером нагрузок, которые можно отнести как к статическим, так и к динамическим, является гидравлический удар. Большинство специалистов не задумываясь отнесут его к динамическим нагрузкам. Однако, существуют системы, которые испытывают гидравлический удар, но происходит это чрезвычайно редко. Например, при заполнении трубопроводной системы рабочей жидкостью. Для таких трубопроводов гидравлический удар следует рассматривать как статическую нагрузку, и при расчетах на статическую прочность величину заброса при гидравлическом ударе суммировать со средним внутренним давлением в системе.

Наибольшее влияние на снижение прочности и надежности трубопроводных систем оказывают следующие виды нагрузок:

- 1) монтажные напряжения;
- 2) температурные воздействия;
- 3) внутреннее давление;
- 4) колебания внутреннего давления;
- 5) нагрузки от колеблющихся агрегатов, опор трубопроводов;

б) аэродинамические нагрузки.

Первые три вида нагрузок условно мы будем относить к статическим, остальные – к динамическим. Статическое нагружение трубопроводных систем исследовано не до конца, хотя и более полно, чем динамическое нагружение. Именно поэтому в монографии большее внимание уделено динамическим нагрузкам, в настоящее время оказывающим наибольшее влияние на снижение надежности трубопроводов.

Как правило, трубопроводные системы представляют собой геометрически сложные, разветвленные цепи. Исследование и анализ их динамических характеристик представляет сложную научно-техническую задачу. Традиционно, такой анализ разделялся на две составляющие: исследование динамических характеристик отдельно гидравлической подсистемы и отдельно механической подсистемы.

Изучению динамических характеристик гидравлической подсистемы сложных разветвленных трубопроводных цепей посвящено большое число работ [17, 18, 19, 43, 44]. Исследования базируются, в основном, на использовании матричных методов анализа пневмогидравлических цепей. В их основе лежат уравнения баланса для узлов и контуров цепи, метод узловых давлений, метод контурных расходов.

Исследование динамических характеристик механической подсистемы разветвленной цепи всегда сопряжено с целым рядом принимаемых упрощающих допущений. Это – рассмотрение участков трубопроводных цепей по отдельности, независимо друг от друга; идеализация или пренебрежение геометрией цепи; схематизация действия внешних и внутренних силовых возмущений; пренебрежение кинематическим возбуждением и т. п.

Крайне недостаточно изучено взаимодействие акустических процессов в рабочей среде и вибрации механической подсистемы трубопроводной цепи. А именно воздействие пульсаций жидкости во многих случаях оказывает решающее влияние на снижение надежности трубопроводов.

Таким образом, актуальной задачей является научное описание комплекса процессов в трубопроводной цепи, представляющей собой пространственно сложную разветвленную распределенную систему, включающих в себя воздействие внутренних и внешних статических и динамических факторов.

Известен целый ряд методик проектирования трубопроводных систем различного назначения исходя из требований

обеспечения их прочности [41, 45, 51, 52]. Однако ни одна из этих методик не учитывает в полной мере всего комплекса воздействий (как внешних, так и внутренних), оказывающих влияние на прочность трубопроводных систем. Так, в работе [45] рассмотрена детальная методика расчета на статическую прочность. Расчет на выносливость от динамических нагрузок представлен в форме поверочного расчета. Приведено выражение для определения амплитуды эквивалентных напряжений. Однако методики расчета входящих в него составляющих, определяемых виброакустическими нагрузками, не представлено. В работе [51] также основное внимание уделено статической прочности трубопроводных систем. Расчеты на выносливость ограничены случаем определения переменных напряжений и запасов прочности от температурных деформаций по малоцикловой усталости. Влияние виброакустических нагрузок на прочность трубопроводных систем не рассмотрено вообще.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что вопросам определения переменных напряжений от воздействия виброакустических нагрузок при расчете прочности трубопроводных систем уделено недостаточно внимания. В то же время их неучет при расчетах и проектировании трубопроводов во многих случаях приводит к потере работоспособности системы. Так, в работе [63] представлен пример, когда на одном из газотурбинных двигателей при проведении стендового испытания была обнаружена продольная сквозная трещина длиной 17 мм на криволинейном участке с радиусом 40 мм трубопровода диаметром 22х1 с овальностью $a/b = 1,14$. Рабочее давление в этом трубопроводе – **5,5 МПа**. Амплитуда колебаний давления рабочей жидкости – **0,74 МПа**. Оказалось, что трубопровод соответствовал нормам статической прочности. Однако, переменные напряжения которые были относительно невелики (амплитуда – **27 МПа**) привели к разрушению трубопровода.

Таким образом, актуальной задачей является разработка методики проектирования трубопроводных систем с учетом комплексной взаимосвязи статических и динамических процессов в них. Главное внимание в этой методике уделено обеспечению требуемых прочностных характеристик таких трубопроводных систем. Алгоритм реализации разработанной методики, представлен на рис. 2.1.

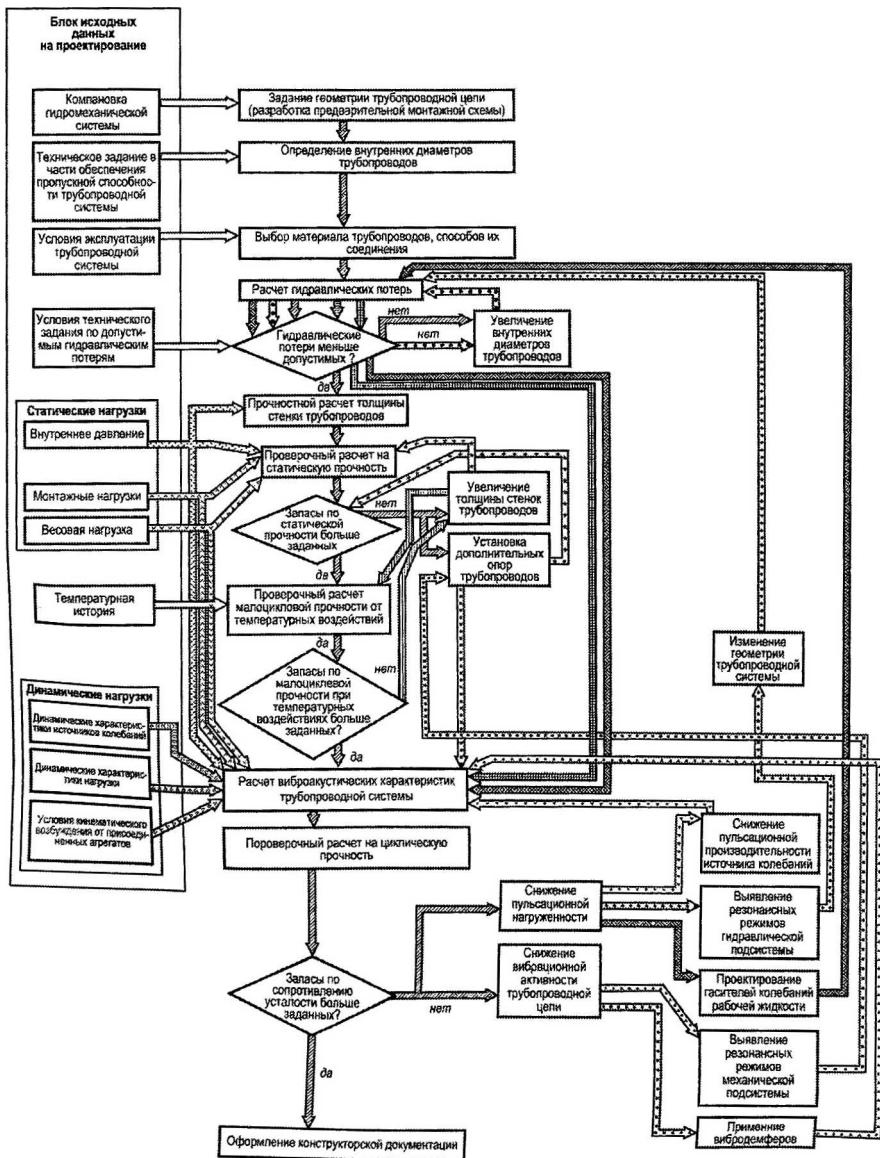


Рис.2.1 – Алгоритм проектирования трубопроводной системы, учитывающий комплексную взаимосвязь статистических, динамических процессов и прочностных характеристик.

Алгоритм состоит из 6 основных блоков:

- исходных данных на проектирование;
- компоновки трубопроводной системы;
- расчета на статическую прочность;
- поверочного расчета на малоцикловую прочность от температурных воздействий;
- поверочного расчета на циклическую прочность от воздействия виброакустических нагрузок;
- мероприятий по снижению виброакустической нагруженности трубопроводной системы.

Блок исходных данных включает в себя:

- варианты компоновки гидромеханической системы на объекте;
- условия технического задания в части обеспечения пропускной способности трубопроводной системы;
- условия эксплуатации трубопроводной системы;
- условия технического задания по допустимым гидравлическим потерям в трубопроводной системе;
- статические нагрузки;
- динамические нагрузки;
- температурную историю.

Рассмотрим их последовательно.

При выборе вариантов компоновки гидромеханической системы возможны два подхода. В первом случае проектирование трубопроводов начинается после того, как закончено проектирование всех узлов и агрегатов разрабатываемого технического объекта. Преимущество такого подхода состоит в том, что к началу работ имеется вся необходимая информация о других узлах и агрегатах, необходимая для формирования требований к трубопроводам и для их конструктивного оформления. Недостатком первого варианта является ограничение возможностей конструктора трубопроводной системы по выбору наиболее рациональных конфигураций трубопроводов, мест их соединения, мест размещения опор. Во втором случае проектные работы по трубопроводам ведутся одновременно с проектированием других узлов и агрегатов, что позволяет устранить недостатки первого варианта схемы проектирования. Конструктор получает здесь возможность продиктовать оптимальные решения агрегатов и точек подсоединения к ним трубопроводов и таким образом добиться оптимальной конструкции трубопроводов (определить длину, число гибов, диаметры, точки закрепления и др.). Одним из этапов компоновки гидромеханической системы явля-

ется разработка предварительной монтажной схемы. Разработка предварительной монтажной схемы начинается с определения мест расположения агрегатов, удобных с точки зрения подходов при эксплуатации и возможностей монтажа агрегата.

Работа над предварительной монтажной схемой должна закончиться выбором оптимального варианта группировки и размещения агрегатов и прокладки линий трубопроводов. При этом должно быть составлено техническое задание на проектирование трубопроводов, которое является документом, суммирующим все основные требования к ним.

Условия технического задания в части обеспечения пропускной способности трубопроводной системы задают максимальные расходы рабочей жидкости, возникающие при возможной одновременной работе потребителей.

Условия эксплуатации трубопроводной системы определяются рабочим диапазоном температур, свойствами рабочей жидкости (агрессивность, проникаемость, ядовитость, пожаро- и взрывобезопасность, склонность к облитерации, температура кипения, температура замерзания и т. д.), влагосодержанием и агрессивностью окружающей среды, допустимостью коррозии и т. п.

Важным требованием к трубопроводным системам является ограничение уровня гидравлических потерь.

Статические нагрузки, действующие на трубопроводные системы, кратко были описаны выше. Основными из них являются: внутреннее давление, монтажные напряжения и собственный вес трубопроводов и рабочей жидкости. При действии внутреннего давления в трубопроводе возникают радиальные, окружные и осевые нормальные напряжения. Напряжения от действия внутреннего давления в криволинейном трубопроводе существенно выше, чем в прямолинейном, и в значительной мере определяются радиусом кривизны и овальностью поперечного сечения [59, 62, 63]. Более подробно анализ напряжений в трубопроводе от действия внутреннего давления будет проведен ниже. При несовпадении контактирующих поверхностей трубопровода и подсоединительной арматуры на агрегате в процессе затяжки соединения возникают усилия, которые являются источниками изгибающих и скручивающих моментов, дополнительно нагружающих трубопровод. К такому же результату приводят радиальные и торцевые биения различных элементов соединений, а также перекосы и смещения трубопровода

относительно промежуточных опор. Другая группа причин возникновения монтажных напряжений состоит в том, что при затяжке гаек возникают скручивающие моменты от сил трения по торцам ниппеля накидной гайки, которые воспринимаются трубопроводом. Нагрузки от веса трубопровода и протекающей в нем рабочей жидкости становятся существенными в случаях больших пролетов между опорами и больших диаметров трубопроводов.

Основной расчетной нагрузкой при проверочном расчете на малоцикловую прочность является температурное воздействие, вызываемое колебаниями температуры. На основе вероятностной оценки условий эксплуатации в течение года задается температурная история, составленная из полных циклов с различными размахами температуры. Температурная история имеет вид таблицы 2.1.

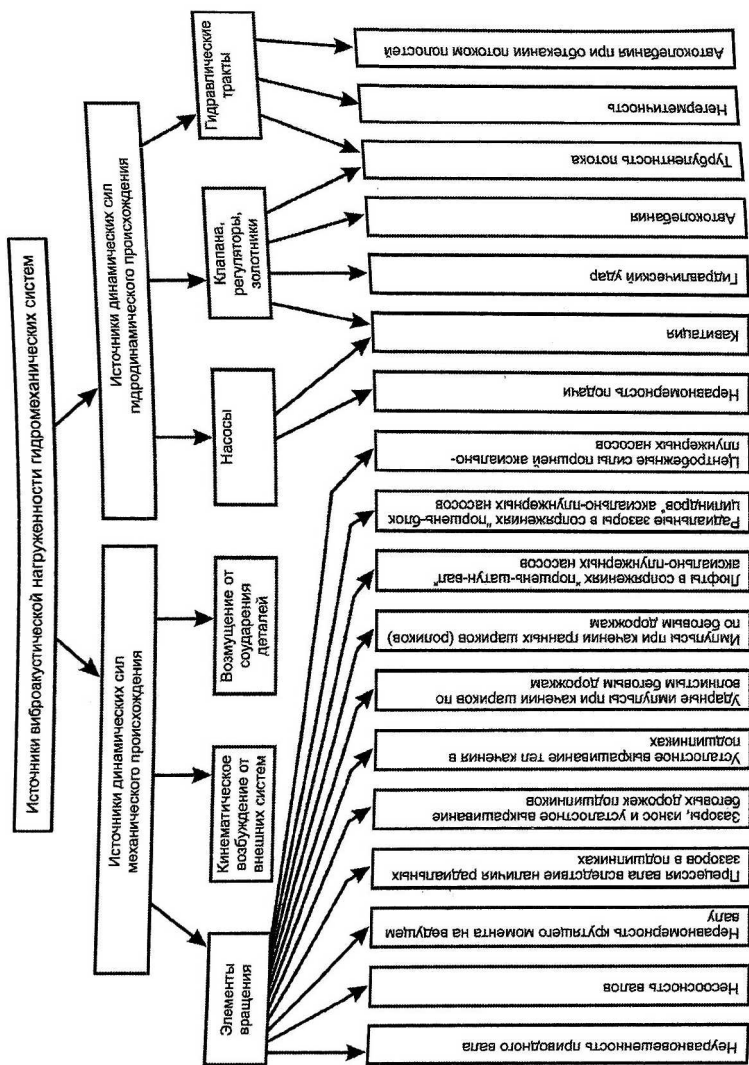
Таблица 2.1. Температурная история.

Интервал времени, τ_i	Перепад температуры, ΔT_i, °C	Количество циклов, N_{0i}
Каждый год	ΔT_1	N_{01}
Каждый месяц	ΔT_2	N_{02}
Каждая неделя	ΔT_3	N_{03}
Каждый день	ΔT_4	N_{04}
Каждый час	ΔT_5	N_{05}

Изменения температуры в пределах $\pm 0,025 \Delta T_1$ не учитываются.

Источники динамических нагрузок на трубопроводы можно свести к двум основным группам (см. рис. 2.2):

- источники динамических сил механического происхождения;
- источники динамических сил гидравлического происхождения.



Источники динамических сил механического происхождения вносят весьма значительный вклад в уровень виброакустической нагруженности трубопроводных систем. Основными причинами возникновения таких нагрузок являются вращающиеся элементы узлов и агрегатов гидромеханических систем, поступательно движущиеся соударяющиеся детали, а также кинематические воздействия на трубопроводы со стороны присоединенных агрегатов и систем [2, 26, 28, 37, 59, 66].

Основной причиной динамических сил гидравлического происхождения в трубопроводных системах является неравномерность подачи насосных агрегатов. Она присуща насосам практически всех типов и обусловлена самим механизмом перекачивания жидкости.

Дополнительным источником динамических сил гидравлического происхождения может являться кавитация в насосных агрегатах. Нестационарность кавитационной зоны и вызванные ее появлением вторичные течения жидкости приводят к значительным пульсациям давления в потоке. Результаты многочисленных экспериментальных исследований и опыт эксплуатации различного гидромеханического оборудования указывают на появление интенсивной вибрации в случаях развития кавитации [24].

Переходные процессы в трубопроводных системах, обусловленные, например, закрытием клапанов, переключением органов управления, окончанием или началом движения поршней силовых гидроцилиндров, вследствие инерционных свойств жидкости приводят к значительным колебаниям давления. Данные явления в технической литературе известны как гидроударные процессы [8, 59].

На криволинейных участках гидравлических магистралей от движения пульсирующего потока жидкости возникают центробежные и кориолисовы силы, перемещенные во времени. Эти силы обуславливают силовое нагружение трубопроводов, приводящее к их вибрации [27].

Одной из причин динамических сил гидравлического происхождения является неустойчивая работа агрегатов пневмогидродинамических систем: различного рода регуляторов расхода, редуccionных, предохранительных и обратных клапанов и т.п. устройств [53]. Характерная особенность колебаний рабочей среды, вызванных неустойчивостью агрегатов регулирования, состоит в том, что их амплитуда резко возрастает во времени и

при достаточно большой энергии стационарной составляющей потока может быстро достигнуть разрушительной величины [27, 39]. Данные колебания имеют природу автоколебаний в нелинейных системах.

Другим источником динамической нагруженности гидравлического происхождения в трубопроводных системах являются явления, связанные с понятием гидродинамического шума. Гидродинамический шум – это широкополосные колебания давления и скорости рабочей жидкости, вызванные локальными функциями [9, 25]. При высоких числах Рейнольдса, в пограничных слоях образуются повышенные уровни пульсаций скорости и давления, порождающие гидродинамический шум, который имеет акустическую и псевдозвуковую природу.

Еще одним источником динамической нагруженности в трубопроводных системах являются утечки жидкости или газа [75, 84]. При прохождении в месте утечки через узкую щель (отверстие) из области высокого давления в зону низкого давления поток жидкости или газа становится турбулентным. Возникающая турбулентность генерирует широкий пульсационный и вибрационный спектр (спектр белого шума).

При обтекании потоком жидкости полостей гидравлических трактов возможно возникновение автоколебаний параметров потока [71, 72, 74]. Такие колебания являются автоколебаниями, так как они возникают при отсутствии периодической внешней силы. Причина автоколебаний – срыв с передней кромки полости вихрей, взаимодействующих с объемом полости.

Следует отметить, что приведенный обзор источников виброакустической нагруженности трубопроводных систем не претендует на полноту изложения. Его целью было продемонстрировать многообразие механизмов возникновения повышенных виброакустических нагрузок с тем, чтобы в дальнейшем выделить те из них, которыми непосредственно связаны цели и задачи настоящей монографии.

Блок компоновки трубопроводной системы начинается с задания геометрии трубопроводной цепи, т. е. разработки предварительной монтажной схемы. При ее формировании из условия обеспечения заданной пропускной способности системы определяются внутренние диаметры трубопроводов. При их расчете необходимо стремиться к тому, чтобы максимальная скорость рабочей жидкости в напорных трубопроводах $v_{\text{нпн}}$ нахо-

дилась в пределах – $5...10 \text{ м/с}$, а в трубопроводах низких давлений ($p \leq 1,6 \text{ МПа}$) $v_{\text{низ}} = 1...3 \text{ м/с}$ [7, 30]. Такое различие допустимых значений скорости объясняется тем, что при движении жидкости с большой скоростью по трубопроводу низкого давления потеря давления на скоростной напор Δp , пропорциональная квадрату скорости жидкости, может оказаться соизмеримой с номинальным значением давления p . Таким образом, внутренний диаметр $d_{\text{вн}}$ трубопровода определяется соотношением:

$$d_{\text{вн}} \geq 2 \sqrt{\frac{Q}{\pi v_{\text{max}}}},$$

где Q - заданный объемный расход рабочей жидкости;

v_{max} - максимальная допустимая скорость жидкости в трубопроводе.

Следующим этапом работы алгоритма является выбор материала трубопроводов и способов их соединения. Выбору материала трубопроводов посвящена обширная специальная литература [3, 4, 21, 30, 59, 61]. Поэтому подробно на этом здесь останавливаться не будем и ограничимся лишь кратким анализом. В трубопроводных системах изделий общего машиностроения в случаях неагрессивных рабочих сред, невысоких температур, при отсутствии специальных требований к коррозионной стойкости и большому сопротивлению усталости для линий низкого давления, включая всасывающие и сливные трубопроводы, используются тонкостенные холоднотянутые или горячекатаные трубы из сталей марок Ст3, Ст5 и из стали 10, а для напорных линий – толстостенные трубы из стали 20. При работе в условиях высоких температур окружающей среды применяют специальные легированные стали. Так, например, для трубопроводов пароперегревателей, работающих в нагруженном состоянии при температуре до 500°C в течение весьма длительного времени (до 100000 ч) используют сталь 12МХ. Однако эта сталь не является коррозионностойкой. В случае особых требований по коррозионностойкости применяют трубопроводы из сталей 12Х18Н10Т и 12Х18Н12Т, работающие до температур 600°C . При необходимости работы в условиях еще более высоких температур применяют специальные трубопроводы из жаростойких

сталей 15Х6СЮ и 08Х18Н10 (с рекомендуемой максимальной температурой 800°С) и ХН78Т (с максимальной температурой 1100°С). Материалами, применяемыми для трубопроводов газотурбинных двигателей, обладающими наибольшей удельной прочностью, является сталь Х18Н10Т и титановые сплавы. Сталь Х18Н10Т с пределом прочности 500-600 МПа обеспечивает предел выносливости гладкого трубопровода в зависимости от качества наружной поверхности в пределах 230-270 МПа. Сталь пластична, гибка и развальцовка труб без подогрева не представляет никаких затруднений, материал хорошо сваривается и обладает высокими антикоррозионными свойствами. Являясь практически оптимальным материалом для трубопроводов внешних коммуникаций авиационного двигателя, сталь Х18Н10Т оказалась непригодной для трубопроводов топливоподающей системы форсажной камеры. Последнее связано с тем обстоятельством, что подача холодного керосина при включении форсажного режима в нагретый затурбинными газами трубопровод топливного коллектора форсажной камеры приводит к разложению керосина и выделению свободного углерода, диффундирующего во внутреннюю поверхность трубопровода. В результате образуется цементированный слой, который способствует хрупкому усталостному разрушению. Избежать подобного явления можно переходом к более жаропрочному и жаростойкому материалу, например, сплаву ВЖ98. Использование титановых трубопроводов имеет смысл там, где исчерпаны возможности минимизации массы трубопроводов из стали 12Х18Н10Т.

При конструировании трубопроводных систем нужно стремиться к сокращению числа разъемных соединений. К настоящему времени известно огромное число различных конструкций соединений трубопроводов, арматуры самых разнообразных форм (угольников, тройников, проходников и др.). Сформулируем требования, предъявляемые к оптимальному варианту соединения. Соединение, оптимальное по конструкции, должно быть герметичным как в стационарном, так и в нестационарном тепловом режиме, обеспечивать низкий уровень статических (монтажных) нагрузок, обладать высоким пределом выносливости и быть работоспособным в возможно большем интервале температур от минусовых до плюсовых, при высокой технологичности иметь малые габариты и массу. Проводя наиболее общий анализ, разъемные соединения можно разделить на два основных вида: фланцевые и с накидными гайками. На рис. 2.3

показаны варианты фланцевых соединений, применяемых в трубопроводах низкого давления. Уплотнительные прокладки из меди или алюминия (см. рис. 2.3) деформируются при затяжке болтового соединения, стягивающего фланцы. Для медных или алюминиевых прокладок удельное усилие, действующее на прокладку, равно пределу текучести материала. Толщина прокладок составляет 2,5...5,0 мм (большие значения для трубопроводов большого диаметра). В соединениях трубопроводов высокого давления (рис. 2.4) прокладка размещается в кольцевом объеме, образованном выступом и впадиной на соединяемых деталях. В варианте, показанном на рис. 2.4,а при соединении коротких трубопроводов, резьба может быть нарезана непосредственно на трубе. При больших длинах трубопроводов используют резьбовые штуцеры, привариваемые к трубам. Преимущество линзового соединения (см. рис. 2.4,в) – возможность небольшого относительного поворота соединяемых трубопроводов, что позволяет уменьшить величину монтажного напряжения. Такие соединения можно применять при давлениях до 70...100 МПа. Линза выполняется из того же материала, что и соединяемые трубопроводы.

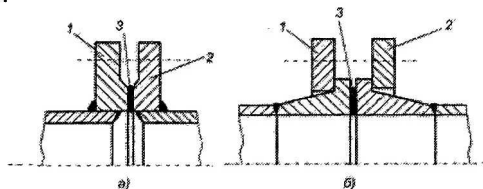


Рис. 2.3 - Фланцевые соединения трубопроводов низкого давления: 1, 2 – фланцы; 3 – уплотнительные прокладки.

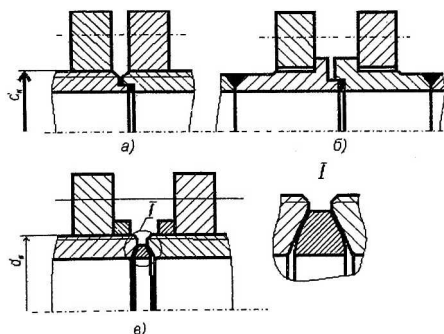


Рис. 2.4 - Фланцевые соединения трубопроводов высокого давления: а) с установкой фланцев на резьбе; б) с установкой на приваренных штуцерах (переходниках); в) линзовое соединение.

Соединения с накидной гайкой можно разделить на четыре группы:

- соединение с формой уплотнительных поверхностей «плоскость-плоскость»;
- соединение с формой уплотнительных поверхностей «конус-конус»;
- соединение с формой уплотнительных поверхностей «сфера-конус»;
- соединение с врезающимися кольцами.

По сравнению с фланцевым, соединение с накидной гайкой имеет меньшие размеры и существенно меньшую массу, особенно при малых диаметрах соединяемых трубопроводов. Так, при $d_n = 14 \text{ мм}$ диаметральный размер, осевой размер и масса соответственно в 2; 1.6 и 10 раз меньше, чем у фланцевого соединения трубопроводов того же диаметра.

Конструкция соединения с накидной гайкой с формой уплотнительных поверхностей «плоскость-плоскость», используемого при давлении до 32 МПа, показана на рис. 2.5.

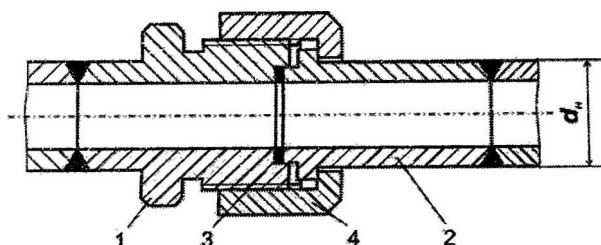


Рис. 2.5 Конструкция соединения с накидной гайкой с формой уплотнительных поверхностей «плоскость – плоскость»:

- 1 – штуцер; 2 – ниппель; 3 – уплотнительная прокладка;
4 – накидная гайка.

К соединениям с формой уплотнительных поверхностей «конус-конус» относятся соединения по наружному конусу (рис. 2.6), где уплотнение обеспечивается металлическим контактом конических поверхностей раструба самого трубопровода и штуцера. Вследствие некоторого различия в углах конусов штуцера и раструба обеспечивается линейный контакт двух конических поверхностей.

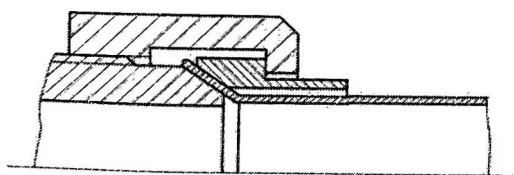


Рис. 2.6 – Конструкция соединения с накидной гайкой с формой уплотнительных поверхностей «конус-конус».

Соединение с использованием контакта сферического элемента с внутренней конической поверхностью штуцера широко известно как соединение по внутреннему конусу (рис. 2.7). Оно во многом исключает недостатки соединения по наружному конусу, так как при использовании ниппеля в виде полной сферы монтажные погрешности, и в частности, скрещивание осей штуцера, несоосность в некоторых пределах здесь допускаются и величина их определяется конструктивными возможностями элементов соединения.

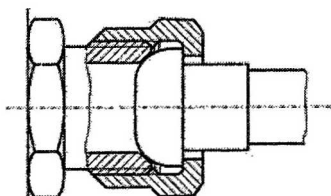


Рис. 2.7 – Конструкция соединения с накидной гайкой с формой уплотнительных поверхностей «конус-сфера».

В условиях эксплуатации гидроприводов мобильных машин хорошо зарекомендовала себя конструкция соединения трубопроводов с врезающимися кольцами (рис. 2.8). При затяжке накидных гаек 4 кольца 3 под действием конусных поверхностей в штуцере 5 обжимаются вокруг труб, чем и достигается герметичность соединения.

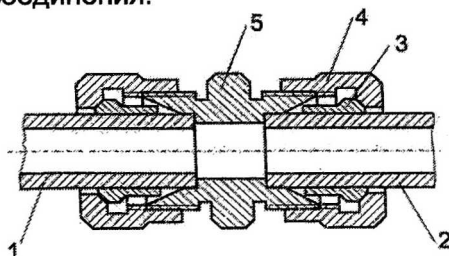


Рис. 2.8 – Конструкция соединения с накидной гайкой и врезающимися кольцами:

1, 2 – соединяемые трубопроводы; 3 – врезающееся кольцо; 4 – накидная гайка; 5 – штуцер.

Следующим этапом работы алгоритма является расчет гидравлических потерь в трубопроводной системе. В ряде случаев, когда при проектировании трубопроводной системы в явном виде не задаются величины допустимых гидравлических потерь, он не проводится. Это оправдано при учете и удовлетворении представленных выше рекомендаций по максимальной скорости рабочей жидкости. Однако для полноты анализа подобный расчет проводить целесообразно. Его результаты дают оценку потерь мощности потока рабочей жидкости в трубопроводной системе.

Гидравлические потери зависят от формы, размеров и шероховатости трубопровода, от режима и скорости течения и вязкости жидкости. Гидравлические потери приблизительно пропорциональны квадрату скорости:

$$\Delta p = \zeta \rho \frac{v_{cp}^2}{2},$$

где ζ - коэффициент сопротивления.

Гидравлические потери обычно подразделяют на два вида: местные потери и потери на трение. Местные потери энергии обусловлены так называемыми местными гидравлическими сопротивлениями, т.е. местными изменениями формы и размеров трубопроводной арматуры, вызывающими деформацию потока. Потери на трение, или потери по длине, - это потери энергии, которые возникают в прямых трубопроводах постоянного сечения, т.е. при равномерном течении, и возрастают пропорционально длине трубопровода:

$$\Delta p_{mp} = \rho \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2},$$

где λ - коэффициент потерь на трение.

Коэффициент потерь на трение зависит от режима течения жидкости. Для ламинарного режима он определяется [67]:

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Однако более часто в трубопроводных системах встречается турбулентный режим течения рабочей жидкости. Это иллюстрируется рис. 2.9. На нем изображены зависимости внутреннего диаметра трубопровода от температуры для различных жидкостей и различных скоростей их течения. Эти кривые явля-

ются граничными, разделяющими турбулентный и ламинарный режимы течения. В трубопроводах, диаметры которых при заданных температуре и скорости рабочей жидкости меньше, чем на соответствующей граничной кривой, реализуется ламинарный режим течения. При диаметрах больших, чем на соответствующей граничной кривой – турбулентный режим течения. Анализ графиков рис. 2.9 показывает, что при любых положительных температурах среды в трубопроводных системах практически всегда реализуется турбулентный режим течения. Исключения составляют трубопроводы с вязкими жидкостями, например, с маслом АМГ-10, при малых скоростях потока (т. е. в трубопроводах низкого давления). Однако, поскольку основные сложности с надежностью характерны для напорных трубопроводов, в дальнейшем будем считать, что в них всегда реализуется турбулентный режим течения.

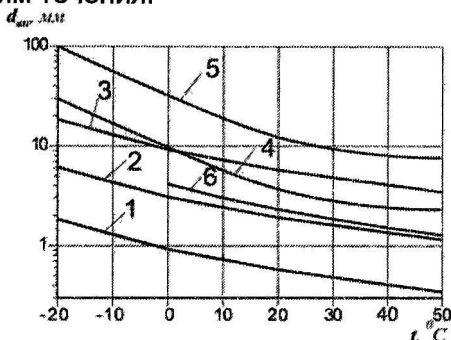


Рис. 2.9 – Границы раздела ламинарного и турбулентного режимов течения жидкости для различных диаметров трубопроводов, температур и скоростей рабочей среды:

1 – керосин, $V = 10$ м/с; 2 – керосин, $V = 3$ м/с; 3 – керосин, $V = 1$ м/с;

4 – масло АМГ-10, $V = 10$ м/с; 5 – масло АМГ-10, $V = 1$ м/с;

6 – вода, $V = 1$ м/с;

При турбулентном режиме течения жидкости коэффициент потерь на трение определяется формулой Альтшуля [38]:

$$\lambda = \frac{1}{3,24 \left[\lg \frac{Re}{Re k' / d + 7} \right]^2}$$

где k' – размер, пропорциональный абсолютной шероховатости [38].

Местные гидравлические сопротивления в трубопроводах можно разделить на следующие группы и подгруппы:

- 1) внезапное или плавное расширение;
- 2) внезапное или плавное сужение;
- 3) внезапный или плавный поворот.

Подробные соотношения для расчета гидравлических потерь в таких местных сопротивлениях приведены в специальной литературе (см., например [38, 67]).

В случае, если рассчитанные гидравлические потери в трубопроводной системе меньше допустимых по условиям технического задания на проектирование, то переходим к прочностным расчетам толщины стенки трубопроводов. В противном случае необходимо увеличить внутренние диаметры трубопроводов и повторить заново расчет гидравлических потерь.

Расчет толщины стенки трубопроводов является одним из основных этапов блока расчета на статическую прочность. Исходными данными для такого расчета служат:

- внутреннее давление в трубопроводе p ;
- внутренний диаметр трубопровода $d_{вн}$;
- допустимое напряжение $[\sigma]$ определяемое материалом трубопровода.

Расчетная толщина стенки трубопровода δ_p определяется по формуле [45, 51]:

$$\delta_p = \frac{pd_{вн}}{2\varphi[\sigma] - p}, \quad (2.1)$$

где φ - коэффициент прочности.

Коэффициент прочности принимается равным наименьшему из значений φ_d и φ_w :

$$\varphi = \min[\varphi_d; \varphi_w],$$

где φ_d - коэффициент прочности элемента с отверстием;

φ_w - коэффициент прочности сварного шва.

Номинальная толщина стенки δ определяется по формуле:

$$\delta \geq \delta_p + C. \quad (2.2)$$

Величина δ округляется до ближайшей большей толщи-

ны по стандартам и техническим условиям.

Величина прибавки C в соотношении (2.2) определяется по формуле:

$$C = C_1 + C_2,$$

где C_1 - прибавка на коррозию и износ, принимаемая по нормам проектирования или отраслевым нормативным документам;

C_2 - технологическая прибавка, принимаемая равной минусовому отклонению толщины стенки по стандартам и техническим условиям.

Соотношение (2.1) применимо при определении толщины стенки при расчете на статическую прочность прямолинейных трубопроводов, а также криволинейных трубопроводов, воздействие динамических нагрузок на которые пренебрежимо мало и радиус кривизны R которых удовлетворяет соотношению:

$$R \geq 1,7(d_{\text{вн}} - \delta).$$

В случаях, когда влиянием динамических нагрузок на прочность криволинейных трубопроводов пренебречь нельзя или когда радиус кривизны достаточно мал и не удовлетворяет соотношению (2.3), при определении толщины стенки вводится поправочный коэффициент k :

$$\delta_{pI} = k\delta_p, \quad (2.3)$$

где δ_p определяется по выражению (2.1). Соотношение (2.2) остается справедливым и в этом случае.

Криволинейные трубопроводы, как правило, имеют искаженное, некруглое (овальное) поперечное сечение, которое возникает при пластическом деформировании трубопровода в гибочном приспособлении.

Коэффициент k в соотношении (2.3) для таких трубопроводов зависит от относительной овальности a_0 , расчетной толщины стенки δ_p и внутреннего диаметра трубопровода $d_{\text{вн}}$. Относительная овальность определяется по соотношению (см. рис. 2.10):

$$a_0 = 200 \frac{d_{\text{вн max}} - d_{\text{вн min}}}{d_{\text{вн max}} - d_{\text{вн min}}}.$$

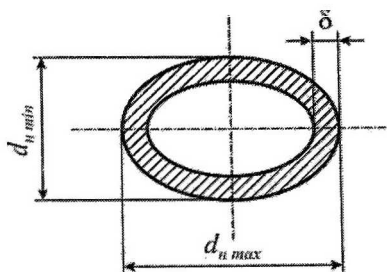


Рис. 2.10 – Овализация поперечного сечения трубопровода после гибки.

Значения коэффициента k приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Значения поправочного коэффициента k .

δ_p	Значение k для a_0				
$d_{en} + \delta_p$	20	16	12	8	4 и менее
0,02	2,05	1,75	1,45	1,20	1,00
0,03	1,85	1,60	1,35	1,10	1,00
0,05	1,55	1,40	1,20	1,00	1,00
0,07	1,35	1,25	1,10	1,00	1,00
0,09	1,25	1,10	1,00	1,00	1,00
0,11	1,15	1,05	1,00	1,00	1,00
0,13	1,10	1,00	1,00	1,00	1,00
0,15	1,05	1,00	1,00	1,00	1,00
0,17	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

При определенной по соотношению (2.2) толщине стенки рассчитываются напряжения в трубопроводе от действия внутреннего давления:

$$\sigma = \frac{kP(d_{en} + \delta + C)}{2\phi(\delta - C)}, \quad (2.4)$$

где $k = 1$ для прямолинейных трубопроводов, криволинейных трубопроводов с большими радиусами кривизны, для трубопроводов, динамической нагруженностью которых можно пренебречь.

Для криволинейных трубопроводов с относительно малыми радиусами кривизны, динамической нагруженностью которых пренебречь нельзя, коэффициент k выбирается из таблицы 2.2.

Формула (2.4) является основным соотношением проверочного расчета на статическую прочность от действия внутреннего давления.

На следующем этапе работы алгоритма определяются запасы по статической прочности:

$$n = \frac{[\sigma]}{\sigma}$$

Кроме того, если трубопроводы имеют достаточно большие диаметры и значительные расстояния между опорами, определяется допустимое расстояние между опорами (называемое пролетом) и сравнивается с фактическими значениями из предварительной монтажной схемы. При этом различают средние и крайние пролеты. Допустимая величина среднего пролета $[l_{cp}]$ определяется как наименьшее значение из двух, определенных по формулам:

$$[l_{cp}]_1 = (d_{\text{вн}} + \delta) \sqrt{\frac{3,75 \pi \delta \varphi_{\text{св}} (1,1[\sigma] - \sigma_{\text{ур}})}{g}},$$

$$[l_{cp}]_2 = \sqrt[3]{\frac{12 E I i}{g y (1 - y) (1 - 2 y)}}, \quad (2.5)$$

$$[l_{cp}] = \min([l_{cp}]_1, [l_{cp}]_2).$$

В соотношениях (2.5) обозначено:

$\varphi_{\text{св}}$ - коэффициент снижения прочности сварного соединения при действии изгибающего момента;

$\sigma_{\text{ур}}$ - продольное (осевое) напряжение от внутреннего давления;

g - вес трубопровода с теплоизоляцией и рабочей средой на единицу длины;

E - модуль упругости материала трубопровода;

I - момент инерции поперечного сечения при изгибе;

i - уклон (при его наличии принимается не менее 0,002);

y - безразмерный коэффициент, определяемый из условия:

$$\frac{y(3y-1)}{2} - \frac{0,02(d_{\text{вн}} + 2\delta)(1-2y)}{i} \sqrt[3]{\frac{gy(1-y)(1-2y)}{12Ei}} = 0 \quad (2.6)$$

При любых значениях i , отличных от нуля, уравнение (2.6) имеет единственное решение для y в диапазоне $[0,33; 0,5]$, которое может быть получено численными методами.

Величина σ_{yp} определяется по формуле:

$$\sigma_{yp} = \frac{pd_{\text{вн}}}{4(d_{\text{вн}} + \delta)\delta\varphi}.$$

Если уклона нет, т. е. $i = 0$, то

$$[l_{cp}]_2 = \sqrt[4]{\frac{7,68d_n EI}{g}}.$$

Допустимая величина крайнего пролета пролета составляет 80% среднего. Если запасы по статической прочности не соответствуют заданным значениям (меньше их), то производится увеличение толщины стенки трубопровода с последующим проверочным расчетом на статическую прочность.

Если длина пролетов между опорами трубопровода на предварительной монтажной схеме больше величины, определенной по формулам (2.5), то производится установка дополнительных опор.

После того, как запасы по статической прочности будут приведены в соответствие с заданными величинами, осуществляется переход к блоку поверочного расчета на малоцикловую прочность от температурных воздействий (см. рис. 2.1). На основании температурной истории (см. таблицу 2.1) рассчитывается количество циклов нагружений за весь срок службы трубопроводной системы. Далее определяется размах напряжений для цикла с наибольшим изменением температуры:

$$\Delta\sigma = \sigma \left(1 - \frac{E_{\text{раб}}}{E_{\text{хол}}} \right),$$

где $E_{\text{раб}}$ - модуль упругости материала трубопровода при максимальной рабочей температуре;

$E_{\text{хол}}$ - модуль упругости материала трубопровода при температуре окружающей среды.

Амплитуда приведенного местного условно упругого напряжения для цикла с наибольшей температурой $T_{раб}$ определяется по формулам:

$$\sigma_{aF} = \frac{\Delta\sigma \cdot k_{\sigma}}{2\varphi_s} \text{ при } \Delta\sigma \leq 2(\sigma_{раб})_{0,2},$$

$$\sigma_{aF} = \frac{\Delta\sigma \cdot k_F}{2\varphi_s} \text{ при } \Delta\sigma > 2(\sigma_{раб})_{0,2},$$

где k_{σ} - коэффициент концентрации напряжений, принимаемый равным наибольшему из двух значений:

$$k_{\sigma} = \max(k_m; k_i);$$

k_m - коэффициент концентрации напряжений изгиба;

k_i - коэффициент концентрации окружных напряжений;

φ_s - коэффициент снижения циклической прочности сварного шва. При отсутствии данных по коэффициенту снижения циклической прочности сварного шва можно принимать $\varphi_s = 0,8$. При отсутствии сварного шва $\varphi_s = 1$.

k_F - коэффициент концентрации напряжений, учитывающий упругопластические деформации:

$$k_F = \frac{(\sigma_{раб})_{0,2} \left[1 + 0,25 \left(\frac{k_{\sigma}(\Delta\sigma)}{(\sigma_{раб})_{0,2}} \right)^2 \right]}{\Delta\sigma};$$

$(\sigma_{раб})_{0,2}$ - предел текучести материала трубопровода при рабочей температуре.

Амплитуда напряжений для циклов с меньшей температурой, чем $T_{раб}$, рассчитывается по формуле:

$$(\sigma_{aF})_i = \frac{\Delta T_i}{\Delta T_1} (\sigma_{aF})_1.$$

Допустимое число полных расчетных циклов $(\sigma_{aF})_i$ для элементов трубопроводных систем из углеродистых и легированных неаустенитных сталей определяется по формулам:

$$[N]_i = \left(\frac{9,36 \cdot 10^9}{(\sigma_{aF})_i - 6,45 \cdot 10^7} \right)^2; \quad (2.7)$$

$$[N]_i = \left(\frac{5,92 \cdot 10^9}{(\sigma_{aF})_i - 1,29 \cdot 10^8} \right)^2.$$

При $(\sigma_{aF})_i > 129 \text{ МПа}$ $[N]_i$ определяется по обеим формулам и за расчетное принимается наименьшее из двух полученных значений.

При $64,5 \text{ МПа} < (\sigma_{aF})_i \leq 129 \text{ МПа}$ $[N]_i$ рассчитывается по формуле (2.7). При $(\sigma_{aF})_i < 64,5 \text{ МПа}$ принимается $[N]_i = 10^6$.

Для элементов трубопроводных систем из аустенитных сталей допускаемое число полных расчетных циклов определяется по формулам:

$$[N]_i = \left(\frac{13 \cdot 10^9}{(\sigma_{aF})_i - 5 \cdot 10^7} \right)^2; \quad (2.8)$$

$$[N]_i = \left(\frac{8,21 \cdot 10^9}{(\sigma_{aF})_i - 10^8} \right)^2.$$

При $(\sigma_{aF})_i > 100 \text{ МПа}$ $[N]_i$ определяется по обеим формулам и за расчетное принимается наименьшее из двух полученных значений. При $50 \text{ МПа} < (\sigma_{aF})_i \leq 100 \text{ МПа}$ $[N]_i$ рассчитывается по формуле (2.8). При $(\sigma_{aF})_i < 50 \text{ МПа}$ принимается $[N]_i = 10^6$.

Далее определяется коэффициент запаса по малоцикло-вой прочности при температурных воздействиях:

$$n_F = \frac{1}{\sum_{i=1}^k \frac{N_{\theta i}}{[N]_i}},$$

где k - общее число типов циклов.

Коэффициент запаса по малоцикловой прочности при температурных воздействиях сравнивается с его заданным значением. Если коэффициент запаса получается меньше заданного, производится увеличение толщины стенки трубопроводов с последующим повторением поверочного расчета малоцикловой прочности от температурных воздействий.

При удовлетворении условий по запасам малоцикловой прочности следующим блоком алгоритма является блок поверочного расчета на циклическую прочность от воздействия виброакустических нагрузок. Основной этап этого блока связан с расчетом виброакустических характеристик трубопроводной системы. Однако сейчас на этом этапе подробно останавливаться не будем, так как математическая модель, лежащая в его основе будет изложена в разделе 4. Подробный алгоритм этапа расчета виброакустических характеристик также рассмотрен в разделе 4. Здесь же кратко остановимся лишь на выходных данных этапа.

Выходными данными этапа расчета виброакустических характеристик трубопроводной системы является распределение во времени и в пространстве (по длине осевой линии трубопровода) следующих динамических и прочностных характеристик:

- колебаний давления и скорости рабочей среды;
- вибропараметров (вибросмещения, виброскорости и виброускорения);
- компонент объемного напряженного состояния трубопровода;
- эквивалентных напряжений.

Определение запасов по сопротивлению усталости ведется на основе анализа постоянных напряжений, полученных в результате расчета на статическую прочность, и эквивалентных переменных напряжений из расчета виброакустических характеристик трубопроводной системы. Для определения запасов по сопротивлению усталости используется диаграмма предельных амплитуд [62]. Если данные запасы получаются больше заданных, то работа алгоритма завершается оформлением конструк-

торской документации на трубопроводную систему, отвечающую заданным показателям прочности.

Если же в результате анализа получается, что запасы по сопротивлению усталости ниже заданных, то выполнение алгоритма продолжается в блоке мероприятий по снижению виброакустической нагруженности трубопроводной системы. При этом в первую очередь необходимо разобраться, что же является основной причиной снижения прочности трубопроводной системы:

- повышенный уровень пульсаций рабочей среды;
- неудачная компоновка трубопроводной системы, при которой совпали вынужденные и собственные частоты колебаний;
- высокий уровень кинематического нагружения со стороны присоединенных агрегатов и систем.

Если в результате анализа будет выявлено, что одной из основных причин снижения прочности является повышенный уровень пульсаций рабочей среды, то комплекс мероприятий по снижению виброакустической нагруженности следует начинать с уменьшения амплитуд колебаний давления. Основные подходы к решению данной задачи изложены в работах [10, 14, 15, 73]. Здесь же мы лишь кратко повторим их.

В первую очередь при снижении пульсационной нагруженности трубопроводной системы следует обратить внимание на возможность уменьшения пульсационной производительности источника колебаний (в большинстве практических случаев таким источником является насосный агрегат). Этот метод позволяет существенно снизить пульсационную нагруженность в случае, когда возможно вмешаться в организацию рабочего процесса источника, изменить его конструкцию или полностью заменить агрегат, генерирующий динамические нагрузки, на более малозумный. Однако это в большинстве случаев нежелательно или недопустимо, так как связано со значительной переконфигурацией гидромеханической системы, большими материальными и временными затратами. Кроме того, как уже отмечалось выше, изменение конструкции источника, например, насоса, помимо снижения пульсационной производительности может сопровождаться другими нежелательными эффектами – уменьшением напорности, КПД, надежности, увеличением утечек. Тем не менее, если имеются резервы снижения пульсационной производительности источника колебаний, то их следует использовать в первую очередь. В этом случае после проведения ком-

плекса мероприятий по снижению пульсационной нагруженности работа алгоритма возвращается к этапу расчета виброакустических характеристик трубопроводной системы.

Проделанный анализ может показать, что причиной повышенного уровня пульсаций давления являются резонансные колебания рабочей среды в гидромагистрالي. Эта проблема решается путем изменения геометрии трубопроводной системы – изменением длин и диаметров участков трубопроводов. Такой подход наиболее часто используется в гидромеханических системах, работающих подавляющее время на одном и там же стационарном режиме. В случае же, когда режимы работы гидромеханической системы часто изменяются, такой метод эффективен лишь для исключения резонансов на определенных режимах. Поэтому в подобных системах данный подход применяется достаточно редко. Если же в качестве метода борьбы с повышенными уровнями колебаний рабочей среды применяется метод частотной отстройки от резонансов, то после изменения конфигурации трубопроводной системы работа алгоритма возвращается к этапу расчета гидравлических потерь.

Эффективным методом повышения прочностных характеристик и снижения виброакустической нагруженности трубопроводных систем в случаях существенных уровней пульсаций рабочей среды является применение гасителей колебаний давления. Отличающиеся в большинстве своем конструктивной простотой, гасители практически не усложняют компоновки системы, обеспечивая значительное снижение как амплитуд колебаний давления рабочей среды, так и вибрации механической подсистемы. Основной характеристикой проектируемого гасителя является его эффективность, оцениваемая по вносимому затуханию [20, 69] при известных характеристиках источника колебаний и нагрузки, присоединенной к выходу устройства. Другой группой параметров, отраженных в техническом задании на проектирование гасителя, являются габаритные характеристики. Как правило, чем больше габариты гасителя, тем большей его эффективности по вносимому затуханию можно достичь. Однако на практике габариты гасителя ограничены условиями компоновки трубопроводной системы, его допустимыми массовыми характеристиками, металлоемкостью, стоимостью. Еще одним важным параметром гасителя являются вносимые им в систему гидравлические потери. При этом известно, что гидравлические потери гасителя определяются конфигурацией инерционного

канала и тесно связаны с его индуктивностью. Чем больше индуктивность инерционного канала, тем больше, как правило, эффективность гасителя по вносимому затуханию, но и тем больше гидравлические потери на нем. Если в техническом задании на проектирование не оговорен уровень допустимых гидравлических потерь, то после выбора схемы, расчета конструктивных параметров и эффективности гасителя работа алгоритма возвращается к этапу расчета гидравлических потерь трубопроводной системы, но теперь с уже входящим в ее состав гасителем колебаний. Однако более распространенным является случай, когда в техническом задании на проектирование гасителя уже учтены требования по гидравлическим потерям, исходя из допустимых гидравлических потерь в трубопроводной системе в целом. В этом случае решается задача оптимизации – обеспечение максимально возможной эффективности гасителя колебаний при заданном уровне гидравлических потерь. Следует отметить, что проектирование гасителя колебаний давления всегда связано с решением оптимизационных задач, где оптимизируемыми параметрами являются схема гасителя, его конструктивное исполнение и конструктивные параметры, габаритно-массовые характеристики, гидравлические потери, место установки в системе и т. д. Возвращаясь к вопросу о гидравлических потерях уточним, что, если ограничения по ним отражены в требованиях технического задания, то после расчета и проектирования гасителя колебаний работа алгоритма возвращается не к этапу расчета гидравлических потерь, а к этапу расчета виброакустических характеристик трубопроводной системы, что существенно упрощает трудоемкость выполнения (реализации) алгоритма.

Если анализ повышенной виброакустической нагруженности проектируемой трубопроводной системы показывает, что основной ее причиной является совпадение частот возмущающих сил с собственными частотами механической подсистемы, т. е. резонансы механической подсистемы, то необходимым мероприятием является отстройка от резонансов, что может быть реализовано путем установки дополнительных опор. После этого работа алгоритма возвращается в этап расчета виброакустических характеристик.

В случаях, когда основной причиной повышенных виброакустических нагрузок на элементы трубопроводной системы является кинематическое возбуждение со стороны присоединен-

ных агрегатов и систем, или когда возможности по снижению пульсационной нагруженности гидросистемы исчерпаны, целесообразно применение вибродемпферов. Подробно решение подобной задачи рассмотрено в специальной литературе [2, 14, 15, 37, 58, 59]. Если основным источником виброакустической нагруженности является кинематическое возбуждение через опоры трубопроводов, то широко применяются методы виброизоляции [2, 37, 58, 59, 66]. После разработки комплекса мероприятий по применению вибродемпферов и виброизоляторов работа алгоритма продолжается этапом повторного расчета виброакустических характеристик трубопроводной системы.

Таким образом, в настоящем разделе приведено описание разработанных алгоритма и методики проектирования трубопроводной системы с учетом комплексной взаимосвязи статических, динамических процессов и прочностных характеристик. В основе этого лежит проведенное авторами обобщение большого количества теоретических и экспериментальных данных, полученных как лично, так и взятых из обширной литературы по данному вопросу. При этом разработанной методикой предполагалось охватить как можно более широкий класс трубопроводных систем. Однако, она применима не ко всем возможным случаям использования трубопроводов. Во-первых, методика ограничена трубопроводами достаточно малых диаметров, когда диаметр существенно (более чем на порядок) меньше длины волны в рабочей среде; когда влияние собственного веса трубопровода и транспортируемой в нем жидкости на прочность трубопроводов существенно меньше влияния динамических и статических нагрузок от внутреннего давления; когда внутренние напряжения в поперечном сечении по углу поворота вокруг нейтральной оси изменяются незначительно. Во-вторых, методика неприменима к трубопроводам бесканальной прокладки в грунте, трубопроводам, проложенным глубоко под водой. Классом трубопроводов, на которые ориентирована методика, являются авиационные трубопроводы, трубопроводы ракетных двигателей и ракетоносителей, трубопроводы мобильного транспорта, технологические трубопроводы промышленных производств.

Важным блоком в методике, разработанным авторами является блок поверочного расчета на циклическую прочность от воздействия виброакустических нагрузок, в основе которого лежит математическая модель виброакустики трубопроводных систем.

Глава 3. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРОАКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРУБОПРОВОДОВ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ ANSYS

В работе [46] приведена классификация видов вибрации трубопроводов. Поскольку и в ней, и в настоящей работе основное внимание уделено трубопроводам достаточно небольших диаметров ($d_{вн} < 200$ мм), то и рассматриваются преимущественно радиальные и поперечные колебания. При этом спектр решаемых задач ограничивается случаями снижения надежности трубопроводных систем вследствие поперечных колебаний. Радиальные вибрации принимаются пренебрежимо малыми. Это справедливо при относительно невысоких частотах колебаний – частотах, существенно меньших частоты первого радиального резонанса. Соотношения, определяющие правомочность этого допущения, приведены в [46]. В них отражены взаимосвязи между внутренним диаметром, толщиной стенки трубопровода и частотами колебаний, когда можно пренебречь радиальной вибрацией. Несмотря на пренебрежение радиальной вибрацией, ее нельзя полностью исключить из рассмотрения, так как изменения формы поперечного сечения трубопровода помогают объяснить проявления виброакустической нагруженности трубопроводов, причины интенсификации внутренних напряжений в криволинейных трубопроводах.

В [46] была разработана математическая модель поперечных колебаний прямолинейных участков трубопровода с пульсирующим потоком рабочей жидкости. Была сформулирована аналитическая модель, решение которой осуществлялось численно на базе использования метода Бубнова-Галеркина.

Однако на практике большинство трубопроводов имеют криволинейную форму осевой линии. Поэтому следующим этапом развития методов математического моделирования виброакустических характеристик трубопроводных систем явилось формирование конечноэлементных моделей виброакустики трубопроводов на базе использования программного комплекса ANSYS [33, 34, 35].

Исследование виброакустических характеристик гидромеханических систем в программном комплексе ANSYS осуществляется с использованием модуля Multiphysics. Для анализа силового и кинематического возбуждения используются модули

Harmonic, Transient; для исследования собственных частот и форм колебаний – Modal. Моделирование виброакустического взаимодействия осуществляется процедурой Fluid Structure Interaction [35].

В настоящей работе результаты моделирования приведены на примере участка трубопровода коленообразной формы (рис. 3.1), что является частным случаем разработанного подхода.

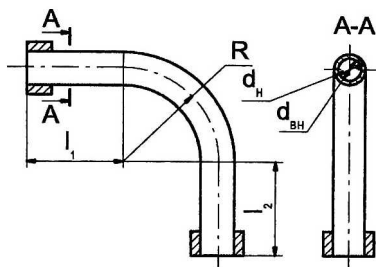


Рис. 3.1 – Форма и основные геометрические характеристики моделируемого трубопровода

Основные допущения к разработанной модели:

- отсутствие вязкости в жидкости;
- малый средний расход жидкости;
- постоянство среднего уровня давления и плотности;
- адиабатичность волновых процессов;
- постоянство массовых коэффициентов, коэффициентов демпфирования и жесткости гидравлической и механической подсистем;
- временная неизменность пространственной области.

Задача решается в трехмерной постановке. При этом для моделирования жидкости используется восьмиузловой пространственный элемент FLUID30 [33]. Этот элемент предназначен для описания акустических свойств жидкой среды, а также ее взаимодействия с упругой конструкцией; обычно применяется для исследования звуковых волн и различных динамических процессов. Узлы используемого элемента имеют четыре степени свободы: перемещения по координатам X , Y , Z и давление. Математическое описание элемента этого типа базируется на дискретизации волнового уравнения [33].

Для моделирования стенки трубопровода, в зависимости от сложности ее пространственной конфигурации и характера решаемой задачи, используются различные пространственные элементы. Среди них самый распространенный – восьмиузловой пространственный элемент SOLID45. Этот элемент используется для трехмерного моделирования деформируемых твер-

дых тел. Его узлы имеют три степени свободы: перемещения по осям X , Y , Z . Математическое описание данного элемента базируется на дискретизации уравнения динамики деформируемого твердого тела.

Для моделирования мест резкого изменения геометрической формы трубопроводной конструкции (например, в области тройниковых соединений или локальных деформаций стенок) применяется десятиузловой тетраэдральный (с промежуточными узлами на ребрах) пространственный элемент с неплоскими гранями SOLID92. Степени свободы узлов и математическое описание данного элемента аналогично SOLID45.

Более точным вариантом восьмиузлового пространственного элемента SOLID45 является двадцатиузловой (с промежуточными узлами на ребрах) пространственный элемент с неплоскими гранями SOLID95 [33]. Данный элемент применяется для моделирования участков трубопроводной системы, на которых возникающее при виброакустических нагрузках напряженно-деформируемое состояние носит существенно объемный характер, а также в местах резкого изменения в пространстве направлений градиентов напряжений и деформаций. Степени свободы узлов и математическое описание данного элемента аналогичны SOLID45.

Пространственная область трубопровода разбивается сеткой конечных элементов. Расчеты производятся с использованием нерегулярной (рис. 3.2) и регулярной (рис. 3.3) сеток. Применение нерегулярной сетки (элементы SOLID92 и FLUID30) может упростить процесс разбивки, незначительно повысить точность, но при этом сильно увеличивается время решения. Поэтому в дальнейших вычислительных экспериментах пространственная область разбивается регулярной сеткой (элементами SOLID45 и FLUID30) везде, где это возможно. Исключение составляют области сложной формы (тройники, сочленения нескольких трубопроводов, другие фасонные элементы), где применение регулярной сетки сопряжено со значительными временными затратами или практической невозможностью ее построения.

Далее задаются граничные условия закрепления трубопровода (опоры). Моделирование взаимодействия жидкости и податливой стенки трубопровода в программном комплексе ANSYS осуществляется при помощи процедуры Fluid Structure Interaction (см. рис. 3.4).

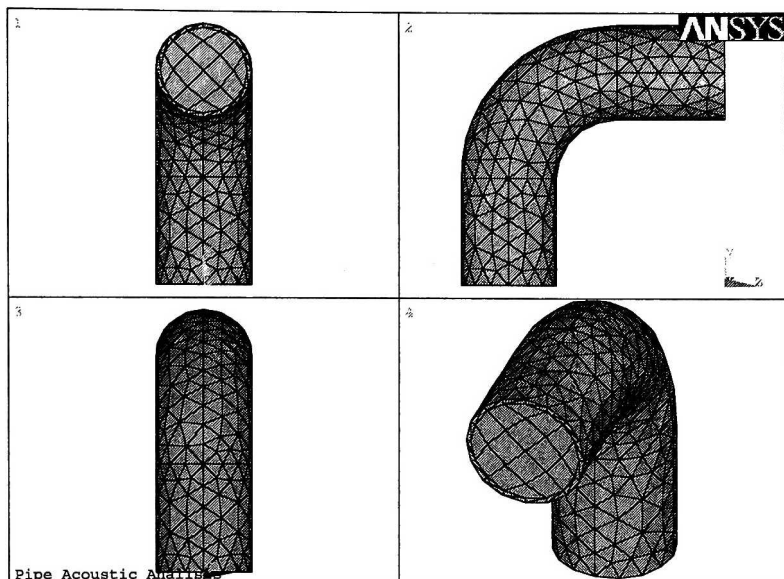


Рис. 3.2 – Разбивка модели трубопровода нерегулярной сеткой.

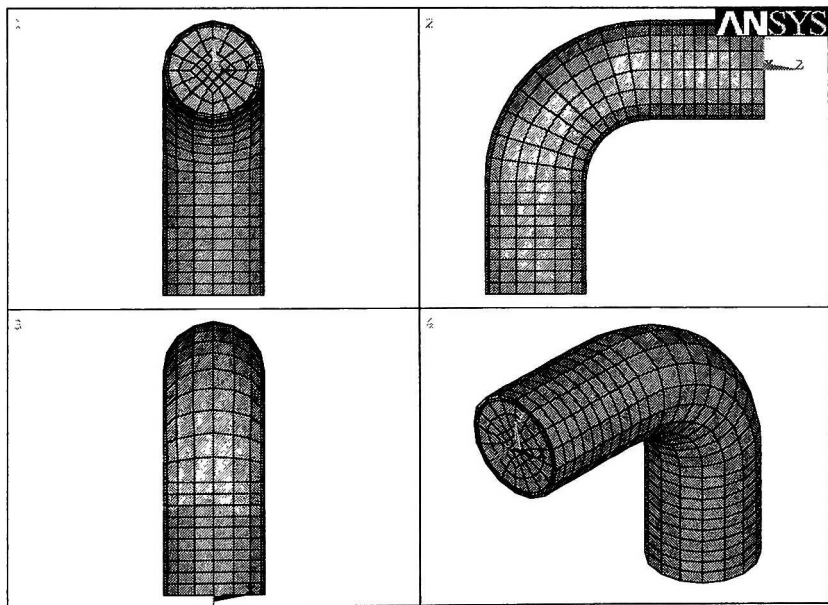


Рис. 3.3 – Разбивка модели трубопровода регулярной сеткой.

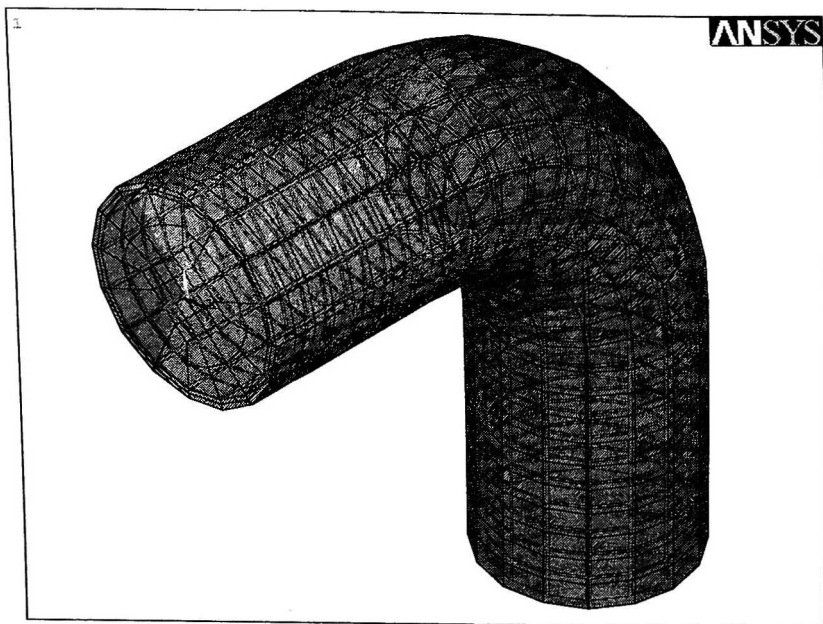


Рис. 3.4 – Граничные условия взаимодействия жидкости и подавливой стенки трубопровода (Fluid Structure Interaction).

Граничные условия гидравлической подсистемы задаются в виде амплитуды и частоты пульсаций на входе в трубопровод и акустической нагрузки на выходе. Традиционно, при проведении расчетов параметров пульсаций рабочей жидкости в трубопроводных системах, в качестве динамической нагрузки используется входной импеданс присоединенной гидравлической цепи [69].

Остановимся подробнее на технологии построения конечно-элементной модели одноветковой трубопроводной системы. На первом шаге производится построение плоского профиля – поперечного сечения трубопровода. Для моделирования данного вида трубопровода целесообразно применение регулярной сетки, поэтому строящееся поперечное сечение должно содержать четырехгранные области.

Далее осуществляется построение траектории осевой линии трубопровода и разметка сетки по ее длине. Для окончательного построения объемного геометрического облика моделируемой системы применяется операция вытягивания областей поперечного сечения вдоль заданной траектории. При этом

каркас геометрической модели получается полностью автоматически размечен. Таким образом, построенный объем готов для разбивки сеткой конечных элементов.

Задание сетки конечных элементов также осуществляется в несколько этапов. Это связано с тем, что в модели используются конечные элементы различных типов, причем элементы одного типа имеют различные свойства. Сначала вся область трубопроводной системы разбивается объемными элементами, моделирующими свойства деформируемых твердых тел. Затем элементам, занимающим объем рабочей жидкости, присваивается тип акустических элементов со свойством «взаимодействия со структурой» (в данном случае под «структурой» понимается стенка трубопровода). Далее вид матриц акустических элементов, прилегающих к концам трубопровода меняется на несимметричный. Эта операция производится для формирования граничных условий гидравлической подсистемы – импедансов на входе и выходе трубопровода. Граничные условия механической подсистемы определяются путем ограничения соответствующих степеней свободы в узлах расчетной схемы, исходя из реальных условий креплений участков трубопроводов. В завершении построения модели задается нагрузка в виде амплитуды и частоты пульсаций рабочего давления на входе в систему.

Разработанная конечноэлементная модель позволяет учитывать взаимодействие пульсационных процессов в рабочей среде и колебаний трубопроводов. С использованием разработанной модели был произведен вычислительный эксперимент по определению виброакустической нагруженности участка трубопровода (см. рис. 3.1), имеющего следующие геометрические характеристики: $d_{\text{вн}}=20$ мм, $\delta=1$ мм, $l_{\text{ax}}=R=l_{\text{вых}}=200$ мм.

На практике определенный интерес представляет анализ отклика механической системы трубопровода при изменении граничных условий гидравлической системы. Поэтому на первом этапе исследовалось распределение относительной виброско-

рости $\bar{v} = \frac{v}{A_{\text{ax}}}$, $\frac{m^2 \cdot c}{кг}$ по длине трубопровода при изменении

акустической нагрузки на его выходе. Моделировались два крайних случая:

- движение трубопровода при акустически закрытом выходе;
- движение трубопровода при неотражающем сопротивлении на выходе.

На входе исследуемой системы задавались пульсации давления с определенной частотой и амплитудой. Результаты расчетов в виде сравнения распределения относительной виброскорости при крайних случаях акустической нагрузки на выходе по длине трубопровода для каждой частоты представлены на рис. 3.5-3.8.

$$\bar{v} = \frac{v}{A_{ex}}, \frac{M^2}{KZ}$$

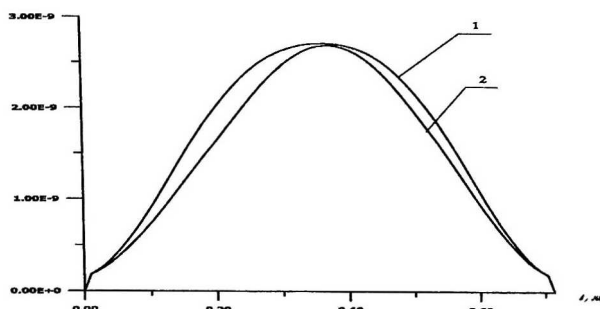


Рис. 3.5 - Распределение относительной виброскорости по длине трубопровода, $f=50$ Гц:

- 1 – нагрузка на выходе – неотражающее сопротивление;
2 – нагрузка на выходе – акустически закрытый конец.

$$\bar{v} = \frac{v}{A_{ex}}, \frac{M^2}{KZ}$$

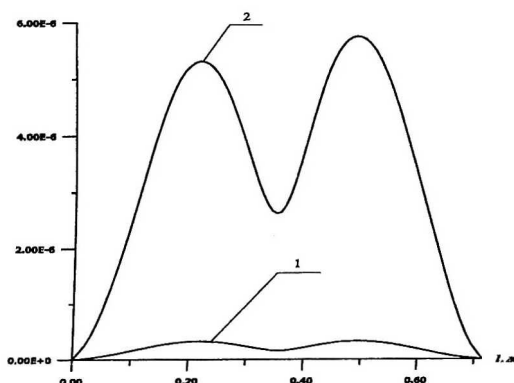


Рис. 3.6 - Распределение относительной виброскорости по длине трубопровода, $f=400$ Гц:

- 1 – нагрузка на выходе – неотражающее сопротивление;
2 – нагрузка на выходе – акустически закрытый конец.

$$\bar{v} = \frac{v}{A_{ex}} \cdot \frac{M^2}{K^2}$$

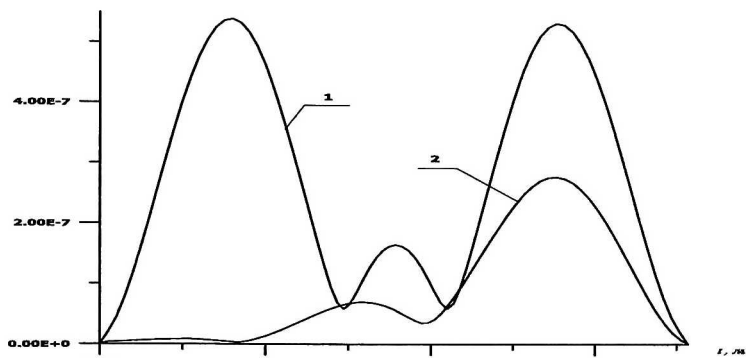


Рис. 3.7 - Распределение относительной виброскорости по длине трубопровода, $f=980$ Гц:

- 1 – нагрузка на выходе – неотражающее сопротивление;
2 – нагрузка на выходе – акустически закрытый конец.

$$\bar{v} = \frac{v}{A_{ex}} \cdot \frac{M^2}{K^2}$$

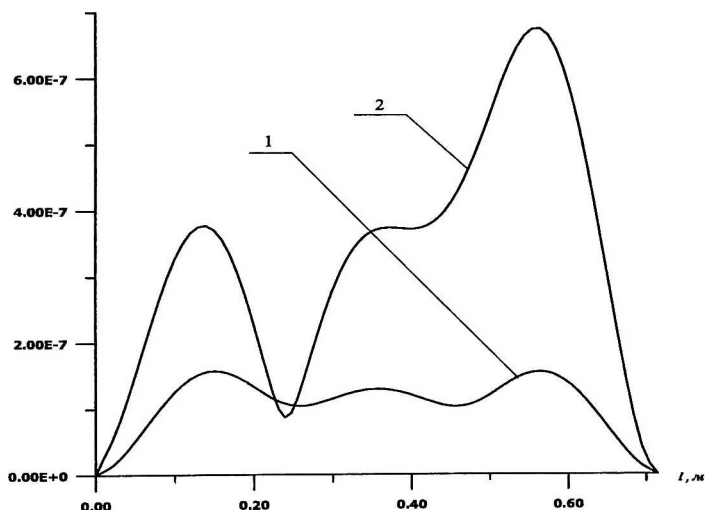


Рис. 3.8 - Распределение относительной виброскорости по длине трубопровода, $f=1200$ Гц:

- 1 – нагрузка на выходе – неотражающее сопротивление;
2 – нагрузка на выходе – акустически закрытый конец.

Сравнивая полученные зависимости можно отметить следующие особенности.

1. Форма колебаний и амплитудные значения вибропараметров трубопровода в значительной мере зависят от акустической нагрузки на выходе и, следовательно, от формы распределения параметров пульсаций рабочей жидкости по длине.
2. Независимо от акустической нагрузки относительная вибро-скорость увеличивается с приближением к резонансным областям механической подсистемы.
3. С приближением к частотной области четвертьволнового резонанса гидравлической подсистемы в случае нагрузки на акустически закрытый конец амплитуда относительной вибро-скорости возрастает по сравнению со случаем нагрузки на неотражающее сопротивление, что обусловлено резким увеличением амплитуд колебаний давления рабочей жидкости в первом случае из-за резонансных явлений.
4. Форма колебаний трубопровода при нагрузке на неотражающее сопротивление имеет симметричный (относительно его середины) характер, в то время как при нагрузке на акустически закрытый конец форма колебаний несимметрична.

Для оценки адекватности разработанной математической модели были проведены экспериментальные исследования виброакустических характеристик трубопровода, схема которого представлена на рис. 3.9, при его силовом возбуждении пульсирующим потоком рабочей жидкости. Для формирования пульсирующего потока рабочей жидкости использовался стенд пульсирующих давлений. Для исключения кинематического возбуждения исследуемого трубопровода от пульсатора и других элементов стенда он был вынесен в отдельное помещение и подсоединен к основной системе через металлорукав.

При проведении экспериментов регистрировались виброускорение и пульсации давления. Схема установки датчиков представлена на рис. 3.9. При цифровой обработке временных реализаций динамических процессов проводился расчет для каждой выделенной гармоники сигнала относительного виброускорения по формуле:

$$\nu_i = \frac{W_i}{P_i};$$

где W_i - амплитуда виброускорения, регистрируемого вибропреобразователем (см. рис. 3.9), $\text{м} / \text{с}^2$;

P_i - амплитуда пульсаций давления, регистрируемых датчиком на акустически закрытом конце (см. рис. 3.9), Па.

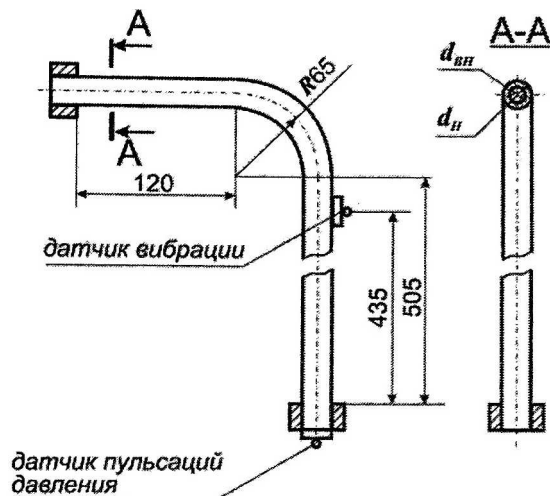


Рис. 3.9 – Геометрические характеристики исследуемого трубопровода.

При определении относительного виброускорения брались параметры пульсаций давления в выходном сечении трубопровода, так как в случае акустически закрытого конца максимальная амплитуда пульсаций реализуется в этом сечении и именно она во многом определяет пульсационную нагруженность гидравлической системы в целом.

Результаты обработки экспериментальных данных в виде частотной зависимости относительного виброускорения ν представлены на рис. 3.10, где также нанесена расчетная кривая относительного виброускорения, полученная на базе использования метода конечных элементов и алгоритма, описанного выше. Из графика видно хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных, как количественное, так и качественное. Наиболее интенсивный резонанс ($f=265$ Гц) соответствует собственной частоте второй формы колебаний рассматриваемого трубопровода. Колебания трубопровода по второй форме происходят в его плоскости. Вибропреобразователь, при проведении исследований устанавливался таким образом, что-

бы в наибольшей мере регистрировать колебания именно в плоскости трубопровода – угол между осью датчика и данной плоскостью составлял 10° . Непараллельное расположение оси вибропреобразователя и плоскости трубопровода выбрано для возможности оценки резонансных колебаний, имеющих место в направлении наименьшей жесткости механической подсистемы. Здесь следует отметить, что при расчетах использовалась линейная модель, не учитывающая потери на трение в опорах и в материале трубопровода. Этим объясняется, что в резонансной области 250 Гц полученные экспериментально значения относительного виброускорения меньше, чем расчетные величины.

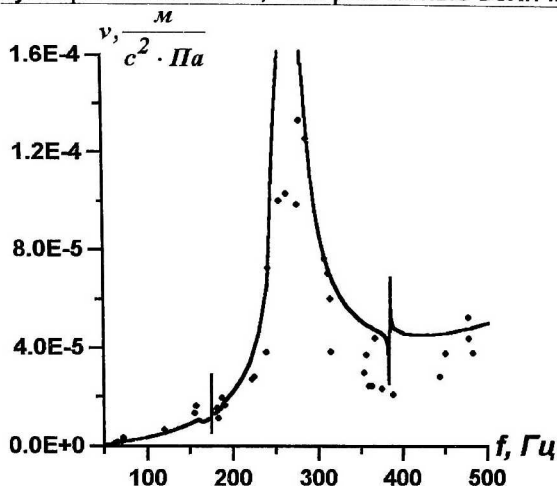


Рис. 3.10. – Амплитудная частотная характеристика трубопровода рис. 3.9 при его силовом возбуждении, определяемая относительным виброускорением ν' :

● – эксперимент; — расчет.

Значительный интерес представляет частотная характеристика трубопровода, определяемая приведенным относительным виброускорением ν' , равным отношению амплитуды виброускорения, регистрируемого вибропреобразователем, к амплитуде пульсаций давления в сечении установки вибродатчика:

$$\nu'_i = \frac{W_i}{P_i}; \quad (3.1)$$

где P'_i – амплитуда пульсаций давления в сечении установки вибродатчика, Па.

Установка датчика пульсаций давления в месте расположения вибропреобразователя потребовала бы применения специальных переходников, что нарушило бы однородность рассматриваемой трубопроводной линии и ставило под сомнение корректность проведения эксперимента. В то же время широко известны апробированные методики расчета распределения пульсаций давления по длине трубопровода для различных динамических характеристик присоединенных гидравлических цепей [16, 43, 50, 69]. Таким образом, амплитуда пульсаций давления в сечении установки вибропреобразователя определялась расчетным путем. Частотная характеристика трубопровода, определенная приведенным относительным виброускорением, представлена на рис. 3.11. Сравнение расчетных и экспериментальных значений приведенного относительного виброускорения показывает их хорошую сходимость.

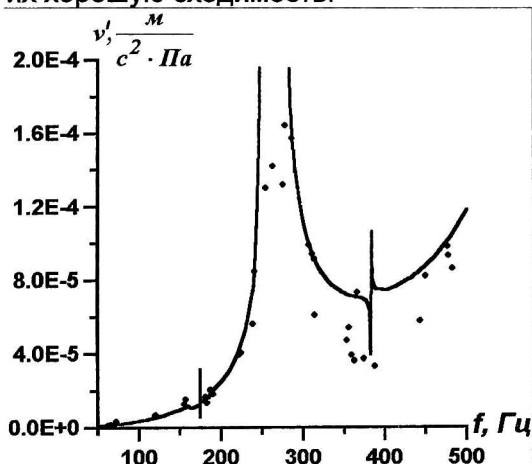


Рис. 3.11. – Амплитудная частотная характеристика трубопровода рисунка 3.9 при его силовом возбуждении, определяемая приведенным относительным виброускорением v' :

● – эксперимент; — расчет.

АЧХ трубопровода, определенная при помощи приведенного относительного виброускорения (см. рис. 3.11) и относительного виброускорения (см. рис. 3.10), в области частот до 400 Гц различаются несущественно. Это связано с тем, что в облас-

ти низких частот амплитуды пульсаций давления рабочей жидкости отличаются незначительно (в том числе и в случае стоячей волны) для различных сечений, удаленных друг от друга менее, чем на длину $\frac{1}{4}$ волны. Некоторое расхождение между графиками АЧХ ν и ν' наблюдается в диапазоне частот 400...500 Гц. Значение относительного виброускорения в указанном частотном диапазоне изменяется незначительно – в пределах: $(4,2...4,9) \cdot 10^{-5} \frac{м}{Па}$.

Величина же приведенного относительного виброускорения монотонно возрастает от $6,8 \cdot 10^{-5} \frac{м}{Па \cdot с^2}$ до

$11,5 \cdot 10^{-5} \frac{м}{Па \cdot с^2}$. Объясняется это тем, что с увеличением частоты колебаний давления рабочей жидкости узел сформировавшейся стоячей волны приближается к акустически закрытому концу. При частоте:

$$f = \frac{c_{np}}{4l} = \frac{1210}{4 \cdot 0,435} = 695 \text{ Гц}, \quad (3.2)$$

узел волны попадет в сечение расположения вибропреобразователя и согласно выражению (3.1) значение приведенного относительного виброускорения $\nu' \rightarrow \infty$. В соотношении (3.2) обозначено:

c_{np} - приведенная скорость жидкости в трубопроводной линии, учитывающая податливость стенок трубопровода;

l - расстояние от сечения установки вибропреобразователя до акустически закрытого конца трубопровода.

На частотах ниже 495 Гц при увеличении частоты колебаний рабочей жидкости в рассматриваемом сечении происходит снижение амплитуды пульсаций давления относительно акустически закрытого конца. Уменьшение знаменателя в соотношении (3.1) и объясняет экспериментально зарегистрированное увеличение величины приведенного относительного виброускорения.

Таким образом, экспериментальные исследования подтвердили адекватность результатов численного расчета по разработанной конечно-элементной модели. К сложностям использования такого метода моделирования следует отнести его вы-

сокую трудоемкость. Для адекватного описания поведения трубопровода необходимо использовать регулярную сетку конечных элементов. При этом в поперечном сечении (см. рис. 3.3) видно 32 конечных элемента, описывающих стенку трубопровода, и 48 конечных элементов, моделирующих рабочую жидкость. Таким образом, полная конечно-элементная модель трубопровода содержит сотни тысяч конечных элементов и является довольно громоздкой при проведении расчетов. Расчет амплитудной частотной характеристики вибропараметров трубопровода на персональном компьютере Pentium IV занимает несколько часов. Большую сложность представляет также создание сетки конечных элементов в местах разветвления трубопроводов. В ряде случаев это приводит к ситуациям, когда размерность системы уравнений решаемой задачи превышает возможности программного комплекса и используемых персональных компьютеров. Особенно актуально это для сложных и разветвленных трубопроводных систем.

Глава 4. ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИБРОАКУСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

В данной главе представлен подробный вывод дифференциальных уравнений обобщенной математической модели виброакустических процессов в трубопроводной системе. Вывод уравнений проводится в векторной форме, позволяющей получать уравнения в наиболее компактном и удобном для преобразованиях виде. Сначала выводятся общие нелинейные уравнения разработанной модели, а далее рассматриваются их частные случаи. С точки зрения дальнейшей алгоритмизации вычислительных процедур удобнее разбить моделируемую трубопроводную систему на участки конечной длины, в пределах которых сохраняются постоянными такие геометрические параметры, как внутренний и наружный радиусы трубопровода, радиусы его нормальной и бинормальной кривизны. Для каждого участка составляется система дифференциальных уравнений, описывающая его виброакустические свойства. При этом в систему уравнений входят: условия равновесия участка криволинейного трубопровода, связь сил и моментов с упругими перемещениями, выражения для действующих массовых сил, уравнения движения жидкости в упругом трубопроводе. Методика решения полученной системы уравнений основывается на использовании метода конечных разностей.

При построении математического описания виброакустики трубопроводных систем, как и при формулировании любой математической модели, необходимо принять ряд допущений, определяющих с одной стороны точность, с другой стороны вычислительную трудоемкость решаемой задачи. Существенного сокращения вычислительной трудоемкости можно достичь, рассматривая трубопровод с точки зрения механики стержней. При таком подходе трубопровод рассматривается как стержень, поперечные колебания трубопровода [46] считаются преобладающими, радиальными деформациями поперечного сечения пренебрегают. Допущение является вполне адекватным при относительно малых диаметрах трубопровода и частотах колебаний рабочей среды, когда длина волны рабочей жидкости более чем на порядок больше внутреннего диаметра в поперечном сечении. Если это условие не выполняется, необходимо использовать конечно-элементную модель, рассмотренную выше.

Воспользовавшись принципом Даламбера [5], уравнение движения трубопровода можно записать в виде (рис. 4.1):

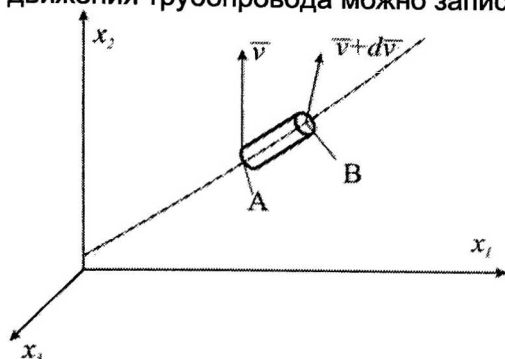


Рис. 4.1 – Движение элемента трубопровода.

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{Q}'}{\partial s} + \bar{q} + \bar{f} + \bar{\gamma}_1, \quad (4.1)$$

где s - координата, отсчитываемая вдоль линии центров тяжести сечения трубопровода от начала отсчета до некоторого произвольного поперечного сечения (см. рис. 4.2);

t - время;

$m_1(s)$ - погонная масса трубопровода:

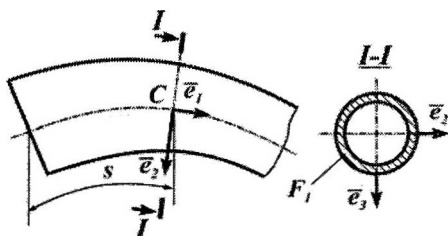


Рис. 4.2 – Система координат, связанная с моделируемым трубопроводом.

$$m_1(s) = \rho_m(s) F_1(s),$$

$\rho_m(s)$ - плотность материала трубопровода;

$F_1(s)$ - площадь поперечного сечения трубопровода:

$$F_1(s) = \frac{\pi}{4} (d^2(s) - (d(s) - 2\delta(s))^2) = \pi \delta(s) (d(s) + \delta(s)),$$

$d(s)$ - наружный диаметр трубопровода;

$\delta(s)$ - толщина стенки трубопровода;

$m_2(s)$ - погонная масса рабочей жидкости в трубопроводе:

$$m_2(s) = \rho_{жс} \cdot F_2(s),$$

$\rho_{жс}$ - плотность рабочей жидкости;

$F_2(s)$ - площадь «живого» сечения трубопровода:

$$F_2(s) = \frac{\pi}{4} (d(s) - 2\delta(s))^2;$$

$\vec{v}(s, t)$ - вектор скорости сечения трубопровода;

$\vec{Q}'(s, t)$ - вектор внутренних сил в трубопроводе;

$\vec{q}(s, t)$ - вектор внешних распределенных сил, приложенных к трубопроводу;

$\vec{f}(s, t)$ - вектор сил взаимодействия между трубопроводом и рабочей жидкостью;

$\vec{\gamma}_1(s, t)$ - вектор распределенных сил, вызванных силовыми полями.

В уравнении (4.1) целесообразно перейти от вектора скорости сечения трубопровода $\vec{v}(s, t)$ к вектору перемещения сечения трубопровода $\vec{u}(s, t)$. В этом случае оно переписывается в виде:

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{Q}'}{\partial s} + \vec{q} + \vec{f} + \vec{\gamma}_1.$$

Для получения уравнения движения жидкости в упругом трубопроводе рассмотрим уравнение Эйлера для неидеальной сжимаемой жидкости:

$$\frac{d\vec{w}_0}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p\vec{e}_1)}{\partial s} + \frac{\vec{\gamma}_2}{m_2} - \tau_{mp} \frac{\Pi}{F_2(s)\rho_{жс}} \vec{e}_1, \quad (4.2)$$

где $\vec{e}_1(s, t)$ - единичный вектор, направленный по касательной к осевой линии трубопровода;

$p(s, t)$ - давление в рабочей жидкости;

$\vec{\gamma}_2(s, t)$ - вектор распределенных сил, вызванных силовыми полями;

$\vec{w}_0$ - скорость рабочей среды в сечении трубопровода с координатой s , которая складывается из скорости поступательного движения трубопровода $\vec{v}$ (переносное движение) и скорости

относительного движения $\bar{w}$:

$$\bar{w}_0 = \bar{v} + \bar{w}; \quad (4.3),$$

τ_{mp} - напряжения трения, возникающие при взаимодействии вязкой жидкости со стенками трубопровода;

Π – периметр поперечного (смачиваемого) сечения трубопровода.

Будем считать скорость относительного движения $\bar{w}$ неизменной во всех точках сечения с координатой s .

Общее изменение скорости рабочей жидкости складывается из изменения скорости за единицу времени в данной точке (местная, или локальная производная) и изменения скорости за единицу времени вследствие перемещения рабочей жидкости (переносного ускорения). Тогда можно записать:

$$\frac{d\bar{w}_0}{dt} = \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial s}. \quad (4.4)$$

Подставляя (4. 4) в уравнение Эйлера (4.2), получим:

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p \bar{e}_1)}{\partial s} + \frac{\bar{\gamma}_2}{m_2} - \tau_{mp} \frac{\Pi}{F_2(s) \rho_{жс}} \bar{e}_1. \quad (4.5)$$

Рассмотрим производные в левой части выражения (4.5).

С учетом (4.3) первую производную $\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t}$ можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Скорость жидкости $\bar{w}$ можно выразить через ее проекцию на недеформированную ось, направленную по касательной к линии центров тяжести сечений трубопровода:

$$\bar{w} = w_1 (\bar{e}_1 - \bar{e}_1 \times \bar{\varphi}_1), \quad (4.7)$$

где $\bar{\varphi}_1$ - угол вращения поперечного сечения вокруг нейтральной линии.

В случае выполнения гипотезы малых деформаций можно принять, что [27]:

$$\bar{\varphi}_1 = - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \times \bar{e}_1 \right). \quad (4.8)$$

Тогда

$$-\bar{e}_1 \times \bar{\varphi}_1 = \bar{e}_1 \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \times \bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} - \bar{e}_1 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_1 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \quad (4.9)$$

где

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_2 \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_3 \bar{e}_3, \quad (4.10)$$

$\bar{e}_2(s, t)$ - единичный вектор, направленный по нормали к осевой линии трубопровода (см. рис.4.2);

$\bar{e}_3(s, t)$ - единичный вектор, направленный по бинормали к осевой линии трубопровода (см. рис.4.2).

Подставляя (4.9) в (4.7), получим:

$$\bar{w} = w_1 \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right). \quad (4.11)$$

В дальнейшем индекс «1» в обозначении w_1 будем опускать. Тогда выражение (4.11) переписывается в виде:

$$\bar{w} = w \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right). \quad (4.12)$$

Выражение (4.6) с учетом (4.12) можно переписать:

$$\frac{\partial \bar{w}_\theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial t} \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right). \quad (4.13)$$

Рассмотрим теперь производную $\frac{\partial \bar{w}_\theta}{\partial s}$ в левой части уравнения (4.5). С учетом (4.3) можно записать:

$$\frac{\partial \bar{w}_\theta}{\partial s} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial s} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s}. \quad (4.14)$$

Последнюю производную в выражении (4.14) можно преобразовать с учетом (4.12) и (4.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial s} (\bar{e}_1 - \bar{e}_1 \times \bar{\varphi}_1) + w \frac{\partial}{\partial s} (\bar{e}_1 - \bar{e}_1 \times \bar{\varphi}_1) = \\ &= \frac{\partial w}{\partial s} \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) + w \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial s} + w \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из [55] известно, что

$$\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial s} = \chi_3 \bar{e}_2 - \chi_2 \bar{e}_3, \quad (4.16)$$

где $\bar{\chi}$ – вектор кривизны осевой линии;

χ_1 – кручение осевой линии;

χ_2 – кривизна осевой линии в плоскости, перпендикулярной $\bar{e}_2$;

χ_3 – кривизна осевой линии в плоскости, перпендикулярной $\bar{e}_3$.

Подставляя (4.16) в (4.15), получим:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial s} \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) + w (\chi_3 \bar{e}_2 - \chi_2 \bar{e}_3) + w \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right). \quad (4.17)$$

С учетом (4.17) выражение (4.14) переписывается в виде:

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial s} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) + w (\chi_3 \bar{e}_2 - \chi_2 \bar{e}_3) + w \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right). \quad (4.18)$$

Подставляя выражения (4.13) и (4.18) в уравнение (4.5), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + w \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) + w \frac{\partial w}{\partial s} \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) + \\ & + w^2 (\chi_3 \bar{e}_2 - \chi_2 \bar{e}_3) + w^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) = \\ & = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p \bar{e}_1)}{\partial s} + \frac{\bar{\gamma}_2}{m_2} - \tau_{mp} \frac{\Pi}{F_2(s) \rho_{\text{жс}}} \bar{e}_1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Уравнение (4.19) можно преобразовать, в явном виде выделив в нем вектор сил взаимодействия между трубопроводом и рабочей жидкостью:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + w \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) + w \frac{\partial w}{\partial s} \left(\bar{e}_1 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) = \\ & = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (p \bar{e}_1)}{\partial s} + \frac{\bar{\gamma}_2}{m_2} - \frac{\bar{f}}{m_2} \end{aligned}, \quad (4.20)$$

где

$$\bar{f} = m_2 \left(\tau_{mp} \frac{\Pi}{F_2(s) \rho_{\text{жс}}} \bar{e}_1 + w^2 (\chi_3 \bar{e}_2 - \chi_2 \bar{e}_3) + w^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) \right). \quad (4.21)$$

Рассмотрим последнюю производную в выражении (4.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_2 \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_2 \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_3 \bar{e}_3 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_3 \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial s} = \\ &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial s} \chi_2 - \frac{\partial u_2}{\partial s} \chi_3 - \chi_3^2 u_1 - \chi_1 \chi_3 u_3 - \chi_2^2 u_1 - \chi_1 \chi_2 u_2 \right) \bar{e}_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \chi_3 \frac{\partial u_1}{\partial s} - 2 \chi_1 \frac{\partial u_3}{\partial s} + \frac{\partial \chi_3}{\partial s} u_1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial s} u_3 - \chi_1^2 u_2 + \chi_1 \chi_2 u_1 \right) \bar{e}_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial s} u_1 - \chi_2 \frac{\partial u_1}{\partial s} + 2 \chi_1 \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{\partial \chi_1}{\partial s} u_2 + \chi_1 \chi_3 u_1 - \chi_1^2 u_3 \right) \bar{e}_3. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В выражении (4.22) учитывается, что проекции вектора кривизны χ_i зависят от координаты s . Кроме того, при выполнении преобразований выражения (4.22) использовались следующие соотношения [51]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial s} &= \chi_3 \bar{e}_2 - \chi_2 \bar{e}_3; \quad \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial s} = -\chi_3 \bar{e}_1 + \chi_1 \bar{e}_3; \quad \frac{\partial \bar{e}_3}{\partial s} = \chi_2 \bar{e}_1 - \chi_1 \bar{e}_2; \\ \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial s} \right)_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial s} - \chi_3 A_2 + \chi_2 A_3; \quad \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial s} \right)_2 = \frac{\partial A_2}{\partial s} + \chi_3 A_1 - \chi_1 A_3; \\ \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial s} \right)_3 &= \frac{\partial A_3}{\partial s} - \chi_1 A_2 + \chi_1 A_2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\bar{A}$ - произвольный вектор.

Если предположить, что χ_i постоянны в пределах рассматриваемого участка трубопровода, то выражение (4.22) несколько упростится:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s_1} \right) &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial s} \chi_2 - \frac{\partial u_2}{\partial s} \chi_3 - \chi_3^2 u_1 - \chi_1 \chi_3 u_3 - \chi_2^2 u_1 - \chi_1 \chi_2 u_2 \right) \bar{e}_1 \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \chi_3 \frac{\partial u_1}{\partial s} - 2 \chi_1 \frac{\partial u_3}{\partial s} + \chi_1 \chi_2 u_1 - \chi_1^2 u_2 \right) \bar{e}_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} - \chi_2 \frac{\partial u_1}{\partial s} + 2 \chi_1 \frac{\partial u_2}{\partial s} + \chi_1 \chi_3 u_1 - \chi_1^2 u_3 \right) \bar{e}_3. \end{aligned}$$

С учетом (4.22) выражение (4.21) после некоторых преобразований можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \bar{f} = m_2 \left[\left(\frac{4\tau_{mp}}{(d-2\delta)\rho_{жс}} + w^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial s} \chi_2 - \frac{\partial u_2}{\partial s} \chi_3 - \chi_3^2 u_1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \chi_1 \chi_3 u_3 - \chi_2^2 u_1 - \chi_1 \chi_2 u_2 \right) \right) \bar{e}_1 + w^2 \left(\chi_3 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{\partial \chi_3}{\partial s} u_1 + \right. \\ \left. + \chi_3 \frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{\partial \chi_1}{\partial s} u_3 - 2\chi_1 \frac{\partial u_3}{\partial s} + \chi_1 \chi_2 u_1 - \chi_1^2 u_2 \right) \bar{e}_2 + \\ \left. + w^2 \left(-\chi_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial s} u_1 - \chi_2 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial \chi_1}{\partial s} u_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\chi_1 \frac{\partial u_2}{\partial s} + \chi_1 \chi_3 u_1 - \chi_1^2 u_3 \right) \bar{e}_3 \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Таким образом, выражение для вектора сил взаимодействия между трубопроводом и рабочей жидкостью можно записать в виде:

$$\bar{f} = f_1 \bar{e}_1 + f_2 \bar{e}_2 + f_3 \bar{e}_3, \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = m_2 \left[\frac{4\tau_{mp}}{(d-2\delta)\rho_{жс}} + w^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial s} \chi_2 - \frac{\partial u_2}{\partial s} \chi_3 - \chi_3^2 u_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \chi_1 \chi_3 u_3 - \chi_2^2 u_1 - \chi_1 \chi_2 u_2 \right) \right] \\ f_2 = m_2 w^2 \left[\chi_3 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \frac{\partial \chi_3}{\partial s} u_1 + \chi_3 \frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{\partial \chi_1}{\partial s} u_3 - \right. \\ \left. - 2\chi_1 \frac{\partial u_3}{\partial s} + \chi_1 \chi_2 u_1 - \chi_1^2 u_2 \right] \\ f_3 = m_2 w^2 \left[-\chi_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial s} u_1 - \chi_2 \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial \chi_1}{\partial s} u_2 \right. \\ \left. + 2\chi_1 \frac{\partial u_2}{\partial s} + \chi_1 \chi_3 u_1 - \chi_1^2 u_3 \right] \end{aligned}$$

В результате мы получили систему 3 векторных уравнений (4.1), (4.20) и (4.24) с неизвестными $\bar{u}$, $\bar{f}$, w и p . Для замыкания данной системы уравнений запишем недостающее уравнение неразрывности рабочей жидкости [13, 43]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -B_{mp} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad (4.26)$$

где B_{mp} - приведенный модуль упругости трубопровода:

$$B_{mp} = \frac{B}{1 + \frac{(d - 2\delta)B}{\delta E}},$$

B – модуль объемной упругости рабочей среды;

E – модуль упругости материала стенки трубопровода.

Остальные уравнения математической модели, характеризующие движение трубопровода, полностью совпадают с уравнениями, полученными в механике стержней. Первым из них является уравнение, связывающее внутренние моменты при упругих деформациях трубопровода $\bar{M}$ с приращениями кривизны $\bar{\chi}$. В соответствии с законом Гука можно записать:

$$M_{01} = A_{11}(\chi_{01} - \chi_{001});$$

$$M_{02} = A_{22}(\chi_{02} - \chi_{002});$$

$$M_{03} = A_{33}(\chi_{03} - \chi_{003})$$

$$\text{или } \bar{M}_0 = A(\bar{\chi}_0 - \bar{\chi}_{00}),$$

$$\text{где } A = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{vmatrix},$$

A_{11} – жесткость трубопровода при кручении;

A_{22} и A_{33} – жесткость трубопровода при изгибе относительно главных осей;

$\bar{\chi}_{00} = \chi_{001}\bar{e}_1 + \chi_{002}\bar{e}_2 + \chi_{003}\bar{e}_3$ – вектор, характеризующий геометрию осевой линии трубопровода в естественном состоянии до нагружения внешними силами;

$\bar{\chi}_0 = \chi_{01}\bar{e}_1 + \chi_{02}\bar{e}_2 + \chi_{03}\bar{e}_3$ – вектор, характеризующий геометрию осевой линии трубопровода после нагружения внешними силами.

В случае нагружения трубопровода пульсирующим потоком рабочей жидкости можно записать:

$$\bar{M} = A(\bar{\chi} - \bar{\chi}_0) + \bar{M}_0, \quad (4.27)$$

где $\bar{\chi} = \chi_1 \bar{e}_1 + \chi_2 \bar{e}_2 + \chi_3 \bar{e}_3$ - вектор, характеризующий геометрию осевой линии трубопровода в текущий момент времени.

Из механики стержней известно следующее векторное уравнение:

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = \bar{\omega} \times \bar{\chi}. \quad (4.28)$$

Подробное доказательство справедливости этого выражения приводится, например, в [54]. В соотношении (4.28) обозначено:

$\bar{\omega} = \omega_1 \bar{e}_1 + \omega_2 \bar{e}_2 + \omega_3 \bar{e}_3$ - вектор угловой скорости вращения связанной системы координат;

«~» - символ локальной производной.

Таким образом, физический смысл уравнения (4.28) состоит в том, что оно устанавливает взаимосвязь между изменением в пространстве угловой скорости вращения связанной системы координат и изменением во времени кривизны и кручения осевой линии трубопровода.

Для получения еще одного кинематического соотношения рассмотрим вектор смещения точек осевой линии трубопровода. В соответствии с рис. 4.3:

$$\bar{u} = \bar{r} - \bar{r}_0. \quad (4.29)$$

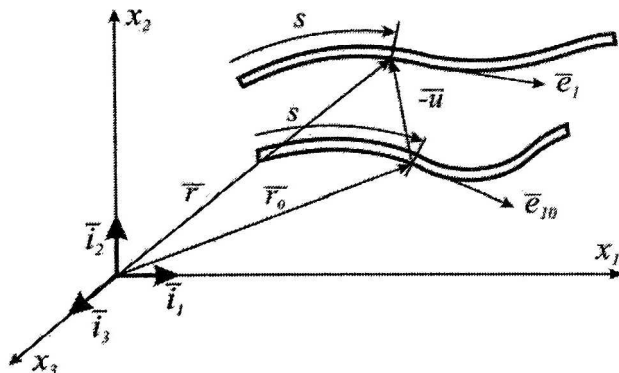


Рис. 4.3 – Определение движения сечения трубопровода через радиус – вектор декартовой системы координат.

Дифференцируя $\bar{u}$ по s , получим:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial s} = \bar{e}_1 - \bar{e}_{10}. \quad (4.30)$$

Рассматривая элемент трубопровода можно получить уравнение равновесия моментов:

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial s} + \bar{e}_1 \times \bar{Q}' + \bar{\mu} + \sum_{i=1}^m \bar{M}_{ci} \delta(s - s_i) = 0, \quad (4.31)$$

где $\bar{M}_{ci}$ - вектор сосредоточенного момента, приложенного в сечении с координатой s_i ;

δ - дельта-функция Дирака;

$\bar{\mu}$ - распределенный момент, действующий на трубопровод.

Таким образом, мы получили замкнутую систему векторных дифференциальных уравнений, описывающих динамику трубопроводов сложной криволинейной конфигурации с пульсирующим потоком реальной жидкости:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} &= \frac{\partial \bar{Q}'}{\partial s} + \bar{q} + \bar{f} + \bar{\gamma}_1, \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + w \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} \left(\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_2 \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_3 \bar{e}_3 \right) + \\ + w \frac{\partial w}{\partial s} \left(\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_2 \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} \right)_3 \bar{e}_3 \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p \bar{e}_1)}{\partial s} + \frac{\bar{\gamma}_2}{m_2} - \frac{\bar{f}}{m_2}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -B_{mp} \frac{\partial w}{\partial s}, \bar{f} = f_1 \bar{e}_1 + f_2 \bar{e}_2 + f_3 \bar{e}_3, \bar{M} = A(\bar{\chi} - \bar{\chi}_0) + \bar{M}_0, \\ \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} &= \bar{\omega} \times \bar{\chi}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = \bar{e}_1 - \bar{e}_{10}, \\ \frac{\partial \bar{M}}{\partial s} + \bar{e}_1 \times \bar{Q}' + \bar{\mu} + \sum_{i=1}^m \bar{M}_{ci} \delta(s - s_i) &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

В результате имеем 7 векторных уравнений и одно скалярное уравнение для неизвестных 6 векторных $\bar{u}$, $\bar{f}$, $\bar{Q}'$, $\bar{M}$, $\bar{\chi}$, $\bar{\omega}$ и двух скалярных w, p величин. Поскольку в соответствии с принятыми допущениями нами рассматривается одно-

мерное движение жидкости в трубопроводе, то для дальнейших математических преобразований достаточно лишь проекции второго уравнения системы (4.32) на ось $\bar{e}_1$. Проекция второго уравнения системы (4.32) на оси $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ учитываются при определении распределенных сил взаимодействия между трубопроводом и рабочей жидкостью.

Перейдем в системе уравнений (4.32) к безразмерным величинам, полагая:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{s}{l}, \quad \tau = p_0 t, \quad \bar{v}_6 = \frac{\bar{v}}{lp_0}, \\ \bar{u}_6 &= \frac{\bar{u}}{l}, \quad \bar{Q}'_6 = \frac{\bar{Q}'l^2}{A_{33}(0)}, \quad \bar{M}_6 = \frac{\bar{M}l}{A_{33}(0)}, \\ w_6 &= \frac{w}{lp_0}, \quad \bar{\omega}_6 = \frac{\bar{\omega}}{p_0}, \quad \bar{\chi}_6 = \bar{\chi}l, \\ \bar{\gamma}_6 &= \frac{\bar{\gamma}^3}{A_{33}(0)}, \quad \bar{f}_6 = \frac{\bar{f}l^3}{A_{33}(0)}, \quad A_6 = \frac{A}{A_{33}(0)}, \\ \bar{M}_{c6} &= \frac{\bar{M}_c l^2}{A_{33}(0)}, \quad \bar{\mu}_6 = \frac{\bar{\mu}l^2}{A_{33}(0)}, \quad \bar{q}_6 = \frac{\bar{q}l^3}{A_{33}(0)}, \\ p_0 &= \sqrt{\frac{A_{33}(0)}{(m_1(0) + m_2(0))l^4}}, \quad p = \frac{p_6 A_{33}(0)}{F_2(0)l^2}. \quad (4.33)\end{aligned}$$

С учетом принятых обозначений система (4.32) переписывается в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{u}_6}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial \bar{Q}'_6}{\partial \varepsilon} + \bar{q}_6 + \bar{f}_6 + \bar{\gamma}_{16}, \\ n \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_6}{\partial \tau^2} + w_6 \frac{\partial^2 \bar{u}_6}{\partial \bar{\omega} \partial \varepsilon} + \frac{\partial w_6}{\partial \tau} \left(\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} \right)_2 \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} \right)_3 \bar{e}_3 \right) + \right. \\ &\left. + w_6 \frac{\partial w_6}{\partial \varepsilon} \left(\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} \right)_2 \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} \right)_3 \bar{e}_3 \right) \right) = - \frac{\partial (p_6 \bar{e}_1)}{\partial \varepsilon} + \bar{\gamma}_{26} - \bar{f}_6\end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_6}{\partial \tau} = -B_{mp} \frac{\partial w_6}{\partial \varepsilon}, \quad \bar{f}_6 = f_{16} \bar{e}_1 + f_{26} \bar{e}_2 + f_{36} \bar{e}_3,$$

$$\bar{M}_6 = A_6 (\bar{\chi}_6 - \bar{\chi}_{60}) + \bar{M}_{60}, \quad \frac{\partial \bar{w}_6}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \bar{\chi}_6}{\partial \tau} = \bar{w}_6 \times \bar{\chi}_6, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} = \bar{e}_1 - \bar{e}_{10},$$

$$\frac{\partial \bar{M}_6}{\partial \varepsilon} + \bar{e}_1 \times \bar{Q}'_6 + \bar{\mu}_6 + \sum_{i=1}^m \bar{M}_{c6i} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) = 0,$$

где $n = \frac{m_2}{m_1(\theta) + m_2(\theta)}$.

Перейдем к локальным производным, воспользовавшись свойствами:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \bar{w} \times \bar{a}, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial s} + \bar{\chi} \times \bar{a}.$$

Заметим при этом, что

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \times \bar{a} + 2\bar{w} \times \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{a});$$

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial s \partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \times \bar{a} + \bar{w} \times \frac{\partial \bar{a}}{\partial s} + \bar{\chi} \times \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \bar{\chi} \times (\bar{w} \times \bar{a}),$$

или в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial \tau} + \bar{w}_6 \times \bar{a}, \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_6 \times \bar{a},$$

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \bar{w}_6}{\partial \tau} \times \bar{a} + 2\bar{w}_6 \times \frac{\partial \bar{a}}{\partial \tau} + \bar{w}_6 \times (\bar{w}_6 \times \bar{a}),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \varepsilon \partial \tau} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial \varepsilon \partial \tau} + \frac{\partial \bar{w}_6}{\partial \varepsilon} \times \bar{a} + \bar{w}_6 \times \frac{\partial \bar{a}}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_6 \times \frac{\partial \bar{a}}{\partial \tau} + \bar{\chi}_6 \times (\bar{w}_6 \times \bar{a}).$$

С учетом этого система уравнений (4.34) перепишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_6}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \bar{w}_6}{\partial \tau} \times \bar{u}_6 + 2\bar{w}_6 \times \frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \tau} + \bar{w}_6 \times (\bar{w}_6 \times \bar{u}_6) -$$

$$- \frac{\partial \bar{Q}'_6}{\partial \varepsilon} - \bar{\chi}_6 \times \bar{Q}'_6 - \bar{q}_6 - \bar{f}_6 - \bar{\gamma}_{16} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& n \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_6}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \bar{\omega}_6}{\partial \tau} \times \bar{u}_6 + 2 \bar{\omega}_6 \times \frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \tau} + (\bar{\omega}_6 + w_6 \bar{\chi}_6) \times (\bar{\omega}_6 \times \bar{u}_6) + \right. \\
& w_6 \frac{\partial^2 \bar{u}_6}{\partial \tau \partial \varepsilon} + w_6 \frac{\partial \bar{\omega}_6}{\partial \varepsilon} \times \bar{u}_6 + w_6 \bar{\omega}_6 \times \frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} + w_6 \bar{\chi}_6 \times \frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \tau} + \\
& \left. + \left(\frac{\partial w_6}{\partial \tau} + w_6 \frac{\partial w_6}{\partial \varepsilon} \right) \left(\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_6 \times \bar{u}_6 \right)_2 \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_6 \times \bar{u}_6 \right)_3 \bar{e}_3 \right) \right) \\
& = - \frac{\partial(p_6 \bar{e}_1)}{\partial \varepsilon} + \bar{\gamma}_{26} - \bar{f}_6, \\
& \frac{\partial p_6}{\partial \tau} = -B_{mp} \frac{\partial w_6}{\partial \varepsilon}, \quad \bar{f}_6 = f_{16} \bar{e}_1 + f_{26} \bar{e}_2 + f_{36} \bar{e}_3, \\
& \bar{M}_6 = A_6 (\bar{\chi}_6 - \bar{\chi}_{60}) + \bar{M}_{60}, \quad \frac{\partial \bar{\omega}_6}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \bar{\chi}_6}{\partial \tau} = \bar{\omega}_6 \times \bar{\chi}_6, \\
& \frac{\partial \bar{u}_6}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_6 \times \bar{u}_6 = \bar{e}_1 - \bar{e}_{10}, \\
& \frac{\partial \bar{M}_6}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_6 \times \bar{M}_6 + \bar{e}_1 \times \bar{Q}'_6 + \bar{\mu}_6 + \sum_{i=1}^m \bar{M}_{c6i} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_{16} &= \frac{4n' \tau_{mp6}}{d_6 - 2\delta_6} + nw_6^2 \left(\frac{\partial u_{36}}{\partial \varepsilon} \chi_{26} - \frac{\partial u_{26}}{\partial \varepsilon} \chi_{36} - \chi_{36}^2 u_{16} - \right. \\
&\quad \left. - \chi_{16} \chi_{36} u_{36} - \chi_{26}^2 u_{16} - \chi_{16} \chi_{26} u_{26} \right), \\
f_{26} &= nw_6^2 \left[\chi_{36} + \frac{\partial^2 u_{26}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \chi_{36}}{\partial \varepsilon} u_{16} + \chi_{36} \frac{\partial u_{16}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_{16}}{\partial \varepsilon} u_{36} - \right. \\
&\quad \left. - 2 \chi_{16} \frac{\partial u_{36}}{\partial \varepsilon} + \chi_{16} \chi_{26} u_{16} - \chi_{16}^2 u_{26} \right]
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$f_{36} = n w_6^2 \left[-\chi_{26} + \frac{\partial^2 u_{36}}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial \chi_{26}}{\partial \varepsilon} u_{16} - \chi_{26} \frac{\partial u_{16}}{\partial \varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \chi_{16}}{\partial \varepsilon} u_{26} + 2 \chi_{16} \frac{\partial u_{26}}{\partial \varepsilon} + \chi_{16} \chi_{36} u_{16} - \chi_{16}^2 u_{36} \right],$$

$$n = \frac{m_2}{m_2(0)}, \quad \tau_{mp6} = \tau_{mp} \frac{F_2(0) l^2}{A_{33}(0)},$$

$$d_6 = \frac{d}{l}, \quad \delta_6 = \frac{\delta}{l}.$$

В дальнейших преобразованиях опустим индекс «б» в обозначении безразмерных величин. В скалярной форме получим следующие уравнения движения в связанной системе координат трубопровода, заполненного пульсирующим потоком реальной сжимаемой жидкости (без учета инерции вращения, которой в подавляющем большинстве практических случаев можно пренебречь):

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2} + \varepsilon_{kij} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} u_j + 2 \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial \tau} - \chi_i Q'_j \right) + \\ \varepsilon_{mlk} (\varepsilon_{ijl} \omega_i u_j) \omega_m - \frac{\partial Q'_k}{\partial \varepsilon} - q_k - f_k - \gamma_{1k} = 0 \\ n \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2} + \varepsilon_{kij} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} u_j + 2 \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial \tau} + w \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \varepsilon} u_j + \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial \varepsilon} + \chi_i \frac{\partial u_j}{\partial \tau} \right) \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon_{mlk} (\varepsilon_{ijl} \omega_i u_j) (\omega_m + w \chi_m) + w \frac{\partial^2 u_k}{\partial \varepsilon^2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right) \left(\delta_{1k} + \left(\frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ij2} u_j \chi_i \right) \delta_{2k} + \left(\frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ij3} u_j \chi_i \right) \delta_{3k} \right) \right) = \\ = - \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \delta_{1k} - p \chi_3 \delta_{2k} + p \chi_2 \delta_{3k} + \gamma_{2k} - f_k \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} = -B_{mp} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon},$$

$$\begin{aligned}
f_k = & \left[\frac{4n'\tau_{mp}}{d-2\delta} + nw^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} \chi_2 - \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} \chi_3 - \chi_3^2 u_1 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \chi_1 \chi_3 u_3 - \chi_2^2 u_1 - \chi_1 \chi_2 u_2 \right) \right] \delta_{1k} + \\
& + nw^2 \left[\chi_3 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \chi_3}{\partial \varepsilon} u_1 + \chi_3 \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_1}{\partial \varepsilon} u_3 - \right. , \quad (4.36) \\
& \left. - 2\chi_1 \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + \chi_1 \chi_2 u_1 - \chi_1^2 u_2 \right] \delta_{2k} + \\
& + nw^2 \left[-\chi_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \varepsilon} u_1 - \chi_2 \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \varepsilon} u_2 + \right. \\
& \left. + 2\chi_1 \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + \chi_1 \chi_3 u_1 - \chi_1^2 u_3 \right] \delta_{3k} \\
M_k = & A_{kk}(\chi_k - \chi_{0k}) + M_{0k} , \\
\frac{\partial \omega_k}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_k}{\partial \tau} = & \varepsilon_{ijk} \chi_j \omega_i , \\
\frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ijk} u_j \chi_i = & \delta_{1k} - k_{k1} , \\
\frac{\partial M_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ijk} M_j \chi_i - \varepsilon_{ilk} Q'_i + \mu_k + \sum_{i=1}^m M_{cki} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) = & 0 ,
\end{aligned}$$

где ε_{kij} - символы Леви – Чивита, которые удовлетворяют условиям:

- 1) $\varepsilon_{kij} = 0$, если в числе индексов i , j и k имеется хотя бы два одинаковых значения;
- 2) $\varepsilon_{kij} = 1$, если индексы i , j , k различны и являются циклической перестановкой чисел 1,2,3;
- 3) $\varepsilon_{kij} = -1$, если индексы различны и не соответствуют циклической перестановке чисел 1,2,3;

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k; \end{cases}$$

k_{ki} – элементы матрицы K преобразования базисов $\{\bar{i}_i\}$ и $\{\bar{e}_k\}$ (см. рис. 4.3).

В проекциях на связанные оси система уравнений (4.36) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} u_3 - \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} u_2 + 2\omega_2 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} - 2\omega_3 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - \\ & - \chi_2 Q'_3 + \chi_3 Q'_2 + (\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1) \omega_2 - (\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3) \omega_3 - , \quad (4.37) \\ & - \frac{\partial Q'_1}{\partial \varepsilon} - q_1 - f_1 - \gamma_{11} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} u_3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} u_1 - 2\omega_1 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} + 2\omega_3 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \\ & + \chi_1 Q'_3 - \chi_3 Q'_1 - (\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1) \omega_1 + (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2) \omega_3 - \\ & - \frac{\partial Q'_2}{\partial \varepsilon} - q_2 - f_2 - \gamma_{12} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} u_2 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} u_1 + 2\omega_1 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - 2\omega_2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \chi_1 Q'_2 \\ & + \chi_2 Q'_1 + (\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3) \omega_1 - (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2) \omega_2 - \\ & - \frac{\partial Q'_3}{\partial \varepsilon} - q_3 - f_3 - \gamma_{13} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & n \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} u_3 - \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} u_2 + 2\omega_2 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} - 2\omega_3 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \right. \\ & + w \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon} u_3 - \frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} u_2 + \omega_2 \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} - \omega_3 \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + \chi_2 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} - \right. \\ & \left. \left. - \chi_3 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} \right) + (\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1) (\omega_2 + w \chi_2) - \right. \\ & \left. - (\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3) (\omega_3 + w \chi_3) + w \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \varepsilon} + \frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right) = \\ & = - \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \gamma_{21} - f_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& n \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} u_3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} u_1 - 2\omega_1 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} + 2\omega_3 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \right. \\
& + w \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} u_1 - \frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} u_3 + \omega_3 \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - \omega_1 \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + \chi_3 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \right. \\
& \left. \left. - \chi_1 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} \right) - (\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1)(\omega_1 + w\chi_1) + \right. \\
& \left. (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2)(\omega_3 + w\chi_3) + w \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau \partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - u_3 \chi_1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + u_1 \chi_3 \right) \right) = -p\chi_3 + \gamma_{22} - f_2,
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
& n \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} u_2 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} u_1 + 2\omega_1 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - 2\omega_2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \right. \\
& + w \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} u_2 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon} u_1 + \omega_1 \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - \omega_2 \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + \chi_1 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - \right. \\
& \left. - \chi_2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right) + (\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3)(\omega_1 + w\chi_1) - (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2)(\omega_2 + w\chi_2) + \\
& w \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau \partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + w \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + u_2 \chi_1 - u_1 \chi_2 \right) = p\chi_2 + \gamma_{23} - f_3,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -B_{mp} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon},$$

$$f_1 = \frac{4n'\tau_{mp}}{d - 2\delta} +$$

$$+ nw^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} \chi_2 - \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} \chi_3 - \chi_3^2 u_1 - \chi_1 \chi_3 u_3 - \chi_2^2 u_1 - \chi_1 \chi_2 u_2 \right),$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & nw^2 \left[\chi_3 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \chi_3}{\partial \varepsilon} u_1 + \chi_3 \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_1}{\partial \varepsilon} u_3 - \right. \\
& \left. - 2\chi_1 \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + \chi_1 \chi_2 u_1 - \chi_1^2 u_2 \right],
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= nw^2 \left[-\chi_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \varepsilon} u_1 - \chi_2 \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \varepsilon} u_2 + \right. \\
&\quad \left. + 2\chi_1 \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + \chi_1 \chi_3 u_1 - \chi_1^2 u_3 \right], \\
M_1 &= A_{11}(\chi_1 - \chi_{01}) + M_{01}, \quad M_2 = A_{22}(\chi_2 - \chi_{02}) + M_{02}, \\
M_3 &= A_{33}(\chi_3 - \chi_{03}) + M_{03}, \\
\frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_1}{\partial \tau} &= \chi_3 \omega_2 - \chi_2 \omega_3, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \tau} = \chi_1 \omega_3 - \chi_3 \omega_1, \\
\frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_3}{\partial \tau} &= \chi_2 \omega_1 - \chi_1 \omega_2, \\
\frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + u_3 \chi_2 - u_2 \chi_3 &= \delta_{11} - k_{11}, \\
\frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - u_3 \chi_1 + u_1 \chi_3 &= \delta_{12} - k_{21}, \\
\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + u_2 \chi_1 - u_1 \chi_2 &= \delta_{13} - k_{31}, \\
\frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon} + M_3 \chi_2 - M_2 \chi_3 + \mu_1 + \sum_{i=1}^m M_{c1i} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) &= 0, \\
\frac{\partial M_2}{\partial \varepsilon} + M_1 \chi_3 - M_3 \chi_1 - Q'_3 + \mu_2 + \sum_{i=1}^m M_{c2i} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) &= 0, \\
\frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon} + M_2 \chi_1 - M_1 \chi_2 + Q'_2 + \mu_3 + \sum_{i=1}^m M_{c3i} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Система (4.37) представляет собой систему 22 уравнений. Однако при расчете используется только 20 уравнений. Это связано с тем, что, как уже отмечалось выше, в связи с принятой идеализацией движения рабочей жидкости (принимается гипотеза одномерности движения жидкости), пятое и шестое уравнения системы (4.37) не учитываются.

Определим количество краевых условий, необходимых для решения рассматриваемой задачи. В систему уравнений (4.37) входит 19 производных по пространственной переменной:

$$\frac{\partial Q'_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial Q'_2}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial Q'_3}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon},$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \chi_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \chi_2}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \chi_3}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varepsilon^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varepsilon^2}, \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}. \text{ Одна-}$$

ко это вовсе не значит, что нам необходимо иметь 19 краевых условий. Дело в том, что часть этих производных однозначно определяется первыми производными по пространственной переменной от других неизвестных. Так, вторые производные

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \varepsilon^2} \text{ и } \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varepsilon^2}, \text{ как следует из восемнадцатого и девятнадцатого}$$

уравнений системы (4.37) определяются через первые производные $\frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \chi_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \chi_2}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \chi_3}{\partial \varepsilon}$. С другой стороны,

производные $\frac{\partial \chi_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \chi_2}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial \chi_3}{\partial \varepsilon}$, в соответствии с одиннадца-

тым, двенадцатым и тринадцатым уравнениями системы (4.37)

прямо пропорциональны соответственно производным $\frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon},$

$\frac{\partial M_2}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon}$. Указанные обстоятельства позволяют исключить

из рассмотрения производные $\frac{\partial^2 u_2}{\partial \varepsilon^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varepsilon^2}, \frac{\partial \chi_1}{\partial \varepsilon}, \frac{\partial \chi_2}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial \chi_3}{\partial \varepsilon}$.

Остается 14 производных. Соответственно, мы имеем 14 краевых условий: 12 – для механической подсистемы (по шесть на каждом конце трубопровода) и два – для гидравлической (акустической) подсистемы.

Из системы уравнений (4.37) можно получить уравнения малых колебаний пространственно криволинейных трубопроводов при силовом их нагружении пульсирующим потоком рабочей жидкости и кинематическом возбуждении со стороны присоединенных агрегатов и систем, полагая $\bar{Q}' = \bar{Q}_0 + \Delta \bar{Q}$, $\bar{M} = \bar{M}_0 + \Delta \bar{M}$, $\bar{\chi} = \bar{\chi}_0 + \Delta \bar{\chi}$ и т.д., где $\Delta \bar{Q}$, $\Delta \bar{M}$, $\Delta \bar{\chi}$ – динамические составляющие соответствующих векторов; векторы

$\bar{Q}_0$, $\bar{M}_0$, $\bar{\chi}_0$ имеют компоненты в базисе $\{\bar{e}_i\}$, равные статическим значениям. При этом будем считать, что компоненты векторов $\bar{v}$, $\bar{\omega}$, $\bar{u}$ являются малыми величинами. Тогда из системы (3.47) получаем систему уравнений малых колебаний пространственно криволинейных трубопроводов при силовом их нагружении пульсирующим потоком рабочей жидкости и кинематическом возбуждении со стороны присоединенных агрегатов и систем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} - \Delta \bar{\chi} \times \bar{Q}_0 - \bar{\chi}_0 \times \Delta \bar{Q} - \frac{\partial \Delta \bar{Q}}{\partial \varepsilon} - \Delta \bar{q} - \Delta \bar{f} - \Delta \bar{\gamma}_1 &= 0, \\ n \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} + \Delta w \bar{\chi}_0 \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \Delta w \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial \varepsilon} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \tau} + \Delta w \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon} \right) \left(\bar{e}_1 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_0 \times \bar{u} \right)_2 \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_0 \times \bar{u} \right)_3 \bar{e}_3 \right) \right) \\ &= - \frac{\partial (\Delta p \bar{e}_1)}{\partial \varepsilon} + \Delta \bar{\gamma}_2 - \Delta \bar{f}, \\ \frac{\partial \Delta p}{\partial \tau} &= -B_{mp} \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon}, \quad \Delta \bar{f} = \Delta f_1 \bar{e}_1 + \Delta f_2 \bar{e}_2 + \Delta f_3 \bar{e}_3, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\Delta \bar{M} = A \Delta \bar{\chi}, \quad \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \tau} = \bar{\omega} \times \bar{\chi}_0,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_0 \times \bar{u} = \Delta \bar{e}_1 = \varphi_3 \bar{e}_2 - \varphi_2 \bar{e}_3,$$

$$\frac{\partial \Delta \bar{M}}{\partial \varepsilon} + \bar{\chi}_0 \times \Delta \bar{M} + \Delta \bar{\chi} \times \bar{M}_0 + \bar{e}_1 \times \Delta \bar{Q} + \Delta \bar{\mu} + \sum_{i=1}^m \bar{M}_{ci} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) = 0,$$

где φ_1 , φ_2 , φ_3 — углы поворота подвижных координатных осей.

В скалярной форме записи система уравнений (4.38) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2} + \varepsilon_{kij} \left(\Delta \chi_i Q'_{j0} + \chi_{i0} \Delta Q_j \right) - \frac{\partial \Delta Q_k}{\partial \varepsilon} - \Delta q_k - \Delta f_k - \Delta \gamma_{1k} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& n \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2} + (w_0 + \Delta w) \varepsilon_{kij} \chi_{i0} \frac{\partial u_j}{\partial \tau} + (w_0 + \Delta w) \frac{\partial^2 u_k}{\partial w \partial \varepsilon} + \right. \\
& + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \tau} + (w_0 + \Delta w) \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon} \right) \left(\delta_{1k} + \left(\frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ij2} u_j \chi_{i0} \right) \delta_{2k} + \right. \\
& + \left. \left. \left(\frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ij3} u_j \chi_{i0} \right) \delta_{3k} \right) \right) = \\
& = - \frac{\partial \Delta p}{\partial \varepsilon} \delta_{1k} - (\Delta p \chi_{30} + p \Delta \chi_3) \delta_{2k} + (\Delta p \chi_{20} + p \Delta \chi_2) \delta_{3k} + \Delta \gamma_{2k} - \Delta f_k \\
& \frac{\partial \Delta p}{\partial \tau} = - B_{mp} \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon}, \\
& \Delta f_k = \left[\frac{4n' \tau_{mpn}}{d - 2\delta} + n(w_0 + \Delta w)^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} \chi_{20} - \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} \chi_{30} - \chi_{30}^2 u_1 - \right. \right. \\
& - \left. \left. (\chi_{10} \chi_{30} u_3 - \chi_{20}^2 u_1 - \chi_{10} \chi_{20} u_2) \right) \right] \delta_{1k} + \\
& + n(w_0 + \Delta w)^2 \left[\chi_{30} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \chi_{30}}{\partial \varepsilon} u_1 + \chi_{30} \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_{10}}{\partial \varepsilon} u_3 - \right. \\
& - \left. 2 \chi_{10} \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + \chi_{10} \chi_{20} u_1 - \chi_{10}^2 u_2 \right] \delta_{2k} + \\
& + n(w_0 + \Delta w)^2 \left[- \chi_{20} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial \chi_{20}}{\partial \varepsilon} u_1 - \chi_{20} \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \chi_{10}}{\partial \varepsilon} u_2 + \right. \\
& + \left. 2 \chi_{10} \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + \chi_{10} \chi_{30} u_1 - \chi_{10}^2 u_3 \right] \delta_{3k}, \\
& \Delta M_k = A_{kk} \Delta \chi_k, \\
& \frac{\partial \omega_k}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_k}{\partial \tau} = \varepsilon_{ijk} \chi_{j0} \omega_i, \\
& \frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ijk} u_j \chi_{i0} = \varepsilon_{ki1} \varphi_i,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\frac{\partial \Delta M_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ijk} (M_{j0} \Delta \chi_i + \Delta M_j \chi_{i0}) + \varepsilon_{ikl} \Delta Q_l + \Delta \mu_k + \\ + \sum_{i=1}^m \Delta M_{cki} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) = 0$$

где $\tau_{трн}$ – нестационарное касательное напряжение на стенке трубы [43].

Следует отметить, что при выводе системы уравнений (4.39) учитывалось, что динамические составляющие давления и скорости рабочей жидкости могут быть одного порядка или даже больше, чем соответствующие статические составляющие. Так, из опыта эксплуатации трубопроводных систем напорных гидромагистралей известно, что размах колебаний давления рабочей жидкости может составлять до 70% от среднего давления. В безрасходных магистралях $w_0=0$, но при учете волновых процессов в рабочей жидкости $\Delta w \neq 0$, что в данной ситуации не позволяет пренебрегать динамической составляющей скорости рабочей жидкости.

Систему уравнений (4.39) можно переписать в развернутом виде:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \Delta \chi_3 Q_{20} - \Delta \chi_2 Q_{30} + \chi_{30} \Delta Q_2 - \chi_{20} \Delta Q_3 - \\ - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \varepsilon} - \Delta q_1 - \Delta f_1 - \Delta \gamma_{11} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \Delta \chi_1 Q_{30} - \Delta \chi_3 Q_{10} + \chi_{10} \Delta Q_3 - \chi_{30} \Delta Q_1 - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon} - \\ - \Delta q_2 - \Delta f_2 - \Delta \gamma_{12} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + \Delta \chi_2 Q_{10} - \Delta \chi_1 Q_{20} + \chi_{20} \Delta Q_1 - \chi_{10} \Delta Q_2 - \\ - \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \varepsilon} - \Delta q_3 - \Delta f_3 - \Delta \gamma_{13} = 0,$$

$$n \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + (w_0 + \Delta w) \left(\chi_{20} \frac{\partial u_3}{\partial \tau} - \chi_{30} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \varepsilon} + \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial \Delta w}{\partial \tau} \right) = \quad (4.40)$$

$$= -\frac{\partial \Delta p}{\partial \varepsilon} + \Delta \gamma_{21} - \Delta f_1,$$

$$n \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + (w_0 + \Delta w) \left(\chi_{30} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \chi_{10} \frac{\partial u_3}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau \partial \varepsilon} \right) + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \tau} + (w_0 + \Delta w) \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + u_1 \chi_{30} - u_3 \chi_{10} \right) \right) =$$

$$= -\Delta p \chi_{30} + p_0 \Delta \chi_3 + \Delta \gamma_{22} - \Delta f_2,$$

$$n \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + (w_0 + \Delta w) \left(\chi_{10} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - \chi_{20} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau \partial \varepsilon} \right) + \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \tau} + (w_0 + \Delta w) \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + u_2 \chi_{10} - u_1 \chi_{20} \right) \right) =$$

$$= \Delta p \chi_{20} + p_0 \Delta \chi_2 + \Delta \gamma_{23} - \Delta f_3,$$

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \tau} = -B_{mp} \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon},$$

$$\Delta f_1 = \frac{4n' \tau_{mpu}}{d - 2\delta} + n(w_0 + \Delta w)^2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} \chi_{20} - \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} \chi_{30} - \chi_{30}^2 u_1 - \chi_{10} \chi_{30} u_3 - \chi_{20}^2 u_1 - \chi_{10} \chi_{20} u_2 \right),$$

$$\Delta f_2 = n(w_0 + \Delta w)^2 \left[\Delta \chi_3 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \chi_{30}}{\partial \varepsilon} u_1 + \chi_{30} \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_{10}}{\partial \varepsilon} u_3 - 2 \chi_{10} \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + \chi_{10} \chi_{20} u_1 - \chi_{10}^2 u_2 \right], \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
\Delta f_3 &= n(w_0 + \Delta w)^2 \left[-\Delta \chi_2 + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial \chi_{20}}{\partial \varepsilon} u_1 - \chi_{20} \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + \right. \\
&+ \frac{\partial \chi_{10}}{\partial \varepsilon} u_2 + 2\chi_{10} \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + \chi_{10} \chi_{30} u_1 - \chi_{10}^2 u_3 \left. \right], \\
\Delta M_1 &= A_{11} \Delta \chi_1, \quad \Delta M_2 = A_{22} \Delta \chi_2, \quad \Delta M_3 = A_{33} \Delta \chi_3, \\
\frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_1}{\partial \tau} &= \chi_{30} \omega_2 - \chi_{20} \omega_3, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_2}{\partial \tau} = \chi_{10} \omega_3 - \chi_{30} \omega_1, \\
\frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_3}{\partial \tau} &= \chi_{20} \omega_1 - \chi_{10} \omega_2, \\
\frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + u_3 \chi_{20} - u_2 \chi_{30} &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - u_3 \chi_{10} + u_1 \chi_{30} = \varphi_3, \\
\frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + u_2 \chi_{10} - u_1 \chi_{20} &= -\varphi_2, \\
\frac{\partial \Delta M_1}{\partial \varepsilon} + M_{30} \Delta \chi_2 - M_{20} \Delta \chi_3 + \Delta M_3 \chi_{20} - \\
- \Delta M_2 \chi_{30} + \Delta \mu_1 + \sum_{i=1}^m \Delta M_{c1i} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) &= 0, \\
\frac{\partial \Delta M_2}{\partial \varepsilon} + M_{10} \Delta \chi_3 - M_{30} \Delta \chi_1 + \Delta M_1 \chi_{30} - \Delta M_3 \chi_{10} - \Delta Q_3 + \\
+ \Delta \mu_2 + \sum_{i=1}^m \Delta M_{c2i} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) &= 0, \\
\frac{\partial \Delta M_3}{\partial \varepsilon} + M_{20} \Delta \chi_1 - M_{10} \Delta \chi_2 + \Delta M_2 \chi_{10} - \\
- \Delta M_1 \chi_{20} + \Delta Q_2 + \Delta \mu_3 + \sum_{i=1}^m \Delta M_{c3i} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Основная особенность системы уравнений (4.40) заключается в том, что они зависят от статического напряженного состояния. Эта зависимость учитывается и определяется членами Q_{i0} и M_{i0} , входящими в состав уравнений. Для трубопроводов постоянного сечения (с постоянной площадью F_2) в системе

уравнений (4.40) полагается:

$$n(\varepsilon)=\text{const}, \quad n'(\varepsilon)=1, \quad A_{ii}=\text{const}.$$

В уравнения системы (4.40) входят члены Q_{i0} и M_{i0} , которые определяются из условий равновесия трубопровода, заполненного стационарным потоком жидкости, с действующими на него статическими силами $\bar{q}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\mu}$, $\bar{f}$. Для жестких трубопроводов приближенно можно считать, что статические силы и стационарный поток практически не изменяют форму осевой линии, т.е. вектор $\bar{\chi}_0$ для нагруженного трубопровода равен вектору $\bar{\chi}_0$ для трубопровода в естественном состоянии.

Решение системы уравнений (4.40) получено конечно-разностным методом.

Рассмотрим граничные условия данной задачи, состоящие из краевых и начальных условий. Как уже отмечалось выше, для каждого конца трубопровода можно записать 6 краевых условий. В частных случаях этими краевыми условиями являются [60]:

- при жесткой заделке

$$u_i=0, \quad \varphi_i=0 \quad (i=1,2,3);$$

- при консольном закреплении

$$\Delta M_i=0, \quad \Delta Q_i=0 \quad (i=1,2,3);$$

- при шарнирном закреплении, запрещающем перемещения по осям x_2 и x_3

$$u_2=u_3=0, \quad \Delta M_2=\Delta M_3=0, \quad \Delta Q_1=0, \quad \varphi_1=0.$$

- при закреплении в упруго-демпфирующих опорах:

$$\frac{\partial^3 u_i}{\partial \varepsilon^3} = c_i u_i - b_i \frac{\partial u_i}{\partial \tau};$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \varepsilon^2} = -\gamma_i \frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon} - B_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau \partial \varepsilon},$$

где c_i – коэффициент упругости опоры;

b_i – коэффициент демпфирования опоры;

γ_i – коэффициент моментной жесткости опоры;

B_i – коэффициент моментного демпфирования опоры.

Краевые условия для других типов закрепления концов трубопровода можно найти в специальной литературе, например [6, 49].

Рассмотрим краевые условия для гидравлической подсистемы. Ради простоты ограничим рассмотрение случаем трубопровода постоянного сечения. При этом $w_0 = \text{const}$. Давление рабочей жидкости в системе представляется в виде:

$$p = p_0 + \Delta p,$$

где p_0 – статическое давление в выходном сечении трубопровода;

Δp – переменная составляющая давления, учитывающая изменение давления по длине вследствие гидравлических потерь и изменение давления по длине и во времени вследствие волновых процессов в рабочей жидкости:

$$\Delta p(\tau, \varepsilon) = \Delta p_s(\varepsilon) + \Delta p_a(\tau, \varepsilon),$$

$\Delta p_s(\varepsilon)$ – переменная составляющая давления жидкости по длине вследствие гидравлических потерь;

$\Delta p_a(\tau, \varepsilon)$ – переменная составляющая давления жидкости по длине и во времени вследствие волновых (акустических) процессов.

Отметим, что

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial \tau} = \frac{\partial \Delta p_a}{\partial \tau},$$

т.е. в седьмом уравнении системы (4.40) учитывается только акустическая составляющая давления.

Постоянные составляющие скорости w_0 , давления p_0 и переменная составляющая $\Delta p_s(\varepsilon)$ являются либо заданными величинами, либо легко рассчитываются по формулам гидравлики [38,67]. Краевые условия для акустических составляющих давления и скорости рабочей жидкости могут задаваться в различных вариантах (отметим, что здесь рассматривается случай установившихся пульсаций жидкости, т.е. пульсаций с постоянной во времени частотой и амплитудой). Для каждой гармонической составляющей колебаний (здесь учитывается то, что реальные пульсационные процессы в гидросистемах являются полигармоническими) могут быть заданы:

- 1) комплексные амплитуды колебаний давления и скорости во входном сечении трубопровода;
- 2) комплексные амплитуды колебаний давления во входном и скорости в выходном сечении трубопровода;
- 3) комплексные амплитуды колебаний давления во входном и в выходном сечениях трубопровода;

- 4) комплексная амплитуда колебаний давления во входном сечении трубопровода и импеданс нагрузки;
- 5) комплексная амплитуда колебаний давления в выходном сечении трубопровода и входной импеданс.

Представлены только 5 вариантов задания краевых условий гидравлической (акустической) подсистемы. Всего существует 14 таких вариантов краевых условий, которые могут быть получены любой комбинацией (кроме Z_{ex} и Z_n) двух из следующих параметров:

- 1) комплексная амплитуда колебаний давления во входном сечении трубопровода;
- 2) комплексная амплитуда колебаний давления в выходном сечении трубопровода;
- 3) комплексная амплитуда скорости во входном сечении трубопровода;
- 4) комплексная амплитуда скорости в выходном сечении трубопровода;
- 5) импеданс нагрузки Z_n ;
- 6) входной импеданс Z_{ex} .

Начальные условия механической подсистемы трубопровода задаются в виде значений искоемых переменных и их первых производных в нулевой момент времени. Начальные условия для гидравлической подсистемы не задаются, когда рассматриваются установившиеся колебаний рабочей жидкости.

Результатами расчета по разработанной модели являются, в первую очередь распределения вибропараметров, а также переменных составляющих моментов ΔM_i и перерезывающих сил ΔQ_i по длине трубопровода и во времени. Они позволяют перейти к рассмотрению прочностных характеристик трубопроводов сложной пространственной конфигурации при их динамическом силовом нагружении пульсациями рабочей жидкости и кинематическом возбуждении со стороны присоединенных агрегатов и систем. Однако, прежде чем переходить к прочностным характеристикам, рассмотрим ряд частных случаев разработанной математической модели.

Из системы уравнений (4.40) можно легко получить уравнения малых свободных колебаний криволинейного трубопровода в проекциях на связанные оси. При этом из рассмотрения исключаются с четвертого по десятое уравнения, описывающие движение жидкости в трубопроводе и ее силовое воздействие на трубопровод. Исключим также одиннадцатое, две-

надцатое и тринадцатое уравнения системы (4.40), подставив их в три последние уравнения системы. После данных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \Delta \chi_3 Q_{20} - \Delta \chi_2 Q_{30} + \chi_{30} \Delta Q_2 - \chi_{20} \Delta Q_3 - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \varepsilon} = 0, \\
& \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \Delta \chi_1 Q_{30} - \Delta \chi_3 Q_{10} + \chi_{10} \Delta Q_3 - \chi_{30} \Delta Q_1 - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon} = 0, \\
& \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + \Delta \chi_2 Q_{10} - \Delta \chi_1 Q_{20} + \chi_{20} \Delta Q_1 - \chi_{10} \Delta Q_2 - \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \varepsilon} = 0, \\
& \frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_1}{\partial \tau} = \chi_{30} \omega_2 - \chi_{20} \omega_3, \\
& \frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_2}{\partial \tau} = \chi_{10} \omega_3 - \chi_{30} \omega_1, \\
& \frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_3}{\partial \tau} = \chi_{20} \omega_1 - \chi_{10} \omega_2, \\
& \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + u_3 \chi_{20} - u_2 \chi_{30} = 0, \\
& \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - u_3 \chi_{10} + u_1 \chi_{30} = \varphi_3, \\
& \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + u_2 \chi_{10} - u_1 \chi_{20} = -\varphi_2, \\
& \frac{\partial (A_{11} \Delta \chi_1)}{\partial \varepsilon} + M_{30} \Delta \chi_2 - M_{20} \Delta \chi_3 + \Delta M_3 \chi_{20} - \Delta M_2 \chi_{30} = 0, \\
& \frac{\partial (A_{22} \Delta \chi_2)}{\partial \varepsilon} + M_{10} \Delta \chi_3 - M_{30} \Delta \chi_1 + \Delta M_1 \chi_{30} - \Delta M_3 \chi_{10} - \Delta Q_3 = 0, \\
& \frac{\partial (A_{33} \Delta \chi_3)}{\partial \varepsilon} + M_{20} \Delta \chi_1 - M_{10} \Delta \chi_2 + \Delta M_2 \chi_{10} - \Delta M_1 \chi_{20} + \Delta Q_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

При выводе системы уравнений (4.41), описывающей малые свободные колебания криволинейного трубопровода, полагалось, что равны нулю внешние распределенные силы и моменты, внешние сосредоточенные моменты. Пренебрежено также влиянием распределенных сил, вызванных силовыми по-

лями.

В качестве примера получим уравнения малых свободных колебаний стержня постоянного сечения, являющегося дугой окружности. Осевая линия такого стержня лежит в одной плоскости. Уравнения колебаний в этой плоскости можно получить из системы (4.41) при следующих упрощениях:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0; \quad \chi_{10} = \chi_{20} = 0; \quad \chi_{30} = \frac{1}{R}; \quad \Delta\chi_1 = \Delta\chi_2 = 0;$$

$Q_{10} = Q_{20} = Q_{30} = 0; \quad \Delta Q_3 = 0; \quad \varphi_1 = 0$. Тогда уравнения свободных колебаний в рассматриваемой постановке переписутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \varepsilon} + \chi_{30} \Delta Q_2 &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon} - \chi_{30} \Delta Q_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (A_{33} \Delta \chi_3) + \Delta Q_2 &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - u_2 \tilde{\chi}_{30} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + u_1 \chi_{30} &= \varphi_3, \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_3}{\partial \tau} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

Итак, мы получили систему 6 уравнений с 6 неизвестными $u_1, u_2, \omega_3, \Delta Q_1, \Delta Q_2, \Delta \chi_3$. В дальнейших преобразованиях учтем, что

$$\omega_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau}.$$

При постоянном сечении трубопровода $A_{33} = I$, при этом $\Delta M_3 = \Delta \chi_3$. Тогда систему (4.42) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \chi_{30} \Delta Q_2 &= 0, \\ \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \chi_{30} \Delta Q_1 &= 0, \\ \Delta Q_2 &= -\frac{\partial \Delta M_3}{\partial \varepsilon}, \\ u_2 &= \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon}, \\ \varphi_3 &= \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + \chi_{30} u_1, \\ \Delta \tilde{M}_3 &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (4.43)$$

Упростим эту систему, сократив число входящих в нее уравнений. Подставляя четвертое уравнение системы (4.43) в пятое, получим:

$$\varphi_3 = \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon^2} + \chi_{30} u_1. \quad (4.44)$$

Объединим третье и шестое уравнения:

$$\Delta Q_2 = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2}. \quad (4.45)$$

Из второго уравнения системы (4.43) выразим ΔQ_1 :

$$\Delta Q_1 = \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon}, \quad (4.46)$$

Подставим в (4.46) четвертое уравнение системы (4.43) и выражение (4.45). Получим:

$$\Delta Q_1 = \frac{1}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \varepsilon \partial \tau^2} + \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \varepsilon^3}. \quad (4.47)$$

Теперь выражения (4.47) и (4.45) подставим в первое уравнение системы (4.43). Окончательно получим:

$$\frac{1}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} = -\frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} - \chi_{30} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2},$$

С учетом всего вышесказанного систему (4.43) можно переписать в виде системы 3 уравнений для 3 неизвестных u_1 , u_2 , φ_3 :

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon}, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon^2} + \chi_{30} u_1, \\ \frac{1}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} &= -\frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} - \chi_{30} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Система уравнений (4.48) получена при неучете сил трения (сопротивления). Однако в случае свободных колебаний стержней именно трение определяет затухающий характер рассматриваемых процессов. Введем в третье уравнение системы (4.48) член, характеризующий трение. Тогда можно записать:

$$\frac{1}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - H \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = -\frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} - \chi_{30} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2},$$

где H - некоторый коэффициент, характеризующий работу сил трения (сопротивления).

С учетом этого систему (4.48) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon}, \\ \varphi_3 &= \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon^2} + \chi_{30} u_1, \\ \frac{1}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - H \frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= -\frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} - \chi_{30} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Рассмотрим схему решения уравнения (4.49) с использованием метода конечных разностей в общем виде. Для решения системы (4.49) должны быть заданы граничные и начальные условия. Начальные условия могут быть представлены в виде распределения в нулевой момент времени какого-либо параметра (u_1 , u_2 или φ_3) по длине трубопровода. Поскольку в системе (4.49) единственной величиной явно дифференцируемой по времени является u_1 , решение сеточных уравнений целесообразно получать именно относительно этого параметра. Все

остальные величины могут быть определены через найденное решение для u_1 . В случае, если начальные условия заданы через u_2 переход к переменной u_1 осуществляется с учетом граничных условий по соотношению:

$$u_1 = \int \chi_{30} u_2 d\varepsilon.$$

В случае, если начальные условия заданы через φ_3 , их можно сразу использовать для нахождения распределения u_1 на первом временном слое, подставляя заданные значения φ_3 в правую часть третьего уравнения системы (4.49). Если начальные условия заданы в виде распределения u_1 , то с помощью второго уравнения системы (4.49) можно найти распределение φ_3 по длине трубопровода, которое затем также подставляется в правую часть третьего уравнения системы (4.49). Как уже отмечалось, решение третьего уравнения системы (4.49) представляет собой значения u_1 в узлах сетки для первого временного слоя. С помощью первого и второго уравнений системы (4.49) могут быть найдены значения u_2 и φ_3 в узлах сетки первого временного слоя. Найденное решение для φ_3 на первом временном слое подставляется в правую часть третьего уравнения системы (4.49). Далее определяется решение для u_1 на втором временном слое и т. д.

Перепишем третье уравнение системы (4.49) в виде:

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - \chi_{30}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - H \chi_{30}^2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = -\chi_{30} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} - \chi_{30}^3 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2}$$

и обозначим его правую часть через $C(\varepsilon)$:

$$C(\varepsilon) = -\chi_{30} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} - \chi_{30}^3 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2}.$$

Получим:

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - \chi_{30}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - H \chi_{30}^2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = C(\varepsilon). \quad (4.50)$$

Нанесем на пространственно-временную область $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq \tau \leq T$ конечно-разностную сетку $\omega_{\varepsilon, \tau}$:

$$\omega_{\varepsilon, \tau} = \left\{ \varepsilon_i = i \Delta \varepsilon, i = \overline{0, N}; \tau^j = j \Delta \tau, j = \overline{0, K} \right\}, \quad (4.51)$$

с пространственным шагом $\Delta \varepsilon = 1 / N$ и шагом по времени $\Delta \tau = T / K$ (рис. 4.4).

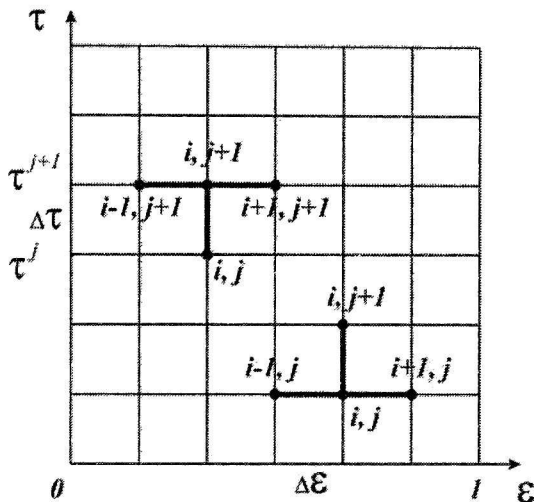


Рис. 4.4 – Конечно-разностная сетка.

Введем два временных слоя: нижний $\tau^j = j \Delta \tau$, на котором распределение искомой функции $u_1(\varepsilon_i, \tau^j)$, $i = \overline{0, N}$ известно (при $j = 0$ распределение определяется начальными условиями, как отмечалось выше), и верхний временной слой $\tau^{j+1} = (j+1) \Delta \tau$, на котором распределение искомой функции $u_1(\varepsilon_i, \tau^{j+1})$, $i = \overline{0, N}$ подлежит определению. На сетке (4.51) введем сеточные функции u_i^j , u_i^{j+1} , первая из которых известна, вторая – подлежит определению. Для ее определения в левой части (4.50) заменим (аппроксимируем) дифференциальные операторы отношением конечных разностей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} \Big|_i &= \\ &= \frac{(u_1)_{i+1}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^j + (u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_i^{j+1} + 4(u_1)_i^j - 2(u_1)_i^{j-1} + (u_1)_{i-1}^{j+1} - 2(u_1)_{i-1}^j + (u_1)_{i-1}^{j-1}}{(\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)^2} \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} \Big|_i &= \frac{(u_1)_i^{j+1} - 2(u_1)_i^j + (u_1)_i^{j-1}}{(\Delta \tau)^2}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau} \Big|_i = \frac{(u_1)_i^{j+1} - (u_1)_i^{j-1}}{2\Delta \tau}.$$

В выражениях (4.52) аппроксимация проводилась с помощью отношения центральных разностей. Конечно-разностная аппроксимация выражения (4.50) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{(u_1)_{i+1}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^j + (u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_i^{j+1} + 4(u_1)_i^j - 2(u_1)_i^{j-1} + (u_1)_{i-1}^{j+1} - 2(u_1)_{i-1}^j + (u_1)_{i-1}^{j-1}}{(\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)^2} - \\ &- \tilde{\chi}_{30}^2 \frac{(u_1)_i^{j+1} - 2(u_1)_i^j + (u_1)_i^{j-1}}{(\Delta \tau)^2} - H \chi_{30}^2 \frac{(u_1)_i^{j+1} - (u_1)_i^{j-1}}{2(\Delta \tau)} = C_i^j, \end{aligned} \quad (4.53)$$

где C_i^j - может быть найдено по выражению:

$$C_i^j = \left[-\chi_{30} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} \right]_i^j - \left[\chi_{30}^3 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2} \right]_i^j$$

с использованием аппроксимации соответствующих дифференциальных операторов отношением конечных разностей. В этом случае получим:

$$\begin{aligned} C_i^j &= -\chi_{30} \frac{(\varphi_3)_{i+2}^j - 4(\varphi_3)_{i+1}^j + 6(\varphi_3)_i^j - 4(\varphi_3)_{i-1}^j + (\varphi_3)_{i-2}^j}{(\Delta \varepsilon)^4} - \\ &- \chi_{30}^3 \cdot \frac{(\varphi_3)_{i+1}^j - 2(\varphi_3)_i^j + (\varphi_3)_{i-1}^j}{(\Delta \varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Умножим каждый член выражения (4.53) на комплекс $(\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)^2$. Получим:

$$\begin{aligned}
& (u_1)_{i+1}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^j + (u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_i^{j+1} + 4(u_1)_i^j - 2(u_1)_i^{j-1} + \\
& + (u_1)_{i-1}^{j+1} - 2(u_1)_{i-1}^j + (u_1)_{i-1}^{j-1} - \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 \cdot [(u_1)_i^{j+1} - 2(u_1)_i^j + (u_1)_i^{j-1}] - \\
& - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau) [(u_1)_i^{j+1} - (u_1)_i^{j-1}] = \\
& = C_i^j (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)^2.
\end{aligned}$$

После группировки членов и преобразований окончательно можно записать:

$$\begin{aligned}
& (u_1)_{i-1}^{j+1} + (-2 - \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 + 0,5 H (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)) (u_1)_i^{j+1} + (u_1)_{i+1}^{j+1} = \\
& = C_i^j (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)^2 + 2(u_1)_{i-1}^j - (4 + 2 \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2) (u_1)_i^j + 2(u_1)_{i+1}^j - \\
& - (u_1)_{i-1}^{j-1} + (2 + \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 + 0,5 H (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)) (u_1)_i^{j-1} - (u_1)_{i+1}^{j-1}.
\end{aligned} \quad (4.55)$$

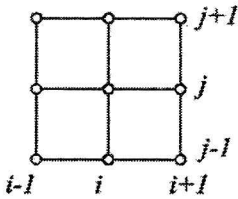


Рис. 4.5 – Шаблон конечно-разностной схемы для уравнения свободных колебаний.

Шаблон данной конечно-разностной схемы представлен на рис. 4.5. Данная конечно-разностная схема является неявной.

Для вычисления C_i^j отношением центральных разностей в соответствии с выражением (4.54) требуется введение фиктивных точек сетки: ε_{-1} и ε_{N+1} , где N - число узлов сетки, на которое раз-

бит рассматриваемый трубопровод.

Далее рассмотрим частный случай краевых условий – жесткую заделку концов трубопровода. В этом случае при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$ $u_1 = u_2 = \varphi_3 = 0$. Тогда из первого уравнения системы

$$(4.49) \text{ следует, что } \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} = 0, \text{ а из второго уравнения } \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon^2} = 0.$$

Кроме того, продифференцировав по пространственной переменной первое уравнение системы (4.49) получаем при $\varepsilon = 0$ и

$$\varepsilon = 1 \quad \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Проведем конечно-разностную аппроксимацию краевых условий для u_I при $\varepsilon = 0$:

$$\left(\frac{\partial u_I}{\partial \varepsilon} \right)_0 = \frac{(u_I)_I - (u_I)_{-I}}{2(\Delta \varepsilon)} = 0 \Rightarrow (u_I)_I = (u_I)_{-I}; \quad (4.56)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_I}{\partial \varepsilon^2} \right)_0 = \frac{(u_I)_I - 2(u_I)_0 + (u_I)_{-I}}{(\Delta \varepsilon)^2} = 0.$$

Из последнего выражения с учетом того, что $(u_I)_0 = 0$, получаем $(u_I)_I = -(u_I)_{-I}$. Сравнивая полученное выражение с (4.56) можно записать $(u_I)_I = 0$.

Аналогично для краевого условия при $\varepsilon = I$ получаем:

$$(u_I)_{N-I} = (u_I)_N = 0.$$

Таким образом, величинами, которые необходимо определить, являются значения $(u_I)_i$ при $i \in [2; N-2]$. При этом выражение (4.55) для $i = 2$ и $i = N-2$ принимает несколько иной вид:

$$\begin{aligned} & \left(-2 - \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau) \right) (u_I)_2^{j+I} + (u_I)_3^{j+I} = \\ & = C_2^j (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)^2 - (4 + 2 \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2) \times \\ & \times (u_I)_2^j + 2(u_I)_3^j + (2 + \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)) (u_I)_2^{j-I} - \\ & - (u_I)_3^{j-I}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} & (u_I)_{N-3}^{j+I} + \left(-2 - \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau) \right) (u_I)_{N-2}^{j+I} = \\ & = C_{N-2}^j (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)^2 + 2(u_I)_{N-3}^j - \\ & - (4 + 2 \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2) (u_I)_{N-2}^j - (u_I)_{N-3}^{j-I} + \\ & + (2 + \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)) (u_I)_{N-2}^{j-I}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Начальные условия будем задавать в виде значений нормальной составляющей перемещения в узлах сетки. Для аппроксимации начальных условий отношением центральных разностей требуется введение фиктивного временного слоя, для которого $j = -I$. Будем полагать, что в начальный момент времени система была выведена из положения равновесия, но на-

ходила в состоянии покоя. При этом $(u_{1,2})_i^0 = (u_{1,2})_i^I$. Отметим также, что корректное задание начальных условий в виде значений нормальной составляющей перемещения требует выполнения равенства:

$$\int_0^I u_2 d\varepsilon = 0,$$

или в сеточной форме записи:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (u_2)_i = 0.$$

Предположение о состоянии покоя системы в начальный момент времени позволяет несколько упростить форму записи выражений (4.55), (4.57) и (4.58) при расчете первого временно-го слоя:

$$\begin{aligned} & (-2 - \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)) (u_1)_2^I + (u_1)_3^I = \\ & = C_2^0 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)^2 + (-2 - \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 - \\ & - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)) (u_1)_2^0 + (u_1)_3^0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} & (u_1)_{N-3}^I + (-2 - \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)) (u_1)_{N-2}^I = \\ & = C_{N-2}^0 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)^2 + (u_1)_{N-3}^0 + \\ & + (-2 - \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)) (u_1)_{N-2}^0, \\ & (u_1)_{i-1}^I + (-2 - \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)) (u_1)_i^I + (u_1)_{i+1}^I = \\ & = C_i^0 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)^2 + (u_1)_{i-1}^0 + \\ & + (-2 - \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 - 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau)) (u_1)_i^0 + \\ & + (u_1)_{i+1}^0 \text{ при } i \in [3; N-3]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Соотношения (4.55), (4.57) – (4.61) можно записать как одно матричное уравнение:

$$[K] \cdot [u_1] = [f], \quad (4.62)$$

$$\text{где } K = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 1 & a & 1 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & 1 & a & 1 \\ & & & & & & 0 & 1 & a \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \\ f_{N-3} \\ f_{N-2} \end{bmatrix},$$

$$a = -(2 + \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 + 0,5 H \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau));$$

f_2 - правая часть выражения (4.59) при $j = 0$ или (4.57) при $j > 0$,

$f_i, i \in [3; N-3]$ - правая часть выражения (4.61) при $j = 0$ или (4.55) при $j > 0$,

f_{N-2} - правая часть выражения (4.60) при $j = 0$ или (4.58) при $j > 0$,

$[u_1]$ - вектор-столбец, представляющий собой транспонированную вектор-строку

$$[(u_1)_2^{j+1}, (u_1)_3^{j+1}, \dots, (u_1)_i^{j+1}, \dots, (u_1)_{N-2}^{j+1}].$$

Для каждого временного слоя будет записываться свое уравнение (4.62), отличающееся от аналогичного выражения для предыдущего временного слоя значениями вектора $[f]$. Решение системы уравнений (4.62) ведется методом Гаусса.

В качестве модельного примера возьмем трубопровод без жидкости со следующими параметрами: $l = 0,4 \text{ м}$; $d = 0,004 \text{ м}$; $\delta = 0,0006 \text{ м}$; $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $R = 0,23 \text{ м}$; где d - наружный диаметр трубопровода, δ - толщина стенки трубопровода; R - радиус кривизны.

Проведем несложные вычисления:

$$F_I = \pi \delta (d - \delta) = 6,409 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$m_I = \rho F_I = 0,04999 \text{ кг/м};$$

$$J_3 = \frac{\pi}{64} [d^4 - (d - 2\delta)^4] = 9,549 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4;$$

$$A_{33} = E \cdot J_3 = 1,91 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

$$p_0 = \sqrt{\frac{A_{33}}{m_0 l^4}} = 38,63 \text{ с}^{-1};$$

$$\chi_{30} = \frac{l}{R} = 1,739.$$

При проведении расчетов примем:

- 1) число узлов конечно-разностной сетки $N = 20$; $\Delta \varepsilon = 1/N = 0,05$;
- 2) шаг дискретизации по времени $\Delta \tau = \Delta \varepsilon / 200 = 2,5 \cdot 10^{-4}$;
- 3) эпюру начальных значений нормальных составляющих смещения (см. рис. 4.6).

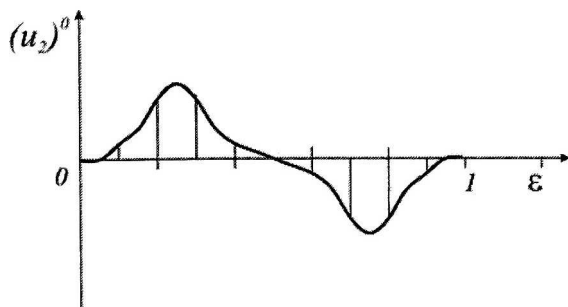


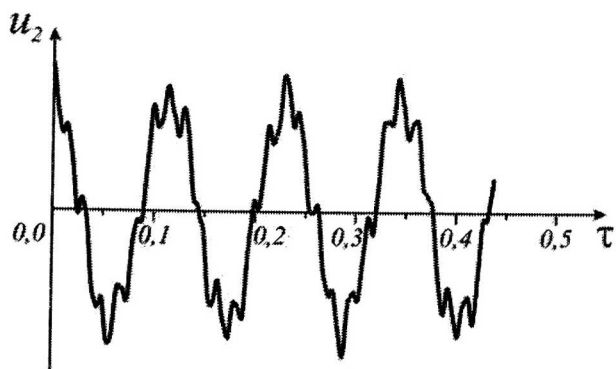
Рис. 4.6 – Эпюра начальных значений нормальных составляющих перемещения для задачи собственных колебаний.

Результаты расчетов представлены на рисунках ниже.

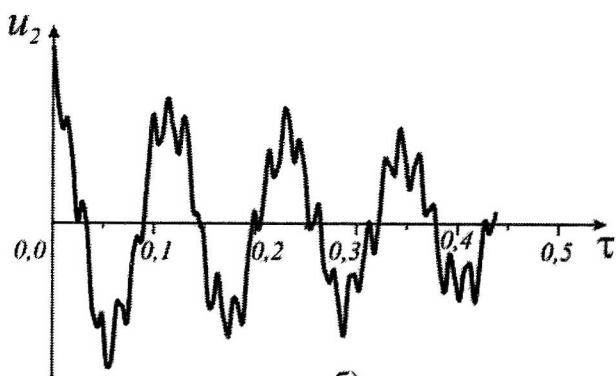
На рис. 4.7 в безразмерных параметрах изображены расчетные временные реализации нормального вибросмещения в точке с координатой $\varepsilon = 0,25$. Рис. 4.7,а соответствует системе без трения ($H = 0$), в которой реализуются незатухающие свободные колебания. Введение в систему трения ($H > 0$) приводит к затуханию свободных колебаний (рис. 4.7,б, в). При этом, чем больше H , тем быстрее затухают колебания.

На рис. 4.8 изображены расчетные временные реализации нормальной виброскорости, соответствующие графикам рис. 4.7. Из них также видно, что с увеличением параметра H колебания затухают быстрее. На рис. 4.9 представлены расчетные амплитудные спектры вибросмещения, соответствующие временным реализациям рис. 4.7. Анализ рис. 4.9 показывает, что частоты основных составляющих спектра не зависят от величин трения (сопротивления) – параметра H . На рис. 4.10 представлены расчетные амплитудные спектры виброскорости, соответствующие временным реализациям рис. 4.8. Из рис. 4.10 также видно, что частоты основных составляющих спектра не зависят от величины трения (сопротивления).

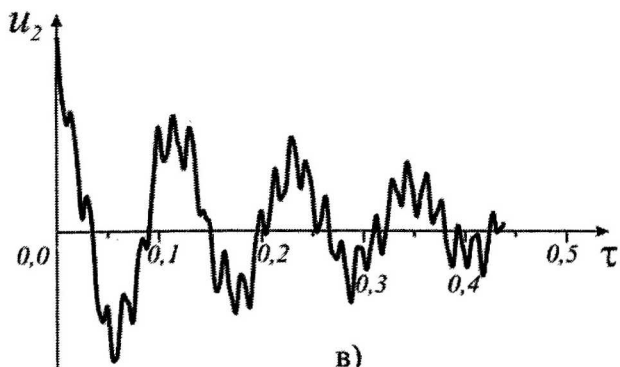
На рис. 4.9 – 4.11 толстыми вертикальными линиями представлены результаты модального анализа рассматриваемого трубопровода с помощью метода конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Следует отметить, что на рисунках нанесены только те результаты модального анализа, которые соответствуют пикам на расчетных амплитудных характеристиках, полученных по предложенной модели. Дело в том, что при заданных начальных условиях (см. рис. 4.6) возбуждаются не все формы колебаний и, естественно, невозбужденные формы колебаний не внесли своего вклада в амплитудные характеристики рис. 4.9 – 4.10. Обращает на себя внимание увеличение расхождения между собственными частотами, полученными по предложенной модели и в ANSYS, с ростом номера формы колебаний. Эти данные представлены в таблице 4.1.



а)

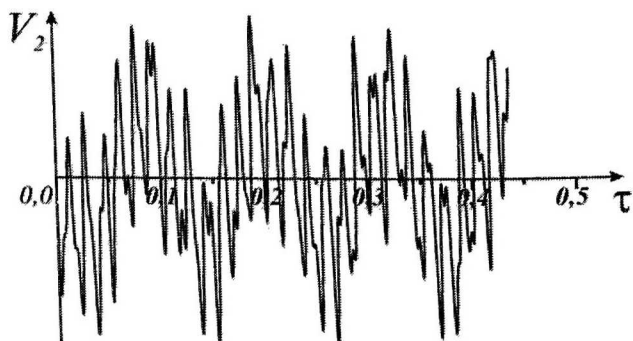


б)

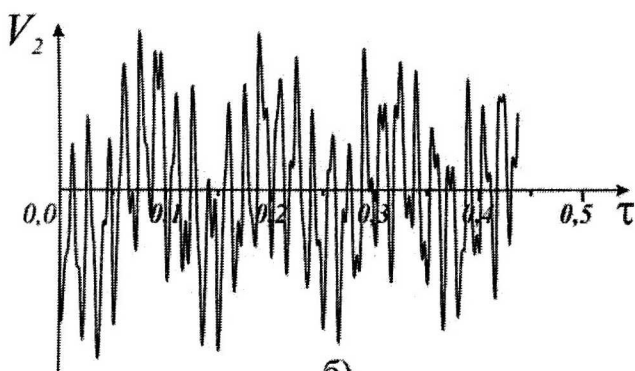


в)

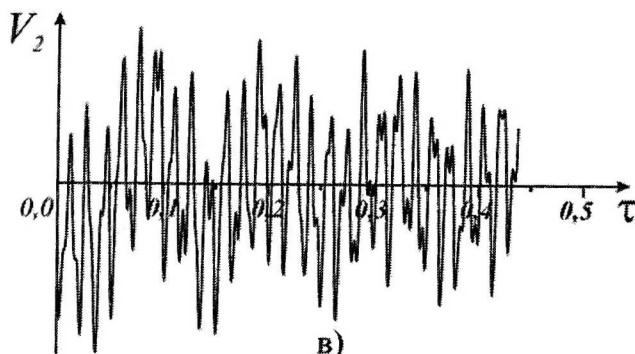
Рис. 4.7 – Расчетные временные реализации безразмерного нормального вибросмещения при свободных колебаниях:
а) без трения, $H=0$; б) с трением, $H=20$; в) с трением, $H=50$.



а)

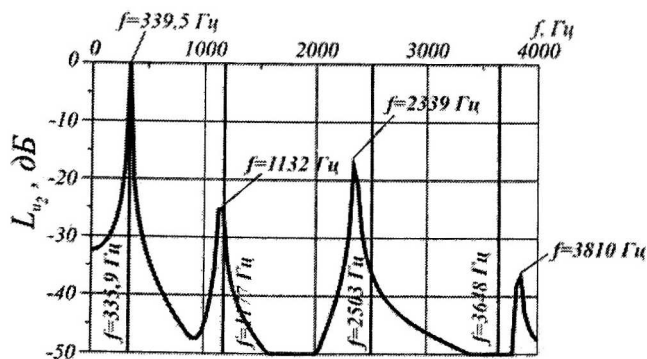


б)

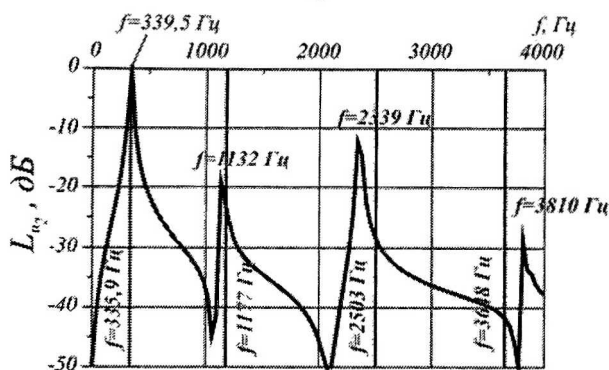


в)

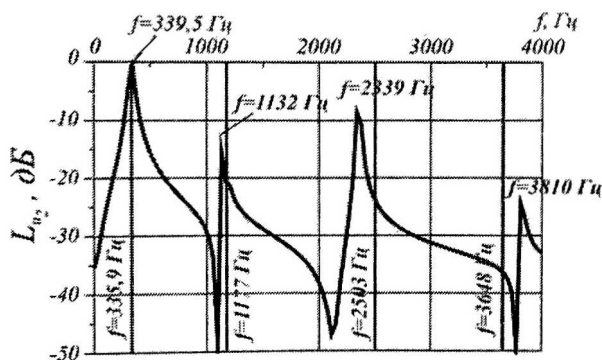
Рис. 4.8 - Расчетные временные реализации безразмерной нормальной виброскорости при свободных колебаниях:
а) без трения, $H=0$; б) с трением, $H=20$; в) с трением, $H=50$.



а)

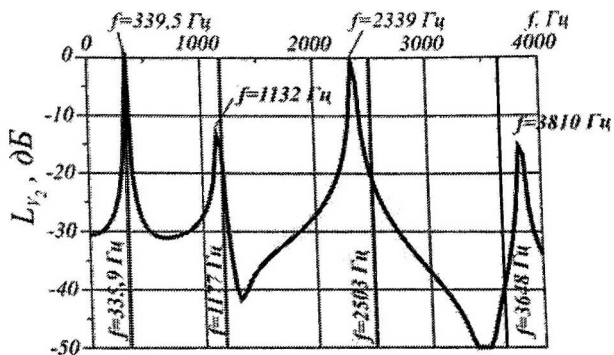


б)

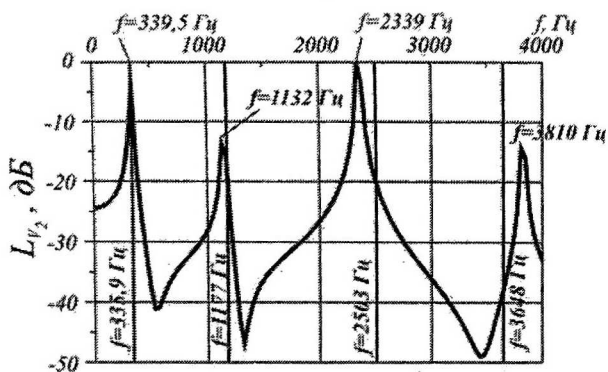


в)

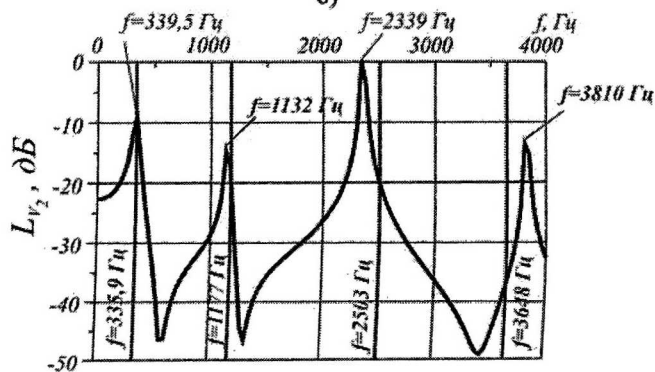
Рис. 4.9 – Амплитудные спектры вибросмещения при свободных колебаниях для различных величин трения (сопротивления): а) без трения, $H=0$; б) $H=20$; в) $H=50$.



а)



б)



в)

Рис. 4.10 – Амплитудные спектры виброскорости при свободных колебаниях для различных величин трения (сопротивления): а) без трения, $H=0$; б) $H=20$; в) $H=50$.

Таблица 4.1. Собственные частоты колебаний трубопровода.

Номер формы	Частота по предложенной модели, Гц	Частота, полученная в ANSYS, Гц	Расхождение, %
1	339,5	335,9	1,066
3	1132	1177	3,898
5	2339	2503	6,774
7	3810	3648	4,344

Данное расхождение обусловлено пренебрежением в предложенной модели инерцией вращения. В любом случае, погрешность вызванная этим допущением, не превышает 7%. Следует также отметить, что при принятой начальной форме распределения нормального смещения относительно положения равновесия возбуждаются только нечетные формы колебаний трубопровода.

Для выявления в спектре собственных колебаний всех собственных частот следует взять какую-либо иную (несимметричную) эпюру начальных значений нормальной составляющей смещения относительно положения равновесия (см., например, рис. 4.11). Результаты расчета в виде амплитудных спектров безразмерных вибропараметров, рассчитанных при $H=0$, приведены на рис. 4.12. Число собственных частот в спектре в этом случае больше. Все они соответствуют результатам модального анализа, полученным в программном комплексе ANSYS.

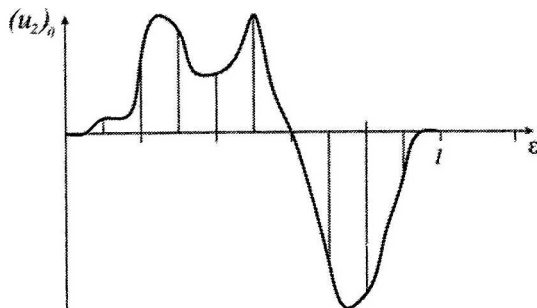


Рис. 4.11 – Эпюра начальных значений нормальных составляющих перемещения для задачи собственных колебаний.

Особого внимания заслуживает анализ устойчивости предложенной конечно–разностной схемы, который в данной работе подробно не исследован. Были лишь проведены расчеты для рассмотренного модельного примера при различных величинах шага временной дискретизации:

$$1) \Delta\tau = 0,00025;$$

$$2) \Delta\tau = 0,0005;$$

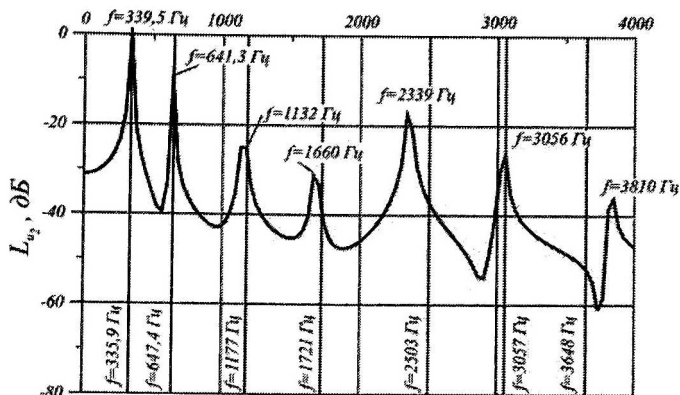
$$3) \Delta\tau = 0,001;$$

$$4) \Delta\tau = 0,002.$$

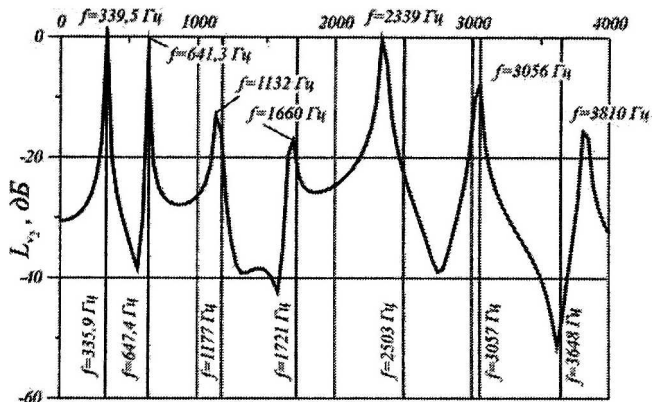
Для первых трех случаев результаты расчета совпадают, что позволяет судить об устойчивости конечно–разностной схемы аппроксимации при данных величинах шага временной дискретизации. Для четвертого случая результаты расчета представляют расходящийся колебательный процесс, т.е. конечно–разностная схема неустойчива.

Проведенные расчеты позволяют говорить, что предложенная конечно–разностная схема является условно устойчивой по начальным данным, т. е., устойчивой при определенном соотношении шагов $\Delta\tau$ и $\Delta\varepsilon$.

В качестве еще одного частного случая разработанной общей математической модели динамики криволинейного трубопровода с пульсирующим потоком рабочей жидкости рассмотрим задачу односвязанных колебаний, когда движение трубопровода не вызывает в жидкости никаких дополнительных волновых процессов. Это является определенным допущением, снижающим точность представленной математической модели. Однако данное предположение справедливо в большинстве практических случаев.



а)



б)

Рис. 4.12 – Амплитудные спектры вибросмещения (а) и виброскорости (б) при свободных колебаниях трубопровода.

Основные изменения в разработанной математической модели, связанные с этим допущением, касаются уравнения движения жидкости. В частности, уравнение (4.6) при этом переписывается в виде:

$$\frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t},$$

а уравнение (4.7) преобразуется к виду:

$$\bar{w} = w_1 \bar{e}_1.$$

С учетом сделанных замечаний уравнение движения (4.5) можно записать в виде:

$$m_2(s) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right) = - \frac{\partial (p F_2 \bar{e}_1)}{\partial s} + \bar{\gamma}_2 - \bar{f}, \quad (4.63)$$

где с учетом принятых допущений:

$$\bar{f} = \tau_{mp} \Pi \bar{e}_1.$$

Примем ряд дополнительных упрощающих допущений:

1) диаметр и толщина стенки трубопровода постоянны по его длине, трубопровод изготовлен из одного однородного материала, т.е.

$$\rho_m = \text{const}; d = \text{const}; \delta = \text{const}; F_1 = \text{const};$$

$$F_2 = \text{const}; m_1 = \text{const}; m_2 = \text{const};$$

2) распределенные силы, вызванные силовыми полями, пренебрежимо малы, т.е.

$$\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0;$$

3) внешние распределенные силы отсутствуют, т. е.

$$\bar{q} = 0.$$

С учетом всех принятых допущений уравнения (4.1) и (4.19) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} &= \frac{\partial \bar{Q}'}{\partial s} + \bar{f}, \\ m_2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} w \right) &= -F_2 \frac{\partial (p \bar{e}_1)}{\partial s} - \bar{f}. \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

Из второго уравнения системы (4.64) запишем выражение для определения вектора сил взаимодействия между трубопроводом и рабочей жидкостью:

$$\bar{f} = -\bar{m}_2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} w \right) - F_2 \frac{\partial (p \bar{e}_1)}{\partial s}. \quad (4.65)$$

Подставим выражение (4.65) в первое уравнение системы (4.64):

$$(m_1 + m_2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{Q}'}{\partial s} - m_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} w - F_2 \frac{\partial (p \bar{e}_1)}{\partial s} \quad (4.66)$$

Преобразуем правую часть выражения (4.66) с учетом правил дифференцирования сложных функций:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} [\bar{Q}' - p F_2 \bar{e}_1] - \\ - m_2 w^2 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial s} - m_2 w \bar{e}_1 \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Перейдем в уравнении (4.67) к безразмерным величинам. Обозначение «б» безразмерных величин дальше, как и ранее, опустим, имея в виду, что все дальнейшие уравнения являются безразмерными.

С учетом введенных обозначений уравнение (4.67) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} + n \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\bar{Q}' - p \bar{e}_1] - n w^2 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \varepsilon} - n w \bar{e}_1 \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}. \quad (4.68)$$

Перейдем от полных частных производных к локальным производным. Обозначение «~» локальных производных здесь и в дальнейшем, как и ранее, опустим.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} \times \bar{u} + 2 \bar{w} \times \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{u}) + n \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} + \bar{w} \times \bar{w} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\bar{Q}' - p \bar{e}_1] - \bar{\chi} \times [\bar{Q}' - p \bar{e}_1] + n w \bar{e}_1 \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} + \\ + n w^2 \chi_3 \bar{e}_2 - n w^2 \chi_2 \bar{e}_3 = 0. \end{aligned}$$

В скалярной форме записи получаем следующее уравнение движения в связанной системе координат трубопровода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2} + \varepsilon_{kij} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} u_j + 2 \omega_i \frac{\partial u_j}{\partial \tau} \right) + \varepsilon_{mlk} (\varepsilon_{ijl} \omega_i u_j) \omega_m + n \varepsilon_{k23} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \\ + n w \varepsilon_{ki1} \omega_i - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\bar{Q}'_k - p \varepsilon_{k23}] - \varepsilon_{kij} \chi_i \bar{Q}'_j + \\ + p \varepsilon_{ki1} \chi_i + n w \varepsilon_{k23} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} + n w^2 \chi_3 \varepsilon_{k31} - n w^2 \chi_2 \varepsilon_{k12} = 0. \end{aligned}$$

Остальные уравнения, замыкающие математическую модель, без изменения берутся из системы (4.36). Это – четыре последних уравнения системы (4.36).

С учетом сделанных допущений полную систему уравнений, описывающих динамику пространственного криволинейного трубопровода с пульсирующим потоком рабочей жидкости в од-

носвязной постановке, в скалярной форме можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_k}{\partial \tau^2} + \varepsilon_{kij} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \tau} u_j + 2\omega_i \frac{\partial u_j}{\partial \tau} \right) + \varepsilon_{mlk} (\varepsilon_{ijl} \omega_i u_j) \omega_m + \\ & n\varepsilon_{k23} \frac{\partial w}{\partial \tau} + nw\varepsilon_{ki1} \omega_i - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [Q'_k - p\varepsilon_{k23}] - \varepsilon_{kij} \chi_i Q'_j + \\ & + p\varepsilon_{ki1} \chi_i + nw\varepsilon_{k23} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} + nw^2 \chi_3 \varepsilon_{k31} - nw^2 \chi_2 \varepsilon_{k12} = 0 \\ & \frac{\partial M_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{kij} \chi_i M_j - \varepsilon_{ki1} Q'_i + \mu_k + \sum_{i=1}^m M_{cki} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) = 0, \\ & M_k = A_{kk} (\chi_k - \chi_{0k}) + M_{0k}, \\ & \frac{\partial u_k}{\partial \varepsilon} + \varepsilon_{ijk} u_j \chi_i = \delta_{1k} - k_{k1}, \\ & \frac{\partial \omega_k}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_k}{\partial \tau} - \varepsilon_{kij} \omega_i \chi_j = 0. \end{aligned} \right\}$$

Развернутая форма записи уравнений движения в проекциях на связанные оси:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} u_3 - \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} u_2 + 2\omega_2 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} - 2\omega_3 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} + (\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1) \omega_2 - \\
& - (\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3) \omega_3 + n \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [Q'_1 - p] - Q'_3 \chi_2 + Q'_2 \chi_3 + n w \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = 0, \\
& \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} u_3 + \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} u_1 - 2\omega_1 \frac{\partial u_3}{\partial \tau} + 2\omega_3 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - (\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1) \omega_1 + \\
& + (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2) \omega_3 + n w \omega_3 - \frac{\partial Q'_2}{\partial \varepsilon} - Q'_1 \chi_3 + Q'_3 \chi_1 + p \chi_3 + n w^2 \chi_3 = 0, \\
& \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} u_2 - \frac{\partial \omega_2}{\partial \tau} u_1 + 2\omega_1 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - 2\omega_2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + (\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3) \omega_1 - \\
& - (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2) \omega_2 - n w \omega_2 - \frac{\partial Q'_3}{\partial \varepsilon} - Q'_2 \chi_1 + Q'_1 \chi_2 - p \chi_2 - n w^2 \chi_2 = 0, \\
& \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon} + \chi_2 M_3 - \chi_3 M_2 = 0, \\
& \frac{\partial M_2}{\partial \varepsilon} - \chi_1 M_3 + \chi_3 M_1 - Q'_3 = 0, \\
& \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon} + \chi_1 M_2 - \chi_2 M_1 + Q'_2 = 0, \\
& M_1 = A_{11}(\chi_1 - \chi_{10}) + M_{01}, \\
& M_2 = A_{22}(\chi_2 - \chi_{20}) + M_{02}, \\
& M_3 = A_{33}(\chi_3 - \chi_{30}) + M_{03}, \\
& \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + u_3 \chi_2 - u_2 \chi_3 = \delta_{11} - k_{11}, \\
& \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - u_3 \chi_1 + u_1 \chi_3 = \delta_{12} - k_{21}, \\
& \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + u_2 \chi_1 - u_1 \chi_2 = \delta_{13} - k_{31}, \\
& \frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_1}{\partial \tau} - \omega_2 \chi_3 + \omega_3 \chi_2 = 0, \\
& \frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \tau} + \omega_1 \chi_3 - \omega_3 \chi_1 = 0, \\
& \frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_3}{\partial \tau} - \omega_1 \chi_2 + \omega_2 \chi_1 = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Таким образом, мы получили систему из пятнадцати уравнений с пятнадцатью неизвестными $(u_k, \omega_k, Q'_k, \chi_k, M_k)$, позволяющую определить параметры вибрации пространственного криволинейного трубопровода под действием пульсирующего (в общем случае, нестационарного) потока рабочей жидкости. При этом пульсационные параметры потока $p(s, t)$ и $w(s, t)$ считаются известными (заданными). Три уравнения полученной системы не содержат производных по пространственной координате. Остальные двенадцать содержат только первые производные неизвестных функций по ε , т.е. для решения системы необходимо иметь двенадцать краевых условий (по шесть на каждом конце трубопровода).

Из системы уравнений (4.69) можно получить уравнения малых колебаний пространственно криволинейных трубопроводов при силовом их нагружении пульсирующим потоком рабочей жидкости в односвязной постановке и кинематическом возбуждении со стороны присоединенных агрегатов и систем, полагая $\bar{Q}' = \bar{Q}_0 + \Delta\bar{Q}$, $\bar{M} = \bar{M}_0 + \Delta\bar{M}$, $\bar{\chi} = \bar{\chi}_0 + \Delta\bar{\chi}$ и т.д., где $\Delta\bar{Q}$, $\Delta\bar{M}$, $\Delta\bar{\chi}$ - динамические составляющие соответствующих векторов; векторы $\bar{Q}_0$, $\bar{M}_0$, $\bar{\chi}_0$ имеют компоненты в базисе $\{\bar{e}_i\}$, равные статическим значениям. При этом будем считать, что компоненты векторов $\bar{v}$, $\bar{\omega}$, $\bar{u}$ являются малыми величинами. Тогда из системы (4.69) получаем систему уравнений малых колебаний пространственно криволинейных трубопроводов при силовом их нагружении пульсирующим потоком рабочей жидкости в односвязной постановке и кинематическом возбуждении со стороны присоединенных агрегатов и систем в скалярной форме записи:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + n \frac{\partial \Delta w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\Delta Q_1 - \Delta p] - Q_{30} \Delta \chi_2 - \Delta Q_3 \chi_{20} + Q_{20} \Delta \chi_3 + \\
& + \Delta Q_2 \chi_{30} + n(w_0 + \Delta w) \frac{\partial \Delta w}{\partial \varepsilon} = 0, \\
& \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + n(w_0 + \Delta w) \omega_3 - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon} - Q_{10} \Delta \chi_3 - \Delta Q_1 \chi_{30} + Q_{30} \Delta \chi_1 + \\
& + \Delta Q_3 \chi_{10} + \Delta p \chi_{30} + (p_0 + \Delta p) \Delta \chi_3 + \\
& + n(w_0 + \Delta w)^2 \Delta \chi_3 + n \Delta w (2w_0 + \Delta w) \chi_{30} = 0, \\
& \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} - n(w_0 + \Delta w) \omega_2 - \frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \varepsilon} - Q_{20} \Delta \chi_1 - \Delta Q_2 \chi_{10} + Q_{10} \Delta \chi_2 + \\
& + \Delta Q_1 \chi_{20} - \Delta p \chi_{20} - (p_0 + \Delta p) \Delta \chi_2 - \\
& - n(w_0 + \Delta w)^2 \Delta \chi_2 - n \Delta w (2w_0 + \Delta w) \chi_{20} = 0, \\
& \frac{\partial \Delta M_1}{\partial \varepsilon} + M_{30} \Delta \chi_2 - M_{20} \Delta \chi_3 + \Delta M_3 \chi_{20} - \Delta M_2 \chi_{30} = 0, \\
& \frac{\partial \Delta M_2}{\partial \varepsilon} + M_{10} \Delta \chi_3 - M_{30} \Delta \chi_1 + \Delta M_1 \chi_{30} - \Delta M_3 \chi_{10} - \Delta Q_3 = 0, \\
& \frac{\partial \Delta M_3}{\partial \varepsilon} + M_{20} \Delta \chi_1 - M_{10} \Delta \chi_2 + \Delta M_2 \chi_{10} - \Delta M_1 \chi_{20} + \Delta Q_2 = 0, \\
& \Delta M_1 = A_{11} \Delta \chi_1, \\
& \Delta M_2 = A_{22} \Delta \chi_2, \\
& \Delta M_3 = A_{33} \Delta \chi_3, \\
& \frac{\partial \omega_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_1}{\partial \tau} = \chi_{30} \omega_2 - \chi_{20} \omega_3, \\
& \frac{\partial \omega_2}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_2}{\partial \tau} = \chi_{10} \omega_3 - \chi_{30} \omega_1, \\
& \frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \Delta \chi_3}{\partial \tau} = \chi_{20} \omega_1 - \chi_{10} \omega_2, \\
& \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + u_3 \chi_{20} - u_2 \chi_{30} = 0, \\
& \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} - u_3 \chi_{10} + u_1 \chi_{30} = \varphi_3, \\
& \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + u_2 \chi_{10} - u_1 \chi_{20} = -\varphi_2.
\end{aligned} \right\} \quad (4.70)$$

Рассмотрим частный случай, когда трубопровод в естественном состоянии имеет осевую линию, лежащую в плоскости. При движении трубопровода в этой плоскости ряд компонент векторов, входящих в систему уравнений (4.69), обращается в нуль: $u_3 = 0$; $\omega_1 = \omega_2 = 0$; $Q'_3 = 0$; $\chi_1 = \chi_2 = 0$; $M_1 = M_2 = 0$. С учетом этого система уравнений (4.69) перепишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} u_2 - 2\omega_3 \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - \omega_3^2 u_1 + n \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [Q'_1 - p] + \\ & + Q'_2 \chi_3 + n w \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = 0, \\ & \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} u_1 + 2\omega_3 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \omega_3^2 u_2 + n w \omega_3 - \frac{\partial Q'_2}{\partial \varepsilon} - \\ & - Q'_1 \chi_3 + p \chi_3 + n w^2 \chi_3 = 0, \\ & \frac{\partial (\chi_3 - \chi_{30})}{\partial \varepsilon} + Q'_2 = 0, \\ & \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - u_2 \chi_3 = \delta_{11} - k_{11}, \\ & \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + u_1 \chi_3 = \delta_{12} - k_{21}, \\ & \frac{\partial \omega_3}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \chi_3}{\partial \tau} = 0. \end{aligned} \right\} (4.71)$$

Рассмотрим колебания такого трубопровода около состояния равновесия. Считая, что возникающее при колебаниях дополнительные внутренние усилия и перемещения являются малыми, положим:

$$\left. \begin{aligned} Q'_k &= Q'_{ko} + \Delta Q'_k, \\ \chi_3 &= \chi_{30} + \Delta \chi_3. \end{aligned} \right\} (4.72)$$

Преобразуем систему (4.71) с учетом (4.72) и предположением о малости колебаний. При этом будем пренебрегать произведениями малых величин. Кроме того, введем допущение, что в начальный момент времени трубопровод предвари-

тельно не нагружен, т.е. $Q'_{ko} = 0$. С учетом сказанного после преобразований система (4.71) переписывается в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q'_1}{\partial \varepsilon} + \Delta Q'_2 \chi_{30} &= -n \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} - n w \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + n w \omega_3 - \frac{\partial \Delta Q'_2}{\partial \varepsilon} - \Delta Q'_1 \chi_{30} + (p + n w^2) \Delta \chi_3 &= \\ = -(p + n w^2) \chi_{30}, \\ \frac{\partial \Delta \chi_3}{\partial \varepsilon} + \Delta Q'_2 &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} - u_2 \chi_{30} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + u_1 \chi_{30} - \varphi_3 &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varepsilon} - \Delta \chi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

Итак, мы получили систему 6 уравнений с 6 неизвестными: $u_1, u_2, \omega_3, \Delta Q'_1, \Delta Q'_2, \Delta \chi_3$. Упростим эту систему, сократив число входящих в нее уравнений. Подставляя четвертое уравнение системы (4.73) в пятое получим:

$$\varphi_3 = \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon^2} + \chi_{30} u_1. \quad (4.74)$$

Объединим третье и шестое уравнения:

$$\Delta Q'_2 = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2}. \quad (4.75)$$

Из второго уравнения системы (4.73) выразим $\Delta Q'_1$. С учетом (4.74) и (4.75) получим:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{Q}'_1 &= \frac{1}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \varepsilon \partial \tau^2} - \frac{n w}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau} + n w \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \varepsilon^3} + \\ &+ \frac{p + n w^2}{\chi_{30}} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \varepsilon} + p + n w^2 \end{aligned} \quad (4.76)$$

Теперь выражения (4.75) и (4.76) подставим в первое уравнение системы (4.73). Окончательно получим:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - \frac{n\omega}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^3 \partial \tau} - n\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon \partial \tau} - \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} -$$

$$- \left(\frac{p + n\omega^2}{\chi_{30}} + \chi_{30} \right) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2} - 2n\omega \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon} = -n \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - n\omega \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon}.$$

С учетом всего вышесказанного систему (4.73) можно переписать в виде системы 3 уравнений для 3 неизвестных u_1 , u_2 и φ_3 :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - \frac{n\omega}{\chi_{30}^2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^3 \partial \tau} - n\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon \partial \tau} - \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} - \\ & - \left(\frac{p + n\omega^2}{\chi_{30}} + \chi_{30} \right) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2} - \\ & - 2n\omega \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon} = -n \frac{\partial \omega}{\partial \tau} - n\omega \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon}, \\ & \tilde{u}_2 = \frac{1}{\tilde{\chi}_{30}} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \varepsilon}, \\ & \varphi_3 = \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon^2} + \chi_{30} u_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

Как уже отмечалось выше, силой, вызывающей вибрацию трубопровода в рассматриваемой математической модели, является воздействие со стороны пульсирующего (нестационарного) потока рабочей жидкости. Поэтому для проведения расчетов по предложенной модели должно быть известно распределение параметров пульсирующего потока рабочей жидкости как по длине трубопровода, так и во времени. В качестве частного случая, иллюстрирующего использование разработанной модели, рассмотрим установившийся режим пульсаций рабочей жидкости в трубопроводе. Допустим, что заданы следующие краевые условия решаемой задачи:

1) частота колебаний рабочей жидкости f (для простоты примем, что реализуется гармонический закон колебаний);

2) амплитуда пульсаций давления рабочей жидкости на входе в трубопровод p_{ex} ;

3) акустическая нагрузка на выходе из трубопровода – закрытый конец.

Этих краевых условий достаточно для расчета распределения всех требуемых в модели пульсационных параметров рабочей жидкости. Амплитудно–фазовую частотную характеристику трубопроводной линии с несогласованной нагрузкой при известном комплексном сопротивлении нагрузки $Z_n(j\omega)$ в размерных величинах можно записать в виде.

$$\frac{p(j\omega, s)}{p(j\omega, 0)} = \frac{1}{\frac{Z_B}{Z_H} sh[(\delta + j\varepsilon_\phi)s] + ch[(\delta + j\varepsilon)s]}, \quad (4.78)$$

где δ - коэффициент затухания;

ε_ϕ - коэффициент фазы;

ω - круговая частота колебаний;

Z_B - волновое сопротивление трубопровода.

Для упрощения рассмотрим невязкую жидкость. В этом случае $\delta = 0$. Кроме того, для акустически закрытого конца $Z_H = \infty$. С учетом этого можно записать:

$$\frac{p(l)}{p_{ex}} = \frac{1}{ch(j\varepsilon_\phi l)},$$

Откуда

$$p(l) = p_{ex} \frac{1}{ch(j\varepsilon_\phi l)}.$$

Из выражения (4.78) можно также записать:

$$\frac{p(l)}{p(s)} = \frac{1}{ch[j\varepsilon_\phi(l-s)]},$$

откуда

$$p(s) = p(l) ch[j\varepsilon_\phi(l-s)] = p_{ex} \frac{ch(j\varepsilon_\phi(l-s))}{ch(j\varepsilon_\phi l)}. \quad (4.79)$$

Воспользовавшись формулами преобразования гиперболических и тригонометрических функций, выражение (4.79) можно переписать в виде:

$$p(s) = p_{ax} \frac{\cos(\varepsilon_\phi(l-s))}{\cos(\varepsilon_\phi l)}. \quad (4.80)$$

Коэффициент фазы ε_ϕ связан с фазовой скоростью распространения волны возмущения с зависимостью:

$$\varepsilon_\phi = \frac{\omega}{c}.$$

С учетом этого выражение (4.80) можно переписать в виде

$$p(s) = p_{ax} \frac{\cos \frac{\omega(l-s)}{c}}{\cos \frac{\omega l}{c}}. \quad (4.81)$$

Скорость частиц рабочей жидкости получаем дифференцированием выражения (4.81):

$$w = \frac{j}{\varepsilon_\phi \rho c} \frac{\partial p}{\partial s} = j \frac{p_{ax}}{\rho c} \frac{\sin \frac{\omega(l-s)}{c}}{\cos \frac{\omega l}{c}}. \quad (4.82)$$

Отметим, что выражения (4.81) и (4.82) соответствуют амплитудам колебаний рабочей жидкости. Выражения для мгновенных значений колебательных составляющих давления и скорости рабочей жидкости в рассматриваемом случае гармонических колебаний запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} p(s,t) &= \frac{\cos \frac{2\pi f(l-s)}{c}}{\cos \frac{2\pi f l}{c}} p_{ax} \cos(2\pi f t), \\ w(s,t) &= \frac{\sin \frac{2\pi f(l-s)}{c}}{\cos \frac{2\pi f l}{c}} \frac{p_{ax}}{\rho c} \sin(2\pi f t). \end{aligned} \right\} \quad (4.83)$$

Выражения (4.83) справедливы только для частоты первого акустического четвертьволнового резонанса, когда колебания всех частиц невязкой жидкости в стоячей волне происходят софазно. После перехода к безразмерным величинам давления и скорости рабочей жидкости, выражения (4.83) переписутся в виде (в левой части приведенных ниже равенств - безразмерные величины, а в правой – размерные, кроме τ):

$$p(\varepsilon, \tau) = \frac{\cos \frac{2\pi f l (1 - \varepsilon)}{c}}{\cos \frac{2\pi f l}{c}} \frac{p_{\text{ex}} F_2 l^2}{A_{33}} \cos \left(2\pi f l^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \tau \right),$$

$$w(\varepsilon, \tau) = \frac{\sin \frac{2\pi f l (1 - \varepsilon)}{c}}{\cos \frac{2\pi f l}{c}} \frac{p_{\text{ex}} l}{\rho c} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \sin \left(2\pi f l^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \tau \right).$$

Из последнего выражения можно получить соотношения для частных производных от скорости по времени и по пространственной переменной, необходимые для использования в разработанной модели:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\varepsilon, \tau)}{\partial \varepsilon} &= \\ &= - \frac{2\pi f l}{c} \frac{\cos \frac{2\pi f l (1 - \varepsilon)}{c}}{\cos \frac{2\pi f l}{c}} \frac{p_{\text{ex}} l}{\rho c} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \sin \left(2\pi f l^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \tau \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(\varepsilon, \tau)}{\partial \tau} &= \\ &= \frac{\sin \left[\frac{2\pi f l}{c} (1 - \varepsilon) \right]}{\cos \frac{2\pi f l}{c}} \frac{2\pi f p_{\text{ex}} l^3}{\rho c} \frac{m_1 + m_2}{A_{33}} \cos \left(2\pi f l^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \tau \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим схему решения уравнения (4.77) с использованием метода конечных разностей в общем виде. Для решения системы (4.77) нам должны быть заданы краевые и начальные условия. Начальные условия могут быть представлены в виде

распределения в нулевой момент времени какого-либо параметра (u_1 , u_2 или φ_3) по длине трубопровода. Для простоты рассмотрим нулевые начальные условия, когда в нулевой момент времени трубопровод находится в покое в недеформированном состоянии. В этом случае распределение u_1 на первом временном слое находится из решения первого уравнения системы (4.77), по заданным распределениям p , w , $\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}$, $\frac{\partial w}{\partial \tau}$.

По найденным значениям u_1 в узлах сетки для первого временного слоя могут быть найдены значения u_2 и φ_3 с помощью второго и третьего уравнений системы (4.77). Найденное решение для φ_3 на первом временном слое подставляется в правую часть первого уравнения системы (4.77). Далее строится решение для u_1 на втором временном слое и т. д.

Обозначим часть первого уравнения системы (4.77) через $C(\varepsilon, \tau)$:

$$C(\varepsilon, \tau) = \chi_{30} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} + \left((p + nw^2) \chi_{30} + \chi_{30}^3 \right) \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2} + nw \chi_{30}^2 \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} - n \chi_{30}^2 \frac{\partial w}{\partial \tau}.$$

С учетом этого первое уравнение системы (4.77) перепишется в виде:

$$\chi_{30}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - nw \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^3 \partial \tau} - nw \chi_{30}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon \partial \tau} = C(\varepsilon, \tau). \quad (4.84)$$

Нанесем на пространственно-временную область $0 \leq \varepsilon \leq l$, $0 \leq \tau \leq T$ конечно-разностную сетку $\omega_{\varepsilon, \tau}$:

$$\omega_{\varepsilon, \tau} = \{ \varepsilon_i = i \Delta \varepsilon, i = \overline{0, N}; \tau^j = j \Delta \tau, j = \overline{0, K} \},$$

с пространственным шагом $\Delta \varepsilon = l / N$ и шагом по времени $\Delta \tau = T / K$ (рис. 4.4).

Введем два временных слоя: нижний $\tau^j = j \Delta \tau$, на котором распределение искомой функции $\tilde{u}_1(\varepsilon_i, \tau^j)$, $i = \overline{0, N}$, известно (при $j = 0$ распределение определяется начальными

условиями, как отмечалось выше), и верхний временный слой $\tau^{j+1} = (j+1)\Delta\tau$, на котором распределение искомой функции $u_i(\varepsilon_i, \tau^{j+1})$, $i = \overline{0, N}$, подлежит определению. На сетке (4.51)

введем сеточные функции u_i^j , u_i^{j+1} , первая из которых известна, вторая – подлежит определению. Для ее определения в левой части заменим (аппроксимируем) дифференциальные операторы отношением конечных разностей (см. (4.52)):

$$\left. \frac{\partial^4 u_i}{\partial \varepsilon^3 \partial \tau} \right|_i = \frac{(u_i)_{i+2}^{j+1} - 2(u_i)_{i+1}^{j+1} + 2(u_i)_{i-1}^{j+1} - (u_i)_{i-2}^{j+1} - (u_i)_{i+2}^{j-1} + 2(u_i)_{i+1}^{j-1} - 2(u_i)_{i-1}^{j-1} + (u_i)_{i-2}^{j-1}}{4(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)} \quad (4.85)$$

В выражениях (4.52) и (4.85) аппроксимация проводилась с помощью отношения центральных разностей. Конечно-разностная аппроксимация выражения (4.84) записывается в виде (здесь и в дальнейшем предположим, что $\chi_{30} = \text{const}$, т.е. трубопровод представляет собой часть окружности):

$$\begin{aligned} & \chi_{30}^2 \frac{(\tilde{u}_i)_{i+1}^{j+1} - 2(\tilde{u}_i)_i^{j+1} + (\tilde{u}_i)_{i-1}^{j+1}}{(\Delta\tau)^2} - \\ & - \frac{(u_i)_{i+1}^{j+1} - 2(u_i)_{i+1}^{j-1} + (u_i)_{i+1}^{j-1} - 2(u_i)_i^{j+1} + 4(u_i)_i^{j-1} - 2(u_i)_i^{j-1} + (u_i)_{i-1}^{j+1} - 2(u_i)_{i-1}^{j-1} + (u_i)_{i-1}^{j-1}}{(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau)^2} - \\ & - nw_i^j \frac{(u_i)_{i+2}^{j+1} - 2(u_i)_{i+1}^{j+1} + 2(u_i)_{i-1}^{j+1} - (u_i)_{i-2}^{j+1} - (u_i)_{i+2}^{j-1} + 2(u_i)_{i+1}^{j-1} - 2(u_i)_{i-1}^{j-1} + (u_i)_{i-2}^{j-1}}{4(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)} = C_i^j, \quad (4.86) \\ & - nw_i^j \chi_{30}^2 \frac{(u_i)_{i+1}^{j+1} + (u_i)_{i-1}^{j+1} - (u_i)_{i+1}^{j-1} + (u_i)_{i-1}^{j-1}}{4(\Delta\varepsilon)(\Delta\tau)} = C_i^j \end{aligned}$$

где C_i^j может быть найдено по выражению:

$$\begin{aligned} C_i^j &= \chi_{30} \left[\frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} \right]_i^j + \left((p_i^j + n(w_i^j)^2) \chi_{30} + \chi_{30}^3 \right) \left[\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2} \right]_i^j + \\ &+ nw_i^j \left[\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right]_i^j - n \chi_{30}^2 \left[\frac{\partial w}{\partial \tau} \right]_i^j \end{aligned}$$

с использованием аппроксимации соответствующих дифференциальных операторов от φ_3 отношением конечных разностей. В этом случае получим:

$$\begin{aligned}
C_i^j = & \chi_{30} \frac{(\varphi_3)_{i+2}^j - 4(\varphi_3)_{i+1}^j + 6(\varphi_3)_i^j - 4(\varphi_3)_{i-1}^j + (\varphi_3)_{i-2}^j}{(\Delta\varepsilon)^4} + \\
& + \left((p_i^j + n(w_i^j)^2) \chi_{30} + \chi_{30}^2 \right) \times \frac{(\varphi_3)_{i+1}^j - 2(\varphi_3)_i^j + (\varphi_3)_{i-1}^j}{(\Delta\varepsilon)^2} + \\
& + n w_i^j \left[\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \right]_i^j - n \chi_{30}^2 \left[\frac{\partial w}{\partial \tau} \right]_i^j
\end{aligned}$$

Аппроксимировать конечными разностями частные производные $\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial w}{\partial \tau}$ нет смысла, поскольку в рассматриваемом частном случае стоячей волны получены аналитические выражения для этих производных. В случае, если аналитические выражения для этих производных отсутствуют, они также аппроксимируются отношениями конечных разностей с использованием значений w в соответствующих узлах сетки.

Умножим каждый член выражения (4.86) на комплекс $4(\Delta\varepsilon)^3 (\Delta\tau)^2$. Получим:

$$\begin{aligned}
& 4\chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^3 \left[(u_1)_{i+1}^{j+1} - 2(u_1)_i^j + (u_1)_i^{j-1} \right] - \\
& - 4(\Delta\varepsilon) \left[(u_1)_{i+1}^{j+1} (u_1)_{i+1}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^j + (u_1)_{i+1}^{j-1} - \right. \\
& - (u_1)_{i+1}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^j + (u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_i^{j+1} + 4(u_1)_i^j - \\
& - 2(u_1)_i^{j-1} + (u_1)_{i-1}^{j+1} - 2(u_1)_{i-1}^j + (u_1)_{i-1}^{j-1} \left. \right] - \\
& - n w_i^j (\Delta\tau) \left[(u_1)_{i+2}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^{j+1} + 2(u_1)_{i-1}^{j+1} - (u_1)_{i-2}^{j+1} - \right. \\
& - (u_1)_{i+2}^{j-1} + 2(u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_{i-1}^{j-1} + (u_1)_{i-2}^{j-1} \left. \right] - \\
& - n w_i^j \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau) \left[(u_1)_{i+1}^{j+1} + (u_1)_{i-1}^{j+1} - (u_1)_{i+1}^{j-1} + (u_1)_{i-1}^{j-1} \right] = \\
& = 4C_i^j (\Delta\varepsilon)^3 (\Delta\tau)^2.
\end{aligned}$$

После группировки членов и преобразований окончательно можно записать:

$$\begin{aligned}
& nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{i-2}^{j+1} + (-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{i-1}^{j+1} + \\
& + (4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_i^{j+1} + \\
& + (-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{i+1}^{j+1} - \\
& - nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{i+2}^{j+1} = -8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{i-1}^j + \\
& + (8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon))(u_1)_i^j - 8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{i+1}^j + nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{i-2}^{j-1} + \\
& + (4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau)) \times \\
& \times (u_1)_{i-1}^{j-1} + (-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_i^{j-1} + \\
& + (4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau)) \cdot (u_1)_{i+1}^{j-1} - \\
& - nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{i+2}^{j-1} + 4C_i^j(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Шаблон данной конечно-разностной схемы представлен на рис. 4.13,а. Данная конечно-разностная схема является неявной. При этом следует отметить, что в конечно-разностную схему (4.87) входит член, содержащий C_i^j , для вычисления которого используются значения φ_3 $j-20$ временного слоя в узлах $i-2 \dots i+2$. Кроме того, для вычисления $(\varphi_3)_i^j$ используется конечно-разностная аппроксимация третьего уравнения системы (4.77), куда входят значения $(u_1)_{i-1}^j$, $(u_1)_i^j$, $(u_1)_{i+1}^j$:

$$(\varphi_3)_i^j = \frac{1}{\chi_{30}} \frac{(u_1)_{i+1}^j - 2(u_1)_i^j + (u_1)_{i-1}^j}{(\Delta\varepsilon)^2} + \chi_{30}(u_1)_i^j.$$

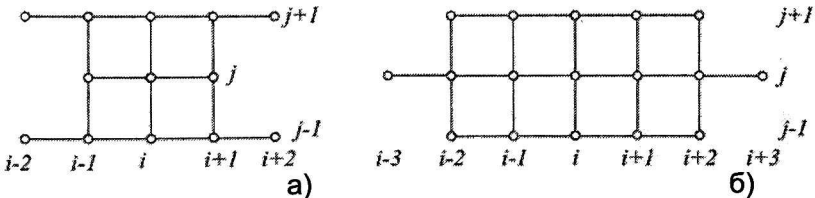


Рис. 4.13 - Шаблон конечно-разностной схемы уравнения вынужденных колебаний трубопровода: а) без учета аппроксимации для C_i^j ; б) с учетом аппроксимации для C_i^j .

С учетом сказанного, для вычисления C_i^j в центральных областях сетки реально используются значения $(u_1)_{j-20}$ временного слоя в узлах $i-3 \dots i+3$. Тогда в развернутой форме шаблон конечно-разностной схемы (4.87) можно изобразить в виде, представленном на рис. 4.13,б. Таким образом, для решения рассматриваемой задачи в общем случае краевых условий механической подсистемы трубопровода требуется введение фиктивных точек сетки: $\varepsilon_{-3}, \varepsilon_{-2}, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_{N+1}, \varepsilon_{N+2}, \varepsilon_{N+3}$, где N - число узлов сетки, на которое разбит рассматриваемый трубопровод.

Далее рассмотрим частный случай краевых условий - жесткую заделку концов трубопровода. В этом случае при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$ $u_1 = u_2 = \varphi_3 = 0$. Подробно данные краевые условия были рассмотрены выше при моделировании собственных колебаний трубопровода. Поэтому на этом здесь останавливаться не будем и запишем лишь окончательные выражения для конечно-разностной аппроксимации краевых условий рассматриваемой задачи:

$$(u_1)_{-1} = (u_1)_0 = (u_1)_1 = 0; \quad (u_1)_{N-1} = (u_1)_N = (u_1)_{N+1} = 0.$$

Таким образом, величинами которые необходимо определить, являются значения $(u_1)_i^{j+1}$ при $i \in [2; N-2]$. При этом выражение (4.87) для узлов сетки, близких к границам примет несколько иной вид:

- для $i = 2$:

$$\begin{aligned} & (4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_2^{j+1} + \\ & + (-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_2^j(\Delta\tau) - nw_2^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_3^{j+1} - \\ & - nw_2^j(\Delta\tau)(u_1)_4^{j+1} = (8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon))(u_1)_2^j - \\ & - 8(\Delta\varepsilon)(u_1)_3^j + (-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_2^{j-1} + \\ & + (4(\Delta\varepsilon) + 2nw_2^j(\Delta\tau) - nw_2^j(\Delta\tau)\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2)(u_1)_3^{j-1} - \\ & - nw_2^j(\Delta\tau)(u_1)_4^{j-1} + 4C_2^j(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2; \end{aligned} \quad (4.88)$$

- для $i = 3$:

$$\begin{aligned}
& (-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_3^j(\Delta\tau) + nw_3^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{2}^{j+1} + \\
& + (4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_{3}^{j+1} + \\
& + (-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_3^j(\Delta\tau) - nw_3^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{4}^{j+1} - \\
& - nw_3^j(\Delta\tau)(u_1)_{5}^{j+1} = -8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{2}^j + \tag{4.89}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon))(u_1)_{3}^j - 8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{4}^j + \\
& + (4(\Delta\varepsilon) - 2nw_3^j(\Delta\tau) + nw_3^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{2}^{j-1} + \\
& + (-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_{3}^{j-1} + \\
& + (4(\Delta\varepsilon) + 2nw_3^j(\Delta\tau) - nw_3^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{4}^{j-1} - \\
& - nw_3^j(\Delta\tau)(u_1)_{5}^{j-1} + 4C_3^j(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2; \\
& - \text{для } i = N - 3: \\
& nw_{N-3}^j(\Delta\tau)(u_1)_{N-5}^{j+1} + \\
& + (-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_{N-3}^j(\Delta\tau) + nw_{N-3}^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{N-4}^{j+1} + \\
& + (4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_{N-3}^{j+1} + \\
& + (-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_{N-3}^j(\Delta\tau) - nw_{N-3}^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{N-2}^{j+1} = \\
& = -8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{N-4}^j + (8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon))(u_1)_{N-3}^j - \tag{4.90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{N-2}^j + nw_{N-3}^j(\Delta\tau)(u_1)_{N-5}^{j-1} + \\
& + (4(\Delta\varepsilon) - 2nw_{N-3}^j(\Delta\tau) + nw_{N-3}^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{N-4}^{j-1} + \\
& + (-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_{N-3}^{j-1} + \\
& + (4(\Delta\varepsilon) + 2nw_{N-3}^j(\Delta\tau) - nw_{N-3}^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{N-2}^{j-1} + \\
& + 4C_{N-3}^j(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2; \\
& - \text{для } i = N - 2:
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& nw_{N-2}^j (\Delta\tau) (u_1)_{N-4}^{j+1} + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_{N-2}^j (\Delta\tau) + nw_{N-2}^j \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-3}^{j+1} + \\
& + \left(4\chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_{N-2}^{j+1} = -8(\Delta\varepsilon) (u_1)_{N-3}^j + \quad (4.91) \\
& + \left(8\chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_{N-2}^j + nw_{N-2}^j (\Delta\tau) (u_1)_{N-4}^{j-1} + \\
& + \left(4(\Delta\varepsilon) - 2nw_{N-2}^j (\Delta\tau) + nw_{N-2}^j \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-3}^{j-1} + \\
& + \left(-4\chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_{N-2}^{j-1} + 4C_{N-2}^j (\Delta\varepsilon)^3 (\Delta\tau)^2.
\end{aligned}$$

Для задания начальных условий предположим, что трубопровод в начальный момент времени находился в состоянии покоя в недеформированном положении. При этом

$(u_1)_i^0 = (u_2)_i^0 = (\varphi_3)_i^0 = 0$. Предположение о состоянии покоя в недеформированном положении в начальный момент времени позволяет несколько упростить форму записи выражений (4.87) – (4.91) при расчете первого временного слоя:

$$\begin{aligned}
& \left(4\chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_2^1 + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_2^0 (\Delta\tau) - nw_2^0 \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau) \right) (u_1)_3^1 - \quad (4.92) \\
& - nw_2^0 (\Delta\tau) (u_1)_4^1 = 4C_2^0 (\Delta\varepsilon)^3 (\Delta\tau)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_3^0 (\Delta\tau) + nw_3^0 \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau) \right) (u_1)_2^1 + \\
& + \left(4\chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_3^1 + \quad (4.93) \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_3^0 (\Delta\tau) - nw_3^0 \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau) \right) (u_1)_4^1 - \\
& - nw_3^0 (\Delta\tau) (u_1)_5^1 = 4C_3^0 (\Delta\varepsilon)^3 (\Delta\tau)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& nw_{N-3}^0 (\Delta\tau) (u_1)_{N-5}^1 + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_{N-3}^0 (\Delta\tau) + nw_{N-3}^0 \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-4}^1 + \\
& + \left(4\chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_{N-3}^1 + \quad (4.94) \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_{N-3}^0 (\Delta\tau) - nw_{N-3}^0 \chi_{30}^2 (\Delta\varepsilon)^2 (\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-2}^1 = \\
& = 4C_{N-3}^0 (\Delta\varepsilon)^3 (\Delta\tau)^2;
\end{aligned}$$

$$nw_{N-2}^0(\Delta\tau)(u_1)_{N-4}' + (-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_{N-2}^0(\Delta\tau) + nw_{N-2}^0\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{N-3}' + \quad (4.95)$$

$$+ (4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon)) \times (u_1)_{N-2}' = 4C_{N-2}^0(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2; \\ nw_i^0(\Delta\tau)(u_1)_{i-2}' + (-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^0(\Delta\tau) + nw_i^0\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{i-1}' + \\ + (4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon))(u_1)_i' + \quad (4.96) \\ + (-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^0(\Delta\tau) - nw_i^0\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau))(u_1)_{i+1}' - nw_i^0(\Delta\tau)(u_1)_{i+2}' = \\ = 4C_i^0(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2 \text{ при } i \in [4; N-4]$$

Для любого j – 20 временного слоя соотношения (4.87) – (4.92) можно записать как одно матричное уравнение:

$$[K]^j [u_1]^{j+1} = [f]^j, \quad (4.97)$$

где

$$[K]^j = \begin{bmatrix} a_3 & (a_4)_2' & -(a_1)_2' & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_2)_3' & a_3 & (a_4)_3' & -(a_1)_3' & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_1)_4' & (a_2)_4' & a_3 & (a_4)_4' & -(a_1)_4' & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (a_1)_5' & (a_2)_5' & a_3 & (a_4)_5' & -(a_1)_5' & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (a_2)_{N-3}' & a_3 & (a_4)_{N-3}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (a_1)_{N-4}' & (a_2)_{N-2} a_3 & \dots \end{bmatrix},$$

$$([f]^j)^T = [f_2, f_3, \dots, f_i, \dots, f_{N-3}, f_{N-2}],$$

$$(a_1)_i^j = nw_i^j,$$

$$(a_2)_i^j = -4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau),$$

$$a_3 = 4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon),$$

$$(a_4)_i^j = -4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau),$$

f_2 - правая часть выражения (4.92) при $j = 0$ или (4.88) при $j > 0$,

f_3 - правая часть выражения (4.93) при $j = 0$ или (4.89) при $j > 0$,

$f_i, i \in [4; N-4]$ - правая часть выражения (4.96) при $j = 0$

или (4.87) при $j > 0$,

f_{N-3} - правая часть выражения (4.94) при $j = 0$ или (4.90) при $j > 0$,

f_{N-2} - правая часть выражения (4.95) при $j = 0$ или (4.91) при $j > 0$.

Решение системы уравнений (4.97) ведется методом Гаусса.

В качестве модельного примера возьмем трубопровод, рассмотренный ранее при анализе собственных колебаний. Предположим, что в начальный момент времени деформация трубопровода отсутствует и он находился в состоянии покоя. Затем трубопровод нагружается установившимися колебаниями рабочей жидкости в которой реализуется стоячая волна с параметрами $f = 250 \text{ Гц}$, $p_{\text{вх}} = 10^5 \text{ Па}$. Характеристики рабочей жидкости: $\rho_{\text{жс}} = 870 \text{ кг/м}^3$, $c = 1300 \text{ м/с}$.

Проведем несложные вычисления:

$$F_2 = \frac{\pi(d - 2\delta)^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0,004 - 2 \cdot 0,0006)^2}{4} = 6,158 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2;$$

$$m_2 = \rho_{\text{жс}} \cdot F_2 = 870 \cdot 6,158 \cdot 10^{-6} = 5,357 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м};$$

$$n = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{5,357 \cdot 10^{-3}}{0,04999 + 5,357 \cdot 10^{-3}} = 0,097;$$

$$p_0 = \sqrt{\frac{A_{33}}{(m_1 + m_2)l^4}} = \sqrt{\frac{1,91}{(0,04999 + 5,357 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,4^4}} = 36,72 \text{ с}^{-1};$$

$$p = \frac{F_2 l^2 p_{\text{вх}}}{A_{33}} \frac{\cos\left[\frac{2\pi f l}{c}(1 - \varepsilon)\right]}{\cos\frac{2\pi f l}{c}} \cos\left(2\pi f l^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \tau\right) =$$

$$= 0,058 \cos(0,483(1 - \varepsilon)) \cdot \cos(42,78\tau);$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = -\frac{2\pi fl^2 p_{ax}}{\rho c^2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \frac{\cos\left[\frac{2\pi fl}{c}(1 - \varepsilon)\right]}{\cos\frac{2\pi fl}{c}} \sin\left(2\pi fl^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \tau\right) =$$

$$= -0,003286 \times \cos(0,483(1 - \varepsilon)) \sin(42,78\tau);$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{2\pi fl^3 p_{ax}}{\rho c} \frac{m_1 + m_2}{A_{33}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi fl}{c}(1 - \varepsilon)\right)}{\cos\frac{2\pi fl}{c}} \cos\left(2\pi fl^2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{A_{33}}} \tau\right) =$$

$$= 0,291 \sin(0,483(1 - \varepsilon)) \times \cos(42,78\tau).$$

При проведении расчетов примем:

- 1) число узлов конечно-разностной сетки $N = 20$;
 $\Delta \varepsilon = 1 / N = 0,05$;
- 2) шаг дискретизации по времени $\Delta \tau = \Delta \varepsilon / 200 = 2,5 \cdot 10^{-4}$.

Результаты расчетов представлены на рисунках ниже.

На рис. 4.14,а в безразмерных параметрах изображена расчетная временная реализация нормального вибро смещения в точке с координатой $\varepsilon = 0,25$, а на рис. 4.14,б – временная реализация нормальной виброскорости в этой же точке. При анализе рис. 4.14 обращает внимание негармонический характер вибрации при возмущении гармонической волной давления. Это связано с тем, что общее решение состоит из двух компонент: вынужденного движения (в данном случае – гармонического, с частотой возмущающего воздействия) и свободного движения (собственных колебаний). В реальных трубопроводах с течением времени свободное движение стремится к нулю, вследствие трения собственные колебания затухают. Поскольку предложенная модель построена без учета сил трения, свободное движение в расчетной схеме не затухает, накладываясь на вынужденное движение системы, что и обуславливает негармонический характер вибрации на расчетных временных реализациях. Сказанное подтверждает рис. 4.15 на котором показаны амплитудные спектры, соответствующие рис. 4.14. На амплитудных спектрах явно видны два пика – 250 и 331 Гц, первый из которых соответствует вынужденным колебаниям, а второй – собственным колебаниям по первой собственной форме.

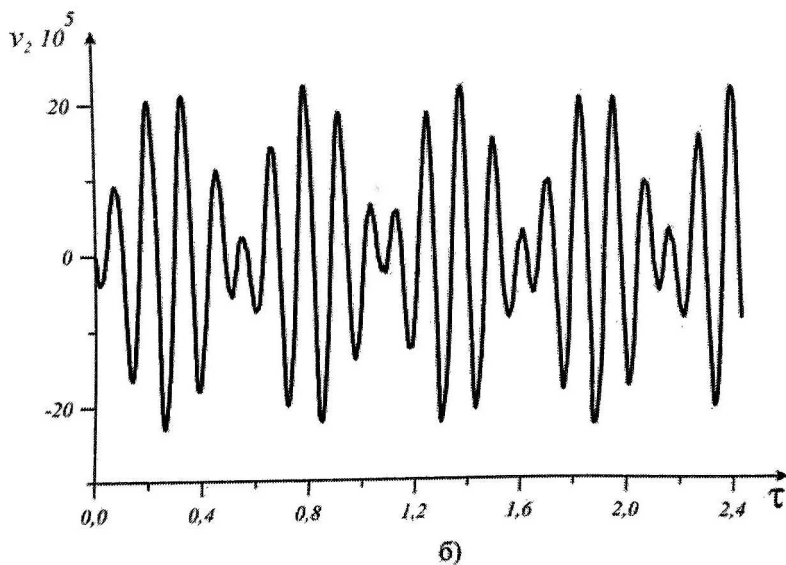
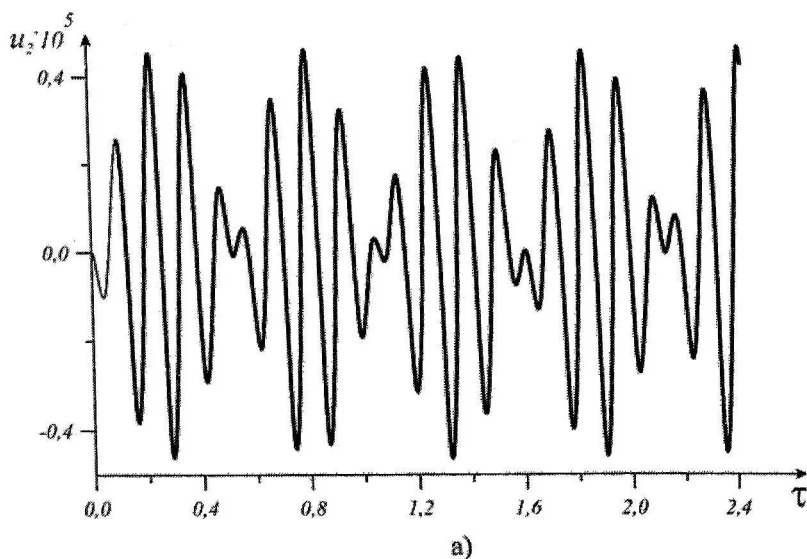


Рис. 4.14 – Расчетные временные реализации при колебаниях трубопровода:

- а) безразмерное нормальное вибрсмещение;
- б) безразмерная нормальная виброскорость.

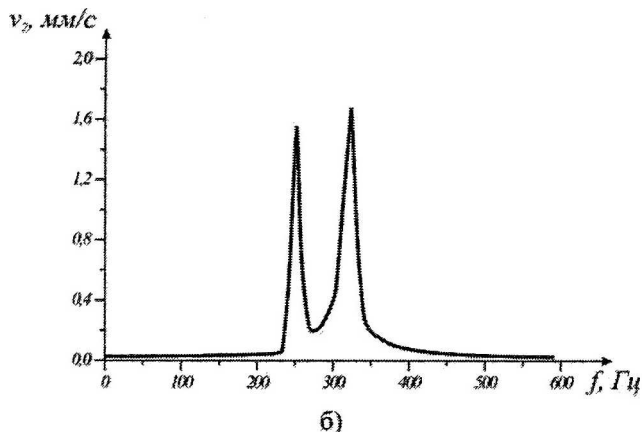
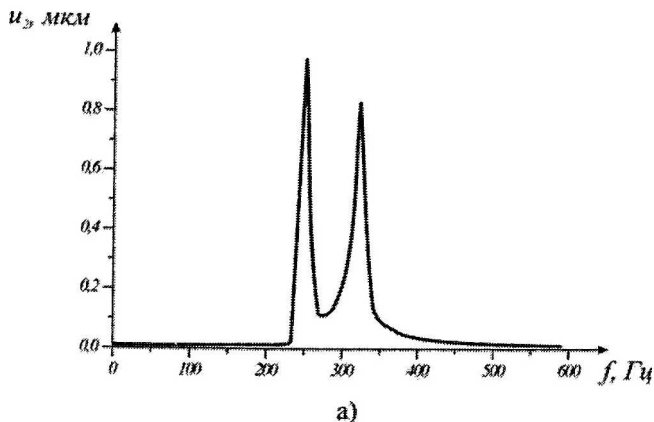


Рис. 4.15 – Амплитудные спектры вибро смещения (а) и вибро скорости (б).

Особого внимания заслуживает анализ устойчивости предложенной конечно-разностной схемы, который в данной работе подробно не исследован. Были лишь проведены расчеты для рассмотренного модельного примера при различных величинах шага временной дискретизации:

- 1) $\Delta\tau = 0,00025$;
- 2) $\Delta\tau = 0,0005$;
- 3) $\Delta\tau = 0,001$;
- 4) $\Delta\tau = 0,002$.

Для первых трех случаев результаты расчета совпадают, что позволяет судить об устойчивости конечно-разностной схемы аппроксимации при данных величинах шага временной дискретизации. Для четвертого случая результаты расчета представляют расходящийся колебательный процесс, т.е. конечно-разностная схема неустойчива.

Проведенные расчеты позволяют говорить, что предложенная конечно-разностная схема является условно устойчивой, т.е. устойчивой при определенном соотношении шагов $\Delta\tau$ и $\Delta\varepsilon$.

Система уравнений (4.77) получена при неучете сил трения (сопротивления) в материале трубопровода и его опорах. Силы трения в опорах задаются соответствующей формулировкой краевых условий. Но в случае, например, жесткой заделки концов трубопровода, сопротивление определяется, в основном, трением в материале трубопровода. Неучет трения в полученной модели приводит к тому, что наряду с вынужденными колебаниями в расчетных временных реализациях и спектрах будут присутствовать незатухающие составляющие, соответствующие собственным колебаниям. Для исключения этого эффекта введем в первое уравнение системы (4.77) член, пропорциональный частной производной от вибросмещения по времени, характеризующий действие сил трения (сопротивления). С учетом этого систему (4.77) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \chi_{30}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - n\omega \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^3 \partial \tau} - n\omega \chi_{30}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon \partial \tau} + \\ & + H \chi_{30}^2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = \chi_{30} \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial \varepsilon^4} + ((p + n\omega^2) \chi_{30} + \chi_{30}^3) \times \\ & \times \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varepsilon^2} + n\omega \chi_{30}^2 \frac{\partial \omega}{\partial \varepsilon} - n \chi_{30}^2 \frac{\partial \omega}{\partial \tau}, \\ & u_2 = \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon}, \\ & \varphi_3 = \frac{1}{\chi_{30}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon^2} + \chi_{30} u_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

С учетом этого, уравнение (4.84) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} & \chi_{30}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^2 \partial \tau^2} - n w \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varepsilon^3 \partial \tau} - n w \chi_{30}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varepsilon \partial \tau} + \\ & + H \chi_{30}^2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} = C(\varepsilon, \tau) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Конечно-разностную аппроксимацию выражения (4.99) можно записать:

$$\begin{aligned} & \chi_{30}^2 \frac{(u_1)_i^{j+1} - 2(u_1)_i^j + (u_1)_i^{j-1}}{(\Delta \tau)^2} - \\ & - \frac{(u_1)_{i+1}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^j + (u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_i^{j+1} + 4(u_1)_i^j - 2(u_1)_i^{j-1} + (u_1)_{i-1}^{j+1} - 2(u_1)_{i-1}^j + (u_1)_{i-1}^{j-1}}{(\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau)^2} - \\ & - n w_i^j \frac{(u_1)_{i+2}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^{j+1} + 2(u_1)_{i-1}^{j+1} - (u_1)_{i-2}^{j+1} - (u_1)_{i+2}^{j-1} + 2(u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_{i-1}^{j-1} + (u_1)_{i-2}^{j-1}}{4(\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau)} - \\ & - n w_i^j \chi_{30}^2 \frac{(u_1)_{i+1}^{j+1} + (u_1)_{i-1}^{j+1} - (u_1)_{i+1}^{j-1} + (u_1)_{i-1}^{j-1}}{4(\Delta \varepsilon)(\Delta \tau)} + H \chi_{30}^2 \frac{(u_1)_i^{j+1} - (u_1)_i^{j-1}}{2(\Delta \tau)} = C_i^j, \end{aligned} \quad (4.100)$$

Умножим каждый член выражения (4.100) на комплекс

$4(\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau)^2$. Получим

$$\begin{aligned} & 4 \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^3 \left[(u_1)_i^{j+1} - 2(u_1)_i^j + (u_1)_i^{j-1} \right] - \\ & - 4(\Delta \varepsilon) \left[(u_1)_{i+1}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^j + (u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_i^{j+1} + \right. \\ & + 4(u_1)_i^j - 2(u_1)_i^{j-1} + (u_1)_{i-1}^{j+1} - 2(u_1)_{i-1}^j + (u_1)_{i-1}^{j-1} \left. \right] - \\ & - n w_i^j (\Delta \tau) \left[(u_1)_{i+2}^{j+1} - 2(u_1)_{i+1}^{j+1} + 2(u_1)_{i-1}^{j+1} - (u_1)_{i-2}^{j+1} - \right. \\ & - (u_1)_{i+2}^{j-1} + 2(u_1)_{i+1}^{j-1} - 2(u_1)_{i-1}^{j-1} + (u_1)_{i-2}^{j-1} \left. \right] - \\ & - n w_i^j \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau) \left[(u_1)_{i+1}^{j+1} + (u_1)_{i-1}^{j+1} - (u_1)_{i+1}^{j-1} + (u_1)_{i-1}^{j-1} \right] + \\ & 2 H \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau) \left[(u_1)_i^{j+1} - (u_1)_i^{j-1} \right] = 4 C_i^j (\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau)^2. \end{aligned}$$

После группировки членов и преобразований окончательно можно записать:

$$\begin{aligned}
& nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{i-2}^{j+1} + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{i-1}^{j+1} + \\
& + \left(4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) \cdot (u_1)_i^{j+1} + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{i+1}^{j+1} - nw_i^j(\Delta\tau) \times \\
& \times (u_1)_{i+2}^{j+1} = -8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{i-1}^j + \left(8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_i^j - \\
& - 8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{i+1}^j + nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{i-2}^{j-1} + \\
& + \left(4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) \cdot (u_1)_{i-1}^{j-1} + \\
& + \left(-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) \times \\
& \times (u_1)_{i+1}^{j-1} + \left(4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) \cdot \\
& \cdot (u_1)_{i+2}^{j-1} - nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{i+2}^{j-1} + 4C_i^j(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2.
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Выражение (4.101) для узлов сетки, близких к границам, принимает несколько иной вид:

для $i = 2$:

$$\begin{aligned}
& \left(4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) (u_1)_2^{j+1} + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) \times \\
& \times (u_1)_3^{j+1} - nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_4^{j+1} = \\
& = \left(8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_2^j - 8(\Delta\varepsilon)(u_1)_3^j + \\
& + \left(-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon) + \right. \\
& + \left. 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) \cdot (u_1)_2^{j-1} + \\
& + \left(4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) \cdot (u_1)_3^{j-1} - \\
& - nw_i^j(\Delta\tau) \times (u_1)_4^{j-1} + 4C_i^j(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2;
\end{aligned} \tag{4.102}$$

для $i = 3$:

$$\begin{aligned}
& \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{2_2}^{j+1} + \\
& + \left(4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) \times (u_1)_{3_3}^{j+1} + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{4_4}^{j+1} - \\
& - nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{5_5}^{j+1} = -8(\Delta\varepsilon)(u_1)_2^j + \\
& + \left(8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon) \right) (u_1)_{3_3}^j - 8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{4_4}^j + \\
& + \left(4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{2_2}^{j-1} + \\
& + \left(-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) (u_1)_{3_3}^{j-1} + \\
& + \left(4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) \times \\
& \times (u_1)_{4_4}^{j-1} - nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{5_5}^{j-1} + 4C_i^j(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2;
\end{aligned} \tag{4.103}$$

для $i = N - 3$:

$$\begin{aligned}
& nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{N-5}^{j+1} + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-4}^{j+1} + \\
& + \left(4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-3}^{j+1} + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) \times \\
& \times (u_1)_{N-2}^{j+1} = -8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{N-4}^j + (8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + \\
& + 16(\Delta\varepsilon))(u_1)_{N-3}^j - 8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{N-2}^j + nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{N-5}^{j-1} + \\
& + \left(4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-4}^{j-1} + \\
& + \left(-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-3}^{j-1} + \\
& + \left(4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^j(\Delta\tau) - nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-2}^{j-1} + \\
& + 4C_i^j(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau);
\end{aligned} \tag{4.104}$$

для $i = N - 2$:

$$\begin{aligned}
& nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{N-4}^{j+1} + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-3}^{j+1} + \\
& + \left(4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-2}^{j+1} = \\
& = -8(\Delta\varepsilon)(u_1)_{N-3}^j + \left(8\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 16(\Delta\varepsilon) \right) \times \\
& \times (u_1)_{N-2}^j + nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{N-4}^{j-1} + \\
& + \left(4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^j(\Delta\tau) + nw_i^j\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-3}^{j-1} + \\
& + \left(-4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 - 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) (u_1)_{N-2}^{j-1} + \\
& + 4C_i^j(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau)^2.
\end{aligned} \tag{4.105}$$

Предположение о состоянии покоя в недеформированном положении в начальный момент времени позволяет несколько упростить форму записи выражений (4.101) – (4.105) при расчете первого временного слоя:

$$\begin{aligned}
& nw_i^j(\Delta\tau)(u_1)_{i-2}^j + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_i^0(\Delta\tau) + nw_i^0\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{i-1}^j + \\
& + \left(4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) \times \\
& \times (u_1)_i^j + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_i^0(\Delta\tau) - nw_i^0\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_{i+1}^j - \\
& - nw_i^0(\Delta\tau)(u_1)_{i+2}^j = 4C_i^0(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2; i \in [4; N-4].
\end{aligned} \tag{4.106}$$

$$\begin{aligned}
& \left(4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) (u_1)_2^j + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_2^0(\Delta\tau) - nw_2^0\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_3^j - \\
& - nw_2^0(\Delta\tau)(\tilde{u}_1)_4^j = 4C_2^0(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2;
\end{aligned} \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-4(\Delta\varepsilon) - 2nw_3^0(\Delta\tau) + nw_3^0\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_2^j + \\
& + \left(4\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3 + 8(\Delta\varepsilon) + 2H\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau) \right) (u_1)_3^j + \\
& + \left(-4(\Delta\varepsilon) + 2nw_3^0(\Delta\tau) - nw_3^0\chi_{30}^2(\Delta\varepsilon)^2(\Delta\tau) \right) (u_1)_4^j - \\
& - nw_3^0(\Delta\tau)(u_1)_5^j = 4C_3^0(\Delta\varepsilon)^3(\Delta\tau)^2;
\end{aligned} \tag{4.108}$$

$$\begin{aligned}
& nw_{N-3}^0 (\Delta \tau) (u_1)_{N-5}^I + \\
& + \left(-4(\Delta \varepsilon) - 2nw_{N-3}^0 (\Delta \tau) + nw_{N-3}^0 \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau) \right) (u_1)_{N-4}^I + \\
& + \left(4\chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^3 + 8(\Delta \varepsilon) + 2H\chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau) \right) (u_1)_{N-3}^I + \quad (4.109) \\
& + \left(-4(\Delta \varepsilon) + 2nw_{N-3}^0 (\Delta \tau) - nw_{N-3}^0 \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau) \right) (u_1)_{N-2}^I = \\
& = 4C_{N-3}^0 (\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& nw_{N-2}^0 (\Delta \tau) (u_1)_{N-4}^I + \\
& + \left(-4(\Delta \varepsilon) - 2nw_{N-2}^0 (\Delta \tau) + nw_{N-2}^0 \chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^2 (\Delta \tau) \right) (u_1)_{N-3}^I + \quad (4.110) \\
& + \left(4\chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^3 + 8(\Delta \varepsilon) + 2H\chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau) \right) (u_1)_{N-2}^I = \\
& = 4C_{N-2}^0 (\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau)^2.
\end{aligned}$$

Следует отметить, что выражение (4.97) для расчета любого j -го временного слоя при учете сил трения остается без изменения. Несколько изменяет вид лишь соотношение для коэффициента a_3 , входящего в состав матрицы $[K]^j$:

$$a_3 = 4\chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^3 + 8(\Delta \varepsilon) + 2H\chi_{30}^2 (\Delta \varepsilon)^3 (\Delta \tau).$$

Моделирование виброакустических характеристик с учетом сил трения проведем для ранее рассмотренного трубопровода при тех же условиях его нагружения.

На рис. 4.16 в безразмерных параметрах изображены расчетные временные реализации нормального вибросмещения в точке с координатой $\varepsilon = 0,25$. Рис. 4.16,а соответствует системе без трения ($H = 0$), в которой наряду с установившимися вынужденными колебаниями реализуются незатухающие свободные колебания. Введение в систему трения ($H > 0$) приводит к затуханию свободных колебаний (рис. 4.16,б, в). С течением времени расчетная временная реализация вибросмещения переходит в синусоиду с частотой пульсаций давления. При этом, чем больше H , тем быстрее затухают свободные колебания и тем быстрее на временной реализации устанавливается гармонический процесс колебаний.

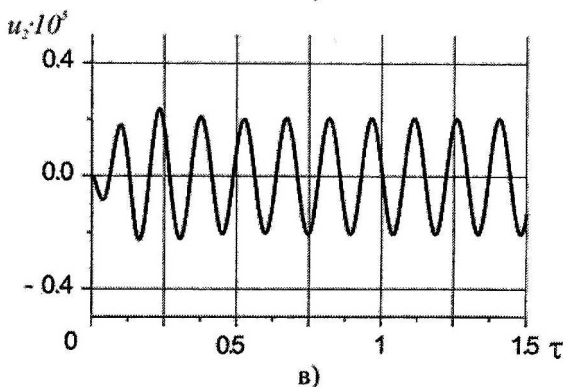
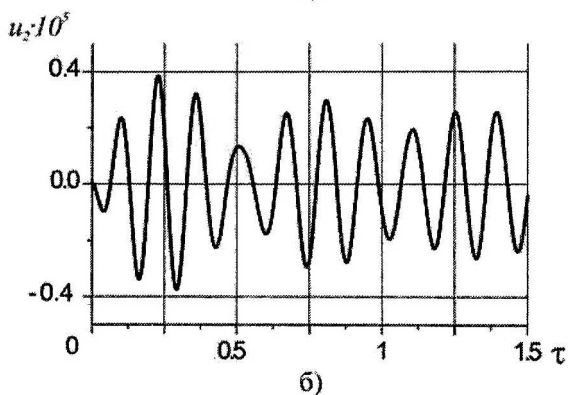
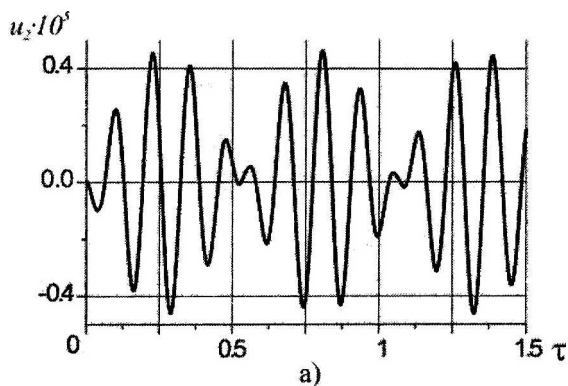


Рис. 4.16 – Временные реализации безразмерного нормального виброремещения в точке $\varepsilon = 0,25$ при вынужденных колебаниях трубопровода под действием пульсирующего потока жидкости из положения покоя при различных величинах параметра трения:
а) $H=0$; б) $H=20$; в) $H=100$.

С другой стороны, результаты моделирования показывают, что с увеличением параметра трения H амплитуда вибро смещения точек трубопровода A_u при его вынужденных колебаниях под действием пульсирующего потока рабочей жидкости уменьшается. Графически эта зависимость для рассматриваемого частного случая представлена на рис. 4.17. Из рисунка видно, что увеличение параметра H от 0 до 100 приводит к снижению амплитуды в 1.3 раза.

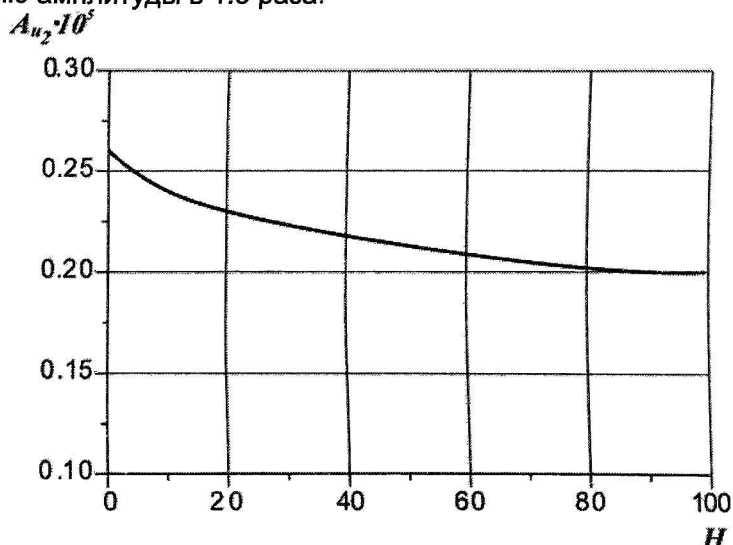


Рис. 4.17 – Зависимость безразмерной амплитуды вибро смещения трубопровода в точке с координатой $\varepsilon = 0,25$ при его вынужденных колебаниях под действием пульсирующего потока от параметра трения H .

На рис. 4.18 представлена амплитудная частотная характеристика виброускорения сечения трубопровода, колеблющегося под действием пульсирующего потока рабочей жидкости с амплитудой 10^5 Па во входном сечении, полученная в результате расчетов по разработанной модели. График построен в размерных величинах. При расчетах параметр трения H принимался равным 20. Обращает на себя внимание наличие резонансного пика в районе частоты $f=332$ Гц. Он связан с резонансом механической подсистемы трубопровода на этой частоте и соответствует первой собственной частоте данного трубопровода, полученной выше при моделировании его собственных колебаний. Однако, частота резонанса при вынужденных колебаниях ($f=332$ Гц) несколько ниже первой собственной частоты ($f=340$

Гц), что обусловлено влиянием трения. Следует отметить, что для проверки адекватности расчетов по разработанной математической модели было проведено моделирование рассматриваемого трубопровода в программном комплексе ANSYS на базе описанной выше методики. Результаты расчетов в программном комплексе ANSYS и по разработанной математической модели совпали с точностью до 0,1%. Однако вычислительные затраты при моделировании виброакустических характеристик трубопровода в программном комплексе ANSYS были на 3 порядка выше, чем по разработанной математической модели.

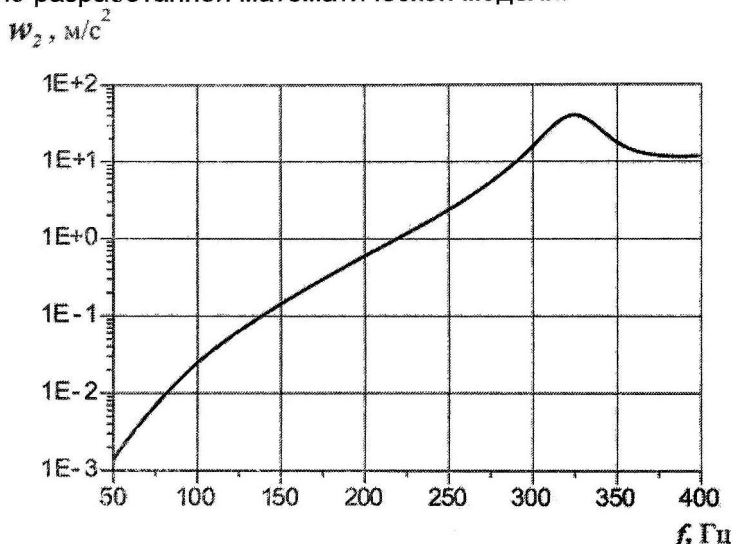


Рис. 4.38 – Амплитудная частотная характеристика виброускорения сечения трубопровода, колеблющегося под действием пульсирующего потока рабочей жидкости.

Глава 5. РАСЧЕТ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРУБОПРОВОДОВ

Перейдем теперь к рассмотрению прочностных характеристик трубопроводов, нагруженных пульсирующим потоком рабочей жидкости.

Разработанная модель виброакустики трубопроводов позволяет определить распределение вибропараметров, сил и моментов по длине линии и во времени, т.е. все силовые факторы, определяющие прочность при динамическом нагружении. Схема сил, действующих на трубопровод, изображена на рис. 5.1.

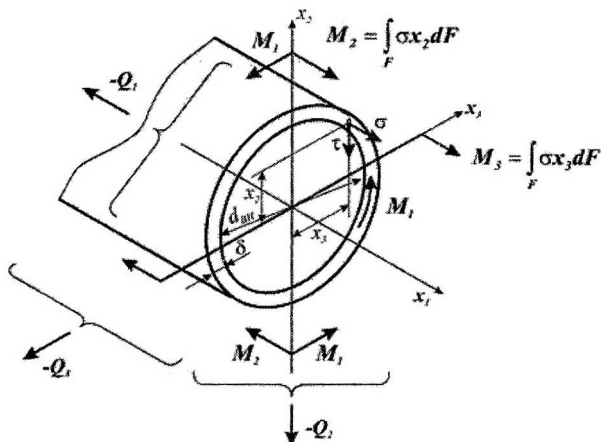


Рис. 5.1 – Схема сил, действующих на трубопровод.

К этим силам относятся: силы от внутреннего давления рабочей жидкости, осевая и перерезывающие силы, крутящий и изгибающие моменты. Все эти факторы определяют объемное напряженное состояние выделенного элемента трубопровода (см. рис. 5.2). Рассмотрим более подробно компоненты этого напряженного состояния. Радиальные напряжения σ_r , зависят от радиуса, на котором находится выделенный элемент (рис. 5.3) и от давления рабочей жидкости:

$$\sigma_r = \frac{pd_{\text{вн}}^2(4r^2 - d_{\text{вн}}^2 - 4d_{\text{вн}}\delta - 4\delta^2)}{16r^2\delta(d_{\text{вн}} + \delta)}$$

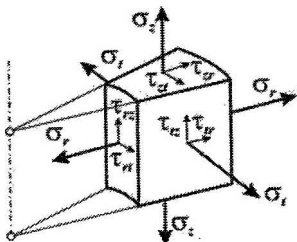


Рис. 5.2 – Компоненты объемного напряженного состояния выделенного элемента трубопровода.

расположен выделенный элемент (рис.5.3) и от давления рабочей жидкости:

$$\sigma_t = \frac{p d_{\text{вн}}^2 (4r^2 + d_{\text{вн}}^2 + 4d_{\text{вн}}\delta + 4\delta^2)}{16r^2\delta(d_{\text{вн}} + \delta)}$$

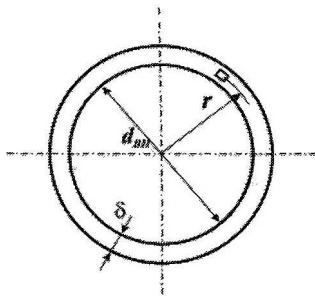


Рис. 5.3 – Положение выделенного элемента в плоскости поперечного сечения.

Максимальное значение окружные напряжения имеют на внутреннем радиусе $\left(r = \frac{d_{\text{вн}}}{2}\right)$:

$$\sigma_t = p \frac{d_{\text{вн}}^2 + 2d_{\text{вн}}\delta + 2\delta^2}{2\delta(d_{\text{вн}} + \delta)}.$$

Третье нормальное напряжение – осевое напряжение σ_z . Осевое напряжение определяется изгибающими моментами M_2 и M_3 и при наличии динамического нагружения именно оно во многом влияет на усталостную прочность рассматриваемого класса трубопроводов. Для тонкостенных трубопроводов

На внутреннем радиусе $\left(r = \frac{d_{\text{вн}}}{2}\right)$ радиальные напряжения максимальны:

$$\sigma_r = -p.$$

На наружном радиусе $\left(r = \frac{d_{\text{вн}}}{2} + \delta\right)$ радиальные напряжения равны нулю.

Окружные (тангенциальные) напряжения σ_t также зависят от радиуса, на котором

расположен выделенный элемент (рис.5.3) и от давления рабочей

осевое напряжение от изгибающих моментов определяется по формуле:

$$\sigma_z = \frac{8\sqrt{M_2^2 + M_3^2} r}{\pi d_{\text{вн}} (d_{\text{вн}}^2 \delta + 3d_{\text{вн}} \delta^2 + 4\delta^3)}.$$

На наружном радиусе осевое напряжение максимально:

$$\sigma_z = \frac{4\sqrt{M_2^2 + M_3^2} (d_{\text{вн}} + 2\delta)}{\pi d_{\text{вн}} (d_{\text{вн}}^2 \delta + 3d_{\text{вн}} \delta^2 + 4\delta^3)},$$

а на внутреннем радиусе оно минимально:

$$\sigma_z = \frac{4\sqrt{M_2^2 + M_3^2}}{\pi (d_{\text{вн}}^2 \delta + 3d_{\text{вн}} \delta^2 + 4\delta^3)}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению действующих касательных напряжений. Касательные напряжения τ_n обычно пренебрежимо малы и мы будем считать $\tau_n = 0$. Исключение составляют случаи трубопроводных систем, в которых присутствуют значительные монтажные напряжения. Касательные напряжения τ_{σ} и τ_{τ} определяются перерезывающими силами Q_2 и Q_3 . При этом их величины зависят не от радиуса, на котором расположен выделенный элемент, а от угла между радиус-вектором, проведенным к элементу, и вектором, представляющим собой сумму векторов $\bar{Q}_2$ и $\bar{Q}_3$ (см. рис. 5.4):

$$\tau_{\sigma} = \tau_{\text{изг}} \left| \cos \left(\arctg \frac{Q_2}{Q_3} - \varphi \right) \right|,$$

$$\tau_{\tau} = \tau_{\text{изг}} \left| \sin \left(\arctg \frac{Q_2}{Q_3} - \varphi \right) \right|,$$

$$\tau_{\text{изг}} = \frac{\sqrt{Q_2^2 + Q_3^2}}{4\pi\delta(d_{\text{вн}} + \delta)}.$$

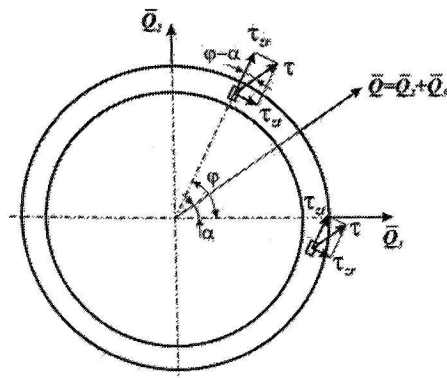


Рис. 5.4 – Касательные напряжения в плоскости поперечного сечения трубопровода.

При определении касательных напряжений пренебрежено крутящим моментом M_I , который обычно весьма незначителен. Необходимо отметить, что все рассмотренные компоненты напряженного состояния имеют постоянные и переменные составляющие. Постоянные составляющие определяются статическими нагрузками, статическим давлением рабочей жидкости и вызываемыми им статическими деформациями как поперечного сечения трубопровода, так и его осевой линии. Переменные составляющие связаны с действием виброакустических нагрузок. Важной особенностью напряженного состояния криволинейных трубопроводов является зависимость напряжений в выделенном элементе как от его положения в поперечном сечении относительно направлений векторов действующих силовых факторов, так и от координаты в направлении вдоль осевой линии.

Шесть определенных компонент напряженного состояния (одна из которых равна 0) выделенного элемента трубопровода позволяют найти главные напряжения. Для этого получим инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_r + \sigma_t + \sigma_z,$$

$$I_2 = \sigma_t \sigma_z + \sigma_z \sigma_r + \sigma_r \sigma_t - \tau_{xz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_t & \tau_{rz} \\ \tau_{rz} & \tau_{rz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_r \begin{vmatrix} \sigma_t & \tau_{rz} \\ \tau_{rz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \tau_{rz} \begin{vmatrix} 0 & \sigma_t \\ \tau_{rz} & \tau_{rz} \end{vmatrix} =$$

$$= \sigma_r \sigma_t \sigma_z - \sigma_r \tau_{rz}^2 - \sigma_t \tau_{rz}^2.$$

Главные напряжения определяются как корни кубического уравнения

$$s^3 - s^2 I_1 + s I_2 - I_3 = 0$$

Это уравнение можно решить как в аналитическом виде, так и численно. Его корни дают три значения главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 . Следует отметить, что главные напряжения следует определять как для постоянных, так и переменных составляющих цикла. В общем случае, соотношение между ними может и не быть постоянной величиной. Кроме того, главные напряжения будут изменяться в зависимости от положения выделенного элемента в поперечном сечении трубопровода и от его координаты ε (или s – в размерных величинах).

Эквивалентные напряжения можно определять либо на основе гипотезы Треска-Сен-Венана:

$$\sigma_{эКв} = \sigma_1 - \sigma_3,$$

либо с помощью гипотезы Хубера-Мизеса:

$$\sigma_{эКв} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}.$$

В случае если статическими составляющими изгибающих моментов и перерезывающих сил можно пренебречь, то постоянные эквивалентные напряжения в поперечном сечении трубопровода определяются выражением:

$$\sigma_m = p \frac{d_{вн}^2 (d_{вн} + 2\delta)^2}{16r^2 \delta (d_{вн} + \delta)}.$$

Тогда на внутреннем диаметре

$$\sigma_m = p \frac{(d_{вн} + 2\delta)^2}{4\delta (d_{вн} + \delta)},$$

на наружном диаметре

$$\sigma_m = p \frac{d_{\text{вн}}^2}{4\delta(d_{\text{вн}} + \delta)}.$$

При определении переменных напряжений цикла изгибающими моментами и перерезывающими силами пренебрегать никак нельзя.

Теоретически определенные по приведенным выше формулам величины постоянных и переменных составляющих напряжений позволяют, воспользовавшись диаграммой предельных состояний, рассчитать запас прочности для наиболее напряженного сечения трубопровода и сделать заключение о его надежности.

Однако на практике ситуация обстоит несколько сложнее. Дело в том, что теоретические напряжения в трубопроводе получены при некоторой идеализации его свойств и характеристик. На самом деле, действующие значения напряжений будут несколько выше, что связано с концентрацией напряжений, влиянием овализации сечения трубопровода при его гйбе, способов обработки при изготовлении, способов пайки и сварки арматуры, способов получения конуса на конце и многого другого. Рассмотрим влияние этих факторов чуть более подробно.

При пластическом деформировании трубопровода в процессе его гйбки возникает овализация поперечного сечения на криволинейном участке. Характер изменения осевых и окружных напряжений по контуру сечения в этом случае существенно изменяется. Действующие напряжения имеют вид [59, 63]:

$$\sigma_t = \sigma_{\text{тп}} + \sigma_{\text{тн}},$$

$$\sigma_z = \sigma_{\text{zp}} + \sigma_{\text{zn}},$$

где $\sigma_{\text{тп}}$ и σ_{zp} - соответственно окружные и осевые напряжения от действия внутреннего давления;

$\sigma_{\text{тн}}$ и σ_{zn} - соответственно окружные и осевые напряжения от действия изгибающих моментов.

Величины, входящие в приведенные выше выражения определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi} &= p \frac{R}{\delta} \left(1 - \frac{(d_{\text{en.min}} + \delta)^2}{(d_{\text{en.max}} + \delta)^2} \frac{1}{\beta + \chi^2} \times \right. \\
&\times \left. \left[(6\omega - \alpha \cos \varphi) + 24\mu \frac{zR}{(d_{\text{en.max}} + \delta)^2} \left(\frac{I_2}{I_0} - \sin^2 \varphi \right) \right] \right), \\
\sigma_{\varphi} &= p \frac{R}{\delta} \left(1 - \frac{(d_{\text{en.min}} + \delta)^2}{(d_{\text{en.max}} + \delta)^2} \frac{1}{\beta + \chi^2} \times \right. \\
&\times \left. \left[24 \frac{zR}{(d_{\text{en.max}} + \delta)^2} \left(\frac{I_2}{I_0} - \sin^2 \varphi \right) + \mu(6\omega - \alpha \cos \varphi) \right] \right), \\
\sigma_{zu} &= \frac{M}{2\delta(d_{\text{en.min}} + \delta)(d_{\text{en.max}} + \delta)} \frac{1}{\beta + \chi^2} \times \\
&\times \left[\left(\frac{\alpha}{n} \omega - \frac{1}{2} \frac{\xi + \chi^2}{I_0 - I_2} \cos \varphi \right) + \mu z \frac{\alpha R}{(d_{\text{en.max}} + \delta)^2 n} \left(\frac{I_2}{I_0} - \sin^2 \varphi \right) \right], \\
\sigma_{zu} &= \frac{M}{2\delta(d_{\text{en.min}} + \delta)(d_{\text{en.max}} + \delta)} \frac{1}{\beta + \chi^2} \times \\
&\times \left[\mu \left(\frac{\alpha}{n} \omega - \frac{1}{2} \frac{\xi + \chi^2}{I_0 - I_2} \cos \varphi \right) + z \frac{\alpha R}{(d_{\text{en.max}} + \delta)^2 n} \left(\frac{I_2}{I_0} - \sin^2 \varphi \right) \right], \quad (5.1)
\end{aligned}$$

где R - радиус кривизны криволинейного участка,

$d_{\text{en.min}}$ - длина малой оси эллипса,

$d_{\text{en.max}}$ - длина большой оси эллипса,

α, β - коэффициенты,

φ - центральный угол в сечении, изменяющийся от 0 до 2π ;

ω - величина, зависящая от эксцентриситета эллипса в поперечном сечении трубопровода и угла φ ;

μ - коэффициент Пуассона;

z - расстояние анализируемого выделенного элемента от среднего контура поперечного сечения;

I_0, I_2, I_4 - значение полных эллиптических интегралов;

$$\xi = \frac{12S_1}{n};$$

$$S_1 = \int_0^\pi \omega^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi;$$

$$n = I_4 - \frac{I_2^2}{I_0}.$$

Напряжения растут пропорционально овальности, давлению, моменту и обратно пропорционально толщине стенки. Распределение напряжений σ_φ и σ_φ по контуру сечения показано на рис. 5.5. Эпюра осевых напряжений на участке малой оси трижды меняет свой знак.

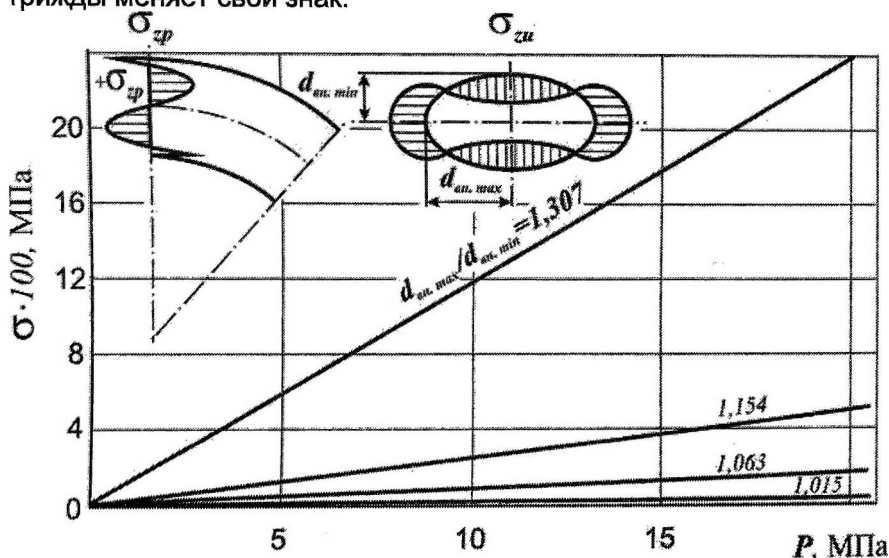


Рис. 5.5 - Распределение напряжений по эллиптическому контуру сечения трубопровода ($\varnothing 22 \times 1$) от действия внутреннего давления.

Напряжение σ_φ достигает своего наибольшего значения не на концах малой оси, как это следовало бы по теории изгиба

сплошного бруса, а в некоторой промежуточной точке, отстоящей от нейтральной линии примерно на величину $\frac{d_{\text{ек. min}}}{2}$.

Наиболее напряженными точками трубопровода будут те, которые расположены либо у внутренней, либо у внешней его поверхности, т.е. при $z = \pm \frac{\delta}{2}$. При сравнительно большом радиусе R и большой толщине δ напряжения σ_r и σ_z от радиуса R не зависят и убывают обратно пропорционально не первой, а второй степени толщины δ .

Выражения (5.1) получены при рассмотрении трубопроводов эллиптического контура поперечного сечения. На практике же искаженное при гibe поперечное сечение напоминает овал неправильной формы с малой разностью полуосей (0,25 – 2 мм). Однако экспериментальными исследованиями для трубопроводов диаметрами 22х1, 27х1 и 34х1 [59] доказано, что при соотношении полуосей менее 1,3 выражения (5.1) обеспечивают точность не менее 40%. При этом, чем меньше соотношение полуосей, тем более высокую точность обеспечивают данные расчетные соотношения.

Концентрация напряжений, как следует из анализа многих разрушений трубопроводов, в большинстве случаев является причиной усталостных разрушений. Разрушения происходят в местах, где не сделано плавного перехода от одной жесткости к другой. В качестве примера рассмотрим конструкцию соединения по наружному конусу (см. рис. 5.6). В варианте 1 (см. таблицу 5.1) концентраторами напряжений являются радиусы r' , r'' , r''' . Действительный коэффициент концентрации напряжений для этого варианта составляет 2,73.

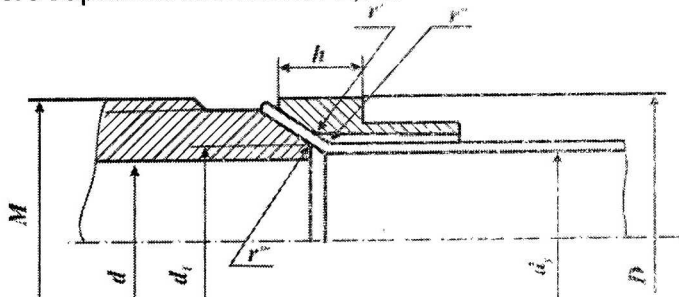


Рис. 5.6 – Параметры, определяющие концентрацию напряжений в соединении по наружному конусу.

Таблица 5.1 - Конструктивные варианты соединения по наружному конусу.

№ варианта	Параметр (размер)							
	M	d	d_1	D	h	r'	r''	r'''
I	18x1,5	10	11	15,6	3	1	1	0,5
II	20x1,5	9,5	10,8	18,2	5	2	2	0,2
III	20x1,5	9,2	10,2	18,2	5	2	1,5	0,2

Переход к варианту II осуществляется путем следующих конструктивных изменений:

- увеличены радиусы r' и r'' насколько это возможно из конструктивных соображений;
- уменьшен внутренний диаметр штуцера d_1 и радиус r''' с таким расчетом, чтобы конусная часть трубопровода полностью опиралась на конус штуцера, в итоге радиус r''' был выведен из контакта с трубопроводом и исключен как концентратор;
- усилен поясok ниппеля путем некоторого увеличения диаметра D и длины h .

Проведение этих мероприятий приводит к снижению действительного коэффициента концентрации напряжений в данном соединении до 1,83.

Дальнейшее снижение действительного коэффициента концентрации напряжений осуществляется путем перехода на беззазорную посадку ниппеля на трубопровод. Основная идея третьего варианта конструкции соединения состоит в том, что хвостовик ниппеля воспринимает изгибные нагрузки совместно с трубопроводом и радиусы r' и r'' перестают быть концентраторами напряжений. В третьем варианте действительный коэффициент концентрации равен 1,4 ... 1,5.

Установка же ниппеля на трубопровод с натягом в пределах 0...0,3 мм приводит к дальнейшему снижению эффективного коэффициента концентрации до 1,22. Усталостное разрушение трубопровода происходит у окончания хвостовика ниппеля.

Значительная концентрация напряжений имеет место и при соединении трубопроводов со сферическим элементом. Введение в конструкцию соединения трубопроводов сферического элемента всегда преследует цель обеспечить компенсацию погрешностей монтажа или подвижность всей системы в работе. Привлекательность сферы с точки зрения монтажных статических нагрузок состоит в том, что она в отличие от таких

соединений как фланцевое или соединение по наружному и внутреннему конусу допускает перекося осей и большие радиальные и торцовые биения элементов конструкции соединения. Поэтому соединение с упругим сферическим ниппелем нашло широкое применение в трубопроводах авиационных и космических изделий. Однако при его использовании необходимо учитывать соответствующие коэффициенты концентрации напряжений. В [59] проведено исследование шести конструктивных вариантов соединения с упругим сферическим ниппелем, схемы которых представлены на рис. 5.7. Результаты этого исследования трубопровода диаметром 22х1 мм из стали X18H10T, сведены в таблицу 5.2.

Таблица 5.2. Результаты усталостных испытаний конструктивных вариантов соединения с упругим сферическим ниппелем.

№ варианта	I	II	III	IV	V	VI
Эскиз	Рис. 4.45,а	Рис. 4.45,б	Рис. 4.45,в	Рис. 4.45,г	Рис. 4.45,д	Рис. 4.45,е
σ_{-1} , МПа	63-120	120	110	140	140	160-200
Коэффициент концентрации напряжений, K_σ	1.8-3.5	1.8	2.0	1.6	1.6	1.1-1.4

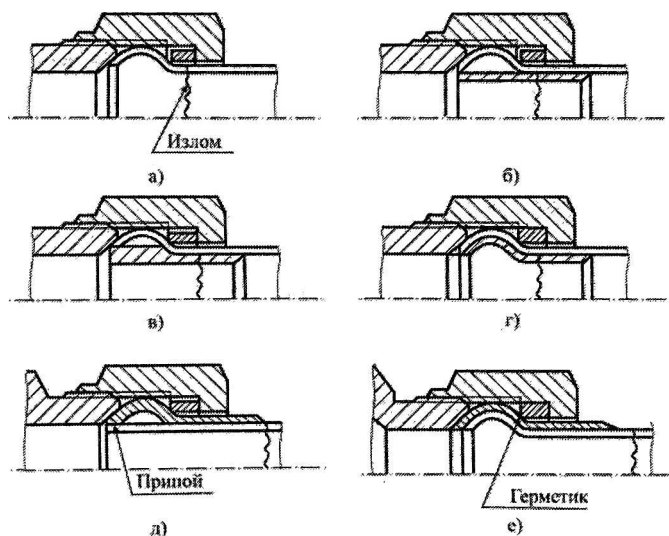


Рис. 5.7 – Конструктивные варианты соединения с упругим сферическим ниппелем.

Низкий предел выносливости соединения в варианте I обусловлен появлением растягивающих остаточных напряжений на поверхности в процессе формования сферы, на которые накладываются затем напряжения того же знака из-за деформации сферы при затяжке соединения. В вариантах II – V предприняты неудачные попытки снять отрицательное действие растягивающих напряжений. В VI варианте ниппель вынесен на наружную поверхность трубопровода, что обеспечило наиболее высокий по сравнению с другими вариантами предел выносливости и необходимые упругие свойства сферической законцовки.

При соединении ниппеля и трубопровода сваркой внахлест или встык (рис. 5.8) общий уровень концентрации напряжений достаточно высок (эффективный коэффициент концентрации напряжений $K_v=2.0...3.6$), что объясняется особенностями сварных швов [59]. То же самое относится и к паяным соединениям.

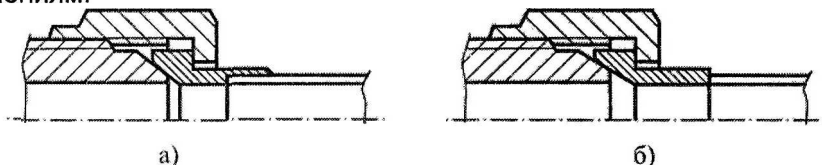


Рис. 5.8 – Конструкция соединения ниппеля и трубопровода сваркой или пайкой внахлест (а) и встык (б).

При организации отводов от основной магистрали применяются детали (рис. 5.9), конструктивное оформление которых является источником концентрации напряжений (коэффициент концентрации K_v доходит до 2.2), снижающим усталостную прочность трубопроводов из стали X18H10T до 100...110 МПа. Конструктивное оформление присоединенных элементов может быть самым разным, а крепление их к трубопроводу может выполняться пайкой или сваркой. Вариант «д» рис. 5.9 имеет наименьший теоретический коэффициент концентрации напряжений $K_v=1.3$ и наибольшую усталостную прочность – до 170 МПа [56]. Однако вероятность загрязнения и появления коррозии в зазорах между присоединенной деталью и трубопроводом вносит большой разброс значений предела выносливости (для случая пайки $\sigma_{-1}=100...170$ МПа, для случая сварки $\sigma_{-1}=100...150$ МПа [56]). Исключительно неблагоприятен по концентрации напряжений случай приварки штуцера в варианте «е» рис. 5.9.

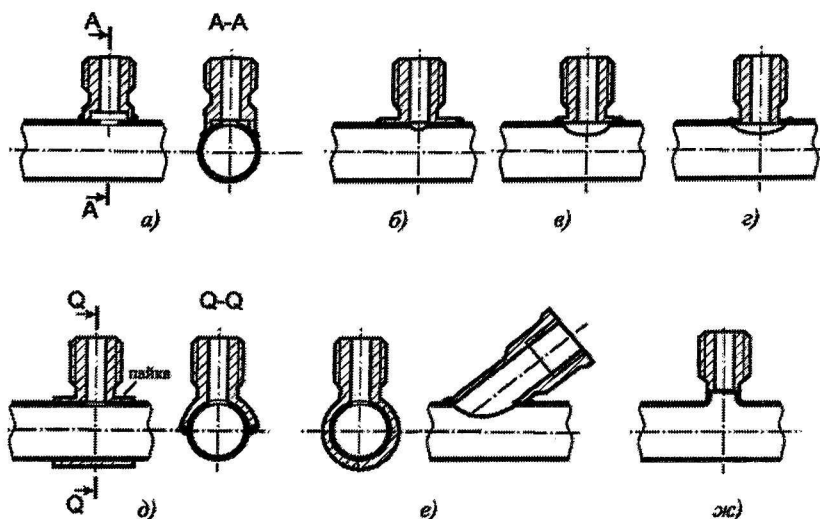


Рис. 5.9 – Конструктивное оформление присоединенных деталей.

На величину действительных переменных напряжений влияет чистота обработки поверхности трубопроводов. Наличие на поверхности мелких дефектов в виде рисок, царапин, вмятин снижает сопротивление усталости трубопроводов на 10 ... 20 МПа. С другой стороны, увеличение предела выносливости на 20...30 МПа можно достичь путем сплошной или местной шлифовки на бесцентрово-шлифовальных станках с последующей направленной полировкой наружной поверхности вдоль образующей наждачным полотном. Однако, это – дополнительная операция, требующая соответствующего оборудования и затрат. В любом случае, повышение чистоты поверхности в процессе производства трубопроводов оказывает благотворное влияние на предел выносливости.

Непроизводительный процесс полировки наружной поверхности с успехом заменяет поверхностная гидродробеструйная обработка, повышающая предел выносливости путем наведения сжимающих остаточных напряжений на наружной поверхности трубопровода. Предел выносливости трубопроводов с соединением по наружному конусу (посадка ниппеля с натягом до 0.3 мм) увеличивается на 20...25 МПа или на 15...20%. После введения оптимального натяга 0...0.16 мм предел выносливости соединения по наружному конусу возрастает еще на 20...40 МПа и составляет 220...240 МПа. У трубопроводов с соединением сваркой предел выносливости при гидродробеструйной обра-

ботке не увеличивается, а в ряде случаев даже несколько уменьшается. Для сохранения податливости и пластичности материала трубопровода по его длине можно получить локальное упрочнение путем гидродробеструйной обработки в наиболее нагруженной зоне. Так, например, дробеструйная обработка в зоне концов трубопровода в совокупности с серебрением ниппеля (для предупреждения контактной коррозии) увеличивает предел выносливости на 38% [59].

Температура в значительной мере влияет на изменение структуры материала и при ее возрастании предел выносливости, так же как и предел прочности, начинает падать, однако эта зависимость заметно проявляется лишь при температурах, больших некоторого порогового значения. Например, для трубопроводов, выполненных из стали X18H10T таким значением является $+300^{\circ}\text{C}$ [59].

Коррозионная среда (морская вода, агрессивные масла и др.), воздействуя на металл трубопровода, делает его поверхность шероховатой, образуя большое число мелких углублений, которые действуют как концентраторы напряжений. Так, например, для нержавеющей сталей аустенитного класса (сталь 1X18H10T) получены следующие значения пределов выносливости, снятые на базе $(2...5) \cdot 10^7$ циклов [59]:

- на воздухе $\sigma_{-1}=200...240$ МПа;
- в пресной воде $\sigma_{-1}=200...210$ МПа;
- в морской воде $\sigma_{-1}=80...110$ МПа.

Ряд сред не агрессивны, но поверхностно активны и вызывают адсорбционную усталость вследствие появления расклинивающего эффекта Ребиндера: под действием растягивающих напряжений раскрываются поверхностные микротрещины, куда проникает поверхностно-активная среда и создает внутри трещин расклинивающие усилия.

При поперечных колебаниях трубопровода в местах, где установлены опоры (и при установке деталей на трубопровод путем напрессовки) имеют место небольшие скольжения контактирующих поверхностей. Определенные сочетания пары металлов и относительные перемещения приводят к коррозионному и электроэрозионному разрушению и механическому истиранию соприкасающихся поверхностей и в конечном итоге – к снижению предела выносливости. Для исключения фрикционной коррозии и для более равномерного нагружения трубопровода, например, при зажатии его колодочным зажимом (рис. 5.10), сей-

час широко используется фторопластовая прокладка, которую ставят между трубопроводом и зажимом.

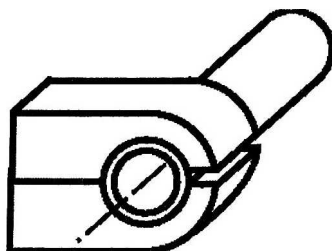


Рис.5.10 – Опора трубопровода в виде колодочного зажима.

Таким образом, расчетные напряжения, полученные в ходе анализа по разработанной модели, для получения действительных напряжений необходимо умножить на соответствующие коэффициенты, учитывающие концентрацию напряжений, масштабный эффект, качество обработки поверхности трубопровода, способы присоединения арматуры, искажение поперечного сечения при гнбе и т.п. К сожалению, все эти коэффициенты в настоящее время получены эмпирически и имеют приближенные, оценочные значения. Это приводит к необходимости при проектировании трубопроводных систем использования значительных запасов прочности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Акимов М.Ю. Моделирование динамики и исследование устойчивости вязкоупругого трубопровода и его элементов: Дисс...канд. физ.-мат. наук. – Ульяновск, 1999. – 151 с.
2. Алексеев А.М., Сборовский А.К. Судовые виброгасители. - Л.: Судпромгиз, 1962. - 196 с.
3. Анурьев В.И. Справочник конструктора машиностроителя: В 3-х т. Т. 1. - 5-е изд. - М.: Машиностроение, 1978. - 728 с.
4. Анурьев В.И. Справочник конструктора машиностроителя: В 3-х т. Т.3. - 5-е изд. - М.: Машиностроение, 1979. - 557 с.
5. Аркуша А.И. Техническая механика: теоретическая механика и сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1998. – 352 с.
6. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
7. Башта Т.М., Руднев С.С., Некрасов Б.Б. и др. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. - М.: Машиностроение, 1982. - 423 с.
8. Васильева С.В. Разработка методики математического моделирования для задач управления качеством трубопроводных систем транспортировки жидких сред на этапе их проектирования. Дисс. на соиск. уч. ст. к.т.н. – М.: МАТИ, 2007. – 133 с.
9. Воскобойник А.А., Воскобойник А.В., Воскобойник В.А. Взаимные корреляции и спектры пульсаций давления за локальным препятствием // Материалы акустического симпозиума "Консонанс - 2005". - Украина, Киев: Изд-во Института гидромеханики НАН Украины, 2005. - С. 128-133.
10. Ганиев Р.Ф. Волновые машины и технологии (Введение в волновую технологию). – М.:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 192 с.
11. Гаспаров М.С. Гидродинамика и виброакустика авиационных комбинированных насосных агрегатов. Дисс. на соиск... к.т.н. - Самара: СГАУ, 2006. - 166 с.
12. Гаспаров М.С., Крючков А.Н., Шахматов Е.В., Шорин В.П. Гидродинамика и виброакустика авиационных комбинированных насосных агрегатов. - Самара: СГАУ, 2006. - 86 с.
13. Гидродинамика / Под ред. Д.Н. Попова. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 384 с.
14. Гимадиев А.Г., Крючков А.Н., Леньшин В.В., Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В., Шестаков Г.В., Шорин В.П. Снижение виброакустических нагрузок в гидромеханических системах. – Самара, СГАУ, 1998. – 270 с.

15. Гладких П.А., Хачатурян С.А. Вибрации в трубопроводах и методы их устранения. – М.: Машгиз, 1959. – 243 с.
16. Гладких П.А. Борьба с шумом и вибрацией в судостроении. – Л.: Судостроение, 1971. – 176 с.
17. Гликман Б.Ф. Математические модели пневмогидравлических систем. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
18. Гликман Б.Ф. Нестационарные течения в пневмогидравлических цепях. – М.: Машиностроение, 1979. – 256 с.
19. Гликман Б.Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1974. – 396 с.
20. Головин А.Н. Разработка гасителей колебаний жидкости для трубопроводных цепей двигателей и систем летательных аппаратов. Дисс. на соиск. к.т.н. – Куйбышев: КуАИ, 1983. – 164 с.
21. Зверьков Б.В., Костовецкий Д.Л., Кац Ш.Н., Бояджи К.И. Расчет и конструирование трубопроводов. – Л.: Машиностроение, 1979. – 246 с.
22. Иголкин А.А. Снижение колебаний рабочей среды и шума пневматического производственного оборудования и инструмента. Дисс. на соиск... к.т.н. – Самара: СГАУ, 2005. – 206 с.
23. Исакович М.А. Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 495 с.
24. Карелин В.Я. Кавитационные явления в центробежных и осевых насосах. – М.: Машиностроение, 1975. – 336 с.
25. Козлов В.А., Сафонов М.В. Собственные шумы молекулярно-электронных преобразователей // Журнал технической физики, 2003, Т. 73, вып. 12. – С. 81-84.
26. Колебания элементов аксиально-поршневых гидромашин / Под ред. проф. К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1978. – 280 с.
27. Колесников К.С., Рыбак С.А., Самойлов Е.А. Динамика топливных систем ЖРД. – М.: Машиностроение, 1975. – 172 с.
28. Каловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 263 с.
29. Кондрашов Н.С. О параметрических колебаниях трубопроводов // Вибрационная прочность и надежность авиационных двигателей. Вып. XIX. – Куйбышев, 1965. – С. 173-181.
30. Корнилов В.В., Сеницкий В.М. Гидропривод в кузнечно-штамповочном оборудовании. – М.: Машиностроение, 2002. – 224 с.
31. Крючков А.Н. Снижение колебаний и шума в гидромеханических и газовых системах. Дисс. на соиск... д.т.н. – Самара: СГАУ, 2006. – 299 с.
32. Леньшин В.В. Исследование виброакустических характери-

стик элементов гидромеханических систем двигателей летательных аппаратов: Дисс...канд. техн. наук. – Самара: СГАУ, 1997. – 193 с.

33. Макарьянц Г.М. Разработка методик расчета и исследование виброакустических характеристик трубопроводных систем. Дисс. на соиск... к.т.н. – Самара: СГАУ, 2004. – 191 с.

34. Макарьянц Г.М., Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В. Моделирование виброакустических характеристик трубопровода с использованием метода конечных элементов // Изв. СНЦ РАН. – Самара, СНЦ РАН, 2002, Т.4, №2(8) – С. 327-323.

35. Макарьянц Г.М., Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В., Шестаков Г.В. Исследование виброакустических характеристик трубопровода при его силовом нагружении с использованием программного комплекса ANSYS // Сборник трудов четвертой конференции пользователей программного обеспечения CAD-FEM GmbH. – М.: Полигон-пресс, 2004. – С. 280-287.

36. Молгачев А.А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости вязкоупругих элементов проточных каналов. Дисс. на соиск... к.т.н. – Ульяновск: УГТУ, 2005. – 151 с.

37. Найдено О.К., Петров П.П. Амортизация судовых двигателей и механизмов. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 288 с.

38. Некрасов Б.Б. Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах. – М.: Машиностроение, 1967. – 368 с.

39. Неустойчивость горения в ЖРД / Под ред. Харрье Д.Т., Рирдона Ф.Г. – М.: Мир, 1975. – 870 с.

40. Овсянников Б.В., Яловой Н.С. Моделирование и оптимизация характеристик высокооборотных насосов. – М.: Машиностроение, 1992. – 256 с.

41. ОСТ 108.031.09-85. Котлы стационарные и трубопроводы пара и горячей воды. Нормы расчета на прочность. Методы определения толщины стенки, 1985. – 24 с.

42. Пилипенко В.В., Задонцев В.А., Натанзон М.С. Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение, 1977. – 352 с.

43. Попов Д.Н. Динамика и регулирование пневмо- и гидросистем. – М.: Машиностроение, 1977. – 424 с.

44. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. – М.: Машиностроение, 1982. – 240 с.

45. Пособие по расчету на прочность стальных трубопроводов на Ру до 10 МПа // Поповский Б.В. и др. – М.: ВНИИмонтажспецстрой, 1989. – 17 с.

46. Прокофьев А.Б. Исследование процессов виброакустического взаимодействия в элементах гидромеханических систем двигателей летательных аппаратов. Дисс. на соиск... к.т.н. - Самара: СГАУ, 2001. - 256 с.
47. Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В. Виброакустическая модель прямолинейного неоднородного трубопровода при его силовом возбуждении пульсациями рабочей жидкости // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - Самара, 2000, Т.2, №1. - С.135-140.
48. Прокофьев А.Б., Шахматов Е.В. Виброакустическая модель прямолинейного участка трубопроводной системы с гасителем колебаний в условиях силового возбуждения пульсациями рабочей жидкости // Научно-технический сборник Ракетно-космическая техника. Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем. Серия XII. Вып. 1. - Самара, ВКБ РКК Энергия, 2000. - С. 120-131.
49. Прокофьев А.Б. Расчет собственных частот и форм колебаний трубопроводов с помощью программного комплекса // Изв. СНЦ РАН. - г. Самара, СНЦ РАН, 1999, №2. - С. 335-342.
50. Прокофьев А.Б., Шестаков Г.В. Исследование частотных характеристик отрезка трубопроводной линии при несогласованной нагрузке в виде акустически закрытого трубопровода // Научно-технический сборник Ракетно-космическая техника. Расчет, проектирование, конструирование и испытания космических систем. Серия XII. Вып. 1. - Самара, ВКБ РКК Энергия, 1998. - С. 105-112.
51. РД-10-400-01. Нормы расчета на прочность трубопроводов тепловых сетей, 2001. - 70 с.
52. РД-10-249-98. Нормы расчета на прочность стационарных котлов и трубопроводов пара и горячей воды, 1998. - 50 с.
53. Свербилов В.Я. Обеспечение устойчивости регуляторов давления газа коррекцией динамических характеристик присоединенных цепей. Дисс. на соиск... к.т.н. - Куйбышев: КуАИ, 1983. - 206 с.
54. Светлицкий В.А. Механика стержней. - М.: Высшая школа, 1987. - 304 с.
55. Светлицкий В.А. Механика стержней. Т.1. Статика. - М.: Машиностроение, 1987. - 320 с.
56. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.Н. Несущая способность и расчеты машин на прочность. - М.: Машгиз, 1963. - 448 с.

57. Скучик Е. Основы акустики. Т.1. - М.: Мир, 1976. - 520 с.
58. Справочник по судовой акустике. Под общ. ред. Клюкина И.И. и Боголепова И.И. - Л.: Судостроение, 1978. - 503 с.
59. Старцев Н.И. Трубопроводы газотурбинных двигателей. - М.: Машиностроение, 1976. - 272 с.
60. Теория колебаний / Под общ. Ред. К.С. Колесникова. - Б.; Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. - 272 с.
61. Тиатор И. Отопительные системы. - М.: Техносфера, 2006. - 271 с.
62. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 592 с.
63. Феодосьев В.И. Упругие элементы точного приборостроения. - М.: Оборонгиз, 1949. - 343 с.
64. Чарный И.А. Неустановившееся течение реальной жидкости в трубах. - М.: Недра, 1975. - 108 с.
65. Чебаевский В.Ф., Петров В.И. Кавитационные характеристики высокооборотных шнеко-центробежных насосов. М.: Машиностроение, 1973. - 152 с.
66. Чегодаев Д.Е., Шатилов Ю.В. Управляемая виброизоляция (конструктивные варианты и эффективность). - Самара: СГАУ, 1995. - 143 с.
67. Чугаев Р.Р. Гидравлика. - Л.: Энергия, 1975. - 600 с.
68. Шахматов Е.В. Методы и средства коррекции параметров динамических процессов в гидромеханических и топливных системах двигателей летательных аппаратов. Т.1, 2. Дисс. на соиск... д.т.н. - Самара: СГАУ, 1993.
69. Шорин В.П. Устранение колебаний в авиационных трубопроводах. - М.: Машиностроение, 1980. - 156 с.
70. Astley R.J. Acoustical modes in lined ducts with flexible walls: a variational approach // Proceedings of Inter-Noise 90, 1990. - P. 575-578.
71. Blake W.K. Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration - USA, Orlando: Academic Pr., 1986. - 500 pp.
72. Douglas Mast T. Describing-function theory for flow excitation of resonators // J. Acoust. Soc. Am., 1995, Vol. 97, №1. - P. 163-172.
73. Edelstein W.S., Chen S.S., Jendzejczyk J.A. A finite element computation of the flow-induced oscillation in a cantilevered tube // Journal of Sound and Vibration. Vol. 107, 1986. - P. 121-129.
74. Elder S.A. Self-excited depth-mode resonance for a wall-mounted cavity in turbulent flow // J. Acoust. Soc. Am., Vol. 64(3), 1978 - P. 877 -890.

75. Gao Y., Brennan M.J., Joseph P.F., Muggleton J.M., Hunaidi O. A model of correlation function of leak noise in buried plastic pipes // *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 277, 2004. - P. 133-148.
76. Gulyayev V.I., Tolbatov E.Ju. Dynamics of spiral tubes containing internal moving masses of boiling liquid // *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 274, 2004. - P. 233-248.
77. Jeon W.-H., Kee D.J. An analysis of the flow and aerodynamic acoustic sources of a centrifugal impeller // *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 222, 1999. - P. 505-511.
78. Lafon P., Caillaud S., Devos J.P., Lambert C. Aeroacoustical coupling in a ducted shallow cavity and fluid/structure effects on a steam line // *Journal of Fluids and Structures*, 2003, Vol. 18. - P. 695-713.
79. Langthjem M.A., Olhoff N. A numerical study of flow-induced noise in two-dimensional centrifugal pump. Part 1. Hydrodynamics // *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, 2004. - P. 349-368.
80. Langthjem M.A., Olhoff N. A numerical study of flow-induced noise in two-dimensional centrifugal pump. Part 2. Hydroacoustics // *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 19, 2004. - P. 369-386.
81. Makrides G.A., Edelstein W.S. Some numerical studies of chaotic motion in tubes conveying fluid // *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 152, 1992. - P. 517-530.
82. Martin V., Cummings A., Gronier C. Discrimination of coupled structural/acoustic duct modes by active control: principles and experimental results // *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 274, 2004. - P. 583-603.
83. Martin V. Perturbation of fluid-guided waves introduced by bending plates // *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 144, 1991. - P. 331-353.
84. Pudar R.S., Liggett J.A. Leaks in pipe networks // *Journal of Hydraulic Engineering*, American Society of Civil Engineers. Vol. 118, 1992. - P. 1031-1046.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРОАКУСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМАХ

Подписано в печать
Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 10,5. Заказ №169. Тираж 200.

Издательство Самарского государственного аэрокосмического университета