МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

Б.А. Горлач

МАТЕМАТИКА

Учебник
для студентов заочного обучения

Часть 1

Самарский Государственный
аэрокосмический университет
БИБЛИОТЕКА
Учебный фонд

САМАРА 2000

УДК 512.64

МАТЕМАТИКА. Учебник для студентов заочного обучения. Часть 1. /*Б.А.Горлач*; Самарс. гос. аэрокосм. ун-т. Самара, 2000. 216 с.
ISBN 5-7883-0074-6

Излагаются сопровождаемые примерами решения задач основы математики в объеме минимально необходимых знаний для инженерного образования. Даны условия задач для самостоятельного решения и задания для выполнения расчетных работ. Приводятся вопросы для самопроверки усвоения материала.

Учебник предназначен для студентов инженерных специальностей заочной формы обучения для самостоятельного овладения материалом.

Ил. 55 . Табл. 4. Библиогр.: 19 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета.

Рецензент доц. Л.В.Коломиец.

ISBN 5-7883-0074-6

© Б. А. Горлач
© Самарский государственный аэрокосмический университет, 2000

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 7

1 Векторы 11

1.1 Векторы как геометрический объект . . . 11
1.2 Проекция вектора на направленную ось . . . 13
1.3 Разложение вектора. Ортонормированный базис . . . 14
1.4 Операции над векторами . . . 18
1.5 Деление отрезка в заданном отношении . . . 21
1.6 Вопросы. . . . 23
1.7 Упражнения . . . 25

2 Аналитическая геометрия 27

2.1 Прямая на плоскости . . . 27
2.2 Уравнение плоскости. . . . 30
2.3 Взаимное расположение плоскостей. . . . 33
2.4 Расстояние от точки до плоскости . . . 38
2.5 Уравнения прямой в $\mathfrak{R}_3$ . . . 40
2.6 Взаимное расположение прямых и плоскостей . . . 42
2.7 Преобразование координат . . . 45
2.8 Уравнения второго порядка в $\mathfrak{R}_2$ . . . 49
2.9 Свойства кривых второго порядка . . . 55
2.10 Поверхности второго порядка . . . 60
2.11 Вопросы . . . 65
2.12 Упражнения . . . 68
2.13 Задание к расчетной работе 1 . . . 71

3 Введение в анализ **73**
3.1 Множества . . . 73
3.2 Функция. Основные понятия и свойства . . . 75
3.3 Классификация функций. Элементарные функции . . . 77
3.4 Преобразование графиков функций . . . 81
3.5 Интерполирование функций . . . 82
3.6 Функции нескольких переменных . . . 85
3.7 Вопросы . . . 87
3.8 Упражнения . . . 89

4 Непрерывность и пределы **91**
4.1 Предел числовой последовательности . . . 91
4.2 Последовательности в пространствах E_n . . . 93
4.3 Предел функции . . . 94
4.4 Бесконечно малые и большие величины . . . 96
4.5 Теоремы о пределах . . . 97
4.6 Первый замечательный предел . . . 101
4.7 Второй замечательный предел . . . 102
4.8 Предел функции нескольких переменных . . . 104
4.9 Непрерывность функций . . . 106
4.10 Непрерывность функции нескольких переменных . . . 109
4.11 Вопросы . . . 112
4.12 Упражнения . . . 114

5 Производная и дифференциал **117**
5.1 Постановка задачи . . . 117
5.2 Определение производной . . . 119
5.3 Вычисление производной . . . 121
5.4 Свойства и таблица производных . . . 122
5.5 Частные производные . . . 125
5.6 Производная в задачах экономики . . . 127
5.7 Дифференциал функции . . . 130
5.8 Дифференциал функции нескольких переменных . . . 132
5.9 Производная по направлению . . . 134
5.10 Градиент функции . . . 136

5.11 Производные высших порядков . . . 138
5.12 Вопросы . . . 142
5.13 Упражнения . . . 145

6 Исследование функций **147**
6.1 Теоремы дифференциального исчисления . . . 147
6.2 Правило Лопиталя . . . 149
6.3 Формула Тейлора . . . 150
6.4 Монотонность функции . . . 153
6.5 Экстремумы функции . . . 154
6.6 Наибольшее и наименьшее значения функции . . . 157
6.7 Выпуклость и точки перегиба . . . 161
6.8 Асимптоты . . . 163
6.9 Схема исследования функций . . . 165
6.10 Экстремумы функции нескольких переменных . . . 168
6.11 Условные экстремумы . . . 172
6.12 Метод множителей Лагранжа . . . 174
6.13 Вопросы . . . 179
6.14 Упражнения . . . 182

7 Численные методы **185**
7.1 Выбор и исключение интервалов . . . 186
7.2 Метод золотого сечения . . . 188
7.3 Метод хорд . . . 192
7.4 Метод касательных . . . 194
7.5 Метод хорд и касательных . . . 195
7.6 Симплексный метод поиска экстремума . . . 199
7.7 Метод градиентного спуска . . . 202
7.8 Вопросы . . . 208
7.9 Задание к расчетной работе 2 . . . 211

Библиографический список **213**

Предисловие

Издание представляет собой первую часть общего курса математики, предназначенного для студентов-заочников, обучаемых по инженерным специальностям. Оно включает в себя7 глав:

1. Векторная алгебра.

Приведены основные операции над векторами как геометрическими объектами. Даны понятия скалярного произведения; проекции вектора. Рассмотрено представление вектора в произвольном и ортонормированном базисах. Рассмотрена задача о делении отрезка в заданном отношении.

2. Аналитическая геометрия.

Приведены в различных видах уравнения прямой и плоскости. Рассмотрен вопрос о взаимном расположении плоскостей; прямых и плоскостей, сформулированы условия параллельности и ортогональности. Получены формулы для определения расстояния от точки до плоскости (прямой). Рассмотрены квадратные уравнения на плоскости и в пространстве. Описана последовательность приведения квадратных уравнений к каноническому виду. Перечислены основные свойства кривых и поверхностей второго порядка.

3. Введение в математический анализ.

В главе даны основные понятия и определения теории множеств. Рассмотрены основные виды функций, в том числе известные из школьного курса элементарные функции. Разобраны методы преобразования графиков функции. Приведены способы интерполяции, разобраны примеры. Даны понятия функций нескольких переменных.

4. Непрерывность и пределы функций.

Дано понятие числовой последовательности для функций одной и нескольких переменных. Сформулированы определения предела функций. Перечислены и пояснены свойства пределов. Введены понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин. Рассмотрены замечательные пределы. Даны определения непрерывных функций одной и нескольких переменных.

5. Производная и дифференциал.

Даны основные понятия и определения, связанные с производными и дифференциалами. Рассмотрены основные задачи, в том числе экономические, приводящие к этим понятиям и использующие аппарат дифференцирования. Описаны методы определения производных и дифференциалов, в том числе для функций нескольких переменных. Разобраны примеры.

6. Исследование функций.

Приведены основные теоремы дифференцирования. Описано правило Лопиталя, получены формулы Тейлора и Маклорена разложения функций. Введены понятия экстремумов (в том числе для функций нескольких переменных), возрастания, убывания функций, выпуклости, точек перегиба, асимптот. Описана последовательность анализа функций и построения их графиков. Разобраны примеры.

7. Численные методы.

Описаны численные методы определения корней уравнений: метод исключения интервалов, золотого сечения, хорд и касательных. Приведены примеры численного определения корней и экстремумов функций. Изложены и разобраны методы нахождения экстремумов функций нескольких переменных: симплексный метод и метод градиентного спуска.

Изложение теоретического материала значительно упрощено по сравнению, например, с аналогичным материалом учебников для технических вузов. В нем практически отсутствуют строгие доказательства теорем. Тем не менее, достаточно большое количество разобранных примеров и подробное пояснение смысла вводимых математических понятий и соотношений дают возможность читателям получить знания по математике, достаточные для изучения специальных дисциплин.

Предлагаемые в конце каждой из глав вопросы для самостоятельного контроля усвоения материала необходимы и для проверки своих знаний, и для подготовки к экзаменам.

В конце каждой из глав приведены условия задач для обязательного самостоятельного их решения. Это поможет читателям приобрести навыки построения, решения и исследования математических моделей.

В конце некоторых глав приводятся задания на расчетные работы, которые предназначены для освоения студентами математических методов построения и анализа геометрических объектов.

Студентам рекомендуется тщательно изучать материал по разделам. Важно усвоенный материал воспроизвести самостоятельно на бумаге, после чего выполнить упражнения, помещенные в конце каждой из глав.

После изучения материала главы следует ответить на вопросы для самопроверки усвоения материала и при возникновении трудностей в ответах

на вопросы повторить соответствующий материал.

Расчетные работы с подробными пояснениями оформляются в виде скрепленной слева тетради из листов формата А-4. Записи на листах вести только с одной стороны.

В пояснительной записке переписывается содержание задания, дается подробное описание хода решения задач, приводятся поясняющие и итоговые графики и числовые результаты, делаются выводы и пишется заключение с выводами по работе и оценкой полученных результатов.

Примеры, рекомендованные для самостоятельного решения, переписываются с решениями и необходимыми пояснениями в отдельную тетрадь и передаются преподавателю до экзамена.

Результаты самостоятельной работы в семестре учитываются в итоговой оценке знаний за семестр.

Глава 1

Векторы

1.1 Вектор как геометрический объект

Вектором с геометрической точки зрения называется отрезок в пространстве (на плоскости), направленный от некоторой точки A (начала вектора) этого пространства к другой его точке B (конец вектора) (рис. 1.1,a).

Вектор принято обозначать или парой букв $\overline{AB}$ с чертой (реже стрелкой) сверху, обозначающих начало вектора (первая буква) и конец вектора (вторая буква), или одной буквой a, выделенной жирным шрифтом или чертой сверху.

Модулем вектора называется его длина

$$a = |a| = |\overline{AB}|.$$

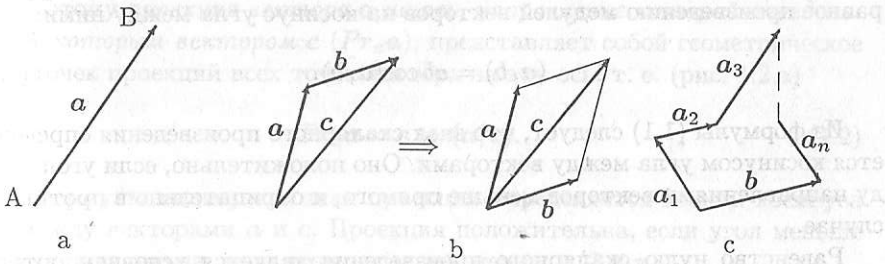


Рис. 1.1: Вектор и суммы векторов

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называют *нулевым вектором.*

Произведением вектора $\boldsymbol{a}$ на число $\lambda \in \Re$ называют вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, модуль которого равен $|\lambda|a$, параллельный вектору $\boldsymbol{a}$ и направленный в сторону $\boldsymbol{a}$ при $\lambda > 0$ и в противоположную вектору $\boldsymbol{a}$ сторону при $\lambda < 0$.

Для нулевого вектора направление не определено.

Суммой двух ве́кторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\boldsymbol{a}$, а конец — с концом вектора $\boldsymbol{b}$ при условии, что начало вектора $\boldsymbol{b}$ совмещено с концом вектора $\boldsymbol{a}$ (левый рис. 1.1,b.) Вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ можно представить как диагональ параллелограмма, сторонами которого служат векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (правый рис. 1.1,b).

Суммой n векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_n$ называется вектор $\boldsymbol{b}$, соединяющий начало первого вектора с концом последнего при условии, что конец каждого предыдущего из суммируемых векторов является началом последующего вектора (рис. 1.1,c).

Сложение и умножение на число математических объектов называют *линейными операциями* над этими объектами.

С помощью геометрических построений можно убедиться в том, что для линейных операций над векторами справедливы свойства ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — векторы; $\lambda \in \Re$):

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ — коммутативность;
2. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$ — ассоциативность;
3. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ — дистрибутивность.

Разность двух векторов $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ можно рассматривать как сумму вектора $\boldsymbol{a}$ с вектором $\boldsymbol{b}$, умноженным на -1.

Читателю рекомендуется провести построения, аналогичные рис. 1.1,b, для разности векторов.

Скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ab\cos(\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{1.1}$$

Из формулы (1.1) следует, что знак скалярного произведения определяется косинусом угла между векторами. Оно положительно, если угол между направлениями векторов меньше прямого, и отрицательно в противном случае.

Равенство нулю скалярного произведения является условием ортогональности входящих в это произведение векторов.

Для скалярного произведения векторов справедливы свойства:

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ — коммутативность;

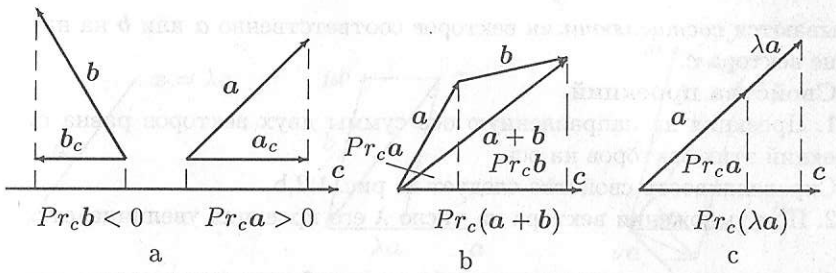


Рис. 1.2: Проекции векторов и их свойства

2. $\big((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}), \boldsymbol{c}\big) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ — дистрибутивность;
3. $\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ — возможность внесения под (вынесения за) знак скалярного произведения числового множителя.

Пример. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известны их модули $a = 1$, $b = 2$ и угол $\alpha = (\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \pi/6$.

Р е ш е н и е.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 1 \cdot 2\cos(\pi/6) = \sqrt{3}.$$

1.2 Проекция вектора на направленную ось

Проекцией точки на ось, как известно из курса геометрии, является основание перпендикуляра, опущенного на эту ось из рассматриваемой точки.

Вектор как геометрический объект представляет собой геометрическое место точек, лежащих на прямой, соединяющей начало вектора с его концом. Поэтому *проекция вектора* $\boldsymbol{a}$ *на ось, направление которой определяется некоторым вектором* $\boldsymbol{c}$ ($Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}$), представляет собой геометрическое место точек проекций всех точек вектора на эту ось, т. е. (рис. 1.2,a)

$$Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a} = a\cos(\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}}). \tag{1.2}$$

Из формулы видно, что знак проекции определяется знаком косинуса угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$. Проекция положительна, если угол меньше $\pi/2$, и отрицательна, если угол заключен между $\pi/2$ и π.

Вектор $\boldsymbol{a}_c = \dfrac{\boldsymbol{c}}{c} Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}$, имеющий направление $\boldsymbol{c}$ ($\cos(\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}}) > 0$), или вектор $\boldsymbol{b}_c = \dfrac{\boldsymbol{c}}{c} Pr_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}$, имеющий направление, противоположное $\boldsymbol{c}$ ($\cos(\hat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}}) < 0$),

называются *составляющими* векторов соответственно $\boldsymbol{a}$ или $\boldsymbol{b}$ на направление вектора $\boldsymbol{c}$.

Свойства проекций.

1. Проекция на направленную ось суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов на ось.

Справедливость свойства следует из рис. 1.2,b.

2. При умножении вектора на число λ его проекция увеличивается в λ раз.

Справедливость свойства следует из подобия треугольников, изображенных на рис. 1.2,c.

Сравнивая (1.2) с формулой (1.1), для скалярного произведения получим:

$$(a, b) = aPr_a b = bPr_b a. \tag{1.3}$$

Если направление оси определяется единичным вектором $\boldsymbol{e}$ ($e = 1$), то

$$(a, e) = Pr_e a. \tag{1.4}$$

Пример. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на направление вектора $\boldsymbol{b}$, если $a = 2$ и $\alpha = (\hat{a}, b) = 2\pi/3$.

Р е ш е н и е.

$$Pr_b a = a\cos\alpha = 2\cos(2\pi/3) = -1.$$

1.3 Разложение вектора. Ортонормированный базис

Любой вектор можно разложить в пространствах $\Re_1, \Re_2, \Re_3$ по *базису* — системе упорядоченных векторов, называемых *базисными*, количество которых в точности равно размерности пространства.

При этом в $\Re_1$ базисным может быть любой вектор $\boldsymbol{a}$ (рис. 1.3,a); в $\Re_2$ в качестве базисных могут быть выбраны любые два непараллельных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 1.3,b); в $\Re_3$ — любые три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, не лежащие в на одной или на параллельных плоскостях (рис. 1.3,c).

На отмеченных рисунках показано разложение произвольного вектора $\boldsymbol{p}$ по базисным векторам.

Формулы разложения вектора по базисным векторам следующие.

В $\Re_1$: $\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{a}$ — формула указывает на то, что вектор $\boldsymbol{p}$ параллелен базисному вектору $\boldsymbol{a}$ и отличается от последнего на скалярный множитель λ.

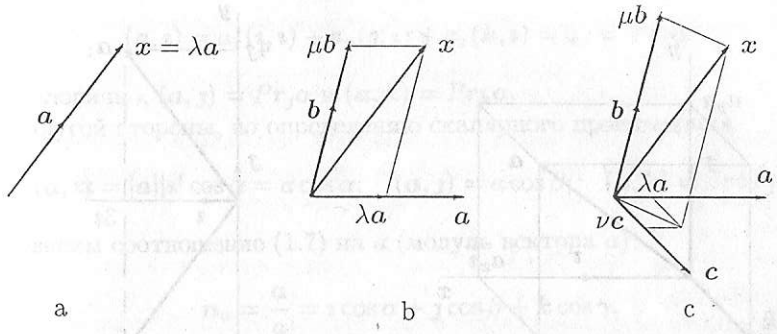


Рис. 1.3: Разложение векторов по базисам

В $\Re_2$: $\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$ — формула указывает на то, что вектор $\boldsymbol{p}$ получается по изложенному в разделе 1.1 правилу суммирования двух векторов, совпадающих по направлению с базисными векторами и отличающихся от последних скалярными множителями λ и μ.

В $\Re_3$:

$$\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}. \tag{1.5}$$

Смысл слагаемых и множителей в этой формуле аналогичен разложениям в одно- и двухмерном пространствах.

Слагаемые формулы (1.5) называются *составляющими* вектора $\boldsymbol{p}$ по базисным векторам $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, а множители λ, μ и ν *компонентами* или *координатами* вектора $\boldsymbol{p}$.

Такой же смысл заложен в слагаемых и множителях соответствующих формул для $\Re_1$ и $\Re_2$.

Ортонормированным базисом для геометрического пространства $\Re_3$ называется упорядоченная тройка взаимно ортогональных единичных векторов $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}, \boldsymbol{k}$.

Согласно определению, ортонормированные базисные векторы должны удовлетворять соотношениям:

$$|\imath| = |\jmath| = |k| = 1;$$

$$(\imath, \imath) = (\jmath, \jmath) = (k, k) = 1;$$

$$(\imath, \jmath) = (\jmath, k) = (k, \imath) = 0. \tag{1.6}$$

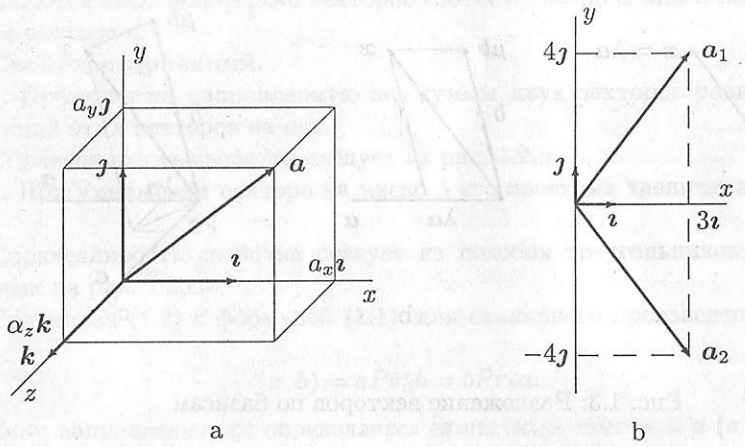


Рис. 1.4: Разложение вектора в ортонормированном базисе

Упорядоченность ортонормированных базисных векторов имеет два в
рианта.

Наибольшее распространение получил *правый базис,* для которого н
правление вращения по кратчайшему расстоянию от предыдущего вектор
к последующему осуществляется по правилу *буравчика* (движение от н
блюдателя в направлении третьего вектора при вращении первого вектор
в сторону второго по часовой стрелке на кратчайшее расстояние).

Для *левого базиса* вращение векторов осуществляется в противополож
ную по сравнению с правым базисом сторону.

Ортонормированный базис в пространстве $\Re_2$ состоит из двух ортог
нальных векторов $\imath$ и $\jmath$.

С направлением векторов ортонормированного базиса обычно связыв
ется ортогональная декартова система координат x, y, z, которая определ
ет масштаб — модули составляющих произвольного вектора по направл
ниям базисных векторов, соответственно $\imath, \jmath, k$ (рис. 1.4,а).

Если вектор $\boldsymbol{a}$ разложить по ортонормированному базису

$$\boldsymbol{a} = a_x\imath + a_y\jmath + a_z k, \qquad (1.$$

то в этом разложении a_x, a_y, a_z будут координатами конца вектора и одн
временно проекциями вектора на направления единичных базисных вект
ров $\imath, \jmath, k$. Действительно, умножим (1.7) скалярно, например, на базисны

вектор $\imath$. С учетом (1.6) и (1.4) получим

$$(\boldsymbol{a}, \imath) = a_x(\imath, \imath) + a_y(\jmath, \imath) + a_z(k, \imath) = a_x = Pr_\imath \boldsymbol{a}.$$

Аналогично, $(\boldsymbol{a}, \jmath) = Pr_\jmath \boldsymbol{a}$ и $(\boldsymbol{a}, k) = Pr_k \boldsymbol{a}$.

С другой стороны, по определению скалярного произведения

$$(\boldsymbol{a}, \imath) = |\boldsymbol{a}||\imath| \cos\alpha = a\cos\alpha; \quad (\boldsymbol{a}, \jmath) = a\cos\beta; \quad (\boldsymbol{a}, k) = a\cos\gamma.$$

Поделим соотношение (1.7) на a (модуль вектора $\boldsymbol{a}$)

$$\boldsymbol{n}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{a} = \imath\cos\alpha + \jmath\cos\beta + k\cos\gamma. \qquad (1.8)$$

Здесь $\boldsymbol{n}_a$ — единичный вектор, сонаправленный вектору $\boldsymbol{a}$. Соотношение (1.8) указывает на то, что координатами этого вектора в разложении по векторам ортонормированного базиса являются направляющие косинусы и

$$a_x = a\cos\alpha; \qquad a_y = a\cos\beta; \qquad a_z = a\cos\gamma. \qquad (1.9)$$

Используя теорему Пифагора для $\Re_3$, найдем скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a \cdot a\cos 0 = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \qquad (1.10)$$

Отсюда получаем выражение для модуля a вектора $\boldsymbol{a}$:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (1.11)$$

В частности, для равного единице модуля единичного вектора после деления соотношения (1.10) на a^2 с учетом (1.9) получим

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (1.12)$$

Все приведенные выше соотношения легко записываются для случая пространства $\Re_2$.

Соотношение (1.12) для $\Re_2$ с учетом того, что $\beta = \pi/2 - \alpha$ и $\cos^2(\pi/2 - -\alpha) = \sin^2\alpha$, приводится к известной формуле из тригонометрии

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Пример. В пространстве $\Re_2$ задан вектор $\boldsymbol{a}$ своим модулем $a = 5$ и направляющим косинусом по отношению к направлению базисного вектора $\imath$; $\cos\alpha = 0,6$. Требуется найти координаты вектора $\boldsymbol{a}$.

Р е ш е н и е.

1. Используя свойство (1.12) направляющих косинусов $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$ найдем

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-(0,6)^2} = \pm 0,8.$$

2. Координаты вектора в ортонормированном базисе, как показано выше, совпадают с проекциями вектора на направления базисных векторов. Поэтому

$$a_\imath = Pr_\imath \boldsymbol{a} = a\cos\alpha = 5\cdot 0,6 = 3; \quad a_\jmath = Pr_\jmath \boldsymbol{a} = a\cos\beta = 5\cdot(\pm 0,8) = \pm 4.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют два вектора $\boldsymbol{a}_1 = 3\boldsymbol{\imath}+4$ и $\boldsymbol{a}_2 = 3\boldsymbol{\imath} - 4\boldsymbol{\jmath}$ (рис. 1.4,b).

1.4 Операции над векторами, заданными в координатной форме

Рассмотрим пространство $\Re_2$, с которым связан ортонормированный базис $\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{\jmath}$ (рис. 1.5).

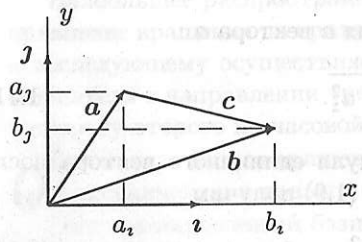


Рис. 1.5: Координаты разности векторов

Пусть два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представлены в этом базисе своими составляющими

$$\boldsymbol{a} = a_\imath\boldsymbol{\imath} + a_\jmath\boldsymbol{\jmath}, \qquad \boldsymbol{b} = b_\imath\boldsymbol{\imath} + b_\jmath\boldsymbol{\jmath}.$$

Если базисные векторы $\boldsymbol{\imath}$ и $\boldsymbol{\jmath}$ заданы в рассматриваемом пространстве и все другие рассматриваемые в этом пространстве векторы представлены своими составляющими по базисным векторам, то эти произвольные векторы могут быть охарактеризованы полностью своими координатами.

Векторы, выходящие из начала координат, называют *радиус-векторами*.

Радиус-векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно символически представить в виде совокупности их координат:

$$\boldsymbol{a} = (a_\imath; a_\jmath); \qquad \boldsymbol{b} = (b_\imath; b_\jmath). \tag{1.13}$$

Введем новый вектор

$$\boldsymbol{c} = (c_\imath; c_\jmath), \tag{1.14}$$

равный разности радиус-векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. С учетом (1.13) получим

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = b_\imath\boldsymbol{\imath} + b_\jmath\boldsymbol{\jmath} - a_\imath\boldsymbol{\imath} - a_\jmath\boldsymbol{\jmath} = (b_\imath - a_\imath)\boldsymbol{\imath} + (b_\jmath - a_\jmath)\boldsymbol{\jmath} = \big((b_\imath - a_\imath); (b_\jmath - a_\jmath)\big).$$

В справедливости записанного равенства легко убедиться и путем соответствующих геометрических построений (рис. 1.5).

Таким образом, для того чтобы получить разность двух радиус-векторов, представленных в фиксированном базисе, связанном с декартовой ортогональной системой координат, достаточно составить вектор, координатами которого будут разности соответствующих координат этих векторов.

Из сказанного сразу следует, что вектор $\overline{AB}$, соединяющий в пространстве $\Re_3$ точку $A(a_\imath; a_\jmath; a_k)$ с точкой $B(b_\imath; b_\jmath; b_k)$, может быть представлен в координатной форме в виде совокупности его координат, равных разностям координат конца вектора (точки B) и его начала (точки A):

$$\overline{AB} = \big((b_\imath - a_\imath); (b_\jmath - a_\jmath); (b_k - a_k)\big). \tag{1.15}$$

Легко убедиться в том, что линейные операции над векторами, заданными в фиксированном базисе, сводятся к линейным операциям над их координатами. Например,

$$\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} = \big((a_\imath + \lambda b_\imath); (a_\jmath + \lambda b_\jmath)\big). \tag{1.16}$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, представленных в ортонормированном базисе, с учетом свойств скалярного произведения, приведенных в разделе 1.3, и соотношений (1.5):

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \big((a_\imath\boldsymbol{\imath} + a_\jmath\boldsymbol{\jmath}), (b_\imath\boldsymbol{\imath} + b_\jmath\boldsymbol{\jmath})\big) = a_\imath b_\imath(\boldsymbol{\imath},\boldsymbol{\imath}) + a_\imath b_\jmath(\boldsymbol{\imath},\boldsymbol{\jmath}) + a_\jmath b_\imath(\boldsymbol{\jmath},\boldsymbol{\imath}) + a_\jmath b_\jmath(\boldsymbol{\jmath},\boldsymbol{\jmath}) =$$

$$= a_\imath b_\imath + a_\jmath b_\jmath.$$

Аналогичные зависимости получаются для представления векторов в пространстве $\Re_3$:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_\imath b_\imath + a_\jmath b_\jmath + a_k b_k. \tag{1.17}$$

Из определения скалярного произведения (1.1) вытекает выражение для косинуса угла между векторами

$$\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{ab}, \tag{1.18}$$

которое с учетом (1.17) представим в виде

$$\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{a_\imath b_\imath + a_\jmath b_\jmath + a_k b_k}{\sqrt{a_\imath^2 + a_\jmath^2 + a_k^2}\sqrt{b_\imath^2 + b_\jmath^2 + b_k^2}}. \tag{1.19}$$

Равенство

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k = 0 \qquad (1.20)$$

является условием ортогональности векторов. Оно следует из (1.19) при $\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = 0$.

Условие параллельности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}.$$

Это условие в координатной форме сводится к равенствам

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} = \frac{a_k}{b_k} = (\lambda). \qquad (1.21)$$

Для пространства $\Re_2$ последнее отношение в равенстве исключается.

Пример 1. Найти угол (косинус угла) между векторами $\boldsymbol{a} = (1,-2,2)$ и $\boldsymbol{b} = (-3,2,6)$.

Р е ш е н и е.

$$\cos(\hat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{a_i b_i + a_j b_j + a_k b_k}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2 + a_k^2}\sqrt{b_i^2 + b_j^2 + b_k^2}} =$$

$$= \frac{1\cdot(-3) + (-2)\cdot 2 + 2\cdot 6}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{5}{21}.$$

Пример 2. Найти угол α (косинус угла) между прямыми AC и BD, если $A(2;-3;1)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$.

Р е ш е н и е.

Используя (1.15), получим

$$\overline{AC} = (-4-2;1+3;1-1) = (-6;4;0) = 2(-3;2;0);$$

$$\overline{BD} = (-5-1;-5-4;3-0) = (-6;-9;3) = 3(-2;-3;1).$$

$$\cos\alpha = \frac{(\overline{AC},\overline{BD})}{|\overline{AC}||\overline{BD}|} = \frac{2\cdot 3\big(-3\cdot(-2) + 2\cdot(-3) + 0\cdot 1\big)}{2\sqrt{(-3)^2+2^2+0^2}\cdot 3\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1^2}} = 0.$$

Полученный результат говорит об ортогональности диагоналей четырехугольника.

Пример 3. Доказать, что вектор $\boldsymbol{a}$=(−1, 3; 2, 1; 0, 7) паралле ен вектору $\boldsymbol{b}$=(3, 9; −6, 3; −2, 1).

Р е ш е н и е.

Используя формулу (1.21), получим

$$\frac{-1,3}{3,9} = \frac{2,1}{-6,3} = \frac{0,7}{-2,1} = \left(-\frac{1}{3}\right).$$

Равенство говорит о параллельности векторов.

1.5 Деление отрезка в заданном отношении

Пусть требуется поделить отрезок M_1M_2 некоторой прямой точкой M в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$ (рис. 1.6).

В векторной форме это соотношение может быть записано в виде

$$\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}. \qquad (1.22)$$

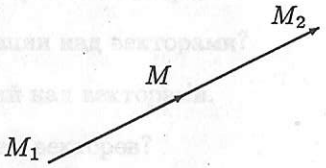


Рис. 1.6: Деление отрезка

Если координаты перечисленных точек в ортогональной декартовой системе координат известны: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M(x,y,z)$, то равенство (1.22) с учетом (1.15) можно переписать в виде

$$(x-x_1;y-y_1;z-z_1) = \lambda(x_2-x;y_2-y;z_2-z).$$

Если векторы равны, то равны их соответствующие координаты. Это свойство дает возможность получить выражения для определения координат точки M :

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (1.23)$$

В частности, если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то $M_1M = MM_2$ и $\lambda = 1$. Тогда из (1.23) следует, что координаты точки M равны полусуммам координат точек M_1 и M_2 :

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right). \qquad (1.24)$$

Пример. Найти координаты точки M, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\dfrac{3}{1}$=3, если $M_1(2;3;1)$, $M_2(-2;3;5)$.

Р е ш е н и е.

$$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow M\left(\frac{2+3\cdot(-2)}{1+3};\frac{3+3\cdot 3}{1+3};\frac{1+3\cdot 5}{1+3}\right) \Longrightarrow M(-1;3;4).$$

1.6 Вопросы

1. Что собой представляет вектор с геометрической точки зрения?
2. Какие обозначения приняты для векторов?
3. Что представляет собой модуль вектора?
4. Как определяется направление вектора в пространстве? На плоскости?
5. Какой вектор называется нулевым? Как определить его направление?
6. Что собой представляет произведение вектора на число?
7. Что собой представляет сумма двух векторов? n векторов?
8. Что собой представляют линейные операции над векторами?
9. Перечислите свойства линейных операций над векторами.
10. Что называется скалярным произведением векторов?
11. Запишите формулу для скалярного произведения векторов и поясните, от чего зависит знак скалярного произведения?
12. Что такое проекция вектора на направленную ось?
13. Перечислите основные свойства проекций и поясните их на рисунках.
14. Что собой представляет составляющая вектора по заданному направлению?
15. Как связана проекция вектора со скалярным произведением?
16. Как можно разложить вектор по базисам пространств $\Re_1$? $\Re_2$? $\Re_3$?
17. Что собой представляет ортонормированный базис?
18. Запишите все возможные варианты скалярных произведений векторов ортонормированного базиса.
19. Что такое координаты вектора в произвольном базисе? Составляющие вектора?
20. Какова связь между проекцией вектора на векторы ортонормированного базиса и координатами вектора?

21. Что собой представляют координаты единичного вектора в ортонормированном базисе?

22. Как определить модуль вектора по его координатам в ортонормированном базисе?

23. Как связаны между собой направляющие косинусы вектора, заданного в ортонормированном базисе?

24. Запишите линейные операции над векторами, представленными своими координатами?

25. Приведите выражения для скалярного произведения векторов, представленных своими координатами в ортонормированном базисе. Для косинуса угла между векторами.

26. Запишите в координатной форме условия ортогональности и параллельности двух векторов.

27. В чем состоит задача деления отрезка в заданном отношении?

28. Приведите формулы для определения координат точки, делящей отрезок в заданном отношении.

29. Приведите формулы для определения координат точки, делящей отрезок пополам.

7 Упражнения

К разделам 1.1 – 1.2

1. Изобразите на рисунке три произвольных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Постройте ним векторы $0,5\boldsymbol{a}$, $-0,5\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})$.

2. Заданы модули векторов $a=4$, $b=5$ и угол между ними $\alpha=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=$ /3. Найти скалярное произведение векторов.

3. Заданы модули векторов $a=1$, $b=-3$ и угол между ними $\alpha=$ $\boldsymbol{b})=\pi/2$. Найти скалярное произведение векторов $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

4. Найти $Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, если $a=4$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\pi/6$.

5. Найти угол $\alpha=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, если $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=4$, $a=2$, $b=4$.

К разделам 1.3 – 1.4

1. Найти вектор $\overline{AB}$, если в декартовой ортогональной системе координат $A(1;2;-1)$, $B(3;-4;1)$.
Построить векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{AB}$ в ортонормированном базисе, связанном с системой координат (O – начало координат).

2. В ортонормированном базисе заданы векторы $\boldsymbol{a}=(2;-1;0)$ и $\boldsymbol{b}=$ $1;5)$. Найти $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.

3. Найти $Pr_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$, если $\boldsymbol{a}=(0;2;-3)$, $\boldsymbol{b}=(1;-2;-1)$.

4. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}=(2;3;-1)$ и $\boldsymbol{b}=(-1;0;3)$.

5. Найти m, если известно, что векторы $\boldsymbol{a}=(1;m;3)$ и $\boldsymbol{b}=(m;4;6)$ раллельны.

6. Из условия перпендикулярности векторов $\boldsymbol{a} = (m; 2m; 1)$ и $\boldsymbol{b} = (m; 1$ найти m.

7. Найти угол между диагоналями четырехугольника, заданного ко динатами его вершин: $A(-1; -1)$, $B(-1; 2)$, $C(2; -1)$ и $D(2; 2)$

8. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a} = (3; -6; 2)$.

9. Разделить отрезок, соединяющий точки $M_1(2; 3; 0)$ и $M_2(4; 1; 2)$ в о ношении 2:1.

10. Найти координаты середины отрезка, соединяющего точки $A(3; 2;$ и $B(-1; 4; 1)$.

Глава 2

Аналитическая геометрия

2.1 Прямая на плоскости

Проведем из некоторой фиксированной точки M_0 прямой ℓ, принадле жащей пространству $\Re_2$, вектор N, перпендикулярный этой прямой (рис. 2.1). Соединим точку M_0 с произвольной точкой M прямой вектором $\overline{M_0M}$.

Так как векторы N и $\overline{M_0M}$ перпендику лярны, их скалярное произведение должно быть равно нулю:

$$(N, \overline{M_0M}) = 0. \qquad (2.1)$$

Равенство (2.1) представляет собой урав нение прямой на плоскости, записанное в век торной форме. Действительно, оно справед ливо только для точек M, лежащих на пря мой.

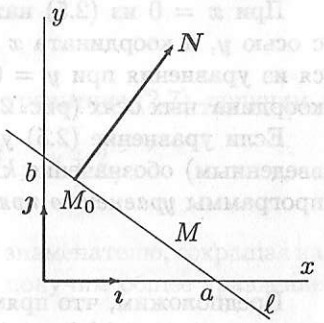


Рис. 2.1: Прямая в $\Re_2$

Для представления уравнения (2.1) в ко ординатной форме введем в рассматривае мом пространстве ортонормированный ба зис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ со связанной с ним декартовой ортогональной системой координат x, y.

Пусть A и B являются проекциями вектора N на направления базис ных векторов, x_0 и y_0 – координаты фиксированной точки M_0, а x и y – координаты произвольной точки M прямой ℓ.

Тогда на основании (1.13) и (1.15) введенные векторы можно записать в виде

$$N = (A; B), \qquad \overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0). \tag{2.2}$$

Подставим (2.2) в (2.1). С учетом (1.17) получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2.3}$$

Это *уравнение прямой, проходящей через заданную точку,* или *уравнение пучка прямых.* Если прямая проходит через точку $x = x_0$, $y = y_0$, то при этих значениях координат уравнение (2.3) обращается в тождество.

Раскрыв в (2.3) скобки, приводя подобные члены и обозначая $C = -Ax_0 - By_0$, придем к *уравнению прямой в общем виде:*

$$Ax + By + C = 0. \tag{2.4}$$

Уравнение, называемое *уравнением прямой в отрезках,* получается из (2.4), если в нем перенести C в правую часть равенства и поделить полученное уравнение на $-C$ (при условии, что $C \neq 0$, т. е. прямая не проходит через начало координат):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{2.5}$$

Здесь $a = -C/A$, $b = -C/B$.

При $x = 0$ из (2.5) находится координата $y = b$ пересечения прямой с осью y, а координата $x = a$ пересечения прямой с осью x определяется из уравнения при $y = 0$, т. е. a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях (рис. 2.1).

Если уравнение (2.5) умножить на b и ввести (в дополнение к выше введенным) обозначение $k = -b/a$, то придем к известному из школьной программы *уравнению прямой с угловым коэффициентом:*

$$y = kx + b. \tag{2.6}$$

Предположим, что прямая ℓ проходит через две точки: $M_0(x_0; y_0)$, введенную выше, и $M_1(x_1; y_1)$. Тогда уравнение (2.3) при подстановке в него координат точки M_1 должно обратиться в тождество:

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0.$$

Перенесем в (2.3) и в полученном уравнении слагаемые с множителями B в левые части равенств. Поделив почленно полученные равенства, придем к *уравнению прямой, проходящей через две заданные точки:*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{2.7}$$

К *уравнению прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку,*

$$y = y_0 + k(x - x_0) \tag{2.8}$$

можно прийти, потребовав, чтобы уравнение (2.6) обратилось в тождество при подстановке в него координат точки $(x_0; y_0)$, т. е. $y_0 = kx_0 + b$, и вычитая последнее равенство из (2.6).

Обобщая сказанное, отметим, что любое линейное уравнение в $\mathfrak{R}_2$, т. е. уравнение, связывающее переменные x и y (в первых степенях!), представляет собой уравнение прямой.

Пример. На связанной с плоскостью декартовой ортогональной системе координат заданы координаты двух точек $M_0(1; -2)$ и $M_1(5; 0)$. Требуется:

1. Записать уравнение прямой, проходящей через эти точки.
2. Представить полученное уравнение в виде:
   2.1) уравнения в общем виде;
   2.2) уравнения в отрезках;
   2.3) уравнения с угловым коэффициентом.
3. Найти угол наклона:
   3.1) прямой к оси x;
   3.2) нормали к прямой к оси x.

Р е ш е н и е.

1. Подставляя координаты точек M_0 и M_1 в уравнение (2.7), получим

$$\frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{y - (-2)}{0 - (-2)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x - 1}{4} = \frac{y + 2}{2}.$$

2.1. Приводя полученное уравнение к общему знаменателю, сокращая на 2 и перенося все слагаемые в его левую часть, получим общее уравнение прямой

$$x - 2y - 5 = 0.$$

2.2. Перенесем 5 в правую часть полученного уравнения. После деления уравнения на 5 придем к уравнению прямой в отрезках

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2,5} = 1.$$

Следовательно, прямая отсекает на оси x отрезок, равный 5, а на оси y – отрезок, равный $-2,5$.

2.3. Выражая из уравнения, полученного в п. 2.1, переменную y, запи
шем уравнение с угловым коэффициентом

$$y = \frac{1}{2}x - 2,5.$$

3.1. Угол θ наклона прямой к оси x определяется ее угловым коэффици
ентом (уравнение п. 2.3), равным тангенсу искомого угла:

$$k = \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}.$$

3.2. Для определения угла наклона нормали к прямой к осям координа
найдем единичный вектор $\boldsymbol{n}$, совпадающий по направлению с $N = (1; -2$
(координаты вектора – множители при переменных в общем уравнени
прямой, полученной в п. 2.1):

$$\boldsymbol{n} = \frac{N}{N} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}(1; -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Координаты полученного вектора являются косинусами искомых углов
наклона нормали к осям координат (1.8). Таким образом,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

2.2 Уравнение плоскости

Рассмотрим в пространстве $\Re_3$ плоскость $\wp$ (рис. 2.2,а).

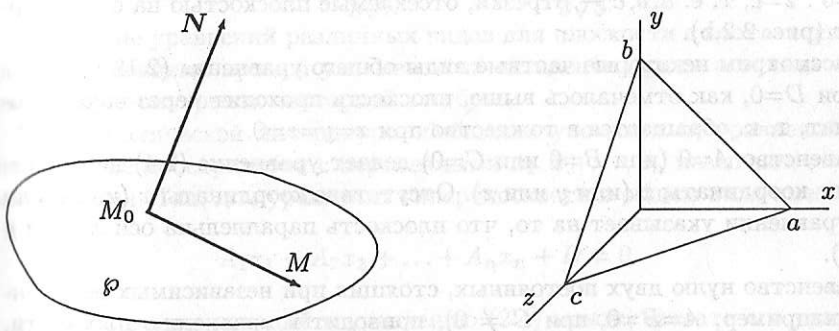
Подход в выводу уравнения плоскости не отличается в принципе от вы
вода уравнения прямой на плоскости, приведенного в предыдущем разделе

Пусть из некоторой фиксированной точки M_0 плоскости восстановле
перпендикуляр к $\wp$, параллельный (может и совпадающий) с некоторым
вектором N.

Соединим выбранную точку M_0 с произвольной точкой M плоскости
вектором $\overline{M_0M}$. Так как векторы $\overline{M_0M}$ и N перпендикулярны, то их ска
лярное произведение должно быть равно нулю (раздел 1.3). Поэтому

$$\left(N, \overline{M_0M}\right) = 0. \qquad (2.9)$$

Введем в рассматриваемое пространство $\Re_3$ ортонормированный базис
$\boldsymbol{\imath}$, $\boldsymbol{\jmath}$, $\boldsymbol{k}$ со связанной с ним декартовой ортогональной системой координат



a b

Рис. 2.2: Плоскости в $\Re_3$

x, y, z. Пусть в этом базисе векторы N и $\overline{M_0M}$ представлены своими координатами

$$N = (A; B; C), \qquad \overline{M_0M} = (x-x_0; y-y_0; z-z_0). \qquad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.9) и расписывая скалярное произведение по формуле (1.18), придем к уравнению

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \qquad (2.11)$$

По смыслу вывода уравнение (2.11) описывает *плоскость, проходящую через заданную точку.*

Если в этом уравнении раскрыть скобки и ввести обозначение постоянной величины

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

то придем к *уравнению плоскости в общем виде:*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (2.12)$$

Перенесем постоянную D в правую часть уравнения (2.12) и поделим полученное уравнение на $-D$ при условии, что $D \neq 0$ (плоскость не проходит через начало координат). Вводя обозначения $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$, перепишем (2.12) в виде *уравнения плоскости в отрезках:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (2.13)$$

При $y{=}z{=}0$ из этого уравнения получаем $x{=}a$; при $z{=}x{=}0$: $y{=}b$; при $x{=}y{=}0$: $z{=}c$, т. е. a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат (рис. 2.2,b).

Рассмотрим некоторые частные виды общего уравнения (2.12).

При $D{=}0$, как отмечалось выше, плоскость проходит через начало координат, т. к. обращается в тождество при $x{=}y{=}z{=}0$.

Равенство $A{=}0$ (или $B{=}0$ или $C{=}0$) делает уравнение (2.4) не зависящим от координаты x (или y или z). Отсутствие координаты x (или y или z) в уравнении указывает на то, что плоскость параллельна оси x (или y или z).

Равенство нулю двух постоянных, стоящих при независимых переменных (например, $A{=}B{=}0$, при $C \neq 0$), приводит к уравнению плоскости, перпендикулярной третьей координате (z).

Равенство постоянных $A{=}B{=}C$ определяет плоскость, равнонаклоненную к осям координат.

Пример. Заданы вектор $\boldsymbol{a} = (2; -4; 5)$ и некоторая точка $M(1; -2; 0)$ пространства $\Re_3$. Требуется:

1) получить и записать в общем виде уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$ и проходящей через точку M;

2) найти отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях;

3) определить наклон плоскости к координатным осям.

Р е ш е н и е.

1. Принимая $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{a}$ и воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку (2.11), получим: $2(x{-}1){-}4(y{+}2){+}5(z{+}0){=}0$.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, придем к уравнению плоскости в общем виде:

$$2x - 4y + 5z - 10 = 0.$$

2. Для получения уравнения плоскости в отрезках перенесем свободный (от переменных) член вправо и поделим на него уравнение:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2{,}5} + \frac{z}{2} = 1.$$

Отсюда получаем отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях: $a = 5$, $b = -2{,}5$, $c = 2$.

3. Чтобы найти косинусы углов наклона нормали $\boldsymbol{N}$ плоскости к осям координат, достаточно записать в координатной форме единичный вектор, сонаправленный нормали:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2}}(2; -4; 5) = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}; \frac{-4}{3\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{3}\right).$$

Отсюда находим: $\cos\alpha = \dfrac{2}{3\sqrt{5}}$; $\cos\beta = -\dfrac{4}{3\sqrt{5}}$; $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Сравнение уравнений различных видов для плоскости с соответствующими уравнениями прямой указывает на их идентичность и одинаковую природу с точки зрения векторной алгебры.

В математической литературе обобщения упомянутых уравнений на многомерные пространства с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *гиперплоскостями*. Так, для уравнения гиперплоскости в общем виде имеем

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n + D = 0.$$

Подходя с этих позиций к уравнению (2.4) можно назвать его уравнением в общем виде гиперплоскости в пространстве $\Re_2$.

Характерной особенностью гиперплоскости (в том числе прямой) является то, что все переменные входят в это уравнение в первой степени.

2.3 Взаимное расположение плоскостей

Рассмотрим две плоскости $\wp_1$ и $\wp_2$, заданные в общем виде

$$\begin{aligned} \wp_1: &\quad A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0; \\ \wp_2: &\quad A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Следы этих плоскостей на плоскости страницы, перпендикулярной плоскостям, показаны на рис. 2.3.

На рисунке θ – угол между плоскостями.

Восстановим к плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$ нормали $\boldsymbol{N}_1$ и $\boldsymbol{N}_2$.

Из рисунка ясно, что угол между плоскостями равен углу между векторами нормалей к ним. Поэтому косинус угла между плоскостями может быть определен по скалярному произведению векторов $\boldsymbol{N}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\boldsymbol{N}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ (1.19):

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{N_1N_2} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{2.15}$$

Полученное выражение позволяет записать условие ортогональности двух плоскостей ($\cos\theta = 0$):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{2.16}$$

Условие параллельности плоскостей вытекает из условия параллельности ортогональных им векторов

$$N_1 = \lambda N_2 :$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = (\lambda). \tag{2.17}$$

Угол между двумя прямыми

$$\ell_1 : \quad A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 = 0;$$
$$\ell_2 : \quad A_2 x_2 + B_2 y_2 + C_2 = 0 \tag{2.18}$$

может быть изображен тем же рисунком (2.3), что и угол между плоскостями.

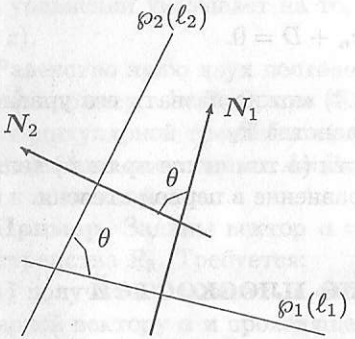


Рис. 2.3: Угол между плоскостями (прямыми)

Что касается определения угла, условий перпендикулярности и параллельности прямых, то формулы для них получаются из выражений (2.15) – (2.17) путем отбрасывания в них членов, содержащих коэффициенты C_1 и C_2 :

$$\cos\theta = \frac{(N_1, N_2)}{N_1 N_2} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{2.19}$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{2.20}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{2.21}$$

Напомним, что в школьном курсе математики предлагался еще один вариант определения угла между прямыми (но не между плоскостями).

Пусть θ_1 и θ_2 – углы наклона прямых ℓ_1 и ℓ_2 к координатной оси x и $k_1 = \operatorname{tg}\theta_1$; $k_2 = \operatorname{tg}\theta_2$ – угловые коэффициенты, входящие в уравнения прямых с угловым коэффициентом

$$\ell_1 : \quad y = k_1 x + b_1; \qquad \ell_2 : \quad y = k_2 x + b_2.$$

Тогда тангенс угла между прямыми:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \tag{2.22}$$

Условие ортогональности и параллельности соответственно:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}, \qquad k_1 = k_2. \tag{2.23}$$

Пример 1. Найти углы между плоскостями а) $\wp_1 : \; x - 3y + 4z + 2 = 0$ и $\wp_2 : \; 6x + 4y - 3 = 0$.

Р е ш е н и е.

Так как $N_1 = (1; -3; 4)$, $N_2 = (6; 4; 0)$, то по (2.15)

$$\cos\theta = \frac{1 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}\sqrt{6^2 + 4^2 + 0^2}} = -\frac{3}{13}.$$

b) $\wp_1 : \; 2x - 3y + z - 2 = 0$ и $\wp_2 : \; 4x + 3y + z + 5 = 0$.

Р е ш е н и е.

$$\cos\theta = \frac{2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2}} = 0 \implies \wp_1 \perp \wp_2.$$

c) $\wp_1 : \; x - 2y + 3z + 1 = 0$ и $\wp_2 : \; -2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

Р е ш е н и е.

$$\cos\theta = \frac{1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-6)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}2\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-3)^2}} = -\frac{3}{13} = -1. \implies \theta = \pi.$$

Результат решения говорит о том, что плоскости параллельны.

Убедимся в этом, используя условие параллельности плоскостей (2.16):

$$\frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)!$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку $M(2; -1; 0)$ и параллельной плоскости $\wp_1 : x - 3y + 2z - 5 = 0$.

Р е ш е н и е.

Длина вектора N, перпендикулярного плоскости, ничем не ограничена. Поэтому, в силу требуемой параллельности плоскостей (и их нормальных векторов), принимаем $N = N_1 = (1; -3; 2)$.

Воспользовавшись уравнением плоскости, проходящей через заданную точку (2.11), запишем требуемое уравнение:

$$1(x - 2) - 3(y - (-1)) + 2(z - 0) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные, запишем уравнение в общем виде:

$$x - 3y + 2z - 5 = 0.$$

Пример 3. Составить уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку $M(3;2;-1)$ и перпендикулярной плоскостям $\wp_1 : 2x - y + z - 3 = 0$ и $\wp_2 : x + 2y - z - 2 = 0$.

Р е ш е н и е.

Запишем уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку M :

$$A(x-3) + B(y-2) + C(z+1) = 0, \qquad (2.24)$$

и потребуем выполнения условия (2.16) ортогональности плоскости $\wp$ плоскостям $\wp_1$ и $\wp_2$ одновременно:

$$\begin{cases} 2A - B + C = 0; \\ A + 2B - C = 0. \end{cases}$$

Решение двух уравнений с тремя неизвестными позволяет выразить две неизвестные через третью. Поэтому после преобразования системы можно прийти к зависимостям

$$B = -3A; \qquad C = -5A.$$

Подставляя эти выражения в (2.24), получим

$$A(x-3) - 3A(y-2) - 5A(z+1) = 0.$$

При всех слагаемых этого уравнения стоит одинаковый множитель A, что закономерно при таких преобразованиях. Сокращая уравнение на A, раскрывая скобки и приводя подобные, приходим к искомому уравнению плоскости в общем виде:

$$x - 3y - 5z - 4 = 0.$$

Замечание. При решении задач на построение математических моделей, описывающих геометрические объекты, рекомендуется правильность их построения проверять условиями выполнения исходных предпосылок.

Так, плоскость, смоделированная в последней задаче, должна быть

1) перпендикулярной плоскости $\wp_1 \implies (A \cdot A_1 + B \cdot B_1 + C \cdot C_1 = 0)$:

$$1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 = 0 \quad (!)$$

перпендикулярной плоскости $\wp_2 \implies (A \cdot A_2 + B \cdot B_2 + C \cdot C_2 = 0)$:

$$1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-5) \cdot (-1) = 0 \quad (!)$$

проходить через точку $M(3,2,-1)$ (обращаться в тождество при подстаке в уравнение плоскости вместо текущих координат точки M):

$$1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) - 4 = 0 \quad (!)$$

Пример 4. Найти угол между прямыми $\ell_1 : \ 3x+4y-8=0$ и $\ell_2 : \ 2x-3=0$.

Р е ш е н и е.

способ. Воспользуемся выражением (2.19) для косинуса угла между мыми:

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

способ. Воспользуемся выражением (2.22) для тангенса угла между мыми:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}.$$

Для определения угловых коэффициентов k_1 и k_2 приведем заданные авнения к виду уравнений с угловыми коэффициентами:

$$\ell_1 : \ y = -\frac{3}{4}x + 2, \implies k_1 = -\frac{3}{4}; \qquad \ell_2 : \ y = 2x + 3, \implies k_2 = 2.$$

гда

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3/4 - 2}{1 - (3/4) \cdot 2} = \frac{11}{2}.$$

Обе функции угла θ $\left(\cos\theta = \dfrac{2}{5\sqrt{5}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{11}{2}\right)$ приводят к одному у $\theta \approx 80^o$.

Пример 5. Заданы уравнение прямой $\ell : \ 3x - y - 5 = 0$ и точка $2;-1)$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку M : a) раллельную ℓ; b) перпендикулярную ℓ.

Р е ш е н и е.

Уравнение прямой, проходящей через точку M :

$$A(x-2) + B(y+1) = 0.$$

а) используем условие параллельности прямых (2.21):

$$\frac{A}{3}=\frac{B}{-1};\ \Longrightarrow A=-3B,\ \Longrightarrow -3B(x-2)+B(y+1)=0,\ \Longrightarrow 3x-y+5=$$

б) используем условие ортогональности прямых (2.20):

$$3A-B=0,\ \Longrightarrow B=3A,\ \Longrightarrow A(x-2)+3A(y+1)=0,\ \Longrightarrow x+3y+1=$$

Полученные в пунктах а) и б) прямые перпендикулярны, т. к. их ко фициенты удовлетворяют условию (2.20):

$$3\cdot 1+(-1)\cdot 3=0.\ (!)$$

2.4 Расстояние от точки до плоскости

Пусть заданы плоскость $\wp$ своим общим уравнением

$$Ax+By+Cz+D=0$$

и точка M_0, не лежащая на плоскости. На рис. 2.4 показаны след э плоскости, расположенной для удобства перпендикулярно плоскости лис и точка. Требуется найти расстояние d от точки до плоскости.

Выбирая на плоскости произвольную точку M, построим вектор $\overline{M_0}$

Проекция вектора $\overline{M_0M}$ на направление вектора нормали $\boldsymbol{N}$ к плос ти будет искомым расстоянием:

$$d=|Pr_N\overline{M_0M}|=\frac{|(\boldsymbol{N},\overline{M_0M})|}{N}.\qquad (2$$

Если в рассматриваемом пространстве ввести ортонормированный зис и декартову ортогональную систему координат, в которых $\boldsymbol{N}=(A;B$ $\overline{M_0M}=((x-x_0);(y-y_0);(z-z_0))$, $N=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, то с учетом (1 получим:

$$d=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left|\left(A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)\right)\right|.$$

Раскроем скобки под знаком модуля. Изменив знак на противопол ный (под знаком модуля это допустимо) и вводя используемую в об уравнении плоскости (2.12) и получаемую из этого уравнения постоян $D=-Ax-By-Cz$, придем к формуле

$$d=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|.\qquad (2$$

Отметим, что под знаком модуля получается знак минус (как в рас матриваемом случае), если точка M_0 и начало координат лежат по одну сторону от плоскости, и знак плюс, если по разные стороны.

В частном случае расстояние от точ и до прямой (гиперплоскости в простран тве $\Re_2$)

$$d=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\left|Ax_0+By_0+C\right|.\quad (2.27)$$

Если точка M_0 совпадает с началом координат, то $\overline{M_0M}=\overline{OM}=(x;y;z)$ и $(N,\overline{OM})=Ax+By+Cz$. В этом случае

$$d=p=\frac{1}{N}|Ax+By+Cz|.$$

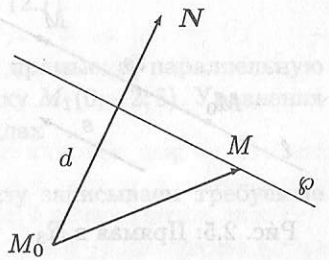


Рис. 2.4: Расстояние от точки до плоскости

Так как $A/N=\cos\alpha$, $B/N=\cos\beta$, $C/N=\cos\gamma$, то последнее уравнение мож но переписать в виде

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.\qquad (2.28)$$

Здесь p положительная (по смыслу вывода формулы) величина, равная расстоянию от начала координат до плоскости.

Уравнение (2.28) называется уравнением плоскости в *нормальном виде.*

Пример. Найти расстояние от начала координат и от точки $M(2,3)$ до прямой, заданной уравнением $3x+4y+2=0$. Определить направляющие косинусы углов наклона нормали к плоскости.

Р е ш е н и е.

Для определения расстояния от начала координат до плоскости при ведем ее уравнение к нормальному виду. Для чего разделим уравнение на отрицательное значение модуля вектора $\boldsymbol{N}=(3;4)$, т. е. на $N=\sqrt{3^2+4^2}=5$:

$$-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{2}{5}=0.$$

Отсюда расстояние от начала координат до плоскости $p=\frac{2}{5}=0,4$, а направляющие косинусы нормали: $\cos\alpha=-0,6$; $\cos\beta=-0,8$.

Найдем расстояние от точки M до прямой (2.27):

$$d=\frac{1}{5}|3\cdot 2+4\cdot 3+2|=4.$$

2.5 Уравнения прямой в $\Re_3$

Рассмотрим в $\Re_3$ прямую ℓ с фиксированной на ней точкой M_0 (рис. 2.5).

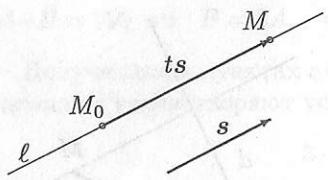


Рис. 2.5: Прямая в $\Re_3$

Выберем на ℓ произвольную точку M и построим вектор $\overline{M_0M}$.

Направление прямой зададим некоторым параллельным ℓ вектором s.

Тогда условием того, что любая точка $M \in \ell$, будет условие параллельности векторов $\overline{M_0M}$ и s :

$$\overline{M_0M} = ts. \qquad (2.29)$$

Уравнение (2.29) является уравнением прямой в $\Re_3$, представленным в векторной форме. Параметр t определяет разделенное на модуль вектора расстояние от фиксированной точки M прямой до ее произвольной точки M. Если $|s| = 1$, то t равно этому расстоянию.

Введем в рассматриваемое пространство ортонормированный базис (декартовой ортогональной системой координат, в которых

$$s=(m;n;p); \qquad \overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0). \qquad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в (2.29) и приравнивая соответствующие координаты, придем к *уравнениям прямой в параметрической форме:*

$$\begin{cases} x &= x_0 + tm, \\ y &= y_0 + tn, \\ z &= z_0 + tp. \end{cases} \qquad (2.31)$$

Выразим из каждого уравнения (2.31) параметр t. Приравняв полученные выражения, получим *канонические уравнения прямой:*

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} (= t). \qquad (2.32)$$

Если прямая проходит через две заданные точки (введенную ранее точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$), то в качестве вектора, определяющего направление прямой, можно выбрать $s = (x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0)$. Тогда уравнения (2.32) можно записать в виде *уравнений прямой, проходящей через две точки:*

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \qquad (2.33)$$

В частном случае для пространства $\Re_2$ (отсутствует координата z) последнее уравнение приведем к виду

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0},$$

совпадающему с ранее полученным уравнением (2.7).

Пример. Через точку $M_0(1;-2;3)$ провести прямые: а) параллельную прямой $s=(-2;4;1)$; б) проходящую через точку $M_1(0;-2;5)$. Уравнения записать в параметрическом и каноническом видах

Р е ш е н и е.

а) на основании формул (2.31) и (2.32) сразу записываем требуемые уравнения:

$$\begin{cases} x &= 1-2t, \\ y &= -2+4t, \\ z &= 3+t. \end{cases} \qquad \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{1};$$

б) используя формулы (2.33), запишем

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+2}{-2+2} = \frac{z-3}{5-3},$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{2}.$$

В последней формуле в знаменателе второго выражения появился нуль. В записи канонических уравнений прямой это допустимо. Нуль в знаменателе говорит о том, что вектор s, координаты которого стоят в знаменателе, ~~параллелен~~ перпендикулярен соответствующему базисному вектору. В данном случае вектор j, направленный ~~вдоль~~ перпендикулярно координаты y. Для решения уравнения, содержащего в знаменателе нуль, следует перейти к параметрической форме записи уравнений прямой.

Приравнивая последние уравнения параметру t и избавляясь от знаменателей, получим:

$$\begin{cases} x &= 1-t, \\ y &= -2, \\ z &= 3+2t. \end{cases}$$

Замечание. Отметим, что в трех возможных уравнениях (2.32) (как и в (2.33)) только два независимые. Этот факт доказывается в курсе линейной алгебры.

2.6 Взаимное расположение прямых и плоскостей

Пусть заданы две в общем скрещивающиеся (не обязательно пересе ющиеся) прямые

$$\ell_1: \begin{cases} x = x_1 + tm_1, \\ y = y_1 + tn_1, \\ z = z_1 + tp_1; \end{cases} \qquad \ell_2: \begin{cases} x = x_2 + tm_2, \\ y = y_2 + tn_2, \\ z = z_2 + tp_2, \end{cases} \qquad (2.$$

так что их направления задаются векторами $s_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и s_2 $(m_2; n_2; p_2)$.

Тогда косинус угла θ между прямыми определится как косинус у между векторами s_1 и s_2(1.18) :

$$\cos\theta = \frac{(s_1, s_2)}{|s_1||s_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (2.$$

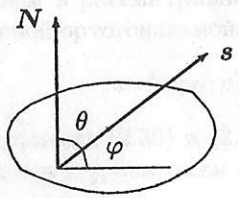


Рис. 2.6: Угол между прямой и плоскостью

Отсюда вытекает условие перпендику ности двух прямых:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \qquad (2.$$

Условие параллельности прямых сле ет из условия параллельности векторов s s_2 :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.$$

Найдем угол φ между прямой ℓ и пл костью $\wp$ (рис. 2.6).

Этот угол дополняется до $\pi/2$ угло между вектором s, сонаправленным прямой, и вектором N, ортогональн плоскости.

Найдем косинус угла θ между векторами s и N, который равен син угла φ между прямой и плоскостью:

$$\cos\theta = \sin\varphi = \frac{(N, s)}{N \cdot s} = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (2.$$

Из последней формулы следует условие параллельности прямой и пл кости ($s \perp N$) :

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (2.$$

Условию перпендикулярности прямой и плоскости соответствует па раллельность векторов s и N :

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (2.40)$$

Пример 1. Найти угол между прямыми $\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{6}$ и $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+4}{0}$.

Р е ш е н и е.

Знаменатели уравнений представляют собой направляющие векторы $s_1 = (8; 7; 6)$ и $s_2 = (3; -4; 0)$. По формуле (2.35) находим

$$\cos\theta = \frac{8 \cdot 3 + 7 \cdot (-4) + 4 \cdot 0}{\sqrt{8^2 + 7^2 + 6^2}\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{-4}{13 \cdot 5} = -\frac{4}{65}.$$

Пример 2. Доказать, что прямые $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1}$ и $\frac{x+5}{-3,6} = \frac{y-1}{1,2}$ па раллельны.

Р е ш е н и е.

Используя условие (2.37), найдем

$$\frac{-3,6}{3} = \frac{1,2}{-1} = (-1,2)!$$

Равенство отношений говорит о параллельности прямых.

Пример 3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(1; -2; 0)$ и перпендикулярной двум прямым ℓ_1 и ℓ_2, если

$$\ell_1: \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 4 - 2t, \\ z = 2 + 3t; \end{cases} \qquad \ell_2: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

е ш е н и е.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку A :

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-0}{p}.$$

Вектор $s = (m; n; p)$, определяющий направление этой прямой, должен ыть перпендикулярен одновременно двум векторам, сонаправленным за-

данным прямым: $s_1 = (3; -2; 3)$ и $s_2 = (1; 2; -1)$. Запишем условия перпендикулярности этих векторов:

$$\begin{cases} 3m - 2n + 3p = 0, \\ 1m + 2n - p = 0. \end{cases}$$

Два уравнения с тремя неизвестными позволяют выразить две неизвестные через третью. Например, $p = -2m$; $n = -\frac{3}{2}m$. Подставим полученные значения в ранее записанное уравнение прямой, проходящей через точку A. После умножения полученных уравнений на $m/2$ получим

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-0}{-4}.$$

Для проверки правильности решения следует убедиться в том, что полученное уравнение удовлетворяет условиям задачи.

Пример 4. Задан треугольник координаты трех вершин треугольника: $A(1;0)$, $B(-2;-3)$, $C(2;-1)$ (рис. 2.7): а) записать уравнение медианы, выходящей из вершины A; б) найти координаты точки M, симметричной точке A относительно точки пересечения медианы и стороны BC.

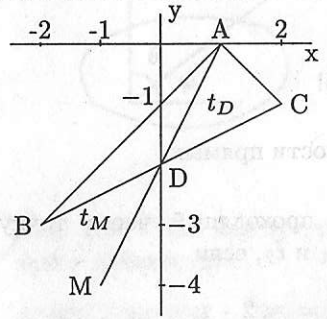


Рис. 2.7: К примеру 4.

Р е ш е н и е.

а) найдем координаты точки D, середины стороны BC треугольника, используя формулу (1.24) деления отрезка пополам:

$$D\left(\frac{-2+2}{2}; \frac{-3+(-1)}{2}\right) \Longrightarrow D(0; -2).$$

Записываем уравнение прямой (медианы), проходящей через точки A и D:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{-2-0}; \quad \Longrightarrow \quad y = 2x - 2;$$

б) для определения координаты точки M полученное уравнение прямой AD, на продолжении которой лежит точка M, запишем в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -2t. \end{cases} \qquad (2.41$$

Найдем параметр t_D, характеризующий расстояние от точки A (именно эта точка зафиксирована при записи последних уравнений прямой AD) до

точки D. Для этого в систему уравнений (2.41) вместо координат $(x; y)$ текущей точки прямой подставим координаты точки $D(0; -2)$. Решение обоих уравнений приводит (что естественно) к одному значению параметра $t = 1$.

Если параметр t_D характеризует расстояние от точки A до точки D, то расстояние до точки M, симметричной точке A относительно D, будет характеризовать параметр t_M, вдвое больший t_D, т. е. $t_M = 2t_D = 2 \cdot 1 = 2$.

Подставляя это значение t в уравнение (2.41), найдем координаты точки M:

$$x_M = 1 - 2 = -1; \quad y_M = -2 \cdot 2 = -4.$$

Таким образом $M(-1; -4)$.

Замечание. Задача нахождения координат точки, симметричной заданной относительно точек на прямой в $\Re_3$, аналогична рассмотренной задаче.

В задаче определения координат точки, симметричной заданной относительно некоторой плоскости, необходимо сначала провести через точку прямую, перпендикулярную плоскости, найти точку пересечения прямой с плоскостью, а затем продолжить решение по рассмотренной схеме.

Пример 5. Найти угол между прямой $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{0}$ и плоскостью $x + 2y - 5z + 8 = 0$.

Р е ш е н и е.

По уравнениям прямой и плоскости определяем вектор, соосный прямой: $s = (-1; 2; 0)$, и вектор, нормальный к плоскости: $N = (4; 2; -5)$.

По формуле (2.38) находим

$$\sin\varphi = \frac{4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + (-5) \cdot 0}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-5)^2}\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2}} = 0.$$

Равенство нулю числителя говорит о том, что прямая и плоскость параллельны.

2.7 Преобразование координат

Рассмотрим две ортогональные системы координат на плоскости: xy, которую будем называть исходной (старой), и новую $\tilde{x}\tilde{y}$. Координаты новой системы координат параллельны соответствующим координатам xy, а их начало совмещено с точкой $\tilde{O}(x_0 y_0)$ (рис. 2.8,а).

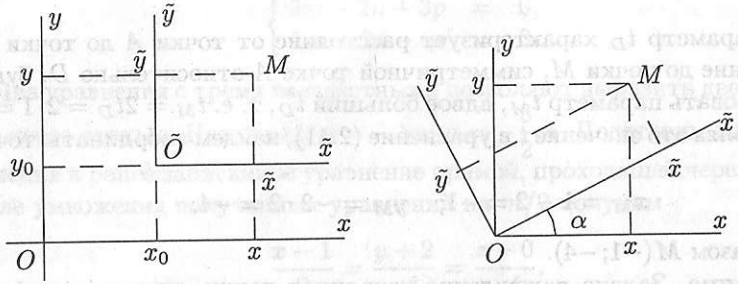


Рис. 2.8: Преобразование координат

В этом случае начало исходной системы координат в новой систе будет иметь координаты $O(\tilde{x}_0;\tilde{y}_0) \Longrightarrow O(-x_0;-y_0)$.

Рассмотрим на плоскости произвольную точку M, которая в стар системе имеет координаты $M(x;y)$, в новой – координаты $M(\tilde{x};\tilde{y})$.

Из рис. 2.8,a видно, что координаты произвольной точки M связан зависимостями:

$$\tilde{x} = x - x_0,\quad \tilde{y} = y - y_0; \qquad x = \tilde{x} + x_0,\quad y = \tilde{y} + y_0. \qquad (2.4$$

Таким образом, если центр $\tilde{O}$ новой системы координат смещается о носительно центра O исходной системы в сторону положительных коорд нат исходной системы, то при определении новых координат произвольн точки от ее значений в исходной системе вычитаются координаты цент $\tilde{O}$ (первые две формулы (2.42)).

Если центр смещается в сторону отрицательного направления коорд нат, то координаты нового центра прибавляются к исходным координат произвольной точки (вторые две формулы (2.42)).

Отметим, что за исходную систему координат можно принять $\tilde{x}\tilde{y}$, а считать новой.

Пример 1. Записать уравнение прямой $4x + 3y - 12 = 0$ в систе координат, параллельной xy, если начало новой системы имеет координат $\tilde{O}(-2;1)$.

Р е ш е н и е.

Следуя формулам (2.42), получим $x = \tilde{x} + 2;\quad y = \tilde{y} - 1$.

Подставим эти значения в заданное уравнение прямой

$$4(\tilde{x} + 2) + 3(\tilde{y} - 1) - 12 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим:

$$4\tilde{x} + 3\tilde{y} - 7 = 0,$$

т. е. коэффициенты уравнения, отвечающие за наклон прямой, не изме нились. Новое значение приобрел свободный член, связанный с расстояни ем от прямой до начала координат.

Рассмотрим новую систему координат, повернутую относительно ис ходной системы на угол α против часовой стрелки относительно точки O – общего начала координат (рис. 2.8,b).

Между координатами произвольной точки M в исходной $(x;y)$ и но вой $(\tilde{x};\tilde{y})$ системах координат будут существовать следующие из рис. 2.8,b зависимости:

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha; & \tilde{x} &= x\cos\alpha + y\sin\alpha;\\ y &= \tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha; & \tilde{y} &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (2.43)$$

При одновременном перемещении и повороте системы координат будут справедливы формулы преобразования

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha + x_0;\\ y &= \tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \qquad (2.44)$$

Пример 2. Записать уравнение прямой, заданной в примере 1, в систе ме координат, повернутой относительно исходной на угол $\pi/6$ по часовой стрелке.

Р е ш е н и е.

При повороте системы координат по часовой стрелке имеем $\alpha = -\pi/6$. По формулам (2.43) найдем:

$$x=\tilde{x}\cos(-\frac{\pi}{6})-\tilde{y}\sin(-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{x}+\frac{1}{2}\tilde{y};\quad y=\tilde{x}\sin(-\frac{\pi}{6})+\tilde{y}\cos(-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}\tilde{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{y}.$$

Подставляя полученные выражения в заданное уравнение плоскости, после преобразования получим:

$$(4\sqrt{3}-3)\tilde{x} + (3\sqrt{3}+4)\tilde{y} - 24 = 0.$$

Пример 3. Записать уравнение прямой, заданной в примере 1, в систе
ме координат, ось $\tilde{x}$ которой совмещена с направлением прямой, а начал
координат находится в точке прямой с заданной в исходной системе коор
динатой $x_0 = 1,5$ (рис. 2.9).

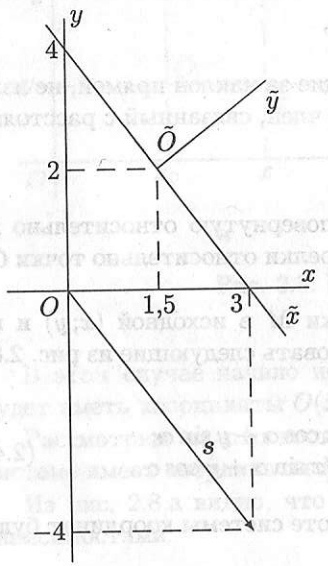


Рис. 2.9: К примеру 3

Р е ш е н и е.

Прежде чем осуществить требуемо
преобразование координат в заданно
уравнении прямой, определим начало ко
ординат новой системы и угол, составля
емый прямой с осью x.

Подставим $x_0 = 1,5$ в уравнение пря
мой: $4 \cdot 1,5 + 3y_0 - 12 = 0$.

Отсюда находим $y_0 = 2$. Координат
нового центра в исходной системе коор
динат: $\tilde{O}(1,5;6)$. $\tilde{O}$ – точка, лежащая н
заданной прямой.

Представим заданную прямую в вид
уравнения прямой, проходящей точку $\tilde{O}$
$4(x - 1,5) + 3(y - 6) = 0$.

Или $\dfrac{x - 1,5}{3} = \dfrac{y - 6}{-4}$.

Используя значения параметров этог
уравнения запишем выражение для век
тора, соосного прямой: $s = (3; -4)$.

Поделив вектор s на его модул
$s = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, найдем сонаправленный заданной прямой единичны
вектор $\boldsymbol{n}_s = (0,6; -0,8)$. Первая координата этого вектора равна косину
угла наклона прямой к оси x, вторая – синусу этого угла (см. раздел 1.5)

Преобразуем координаты к новой системе, осуществляя одновремен
перемещение начала координат в точку $\tilde{O}(1,5;6)$ и поворот на угол α. И
ходные данные для расчета: $x_0 = 1,5$; $y_0 = 2$; $\cos\alpha = 0,6$; $\sin\alpha = -0,8$.

Воспользовавшись формулами (2.44), получим:

$$x = \tilde{x} \cdot 0,6 - \tilde{y} \cdot (-0,8) + 1,5 = \frac{1}{10}(6\tilde{x} + 8\tilde{y} + 15);$$

$$y = \tilde{x} \cdot (-0,8) + \tilde{y} \cdot 0,6 + 2 = \frac{1}{10}(-8\tilde{x} + 6\tilde{y} + 20).$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение прямой:

$$\frac{4}{10}(6\tilde{x} + 8\tilde{y} + 15) + \frac{3}{10}(-8\tilde{x} + 6\tilde{y} + 20) - 12 = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов придем к урав
нению прямой в новых осях координат:

$$\tilde{y} = 0.$$

Это уравнение определяет ось $\tilde{x}$, совпадающую с прямой.
Последнего результата следовало ожидать.

2.8 Уравнения второго порядка в $\Re_2$

В отличие от математических моделей прямых и плоскостей, которые представляются в виде уравнений первого порядка, математические модели кривых и поверхностей общего вида описываются уравнениями, содержащими переменные в степенях, превышающих единицу.

Рассмотрим уравнение второго порядка в $\Re_2$ (на плоскости) в общем виде:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (2.45)$$

Предполагаем, что переменные x и y – это координаты произвольных точек на плоскости в декартовой ортогональной системе координат. Множитель 2 во втором слагаемом обусловлен тем, что присутствующие в такого рода суммах слагаемые B_1xy и B_2yx для математических моделей геометрических объектов равны.

Преобразуем уравнение (2.45) к новой системе координат $\tilde{x}\tilde{y}$, повернутой относительно исходной системы координат xy на угол α против часовой стрелки относительно начала координат (см. раздел 2.7).

Подставляя в (2.45) первые соотношения (2.43), получим:

$A(\tilde{x}^2\cos^2\alpha - 2\tilde{x}\tilde{y}\sin\alpha\cos\alpha + \tilde{y}^2\sin^2\alpha) + 2B(\tilde{x}^2\sin\alpha\cos\alpha + \tilde{x}\tilde{y}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) -$
$-\tilde{y}^2\sin\alpha\cos\alpha) + C(\tilde{x}^2\sin^2\alpha + 2\tilde{x}\tilde{y}\sin\alpha\cos\alpha + \tilde{y}^2\cos^2\alpha) + D(\tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha) +$
$+E(\tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha) + F = 0.$

Или

$$\tilde{x}^2(A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha) + \tilde{x}\tilde{y}\big(2B\cos 2\alpha - (A - C)\sin 2\alpha\big) +$$
$$+\tilde{y}^2(A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha) + \tilde{x}(D\cos\alpha + E\sin\alpha) +$$
$$+\tilde{y}(E\cos\alpha - D\sin\alpha) + F = 0. \qquad (2.46)$$

Выберем угол α так, чтобы множитель во втором слагаемом, т. е. при произведении $\tilde{x}\tilde{y}$ полученного выражения, обращался в нуль. Из равенства определяем

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}. \tag{2.47}$$

При значении угла α, удовлетворяющем соотношению (2.47), уравнение (2.46) приводится к виду

$$\tilde{A}\tilde{x}^2 + \tilde{C}\tilde{y}^2 + \tilde{D}\tilde{x} + \tilde{E}\tilde{y} + F = 0, \tag{2.48}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A\cos^2\alpha + B\sin 2\alpha + C\sin^2\alpha; \\ \tilde{C} &= A\sin^2\alpha - B\sin 2\alpha + C\cos^2\alpha; \\ \tilde{D} &= D\cos\alpha + E\sin\alpha; \\ \tilde{E} &= E\cos\alpha - D\sin\alpha. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Сравнение уравнений (2.45) и (2.48) указывает на то, что проведенное преобразование дало возможность избавиться в общем уравнении второго порядка от слагаемого, содержащего произведение координат.

Для дальнейшего преобразования уравнения (2.48) сгруппируем в нем слагаемые с одинаковыми переменными, дополнив их до полных квадратов. Для сохранения равенства "дополнительные" слагаемые запишем и в правой части уравнения, перенеся в нее свободный член F.

$$\tilde{A}\left(\tilde{x}^2 + 2\frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}\tilde{x} + \frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}^2}\right) + \tilde{C}\left(\tilde{y}^2 + 2\frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}\tilde{y} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}^2}\right) = \frac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}} + \frac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}} - F.$$

При условии, что $\tilde{F} = \dfrac{\tilde{D}^2}{4\tilde{A}} + \dfrac{\tilde{E}^2}{4\tilde{C}} - F \neq 0$, поделим полученное уравнение на $\tilde{F}$, свернем выражения в скобках до квадратов сумм, а множители при них переведем в знаменатели:

$$\frac{\left(\tilde{x} + \frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}\right)^2}{\tilde{F}/\tilde{A}} + \frac{\left(\tilde{y} + \frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}\right)^2}{\tilde{F}/\tilde{C}} = 1.$$

Вводя обозначения для новых переменных и постоянных:

$$\mathrm{x} = \tilde{x} + \frac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}; \qquad \mathrm{y} = \tilde{y} + \frac{\tilde{E}}{2\tilde{C}};$$

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{A}} = \pm a^2; \qquad \frac{\tilde{F}}{\tilde{C}} = \pm b^2,$$

перепишем исследуемое уравнение в виде

$$\pm\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} \pm \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1.$$

Понятно, что введение новых переменных равносильно параллельному переносу координатной системы $\tilde{x}\tilde{y}$ в новый центр с координатами $\tilde{x}_0 = -\dfrac{\tilde{D}}{2\tilde{A}}$ и $\tilde{y}_0 = -\dfrac{\tilde{E}}{2\tilde{C}}$. В зависимости от знаков, стоящих при слагаемых последнего уравнения, из него получаются уравнения эллипса:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1 \tag{2.50}$$

и гиперболы:

$$\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} - \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad -\frac{\mathrm{x}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{b^2} = 1. \tag{2.51}$$

Если уравнение (2.48) не содержит квадрата одной из переменных ($\tilde{A}$ или $\tilde{C}$ равны нулю), то перемещением координатной системы его можно привести к уравнению параболы

$$\mathrm{x}^2 = 2q\mathrm{y} \qquad \text{или} \qquad \mathrm{y}^2 = 2p\mathrm{x}. \tag{2.52}$$

Уравнения (2.50) – (2.52) называются *каноническими уравнениями кривых второго порядка*, соответственно *эллипса, гиперболы* и *параболы*.

Других кривых, описываемых уравнениями второго порядка, не существует.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $9x^2 + 16y^2 - 54x + 64y + 1 = 0$.

Р е ш е н и е.

В заданном уравнении отсутствует слагаемое, содержащее произведение переменных. Поэтому его приведение к каноническому виду сведется лишь к параллельному переносу осей координат.

Для осуществления этого переноса сгруппируем слагаемые, зависящие только от одной переменной, дополняя их постоянными слагаемыми до полного квадрата. Чтобы не нарушить равенства, такие же слагаемые добавим в правую часть уравнения, перенося туда же свободный член:

$$9(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 + 4y + 4) = 81 + 64 - 1.$$

Следует обратить внимание на то, что множители, стоящие при квадратах переменных, должны быть обязательно вынесены за скобки. В противном случае будет изменяться масштаб координат (координаты будут сокращаться или удлиняться).

Поделив полученное уравнение на $144=12^2$, группируя слагаемые в скобках и переводя множители, стоящие перед скобками, в знаменатели, получим

$$\frac{(x-3)^2}{4^2}+\frac{(y+2)^2}{3^2}=1.$$

Это уравнение эллипса, собственные оси координат которого смещены вправо от исходных координат на 3 единицы и вниз – на 2 единицы. Так что новые (собственные) оси координат эллипса выражаются через старые соотношениями

$$x=x-3, \qquad y=y+2.$$

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение $16x^2+24xy+9y^2-140x+20y-200=0$.

Р е ш е н и е.

Для удобства преобразований выпишем коэффициенты уравнения, следуя обозначениям (2.45): $A=16$, $2B=24$, $C=9$, $D=-140$, $E=20$, $F=-200$.

1. Находим котангенс удвоенного угла поворота осей координат (2.47):

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{A-C}{2B}=\frac{19-9}{24}=\frac{7}{24}.$$

Для определения коэффициентов уравнения в повернутой на угол α системе координат следует правильно сориентировать повернутую систему координат и найти тригонометрические функции, необходимые для вычисления коэффициентов (2.49) нового уравнения кривой (2.48).

Используя известную из тригонометрии зависимость $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$, получим из нее квадратное уравнение для определения $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha-1=0$$

или с учетом найденного выше значения для $\operatorname{ctg}2\alpha$:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\frac{7}{12}\operatorname{tg}\alpha-1=0.$$

Решая уравнение, находим два корня: $\operatorname{tg}\alpha_1=-4/3$ и $\operatorname{tg}\alpha_2=3/4$.

Эти значения определяют на плоскости два взаимно ортогональных направления, показанных на рис. 2.10. Выбор любого из них в качестве направления для новой оси координат $\tilde{x}$ приведет в конечном итоге к одинаковому результату, касающемуся расположения кривой на плоскости. Тем не менее второе значение угла дает положительный угол поворота и только поэтому отдаем ему предпочтение, т. е. принимаем $\operatorname{tg}\alpha=3/4$.

Так как $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$, то при известном значении $\operatorname{tg}\alpha$ отсюда имеем уравнение для определения $\sin\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\frac{9}{16}\Rightarrow\sin^2\alpha=\left(\frac{3}{5}\right)^2.$$

Из последнего квадратного уравнения получаем два решения: $\sin\alpha=\pm\dfrac{3}{5}$.

Для определения косинуса угла α используем известную из тригонометрии зависимость

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\pm\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\frac{4}{5}.$$

Из соображений положительности угла принимаем

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}, \qquad \cos\alpha=\frac{4}{5}.$$

2. По формулам (2.49) находим коэффициенты

$$\tilde{A}=A\cos^2\alpha+B\sin2\alpha+C\sin^2\alpha=16\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2+24\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+9\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=25,$$

$$\tilde{C}=A\sin^2\alpha-B\sin2\alpha+C\cos^2\alpha=16\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2-24\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+9\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=0,$$

$$\tilde{D}=D\cos\alpha+E\sin\alpha=-140\cdot\frac{4}{5}+20\cdot\frac{3}{5}=-100,$$

$$\tilde{E}=E\cos\alpha-D\sin\alpha=20\cdot\frac{4}{5}+140\cdot\frac{3}{5}=100.$$

Подставив найденные коэффициенты в (2.48) и поделив полученное уравнение на 25, приходим к уравнению:

$$\tilde{x}^2-4\tilde{x}+4\tilde{y}-8=0.$$

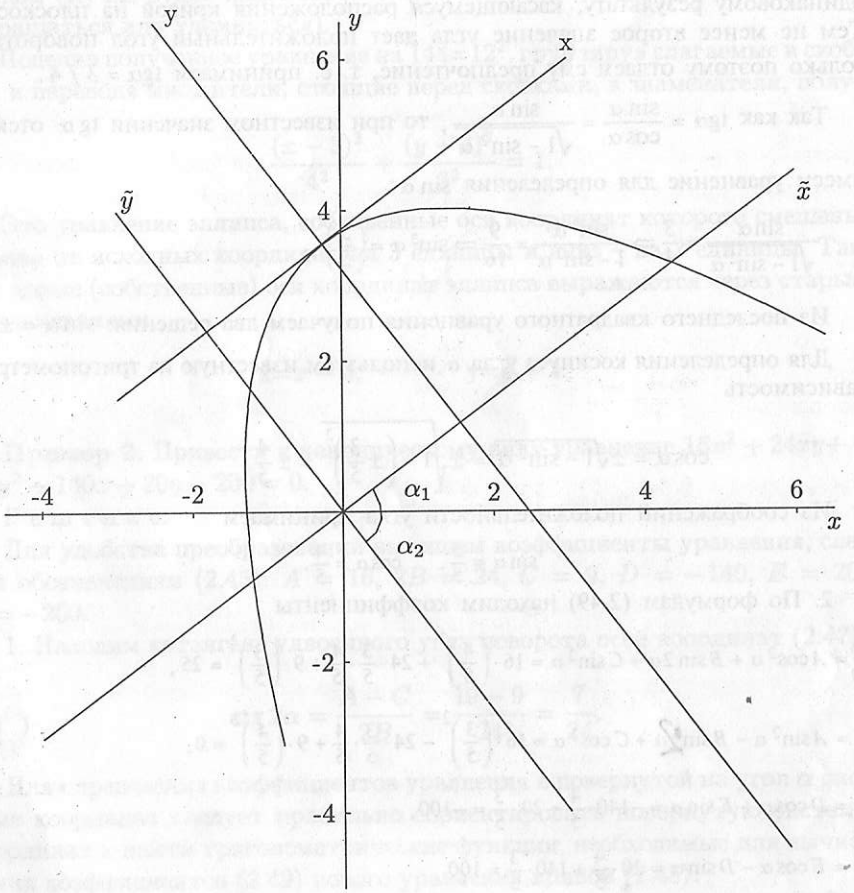


Рис. 2.10: Пример преобразования координат

3. Для определения положения следующей системы координат прибавим к уравнению и вычтем из него цифру 4 (чтобы получить квадрат разности для переменной $\tilde{x}$). Разделяя переменные, запишем:

$$\tilde{x}^2 - 4\tilde{x} + 4 = -4\tilde{y} + 12,$$

или

$$(\tilde{x} - 2)^2 = -4(\tilde{y} - 3).$$

4. Введем новые координаты xy, параллельные координатам $\tilde{x}\tilde{y}$ с началом отсчета в точке $\tilde{x}_0 = 2$ и $\tilde{y}_0 = 3$, т. е.

$$x = \tilde{x} - 2, \quad y = \tilde{y} - 3.$$

В новых координатах уравнение кривой приводится к каноническому виду:

$$x^2 = -4y.$$

Это уравнение параболы, симметричной относительно оси y с ветвями, направленными в сторону ее отрицательных значений. На рис. 2.10 изображены исследованная парабола и три координатные системы, каждой из которых соответствуют различные уравнения одной и той же (!) кривой.

2.9 Свойства кривых второго порядка

В предыдущем разделе говорилось об инвариантности геометрических объектов по отношению к преобразованию координат. Там же приведены канонические уравнения (2.50) - (2.52) всех трех видов кривых второго порядка.

Приведем независимые от вводимых систем координат определения кривых второго порядка и опишем их основные свойства.

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная $(2a)$.

На рис. 2.11 показан эллипс со связанной с ним собственной системой координат *xy*, в которой уравнение эллипса имеет вид (2.50):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Опишем некоторые основные характеристики и свойства эллипса.

1. Постоянные a и b называются полуосями эллипса.

При y=0 из уравнения эллипса получаем x= ± a, а при x=0 : $y = \pm b$. То есть, a и b – это отрезки, отсекаемые эллипсом на осях координат.

2. Координаты фокусов $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

при условии, что $a > b$ (a – большая полуось эллипса). Величина $2c$ – расстояние между фокусами.

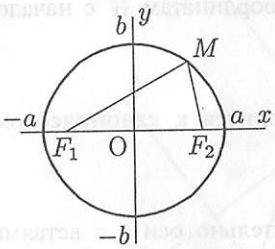


Рис. 2.11: Эллипс

3. Можно ввести параметр t соотношениями

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad (2.53)$$

которые называются параметрическими уравнениями эллипса.

При подстановке (2.53) в каноническое уравнение (2.50) последнее обращается в тождество.

4. Величина

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом* эллипса $e \in [0,1)$.

При $e = 0$ ($a = b = R$) эллипс превращается в окружность

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

при $e \to 1$ $b \to 0$ эллипс приближается к прямой.

Читателю предлагается самостоятельно исследовать уравнение эллипса, установив области определения переменных, интервалы возрастания и убывания, симметричность относительно координат. В справедливости проведенных исследований можно убедиться, сопоставляя их с изображенным на рис. 2.11 эллипсом.

Гиперболой называется геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная ($2a$).

На рис. 2.12 изображена гипербола с собственными осями координат, в которых гипербола представляется каноническим уравнением (2.51):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Рассмотрим основные характеристики и свойства гиперболы.

1. Постоянные a и b называются полуосями гиперболы. При $y = 0$ имеем $x = \pm a$. При $x = 0$ получаем мнимые корни $y = \pm\sqrt{-b^2}$, т. е. гипербола не пересекает ось y, которая называется мнимой осью гиперболы (x – действительная ось).

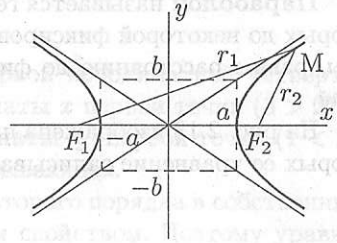


Рис. 2.12: Гипербола

2. Координаты фокусов $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Расстояние между фокусами равно $2c$.

3. Можно ввести параметр t такой, что

$$\begin{cases} x = a\,ch\,t = a\,(e^t + e^{-t})\,/2, \\ y = b\,sh\,t = b\,(e^t - e^{-t})\,/2. \end{cases} \qquad (2.54)$$

При таких значениях переменных x и y уравнение гиперболы превращается в тождество.

Уравнения (2.54) называются *параметрическими уравнениями гиперболы.*

Функции *ch t* и *sh t* – *гиперболические косинус и синус.* Их название определило название кривой.

4. Величина

$$e = \frac{c}{a}$$

называется *эксцентриситетом гиперболы.* Для гиперболы эксцентриситет $e \in (1;\infty)$.

Эксцентриситет характеризует степень отклонения точек гиперболы от оси x. При $c \to 1$ ($b \to 0$) ветви гиперболы стремятся к оси x, при ∞ ($b \to \infty$) – к прямой $x = a$, перпендикулярной оси x.

5. Гипербола имеет две асимптоты – прямые

$$y = \pm\frac{b}{a}x,$$

проходящие через начало координат и вершины прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, изображенного пунктиром на рисунке.

Читателю предлагается самостоятельно исследовать гиперболу, определив интервалы возрастания и убывания, симметричность осям координат,

области определения переменных.

Параболой называется геометрическое место точек, расстояния от которых до некоторой фиксированной точки F, называемой *фокусом параболы*, равны расстоянию до фиксированной прямой, называемой *директрисой*.

На рис. 2.13 изображена парабола с собственными координатами, в которых ее уравнение записывается в виде (2.52)

$$y^2 = 2px.$$

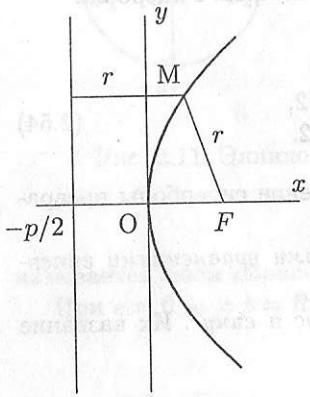


Рис. 2.13: Парабола

Свойства и характеристики параболы.

1. Парабола проходит через точку $O(0;0)$ ($y = 0$ при $x = 0$), называемую вершиной параболы.

2. Координаты фокуса $F(p/2;0)$.

Директрисой является прямая

$$x = -\frac{p}{2},$$

ортогональная оси x и находящаяся от начала собственной системы координат на таком же расстоянии, что и фокус.

3. Важным свойством параболы, определяющим ее широкое применение в рефлекторах осветительных и других волновых приборов, является ее оптическое свойство: луч, выходящий из фокуса, отражается от линии параболы в направлении, перпендикулярном директрисе.

Кривые второго порядка можно распознать, не приводя их уравнения к каноническому виду. Для этого достаточно по коэффициентам уравнения (2.45) найти величину

$$\Delta = AC - B^2. \qquad (2.55)$$

Кривая является математической моделью:

$$\text{при } \Delta \begin{cases} > 0 \implies \text{эллипса,} \\ = 0 \implies \text{параболы,} \\ < 0 \implies \text{гиперболы.} \end{cases}$$

Пример 1. Составить уравнение кривой второго порядка, если известно, что в ее собственных координатах кривая проходит через две точки (2;2) и (3;1).

Р е ш е н и е.

Заметим, что обе точки находятся в первой координатной четверти. Координата x второй точки больше координаты x первой точки ($3 > 2$), а координата y второй точки меньше координаты y первой точки ($1 < 2$). Поэтому функция, описывающая кривую, убывающая.

Из трех функций, описывающих кривые второго порядка в собственных координатах, только эллипс обладает таким свойством. Поэтому уравнение кривой описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обозначая $A = 1/a^2$, $B = 1/b^2$ и подставляя в уравнение эллипса последовательно координаты первой и второй точек, придем к системе двух уравнений

$$\begin{cases} 4A + 4B &= 1, \\ 9A + 1B &= 1 \end{cases}.$$

Решая уравнение найдем $A = 1/a^2 = 3/32$, $B = 1/b^2 = 3/16$.

Тогда искомое каноническое уравнение эллипса примет вид

$$\frac{x^2}{(8/\sqrt{6})^2} + \frac{y^2}{(4/\sqrt{3})^2} = 1.$$

Пример 2. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку (1;2), если ее асимптоты $y = \pm\frac{1}{2}x$.

Р е ш е н и е.

Гипербола может иметь два вида канонических уравнений в зависимости от того, какая из координат является мнимой:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{или} \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Сравнивая общее уравнение асимптот $y = \pm\frac{b}{a}x$ с заданным, получим $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. Или $a = 2b$.

При этих зависимости между a и b и координатах заданной точки первое из возможных уравнений гиперболы не имеет решений, поэтому за исходное принимаем второе из записанных выше уравнений гиперболы.

Подставляя в него зависимость $a = 2b$, получим

$$-\frac{x^2}{4} + y^2 = b^2.$$

Учтем, что кривая проходит через заданную точку с координатами (1;2): $-\frac{1^2}{4} + 2^2 = b^2$. Отсюда находим $b^2 = 15/4$.

Тогда $a^2 = 4b^2 = 4 \cdot \frac{15}{4} = 15$.

Окончательно уравнение гиперболы запишем в каноническом виде:

$$-\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{15/4} = 1.$$

Пример 3. Написать каноническое уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до фиксированной точки равно расстоянию до фиксированной прямой. Расстояние от фиксированной точки до прямой равно 8.

Р е ш е н и е.

По условию заданная кривая – парабола с параметром $p = 8$. Возможны четыре решения задачи:

$$y^2 = \pm 16x; \qquad x^2 = \pm 16y,$$

которые удовлетворяют условиям задачи.

2.10 Поверхности второго порядка

Геометрическими образами квадратных уравнений в пространстве $\Re_3$ являются поверхности. Количество различных видов поверхностей (как и кривых) второго порядка ограничено. Каждая из поверхностей преобразованием координат (параллельным перемещением и поворотами вокруг трех осей) может быть приведена к каноническому виду, где ее математическая модель имеет характерный вид.

Рассмотрим все типы поверхностей второго порядка. Они изображены на рис. 2.14 вместе с собственными осями координат.

1. **Цилиндрические поверхности** – это поверхности, образованные параллельным переносом некоторой прямой, *образующей цилиндра*, вдоль некоторой кривой, называемой *направляющей цилиндра*.

Коли речь идет о поверхностях второго порядка, то направляющая может быть либо эллипсом (в частном случае окружностью), либо гиперболой, либо параболой. Соответствующие поверхности будут называться *эллиптическим (в частности круговым) цилиндром* (рис. 2.14,a); *гиперболическим цилиндром* (рис. 2.14,b) и *параболическим цилиндром* (рис. 2.14,c).

Канонические уравнения соответствующих цилиндрических поверхностей не содержат одну из координат – ту координату, вдоль которой располагается образующая цилиндрической поверхности. Поэтому уравнения изображенных на рис. 2.14 цилиндрических поверхностей имеют в $\Re_3$ (!) соответственно вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad z^2 = 2px. \tag{2.56}$$

2. **Поверхности вращения.** Характерной особенностью этих поверхностей является наличие в их уравнениях слагаемых с квадратами двух переменных, имеющих одинаковые коэффициенты. В этом случае в сечениях поверхностей плоскостями, перпендикулярными третьей координате (третья координата – постоянная величина), получаются окружности.

Например,

$x^2 + y^2 - cz = 0$ – поверхность, образованная вращением параболы $x^2 = cz$ (или $y^2 = cz$) вокруг оси z;

$x^2 + y^2 = cz^2$ – круговой конус (рис. 2.14,d), образованный вращением прямой $x = Cz$ ($y = Cz$) вокруг оси z ($c = C^2$).

3. **Эллипсоид** – это геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 2.14,e):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.57}$$

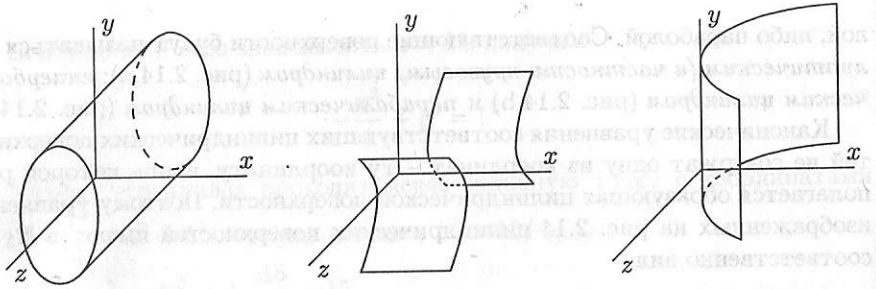
В сечениях этой поверхности плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ получаются эллипсы (показаны на рисунке).

4. **Однополостный гиперболоид** – геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 2.14,f):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2.58}$$

Минус в канонических уравнениях однополостных гиперболоидов может стоять только перед одним из слагаемых уравнения. Переменная, перед которой стоит минус, определяет *мнимую ось* гиперболоида.

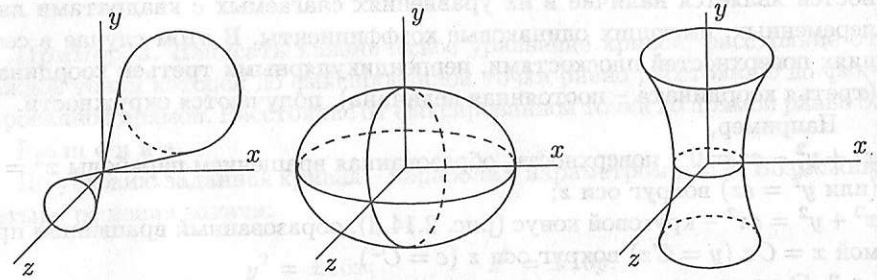
В сечениях поверхности координатными плоскостями $x = 0$ и $z = 0$ получаются гиперболы; $y = \pm h$ (в том числе $h = 0$) – эллипсы (показаны на рисунке).



a. Эллиптический цилиндр

b. Гиперболический цилиндр

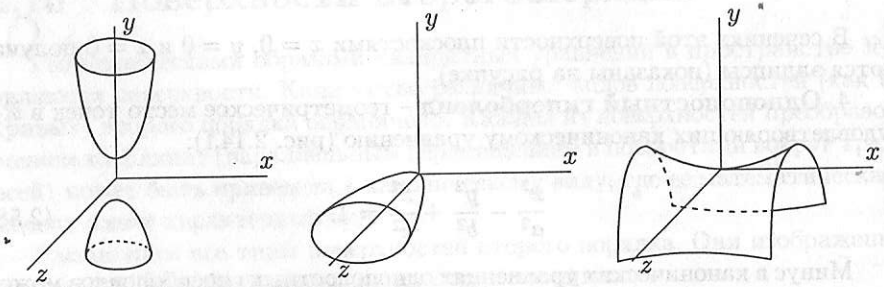
c. Параболический цилиндр



d. Круговой конус

e. Эллипсоид

f. Однополостный гиперболоид



g. Двухполостный гиперболоид

h. Эллиптический параболоид

i. Гиперболический параболоид

Рис. 2.14: Поверхности второго порядка

5. **Двухполостный гиперболоид** – геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 2.14,g):

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{2.59}$$

Отрицательные слагаемые этого уравнения определяют координаты плоскости $y=0$, которую не пересекает поверхность гиперболоида.

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x=0$ и $z=0$ получаются гиперболы; $y=\pm h$ $(h>b)$ – эллипсы.

6. **Эллиптический параболоид** – это геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 2.14,h):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=pz. \tag{2.60}$$

В сечениях поверхности координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ получаются параболы; сечение $z=0$ определяет точку (0;0;0) – вершину параболоида.

7. **Гиперболический параболоид** – это геометрическое место точек в $\Re_3$, удовлетворяющих каноническому уравнению (рис. 2.14,i):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=by. \tag{2.61}$$

Для канонического уравнения этой поверхности характерно то, что слагаемые с квадратами координат имеют противоположные знаки, а третья координата входит в уравнение в первой степени.

Для анализа форм поверхностей широко используется метод сечений. Метод в виде сечений координатными плоскостями применялся выше. В общем поверхности можно рассекать плоскостями, параллельными координатным плоскостям, или даже плоскостями общего вида.

Так, при $x=\pm d$ из (2.61) получим

$$z^2=-2p(y-y_0),$$

где $p=\dfrac{1}{2}bc^2$, $y_0=\dfrac{d^2}{2b}$.

Полученные в двух сечениях кривые представляют собой параболы, ветви которых направлены в сторону отрицательных y и вершины которых смещены в сторону положительных y на величину y_0. Кривые, соответствующие обсуждаемому уравнению параболы, показаны на рис. 2.14,i – это крайние правое и левое сечения.

Других поверхностей второго порядка, кроме перечисленных, не существует.

В математике разработаны методы сведения общих уравнений поверхностей второго порядка, заданных в пространствах любых измерений, к каноническим уравнениям, но знакомство с этими методами выходит за рамки программы данного курса математики.

2.11 Вопросы

1. Запишите в векторном виде уравнение прямой на плоскости; уравнение плоскости. Поясните записи соответствующими рисунками.
2. Получите из векторного уравнения уравнение прямой (плоскости), проходящей через заданную точку.
3. Приведите уравнение прямой (плоскости), проходящей через заданную точку к уравнению прямой (плоскости) в общем виде.
4. Что с геометрической точки зрения представляет собой совокупность коэффициентов, стоящих при переменных в общем уравнении прямой (плоскости)?
5. Приведите общее уравнение прямой (плоскости) к уравнению прямой (плоскости) в отрезках. Поясните на рисунках смысл коэффициентов этого уравнения.
6. Получите из общего уравнения прямой уравнение прямой с угловым коэффициентом. Поясните смысл коэффициентов.
7. Получите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
8. Определите углы наклона к осям координат вектора нормали к прямой (плоскости).
9. Изобразите на координатных плоскостях следы плоскостей, получаемых их общего уравнения при различных вариантах равенства нулю некоторых его коэффициентов.
10. Что такое гиперплоскость? Запишите уравнение гиперплоскости в общем виде; в виде уравнения в отрезках; в виде уравнения гиперплоскости, проходящей через заданную точку.
11. Получите формулу для определения угла между плоскостями. Сопроводите запись соответствующим рисунком.
12. Запишите условие параллельности плоскостей, условие перпендикулярности.
13. Запишите условие параллельности и ортогональности прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами.

14. Как найти расстояние от точки до плоскости? Ответ сопроводите поясняющим рисунком.

15. Получите уравнение плоскости (прямой) в нормальном виде.

16. Что представляет собой свободный член (p) в уравнении плоскости в нормальном виде?

17. Запишите уравнение прямой в $\mathfrak{R}_3$ в векторном виде.

18. Получите уравнения прямой в $\mathfrak{R}_3$ в параметрическом и каноническом видах.

19. Запишите уравнение прямой в $\mathfrak{R}_3$, проходящей через заданную точку.

20. Что определяет параметр t в записанных в параметрическом виде уравнениях прямой?

21. Как найти угол между прямыми в пространстве?

22. Запишите условия параллельности и ортогональности прямых в $\mathfrak{R}_3$.

23. Как найти угол между прямой и плоскостью?

24. Запишите условия параллельности и ортогональности прямой и плоскости.

25. Как осуществляется преобразование переноса осей координат на плоскости? Запишите формулы связи старых и новых координат.

26. Как осуществляется преобразование поворота осей координат на плоскости? Запишите формулы связи старых и новых координат.

27. Запишите общее уравнение кривых второго порядка на плоскости.

28. Перечислите все возможные виды кривых второго порядка на плоскости.

29. Запишите канонические уравнения всех кривых второго порядка на плоскости.

30. Изобразите эллипс. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих эллипс.

31. Запишите параметрические уравнения эллипса. Убедитесь в том, что эти уравнения являются решениями канонического уравнения эллипса.

32. Изобразите гиперболу. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих гиперболу.

33. Запишите параметрические уравнения гиперболы. Убедитесь в том, что эти уравнения являются решениями канонического уравнения гиперболы.

34. Что определяет эксцентриситет в уравнениях кривых второго порядка? В каких пределах он изменяется для эллипса и гиперболы?

35. Изобразите параболу. Поясните на рисунке значения параметров, определяющих параболу.

36. В чем состоит оптическое свойство параболы?

37. Перечислите все возможные виды поверхностей второго порядка. Приведите их канонические уравнения. Изобразите поверхности на рисунках.

2.12 Упражнения

К разделу 2.1

Провести прямую через точки A(1;-2) и B(3,0). Записать полученное уравнение:

1. В общем виде.
2. В отрезках.
3. В виде уравнения с угловым коэффициентом.

Найти углы наклона:

4. Прямой с осью x.
5. Нормали к прямой с осями координат.

К разделу 2.2

Заданы своими координатами в декартовой ортогональной системе координат точка A(1;2;-3) и вектор в связанном с координатами ортономированном базисе $\boldsymbol{a} = (3;3;1)$.

1. Записать в общем виде уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точку A и перпендикулярной вектору $\boldsymbol{a}$.
2. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат.
3. Определить косинусы углов наклона нормали к плоскости с осями координат.

Записать уравнение плоскости, проходящей:

4. Через след пересечения $\wp$ с координатной плоскостью xy и параллельной оси z.
5. Через точку пересечения $\wp$ с осью y и перпендикулярной этой оси.

К разделу 2.3

1. Найти косинус угла между плоскостями $2x + 3y - z + 3 = 0$ и $x - y + z - 1 = 0$.
2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M(2;-1;3) и параллельной плоскости $2x - y + 3z - 2 = 0$.
3. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M(3;0;-1) и перпендикулярной плоскостям $3x - y + 2z - 1 = 0$ и $x + y - 3z + 3 = 0$.

4. Найти косинус и тангенс угла между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.
5. Заданы точка M(3;1) и уравнение прямой $\ell : 2x - y + 2 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M: a) параллельной ℓ; b) перпендикулярной ℓ.

К разделу 2.4

Дана плоскость $\wp : 2x + 3y - z = 0$. Найти расстояние от $\wp$: a) до точки A(3;-1;1); b) до начала координат.

К разделам 2.5 – 2.6

Записать в каноническом и параметрическом видах уравнения прямой, проходящей через точку A(1;-1;2) и:

1. Точку B(0;-3;1).
2. Параллельной прямой $\ell : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+3}{0}$.
3. Перпендикулярной плоскости $\wp : 2x - y + 3z - 1 = 0$.

Найти:

4. Синус угла между ℓ и $\wp$.
5. Координаты точки M пересечения ℓ и $\wp$.
6. Координаты точки, симметричной A относительно точки M.

Заданы координаты вершин треугольника A(1;2), B(1;0), C(2;-1). Записать уравнения прямых, выходящих из точки A:

1. Медианы.
2. Параллельной BC.
3. Перпендикулярной BC.
4. Найти точку, симметричную A относительно BC.

К разделам 2.8 – 2.9

1. Установить, какая кривая определена уравнением $4x^2 - y^2 + 16x + 2y + 6 = 0$. Построить кривую в исходной и собственной системах координат.
2. Записать уравнение эллипса, если в его собственной системе координат известны координаты двух расположенных на нем точек A(5;0) и B(0;-4). Найти координаты фокусов и эксцентриситет эллипса.

3. Написать уравнение кривой второго порядка, сумма расстояний от точек которой до двух точек $F_1(-3;1)$ и $F_2(1;1)$ равна $2\sqrt{5}$. Найти эксцентриситет.

4. Записать уравнение кривой второго порядка, если известно, что она проходит через точку M(5;2,25) (в собственной системе координат) и имеет эксцентриситет $e = 1,25$.

5. Записать уравнение параболы, если известно, что расстояние от ее вершины до фокуса равно 2.

2.13 Задание к расчетной работе 1

В обеих частях расчетной работы введены обозначения:

a – последняя цифра номера группы, в которой обучается студент;

$b = 1 + \frac{2}{N}$, где N – порядковый номер студента в списке группы.

Часть 1
Прямая и плоскость

В декартовой ортогональной системе координат заданы вершины тетраэдра: $A(a;b;\frac{a-b}{2})$, $B(2a;3;-1)$, $C(-1;b;0)$, $D(1;-2;a-b)$.

1. Записать уравнение плоскости $\wp$, проходящей через точки A, B и C.
2. Найти отрезки, отсекаемые $\wp$ на осях координат, и косинусы углов наклона нормали к плоскости с осями координат.
3. Определить синус угла между прямой AD и $\wp$, а также косинус угла между плоскостями $\wp$ и ADC.
4. Найти расстояние от точки D до точки A и до плоскости $\wp$.
5. Провести через точку D прямую, перпендикулярную $\wp$, и найти координаты точки, симметричной D относительно $\wp$.

Часть 2
Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду

Привести уравнение кривой $ax^2 + bxy + (b-2a)y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ к каноническому виду.

Во всех трех координатных системах найти параметры и координаты характерных точек кривой: вершин, фокусов, уравнения асимптот, эксцентриситет.

Записать параметрические уравнения кривой. Построить кривую с начальными, промежуточными и собственными координатами.

Глава 3

Введение в анализ

3.1 Множества. Основные понятия

Понятие *множество* относится к базовым понятиям и не определяется через более простые. Под *множеством* (обозначаются прописными буквами A, B, C ...) понимают совокупность объектов, называемых *элементами* множества (обозначаются строчными буквами a, b, c ...).

Примеры множеств: множество чисел на прямой (плоскости, в пространстве), множество людей в коллективе, предприятий в городе, домов на улице ...

Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A, обозначается $a \in A$. Запись $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ означает, что A состоит из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Символом $\emptyset$ обозначается пустое множество.

Если все элементы множества B являются элементами множества A, то B называют *подмножеством* множества A. Обозначение $B \subset A$.

Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то множества A и B называются *равными* A=B.

Объединением $(A \cup B)$ множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. *Пересечением* $(A \cap B)$ множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно и A, и B.

Пример. Даны множества A={1,3,4,7,9} и B={3,5,7,8}. Найти их объединение и пересечение.

Р е ш е н и е. $(A \cup B)$={1,3,4,5,7,8,9}; $(A \cap B)$={3,7}.

Числовым $\Re$ называется множество, элементами которого являются действительные числа. Если Q – множество рациональных чисел; I – иррацио-

нальных; Z – целых и N – натуральных, то

$$N \subset Z \subset Q \subset \Re; \quad I \subset \Re; \quad \Re = Q \cup I.$$

Геометрически множество $\Re$ изображается *числовой прямой* с введенным на ней масштабом и нулевой точкой (началом координат). Между $\Re$ и точками прямой существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому слово *число* часто отожествляют со словом *точка* на числовой оси. Множество X с элементами $x \in \Re$ называют *отрезком* (или *промежутком*) закрытым $[a, b]$ или открытым (a, b) в зависимости от того, включаются концы интервала a и b в это множество или нет.

Рассмотрим два числовых множества: X с элементами x и Y с элементами y.

Декартовым произведением $X \otimes Y$ называется множество всех упорядоченных пар (x, y) элементов $x \in X, y \in Y$.

Если X и Y представляют собой числовые множества, то им, как говорилось выше, можно поставить в соответствие точки числовой оси. Пусть числам множества X соответствуют точки оси абсцисс, а числам множества Y – оси ординат. Тогда каждой упорядоченной паре (x, y) элементов $x \in X$ и $y \in Y$ будет соответствовать точка на плоскости. Элементы x и y в этом случае представляют собой декартовы координаты точек на плоскости, а их совокупность – множество точек на плоскости (двумерном пространстве $\Re_2$).

Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что декартово произведение трех числовых множеств $X \otimes Y \otimes Z$ приводит к множеству точек (x, y, z) в трехмерном пространстве $\Re_3$.

Обобщением сказанного будет n-мерное пространство $\Re_n$, образованное декартовым произведением $X_1 \otimes X_2 \cdots \otimes X_n$ с координатами точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При этом координата x_1 отождествляется с x, x_2 – с y и т.д.

Декартовы произведения применимы и в случаях, когда рассматриваемые множества не являются числовыми, а могут состоять из конечного или бесконечного числа отдельных элементов. В этом случае декартовы произведения также будут состоять из отдельных сочетаний элементов множеств, входящих в декартовы произведения. В частности, это могут быть n-мерные множества, называемые дискретными, в противовес множествам $\Re_n$, относящимся к непрерывным.

Между двумя образованными декартовым произведением точками непрерывных числовых множеств всегда можно найти расстояние.

Пусть заданы координаты двух точек в n-мерном пространстве $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ и $M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$.

Пространство называется *евклидовым*, если расстояние d_{12} между двумя любыми его точками M_1 и M_2 можно определить по формуле

$$d_{12} = \sqrt{\left(x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right)^2 + \left(x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right)^2 + \ldots + \left(x_n^{(2)} - x_n^{(1)}\right)^2}. \qquad (3.1)$$

В частности, для одномерного числового пространства определение расстояния сводится к вычислению разности между координатами двух точек числовой оси (квадратный корень из квадрата одного слагаемого (3.1) равен модулю этого слагаемого). Для двумерного пространства формула (3.1) соответствует теореме Пифагора об определении гипотенузы по двум катетам (катетами являются разности координат точки соответственно по одной и по второй оси) и т. д.

Множествами, входящими в декартовы произведения, обычно являются независимые величины. Например, выгода от реализации некоторой продукции складывается из ее товарного вида (в который входит много элементов) – первое множество; умения преподнести товар покупателю, организации рекламы (второе множество); спроса на товар, зависящего в свою очередь от многих факторов, (третье множество) и т.д.

3.2 Функция. Основные понятия и свойства

Величина, имеющая одно и то же числовое значение в различных ситуациях, называется *постоянной*. Величина, сохраняющая числовое значение в условиях определенного процесса, называется *параметром*. Величина, принимающая различные значения, называется *переменной*.

Определение. *Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие вполне определенный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана* **функция** $y = f(x)$.

При этом x называется *независимой переменной* или *аргументом*, а y *зависимой переменной* или *функцией*.

Множество X называется *областью определения (существования)* функции, или *областью допустимых значений* аргумента; множество Y – *областью значений* функции.

Пример 1. Найти область определения функции $y = \sqrt{x} - \lg(2x - 3)$.

Р е ш е н и е. Для области определения функции y должны выполняться требования: неотрицательность выражения, стоящего под квадратным корнем ($x \geq 0$), и положительность выражения, стоящего под знаком логарифма $(x - 3) > 0$. Решая совместно оба записанных неравенства, находим искомую величину: $x > 3$.

Пример 2. Найти область значений функции $y = \dfrac{6x}{1+x^2}$.

Р е ш е н и е. Одним из способов решения подобных задач является нахождение функции, обратной по отношению к исходной, и затем установление для обратной функции ее области определения.

Умножая числитель и знаменатель исходного соотношения на неравный нулю (и даже всегда положительный) множитель $(1+x^2)$, запишем функцию в неявном виде $x^2y - 6x + y = 0$.

Получено квадратное уравнение относительно переменной x. Оно будет иметь два действительных корня в случае выполнения требования неотрицательности дискриминанта, т. е. $6^2 - 4y^2 \geq 0$ или $y^2 \leq 9$, $|y| \leq 3$. Следовательно, областью значений функции будет множество $Y \in [-3, 3]$.

Функция может задаваться *аналитически, таблично* или *графически.*

Рассмотрим основные свойства функций.

1. Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется *четной,* если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной,* если $f(-x) = -f(x)$.

Пример четной функции $y = x^2$. Справедливость утверждения следует из того, что $(-x)^2 = x^2$. А так как $(-x)^3 = -x^3$, то $y = x^3$ – нечетная функция. Ясно, что о функции $y = x^2 + x^3$ нельзя сказать, что она четная или что она нечетная.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, нечетной – относительно начала координат (см. примеры элементарных функций в табл. 1.3.1).

2. Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке X, если большему значению функции на этом промежутке соответствует большее (меньшее) значение функции.

Например, функция $y = x^2$ возрастающая при $x > 0$ и убывающая при $x < 0$.

Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными.*

3. Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \cos x$ ограничена на всей числовой оси, т. к. $|\cos x| \leq 1$.

4. Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если $f(x+T) = f(x)$.

Например, все тригонометрические функции периодические и имеют период, равный 2π.

3.3 Классификация функций. Элементарные функции

Функция y называется *явной* или заданной в явном виде, если в левой части функциональной зависимости стоит y в первой степени, а правая часть не содержит y: $y = f(x)$.

Например, $y = x^n + \operatorname{tg}(\ln x)$.

Функция y аргумента x называется *неявной* или *неявно заданной,* если в одной или обеих частях функционального равенства встречаются и y и x: $f(x, y) = 0$.

Например, $xy + \sqrt{x/y} = 0$.

Обратная функция.

Пусть $y = f(x)$ – явно заданная функция и пусть из представленной зависимости можно выразить x как явную функцию от y: $x = \varphi(y)$. В этом случае $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$ называется *обратной функцией* по отношению к функции $y = f(x)$.

Можно показать, что для любой монотонной функции существует обратная функция.

Заметим, что график обратной функции симметричен графику функции относительно биссектрисы первого координатного угла. Для примера на рис. 3.1 показан график функции $y = a^x$ и график обратной к ней функции $y = \log_a x$.

Сложная функция.

Пусть функция $y = f(u)$ является функцией от переменной u, которая в свою очередь является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x. Тогда функция y: $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* от x (*функцией от функции*).

Например, функция $y = \ln \operatorname{tg} x$ сложная, т. к. она может быть представлена в виде $y = \ln u$, где $u = \operatorname{tg} x$.

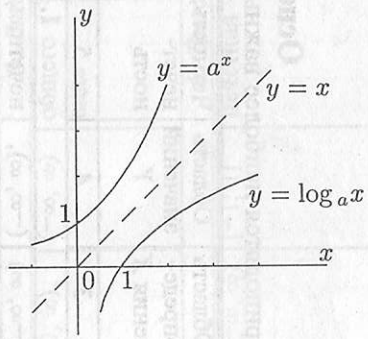
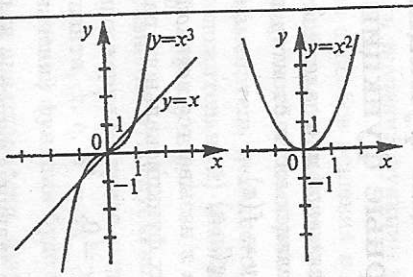
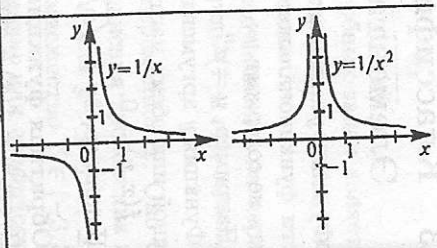


Рис. 3.1: Обратные функции

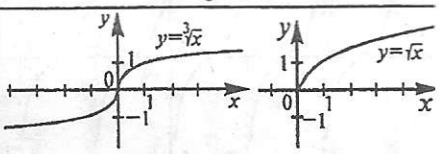
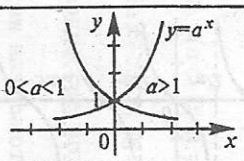
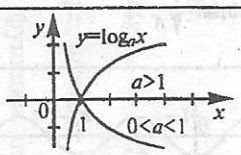
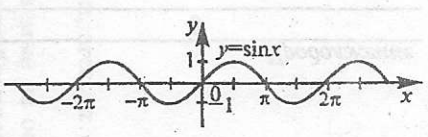
Таблица 1.3.1

Основные элементарные функции

В таблице приводятся наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций.

№ п/п	Обозначение функции	Область определения X	Область значений Y	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1	2	3	4	5	6	7	8
			1. *Степенная функция*				
1	$y = x^n$, $n \in N$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$, если n — нечетно; $[0; \infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	возрастает на $(-\infty, \infty)$, если n — нечетно; убывает на $(-\infty, 0]$, возрастает на $(0, \infty)$, если n — четно	непериодическая	
2	$y = x^{-n}$, $n \in N$	$(-\infty,0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0,\infty)$, если n — нечетно; $[0; \infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; четная, если n — четно	убывает на $(-\infty, 0)$ и на $(0, \infty)$, если n — нечетно; возрастает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0, \infty)$, если n — четно	непериодическая	

Продолжение

1	2	3	4	5	6	7	8
3	$y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n>1$	$(-\infty,\infty)$, если n— нечетно; $[0; \infty)$, если n— четно	$(-\infty, \infty)$, если n — нечетно; $[0; \infty)$, если n — четно	нечетная, если n — нечетно; общего вида, если n — четно	возрастает на $(-\infty; \infty)$, если n — нечетно; возрастает на $[0; \infty)$, если n — четно	непериодическая	
			2. *Показательная функция*				
4	$y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)	$(-\infty, \infty)$	$(0; \infty)$	общего вида	возрастает на $(-\infty; \infty)$, если $a>1$; убывает на $(-\infty; \infty)$, если $0<a<1$	непериодическая	
			3. *Логарифмическая функция*				
5	$y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$)	$(0; \infty)$,	$(-\infty, \infty)$	общего вида	возрастает на $(0; \infty)$, если $a>1$; убывает на $(0; \infty)$, если $0<a<1$	непериодическая	
			4. *Тригонометрические функции*				
6	$y=\sin x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1; 1]$	нечетная	возрастает на $[-\pi/2+2\pi n, \pi/2+2\pi n]$; убывает на $[\pi/2+2\pi n, 3\pi/2+2\pi n]$, $n \in N$	Период $T=2\pi$	

Продолжение

1	2	3	4	5	6	7	8
7	$y=\cos x$	$(-\infty, \infty)$	$[-1; 1]$	четная	возрастает на $[-\pi+2\pi n, 2\pi n]$, убывает на $[2\pi n, \pi+2\pi n]$ $n\in N$	Период $T=2\pi$	
8	$y=\operatorname{tg} x$	$(-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n)$; $n\in Z$	$(-\infty, \infty)$	нечетная	возрастает на $(-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n)$; $n\in Z$	Период $T=\pi$	
9	$y=\operatorname{ctg} x$	$(\pi n, \pi+\pi n)$; $n\in Z$	$(-\infty, \infty)$	нечетная	убывает на $(\pi n, \pi+\pi n)$; $n\in Z$	Период $T=\pi$	

5. *Обратные тригонометрические функции*
$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$

Элементарные функции.

К *основным элементарным функциям* относятся:

- *Степенная:* x^n, x^{-n} $(n \in N)$ и $\sqrt[n]{x}$ $(n \in N;\ n > 1)$.
- *Показательная:* a^x $(a > 0;\ a \neq 1)$.
- *Логарифмическая:* $\log_a x$ $(a > 0;\ a \neq 1)$.
- *Тригонометрические:* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.
- *Обратные тригонометрические:* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями называются функции, получаемые из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции.

3.4 Преобразование графиков функций

В практических задачах, математические модели которых сводятся к анализу функций, часто приходится иметь дело с преобразованием графиков. Эти преобразования могут заключаться в сдвигах графиков вдоль координат x или y и к изменению "пологости" графиков, т. е. изменению углов наклона касательных к ним.

Рассмотрим, какие факторы и каким образом влияют на положение кривых на плоскости и на их форму.

Пусть исходная кривая описывается функциональной зависимостью

$$y = f(x).$$

На рис. 3.2 исходная кривая, отмеченная знаком (0), представляет собой параболу $y = x^2$.

1. **Сдвиг графика функции вдоль направления оси абсцисс** осуществляется путем вычитания из координаты x величины a.

$$y = f(x - a).$$

При $a > 0$ график сдвигается в сторону положительного направления x; при $a < 0$ – в противоположную сторону.

На рис. 3.2 знаком (1) помечена кривая, для которой $a = 2$.

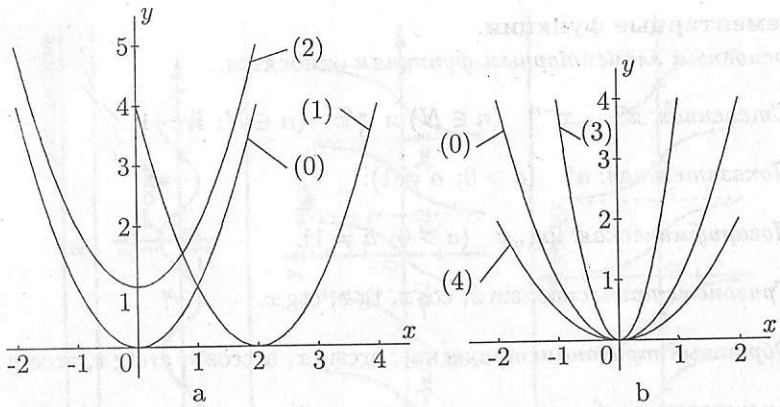


Рис. 3.2: Преобразование графиков

2. Сдвиг графика функции вдоль направления оси ординат осуществляется путем вычитания из координаты y величины b. При $b > 0$ график сдвигается в сторону положительного направления оси y; при $b < 0$ – в противоположную сторону.

На рис. 3.2 знаком (2) помечена кривая, для которой $b = 1$.

3. Изменение угла наклона касательной к графику функции к осям координат осуществляется путем умножения координат x или y на постоянные множители. При этом если координату x умножить на $m > 1$ то угол наклона касательной к оси абсцисс увеличится. При умножении y на $n > 1$ – угол наклона уменьшится. Таким образом угол наклона касательной к графику функции можно менять, варьируя параметры m и n в выражении

$$ny = f(mx).$$

На рис. 3.2 цифрой (3) отмечен график функции $y = (2x)^2$, а цифрой (4) – график функции $2y = x^2$.

3.5 Интерполирование функций

Во многих (в том числе и даже особенно экономических) задачах функциональные зависимости задаются в табличном виде. Характерная особенность такого вида задания функций состоит в том, что связь между независимой x и зависимой y переменными задается лишь в отдельных точках.

Если для значений x, не совпадающих с заданными, требуется определить соответствующие значения y, то возникает вопрос: как это сделать?

Задача определения значений y по соответствующим нетабличным значениям x – это и есть задача *интерполирования*.

Пусть некоторой таблично заданной функцией $y = f(x)$ трем заданным значениям независимой переменной x, а именно (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}), поставлены в соответствие три значения y : (y_{k-1}, y_k, y_{k+1}).

Простейший вариант решения задачи интерполирования сводится к тому, что для $x \in [x_{k-1}, x_k]$ функция y принимается равной или y_{k-1}, или y_k. В результате такой интерполяции получаем ступенчато-постоянную функцию, график которой отмечен на рис. 3.3 цифрой (1).

Наибольшее распространение получило *линейное* интерполирование, которое сводится к тому, что через табличные точки проводятся прямые.

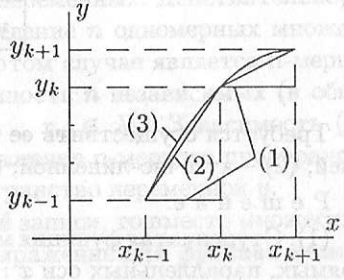


Рис. 3.3: Интерполирование

Пусть точки (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k) соединены прямой $y = ax + b$. Из условия прохождения прямой через две заданные точки (координаты этих точек должны обращать уравнение прямой в тождество) получаем систему двух уравнений с неизвестными a и b:

$$\begin{cases} y_{k-1} = ax_{k-1} + b, \\ y_k = ax_k + b. \end{cases}$$

Решая эту систему, определяем a и b, после чего уравнение прямой запишется в виде

$$y = (x - x_{k-1})\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + y_{k-1}.$$

Чтобы получить уравнение прямой, проходящей через следующую пару точек, достаточно в полученном уравнении к индексу k, который пробегает значения от 0 до n (n – номер последней точки), прибавить единицу.

На рис. 3.3 цифрой (2) помечена ломаная прямая, соответствующая линейной интерполяции.

Линейная интерполяция дает возможность описать функциональную зависимость более точно, чем при кусочно-постоянной интерполяции. Тем не менее в некоторых задачах и она не дает достаточной точности.

Следующим шагом в повышении точности аналитического описания функции, заданной таблично, является *квадратичная интерполяция* параболической кривой $y = ax^2 + bx + c$. Коэффициенты a, b и c находятся

из условия, что парабола проходит через три точки (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}). Подстановка этих координат в уравнение параболы дает возможность получить систему трех уравнений с тремя неизвестными a, b и c, из которой найти затем эти неизвестные. Из-за неоправданной громоздкости преобразований и получаемых соотношений они здесь не приводятся.

На рис. 3.3 цифрой (3) отмечена кривая квадратичной интерполяции.

Пример. Функция $y = f(x)$ задана таблицей

x	1	2	3
y	0,5	2	2,5

Требуется осуществить ее интерполирование: (1) – ступенчатой функцией; (2) – кусочно-линейной; (3) – квадратичной.

Р е ш е н и е.

(1). Ступенчатая функция может быть представлена совокупностью двух прямых, параллельных оси x :

$$y = \begin{cases} 0,5, & \text{если } x \in [1,2), \\ 2, & \text{если } x \in [2,3]. \end{cases}$$

(2). Линейная интерполяция представляется зависимостью

$$y = \begin{cases} 1,5x - 1, & \text{если } x \in [1,2), \\ 0,5x + 1, & \text{если } x \in [2,3]. \end{cases}$$

В справедливости последних соотношений легко убедиться. Они обращаются в тождества подстановкой координат табличных точек.

(3). Квадратичная интерполяция приводит к зависимости

$$y = -0,5x^2 + 3x - 2,$$

которая обращается в тождество при табличных значениях координат.

Интерполирующие зависимости рассмотренного примера изображены графиками рис. 3.3. Примеру соответствуют следующие данные: $x_{k-1} = 1$; $x_k = 2$; $x_{k+1} = 3$; $y_{k-1} = 0,5$; $y_k = 2$; $y_{k+1} = 2,5$.

3.6 Функции нескольких переменных

Рассмотренные в предыдущих разделах функциональные зависимости $y = f(x)$ предполагали соответствие между элементами x и y, принадлежащими двум множествам: $x \in X$; $y \in Y$.

Упомянутую функциональную зависимость называют *отображением* множества X в множество Y и обозначают

$$f : X \longrightarrow Y. \tag{3.2}$$

Такое обозначение позволяет формально обобщить понятие функции одной переменной на функции нескольких переменных. Действительно, заменим множество X на декартово произведение n одномерных множеств $X = X_1 \otimes X_2 \otimes \ldots \otimes X_n$. Множество X в этом случае является n-мерным множеством и представляет собой совокупность n независимых (в общем случае) переменных $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $\ldots$, $x_n \in X_n$. Зависимость (3.2) будет при этом представлять собой отображение n-мерного пространства переменных $u, v, w \ldots$ на одномерное пространство переменной y.

Если вновь вернуться к функциональной записи, то вместо множественного отображения (3.2) можно записать выражение для *функции нескольких переменных*

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Функция двух переменных может интерпретироваться как некоторая переменная y, значение которой зависит от положения точки (x_1, x_2) на координатной плоскости. Если функция однозначна, то каждой точке плоскости будет соответствовать конкретное значение функции (рис. 3.4).

Графиком такой функции будет множество точек, лежащих на некоторой трехмерной поверхности. Уравнение этой поверхности можно представлять в явном

$$y = f(x_1, x_2),$$

или неявном

$$F(x_1, x_2, y) = 0$$

видах.

Примером поверхности в трехмерном пространстве может служить сферическая поверхность (в координатах x, y, z):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r – радиус сферы.

Если в уравнении поверхности, в n-мерном пространстве принять одну из переменных равной постоянной величине, то в результате размерность рассматриваемого пространства снизится на единицу. Функция n переменных превратится в функцию $(n-1)$ переменной. Так, если в приведенном выше уравнении сферы положить $z = c$, то уравнение преобразуется к виду

$$x^2 + y^2 = (r - c)^2,$$

а это – уравнение окружности с радиусом $(r - c)$.

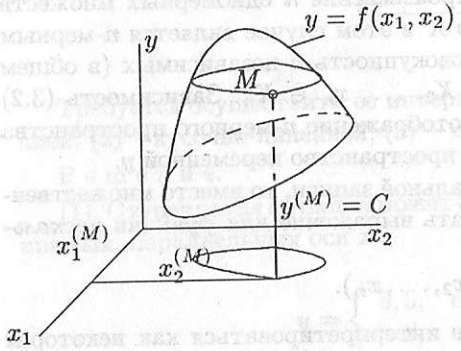


Рис. 3.4: Функция двух переменных

Линией уровня функции $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных называется множество точек на плоскости таких, для которых значение y равно некоторой постоянной C.

Геометрически линии уровня представляют собой кривые, получаемые в сечении поверхности (рис. 3.4) плоскостями, перпендикулярными оси y и отстоящими от плоскости x_1x_2 на расстоянии $y^{(M)} = C$.

На рисунке показана линия уровня, проходящая через точку M, и ее проекция на координатную плоскость x_1x_2. Проекция линии уровня это по существу та же линия ур я, но перенесенная параллельно самой себе на координатную плоскость.

Линиями уровня обычно на географических картах соединяют точки поверхности, имеющие одинаковые высоты по отношению к уровню моря.

3.7 Вопросы

1. Что такое множество? Что собой представляют элементы множества? Точки множества?
2. Как символически записать: “a” является элементом множества A? B является подмножеством A?
3. Что такое равные множества? Нулевое множество?
4. Что называется объединением множеств? Пересечением? Приведите примеры. Изобразите объединение и пересечение плоскостей схематично.
5. Какие множества называются числовыми?
6. С помощью символики теории множеств покажите, как связаны между собой множества чисел: действительных, рациональных, иррациональных, целых, натуральных.
7. Как связаны между собой числа и точки на числовой оси?
8. Что называется функцией?
9. Какие переменные называются независимыми? Зависимыми?
10. Что такое область определения функции? Область значений?
11. Перечислите способы задания функции и воспроизведите их на примерах.
12. Какие функции называют четными? Нечетными? Приведите примеры.
13. Какие функции называют монотонными? Возрастающими? Убывающими? Проиллюстрируйте сказанное графическими построениями.
14. Приведите примеры ограниченных функций.
15. Какие функции называются периодическими?
16. Что называется обратной функцией? Как получить функцию, обратную к заданной?
17. Как в декартовой системе координат изображается график обратной функции по отношению к заданной?

18. Что такое сложная функция?

19. Какие функции называются элементарными?

20. Перечислите все основные элементарные функции.Запишите их аналитические выражения. Изобразите графически.

21. Определите области допустимых значений основных элементарных функций; установите их четность и нечетность.

22. Какие из основных элементарных функций являются периодическими. Установите их периоды. Поясните на графиках.

23. Как осуществить перенос графика функции параллельно оси абсцисс? Параллельно оси ординат?

24. Как изменить угол наклона к осям координат касательной к графику функции?

25. Что называется интерполированием? Для чего оно необходимо?

26. Что собой представляет интерполирование кусочно-постоянными функциями? Линейными? Квадратичными? Проиллюстрируйте сказанное графически.

27. Что такое декартово произведение? Как графически представить декартово произведение двух величин? Трех величин?

28. Дайте определение функции нескольких переменных.

29. Как понимать смысл понятий: явное и неявное задание функций одной переменной? Нескольких переменных?

30. Что собой представляет график функции двух переменных в декартовой ортогональной системе координат?

31. Что называется линией уровня?

3.8 Упражнения

К разделу 3.1

1. Даны два множества: $A = \{0, 2, 3, 5, 6, 8\}$ и $B = \{1, 2, 4, 6, 7\}$. Получить множества $A \cap B$ и $A \cup B$.

2. Вершина равностороннего треугольника совпадает с центром окружности, радиуса R. Сторона треугольника равна $2R$. Определить площади круга S_o и треугольника $S_т$. Найти площади, соответствующие их пересечению и объединению.

3. На числовой прямой заданы отрезки: $A = \{(-3, 0)\}$; $B = \{(-1, 4]\}$; $C = \{[1, 4\}$; $O = \{[0]\}$; $P = \emptyset$. Найти $A \cap O$; $A \cap B$; $A \cup B$; $C \cap O$; $C \cup P$; $C \cap P$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cap C$.

4. Образуйте все возможные подмножества множества {1, 2, 3}.

5. Поясните на графике, из каких элементов состоит множество точек переменной x, которые удовлетворяют условию $\cos x > 0,5$.

К разделу 3.2

1. Найти область определения функций:

$$1)\ y = \sqrt{x} + \lg(2x - 5) - \frac{1}{x - 3}; \qquad 2)\ y = \sqrt[3]{x + 2} - \frac{x}{\lg(1 - x)}.$$

2. Найти область значений функций:

$$1)\ y = \sin x - 2\cos x; \qquad 2)\ y = \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2}.$$

3. Исследовать функции на четность и нечетность:

$$3)\ y = x^3 \sin x; \quad 4)\ y = x - x^3 + 5x^5; \quad 5)\ y = \lg\frac{1 + x}{1 - x};$$

$$6)\ y = x + \sin x; \quad 7)\ y = x^2 + \sin x; \quad 8)\ y = x^2 + \cos x.$$

К разделу 3.3

Найти область определения; область значений; выяснить четность; найти наименьший период и построить графики функций:

$$1)\ y = -2x^2; \quad 2)\ y = -2(x + 3)^2 + 1; \quad 3) y = -2x^2 + 5x - 2;$$

4) $y = \frac{2}{x}$; 5) $y = \frac{2}{x-1} - 2$; 6) $\frac{4x-3}{x-1}$;

7) $y = \log_{0,5}(2x)$; 8) $y = \log_{0,5}(-2x)$;

9) $y = \sin 2x$; 10) $y = \sin x + \cos(x - \pi/3)$.

К разделам 3.4 - 3.5

1. Функцию $y = x^2 - 2x - 8$ преобразовать так, чтобы ее график по отношению к заданному
   1) сместился влево на 1;
   2) поднялся вверх на 9;
   3) уменьшил угол наклона касательной к оси x в два раза;
   4) одновременно удовлетворил условиям пунктов 1-3.

2. Осуществить интерполяцию функции $y = f(x)$, заданной таблично

x	-1	0	1	2	3
y	0,5	0	0,5	2	2,5

следующими функциями:

a) кусочно-постоянными;
b) линейными;
c) квадратичными.

Глава 4

Непрерывность и пределы

4.1 Предел числовой последовательности

Если по некоторому закону каждому числу $n \in N$ поставлено в соответствие определенное число $a_n \in \Re$, то это означает, что задана *числовая последовательность*:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Число a_n называют *общим* или n*-ным* членом последовательности.

Если для любого n справедливо соотношение $a_n < a_{n-1}$, то последовательность называется *монотонно убывающей;* если $a_n > a_{n-1}$, – *монотонно возрастающей.*

Примерами монотонных последовательностей могут служить последовательности, образованные членами геометрических прогрессий. Если знаменатель прогрессии $q < 1$, то последовательность убывающая (и ограниченная):

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \ldots.$$

при $q > 1$ – возрастающая (и неограниченная):

$$1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \ldots, \left(\frac{3}{2}\right)^n, \ldots$$

Последовательность 1, 0, 1, 0, ... хотя и ограниченная, но монотонной не является.

Рассмотрим последовательность

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \ldots . \tag{4.1}$$

Члены этой последовательности, оставаясь поочередно больше или меньше единицы, последовательно приближаются к ней при возрастании n. Единица для этой последовательности является тем числом, к которому стремится последовательность при неограниченном росте n.

Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ справедливо неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Изложенное определение математически представляется выражением

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, не имеющая предела – *расходящейся*.

Введенное в определении последовательности число ε называют ε-окрестностью числа A. Название связано с его геометрическим смыслом. Действительно, любому числу можно поставить в соответствие точку на числовой прямой. Тогда неравенству (4.2) (или $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$) на числовой прямой будут соответствовать отрезки, отстоящие от точки A на расстоянии, не превышающем ε.

Пример. Используя определение, доказать, что последовательность (4.1 сходится к единице.

Р е ш е н и е. Запишем условие $\left|\left(1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right)\right| < \varepsilon$, вытекающее из определения числовой последовательности. Или $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Из последнего условия следует $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Ясно, что каким бы малым не было число ε, всегда можно найти натуральное число $N = n$, которое будет больше дроби $1/\varepsilon$ с неравным нулю знаменателем.

4.2 Последовательности в пространствах E_n

Если вместо одномерного пространства, которое образует числовая последовательность, рассмотреть n-мерное евклидово пространство E_n, то окрестность, представляющую собой отрезок прямой на числовой оси, следует заменить на ε-окрестность рассматриваемого пространства.

Для двумерного евклидова пространства E_2 эта окрестность может быть отождествлена с кругом, ограниченным окружностью как угодно малого радиуса $\rho = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$ (теорема Пифагора).

Здесь ε_1 и ε_2 – линейные размеры ε-окрестности в двух направлениях координатных линий x и y (рис. 4.1).

Если сколь угодно малый отрезок по направлению k-той координатной линии n-мерного евклидова пространства обозначить через ε_k, то радиус сколь угодно малой окрестности этого пространства определится по формуле

$$\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2}.$$

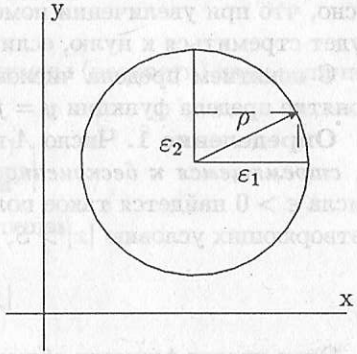


Рис. 4.1: ε-окрестность в E_2

Пусть задана последовательность точек $M_1(x_1, y_1, \ldots)$, $M_2(x_2, y_2, \ldots)$, $\ldots$, $M_n(x_n, y_n, \ldots), \ldots$.

Последовательность точек $\{M_n\}$ или $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ евклидова пространства E_n называется *сходящейся*, если существует точка $A(x_a, y_a, \ldots)$ такая, что для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать номер N, начиная с которого (при $n > N$) все точки последовательности будут находиться в ε-окрестности точки A.

Условие попадание точки M_k в ε-окрестность точки A :

$$\rho(M_k, A) = \sqrt{\left(x_1^{(k)} - x_1^{(a)}\right)^2 + \left(x_2^{(k)} - x_2^{(k)}\right)^2 + \ldots + \left(x_n^{(k)} - x_n^{(k)}\right)^2} < \varepsilon.$$

Точка A называется *пределом числовой последовательности* $\{M_k\}$

$$\lim_{k\to\infty} M_k = A.$$

Для сходящейся последовательности $\{M_k\}$ точек пространства E_n спра
ведлива

Теорема. *Для того, чтобы последовательность точек* $\{M_k\}$ $(k = \overline{1,\infty})$ *евклидова пространства* E_n *сходилась в точке* $A\left(x_1^{(a)}, x_2^{(a)}, \ldots, x_n^{(a)}\right)$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательности координат то чек* $\{x_1^{(k)}\}, \{x_2^{(k)}\}, \ldots, \{x_n^{(k)}\}$ *сходились к соответствующим координата* $x_1^{(a)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ *точки* A.

4.3 Предел функции

В предыдущем разделе приведены примеры геометрической прогрессии Ясно, что при увеличении номера члена прогрессии ее n-й член $b_n = b_0 q$ будет стремиться к нулю, если $q < 1$, и к бесконечности, если $q \geq 1$.

С понятием предела числовой последовательности $a_n = f(n)$ связан понятие предела функции $y = f(x)$.

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *пр* x, *стремящемся к бесконечности*, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число S, что для всех x, удов летворяющих условию $|x| > S$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (4.3$$

Этот предел функции обозначается

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции при $x \to \infty$ можно понять и рис. 4.2,а.

Неравенство (4.3) равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, соответствующему расположению части графика при $x > S$ полосе шириной 2ε.

З а м е ч а н и е. Сформулированное определение предполагало не ограниченное возрастание переменной x по абсолютной величине. В ряд задач приходится иметь дело с частными случаями: $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ Теорема остается справедливой в обоих отмеченных случаях, но в запис выражения для предела необходимо у символа бесконечности ставить со ответствующий знак.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + a^{-x}) = 1$ при $a > 1$.

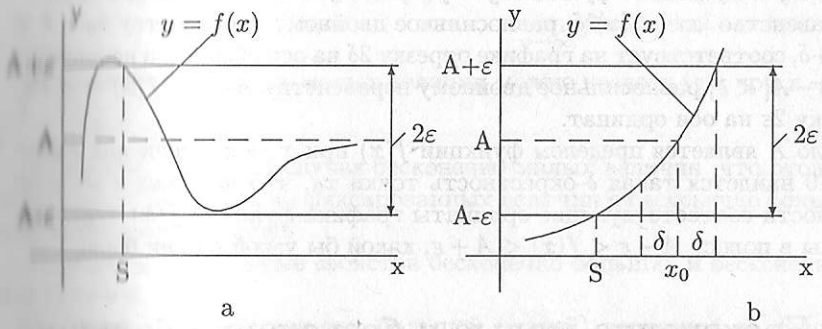


Рис. 4.2: Предел функции

Р е ш е н и е. Учитывая то, что модуль суммы (разности) двух величин не больше суммы их модулей, получим

$$|1 + a^{-x} - 1| = \left|\frac{1}{a^x}\right|.$$

Используем определение предела 4.3, запишем

$$\left|\frac{1}{a^x}\right| \leq \varepsilon,$$

$$\left|a^x\right| \geq \varepsilon.$$

Это неравенство, очевидно, выполнимо при условиях определения пре-

Определение 2. Число A называется *пределом функции в точке* $x =$ x_0, т. е. при x, стремящимся к x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Математическая запись сформулированного определения:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл ε-окрестности переменной x, δ-окрестности переменной y и предела A функции $y = f(x)$ следует из графика рис. 4.2,b.

Неравенство $|x - x_0| < \delta$, равносильное двойному неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, соответствует на графике отрезку 2δ на оси абсцисс, а неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, равносильное двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, – отрезку 2ε на оси ординат.

Число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в полосу $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, какой бы узкой она ни была.

4.4 Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0.$$

В качестве бесконечно малых величин можно назвать $\lg x$ при $x \to 1$, $\cos x$ при $x \to \pi/2$, $\dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty \ldots$

Следует четко представлять разницу между очень маленькой величиной и бесконечно малой. Как бы ни была мала даже очень маленькая, но фиксированная величина, всегда можно задать величину, меньшую ее, например, поделив очень маленькую величину на два. Поэтому, по определению предыдущего раздела, эта величина не может иметь предела, равного нулю.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ в некоторой точке (конечной или бесконечной) имеет предел, равный A, то эту функцию можно представить в виде суммы числа A и какой-либо бесконечно малой в этой точке величиной $\alpha(x)$*

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Утверждение теоремы очевидно, т. к. для любого как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ по определению предела функции будет выполняться условие $|f(x) - A| < \varepsilon$, и по определению бесконечно малой величины будет выполняться аналогичное условие $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, если для нее выполняются условия

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty, \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

В качестве бесконечно малых величин можно назвать $\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi/2$, при $x \to 1 \ldots$

Оговорим, как и для случая бесконечно малых величин, что отождествление очень больших, но фиксированных величин с бесконечно большими величинами некорректно.

Перечислим некоторые свойства бесконечно больших и бесконечно малых величин.

1. Произведение бесконечно большой (малой) величины на функцию, предел которой отличен от нуля (бесконечности), есть величина бесконечно большая (малая).

2. Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

3. Частное от деления бесконечно большой (малой) величины на функцию, имеющую предел (для малой – отличный от нуля) в рассматриваемой точке, есть величина бесконечно большая (малая).

Существует легко доказываемая теорема о связи бесконечно больших и бесконечно малых величин.

Теорема 2. *Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to x_0$ или $x \to \infty$, то функция $f(x) = 1/\alpha(x)$ есть величина бесконечно большая при $x \to x_0$ или $x \to \infty$. И наоборот.*

Например, функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi$ отвечают условию теоремы.

4.5 Теоремы о пределах

Пусть две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при $x \to x_0$ или при $x \to \infty$ (возможность последнего случая будем подразумевать, но не оговаривать каждый раз):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A; \qquad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = B.$$

Сформулируем без доказательств основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + \varphi(x)] = A + B.$$

Теорема 2. Предел произведения конечного числа функций равен пр изведению пределов этих функций

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)] = A\cdot B.$$

В частном случае из сформулированной теоремы следует, что пост янный множитель можно выносить за знак предела (предел постоянно величины равен самой постоянной).

$$\lim_{x\to x_0}[cf(x)] = cA.$$

Теорема 3. Предел частного от деления двух функций равен частн му от деления пределов этих функций при условии, что предел делите отличен от нуля

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

З а м е ч а н и е. При использовании теорем 1 – 3 для решения зад следует иметь в виду, что при существовании пределов сумм, произведени и частных от деления двух функций не означает, что существуют пред лы самих функций, т. е. сформулированные теоремы не имеют обратно действия.

Например,

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x) = \lim_{x\to x_0}1 = 1,$$

хотя $\lim\limits_{x\to\pi/2}\operatorname{tg}x = \infty$, т. е. не существует.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x+5}{x-5}$={используем свойства сформулированных те рем} $= \dfrac{3\lim\limits_{x\to-1}x+5}{\lim\limits_{x\to-1}x-5} = \dfrac{3\cdot(-1)+5}{-1-5} = -\dfrac{1}{3}$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x+5}{x-5}$={подстановка предельного значения $x=5$ выражение под знаком предела дает результат, из которого видно, ч числитель равен конечной величине 20, а знаменатель – 0. Деление коне ной величины на бесконечно малую в результате дает бесконечно большу величину}=∞.

Отметим, что при определении пределов сумм, произведений и частн от делений двух функций нередко возникают неопределенности в вычисл нии пределов. Такие ситуации возникают в случаях, когда функции, сто щие под знаком пределов, в рассматриваемой точке бесконечно малы и бесконечно большие.

$\left(\frac{0}{0}\right)$ — “ноль делить на ноль”;

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ — “бесконечность делить на бесконечность”;

$(0\cdot\infty)$ — “ноль умножить на бесконечность”;

(0^0) — “ноль в степени бесконечность”;

(∞^0) — “ бесконечность в нулевой степени”;

(1^∞) — “ноль в нулевой степени”;

(∞^0) — “единица в степени бесконечность”;

$(\infty-\infty)$ — “бесконечность минус бесконечность”.

Неопределенности называют и обозначают следующим образом:

Существует множество способов “раскрытия” неопределенностей, т. е. преобразование функций, стоящих под знаком предела, к выражению, пре- которого можно вычислить.

Продемонстрируем эти способы на конкретных пределах вычисления

Пример 3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^2} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ = {для раскрытия неопределенно разложим числитель на множители и сократим дробь на $(x-1)$: сокра- правомерно, т. к. при $x\to1$ $(x-1)$ стремится, но не равен нулю}

$$\lim\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1}\frac{2x+1}{x-1} = \infty.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ = {для раскрытия неопреде- умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю}$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} =$

$$\lim\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} = \lim_{x\to2}\frac{2}{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})} = \frac{1}{8}.$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ = {для раскрытия неопределенности к новой переменной $t=\sqrt[6]{x}$. Тогда $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$; при $x\to$ $1,\ t\to1$} $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{t^3-1}{t^2-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{t^2+t+1}{t+1} = \dfrac{3}{2}$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^3+2} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ = {для раскрытия неопределенности

вынесем переменную x^3 (в наибольшей степени, в которой входит x в чи
литель и знаменатель) и сократим на нее}$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^{-1}-x^{-3}}{1+2x^{-3}} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{0-0}{1+0} = \infty.$

В отношении последнего примера отметим общее правило.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \begin{cases} 0, & \text{если } n < m, \\ a_n/b_m, & \text{если } n = m, \\ \infty, & \text{если } n > m \end{cases}$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+\sin x}{x-\cos x} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} =$ {для раскрытия неопределе
ности разделим числитель и знаменатель на x}$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3+\frac{\sin x}{x}}{x-\frac{\cos x}{x}} =$

$=\{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$, т. к. в числителе этих выражений ст
ят ограниченные функции, а в знаменателях – неограниченные$\}=$

$= \dfrac{2+0}{1-0} = 2.$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \{\infty - \infty\} =$ {умножим и разд
лим функцию, стоящую под знаком предела, на сопряженную ей функцию}

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} = 0.$

Пример 9. $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right) = \{\infty - \infty\} =$ {приводим выражени
к общему знаменателю}$= \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(1-x)-2}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$= -\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{1+x} = -\dfrac{1}{2}.$

В приведенных примерах использованы лишь некоторые характерн
подходы к раскрытию неопределенности. Читатель должен был понять, ч
раскрытие неопределенности "дело нехитрое", но требует определенно
навыка и сообразительности.

Существуют два предела, к которым сводятся многие задачи на оты
кание предела и называемые *замечательными пределами*. Раскрытие н
определенности в этих пределах требует нетрадиционного подхода.

4.6 Первый замечательный предел

Первым замечательным пределом называется

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{4.4}$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (4.4), рассмотрим круг, радиуса R (рис. 4.3) и построим на нем два прямоугольных треугольника, площади которых обозначим: $S_1 = S_{\triangle OAB}$; $S_2 = S_{\triangle OCD}$.

Площади этих треугольников выразим через угол x при вершине O:

$$S_1 = \frac{1}{2}R^2 \sin x; \qquad S_2 = \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x.$$

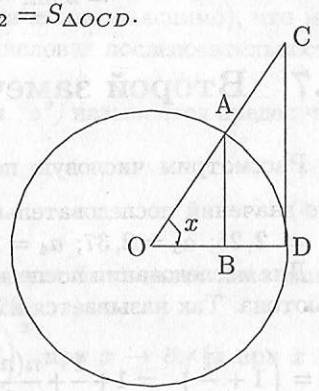


Рис. 4.3: Первый замечательный предел

Площадь сектора OAD: $S_c = \dfrac{1}{2}R^2 x$.

Запишем очевидные неравенства

$$S_1 < S_c < S_2, \qquad \text{или}$$

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x.$$

Разделим все части неравенства на $\frac{1}{2}R^2 \sin x > 0$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

и запишем соответствующее неравенство для обратных функций (знаки неравенств при этом изменятся на противоположные):

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Перейдем к пределу в полученном неравенстве, устремляя x к нулю. Так как $\lim\limits_{x\to0} \cos x = 1$, то получим

$$1 < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Отсюда следует формула (4.4).

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}=$ {умножим и разделим функцию на x с соот-
ветствующими множителями и используем свойство предела функции о
произведения}=

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\cdot 3\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=3\cdot 1\cdot 1=3.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{(x/2)}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

4.7 Второй замечательный предел

Рассмотрим числовую последовательность $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Вычисле
ние значений последовательности дает следующие результаты: $a_1=2,0$
$a_2=2,25$; $a_3=2,37$; $a_4=2,441$; $a_5=2,488;\ldots$

Для исследования последовательности воспользуемся формулой бином
Ньютона. Так называется известное в математике равенство

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}+\ldots$$

Здесь $n!$ (читается "эн факториал") представляет собой произведени
всех натуральных чисел от 1 до n. Принято считать $0!=1!=1$.

Бином Ньютона без труда приводится к соотношению

$$a_n=2+\frac{1}{1!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+\ldots$$

Как видно из последней формулы, с ростом n увеличивается число поло
жительных слагаемых. Поэтому между членами последовательности мож
но поставить знаки неравенства $a_{n-1}<a_n$, т. е. последовательность во
растающая.

Дадим оценку n-го члена последовательности. Из последнего соотноше
ния следует неравенство

$$a_n<2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots<2+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Сумма, стоящая в правой части неравенства, — это сумма членов гео
метрической прогрессии с первым членом $b=1/2$ и знаменателем $q=1/2<$

По известной из школьного курса математики формулы суммы членов
арифметической прогрессии получим

$$S_{n-1}=\frac{b(1-q^{n-1})}{1-q}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

Так как $S_{n-1}<1$, то $a_n<2+1=3$, т. е. рассматриваемый предел
ограничен сверху числом 3.

В теории пределов доказывается (и это логически объяснимо), что мо-
нотонно возрастающая ограниченная сверху числовая последовательность
имеет предел.

Вторым замечательным пределом (числом "e") называется предел чи-
словой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{4.5}$$

Число e является иррациональным — оно может быть вычислено лишь
приближенно, но с любой точностью (e=2,718281...).

Можно показать, что функция $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ (и при $x\to$
$-\infty$) имеет предел, равный числу e, т. е.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{4.6}$$

Заменим переменную в последнем пределе. Пусть $x=1/u$. Тогда при
$x\to\pm\infty$ $u\to 0$. В результате получим еще одну запись второго замеча-
тельного предела

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u}=e. \tag{4.7}$$

Число e, введенное впервые русским математиком Л. Эйлером, играет
заметную роль во многих разделах математики и ее приложениях, в том
числе и экономических задачах.

Это число является, в частности, основанием так называемого *нату-
рального логарифма*, имеющего в литературе свое обозначение $\log_e x=\ln x$.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{(x/2)}\right)^{(x/2)\cdot 6}=$

$$=\left[\lim_{(x/2)\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x/2)}\right)^{(x/2)}\right]^6=e^6.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{3/x} = \lim\limits_{x\to 0}[1-(2x)]^{(1/2x)\cdot 6} =$

$$= \left(\lim_{2x\to 0}[1-(2x)]^{(1/2x)}\right)^6 = e^6.$$

Пример 3 (задача о непрерывном начислении процентов). Первоначальный вклад в банк составил Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно $p\%$ годовых. Найти размер вклада через n лет.

Р е ш е н и е. Обозначим для простоты преобразований $p = \dfrac{p\%}{100}$.

Размер вклада ежегодно будет увеличиваться в $(1+p)$ раз, т. е.

$$Q_1 = Q_0(1+p);\ Q_2 = Q_1(1+p) = Q_0(1+p)^2; \dots \quad Q_n = Q_0(1+p)^n.$$

Если начислять проценты по вкладам не один, а k раз в году, то при том же ежегодном приросте p начисление за первую часть (из k частей) года составит p/k, а размер вклада за n лет при общем количестве начислений, равном kn, составит

$$Q_n = Q_0(1+p)^{kn}.$$

Если начисления производить раз в году, то $k = 1$, два раза в год $k = 2, \dots$ ежемесячно – $k = 12$, ежедневно –$k = 365$, ежечасно – $k = 8760, \dots$ Если начисления производить непрерывно, то $k = \infty$. Тогда размер вклада за n лет составит (Q_0 – постоянная величина, которую можно выносить за знак предела)

$$Q_n = Q_0 \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{k}\right)^{kn} = Q_0 e^{pn}.$$

Полученная формула выражает *экспоненциальный закон* роста (при $p > 0$) или убывания (при $p < 0$) и в экономике используется для непрерывного начисления процентов, в частности, при обосновании и выборе инвестиционных решений.

4.8 Предел функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $f(M) = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ n переменных, связанных с евклидовым пространством E_n. Пусть $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – точка этого пространства с ε-окрестностью.

Число b называется *пределом функции* $f(M)$ в точке A, если для любой последовательности точек $\{M_n\}$ из множества $\{M\}$, сходящихся к точке A, соответствующая последовательность значений функции $\{f(M_n)\}$ сходится к b.

Другое определение, равносильное определению 1, использует $\varepsilon-\delta$ формулировку.

Число b называется *пределом функции* $f(M)$ в точке A, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для всех точек M множества $\{M\}$ из δ-окрестности точки A, удовлетворяющих неравенству $\rho(M, A) < \delta$, выполняется неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Сформулированные определения можно записать в символах математики

$$\lim_{M\to A} f(M) = b, \qquad \text{или} \qquad \lim_{x_k\to a_k} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b\ (k = \overline{1,n}).$$

Как и для функции одной переменной, для функции нескольких переменных, имеющих предел в данной точке, справедлива следующая

Теорема. *Пусть функции $f(M)$ и $g(M)$, определенные на одном множестве $\{M\}$, имеют соответственно пределы b и c в некоторой точке A. Тогда функции $f(M) + g(M)$, $f(M)\cdot g(M)$ и $f(M)/g(M)$ (при $c \neq 0$) имеют пределы в точке A, равные соответственно $b + c$; bc и b/c.*

Задача о нахождении предела функции нескольких переменных является более сложной по сравнению с функцией одной переменной, особенно для случаев наличия в пределах неопределенностей.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Р е ш е н и е. Введем переменную $\rho = x^2 + y^2$, тогда $\rho \to 0$ при $x \to 0$ и $y \to 0$. Подставим введенную переменную в исходный предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\ln(1+\rho)}{\rho} = \{\text{используем свойства логарифмов}\}$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\ln(1+\rho)^{1/\rho} = \{\text{функция непрерывна, поэтому знаки предела и функции можно поменять местами}\} = \ln\lim_{\rho\to 0}(1+\rho)^{1/\rho} = \{\text{это второй замечательный предел}\} = \ln e = 1.$$

Как и для функции одной переменной, для функции нескольких переменных существует понятие бесконечно малой величины.

Функция нескольких переменных $u = f(M)$ называется *бесконечно малой в точке A* при $M \to A$, если предел функции в этой точке равен нулю:

$$\lim_{M\to A} f(M) = 0$$

и бесконечно большой, если предел равен бесконечности.

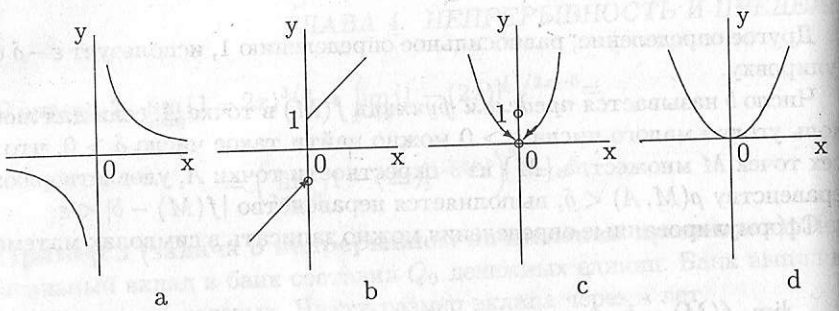


Рис. 4.4: Примеры на проверку условий непрерывности

4.9 Непрерывность функций

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) определена в точке x_0;
2) имеет конечный предел при $x \to x_0$;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Продемонстрируем смысл изложенных требований на нижеследующих примерах, в которых требуется исследовать непрерывность функций в точке $x = 0$.

Пример 1. $y = \dfrac{1}{x}$.

Р е ш е н и е. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ не определена (не существует, терпит разрыв), поэтому в указанной точке функция не является непрерывной (рис. 4.4,a).

Пример 2.

$$y = \begin{cases} x+1 & \text{при} \quad x \geq 0; \\ x-1 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ (рис. 4.4,b) не является непрерывной: первое условие непрерывности выполнено ($f(x) = 0$), но второе условие не выполняется - отсутствует $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, точнее говоря, в точке $x = 0$ существуют односторонние пределы функции – слева $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$ и справа $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +1$, но общего предела не существует. Знаки "–" и "+", стоящие справа от значения x, к которому стремится аргумент, обозначают, соответственно, приближение к нему слева (со стороны отрицательных значений x) или справа (со стороны положительных x).

Пример 3.

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при} \quad x \neq 0; \\ 1 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (рис. 4.4,c) не является непрерывной: первые два условия непрерывности выполнены (функция определена $f(0) = 1$ и существует общий предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$), но не выполняется третье условие: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(x)$.

Пример 4. $y = x^2$.

Р е ш е н и е. В точке $x = 0$ функция $y = f(x)$ (рис. 4.4,d) непрерывна, т. к. выполнены все три условия непрерывности: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(x) = 0$.

Если функция непрерывна в точке, то должно выполняться условие

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x),$$

которое можно рассматривать как одно из определений понятия непрерывности функции в точке.

Сформулируем еще одно полезное для анализа поведения функции определение ее непрерывности.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся в равнозначности двух приведенных определений непрерывности.

Из первого определения при $x = x_0 + \Delta x$ следует $\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, т. к. $\Delta x \to 0$ при $x \to x_0$.

На основании **Теоремы 1** раздела 4.4 о связи бесконечно малых величин с пределами функций можно записать $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = \Delta y$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ величина, т. е. выполняется соотношение $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если функция в этой точке не является непрерывной. Точкой разрыва *первого рода* называют точки, в которых пределы функции справа и слева не равны между собой, но конечны (рис. 4.4,b).

Точка, в которой хотя бы один (справа или слева) предел равен бесконечности или не существует, называется точкой разрыва *второго рода* (рис. 4.4,a).

Точка $f(0)$, показанная на рис. 4.4,c, называется точкой *устранимого разрыва*. Такие точки относят к точкам разрыва первого рода.

Перечислим основные свойства функций, непрерывных в точке.

Свойство 1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, то их сумма $f(x) + \varphi(x)$, произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ и частное от деления $f(x)/\varphi(x)$ (при условии $\varphi(x) \neq 0$) являются функциями непрерывными в этой точке.

Свойство 2. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = u_0$ и функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, причем $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Последнее свойство приводит к возможности изменения места знака предела в сложной функции:

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f\left[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right].$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на промежутке* X (X - числовое множество, в том числе неограниченное), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Можно доказать, что все элементарные функции непрерывны в областях их определения.

Пример 5. Доказать непрерывность функции $y = x^2$.

Р е ш е н и е. Для доказательства воспользуемся соотношением, вытекающим из определения 2 непрерывной функции.

Найдем $\lim\limits_{\Delta x \to 0}[(x + \Delta x)^2 - x^2] = \lim\limits_{\Delta x \to 0}[2x\Delta x + (\Delta x)^2] = 0$.

На основании определения 2 делаем вывод о том, что функция непрерывна при $x \in \Re$.

В заключение раздела приведем сопровождаемые пояснительными рис. 4.5 свойства функций, непрерывных на отрезке.

Свойство 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке (рис. 4.5,a).

Справедливость свойства доказывается от противного. Если бы функция была неограничена в какой-либо точке отрезка (принимала значения $+\infty$ или $-\infty$), то в этой точке имел бы место разрыв второго рода, т. е. функция не была бы непрерывной.

Свойство 2. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке наименьшего m и наибольшего M значений (рис. 4.5,b).

Свойство 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и ее значения на концах отрезка имеют противоположные знаки, то внутри отрезка найдется по меньшей мере одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = 0$ (график функции пересекает ось x хотя бы в одной точке) (рис. 4.5,c).

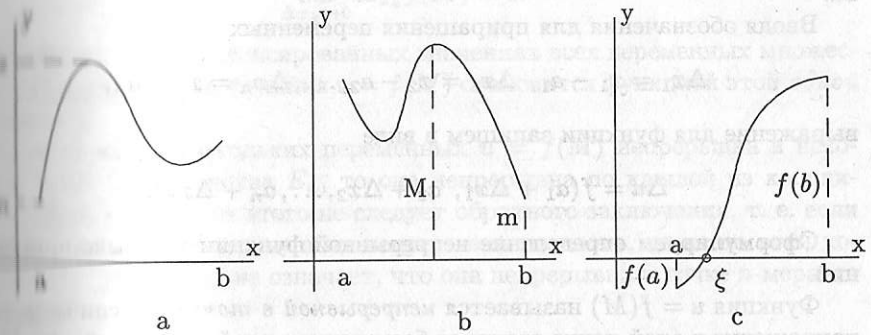


Рис. 4.5: К свойству функций

4.10 Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть функция нескольких переменных $u = f(M)$ определена на множестве точек евклидова пространства $M \in E_n$ и в этом пространстве задана некоторая точка $A \in E_n$ вместе со своей ε-окрестностью.

Функция нескольких переменных называетсся *непрерывной в точке* A, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции:

$$\lim_{M \to A} f(M) = f(A).$$

Формально определение непрерывности функции нескольких переменных не отличается от определения непрерывности функции одной переменной. Отличие состоит лишь в том, что вместо числа b в определении функции нескольких переменных фигурирует значение функции $f(A)$ в точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Точки пространства E_n, в которых функция $f(M)$ не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва*.

Если функция $u = f(M)$ непрерывна в любой точке $M \in \{M\} \subset E_n$, то она называется *непрерывной на множестве*.

Полным приращением функции $u = f(M)$ в точке $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется функция

$$\Delta u = f(M) - f(A),$$

где $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная точка рассматриваемого пространства.

Вводя обозначения для приращения переменных

$$\Delta x_1 = x_1 - a_1,\ \Delta x_2 = x_2 - a_2, \ldots, \Delta x_n = x_n - a_n,$$

выражение для функции запишем в виде

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1,\ a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n).$$

Сформулируем определение непрерывной функции на языке приращений.

Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке* A, если ее полное приращение в этой точке является бесконечно малой величиной при $M \to A$:

$$\lim_{M \to A} \Delta u = \lim_{M \to A} [f(M) - f(A)] = 0.$$

Напомним, что условие $M \to A$ равносильно соблюдению таких условий для каждой из переменных, т. е. $x_k \to a_k$ $(k = \overline{1, n})$.

Геометрический смысл функции двух переменных сводится к непрерывности некоторой поверхности в трехмерном пространстве. На рис. 4.6 показана такая поверхность и на ней изображены две кривые, соответствующие фиксированным значениям одной из переменных $x_1 = c_1$ и $x_2 = c_2$. Эти кривые описываются уравнениями $u = f(x_1, c_2)$ и $u = f(x_2, c_1)$.

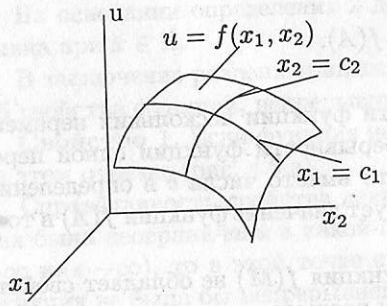


Рис. 4.6: Функция двух переменных

Придадим одной из переменных x_k $(k = \overline{1, n})$ аргумента функции $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нескольких переменных приращение Δx_k, а остальные переменные зафиксируем. Данное приращение переведет точку M в точку M_k.

Приращение функции $f(M)$, соответствующее указанному приращению аргумента, называется *частным приращением функции* в точке M:

$$\Delta_{x_k} u = f(M_k) - f(M).$$

Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке* M *по переменной* x_k, если соответствующее частное приращение этой функции является бесконечно малой величиной при

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} f(M) = 0.$$

Отметим, что при фиксированных значениях всех переменных множества (M), кроме одной, функция $u = f(M)$ становится функцией этой *одной* переменной.

Если функция нескольких переменных $u = f(M)$ непрерывна в некоторой точке пространства E_n, то она непрерывна по каждой из координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$, но из этого не следует обратного заключения, т. е. если функция нескольких переменных непрерывна по части, но не по всем координатам, то это еще не означает, что она непрерывна в точке n-мерного пространства.

4.11 Вопросы

1. Дайте определение числовой последовательности.
2. Какая последовательность чисел называется монотонной? Ограниченной? Сходящейся? Расходящейся?
3. Что такое предел числовой последовательности?
4. Что понимается под ε-окрестностью числа A для одномерного пространства? Для n-мерного?
5. С какой геометрической характеристикой связан размер ε-окрестности в пространстве $\Re_2$?
6. Как определить радиус ε-окрестности в $\Re_2$? В пространстве E_n?
7. Что называется пределом числовой последовательности в E_n?
8. Запишите условие сходимости числовой последовательности в E_n к заданной точке.
9. Что называется пределом функции на бесконечности? В точке?
10. Поясните на графике понятия предела функции на бесконечности и точке.
11. Как связаны между собой понятия ε-окрестности аргумента и δ-окрестности функции? Что будет с этой связью, если функция в рассматриваемой точке не определена?
12. Дайте определение предела функции нескольких переменных в рассматриваемой точке.
13. Укажите на сходства и различия в определении пределов функции одной и нескольких переменных.
14. Какие величины называются бесконечно малыми? Бесконечно большими?
15. Как связано понятие бесконечно малой величины с пределомфункции Бесконечно большой величины?
16. Перечислите основные свойства бесконечно малых величин. Бесконечно больших.

17. Как связаны между собой бесконечно малая и бесконечно большая величины?
18. Перечислите основные свойства пределов функций.
19. Может ли функция иметь несколько пределов в одной точке?
20. В каких случаях можно менять местами знаки предела и функции?
21. В каких случаях нельзя использовать свойство предела частного от деления двух функций?
22. Какие пределы называют “замечательными”?
23. Запишите выражение для первого замечательного предела. Поясните на рисунке его смысл.
24. Запишите выражение для второго замечательного предела.
25. Приведите примеры задач, в том числе экономических,в которых используется второй замечательный предел.
26. Перечислите основные виды неопределенностей.
27. Существуют ли общие рекомендации при раскрытии неопределенностей?
28. Перечислите известные Вам приемы раскрытия неопределенностей.
29. Дайте определения непрерывной функции.
30. Как связано понятие непрерывной функции с понятием предела?
31. Перечислите основные свойства функций,непрерывных в точке. Непрерывных на отрезке.
32. Что такое частное приращение функции нескольких переменных?
33. Что такое непрерывность функции по одной из переменных?

4.12 Упражнения

К разделам 4.1 – 4.2

1. Написать первые пять членов последовательностей:
   $1) x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$; $2) x_n = n(1 - (-1)^n)$; $3) x_n = \frac{3n+5}{2n-3}$.
2. Написать формулу общего (x_n) члена последовательности:
   $1) -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ $2) -3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \dots$
3. Найти наибольший (наименьший) член ограниченной сверху (снизу) последовательности:
   $1) x_n = 6n - n^2 - 5$; $2) x_n = 3n^2 - 10n - 14$; $3) x_n = \frac{\sqrt{n}}{9+n}$.
4. Вычислить пределы последовательностей:
   $1) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{3n}$; $2) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^3}$; $3) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{3n}$.
5. Вычислить пределы:
   $1) \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2}{3x^2-5x+1}$; $2) \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+3}{x^2-3}$;
   $3) \lim\limits_{x\to -3} \frac{x}{|x+3|}$; $4) \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-5x+1}$.

К разделам 4.4 – 4.5

Вычислить пределы:

$1) \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{5x+\sqrt[3]{x}}$; $2) \lim\limits_{x\to 10} \frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$; $3) \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

$4) \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; $5) \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2-7x+4}-2x)$.

К разделам 4.6 – 4.7

Вычислить пределы:

$1) \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$; $2) \lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 3x}$; $3) \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$;

$4) \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{5x}$; $5) \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

К разделу 4.9

1. Какие из нижеследующих функций непрерывны в точке $x = 1$? В случае нарушения непрерывности установить точки разрыва.
   $1) y = \frac{x^2-1}{x-1}$; $2) y = \frac{1}{1+2^{1/(x-1)}}$; $3) y = \frac{1}{x-1}$;
   $4) y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{если } x \neq 1, \\ 2, & \text{если } x = 1. \end{cases}$
2. Первоначальный вклад, положенный в банк под 10% годовых, составил 6 млн руб. Найти размер вклада через 5 лет при начислении процентов: 1) ежегодном; 2) поквартальном; 3) непрерывном.

Глава 5

Производная и дифференциал

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим три задачи, приводящие к производной и связанные со следующими понятиями:

1) касательная к графику функции;
2) скорость движения;
3) производительность труда.

1. Касательная к графику функции.

Пусть задана непрерывная функция одной переменной $y = f(x)$. Требуется записать уравнение касательной к графику этой функции (рис. 5.1) в некоторой фиксированной точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, и найти тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс.

Дадим аргументу функции приращение Δx. Координате $x_0 + \Delta x$ на кривой $y = f(x)$ будет соответствовать точка M_1 с ординатой $y_0 + \Delta y$, причем $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Касательной к графику функции (к кривой) $y = f(x)$ *в точке* M_0 называется предельное положение секущей M_0M_1 при стремлении точки M_1 к M_0, т. е. при $\Delta x \to 0$.

Из школьного курса математики известно, что уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где

$$k = \frac{y - y_0}{x - x_o} = \operatorname{tg}\alpha$$

представляет собой угловой коэффициент или тангенс угла α наклона прямой к оси x.

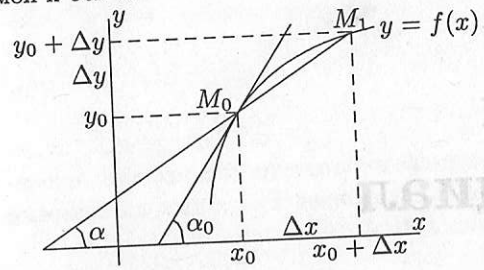


Рис. 5.1: Производная функции

Таким образом,

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Скорость движения.

Пусть некоторое тело движется прямолинейно. Путь s, пройденный телом, зависит от времени t продолжительности движения: $s = s(t)$.

Обозначим через $s_0 = s(t_0)$ путь, пройденный телом к некоторому фиксированному моменту времени t_0, а через $s(t_0 + \Delta t) = s_0 + \Delta s$ — путь, пройденный к моменту $t_0 + \Delta t$.

Средняя скорость $v_{\text{ср}}$, с которой тело двигалось, пройдя расстояние Δs за промежуток времени Δt : $v_{\text{ср}} = \Delta s / \Delta t$. Чем меньше промежуток времени Δt, тем больше средняя скорость будет приближаться к мгновенной *скорости v в момент времени t_0*.

Таким образом,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

3. Производительность труда.

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество продукции u, произведенной к текущему моменту времени t, и пусть известно количество продукции u_0, произведенной к моменту времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество продукции изменится на величину $\Delta u = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$. Тогда средняя производительность труда за время Δt $z_{\text{ср}} = \Delta u / \Delta t$.

Производительность труда в момент времени t_0 определится как предельное значение средней производительности при $\Delta t \to 0$:

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Рассмотрение трех различных по характеру задач привело к однотипным соотношениям, связанным с понятием предела функции. Этот предел играет основополагающее значение в математическом анализе.

Замечание. В первой части учебного пособия при рассмотрении пределов говорилось о связи этого понятия с непрерывностью функций. Свойство непрерывности было оговорено в первой задаче этого раздела и используется во второй, т. к. путь — непрерывная функция времени. Относительно третьей задачи свойство непрерывности по отношению к производительности труда можно поставить под сомнение, особенно если речь идет о производительности труда по изготовлению исчисляемой (штучной) продукции.

Математиками давно доказано, что при оперировании дискретно (не непрерывно) заданными величинами при их достаточно большом количестве, изменяемыми на величины малые по сравнению с базовыми, можно использовать математический аппарат непрерывных функций. Этим объясняется повсеместное применение аппарата математического анализа в экономических задачах.

5.2 Определение производной

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.1}$$

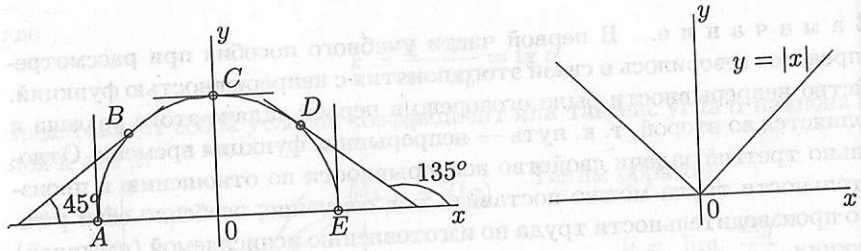
Наряду с обозначением штрихом, использованным в (5.1), для производной часто используются обозначения $\frac{dy}{dx}$ и y'_x.

Ссылаясь на предыдущий раздел, напомним, что производная с геометрической точки зрения представляет собой тангенс угла между касательной к графику функции и осью ординат; с точки зрения механики — это скорость движения; с экономической точки зрения — производительность труда.

Пример 1. График функции $y = f(x)$ представляет собой полуокружность (рис. 5.2,а). Используя геометрический смысл производной, найти значения для $y = f(x)$ в точках A, B, C и D, делящих окружность на четыре равные части.

Решение. Угол наклона α касательной к окружности в точке C равен 0^o, поэтому $y'_C = \operatorname{tg}\alpha_C = 0$.

В точках B и D углы наклона касательных составляют 45^o и 135^o, поэтому $y'_B = \operatorname{tg} 45^o = 1$; $y'_D = \operatorname{tg} 135^o = -1$.



a b

Рис. 5.2: Примеры определения производных

В точках A и E касательные перпендикулярны оси x и $y'_A = +\infty$; $y'_E = -\infty$. Знаки у ∞ определяются тем, что в окрестности точки A производная положительна, а в окрестности точки E – отрицательна.

Пример 2. Найти производную функции $y = |x|$ в точке $x = 0$. (рис. 5.2,b).

Р е ш е н и е. Находим производную функции, следуя ее определению

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

В точке $x = 0$

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{при } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Ясно, что в точке $x = 0$ касательной к графику функции не существует

Если функция в некоторой точке имеет конечную производную, то она называется *дифференцируемой* в этой точке. В противном случае – *недифференцируемой*.

Функция, дифференцируемая во всех точках некоторого промежутка называется дифференцируемой на этом промежутке.

Не вызывает сомнения тот факт, что дифференцируемой может быть только непрерывная функция (в математической литературе этот факт строго доказывается). Однако обратное утверждение неверно, и пример доказывает это.

5.3 Вычисление производной

Производная функции $y = f(x)$ может быть найдена по нижеследующей схеме.

1. Аргументу x дается приращение Δx и находится соответствующее этому приращению значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.
2. Определяется приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. Составляется отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
4. Находится предел составленного отношения при $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2$.

Р е ш е н и е.

1. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и найдем приращенное значение функции $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$.
2. Определим приращение функции $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$.
3. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.
4. Находим предел отношения $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$.

Аналогично находятся производные от любой степенной функции. Однако при произвольном n выражение $(x + \Delta x)^n$ приходится представлять в виде бинома Ньютона. Можно использовать и другой прием: получив наряду с производной от x^2 формулы для производных от x^1, x^3 и установив закономерности в получаемых соотношениях, записать выражение

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

опираясь на метод математической индукции.

Пример 2. Записать уравнение касательной к кривой $y = f(x) = 1/x$ в точке с ординатой $y = 1$.

Р е ш е н и е. Заданной ординате на кривой соответствует точка $M(1, 1)$.

Проведем прямую через точку M :

$$y - y_0 = k(x - x_0) \longrightarrow y - 1 = k(x - 1).$$

Угловой коэффициент касательной k – это производная от функции в точке M:

$$k = \left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=1} = (x^{-1})'|_{x=1} = -x^{-2}\big|_{x=1} = -1.$$

Используя полученные соотношения, запишем искомое уравнение касательной

$$y - 1 = -1(x - 1) \longrightarrow y = 2 - x.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \ln x$.

Р е ш е н и е.

1. $y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$.

2. $\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\dfrac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

4. $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

Для вычисления предела в последнем выражении введем обозначение $u = \Delta x/x$; $u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда используя определение второго замечательного предела, найдем

$$y' = \lim_{u \to 0}\frac{1}{xu}\ln(1 + u) = \frac{1}{x}\lim_{u \to 0}\ln(1 + u)^{1/u} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.$$

По приведенной схеме можно найти производные от всех основных элементарных функций. Предоставляем эту возможность читателям.

5.4 Свойства и таблица производных

Перечислим легко проверяемые по приведенной в предыдущем разделе схеме основные свойства производной.

Свойство 1. *Производная постоянной величины* равна нулю.

$$c' = 0.$$

Свойство очевидно, т. к. приращение постоянной величины равно нулю.

Свойство 2. *Производная суммы* двух функций равна сумме производных этих функций

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Свойство обобщается на сумму конечного числа функций.

Свойство 3. *Производная произведения* двух функций равна произведению производной первой из них на вторую плюс произведение первой на производную второй

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Следствием третьего свойства является *производная частного от деления* двух функций (делимое v можно представить как v^{-1} и далее использовать свойство производной от произведения)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}.$$

Следствием первого и третьего свойств является заключение о том, что постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$(cy)' = cy'; \text{ в частности, } (cx)' = c.$$

Следующие свойства сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Если $y = f(u)$ и $u = g(x)$ – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной функции y по своему аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u (как функции x) по его независимой переменной x*

$$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$.

Р е ш е н и е. Введем для наглядности обозначение $u = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Тогда $y = \sqrt[3]{u}$ и по правилу дифференцирования сложной функции, сформулированному в теореме, запишем

$$y'_x = (\sqrt[3]{u})'_u \cdot u'_x = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{2x \cdot (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{3(x^2 + 1)\sqrt[3]{(x^2 + 1)(x^2 - 1)^2}}.$$

Теорема 2. *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет непрерывную обратную функцию $x = g(y)$ и $y'_x \neq 0$, то существует производная обратной функции*

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Пример 2. Найти производную функции, обратной к $y = a^x$.

Р е ш е н и е. Так как обратной по отношению к заданной являетс функция $x = \log_a y$, то

$$x'_y = (\log_a y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Теорема 3. *Если функция $F(x, y) = 0$ задана параметрически x $= f(t)$, $y = g(t)$, причем функции $f(t)$ и $g(t)$ дифференцируемы по t $f'(t) \neq 0$, то производная y'_x может быть найдена по формуле*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Пример 3. Найти производную y'_x для параметрически заданного ура нения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Р е ш е н и е.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Производная не существует при $t = k\pi$ $(k \in \Re)$.

Теорема 4. *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана нея но уравнением $F(x, y) = 0$, то определение y'_x сводится к нахождени производной от сложной функции $F(x, f(x)) = 0$.*

Пример 4. Найти производную y'_x неявно заданной функции (эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Р е ш е н и е. Продифференцируем по независимой переменной x о части записанного уравнения эллипса:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

Выражая отсюда производную, находим

$$y'_x = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Отметим, что записанное выражение может быть получено из выраж ния для y'_x примера 3, если в нем вместо котангенса параметра t подстави следующее из параметрических уравнений значение $\operatorname{ctg} t = \frac{b}{a}\frac{x}{y}$.

В заключение раздела приведем таблицу производных основных элементарных функций

c'	$=$	0;	$(\sin x)'$	$=$	$\cos x$;
$(x^n)'$	$=$	nx^{n-1};	$(\cos x)'$	$=$	$-\sin x$;
$\left(\frac{1}{x}\right)'$	$=$	$-\frac{1}{x^2}$;	$(\operatorname{tg} x)'$	$=$	$\frac{1}{\cos^2 x}$;
$(\log_a x)'$	$=$	$\frac{1}{x \ln a}$;	$(\operatorname{ctg} x)'$	$=$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$;
$(\ln x)'$	$=$	$\frac{1}{x}$;	$(\arcsin x)'$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(a^x)'$	$=$	$a^x \ln a$;	$(\arccos x)'$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(e^x)'$	$=$	e^x;	$(\operatorname{arctg} x)'$	$=$	$\frac{1}{1+x^2}$;
			$(\operatorname{arcctg} x)'$	$=$	$-\frac{1}{1+x^2}$.

5.5 Частные производные

Обратимся к функции нескольких переменных. Для нее в первой части пособия было введено понятие частного приращения по одной из координат (x_k):

$$\Delta_{x_k} u = f(M_k) - f(M),$$

где $f(M)$ — значения функции в точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$, а $f(M_k)$ – значение в точке $M(x_1, x_2, \ldots, (x_k + \Delta x_k), \ldots, x_n)$, т. е. в точке, у которой по сравнению с точкой M изменена только одна координата.

В отличие от функции одной переменной для функции нескольких переменных вводится понятие *частной производной.*

Частной производной функции нескольких переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю.

$$u'_k = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}.$$

Обозначается частная производная $u'_k \equiv u'_{x_k}$ или $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ или $f'_k(M) \equiv f'_{x_k}(M)$.

Смысл частной производной тот же, что и производной функции одной переменной, но только в предположении, что изменяется только одна независимая переменная, а остальные зафиксированы (постоянны).

Пример 1. Найти частные производные функции $u = x^y + \frac{y}{x}$.

Р е ш е н и е. Для определения частной производной функции u п переменной x считаем, что y – постоянная величина. Тогда

$$u'_x = yx^{y-1} - \frac{y}{x^2}.$$

При определении u'_y считаем x постоянной:

$$u'_y = x^y \ln x + \frac{1}{x}.$$

Запишем без доказательства формулу для вычисления частных прои водных сложной функции нескольких переменных вида

$$u = f(x_1, x_2, \dots x_n),$$

где

$$x_i = g(t_1, t_2, \dots t_k), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Считаем, что приведенные функции дифференцируемы по всем свои аргументам в рассматриваемых точках. В этом случае справедлива фо мула $(r = \overline{1,k})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t_r} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_r} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_r} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_r}.$$

Пример 2. Найти частные производные по переменным s и t от фун ции $u = xy^2$, где $x = 2s + t$, $y = s \sin t$.

Р е ш е н и е. В приведенной формуле для вычисления частных пр изводных сложной функции принимаем $x_1 = x$, $x_2 = y$, $t_1 = s$, $t_2 =$ Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = y^2 \cdot 2 + 2xy \sin t =$$

$$= 2s^2 \sin^2 t + 2s(2s + t) \sin^2 t;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = y^2 + 2xys \cos t =$$

$$= s^2 \sin^2 t + (2s + t)s^2 \sin 2t.$$

5.6 Производная в задачах экономики

В разд. 5.2 говорилось о производительности труда как о задаче, кото ая приводит к понятию производной.

Рассмотрим еще одну экономическую задачу.

Пусть y и Δy – издержки производства на некотором предприятии и их приращение; x и Δx – количество выпускаемой продукции и ее прирост. Тогда *среднее приращение издержек производства* на единицу продукции определится отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает *предельные издержки производ-* ва и дает возможность определить затраты на изготовление дополни- ельной продукции.

Пример 1. Зависимость между издержками производства y и объем выпускаемой продукции описывается функцией $y = 50x - 0,05x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объеме продукции 10 единиц.

Р е ш е н и е. Средние издержки определяются отношением $y_{\text{ср}} = y/x = 50 - 0,05x^2$ и при $x = 10$ они составят $y_{\text{ср}}(10) = 50 - 0,05 \cdot 10^2 = 45$ (ден. ед.).

Функция предельных издержек равна производной по x от функции объема выпускаемой продукции: $y' = 50 - 0,15x^2$; $y'(10) = 50 - 0,15 \cdot 10^2 = 35$ (ден. ед.). Цифра 35 (ден. ед.) определяет затраты на производство дополнительной единицы продукции.

Применение производной в экономических задачах не исчерпывается определением предельных издержек. С равным эффектом производные позволяют находить другие предельные величины: доход, полезность, прибыль и т.д.

Предельные величины характеризуют в экономике не состояние, а *процесс* изменения экономического объекта. Производная выступает как скорость изменения рассматриваемого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого изменяемого фактора. Производная, таким образом, характеризует динамику экономических процессов.

Еще одной характеристикой экономических процессов является эластичность.

Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел отношения относительного приращения функции $(\Delta y/y)$ к относительному приращению пе-

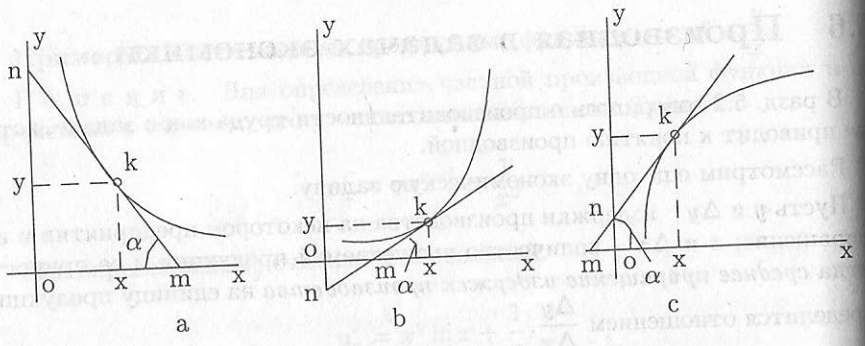


Рис. 5.3: К понятию "эластичность" функции

ременной $(\Delta x/x)$ при $(\Delta x \to 0)$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'. \qquad (5.2$$

Рассмотрим графики различных видов функции (рис. 5.3) и поясним н них геометрический смысл эластичности.

На рис. 5.3,a изображена убывающая вогнутая функция $y = f(x)$. Най дем эластичность этой функции в точке $\mathrm{k}(x, y)$. Для этого проведем каса тельную к графику функции, проходящую через точку k. Из треугольник mkx следует mx=kx/tg α = y/tg α. Так как $y' = \mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$, т $\mathrm{tg}\,\alpha = -y'$. Поэтому mx=$-y/y'$.

Из подобия треугольников kny и kmx следует

$$\frac{\mathrm{kn}}{\mathrm{km}} = \frac{\mathrm{ky}}{\mathrm{mx}} - \frac{\mathrm{ox}}{\mathrm{mx}} = -x\frac{y'}{y} = -E_x(y).$$

Или

$$E_x(y) = -\frac{\mathrm{kn}}{\mathrm{km}}.$$

Таким образом, эластичность убывающей функции в рассматриваемо точке (k) на графике функции равна отношению расстояний по этой кас тельной до ее точек пересечения с осями ординат (n) и абсцисс (m), взятом со знаком минус.

На рассмотренном рисунке направления от точки k до точек m n противоположные. Именно этим можно объяснить присутствие зна минус в выражении для эластичности.

Преобразования, подобные описанному, можно провести для случаев п ведения функций $y = f(x)$, представленных на рис. 5.3,b и 5.3,c. На эт

направления прямых kn и km совпадают, и в выражении для эластичности получается знак плюс:

$$E_x(y) = \frac{\mathrm{kn}}{\mathrm{km}}.$$

Отметим некоторые полезные свойства эластичности.

Свойство 1. Эластичность равна отношению среднего значения функ и к ее предельному значению.

Для доказательства выражение (5.2) перепишем в виде

$$E_x(y) = y' : \frac{y}{x} = \frac{y'}{y_{\mathrm{ср}}}.$$

Делимое этого выражения представляет собой предельное, а делитель среднее значения процесса, описываемого функцией y.

Темпом T_y изменения функции $y = f(x)$ называется отношение произ водной функции к ее величине:

$$T_y = \frac{y'}{y} = \ln' y.$$

Свойство 2. Эластичность функции равна произведению независимой переменной на темп изменения функции

$$E_x(y) = x\,T_y.$$

Свойство 3. Эластичность произведения (частного) двух функций рав на сумме (разности) этих функций

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \qquad E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

Свойство легко доказывается, если воспользоваться правилом вычисле ния производных от произведения и дроби.

Пример 2. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выраж тс ункцией $y =$ $0,5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукц и, равном 60 млрд. руб.

Р е ш е н и е. По формуле (5.2) найдем

$$E_x(y) = \frac{x}{-0,5x + 80} \cdot (-0,5) = \frac{x}{x - 160}.$$

$$E_{x=60}(y) = \frac{60}{60-160} = -0,6.$$

Полученный результат означает, что при выпуске продукции, равно 60 млрд. руб, его увеличение на 1% приведет к снижению себестоимост на 0,6%.

Заметим, что при $E_x(y) > 0$ (положительная эластичность) произош бы увеличение себестоимости. При $E_x(y) = 1$ себестоимость не меняется

5.7 Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и дифференц руема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда для нее справедли соотношение

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

из которого видно, что приращение функции Δy складывается из так наз ваемой *главной части* $y' \Delta x$ и добавки $\alpha(\Delta x)\Delta x$, величина которой завис от Δx и стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом dy *функции* $y = f(x)$ в некоторой точке x называет главная часть приращения функции в этой точке

$$dy = y'\Delta x.$$

Дифференциалом независимой переменной является ее приращение, т как если функция задана в виде $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$. Тогда по опреде нию дифференциала функции находим $dx = f'(x)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Сказанное позволяет для дифференциала функции записать выраже

$$dy = y'dx.$$

Отсюда следует принятая и упоминавшаяся в разделе 5.2 запись

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Установим геометрический смысл дифференциала. Возьмем на граф функции $y = f(x)$ произвольную точку $\mathrm{m}(x, y)$ (рис. 5.4). Дадим аргуме x приращение Δx. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x$ $-f(x)$.

Проведем касательную к графику функции в точке m, которая образ угол α с осью абсцисс. Поэтому $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$.

Из прямоугольного треугольника mkn следует

$$\mathrm{kn} = \mathrm{mn} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha =$$

$$= f'(x)\Delta x = y'\,dx.$$

Поэтому dy=kn, т. е. дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции в рассматриваемой точке, соответствующему приращению аргумента $\Delta x = dx$.

На рисунке график функции вогнутый и для нее $dy < \Delta y$. Если кривая выпуклая, то $dy > \Delta x$, в чем легко убедиться, осуществив соответствующие построения.

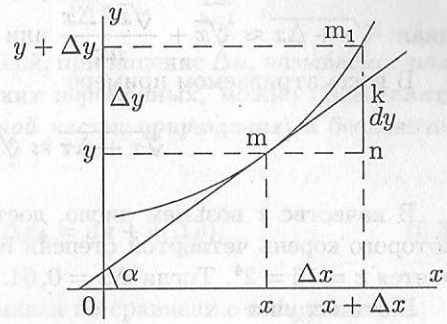


Рис. 5.4: Дифференциал функции

Свойства дифференциала во многом повторяют свойства производной. В частности, дифференциал постоянной величины равен нулю, дифференциал суммы двух функций равен сумме дифференциалов этих функций и т.д.

Одно важное свойство дифференциала не присуще производной. А именно свойство *инвариантности (неизменности) формы дифференциала* при замене переменной.

Покажем, что это так. Пусть задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Функции y и u считаем непрерывными и дифференцируемыми в рассматриваемых областях. Найдем дифференциал функции y как сложной функции

$$dy = f'(u) \cdot u'(x)\,dx = f'(u)\,du.$$

Это выражение по форме совпадает с соотношением

$$dy = f'(x)\,dx,$$

записанном в предположении, что y зависит только от x. Этот факт отражает смысл инвариантности формы дифференциала.

Дифференциал функции находит широкое применение в различных приближенных вычислениях. В частности, он с успехом используется в приближенных вычислениях.

Пример 1. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{16,64}$.

Р е ш е н и е. Получим вначале приближенную формулу для вычисления корней любой n-й степени. Полагая $y = \sqrt[n]{x}$, найдем $y' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$.

Записываем выражение для приращения функции через ее дифференциал: $\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}\cdot\Delta x}{nx}$ или $\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x}\left(1+\frac{\Delta x}{nx}\right)$.

В рассматриваемом примере

$$\sqrt[4]{x+\Delta x} \approx \sqrt[4]{x}\left(1+\frac{\Delta x}{4x}\right).$$

В качестве x возьмем число, достаточно близкое к 16,64, и такое, из которого корень четвертой степени извлекается точно. Таким числом является $x = 16 = 2^4$. Тогда $\Delta x = 0,64$.

В этом случае

$$\sqrt[4]{16,64} \approx 16\left(1+\frac{0,64}{4\cdot 16}\right) = 2,02.$$

Пример 2. Вычислить приближенно $\operatorname{tg} 46^o$.

Р е ш е н и е. Положим $y = \operatorname{tg} x$. Тогда $y' = 1/\cos^2 x$. По формуле связи приращения функции с дифференциалом находим $\operatorname{tg}(x+\Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \frac{\Delta x}{\cos^2 x}$. Подбираем удобную для вычисления величину $x = 45^o = \pi/4$. Тогда $\Delta x = 1^o = \pi/180$ и

$$\operatorname{tg} 46^o = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{180} = 1+\frac{\pi}{90} \approx 1,035.$$

Используя дифференциал, легко получить некоторые полезные в приближенных вычислениях формулы (при $a << 1$):

$$(1\pm a)^n \approx 1 \pm na; \quad \sqrt[n]{(1\pm a)} \approx 1 \pm \frac{a}{n}; \quad \frac{1}{1\pm a} \approx 1 \mp a; \quad e^a \approx 1+a;$$

$$\ln(1\pm a) \approx \pm a; \quad \sin a \approx a; \quad \cos a \approx 1 - \frac{1}{2}a^2; \ldots$$

5.8 Дифференциал функции нескольких переменных

Обобщим понятие дифференциала на функции нескольких переменны

Дифференциалом функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется сумма произведений частных производных этой функции $\partial u/\partial x_k = u'_k$ на приращения соответствующих независимых переменных $\Delta x_k = dx_k$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n = \sum_{k=1}^{n} u'_k dx_k.$$

Как и для функции одной переменной, приращение Δu, называемое *полным приращением* функции нескольких переменных, можно представить как сумму дифференциала du (*главной части приращения*) и бесконечно малых при $\Delta x_k \to 0$ величин $\alpha_k\,\Delta x_k$:

$$\Delta u = du + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\Delta x_k = du + o(\Delta\rho), \tag{5.3}$$

где $o(\Delta\rho)$ – при $\Delta\rho \to 0$ бесконечно малая по сравнению с du величина;

$$\Delta\rho = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\Delta x_k)^2}.$$

Понятие дифференцируемости функции нескольких переменных связано с равенством (5.3).

Функция нескольких переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *дифференцируемой в точке* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если ее полное приращение может быть представлено в виде (5.3).

Можно показать, что функция нескольких переменных дифференцируема в точке, если она непрерывна в этой точке, и все частные производные функции существуют в окрестности точки.

В качестве иллюстрации одного из приложений дифференциала функций нескольких переменных рассмотрим задачу Кобба-Дугласа. Ученые, рассмотревшие эту задачу, ввели производственную функцию объема выпуска продукции Q (функцию Кобба-Дугласа), зависящую от двух (в частном случае) переменных (затрат капитала K и трудовых ресурсов L), и установили между этими функциями зависимость

$$Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{5.4}$$

где A, α – положительные коэффициенты, причем $\alpha < 1$.

Пример. Используя формулу Кобба-Дугласа, установить, на какую величину следует изменить объем вложенного капитала K, чтобы при изменении трудовых ресурсов на ΔL выпуск продукции оставался неизменным.

Р е ш е н и е. Полагая по условию задачи Q постоянной, потребуем, чтобы ее дифференциал (главная часть приращения) равнялся нулю:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial Q}{\partial L}\Delta L = 0.$$

Отсюда найдем

$$\Delta K = -\Delta L \frac{\partial Q}{\partial l} \Big/ \frac{\partial Q}{\partial K}, \quad \text{или} \quad \Delta K = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}\Delta L.$$

Поделив обе части полученного выражения на K, придем к соотношению для эластичностей

$$\frac{\Delta K}{K} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\Delta L}{L}.$$

Анализ последней формулы говорит о том, что при изменении трудовых ресурсов на 1% ресурс капитала следует изменить на $-\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.

От соотношения для эластичностей можно перейти к математической формулировке важного экономического понятия – *предельной нормы* замены трудовых ресурсов L капиталом K :

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{K}{L}.$$

5.9 Производная по направлению

Рассмотрим на плоскости, с которой связана декартова ортогональная система координат, некоторый единичный вектор $\mathbf{i}$ (рис. 5.5). Пусть α и β углы между вектором $\mathbf{i}$ и осями координат. Тогда проекции вектора $\mathbf{i}$ на оси координат (произведение модуля вектора, равного единице, на косинусы углов между этим вектором и направлениями осей координат) будут равны $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. В математике вектор принято представлять совокупностью его координат (проекций). Так, для единичного вектора

$$i = (\cos\alpha, \cos\beta).$$

При этом

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Пусть на плоскости (xy) задана функция двух переменных $u = f(x,y)$ и пусть эта функция определена в некоторой точке M, непрерывна и дифференцируема в ее окрестности.

На прямой, проходящей через точку M в направлении единичного вектора $\mathbf{l}$, на расстоянии Δl от $M(x,y)$ выберем точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Длина отрезка MM_1 определится по теореме Пифагора

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Запишем выражение для приращения функции $u = f(M)$:

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

где Δx и Δy связаны с Δl соотношениями:

$$\Delta x = \Delta l\cos\alpha; \quad \Delta y = \Delta l\cos\beta.$$

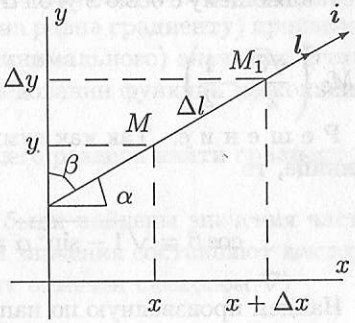


Рис. 5.5: Векторы на плоскости

Предел отношения $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ называется *производной* функции $u = f(M)$ в точке $M(x,y)$ *по направлению* $\mathbf{l}$ и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$.

Так как по предположению функция $u = f(M)$ дифференцируема в точке $M(x,y)$, ее приращение в этой точке с учетом соотношений

$$\Delta x = \Delta l\cos\alpha, \quad \Delta x = \Delta l\cos\beta$$

может быть записано в виде (5.3)

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o(\Delta l) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta l\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta l\cos\beta + o(\Delta l).$$

Поделив обе части этого равенства на Δl и переходя к пределу при $\Delta l \to$ получим формулу для производной функции $u = f(x,y)$ по направлению вектора $\mathbf{l}$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta.$$

Обобщением полученной формулы на функцию n переменных евклидова пространства является выражение

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}n_k, \tag{5.5}$$

где $\sum_{k=1}^{n} n_k^2 = 1$.

Пример. Найти производную функции $u = x^2 + y^2$ по направлению, составляющему с осью x угол $\alpha = \pi/3$ в точках $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и $M_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Р е ш е н и е. Так как сумма квадратов косинусов углов α и β равна единице, то

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Найдем производную по направлению

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{6} = 2x\,\frac{1}{2} + 2y\,\frac{\sqrt{3}}{2} = x + \sqrt{3}y.$$

В точке M_1 :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_1} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.$$

В точке M_2 :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3} \approx 1{,}73 < 2.$$

В точке M_3 :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

5.10 Градиент функции

Градиентом функции $u = f(x, y)$ (обозначается $grad\,u$ или ∇u), дифференцируемой в точке $M(x, y)$, называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным в этой точке то есть,

$$\nabla u = grad\,u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Обобщение понятия градиента на n независимых переменных очевидно

Градиент функции и её производная по направлению имеют один характер. Можно показать, что градиент функции равен производной от этой функции, взятой по направлению нормали к линии уровня (см. разд. .).

Величина производной по направлению от функций многих переменных в общем зависит от выбранного направления вектора l. Но в направлении, ортогональном линии уровня функции (где она равна градиенту) производная достигает своего максимального (или минимального) значения. Этим объясняется значимость градиента при исследовании функций нескольких переменных.

Пример. По данным примера предыдущего раздела найти градиент и его модуль.

Р е ш е н и е. В упомянутом примере были найдены значения частных производных функции $u = x^2 + y^2$. Эти значения составляют вектор, названный градиентом: (на рис. 5.6 градиент отмечен символом ∇)

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = (2x, 2y);$$

$$\nabla u|_{M_1} = \left(2\frac{1}{2}, 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1, \sqrt{3});$$

$$\nabla u|_{M_2} = \left(2\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{3}, 1);$$

$$\nabla u|_{M_3} = \left(2\frac{\sqrt{3}}{2}, -2\frac{1}{2}\right) = (\sqrt{3}, -1).$$

Три найденные проекции градиента на оси координат x и y геометрически представляют собой катеты в прямоугольном треугольнике, гипотенузой которого является модуль (длина) вектора. Поэтому

$$|\nabla u|_{M_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2_{M_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2_{M_1}} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Легко убедиться в том, что градиенты в двух других точках также равны 2.

Обсудим и проанализируем полученные в примерах результаты.

1. Нетрудно заметить, что все выбранные точки (M_1, M_2, M_3) лежат на окружности единичного радиуса.

2. Упомянутая окружность представляет собой линию уровня функции $u = x^2 + y^2$ при $u = 1$.

3. В точке M_1 производная по направлению совпадает с градиентом функции. Это естественно, т. к. заданное направление является нормальным по отношению к линии уровня.

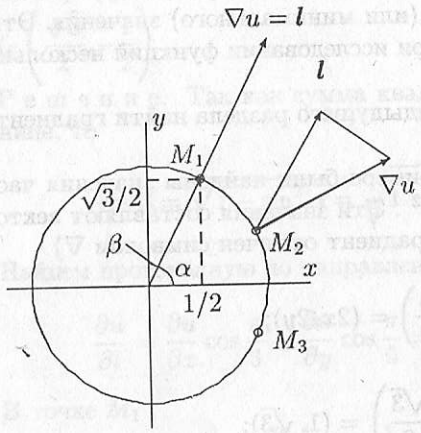


Рис. 5.6: Производная по направлению и градиент

4. В точке M_3 производная по направлению равна нулю. Это объясняется тем, что направление вектора $\boldsymbol{l}$ в этой точке касательно линии уровня, и потому движение в направлении касательной не изменяет значения функции u (вдоль линии уровня функция не изменяется).

5. Вектор градиента функции во всех точках, лежащих на одной линии уровня, имеет одинаковую длину. Это свойственно только линиям уровня, представляющим концентрические окружности. Для линий уровня произвольных функций градиент функции меняется при переходе от одной точки линии уровня к другой.

6. Градиент функции в рассматриваемой точке равен наибольшему из возможных значений производной по направлению в этой точке.

7. Можно показать, что производная по направлению равна произведению модуля градиента функции на угол между нормалью к линии уровня (направлением градиента) и вектором $\boldsymbol{l}$. Это проекция вектора градиента на направление вектора $\boldsymbol{l}$.

5.11 Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ является функцией переменной x и от нее, как от любой функции, можно взять производную, которая называется *второй производной от функции* $f(x)$ или *производной второго порядка*. Производная от производной второго порядка называется производной третьего порядка и т. д. Производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка функции.

Для обозначения производных функции $y = f(x)$ используются символы $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ или $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$.

Пример 1. Найти вторую производную функции $y = e^{2x} \sin x$.

Р е ш е н и е. Последовательно находим первую, затем вторую производные:

$$y' = (e^{2x})' \sin x + e^{2x} (\sin x)' = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = e^{2x}(2 \sin x + \cos x);$$

$$y'' = (e^{2x})'(2 \sin x + \cos x) + e^{2x}(2 \sin x + \cos x)' = e^{2x}(3 \sin x + 4 \cos x).$$

Отметим, что $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$; $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + (-1)^n \dfrac{\pi}{2} n\right)$.

Пример 2. Найти третью производную функции $y = x^2 \ln x$.

Р е ш е н и е. Последовательно находим:

$$y' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2/x = x(2 \ln x + 1);$$

$$y'' = x'(2 \ln x + 1) + x(2 \ln x + 1)' = 2 \ln x + 1 + x \cdot 2/x = 2 \ln x + 3; \quad y''' = \frac{2}{x}.$$

Механический смысл второй производной – это скорость изменения скорости, т. е. ускорение точки тела.

Найдем дифференциал функции $y = f(x)$:

$$dy = f'(x)\, dx. \tag{5.6}$$

Вторым дифференциалом или *дифференциалом второго порядка* d^2x называется дифференциал от дифференциала (введенный ранее дифференциал можно считать дифференциалом первого порядка).

При нахождении второго дифференциала в произведении $f'(x) \cdot dx$ множитель $dx = \Delta x$ считается постоянной величиной.

Найдем дифференциал от (5.6);

$$d(dy) = d^2y = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Используя это выражение, найдем (в предположении, что $(dx)^2$ постоянная величина) дифференциал третьего порядка, затем четвертого и т.

Дифференциал n-го порядка определяется формулой

$$d^n y = y^{(n)}(x) dx^n.$$

Отсюда можно выразить производную n-го порядка функции $y=f(x)$

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Пример 3. Найти четвертый дифференциал функции $y = x^5 - x^3 + \ln x$

Р е ш е н и е. Найдем сначала производные функции вплоть до чет вертой:

$$y' = 5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{x};\ y'' = 20x^3 - 6x - \frac{1}{x^2};\ y''' = 60x^2 - 6 + \frac{2}{x^3};\ y^{(4)} = 120x - \frac{6}{x^4}$$

Тогда

$$d^{(4)}y = \left(120x - \frac{6}{x^4}\right) dx^4.$$

Функции нескольких переменных также имеют производные и дифф ренциалы высших порядков. Остановимся только на производных функци нескольких переменных.

Если функция нескольких переменных непрерывна по всем своим нез висимым переменным, то по каждой из этих переменных можно произв дить дифференцирование заданное количество раз. Например, для фун ции двух переменных $u = f(x, y)$ можно записать различные производны второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Следует обратить внимание на то, что в так называемых *смешанны производных* порядок дифференцирования безразличен.

Для функции нескольких переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражен k-той производной можно записать в виде

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

причем $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Пример 4. Найти все вторые производные функции $u = x^3 + xy^2 - x$ $+x + y + y^4$.

Р е ш е н и е. Последовательно дифференцируем заданную функци

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - y;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - x + 1 + 4y^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y - 1;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y - 1;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x + 12y^2.$$

5.12 Вопросы

1. Как на языке пределов дать определение касательной к графику фун ции?
2. В чем заключается геометрический смысл производной? Изобрази поясняющий рисунок.
3. В чем заключается физический смысл производной? Экономическ смысл?
4. Дайте определение производной и запишите его в виде математиче кой формулы.
5. Какая функция называется дифференцируемой в точке? В области
6. Как связаны понятия дифференцируемости и непрерывности?
7. Может ли непрерывная функция быть недифференцируемой? Поя ните на примере.
8. Какие ситуации скрываются за словами: "Производная не существу в точке"?
9. Можно ли говорить о производных дискретных функций? Если да, при каких условиях?
10. Приведите схему (последовательность) вычисления производной.
11. Перечислите основные свойства про одных. Приведите соответст ющие математические соотношения.
12. Почему производную от частного можно рассматривать как частны случай производной от произведения?
13. Получите формулу определения производной от произведения тр функций.
14. Как найти производную от сложной функции? Запишите соотв ствующую формулу.
15. Воспроизведите последовательность получения формул для вычисл ния производной от степенной функции, от логарифмической.
16. Воспроизведите по памяти таблицу производных основных элем тарных функций.

17. Что собой представляет частная производная?
18. Как частная производная связана с частным приращением?
19. Сколько видов неравных частных производных может иметь функция двух переменных?
20. Что такое предельные издержки производства и как они связаны с понятием производной?
21. Дайте определение эластичности функции. Поясните это понятие на графике.
22. Как связана эластичность с темпом изменения функции?
23. Чему равна эластичность произведения двух функций? Частного?
24. Что такое дифференциал функции и как он связан с производной?
25. Как связаны между собой приращения функции и ее дифференциал? Приращение аргумента и его дифференциал?
26. Как можно использовать дифференциал в приближенных вычислениях?
27. Покажите на графике выпуклой функции ее приращение и дифференциал.
28. Как определить дифференциал функции нескольких переменных?
29. Воспроизведите применение дифференциала функции нескольких переменных на примере задачи Кобба-Дугласа.
30. Что называется производной функции по направлению?
31. Что такое градиент функции и как он связан с производной по направлению?
32. Запишите выражения для градиента функции двух переменных и для его модуля.
33. Как градиент функции расположен по отношению к линии уровня функции двух переменных?

34. На графике функции двух переменных, линии уровня которой – кон центрические окружности, покажите расположения векторов, связан ных с производной по направлению, и вектора градиента.

35. Почему производная функции по направлению касательной к линии уровня равна нулю?

36. Что такое производные n-го порядка и как они определяются?

37. Сколько видов неравных частных производных второго порядка мо жет иметь функция двух переменных?

38. Каков механический смысл второй производной?

39. Как находятся дифференциалы высших порядков от функции?

40. Что понимается под высшими производными функций нескольких пе ременных?

5.13 Упражнения

К разделу 5.3

Используя определение, вычислить производные функций (в скобках даны вспомогательные для решения задач соотношения и пояснения):

1. $y = x^3$ $\left((x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3\right)$;

2. $y = e^x$ (предварительно прологарифмировать функцию, затем найти производную от обеих частей полученного равенства и выразить из него производную);

3. $y = x^x$ (предварительно прологарифмировать, найти производную от обеих частей равенства и выразить из него y' с учетом записанного в условии выражения). Ответ: $y' = x^x(1 + \ln x)$;

4. $y = \sin x$ (воспользоваться формулой разности синусов $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$ и первым замечательным пределом);

5. $y = \cos x$ (воспользоваться формулой разности косинусов $\cos a - \cos b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)$ и первым замечательным пределом).

К разделу 5.4

Используя таблицу производных основных элементарных функций, правила вычисления производных сложных функций, а также производных от сумм и произведений, вычислить производные:

1. $y = \operatorname{tg} x$ (представить тангенс в виде частного от деления синуса на косинус);

2. $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3$; 3. $y = \ln\sqrt[3]{\frac{1-2x}{1+2x}}$; 4. $y = \sqrt{\frac{1-e^{2x}}{e^x}}$;

5. $y = x^3(2\ln^2 x - 4lnx + 1)$; 6. $y = \sqrt[4]{1-e^{4x}} + \sqrt{5x} - 2\lg^2\sqrt{x}$;

7. $y = e^x \ln\sin 2x$; 8. $y = 3\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$;

9. $y = \sqrt{e^{x-1} + \ln x}$ при $x = 1$.

10. Составить уравнение касательной к кривой $y = \dfrac{8}{4+x^2}$ в точке пере чения с осью ординат и в точке $x = 2$.

К разделу 5.5

Найти частные производные функций ($a, b, \alpha, \beta, \gamma, x_0, y_0$ — постоянны

1. $u = x^3y^2 - 2xy^3$; 2. $u = \ln(x - 2y^3)$; 3. $u = (1+x^2)^y$;

4. $u = \ln^x y$; 5. $u = e^{xy}$ в точке $x = y = 1$;

6. $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$; 7. $u = a\ln(x - x_0) + b\ln(y - y_0)$;

8. $u = ax^\alpha + by^\beta$; 9. $u = ax^\alpha y^\beta$; 10. $u = \left(ax^\alpha + by^\beta\right)^\gamma$.

К разделу 5.7

Найти приращения функций и их дифференциалы; вычислить значен при заданных x и Δx :

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ при $x = 2$, $\Delta x = 0,01$;
2. $y = \sqrt{1+x^2}$ при $x = 2$, $\Delta x = 0,01$.

Используя дифференциал, вычислить приближенно:

3. $\sqrt[6]{67,84}$; 4. $e^{1,03}$; 5. $\ln(e + 0,272)$.

К разделам 5.9 – 5.11

Для функций $u = 2x^2 + 4xy + y^2$ найти:
1. Производную по направлению, заданному единичными векторами ($\sqrt{3}$ и $(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ в точке $M(1,2)$.
2. Градиент в точке M.
3. Модуль градиента и сравнить его с производными по направлению. яснить причины расхождения в значениях градиента и производных направлению.
4. Все частные производные первого и второго порядков.
5. Изобразить линию уровня, проходящую через точку M; изобразить диент и направления, в которых определялась производная.

Глава 6

Исследование функций

6.1 Теоремы дифференциального исчисления

Рассмотрим некоторые из основных теорем дифференциального исчисления, на которых основаны методы исследования функций.

Теорема Ферма́. *Если дифференцируемая на промежутке $X = [a,b]$ функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значений во внутренней точке этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю.*

Не прибегая к аналитическому доказательству теоремы, убедимся в ее справедливости на графике функции (рис. 6.1,а).

В точке $x = \xi_1$ функция достигает наибольшего, а в точке $x = \xi_2$ – наименьшего значений. В этих точках касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (тангенс ее наклона к оси x равен нулю). Из геометрического смысла производной следует утверждение теоремы Ферма

$$y'(\xi_1) = y'(\xi_2) = 0.$$

Теорема Ро́лля. *Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:*
а) непрерывна на отрезке $[a,b]$;
б) дифференцируема на интервале (a,b);
в) на концах интервала принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$.
Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, в которой производная функции равна нулю.

Указанные в теореме Ферма точки на графике функции $y = f(x)$ (рис. 1.а) соответствуют и названным в теореме Ролля точкам, то есть гео-

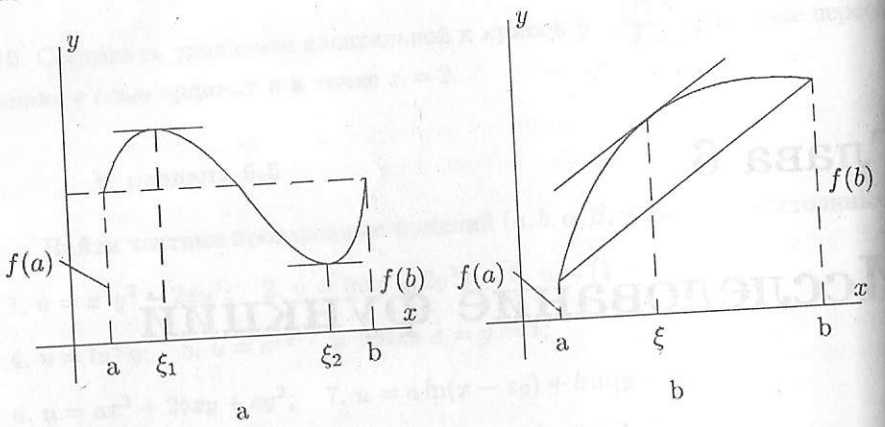


Рис. 6.1: Теоремы дифференцирования

метрически теорема Ролля говорит о том, что на графике функции, отвечающей указанным условиям, найдется хотя бы одна точка, касательная к которой параллельна оси абсцисс.

Следующая теорема обобщает теорему Ролля.

Теорема Лагра́нжа. *Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:*

а) непрерывна на отрезке [a,b];

б) дифференцируема на интервале (a,b).

Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, в которой производная равна частному от деления приращения функции на приращение аргумента на этом отрезке, т. е.

$$y'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{6.1}$$

Выражение в левой части (6.1) представляет собой тангенс угла наклона хорды, стягивающей концы дуги кривой графика функции на отрезке $[a,b]$ (рис. 6.1,b).

В левой части этого равенства стоит тангенс угла наклона касательной к графику функции. Ясно, что для непрерывной и дифференцируемой функции всегда найдется точка $\xi \in [a,b]$, касательная к графику функции в которой параллельна хорде.

Если вспомнить о механическом смысле производной (в математике принято говорить о скорости изменения функции), то правая часть равенства (6.1) представляет собой среднюю скорость изменения функции на

отрезке $[a,b]$, а левая часть – мгновенную скорость изменения функции в точке $x = \xi$.

Таким образом, для дифференцируемых на некотором отрезке функций существует внутри этого отрезка такая точка, мгновенная скорость изменения функции в которой равна средней скорости изменения функции на отрезке.

Обобщением теоремы Лагранжа является формула Коши, которая для двух дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ записывается в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{6.2}$$

Не останавливаясь на доказательстве этой формулы, отметим, что она при $g(x) = x$ превращается в формулу Лагранжа.

6.2 Правило Лопиталя

Сформулируем полезную и широко используемую для раскрытия неопределенностей при вычислении пределов функций теорему.

Теорема Лопита́ля. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности некоторой точки $x = a$, за исключением может быть самой точки, и пусть при стремлении x к a предел этих функций равен нулю (при $g(x) \neq 0$). Тогда, если существует предел отношения $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (конечный или бесконечный), то существует и предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ и справедлива формула*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорему называют правилом Лопиталя. Она доказывается на основании формулы Коши (6.2). Для доказательства в формуле Коши достаточно вместо фиксированного значения функций на одном из концов интервала $[a,b]$ поставить переменную величину x и записать выражение для предела при стремлении x к его значению на другом конце интервала.

Правило Лопиталя можно применять неоднократно, если ограничения теоремы при каждом его применении выполняются.

Продемонстрируем применимость правила Лопиталя на примерах вычисления пределов с неопределенностями.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$ {Применяем правило Лопиталя}=

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$ {Применяем правило Лопиталя повторно}=

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$ {Применяем правило Лопиталя}=

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}}{1}=2.$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$ {Применяем правило Лопиталя}=

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1}=0.$

Существуют приемы сведения неопределенностей, отличных от приме
ненных в примерах 1–3, к неопределенностям вида $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Рас
смотрим некоторые из этих приемов на примерах.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x=\{0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$ {Применяем
правило Лопиталя}$=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=-\lim\limits_{x\to 0+}x=0.$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=$
{Применяем правило Лопиталя}$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\cos x}=0.$

6.3 Формула Тейлора

Рассмотрим многочлен степени n от переменной $(x-a)$ (a — постоя
ная):

$$P(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_n(x-a)^n. \qquad (6.$$

Это выражение называют *разложением* $P(x)$ *по степеням разност*
$x-a$.

Для определения коэффициентов c_k разложения (6.3) продифференциру
ем его последовательно n раз:

$P'(x)=c_1+2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\ldots+nc_n(x-a)^{n-1};$

$P''(x)=1\cdot 2c_2+2\cdot 3c_3(x-a)+\ldots+(n-1)nc_n(x-a)^{n-2};$

$P'''(x)=1\cdot 2\cdot 3c_3+\ldots+(n-2)(n-1)nc_n(x-a)^{n-3};$

. . . . . .

$P^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdots nc_n.$

Полагая в этих равенствах $x=a$, получим: $P(a)=0!c_0$; $P'(a)=1!c_1$; $P''(a)=2!c_2$; $\ldots$ $P^{(n)}(a)=n!c_n$.

Определив отсюда коэффициенты разложения, подставим их значения в выражение для $P(x)$:

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Полученное равенство носит название *формулы Тéйлора для многочлена*.

В математике доказано, что это формула, полученная для многочлена, может быть применена для любой функции, дифференцируемой на интервале, содержащем точку $x=a$.

Формула Тейлора для произвольной дифференцируемой функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n\big((x-a)\big). \qquad (6.4)$$

Здесь $R_n\big((x-a)\big)$ – *остаточный член формулы Тейлора* выражение для которого приводится в различных вариантах во всех справочниках по математике. Его величина зависит от степени приближенности x к a и позволяет оценить погрешность, допускаемую при замене функции полиномом.

В частном случае, при $a=0$ получим формулу, носящую имя Маклóрена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x). \qquad (6.5)$$

Пример 1. Представить функцию $y=e^x$ в виде полинома степени n в окрестностях точки $x=a=0$.

Р е ш е н и е. Так как для заданной функции $f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$ и $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1$, то по формуле Маклорена (6.5) получим:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x).$$

Если, например, $x=1$, то

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+R_n(1).$$

Погрешность, подсчитанная по одной из формул для остаточного члена, определится из соотношения $R_n(1) \approx \frac{3}{(n+1)!}$.

Уже при $n = 3$ погрешность $R_3(1) = \frac{1}{4!} = 0,125$, т. е. при ограничении тремя слагаемыми в разложении ошибка приближенного вычисления числа $e \approx 2,73...$ не превышает 5%.

Пример 2. Представить функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в виде полинома степени n в окрестностях точки $x = a = 0$.

Р е ш е н и е. Найдем для заданных функций все необходимые производные. Они, в чем легко убедиться непосредственным вычислением, могут быть представлены в виде обобщенных выражений:

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right); \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right).$$

При $x = 0$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$$

и

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ (-1)^{n/2} & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Подстановка записанных выражений в формулу Маклорена приводит к разложениям тригонометрических функций:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x'}{7!} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

Слагаемые $o(x^{2n})$ говорят о том, что остаточные члены разложений — малые величины по сравнению с x^{2n}.

Предлагаем читателям самостоятельно получить формулы:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!} + o(x^n).$$

Из последней формулы в случае, если $m = n$ — целое число, получается известный из школьного курса математики *бином Ньютона*:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n.$$

Вернемся к формуле Тейлора (6.4). Вводя обозначение $x - a = \Delta x = dx$ и вспоминая формулу из разд. 5.11 для дифференциала функции $d^{(n)}y = d^{(n)}f(x) = f^{(n)}(x)d^n x$, перепишем ее в виде

$$\Delta y = f(x) - f(a) = \frac{df(x)}{1!} + \frac{d^2f(x)}{2!} + \ldots + \frac{d^nf(x)}{n!} + R_n(dx). \qquad (6.6)$$

В формуле предполагается, что $df(x)$ и дифференциалы высших порядков соответствуют приращению $x-a$ аргумента относительно точки $x = a$.

Запись (6.6) позволяет формально обобщить ее на функцию нескольких переменных $u = f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для приращения функции $u = f(X)$ в окрестностях точки $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ формула Тейлора выглядит так:

$$\Delta u = f(X) - f(M) = \frac{df(X)}{1!} + \frac{d^2f(X)}{2!} + \ldots + \frac{d^nf^{(n)}(X)}{n!} + R_n(dX). \quad (6.7$$

Как и в формуле (6.6), имеется в виду, что дифференциал функции берется относительно точки $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

6.4 Монотонность функции

Определение монотонной числовой последовательности, приведенное части 1 пособия, можно перенести на функции.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей (убывающе* на промежутке X, если для любых ее аргументов $x_1, x_2 \in X$ при $x_2 >$ выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)(f(x_2) < f(x_1))$.

Теорема. *Если производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ ложительна (отрицательна) на некотором промежутке $x \in X$ изме ния аргумента x, то функция возрастает (убывает) на этом промежу* ее.

Убедиться в справедливости теоремы для $x_2 > x_1$ можно по рис. 6 для возрастающей и 6.2,b – для убывающей функций. На этих рисун васательная к возрастающей функции (рис. 6.2,a) составляет острый у с осью абсцисс, следовательно производная положительна; для убываю функции (рис. 6.2,b) — наоборот.

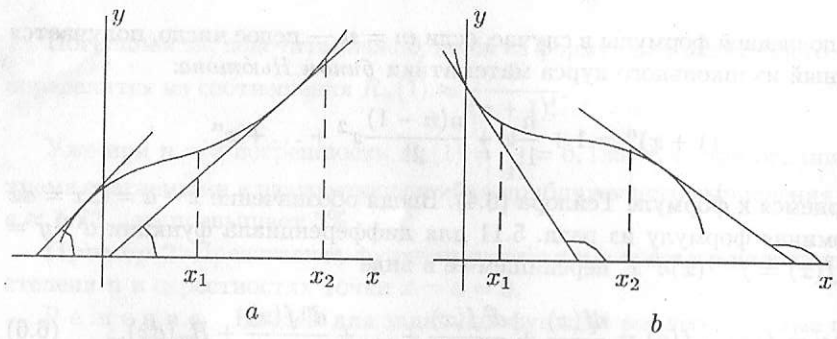


Рис. 6.2: Возрастание и убывание функции

Кроме того, из формулы Лагранжа (6.1)

$$y'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

следует, что при положительном (по условию) знаменателе производная будет положительна, если $f(x_2) > f(x_1)$ и отрицательна, если $f(x_2) < f(x_1)$, т. е. выполняются утверждения теоремы.

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^2 - 4x + 3$.

Р е ш е н и е. Найдем производную: $y' = 2x - 4$. Эта производная положительна при $x > 2$ и отрицательна при $x < 2$. Поэтому функция убывает на промежутке $(-\infty, 2)$ и возрастает на промежутке $(2, \infty)$. В точке $x = 2$ (вершина параболы) функция переходит от убывания к возрастанию.

Пример 2. Найти интервалы монотонности функции $y = x^3$.

Р е ш е н и е. Найдем производную: $y' = 3x^2$. Эта производная положительна всюду, за исключением точки $x = 0$, где она обращается в нуль. Функция всюду монотонная и неубывающая. О точках, подобных $x = 0$ в этом примере и называемых *точками перегиба*, речь пойдет ниже, в разд. 6.7.

Читателям предлагается самостоятельно построить графики функций примеров 1 и 2 и проанализировать сказанное.

6.5 Экстремумы функции

Важнейшей характеристикой многих функций, моделирующих поведение реальных процессов и явления, являются их максимальные и минимальные значения. Эти значения носят в математике обобщенное название: *экстремумы функции*.

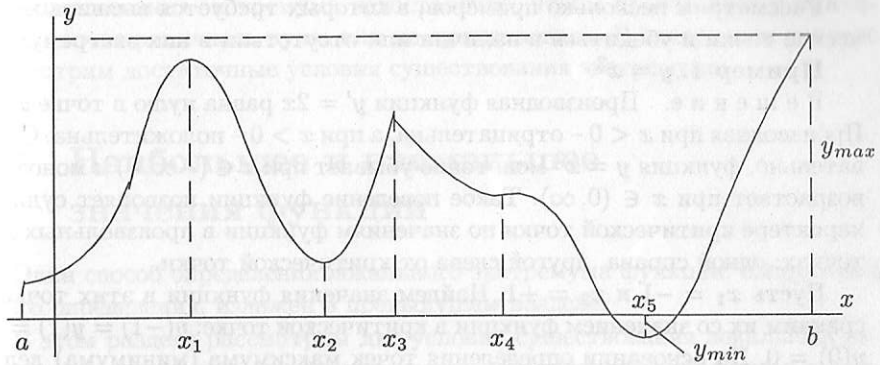


Рис. 6.3: К определению локальных экстремумов

Точка $x = x_0$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции $y = f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется условие $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$.

Слово *локальный* связано с тем, что на некотором промежутке $X = [a, b]$ может находиться несколько точек, отвечающих определению локального экстремума (точки x_1, x_2, x_3 и x_5 на рис. 6.3), но не во всех из них (или даже ни в одной из них) функция принимает наибольшее (наименьшее) значение на промежутке.

Сформулированное определение не требует выполнения условия дифференцируемости функции. Поэтому точка $x = x_3$ на функции, изображенной на рисунке, будет точкой локального экстремума (в данном случае максимума) так же, как и точки x_1, x_2 и x_5. Относительно точек x_1, x_2 и x_5 можно сказать, что в них выполняются условия теоремы Ферма (см. разд. 6.1), и, следовательно, производная функции в этих точках равна нулю.

Отметим сразу, что в точке x_4 производная функции равна нулю, но экстремум в ней отсутствует. Поэтому условие равенства производной нулю не является ни необходимым, ни достаточным условием существования экстремума. Это условие лишь позволяет выявить так называемые *критические* точки — точки, *подозрительные на экстремум*. К критическим обычно относят и точки, в которых производная не существует (x_3 на ри-

сунке).

Рассмотрим несколько примеров, в которых требуется выявить критические точки и убедиться в наличии или отсутствии в них экстремума.

Пример 1. $y = x^2$.

Р е ш е н и е. Производная функции $y' = 2x$ равна нулю в точке $x = 0$. Производная при $x < 0$ – отрицательна, а при $x > 0$ – положительна. Следовательно, функция $y = x^2$ монотонно убывает при $x \in (-\infty, 0)$ и монотонно возрастает при $x \in (0, \infty)$. Такое поведение функции позволяет судить о характере критической точки по значениям функции в произвольных двух точках: одной справа, другой слева от критической точки.

Пусть $x_1 = -1$ и $x_2 = +1$. Найдем значения функции в этих точках и сравним их со значением функции в критической точке: $y(-1) = y(1) = 1 > y(0) = 0$. На основании определения точек максимума (минимума) делаем вывод о том, что исследуемая критическая точка O(0,0) является точкой минимума.

Пример 2. $y = x^3$.

Р е ш е н и е. Производная функции $y' = 3x^2$ равна нулю в точке $x = 0$. Производная при $x < 0$ и при $x > 0$ – положительна. Следовательно, функция $y = x^3$ монотонно возрастает на всей числовой оси. Значения функции слева от критической точки меньше нуля (ее значения в критической точке) $\big(y(-1) = -1 < y(0) = 0\big)$, справа – больше нуля $\big(y(1) = 1 > y(0) = 0\big)$. Следовательно, экстремума в критической точке нет.

Пример 3. $y = |x|$.

Р е ш е н и е. Обратимся к определению модуля и перепишем заданную функцию в виде

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если} \quad x < 0; \\ x, & \text{если} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Производная функции

$$y' = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x < 0; \\ +1, & \text{если} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Как видно, производная y' в критической точке терпит разрыв (не существует). Однако при $x = 0$ функция $y = 0$; слева и справа от этой точки функция положительна. Поэтому в точке $x = 0$ функция принимает минимальное значение.

Пример 4 $y = \sqrt[3]{x}$.

Р е ш е н и е. Производная функции $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ при $x = 0$ не существует. Функция монотонно возрастает на всей числовой оси. Экстремума не существует.

Рассмотренные примеры указывают на то, что для установления факта существования экстремума недостаточно, чтобы производная в критической точке равнялась нулю или не существовала. В следующем разделе рассмотрим достаточные условия существования экстремума.

6.6 Наибольшее и наименьшее значения функции

Один способ определения локального экстремума функции, следующий из его определения, изложен в предыдущем разделе.

В этом разделе рассмотрим два условия существования локальных экстремумов и опишем последовательность определения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Теорема 1 (первое достаточное условие существования экстремума). *Если при переходе через точку $x = x_0$ производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 является точкой максимума функции; если с минуса на плюс — точкой минимума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в точке $x = x_0$ производная меняет знак с плюса на минус, то согласно признакам монотонности (разд. 6.4) слева от точки x_0 функция монотонно возрастает, справа — монотонно убывает.

По определению для монотонно возрастающей функции $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$. Для монотонно убывающей функции, как при $x > x_0$ в рассматриваемом варианте, также $f(x) < f(x_0)$. Согласно определению предыдущего раздела, в точке $x = x_0$ функция имеет локальный максимум.

Аналогично доказывается случай локального минимума.

Таким образом, достаточным признаком существования локального экстремума является смена знака производной: с плюса на минус при наличии максимума и с минуса на плюс при наличии минимума.

Задачу отыскания экстремума, основанного на описанном достаточном признаке, будем называть *решением с использованием первой производной.*

На нижеследующем примере покажем последовательность решения задачи на определение локального экстремума.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $y = x(x-1)^3$.

Р е ш е н и е .

1. Находим первую производную и проверяем функцию на дифференцируемость:

$$y' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1).$$

По виду функции и ее производной заключаем, что она определена и дифференцируема на всей числовой оси (отсутствуют точки, в которых функция и ее производная не существуют).

2. Приравнивая производную нулю, находим критические точки: $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = 1$ и значения функции в этих точках $y(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)^3 = -\frac{27}{256}$; $y(1) = 1(1-1)^3 = 0$.

3. Исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки для определения наличия в них экстремумов. Для этого нанесем критические точки на числовую ось (рис.6.4).

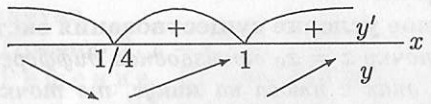


Рис. 6.4: Экстремумы функции

Для определения знака производной слева и справа от критической точки $x = \frac{1}{4}$ выберем две точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ и найдем в них значения производных от функции: $y'(0) = -1 < 0$, $y'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} > 0$.

Производная при переходе через точку $x = \frac{1}{4}$ меняет знак с минуса на плюс (знаки производной показаны на рисунке). Слева от точки $x = \frac{1}{4}$ функция монотонно убывает, справа – монотонно возрастает (векторы на рисунке). Следуя первому достаточному признаку существования предела, заключаем, что в этой критической точке функция имеет минимум.

Переходим к исследованию поведения функции в окрестностях второй критической точки $x = 0$. Значение производной функции слева от этой точки уже найдено $\left(y'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} > 0\right)$. Выберем точку $x = 2$ справа от критической точки $x = 1$ и найдем в ней производную функции $y'(2) = (2-1)^2(4\cdot 2-1)=7>0$, т. е. производная при переходе через точку $x=1$ не меняет знака. Следовательно, эта точка не является точкой экстремума функции.

4. Находим минимальное значение функции

$$\min_{(-\infty;\infty)} y = y(\frac{1}{4}) = -\frac{27}{256}.$$

Теорема 2 (второе достаточное условие существования экстремума). *Если первая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ равна нулю в некоторой точке $x = x_0$, а вторая производная в этой точке отрицательна (положительна), то x_0 есть точка максимума (минимума) функции в точке x_0.*

Доказательство.

Пусть $y'(x_0) = 0$ и $y''(x_0) < 0$ в точке $x = x_0$. В силу непрерывности функции и ее производной, производная первой производной $y''(x) = (y'(x))' < 0$ также и в некоторой окрестности точки x_0. Это значит, что первая производная – монотонно убывающая функция, изменяющая знак с плюса на минус при переходе через нуль.

Согласно первому достаточному условию существования экстремумов заключаем, что в точке x_0 функция имеет максимум.

Аналогичные рассуждения приводят к доказательству второй половины теоремы.

Простой способ доказательства справедливости второго достаточного признака существования экстремума основывается на использовании формулы Тейлора (6.4). Запишем эту формулу, ограничившись в ней тремя слагаемыми (отброшенные слагаемые для достаточно малых приращений Δx малы по сравнению с $(\Delta x)^2$):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)(\Delta x)^2.$$

Отсюда, если считать x_0 критической точкой (для нее $f'(x_0) = 0$), получим

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(\Delta x)^2. \qquad (6.8)$$

Из этой формулы видно, что при $\Delta x \neq 0$ (отклонении от критической точки $x = x_0$), знак приращения функции определяется только знаком ее второй производной. Отсюда и из определения экстремума функции (разд. 6.5.) следует справедливость второго достаточного признака существования экстремума.

Исследование функций на экстремум, основанное на втором достаточном признаке, будем называть *исследованием по второй производной.*

По отношению к задаче исследования функций на экстремум по первой производной в этом случае в последовательности решения задачи добавляется пункт по определению второй производной и установлению ее знаков в критических точках.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^4$.

Р е ш е н и е.

1. Находим первую и вторую производные функции $y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$.

Анализ полученных выражений говорит о том, что функция непрерывна и дважды дифференцируема на всей числовой оси.

2. Приравниваем первую производную нулю $4x^3 = 0$ и находим единственную критическую точку на числовой прямой (действительных чисел) $x = 0$.

3. Определяем значения второй производной в этой точке: $y''(0)=0$, т. е. по второй производной судить об экстремуме функции в критической точке $x = 0$ в данном примере нельзя.

Подстановка отрицательных значений в выражение для первой производной придает ей отрицательный знак ($y'(-1) = -4$), положительных — положительный ($y'(1) = 4$). По первому достаточному условию заключаем, что точка $y(0) = 0$ является точкой минимума функции.

4. Таким образом $\min\limits_{(-\infty,\infty)} = y(0) = 0$.

Приведенный пример говорит о том, что исследование функции по ее второй производной не всегда приводит к результату. В случае, если вторая производная в критической точке равна нулю, судить о наличии экстремума можно по первой производной.

Обратим внимание читателя на то, что в теоремах 1 и 2 даны лишь достаточные (не являющимися необходимыми!) признаки существования экстремумов.

Предлагаем убедиться в том, что в точке $x = 1/4$ в примере 1 вторая производная положительна.

Для определения наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке $[a, b]$ необходимо сравнить между собой все локальные минимумы и максимумы на этом промежутке и выбранные экстремальные значения сравнить со значением функции на концах промежутка.

Наибольшее (наименьшее) из перечисленных значений будет максимальным (минимальным) значением функции на промежутке.

Сказанное относится к замкнутому промежутку [a,b]. Если промежуток открыт или полуоткрыт, то со стороны его "открытости" говорить о максимуме или минимуме некорректно – таковые в этих точках не существуют.

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x-1)^2 e^{-x}$ на промежутке $[0; 5)$.

Р е ш е н и е.

1. Находим производную функции $y' = e^{-x}(x-1)(3-x)$ и вторую производную $y'' = e^{-x}(x^2 - 6x + 7)$.

Анализ производных говорит о том, что функция дифференцируема дважды на всей числовой оси (а, следовательно, и на заданном промежутке).

2. Находим критические точки, приравнивая производную нулю $y' = 0$: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

3. Находим вторые производные в критических точках: $y''(1) = \dfrac{2}{e} > 0$; $y''(3) = -\dfrac{2}{e^3} < 0$.

4. По знаку вторых производных определяем локальные максимум $y(3) = \dfrac{4}{e^3}$ и минимум $y(1) = 0$.

5. Определяем значения функций на замкнутых концах интервала [0;5). Только точка $x = 0$ входит в интервал (в точке $x = 5$ он открыт); $y(0) = 1$.

6. Сравнивая значения функции в критических точках и при $x = 0$, находим

$$\max_{[0;5)} y(x) = y(0) = 1; \quad \min_{[0;5)} y(x) = y(1) = 0.$$

6.7 Выпуклость и точки перегиба

Дадим определение понятиям выпуклости и вогнутости функции.

Функция называется *выпуклой (выпуклой вверх)* на некотором промежутке X, если для любых двух точек из этого промежутка x_1, $x_2 \in X$ выполняется неравенство

$$y(x_{\text{ср}}) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] = y_{\text{ср}}. \qquad (6.9)$$

Если в (6.9) знак неравенства противоположен, то функция называется *вогнутой (выпуклой вниз)*.

На рис. 6.5 изображены выпуклая (a) и вогнутая (b) функции.

Сформулируем понятное из геометрических соображений необходимое и достаточное условие выпуклости (вогнутости) функции.

Теорема 1. *Функция выпукла (вогнута) на промежутке X тогда и только тогда, если ее первая производная на этом промежутке монотонно убывает (возрастает).*

Понятно, что при убывающей (возрастающей) первой производной угол наклона касательной к кривой уменьшается (увеличивается) с ростом x.

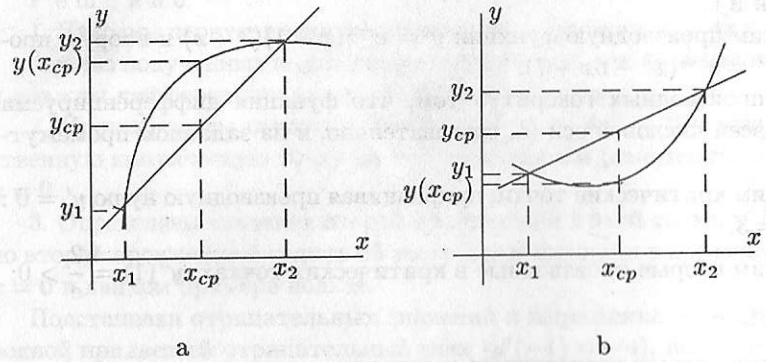


Рис. 6.5: Выпуклость и вогнутость

Вспоминая из предыдущего раздела, что монотонность первой производной функции связана со знаком ее второй производной, сформулируем достаточное условие выпуклости и вогнутости.

Теорема 2. *Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) внутри некоторого промежутка X, то функция вогнута (выпукла) на этом промежутке.*

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы выпуклости и вогнутости функции.

Из определения следует, что точка перегиба – это точка экстремума первой производной.

Теорема 3 (необходимое условие перегиба). *В точке перегиба дважды дифференцируемой функции ее вторая производная равна нулю.*

Теорема 4 (достаточное условие перегиба). *Если вторая производная функции при переходе через некоторую точку меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.*

На графике функции кривая лежит по разные стороны от точки перегиба.

Продемонстрируем последовательность определения точек перегиба функции на примере.

Пример 1. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции $y = x(x-1)^3$.

Р е ш е н и е.

1. Найдем первую и затем вторую производные функции:

$$y' = (x-1)^2(4x-1); \quad y'' = 6(x-1)(2x-1).$$

2. Приравниваем выражение для второй производной нулю и определяем точки, подозрительные на перегиб: $x_1 = 1/2$; $x_2 = 1$. На рис. 6.6 показана схема изменения второй производной функции на числовой прямой.

3. Вторая производная положительна на интервалах $(-\infty, 1/2)$ и $(1, +\infty)$; отрицательна – на интервале $(1/2; 1)$. В невошедших в интервалы точках числовой оси $x = 1/2$ и $x = 1$ вторая производная равна нулю – это точки перегиба функции.

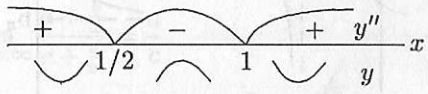


Рис. 6.6: Точки перегиба

4. Находим ординаты точек перегиба: $y(1/2) = -1/16$; $y(1) = 0$.

6.8 Асимптоты

Важную роль в исследовании поведения функций играют асимптоты.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, к которой стремится функция при неограниченном ее удалении от начала координат.

Асимптоты в общем случае могут иметь произвольные углы наклона к координатным линиям. В частном случае асимптоты могут быть параллельными оси абсцисс. Такие асимптоты называют *горизонтальными*. *Вертикальными* называют асимптоты, перпендикулярные оси абсцисс.

Уравнение вертикальной асимптоты – это уравнение прямой, перпендикулярной оси x, то есть $x = x_0$ (рис. 6.7,а).

Для того чтобы график функции стремился к вертикальной асимптоте $x = x_0$, должно выполняться условие

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Отметим, что функция может стремиться к $+\infty$ или $-\infty$ при стремлении аргумента к x_0 справа ($x \to x_0+$) или слева ($x \to x_0-$).

Прямая $x = x_0$ не может быть вертикальной асимптотой, если предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Последнее равенство является условием непрерывности функции в точке x_0.

Сказанное приводит к выводу о том, что вертикальные асимптоты $x = x_0$ следует искать в точках разрыва функции.

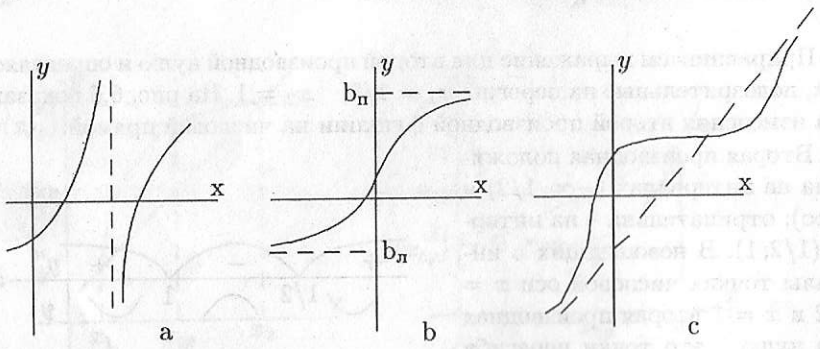


Рис. 6.7: Асимптоты графиков функций

Теорема 1. *Пусть существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. *Тогда прямая* $y = b$ *является горизонтальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ (рис. 6.7,b).

Функция может иметь одностороннюю асимптоту левую $y = b_л$ или правую $y = b_п$ при $x \to -\infty$ или $x \to +\infty$.

Теорема 2. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена при достаточно больших* x *и существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ *и* $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$. *Тогда прямая* $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой графика функции* (рис. 6.7,c).

Доказательство. Если прямая $y = kx + b$ является асимптотой функции $y = f(x)$, то разность между координатами точек графиков функции и прямой должна стремиться к нулю при неограниченном удалении их от начала координат ($x \to \infty$). То есть $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ и тем более $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) = 0$.

Из последнего равенства следует $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Тогда из равенства $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ (k – число) получим $b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx]$.

Наклонные асимптоты, как и горизонтальные, могут быть односторонними.

Пример 1. Найти асимптоты дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

Решение. Функция терпит разрыв при равенстве нулю знаменателя, то есть при $x = -\dfrac{d}{c}$. Найдем пределы функции в предположении, что

числитель дроби не равен нулю при $x = -\dfrac{d}{c}$: $\lim\limits_{x\to -\frac{d}{c}} \dfrac{ax + b}{cx + d} = \pm\infty$. Поэтому прямая $x = -\dfrac{d}{c}$ является вертикальной асимптотой.

Найдем предел функции, соответствующий горизонтальным асимптотам:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax + b}{cx + d} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c}.$$

Отсюда следует, что прямая $y = \dfrac{a}{c}$ является горизонтальной асимптотой.

Наклонной асимптоты график функции не имеет, так как

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax + b}{x(cx + d)} = 0.$$

Так как k представляет собой тангенс угла наклона асимптоты к оси абсцисс, то при $k = 0$ имеем горизонтальную асимптоту, найденную выше.

Читателям предлагается схематично изобразить график функции и показать на нем найденные асимптоты.

Пример 2. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

Решение. График функции не имеет точек разрыва, поэтому вертикальные асимптоты отсутствуют.

Горизонтальных асимптот также нет, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2 + 1} = \pm\infty$.

Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 + 1)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{x}{x^2 + 1}\right) = 0.$$

То есть график функции имеет наклонную асимптоту $y = x$ — это прямая, проходящая через начало координат и равнонаклоненная к осям.

Читателям предлагается самостоятельно изобразить график функции с асимптотой.

6.9 Схема исследования функций

Приведем ориентировочную схему последовательности исследования функций и построения их графиков.

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность. Определить периодичность.
3. Найти асимптоты: вертикальные, горизонтальные и наклонные.
4. Найти экстремумы и интервалы монотонности.
5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба.
6. Найти точки пересечения с осями координат и другие точки, уточняющие график.

Исследование функции рекомендуется проводить параллельно с построением ее графика.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е (рис. 6.8).

1. Область определения функции — вся числовая ось, за исключением точки $x = 0$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной. Периода функция не имеет.

3. Найдем предел функции при приближении слева и справа к точке разрыва

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{(x-1)^3}{x^2} = -\infty.$$

Следовательно, отрицательное направление оси ординат (прямой $x = 0$) является вертикальной асимптотой кривой.

4. Исследуем поведение функции на бесконечности (найдем горизонтальные асимптоты):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{x^2} = \infty,$$

то есть горизонтальных асимптот нет.

5. Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x\cdot x^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{x^2} - 1\cdot x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2+3x-1}{x^2} = -3.$$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты $y = x - 3$.

6. Находим первую производную функции $y' = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$.

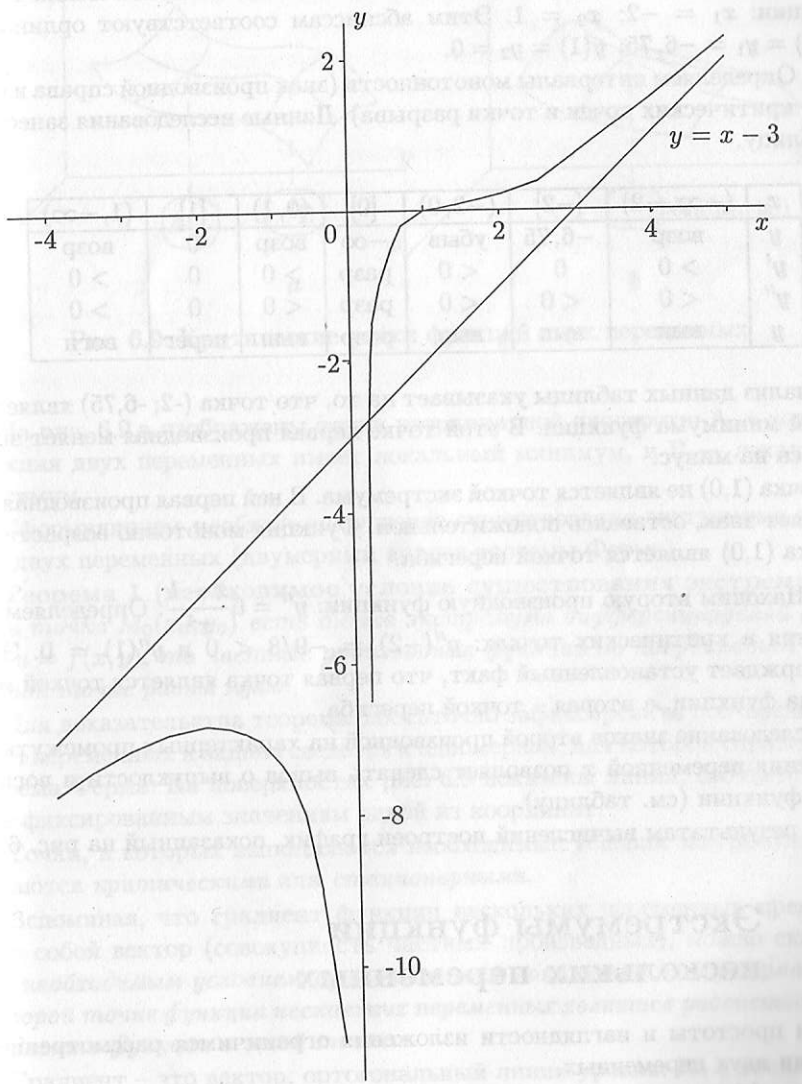


Рис. 6.8: Исследование функции

Приравнивая производную нулю, находим абсциссы критических точек функции: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. Этим абсциссам соответствуют ординаты: $y(-2) = y_1 = -6,75$; $y(1) = y_2 = 0$.

7. Определяем интервалы монотонности (знак производной справа и слева от критических точек и точки разрыва). Данные исследования занесены в таблицу.

x	$(-\infty,-2)$	$[-2]$	$(-2,0)$	$[0]$	$(0,1)$	$[1]$	$(1,-\infty)$
y	возр	$-6,75$	убыв	$-\infty$	возр	0	возр
y'	>0	0	<0	разр	>0	0	>0
y''	<0	<0	<0	разр	<0	0	>0
y	вып	вып	вып	разр	вып	перег	вогн

Анализ данных таблицы указывает на то, что точка (-2; -6,75) является точкой минимума функции. В этой точке первая производная меняет знак с плюса на минус.

Точка (1,0) не является точкой экстремума. В ней первая производная не изменяет знак, оставаясь положительной. Функция монотонно возрастает, а точка (1,0) является точкой перегиба.

8. Находим вторую производную функции: $y'' = 6\dfrac{x-1}{x^4}$. Определяем ее значения в критических точках: $y''(-2) = -9/8 < 0$ и $y''(1) = 0$. Это подтверждает установленный факт, что первая точка является точкой минимума функции, а вторая – точкой перегиба.

Исследование знаков второй производной на характерных промежутках изменения переменной x позволяет сделать вывод о выпуклости и вогнутости функции (см. таблицу).

По результатам вычислений построен график, показанный на рис. 6.8.

6.10 Экстремумы функции нескольких переменных

Для простоты и наглядности изложения ограничимся рассмотрением функции двух переменных.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой *локального максимума (минимума)* функции двух переменных $u = f(x, y)$, если для любой точки $M(x, y)$ из некоторой окрестности точки M_0 будет выполнено условие

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \qquad \big(f(x_0, y_0) \leq f(x, y)\big).$$

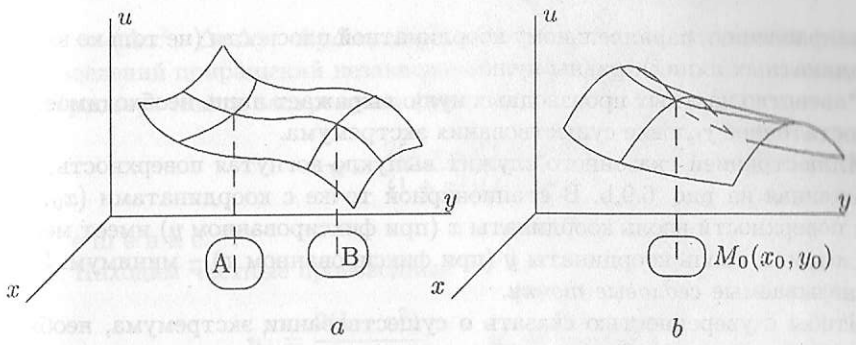


Рис. 6.9: Критические точки функций двух переменных

На рис. 6.9,а изображены точки координатной плоскости: A, в которой функция двух переменных имеет локальный минимум, и B — локальный максимум.

Сформулируем *необходимое* условие существования экстремума функции двух переменных (двумерный аналог теоремы Ферма).

Теорема 1 (необходимое условие существования экстремума). *Если точка $M_0(x_0, y_0)$ есть точка экстремума дифференцируемой функции $u = f(x, y)$, то частные производные функции по координатам x и y в этой точке равны нулю.*

Для доказательства теоремы достаточно зафиксировать поочередно одну из переменных и задача сведется к одномерной, для которой справедлива теорема Ферма. На поверхностях рис. 6.9 показаны линии, соответствующие фиксированным значениям одной из координат.

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума, называются *критическими* или *стационарными*.

Вспоминая, что градиент функции нескольких переменных представляет собой вектор (совокупность частных производных), можно сказать, что *необходимым условием существования локального экстремума в некоторой точке функции нескольких переменных является равенство нулю градиента функции в этой точке.*

Градиент – это вектор, ортогональный линии уровня. Но в точках, где функция имеет локальные максимумы или минимумы, линия уровня стягивается в точку (плоскость, параллельная плоскости переменных x и y и проходящая через стационарные точки, касается поверхности, изображающей функцию, в этой точке). Сказанное приводит к выводу о том, что в стационарных точках производные от функции двух переменных по любо-

му направлению, параллельному координатной плоскости (не только вдоль координатных линий), равны нулю.

Равенство частных производных нулю выражает лишь необходимое, но не достаточное условие существования экстремума.

Иллюстрацией сказанного служит выпукло-вогнутая поверхность, изображенная на рис. 6.9,b. В стационарной точке с координатами (x_0, y_0) этой поверхности вдоль координаты x (при фиксированном y) имеет место максимум, а вдоль координаты y (при фиксированном x) – минимум. Это так называемые *седловые точки.*

Чтобы с уверенностью сказать о существовании экстремума, необходимо воспользоваться *достаточным* условием его существования, которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2 (достаточное условие существования экстремума).

Пусть функция двух переменных $u = f(x, y)$:

а) определена и дифференцируема в некоторой точке (x_0, y_0), *в которой градиент функции равен нулю* $\left(u'_x(x_0, y_0) = u'_y(x_0, y_0) = 0\right)$;

b) имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка: $u''_{xx}(x_0, y_0) = A$; $u''_{xy}(x_0, y_0) = u''_{yx}(x_0, y_0) = B$; $u''_{yy}(x_0, y_0) = C$.

Тогда, если $\Delta = AC - B^2 > 0$, *то в точке* (x_0, y_0) *функция* $u = f(x, y)$ *имеет экстремум: при* $A < 0$ — *максимум; при* $A > 0$ — *минимум.*

Если $\Delta < 0$, *функция экстремума не имеет. При* $\Delta = 0$ *вопрос о существовании экстремума остается открытым.*

Не приводя доказательства теоремы, отметим, что оно может быть построено для двумерного пространства задания независимых переменных на аналоге зависимости формулы (6.8), вытекающей из формулы Тейлора, как это сделано в разделе 6.6:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + \right.$$

$$\left. + 2f''_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right).$$

Эта формула в случае, если (x_0, y_0) — стационарная точка (в ней градиент первого порядка функции $\nabla u\big|_{(x_0,y_0)} = \left(f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x,y)\right)$ равен нулю), принимает вид

$$\Delta u = f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\nabla^2 u\big|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta X^2, \qquad (6.10)$$

где

$\nabla^2 u = \left(f''_{xx}(x,y),\ f''_{xy}(x,y),\ f''_{yx}(x,y),\ f''_{yy}(x,y)\right)$ — совокупность координат вектора градиента функции $u = f(x, y)$;

$\Delta X^2 = \left(\Delta x^2,\ \Delta x\Delta y,\ \Delta y\Delta x,\ \Delta y^2\right)$ — совокупность координат вектора произведений приращений независимых переменных.

Пример. Найти экстремумы функции

$$u = \frac{2(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Р е ш е н и е.

1. Находим частные производные

$$u'_x = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}; \qquad u'_y = \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

2. Приравнивая частные производные нулю, записываем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0, \\ \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} = 0. \end{cases}$$

Система имеет четыре решения (стационарных точки): (1,1), (1,-1), (-1,1) и (-1,-1), в правильности определения которых можно убедиться подстановкой их в систему.

3. Находим все частные производные второго порядка

$$u''_{xx} = -\frac{8x}{(1+x^2)^2}; \qquad u''_{xy} = u''_{yx} = 0; \qquad u''_{yy} = -\frac{8y}{(1+y^2)^2}$$

и их значения в стационарных точках.

Для точки (1,1): $A = u''_{xx}(1,1) = -\dfrac{8\cdot 1}{(1+1^2)^2} = -2$; $B = 0$; $C = -2$. Так как $\Delta = AC - B^2 = (-2)^2 - 0 = 4 > 0$ и $A = -2 < 0$, то, следуя теореме 2, устанавливаем, что точка (1,1) является точкой максимума функции.

Аналогично устанавливаем, что $(-1,-1)$ — точка минимума ($\Delta > 0$; $A = 2 > 0$), а в оставшихся двух точках, где $\Delta = 0$, экстремума нет. Эти точки — седловые.

4. Находим экстремумы функции:

$$u_{max} = u(1,1) = 2; \qquad u_{min} = u(-1,-1) = -2.$$

Выше описаны локальные экстремумы. Для того чтобы определить наибольшие и наименьшие значения функции в области задания переменной X,

включающей ее границу, необходимо сравнить между собой все локальные экстремумы функции внутри области и значения функции на граничных точках задания X.

В экономике задачам отыскания экстремумов функций нескольких переменных уделяется исключительно большое внимание. В последнее время сформирован большой раздел математики, называемый *теорией операций*, который призван облечь в математические модели сложные процессы, происходящие в реальном мире, в том числе в управлении и экономике. Вопросам исследования операций будут посвящены последние разделы программы математики для экономических специальностей.

6.11 Условные экстремумы функций нескольких переменных

При проведении экономических исследований часто встречается задача на ождения экстремумов функций нескольких переменных при наличии *дополнительных связей,* накладываемых на ее аргументы. Такие экстремумы называют *условными.*

Рассмотрим, например, параболоид вращения, описываемый функцией $u = x^2 + y^2 \quad (x, y \in \Re)$. Эта функция, график которой представлен на рис.6.10 и совокупность независимых переменных которой отождествляется с плоскостью xy, имеет *безусловный* минимум $u = 0$ (название подчеркивает его отличие от условного минимума) в точке $x = y = 0$.

Предположим теперь, что для этой же функции требуется найти экстремум при условии, что на переменные наложено ограничение, например, $x + y - 2 = 0$, представляющее собой прямую на плоскости xy.

Подставляя найденное из уравнения прямой значение $y = 2 - x$ в уравнение поверхности, придем к уравнению кривой $u = 2x^2 - 4x + 4$ на этой поверхности. Не представляет труда найти минимальное значение полученной функции одной переменной:

$$\min_{y=2-x} u = u_{min} = u(1,1) = 2.$$

В рассмотренном примере условный минимум не совпадает с безусловным.

Опишем постановку задачи нахождения условного экстремума в общем виде.

Пусть задана функция $m + n$ переменных

$$u = f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), \qquad (6.11)$$

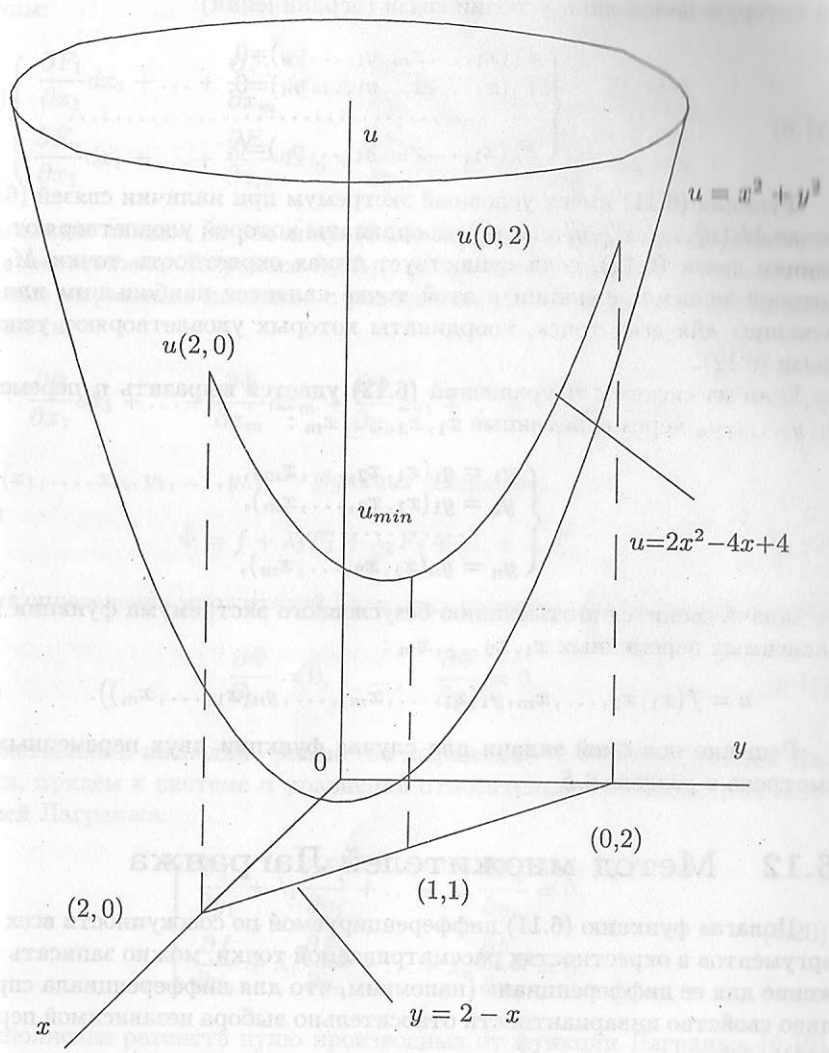


Рис. 6.10: Условный минимум

на которую наложено n условий связи (ограничений):

$$\begin{cases} F_1(x_1,\dots x_m,y_1,\dots y_n)=0,\\ F_2(x_1,\dots x_m,y_1,\dots y_n)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ F_n(x_1,\dots x_m,y_1,\dots y_n)=0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Функция (6.11) имеет условный экстремум при наличии связей (6.12) в точке $M_0(x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0,\dots,y_n^0)$, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи (6.12), если существует такая окрестность точки M_0, для которой значение функции в этой точке является наибольшим или наименьшим для всех точек, координаты которых удовлетворяют условиям связи (6.12).

Если из системы n уравнений (6.12) удастся выразить n переменных $y_1,y_2,\dots,y_n$ через переменные $x_1,x_2,\dots,x_m$:

$$\begin{cases} y_1=g_1(x_1,x_2,\dots,x_m),\\ y_2=g_1(x_1,x_2,\dots,x_m),\\ \dots\dots\dots\dots\\ y_n=g_n(x_1,x_2,\dots,x_m), \end{cases} \tag{6.13}$$

то задача сводится к отысканию безусловного экстремума функции m независимых переменных $x_1,x_2\dots,x_m$:

$$u=f\big(x_1,x_2,\dots,x_m,g_1(x_1,\dots,x_m),\dots,g_n(x_1,\dots,x_m)\big). \tag{6.14}$$

Решение подобной задачи для случая функции двух переменных рассмотрена в разделе 6.5.

6.12 Метод множителей Лагранжа

Полагая функцию (6.11) дифференцируемой по совокупности всех своих аргументов в окрестностях рассматриваемой точки, можно записать выражение для ее дифференциала (напомним, что для дифференциала справедливо свойство инвариантности относительно выбора независимой переменной):

$$du=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}dx_m+\frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial y_n}dy_n=0. \tag{6.15}$$

Так как соотношения (6.13) являются решениями системы уравнений (6.12), то их подстановка в систему превращает уравнения (6.12) в тождества. Дифференцируя эти тождества по всем независимым переменным,

получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1+\dots+\dfrac{\partial F_1}{\partial x_m}dx_m+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1+\dots+\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}dy_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}dx_1+\dots+\dfrac{\partial F_n}{\partial x_m}dx_m+\dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}dy_1+\dots+\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}dy_n=0. \end{cases} \tag{6.16}$$

Умножим каждое из равенств (6.16) на произвольные неопределенные (пока) *множители Лагранжа* $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ соответственно и сложим полученные выражения почленно с равенством (6.15). В результате придем к равенству

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}dx_m+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}dy_1+\dots+\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}dy_n=0, \tag{6.17}$$

где $\Phi\big(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n\big)$ — *функция Лагранжа*

$$\Phi=f+\lambda_1F_1+\lambda_2F_2+\dots+\lambda_nF_n. \tag{6.18}$$

Для определения множителей Лагранжа потребуем выполнения условий

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}=0,\quad\dots,\quad\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}=0. \tag{6.19}$$

Подставляя в последние равенства выражение (6.18) для функции Лагранжа, придем к системе n уравнений относительно n неизвестных множителей Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}+\dots+\lambda_n\dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial f}{\partial y_n}+\lambda_1\dfrac{\partial F_1}{\partial y_n}+\dots+\lambda_n\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}=0. \end{cases} \tag{6.20}$$

Выполнение равенств нулю производных от функции Лагранжа (6.19) перекликается с требованием экстремальности Φ по переменным y_r $(r=\overline{1,n})$.

При выполнении равенств (6.19) из (6.15) получим в силу произвольности дифференциалов независимых переменных x_k $(k=\overline{1,m})$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=0,\quad\dots,\quad\frac{\partial\Phi}{\partial x_m}=0. \tag{6.21}$$

Добавляя к уравнениям (6.19) и (6.21) условия связи (6.12), получим систему $m+2n$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}=0, & \ldots, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_m}=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_1}=0, & \ldots, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_n}=0, \\ F_1=0, & \ldots, & F_n=0. \end{cases} \tag{6.22}$$

Записанная система уравнений позволяет определить $m+n$ координат x_k $(k=\overline{1,m})$ и y_r $(r=\overline{1,n})$ точек возможного условного экстремума, а также n множителей Лагранжа λ_r $(r=\overline{1,n})$.

Приведем последовательность реализации метода неопределенных множителей Лагранжа.

1. Составляется функция Лагранжа (6.18).

2. Для этой функции как функции $m+2n$ неизвестных x_k, y_r и λ_r находят точки безусловного экстремума.

3. Исключают множители λ_r, используя условия связи (6.12).

Пример 1. Методом неопределенных множителей Лагранжа найти условный минимум по данным примера, рассмотренного в разделе 6.11, то есть для функции $u=x^2+y^2$ при ограничении $x+y-2=0$.

Р е ш е н и е. Согласно обозначениям этого раздела, для заданной функции имеем соответствия $x_1=x, y_1=y, \quad u=f(x_1,y_1)=x^2+y^2$, $F_1(x_1,\ldots,y_1\ldots)=F(x,y)=x+y-2=0$.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$\Phi=f+\lambda F=x^2+y^2+\lambda(x+y-2).$$

2. Получим уравнения системы (6.22):

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2x+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=2y+\lambda=0,$$

$$F_1=F=x+y-2=0.$$

3. Запишем полученные уравнения в виде системы (6.22):

$$\begin{cases} 2x+\lambda=0, \\ 2y+\lambda=0, \\ x+y-2=0. \end{cases}$$

4. Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем эти неизвестные:

$$x=y=1, \quad \lambda=-1/2.$$

С учетом полученного решения находим условный экстремум заданной функции при введенных ограничениях:

$$\min_{x+y=2} u=u(1,1)=1^2+1^2=2.$$

Результат совпадает с полученным в предыдущем разделе.

Пример 2. Задана функция Кобба-Дугласа, характеризующая объем производства некоторого предприятия:

$$Q(x,y)=Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}.$$

Здесь A,α — некоторые постоянные для данного производства величины; x,y — затраты капитала и суммарные затраты ресурсов. Кроме того, известны цены затрат капитала P_x и ресурсов P_y, так что общая стоимость затрат C может быть подсчитана по формуле

$$C=P_xx+P_yy.$$

Требуется найти такие значения величин x и y, которые бы при фиксированном объеме выпуска продукции $Q=Q_0$ обеспечивали минимум затрат.

Р е ш е н и е. Математическая формулировка задачи на условный экстремум: найти минимум функции C двух переменных x и y при ограничении $Q(x,y)=Q_0$.

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi=P_xx+P_yy+\lambda\bigl(Q_0-Ax^{\alpha}y^{1-\alpha}\bigr).$$

Запишем необходимые условия минимума этой функции:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0.$$

После нахождения частных производных приходим к системе трех уравнений с тремя неизвестными x,y и λ:

$$\begin{cases} Q_0-Ax^{\alpha}y^{1-\alpha} &= 0, \\ P_x-\lambda\alpha Ax^{\alpha-1}y^{1-\alpha} &= 0, \\ P_y-\lambda(1-\alpha)Ax^{\alpha}y^{-\alpha} &= 0. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений множитель λ, получим искомое оптимальное решение

$$x = \frac{Q_0}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{P_x}{P_y}\right)^{\alpha-1}, \quad y = \frac{Q_0}{A}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{P_x}{P_y}\right)^{\alpha}.$$

6.13 Вопросы

1. Сформулируйте теорему Ферма. Дайте ее геометрическую интерпретацию.
2. Почему для выполнения теоремы Ферма ставится условие дифференцируемости функции?
3. Изобразите графически ситуации, когда невыполнение требования дифференцируемости функции делает несправедливой теорему Ферма.
4. Ответьте на вопросы пунктов 1 – 3 по отношению к теоремам Ролля и Лагранжа.
5. Запишите формулу Коши. Покажите, как из нее можно получить форму у Лагранжа.
6. Сформулируйте правило Лопиталя. Где оно может быть использовано?
7. Какие виды неопределенностей раскрываются с использованием правила Лопиталя? Как к этим видам неопределенностей привести другие?
8. Какие функции называются монотонно возрастающими? Убывающими?
9. Могут ли монотонные функции иметь разрывы? Иметь равные нулю производные?
10. Сформулируйте необходимое и достаточное условия возрастания и убывания функции. Поясните сказанное на графиках функций.
11. Что называется локальным экстремумом функции?
12. Какие существуют виды экстремумов?
13. Что общего и в чем разница между точкой экстремума и критической точкой?
14. Дайте определения минимума и максимума функции. Запишите соответствующие математические выражения и сделайте графическую иллюстрацию.

15. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума. Почему это условие нельзя считать достаточным? Пояснение сопроводите графиками функций.
16. Сформулируйте два достаточных условия существования экстремумов. Поясните их смысл и докажите справедливость.
17. Всегда ли неравенство нулю второй производной в критической точке говорит о наличии в этой точке экстремума?
18. Укажите соответствие между максимумом (минимумом) функции и знаком второй производной.
19. Как связаны выпуклость и вогнутость графиков функций со знаками второй производной?
20. Запишите математическую формулировку определения выпуклости (вогнутости) функции. Сопроводите пояснения графическими построениями.
21. Что называется точкой перегиба графика функции?
22. Запишите и поясните необходимое и достаточное условия существования точки перегиба.
23. Что называется асимптотой графика функции?
24. Какие существуют виды асимптот?
25. Запишите выражения для определения горизонтальной асимптоты.
26. Как связаны понятия точки разрыва функции и вертикальной асимптоты?
27. Запишите уравнение наклонной асимптоты и выражения для определения параметров этого уравнения.
28. Опишите общую схему и последовательность исследования функции.
29. Дайте определение экстремума функции двух переменных.
30. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования экстремумов функции двух переменных.
31. Какие точки функций двух переменных называют экстремумами? Критическими точками? Стационарными?

32. Как понятие необходимого условия существования экстремума функции двух переменных связано с градиентом функции? С производной функции по любому направлению? Поясните ваши утверждения.
33. Что такое локальные экстремумы функций двух переменных и как они связаны с понятиями наибольшего и наименьшего значений функции в заданной области?
34. Что такое условный экстремум функции нескольких переменных? Поясните понятие условного экстремума на рисунке функции двух переменных.
35. Каким образом можно свести задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум?
36. В чем с ть метода неопределенных множителей Лагранжа?
37. Как записываются условия для определения множителей Лагранжа? Каков математический смысл этих условий?
38. Как образуется функция Лагранжа в соответствующем методе?

6.14 Упражнения

К разделу 6.2

Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^3-x+16}$; 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$;
3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^3+3x-10}$; 4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$; 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\ln x}$; 7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Вычислить пределы, предварительно преобразовав их к неопределенностям типа $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$:

8. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; 9. $\lim\limits_{x\to\infty}(x\ln x-\sqrt{x+x^2})$; 10. $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^{\sin x}$.

К разделам 6.4 – 6.6

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:

1. $y=x^3+2x^2-7x+4$; 2. $y=x^3(1+x^2)^{-1}$; 3. $y=x\ln^2 x$;
4. $y=\sqrt{\ln^2 x-1}$; 5. $y=\ln(2+\cos x)$; 6. $y=e^x x^{-1}$;
7. $y=(x-1)\sqrt[3]{x}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

8. $y=3x^2-6x$ на отрезке [0, 3];
9. $y=9-x^2$ на промежутке [-3,1);
10. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{\ln x}}$ на промежутке (1, e].

К разделам 6.7 – 6.8

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функций:

1. $y=2x^3-3x^2+15$; 2. $y=2x^2+\ln x$;
3. $y=x^3-6x^2$; 4. $y=xe^x$; 5. $y=e^{-x^2}$.

Найти асимптоты графиков функций:

6. $y=\dfrac{3-4x}{2+5x}$; 7. $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; 8. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$;
9. $y=\dfrac{3x^5}{2+x^4}$; 10. $y=\dfrac{2x^3\ln x}{x^2+1}$.

К разделам 6.9 – 6.10

Исследовать функции и построить их графики:

1. $y=x^2+x$; 2. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; 3. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Найти экстремумы и критические точки функций:

4. $u=2xy-4x-2y$; 5. $u=x-e^x y$.

Глава 7

Численные методы

Определение корней, экстремумов функций, координат точек перегиба и других характеристик многих даже элементарных функций представляет собой непростую задачу.

Математические модели, описывающие реальные процессы и явления, как правило, не позволяют определить точные значения упомянутых характеристик. А получение приближенных значений требует определенных знаний в области специально разработанных для этой цели численных методов. Описанию некоторых из численных методов посвящена данная глава.

Отметим, что многие задачи определения характеристик функций сводятся к нахождению корней алгебраических уравнений. В частности, для определения точек, где функция достигает экстремальных значений, достаточно взять производную от этой функции и, приравняв ее нулю, свести задачу к определению корней полученного уравнения. Абсциссы точек перегиба определяются из уравнения, получаемого приравниванием нулю второй производной.

Поэтому задача определения корней алгебраических уравнений является ключевой в проблеме отыскания характеристик функций. Тем не менее существуют методы определения экстремальных точек непосредственно по поведению самих функций. Этим методам для функций одной переменной посвящены первые два раздела главы.

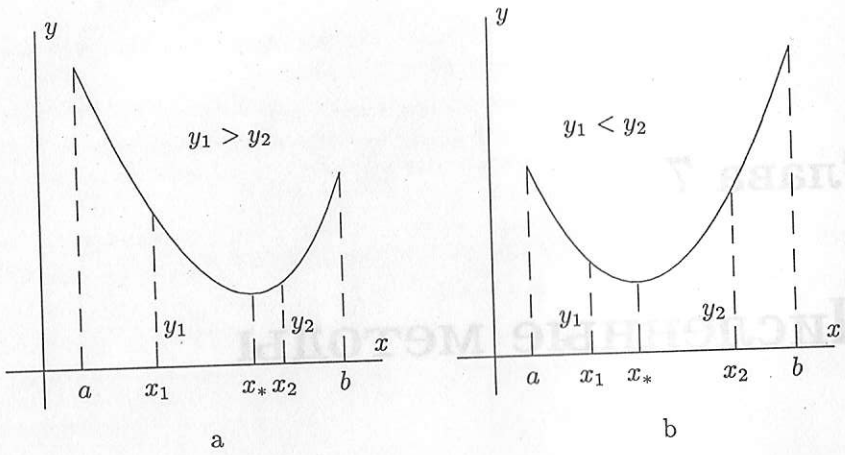


Рис. 7.1: К методу исключения интервалов

7.1 Выбор и исключение интервалов

Пусть задана непрерывная и дифференцируемая функция $y = f(x)$ и известно, что эта функция имеет единственный экстремум на интервале $[a, b]$. Такие функции называют *унимодальными*.

Для унимодальных функций сравнение значений функции на концах интервала $[a; b]$ и значений функций $f(x_1)$ и $f(x_2)$ внутри этого интервала позволяет уменьшить интервал изменения переменной, внутри которого находится экстремум.

Теорема. *Пусть функция $y = f(x)$ унимодальна на интервале $[a, b]$ и достигает минимума (максимума) в некоторой точке $x_* \in [a, b]$. Тогда из сравнения значений функции в двух точках x_1 и x_2 $(a < x_1 < x_2 < b)$ следует:*

1. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то точка x_* не лежит (лежит для максимума) в интервале $[a, x_1)$, а лежит (не лежит) в интервале $[x_1, b)$.

2. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то точка x_* лежит (не лежит для максимума) в интервале $[a, x_1)$, и не лежит (лежит) в интервале $[x_1, b)$.

3. Если $f(x_1) = f(x_2)$, то точка x_* лежит в интервале $[x_1, x_2]$.

Точки $x_1, x_2 \ldots$, выбранные произвольно, или, следуя какому-либо алгоритму внутри интервала $[a, b]$, будем называть *пробными точками*.

На рис. 7.1,a,b изображены интервалы с минимальными значениями функций, соответствующие пунктам 1 и 2 теоремы.

Читателям предлагается изобразить аналогичные графики функций,

имеющих максимум на $[a, b]$, а также график функций с максимумом и минимумом, соответствующий пункту 3 теоремы.

Используя положения теоремы, можно последовательно сужать интервал нахождения экстремума до тех пор, пока значения функции в двух внутренних точках станут достаточно близкими и, следовательно, примерно равными экстремальному значению.

Суть описываемого метода, называемого методом *исключения интервалов*, заключается в том, что на каждом приближении исключается из рассмотрения тот интервал изменения функции, на котором, согласно теореме, отсутствует экстремум. На оставшемся интервале выбирается дополнительная точка (удобно ее выбирать в середине одного из оставшихся подынтервалов) и снова производится сравнение значений функции во внутренних точках интервала.

Метод исключения интервалов удобен тем, что при его использовании не привлекаются производные функции (использование производных в численном анализе может привести к существенному снижению точности вычислений).

При формулировке теоремы этого раздела предполагалось, что интервал $[a, b]$, на котором находится один экстремум функции, найден. Оказывается, что изложенный метод исключения интервалов может быть привлечен и к установлению границ начального интервала.

Опишем процедуру установления такого интервала на примере функции, имеющей минимум справа от некоторой фиксированной координаты $x = x_0$. Для случая максимума все рассуждения будут аналогичны и отличаться знаками неравенств.

Заметим сразу, что при принятых условиях функция, по крайней мере в окрестности точки x_0, справа от нее убывает.

Выберем справа от точки x_0 две пробные точки x_1 и $x_2 > x_1$ и сравним значения функции в этих точках. Как и в изложенной выше теореме, при этом могут иметь место три ситуации:

1. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то минимума на интервале $[x_0, x_1]$ нет.
2. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то минимум находится на интервале $[x_0, x_2]$.
3. Если $f(x_1) = f(x_2)$, то минимум находится на интервале $[x_1, x_2]$.

В случаях 2 и 3 указанные концы интервалов принимают за границы начального интервала $[a, b]$ и далее решают задачу отыскания минимума функции на этом интервале.

Для ситуации пункта 1 исключают из рассмотрения интервал $[x_0, x_1]$, выбирают следующую пробную точку $x_3 > x_2$ и для трех точек x_1, x_2 и x_3 проводят анализ, следуя пунктам 1 – 3. И так до тех пор, пока не будет найден интервал с минимумом функции.

Значения координаты каждой последующей пробной точки удобно выбирать таким образом, чтобы следовать определенной логике, которая необходима при составлении программ для ЭВМ. Проще всего выбирать значения координат, отстоящих друг от друга на равные расстояния. Есть и другие алгоритмы. Например, Свенн предложил координаты каждой последующей пробной точки x_{n+1} определять по координатам предыдущей точки x_n и некоторому постоянному параметру d :

$$x_{n+1} = x_n + 2^n d.$$

Пример. Найти минимальное значение функции $y = (100 - x)^2$ численным методом исключения интервалов.

Р е ш е н и е. Будем определять координаты пробных точек интервала по формуле Свенна, для чего примем $x_0 = 50$; $d = 5$. Тогда $x_1 = x_0 + 2^0 \cdot d = 50 + 5 = 55$; $x_2 = x_1 + 2^1 \cdot d = 55 + 2 \cdot 5 = 65$.

Найдем значения функции в точках x_0, x_1, x_2 :

$f(x_0) = f(50) = (100 - 50)^2 = 2500$;

$f(x_1) = f(55) = (100 - 55)^2 = 2025 < f(x_0)$;

$f(x_2) = f(65) = (100 - 65)^2 = 1225 < f(x_1)$.

Сравнение значений функций, согласно изложенной выше схеме, указывает на то, что для выявления интервала, содержащего минимум функции, необходимо рассмотреть новые точки. Поэтому находим еще одну пробную точку $x_3 = x_2 + 2^2 d = 65 + 4 \cdot 5 = 85$ и

$f(x_3) = f(85) = (100 - 85)^2 = 225 < f(x_2)$.

Для $x_4 = x_3 + 2^3 d = 85 + 8 \cdot 5 = 125$:

$f(x_4) = f(125) = (100 - 125)^2 = 625 > f(x_4)$.

В точке x_4 функция возросла по сравнению с точкой x_3, поэтому минимум следует искать на интервале $[x_2, x_4] = [65, 125]$.

Определение интервала нахождения минимума функции состоялось. Для построения алгоритма уменьшения интервала рассмотрим метод, основанный на понятии золотого сечения.

Предварительно, возвращаясь к примеру, заметим, что в точке $x = 100$ $f(100) = 0 < f(x_3)$. Поэтому для дальнейших поисков точки минимума функции можно ограничиться интервалом $[a; b] = [85; 125]$.

7.2 Метод золотого сечения

Пусть известно, что функция $y = f(x)$ – унимодальна на интервале $[a, b]$, то есть имеет на этом интервале единственный экстремум. Для удобства его отыскания введем безразмерную координату $\omega = \dfrac{x - a}{b - a}$, которая

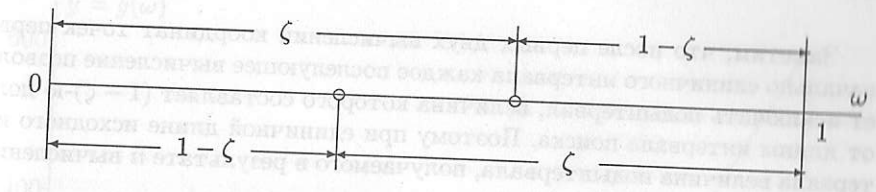


Рис. 7.2: Метод золотого сечения

изменяется в пределах от нуля до единицы. Действительно, $\omega = 0$ при $x = a$ и $\omega = 1$ при $x = b$.

При введении новой переменной $y = f(x)$ становится сложной функцией от ω, так как $x = a + (b - a)\omega$. Будем считать, что $y = g(\omega)$.

Рассмотрим симметричное расположение двух пробных точек на интервале единичной длины и отстоящих от граничных точек интервала на расстоянии ζ (рис. 7.2).

При таком симметричном расположении пробных точек длина отрезка, остающегося после исключения подынтервала длины $(1 - \zeta)$, равна ζ и не зависит от того, какой именно подынтервал исключается из рассмотрения.

Остающийся отрезок содержит одну пробную точку, расположенную на расстоянии $(1 - \zeta)$ от границы отрезка, противоположной отброшенному подынтервалу.

Для того чтобы симметрия поискового процесса сохранялась, расстояние $(1 - \zeta)$ должно составлять ζ-ю часть длины оставшегося подынтервала, длины ζ. То есть

$$\frac{1 - \zeta}{\zeta} = \zeta, \qquad \text{или} \qquad \zeta^2 + \zeta - 1 = 0.$$

При таком выборе ζ следующая пробная точка размещается на расстоянии, составляющем ζ-ю часть длины оставшегося интервала и откладываемом от одной из его граничных точек.

Решая последнее записанное уравнение, получим

$$\zeta = (1 \pm \sqrt{5})/2.$$

Положительное решение этого уравнения: $\zeta \approx 0,618$.

Схема поиска требуемых значений функции, в частности ее экстремумов, основанная на изложенном методе симметричного последовательного дробления интервалов, носит название *метода золотого сечения*.

Заметим, что после первых двух вычислений координат точек первоначально единичного интервала каждое последующее вычисление позволяет исключать подынтервал, величина которого составляет $(1-\zeta)$-ю долю от длины интервала поиска. Поэтому при единичной длине исходного интервала величина подынтервала, получаемого в результате n вычислений, равна $\mathrm{Int}\,\omega_n = \zeta^{n-1}$.

Пример. Найти минимальное значение функции $y = (100-x)^2$, для которой в предыдущем разделе установлен интервал $[85;125]$ изменения x, внутри которого располагается экстремум.

Р е ш е н и е.

1. Переходим к безразмерной координате $\omega \in [0,1]$:

$$\omega = \frac{x-b}{a-b} = \frac{x-85}{125-85} = \frac{1}{40}(x-85).$$

Отсюда

$$x = 85 - 40\omega$$

и

$$y = f(x) = (100-x)^2 = (100-85+40\omega)^2 = (15-40\omega)^2 = g(\omega).$$

2. Организуем, согласно методу золотого сечения, алгоритм дробления отрезка $\omega \in [0,1]$. При $\zeta = (-1+\sqrt{5})/2 \approx 0,618$: $\omega_1 = \zeta = 0,618$; $\omega_2 = 1-\zeta = \zeta^2 = 0,382$.

На рис. 7.3 нанесены эти и последующие точки сужаемого от приближения к приближению интервала. Каждый последующий интервал выделен дополнительной прямой, параллельной оси ω.

3. Определяем значения $y = g(\omega)$ в точках ω_1 и ω_2 и сравниваем их значения. При этом имеем в виду, что значения функции y на концах исходного интервала известны (были определены в предыдущем разделе $g(0) = 225$, $g(1) = 625$), и известно, что функция имеет минимум на интервале:

$g(\omega_1) = (15 - 40 \cdot 0,618)^2 \approx 94,48$;

$g(\omega_2) = (15 - 40 \cdot 0,372)^2 \approx 0,01 < g(\omega_1)$.

Согласно пункту 2 теоремы предыдущего раздела об интервалах, приходим к выводу о том, что минимум функции лежит в интервале $(0;\omega_1) = (0;0,618)$.

4. Определяем координату пробной точки на следующем приближении

$\omega_3 = \zeta^3 = 0,618^3 \approx 0,236$

и находим

$g(\omega_3) = (15 - 40 \cdot 0,236)^2 \approx 30,91 > g(\omega_2)$.

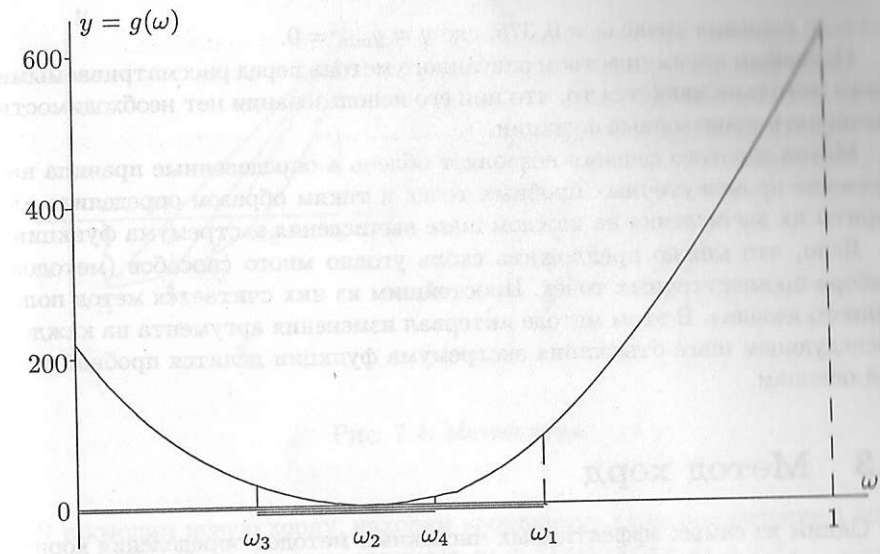


Рис. 7.3: Итерации метода золотого сечения

Поэтому минимум находится на интервале $(\omega_3;\omega_1) = (0,236;0,618)$.

5. Переходим к следующему приближению

$\zeta^4 = 0,618^4 \approx 0,146$

и находим

$\omega_4 = \omega_1 - \zeta^4 = 0,618 - 0,146 = 0,472$.

Последнее вычисление требует разъяснений.

При изложении сути метода золотого сечения было сказано, что на каждом приближении новые точки разбиения выбираются как ζ-я доля сформированного к рассматриваемому приближению интервала. Величина остающегося на n-ном приближении интервала $Int\omega_n = \zeta^{n-1}$.

На рассматриваемом приближении установлено, что подынтервал $(\omega_4;\omega_1)$, который следует исключить из интервала $(\omega_3;\omega_1)$, отсчитывается со стороны координаты ω_1 (см. рисунок). Поэтому интервал следующего приближения получился из интервала предыдущего путем вычитания из координаты ω_1 подынтервала рассматриваемого приближения, равного ζ^4.

$g(\omega_4) = (15 - 40 \cdot 0,472)^2 \approx 15,05 > g(\omega_2)$.

Минимум находится на интервале $(\omega_3;\omega_4) = (0,236;0,472)$.

И так далее. Процесс приближений сходится к найденной из аналити-

ческого решения точке $\omega = 0,375$, где $y = y_{\min} = 0$.

Основным преимуществом описанного метода перед рассматриваемыми ниже методами является то, что при его использовании нет необходимости вычислять производные функции.

Метод золотого сечения позволяет облечь в определенные правила значение промежуточных пробных точек и таким образом определить алгоритм их вычисления на каждом шаге вычисления экстремума функции.

Ясно, что можно предложить сколь угодно много способов (методов) выбора промежуточных точек. Простейшим из них считается метод половинного деления. В этом методе интервал изменения аргумента на каждом последующем шаге отыскания экстремума функции делится пробной точкой пополам.

7.3 Метод хорд

Одним из самых эффективных численных методов определения корней уравнений является метод хорд и касательных.

Считаем, что для заданной функции $y = f(x)$ выделен промежуток $[a, b]$, на котором функция имеет единственный корень. Полагаем, что функция определена и дифференцируема на $[a, b]$.

Рассмотрим сначала *метод хорд*.

Определив значения функции на концах промежутка $[a, b]$ $(y_a = f(a), y_b = f(b))$, запишем уравнение хорды – прямой AB (рис. 7.4,a), проходящей через точки графика функции, соответствующие концам промежутка:

$$y - y_a = \frac{y_b - y_a}{b - a}(x - a). \tag{7.1}$$

Найдем координату x_1 точки пересечения этой прямой с осью абсцисс. Из уравнения 7.1 при $y = 0$ получим

$$x_1 = a - \frac{b - a}{y_b - y_a} y_a.$$

Координата x_1 пересечения хорды AB с осью абсцисс является приближенным значением корня на первой итерации, которая на этом и заканчивается. Чтобы уточнить значение корня, необходимо продолжить итерационный процесс.

Для решения задачи на второй итерации определяем на графике функции ординату точки A_1, соответствующую x_1 : $y_1 = f(x_1)$. Через точки A_1

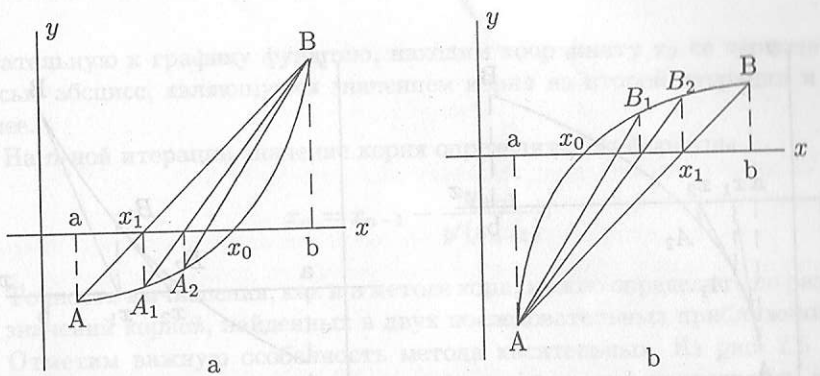


Рис. 7.4: Метод хорд

и B проводим новую хорду, находим координату x_2 ее пересечения с осью абсцисс. По ней определяем ординату $y_2 = f(x_2)$ точки A_2 и т.д.

Значение корня уравнения на n-ной итерации определится по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b - x_{n-1}}{y_b - y_{n-1}} y_{n-1}. \tag{7.2}$$

Процесс итераций завершается, когда разность приближенных значений корней $(x_n - x_{n-1})$ становится меньше заданной точности решения задачи. В этом случае считаем, что корень уравнения $f(x) = 0$ $x_0 \approx x_n$.

Процесс последовательных приближений к точному решению x_0 рассмотрен на примере вогнутой на отрезке $[a, b]$ функции. В этом случае приближение к x_0 шло от точки A к точке B.

Если функция выпуклая (рис. 7.4,b), то приближение к точному решению будет идти справа налево. При этом значение корня уравнения на n-ной итерации

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - a}{y_{n-1} - y_a} y_{n-1}.$$

В случае, если функция внутри промежутка $[a, b]$ выпукло-вогнутая, направления приближений к точному решению могут в процессе итераций изменяться.

Читателю предлагается изобразить график такой функции и убедиться в справедливости сказанного.

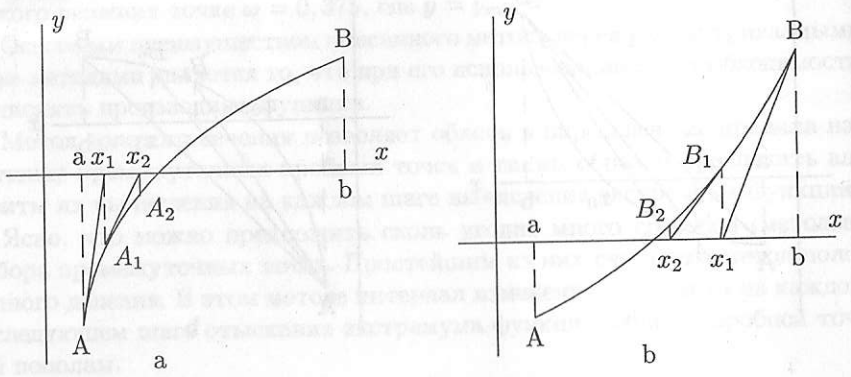


Рис. 7.5: Метод касательных

7.4 Метод касательных

Еще одним итерационным методом отыскания корней уравнения дифференцируемой функции является *метод касательных*. Он заключается в следующем.

Через точку A графика функции $y = f(x)$, соответствующую началу интервала на рис. 7.5,а (точку B — конца интервала на рис. 7.5,b), проводится касательная к кривой.

Уравнение касательной к графику функции — это уравнение прямой, проходящей через заданные точки $A(a, y_a)$ или $B(b, y_b)$ в заданных направлениях, определяемых угловыми коэффициентами (тангенсами угла наклона касательной к оси абсцисс) $k_A = y'(a)$ или $k_B = y'(b)$:

$$y - y_a = y'(a)(x - a) \qquad \text{или} \qquad y - y_b = y'(b)(x - b). \tag{7.3}$$

Находим точку пересечения выбранной прямой 7.3 с осью абсцисс, приравнивая нулю координату y :

$$x_1 = a - \frac{y_a}{y'(a)} \qquad \text{или} \qquad x_1 = b - \frac{y_b}{y'(b)}. \tag{7.4}$$

Найденное по одной из этих формул значение координаты x_1 является приближенным значением искомого корня на первой итерации. Для его более точного определения переходим ко второй итерации. Для этого находим координату $y_1 = f(x_1)$ точки A_1 (или B_1), проводим через эту точку

касательную к графику функцию, находим координату x_2 ее пересечения с осью абсцисс, являющуюся значением корня на второй итерации и так далее.

На n-ной итерации значение корня определится из формулы

$$x_n = x_{n-1} - \frac{y_{n-1}}{y'(x_{n-1})}. \tag{7.5}$$

Точность вычисления, как и в методе хорд, можно определить по разности значений корней, найденных в двух последовательных приближениях.

Отметим важную особенность метода касательных. Из рис. 7.5 видно, что начальные касательные к графикам функций проводились в тех граничных точках промежутка $[a, b]$, где выпуклость графика функции направлена в сторону оси абсцисс. Если этого условия не придерживаться и провести касательную к графику функции на другом конце промежутка (в точке B для рис. 7.5,а или в точке A для рис. 7.5,b), то такая касательная пересечет ось абсцисс за пределами исследуемого интервала. Если продолжить итерационный процесс при таком выборе начальных точек, то он, как правило, не будет сходиться к точному решению.

Для функций, которые изменяют внутри промежутка $[a, b]$ выпуклость так, что на всем промежутке кривая графика функции направлена вогнутостью к оси абсцисс (на оси располагается точка перегиба), применение метода касательных вообще бесполезно.

Предлагаем читателю проанализировать описанные ситуации на графиках функций.

Вспоминая связь второй производной с выпуклостью функции, можно записать правило выбора начальной точки для организации итерационного процесса по методу касательных.

Правило. *Начальная точка для организации итерационного процесса по методу касательных выбирается таким образом, чтобы в этой точке знаки функции и второй производной совпадали.*

7.5 Метод хорд и касательных

На практике целесообразно применять методы хорд и касательных одновременно, чередуя их в процессе итераций.

Это во многих случаях дает возможность приближаться к точному решению сразу с двух сторон числовой оси.

Пример. Найти экстремальное значение функции

$$g(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + x + \frac{3}{2},$$

если известно, что оно находится на промежутке $[-1,5; 0]$.

Р е ш е н и е.

Для решения задачи найдем производную заданной функции и приравняем ее нулю (для удобства записи обозначим эту производную через y):

$$y = g'(x) = f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Таким образом, задача отыскания экстремального значения функции свелась к задаче определения корня алгебраического уравнения на заданном интервале изменения функции.

Для приближенного анализа характера поведения функции определим ее первую и вторую производные:

$$y' = 6x(x+1) + 2; \qquad y'' = 6(2x+1).$$

По поведению первой производной (положительна на всем промежутке $[-1,5; 0]$, причем $y'(-1,5) = 6,5$; $y'(0) = 2$) устанавливаем, что функция монотонно возрастает на рассматриваемом промежутке и ее производная нигде не обращается в нуль. То есть точек экстремума функция не имеет.

Что касается исходной функции $g(x)$, то производная от y является для нее второй производной. А так как $g''(x) = y'$ положительна на всем интервале $[-1,5;\ 0]$, то функция $g(x)$ имеет на этом интервале минимум.

Вторая производная $y = f(x)$ обращается в нуль в точке $x = -0,5 \in [-1,5; 0]$. Функция в этой точке имеет перегиб, где переходит от выпуклости слева от точки $(y''(-1,5) = -12 < 0)$ к вогнутости — справа от нее $(y''(0) = 6 > 0)$.

Знаки функции на концах заданного промежутка $(y(-1,5) = -2 < 0;$ $y(0) = 1 > 0)$ совпадают с соответствующими знаками вторых производных. Поэтому метод касательных можно применить для нахождения корня, опираясь при этом на любую из граничных точек функции или попеременно на обе. Будем проводить касательные к графику функции с левой его стороны.

П е р в о е п р и б л и ж е н и е.

Метод хорд. Через точки A и B проводим хорду (7.1) и по формуле (7.2) определяем координату точки ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_1^h = a - \frac{b-a}{y(b)-y(a)}y(a) = -1,5 - \frac{0-(-1,5)}{1-(-2)} \cdot (-2) = -0,5.$$

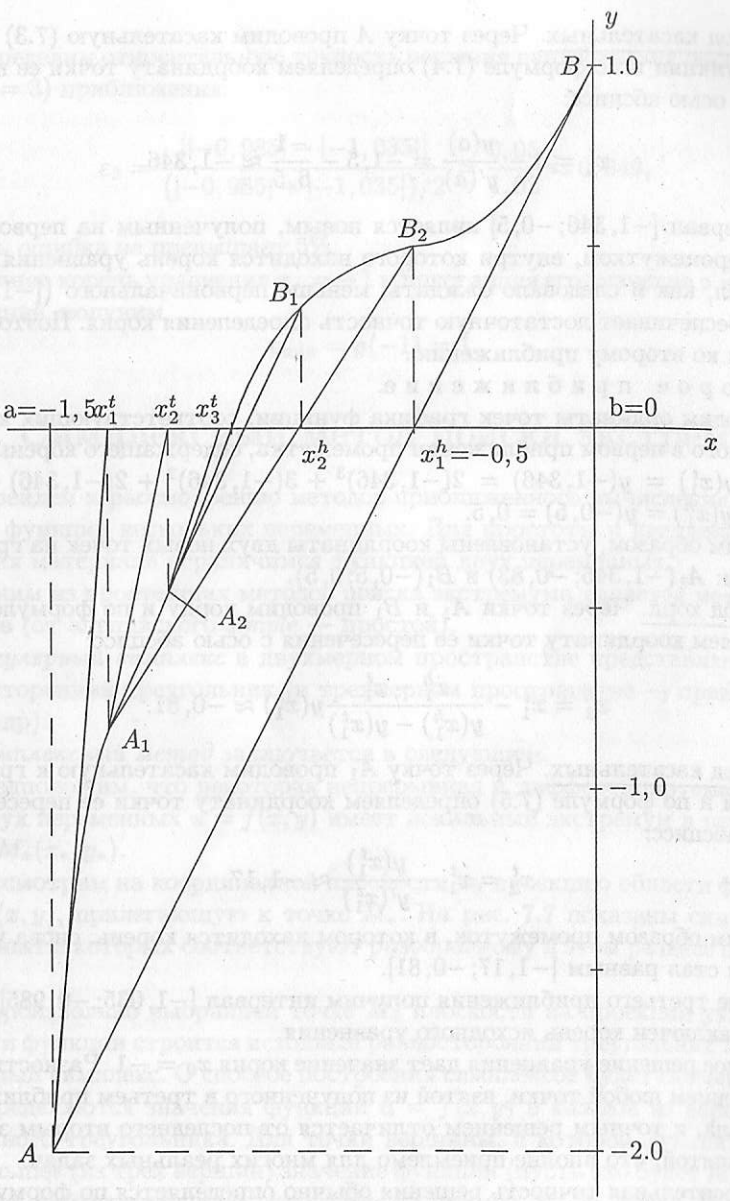


Рис. 7.6: Пример: метод хорд и касательных

Метод касательных. Через точку A проводим касательную (7.3) к графику функции и по формуле (7.4) определяем координату точки ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_1^t = a - \frac{y(a)}{y'(a)} = -1,5 - \frac{-1}{6,5} \approx -1,346.$$

Интервал $[-1,346; -0,5]$ является новым, полученным на первой итерации промежутком, внутри которого находится корень уравнения. Этот интервал, как и следовало ожидать, меньше первоначального $([-1,5; 0])$, но не обеспечивает достаточную точность определения корня. Поэтому переходим ко второму приближению.

Второе приближение.

Находим ординаты точек графика функции, соответствующих концам найденного в первом приближении промежутка, содержащего корень уравнения: $y(x_1^t) = y(-1,346) = 2(-1,346)^3 + 3(-1,346)^2 + 2(-1,346) + 1 \approx -0,83$; $y(x_1^h) = y(-0,5) = 0,5$.

Таким образом, установлены координаты двух новых точек на графике функции: $A_1(-1,346; -0,83)$ и $B_1(-0,5; 0,5)$.

Метод хорд. Через точки A_1 и B_1 проводим хорду и по формуле (7.2) определяем координату точки ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_2^h = x_1^t - \frac{x_1^h - x_1^t}{y(x_1^h) - y(x_1^t)} y(x_1^t) \approx -0,81.$$

Метод касательных. Через точку A_1 проводим касательную к графику функции и по формуле (7.5) определяем координату точки ее пересечения с осью абсцисс:

$$x_2^t = x_1^t - \frac{y(x_1^t)}{y'(x_1^t)} \approx -1,17.$$

Таким образом промежуток, в котором находится корень, снова уменьшился и стал равным $[-1,17; -0,81]$.

После третьего приближения получим интервал $[-1,035; -0,985]$, в который заключен корень исходного уравнения.

Точное решение уравнения дает значение корня $x_0 = -1$. Разность между значением любой точки, взятой из полученного в третьем приближении интервала, и точным решением отличается от последнего вторым знаком после запятой, что вполне приемлемо для многих реальных задач.

Относительная точность решения обычно определяется по формуле

$$\varepsilon_n = \frac{\big||x_n^{\max}| - |x_n^{\min}|\big|}{(|x_n^{\max}| + |x_n^{\min}|)/2}.$$

Определим относительную точность решения нашей задачи после третьего ($n = 3$) приближения:

$$\varepsilon_3 = \frac{\big||-0,985| - |-1,035|\big|}{(|-0,985| + |-1,035|)/2} = \frac{0,05}{1,02} \approx 0,049,$$

то есть ошибка не превышает 5%.

Приняв корень уравнения $x_* = -1$ и подставляя его значение в исходное уравнение, получим

$$g_{\min} = g(-1) = 1.$$

7.6 Симплексный метод поиска экстремума

Перейдем к рассмотрению методов приближенного вычисления экстремумов функций нескольких переменных. Для простоты и наглядности изложения материала ограничимся функцией двух переменных.

Одним из простейших методов поиска экстремума является метод симплексов (от английского *simple* — простой).

Регулярный симплекс в двухмерном пространстве представляет собой равносторонний треугольник (в трехмерном пространстве — правильный тетраэдр).

Симплексный метод заключается в следующем.

Предположим, что некоторая непрерывная и дифференцируемая функция двух переменных $u = f(x, y)$ имеет локальный экстремум в некоторой точке $M_*(x_*, y_*)$.

Рассмотрим на координатной плоскости xy проекцию области функции $u = f(x, y)$, прилегающую к точке M_*. На рис. 7.7 показаны симплексы, координаты которых соответствуют разобранному в этом разделе примеру (ниже).

В произвольно выбранной точке M_0 плоскости на проекции указанной области функции строится исходный равносторонний треугольник $M_0M_1M_2$ — первый симплекс. О способе построения симплексов будет сказано ниже.

Определяются значения функции $u = f(x, y)$ в каждой из вершин построенного треугольника. Для точки вершины, в которой функция имеет наибольшее (из трех вершин) значение функции (пусть это будет M_0) определяется симметричная ей относительно прямой M_1M_2 точка M_3. Точки M_1, M_2 и M_3 образуют новый симплекс-треугольник.

Далее находится значение функции в точке M_3, выявляется вершина треугольника $M_1M_2M_3$, имеющая наибольшее значение функции. Опреде-

ляется точка M_4, симметричная найденной точке с максимальным значением функции (на рисунке M_3) нового симплекс-треугольника. И так далее до тех пор, пока очередной треугольник не накроет точку минимума (максимума) функции.

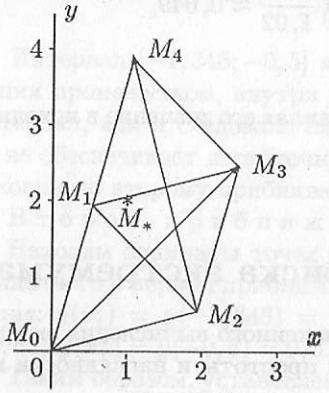


Рис. 7.7: Симплексный метод

Критерием того, что треугольник накрыл точку экстремума, является увеличение (уменьшение для максимума) значения функции в точках следующих треугольников.

Опишем один из способов построения симплекс-треугольников.

Исходная точка M_0 выбирается произвольно (с учетом опыта и интуиции расчетчика). Координаты двух других точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ можно определить, например, по формулам

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + p; \\ y_1 = y_0 + q; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x_0 + q; \\ y_2 = y_0 + p. \end{cases} \tag{7.6}$$

Здесь

$$p = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}d; \qquad q = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}d;$$

$d > 0$ — параметр, влияющий на размер симплекса. При $d = 1$ стороны симплекс-треугольников равны единице $l = \sqrt{p^2 + q^2}$. С увеличением d стороны треугольника увеличиваются и уменьшается, в общем, количество приближений, необходимых для достижения конечной цели — накрытия точки экстремума. Но при этом уменьшается точность решения. При уменьшении d наблюдается обратная картина.

Заметим, что записанные для определения p и q формулы являются частным (при n=2) случаем общих для n-мерного пространства соотношений

$$p = \left(\frac{\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{2}}\right)d; \qquad q = \left(\frac{\sqrt{n+1}+n-1}{n\sqrt{2}}\right)d. \tag{7.7}$$

В аналитической геометрии показано, что координаты точки M_3, симметричной вершине M_0 равностороннего треугольника относительно стороны M_1M_2, определяются по формулам:

$$x_3 = x_1 + x_2 - x_0; \qquad y_3 = y_1 + y_2 - y_0. \tag{7.8}$$

Пример. Найти минимальное значение функции

$$u = (1-x)^2 + (2-y)^2,$$

если известно, что точка (0,0) входит в область локального минимума этой функции.

Р е ш е н и е. Примем точку $M_0(0,0)$ за исходную для построения начального симплекса и принимаем $d = 2$.

По формулам (7.7) для $n = 2$ находим:

$$p = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}2 \approx 0,518; \qquad q = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}2 \approx 1,932.$$

Используя эти параметры, вычислим координаты двух других вершин симплекса в соответствии с (7.6):

$$x_1 = x_0 + p = 0 + 0,518 = 0,518; \quad y_1 = y_0 + q = 0 + 1,932 = 1,932;$$

$$x_2 = x_0 + q = 0 + 1,932 = 1,932; \quad y_2 = y_0 + p = 0 + 0,518 = 0,518.$$

Найдем значения функции в вершинах исходного симплекс-треугольника:
$u(M_0) = u(0;0) = (1-0)^2 + (2-0)^2 = 5;$
$u(M_1) = u(0,518;1,932) = (1-0,518)^2 + (2-1,932)^2 \approx 0,237;$
$u(M_2) = u(1,932;0,518) = (1-1,932)^2 + (2-0,518)^2 \approx 3,066.$

Так как наибольшее из полученных значений функция имеет в точке M_0, то вершину M_3 следующего симплекс-треугольника будем выбирать симметричной относительно этой точки.

По формулам (7.8) находим:

$$x_3 = x_1 + x_2 - x_0 = 0,518 + 1,932 - 0 = 2,450;$$
$$y_3 = y_1 + y_2 - y_0 = 1,932 + 0,518 - 0 = 2,450.$$

В полученной точке M_3 значение функции

$$u(M_3) = u(2,45;2,45) = (1-2,45)^2 + (2-2,45)^2 \approx 2,303.$$

Сравнивая значения функции в трех вершинах нового симплекс-треугольника $M_1M_2M_3$, устанавливаем, что ее максимальное значение имеет

вершина M_2. При построении следующего симплекс-треугольника симметрично именно этой точке относительно M_1 и M_3 следует искать новую вершину M_4:

$$x_4 = x_1 + x_3 - x_2 = 0,518 + 2,450 - 1,932 = 1,036;$$

$$y_4 = y_1 + y_3 - y_2 = 1,932 + 2,450 - 0,518 = 3,864.$$

Значения функции в этой точке

$$u(M_4) = u(1,036; 3,864) = (1 - 2,45)^2 + (2 - 2,45)^2 \approx 3,475.$$

Это значение больше, чем значения функции в любой из вершин симплекс-треугольника $M_1M_2M_3$. Такая ситуация говорит о том, что точка экстремума находится внутри указанного треугольника и продолжение приближений лишено смысла.

В общем, если процесс приближений был направлен на отыскание минимального значения функции, за ее значение можно принять наименьшее из значений функции в вершинах треугольника. То есть положить $u_{\min} \approx u(M_1) = 0,232$.

Точное минимальное значение функции, найденное аналитически $u_{\min} = u(1; 2) = 0$.

Замечание. Параметр d, отвечающий за размер симплекс-треугольника, можно изменять в процессе приближений. В частности, при приближении к точке экстремума этот параметр, как правило, уменьшают для достижения большей точности вычислений.

Изменяют этот параметр и в ситуациях, когда симплекс-треугольники выстраиваются в "циклические кольца", замыкающиеся вокруг точки экстремума.

7.7 Метод градиентного спуска

Симплексный метод отыскания экстремума функций нескольких переменных хотя и обладает простотой и наглядностью, как правило, не отличается быстротой сходимости и устойчивостью решения — итерационный процесс зачастую не сходится (образуются циклические кольца из симплекс-треугольников).

В этом смысле лучшие результаты дают методы, использующие производные от функции (частные производные для функций нескольких переменных).

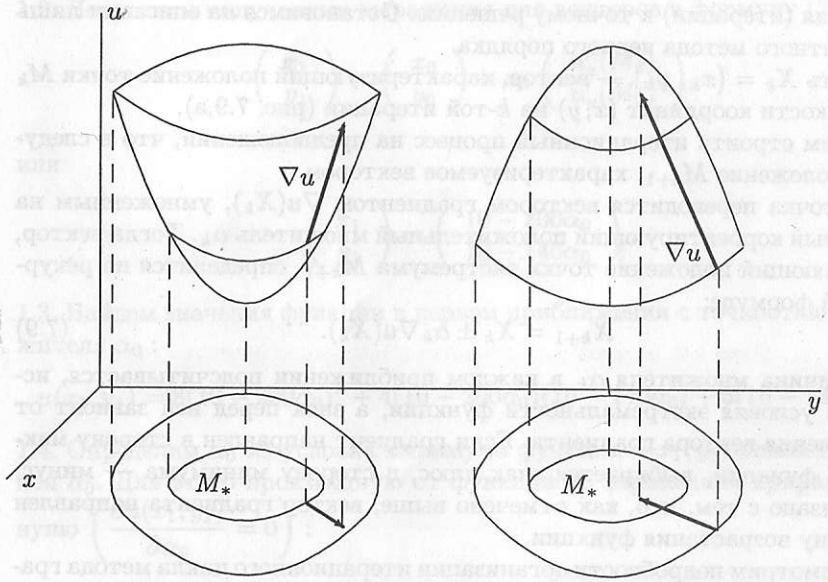


Рис. 7.8: Направления вектора градиента

Наиболее распространенным из таких методов является *метод градиентного спуска,* называемый часто *методом Коши.*

Возвращаясь к понятию градиента функции (для простоты двух переменных), напомним (см. раздел 5.10), что это вектор, ортогональный линии уровня функции $u = f(x, y)$ и направленный в сторону ее возрастания.

На рис. 7.8,а $gradu = \nabla u$ направлен в сторону, противоположную локальному минимуму функции; на рис. 7.8,b — в сторону локального максимума.

Существуют методы градиентного спуска, основанные на использовании частных производных первого порядка, второго порядка и т.д. Как и любой численный метод, этот метод использует последовательные приближения (итерации) к точному решению. Остановимся на описании лишь градиентного метода первого порядка.

Пусть $X_k = (x_k,\ y_k)$ — вектор, характеризующий положение точки M_k на плоскости координат (x, y) на k-той итерации (рис. 7.9,а).

Будем строить итерационный процесс на предположении, что в следующее положение M_{k+1}, характеризуемое вектором X_{k+1}, точка переводится вектором градиентом $\nabla u(X_k)$, умноженным на некоторый корректирующий положительный множитель α_k. Тогда вектор, определяющий положение точки экстремума M_{k+1}, определится по рекуррентной формуле:

$$X_{k+1} = X_k \pm \alpha_k \nabla u(X_k). \qquad (7.9)$$

Величина множителя α_k в каждом приближении подсчитывается, исходя из условия экстремальности функции, а знак перед ней зависит от направления вектора градиента. Если градиент направлен в сторону максимума функции, выбирается знак плюс, в сторону минимума — минус. Это связано с тем, что, как отмечено выше, вектор градиента направлен в сторону возрастания функции.

Рассмотрим подробности организации итерационного цикла метода градиентного спуска на примере.

Пример. Найти минимальное значение функции

$$u = 8x^2 + 5xy + 5y^2,$$

если известно, что точка $M_0(10; 10)$ лежит в окрестности точки минимума.

Р е ш е н и е.

1. Решаем задачу в первом приближении.

Выбирая точку M_0 за начальную (рис. 7.9,b), найдем в ней значение функции

$$u(M_0) = 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 = 1700.$$

1.1. Найдем первые производные функции, представляя их в виде совокупности двух (по размерности пространства) координат вектора

$$\begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16x + 4y \\ 4x + 10y \end{pmatrix}.$$

Подставляя в эти соотношения значения координат точки M_0, найдем совокупность координат вектора градиента:

$$\nabla u(M_0) = \begin{pmatrix} u'_x(M_0) \\ u'_y(M_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \cdot 10 + 4 \cdot 10 \\ 4 \cdot 10 + 10 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

1.2. Подставим полученные выражения для векторов в формулу (7.9):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} u'_x(M_0) \\ u'_y(M_0) \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 200\alpha_0 \\ 10 - 140\alpha_0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Найдем значения функции в первом приближении с точностью до множителя α_0 :

$$u(x_1, y_1) = 8(10 - 200\alpha_0)^2 + 4(10 - 200\alpha_0)(10 - 140\alpha_0) + 5(10 - 140\alpha_0)^2.$$

1.4. Определим α_0 из условия минимума функции $u(x_1, y_1)$ одной переменной α_0. Для этого производную от функции по переменной приравниваем нулю $\left(\dfrac{\partial u(x_1, y_1)}{\partial \alpha_0} = 0\right)$:

$$-8 \cdot 2 \cdot 200(10 - 200\alpha_0) - 4 \cdot 200(10 - 140\alpha_0) - 4 \cdot 140(10 - 200\alpha_0) -$$
$$-5 \cdot 2 \cdot 140(10 - 140\alpha_0) = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_0 = \frac{596}{10600} \approx 0,056.$$

1.5. Найдем координаты независимых переменных точки первого приближения

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - 0,056 \begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2,16 \end{pmatrix} \longrightarrow M_1(-1,2;\ 2,16).$$

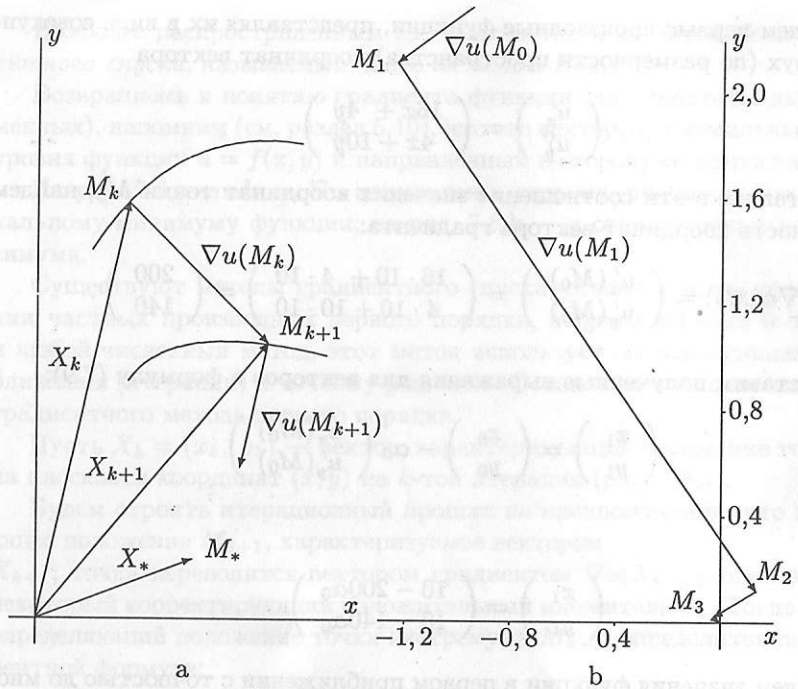


Рис. 7.9: Итерации метода градиентного спуска

1.6. Определим значение функции в точке M_1:

$$u(M_1) = 24,23.$$

На этом первое приближение заканчивается.

Переходим ко второму приближению. Выполним во втором приближении все действия первого приближения в такой же последовательности.

2.1.

$$\nabla u(M_1) = \begin{pmatrix} u'_x(M_1) \\ u'_y(M_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \cdot (-1,2) + 4 \cdot 2,16 \\ 4 \cdot (-1,2) + 10 \cdot 2,16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10,56 \\ 16,8 \end{pmatrix}.$$

2.2.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_0 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} u'_x(M_1) \\ u'_y(M_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 2,16 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} -10,56 \\ 16.8 \end{pmatrix}.$$

2.3.

$$u(x_2, y_2) = 8(-1,2 + 10,56\alpha_1)^2 + 4(-1,2 + 10,56\alpha_1)(2,16 - 16,8\alpha_1) + \\ + 5(2,16 - 16,8\alpha_1)^2.$$

2.4. Приравняем нулю производную от полученного выражения по α_1 :

$$-8 \cdot 2 \cdot (-10,56)(-1,2 + 10,56\alpha_1) - 4 \cdot (-10,56)(2,16 - 16,8\alpha_1) - \\ -4 \cdot 16,8(-1,2 + 10,56\alpha_1) - 5 \cdot 2 \cdot 16,8(2,16 - 16,8\alpha_1) = 0.$$

Отсюда

$$\alpha_1 \approx 0,152.$$

2.5.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,144 \\ 0,145 \end{pmatrix} \longrightarrow M_2(0,144;\ 0,145).$$

2.6. $u(M_2) = 0,354$.

Второе приближение закончено.

После выполнения вычислений в следующих приближениях получим:
$M_3(-0,018;\ 0,031)$; $u(M_3) = 0,0052$.
$M_4(0,002;\ 0,002)$; $u(M_3) = 0,0000\ldots$.

Точное решение дает минимум функции в точке $M_*(0,0) \longrightarrow u(M_*) = 0$.

Как видно из хода решения задачи, сходимость метода градиентного спуска, по крайней мере для рассмотренной функции, очень хорошая. Уже после второго шага значение функции уменьшилось по сравнению с нулевой точкой на три порядка, а после третьего шага практически не отличалось от нуля — локального минимума функции.

7.8 Вопросы

1. В чем состоят достоинства и недостатки численных методов?
2. Как свести задачи отыскания экстремума и точек перегиба функций к определению корней уравнений?
3. Какие функции называются унимодальными?
4. Какие ограничения должны быть наложены на функцию при отыскании начального интервала существования ее корня?
5. Какие ограничения накладываются на функцию в задаче уменьшения интервалов существования ее корней?
6. Сформулируйте условия существования (отсутствия) корней на рассматриваемом интервале.
7. Какие условия должны быть выполнены, чтобы на рассматриваемом интервале существовал экстремум функции?
8. Поясните на графике функции, как выбирается интервал, который можно исключить при отыскании корней уравнений.
9. Что такое пробная точка?
10. Поясните на графике функции смысл теоремы об исключении интервалов при определении корней.
11. Какие три ситуации могут возникнуть при выборе начального интервала существования корней уравнения? Точек экстремума?
12. В чем заключается смысл формулы Свенна?
13. Что такое золотое сечение?
14. Из каких соображений выбирается положение пробных точек в методе золотого сечения?
15. В чем смысл введения и как вводится безразмерная координата, в частности, в методе золотого сечения?
16. Какими соотношениями связывается безразмерная координата с размерной?

17. Как связан размер остающегося для рассмотрения интервала в методе золотого сечения с параметрами координат пробных точек на n-й итерации?
18. Как определить точность вычислений в численных методах?
19. В чем заключается метод хорд?
20. Какие ограничения следует наложить на функцию при использовании метода хорд отыскания корней уравнений?
21. Влияет ли выпуклость функции на организацию итерационного процесса метода хорд?
22. Опишите аналитически задачу приближенного определения корня уравнения методом хорд на n-м приближении.
23. Изобразите на графике функции последовательность отыскания корня методом хорд.
24. В чем заключается метод касательных определения корней уравнений?
25. Какие ограничения накладываются на функцию при определении ее корней методом касательных?
26. Как определить начальную точку итерационного процесса метода касательных? Каковой для этой точки должна быть связь между значением функции и ее выпуклостью?
27. В каких случаях решение, получаемое методом касательных, не будет сходиться к точному решению? Поясните на графике.
28. Опишите аналитически задачу приближенного определения корня уравнения методом касательных на n-м приближении.
29. Изобразите на графике функции процесс отыскания корня уравнения методом хорд и касательных.
30. В чем смысл симплексного метода отыскания экстремума функции нескольких переменных?
31. Что собой представляют симплексы для двух- и трехмерных областей?

32. Как организуется процесс последовательных приближений в симплексном методе? Поясните на рисунке.

33. Как выбрать направление продвижения к очередному симплексу при отыскании минимума функции? Максимума?

34. Каким параметром и как можно регулировать скорость и точность решения в симплексном методе?

35. Как строится новый симплекс-треугольник?

36. Каков критерий накрытия симплексом точки экстремума?

37. В чем смысл метода градиентного спуска?

38. Как определяется направление вектора градиента по отношению к точке экстремума для выпуклых и вогнутых функций? Каким способом можно регулировать это направление?

39. Опишите последовательность определения параметров на итерации в методе градиентного спуска первого порядка.

40. Как строится итерационный процесс в методе градиентного спуска?

41. Из каких соображений выбирается множитель, корректирующий величину вектора градиента на итерациях?

42. Покажите на графике линий скольжения последовательные положения вектора градиента в определении точки экстремума функции двух переменных.

7.9 Задание к расчетной работе 2

Цель расчетной работы: привитие исполнителям навыков использования численных методов в решении двух и одномерных задач определения экстремумов функций.

В обеих частях расчетной работы параметр k определяется по формуле $k = 1 + \frac{N}{n}$, где N — последняя цифра номера группы, в которой числится студент; n — порядковый номер студента в списке группы.

Часть 1

Задана функция $g(x) = \frac{k}{x} + (k+1)x + k^2$.

1. Установить один интервал унимодальности функции.
2. Найти локальный экстремум на этом интервале:
   2.1. Методом золотого сечения.
   2.2. Методом хорд и касательных.
   2.3. Аналитическим методом.
3. Построить график функции, предварительно определив ее характеристики (точки пересечения с осями координат, точки перегиба, асимптоты, интервалы монотонности).

Часть 2

Приняв точку $M_0(k;\ k/2)$ за начальную, найти минимальное значение функции $u = \frac{(x-2k)^2}{16} + \frac{(y-k)^2}{9}$:

1. Симплексным методом.
2. Методом градиентного спуска.

Методом неопределенных множителей Лагранжа найти условный экстремум функции u при ограничении $x + y - k = 0$.

Приближенные вычисления проводить или с точностью до третьего знака после запятой, или ограничиться 6-ю итерациями.

Дать оценку точности полученных результатов.

Библиография

[1] Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1973, — 720 с.

[2] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1980, — 976 с.

[3] Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1988, — 431 с.

[4] Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1988, — 222 с.

[5] Ивашов-Мусатов О.С. Начала математического анализа. — М.: Наука, 1988, — 287 с.

[6] Карташов А.П., Рождественский Б.Л. Математический анализ. — М.: Наука, 1984, — 447 с.

[7] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1989, — 734 с.

[8] Лаптев Г.Ф. Элементы векторного исчисления. — М.: Наука, 1975, — 336 с.

[9] Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. — М.: Наука, 1985, — 429 с.

[10] Рублев А.Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Высшая школа, 1972, – 424 с.

[11] Справочник по математике для экономистов /Под ред. В.И. Ермакова. — М.: Высшая школа, 1997, — 384 с.

[12] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1985, — 383 с.

[13] Бугров Я.С., Никольский С.М. Задачник. — М.: Наука, 1987, — 252 с.

[14] Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: Высшая школа, 1986. Ч.1 — 304 с.; ч.2 — 415 с.

[15] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М.: Наука, 1977, — 527 с.

[16] Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 222 с.

[17] Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976. – 384 с.

[18] Руководство к решению задач по высшей математике: В 2 ч. /Под ред. Е.И. Гурского. — Минск: Вышейш. школа, 1989. Ч.1 — 348 с.; ч.2 —399 с.

[19] Сборник задач по курсу математики для втузов /Под ред. А.В.Ефимова и Б.П.Демидовича. — М.: Наука, 1986, — 336 с.

Учебное издание

Горлач Борис Алексеевич

МАТЕМАТИКА.

Учебник
Часть 1

Редактор Т.И.Кузнецова
Техн. редактор Г.А.Усачева

Лицензия ЛР N 020301 от 30.12.96.

Подписано в печать 10.08.99 Формат 60x84 1/16. Бумага газетная
Печать офсетная. Усл. печ. л. 13.
Усл. кр.-отт. 13,12. Уч.-изд. л. 14.
Тираж 450 экз. Заказ 92. Арт. С-14/2000 г.

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.
ИПО СГАУ 443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.