ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра общей и теоретической физики

Е.К. Башкиров

ЗАДАЧИ ПО НЕРАВНОВЕСНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

Самара
Издательство «Самарский университет»
2009

УДК 531.2
ББК 22.31
Б 33

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. А.В. Горохов

Башкиров Е.К.

Б 33 **Задачи по неравновесной классической статистической физике**: учебное пособие / Е.К. Башкиров; Федеральное агентство по образованию. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2009. – 44 с.

Данное учебное пособие составлено на основе лекций для студентов физического факультета. Представлены важнейшие задачи неравновесной классической статистической физики и рассмотрены методы их решения.

Предназначено для студентов старших курсов физических специальностей университетов.

УДК 531.2
ББК 22.31

Содержание

1. Кинетическое уравнение Власова

1.1. Задачи с решениями

Задача 1. Рассмотреть собственные продольные колебания системы, представляющей собой классический электронный газ, двигающийся на фоне положительного компенсирующего заряда (электронная плазма) [1].

Решение

Рассмотрим систему, состоящую из заряженных частиц двух сортов, имеющих заряды противоположных знаков и сильно различающихся по массе, например, электроны и положительно заряженные ионы. Будем называть в дальнейшем такую систему электронной плазмой. Для сохранения однокомпонентной структуры уравнения Власова в модели электронной плазмы ионы считаются не только неподвижными и равномерно распределенными по объему, но и равномерно размазанными. При этом электроны движутся не только в поле других электронов, но и в поле равномерно размазанного по объему заряда положительных ионов.

Для рассматриваемой модели уравнение Власова будет иметь однокомпонентную структуру и может быть записано в виде

$$\frac{\partial f(t,\vec{r},\vec{p})}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial (U+\tilde{U})}{\partial \vec{r}}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0. \tag{1}$$

Здесь f – одночастичная функция распределения для электрона, которую можно представить в виде

$$f(t,\vec{r},\vec{p}) = f_0(\vec{r},\vec{p}) + \delta f(t,\vec{r},\vec{p}), \tag{2}$$

где f_0 – локально-равновесное максвелловское по $\vec{p}$ и равномерное по $\vec{r}$ распределение:

$$f_0(\vec{r},\vec{p}) = n\left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{\theta}\right),$$

где m – масса электрона, $\theta = kT$ и T – равновесная температура плазмы.

Плотность положительного заряда можно формально выразить через функцию f_0, используя свойство нейтральность системы и условие нормировки

$$\rho^{(+)} = \rho^{(-)} = -en = en \int f_0 d\vec{p},$$

где n и $\rho^{(-)}$ – локально-равновесная концентрация и плотность заряда системы электронов соответственно.

Тогда энергия электрона, находящегося в точке $\vec{r}$ в поле положительного заряда, может быть представлена в виде

$$U(\vec{r}) = -\int \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\rho^{(+)} d\vec{r}\,' = -n \int \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} f_0(\vec{r}\,', \vec{p}\,') d\vec{r}\,' d\vec{p}\,',$$

а энергия электрона в самосогласованном поле всех электронов

$$\tilde{U}(\vec{r}) = n \int \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} f(t, \vec{r}\,', \vec{p}\,') d\vec{r}\,' d\vec{p}\,'.$$

Введем напряженность электрического поля, действующего на электрон:

$$-e\vec{E}(,\vec{r}) = -grad(U + \tilde{U}) = -\frac{\partial(U + \tilde{U})}{\partial \vec{r}} =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} n \int \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}(f(t, \vec{r}\,', \vec{p}\,') - f_0(\vec{r}\,', \vec{p}\,')) d\vec{r}\,' d\vec{p}\,' =$$
$$-\frac{\partial}{\partial \vec{r}} n \int \frac{e^2}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \delta f(t, \vec{r}\,', \vec{p}\,') d\vec{r}\,' d\vec{p}\,' \qquad (3)$$

Сократим уравнение (3) на $(-e)$ и подействуем слева и справа операцией div. Тогда с учетом соотношений

$$divgrad = -\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^{\,2}}$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^{\,2}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}\,'),$$

получаем из (3) для вектора напряженности 4-е уравнение Максвелла в виде

$$div\vec{E} = -4\pi en \int \delta f(t, \vec{r}, \vec{p}) d\vec{p}.$$

Предположим, что рассматриваемая система слабонеравновесна, т.е. выполняется условие

$$\delta f / f_0 \ll 1,$$

и проведем линеаризацию уравнения (1), учитывая, что δf и E одного порядка малости:

$$\frac{\partial \delta f(t,\vec{r},\vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\,\frac{\partial \delta f}{\partial \vec{r}} - \frac{e\vec{E}}{m}\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{v})}{\partial \vec{v}} = 0, \tag{4}$$

$$div\vec{E} = -4\pi en \int \delta f(t,\vec{r},\vec{v})d\vec{v}, \tag{5}$$

где для максвелловского распределения

$$\frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = -\frac{m}{\theta}f_0.$$

Уравнение Власова является обратимым во времени. Для того чтобы из цепочки кинетических уравнений Боголюбова получить необратимое кинетическое уравнение для плазмы, необходимо учесть парные взаимодействия частиц. Для того чтобы остаться в рамках приближения самосогласованного поля, но снять "вырождение" на обратимость (нарушить симметрию уравнения Власова по отношению к отражению времени), воспользуемся неким искусственным приемом, который часто применяется как в неравновесной, так и в равновесной статистической физике ("квазисредние", по Боголюбову). Суть его заключается в добавлении к правой части уравнения (1) "бесконечно малой добавки" (релаксационного члена) вида

$$-\varepsilon(f(t,\vec{r},\vec{p}) - f_0(\vec{r},\vec{p}))|_{\varepsilon>0,\varepsilon\to 0} = -\varepsilon\delta f|_{\varepsilon>0,\varepsilon\to 0},$$

которая снимет "вырождение" уравнения по отношению к операции инверсии времени и позволит отобрать решения уравнения, удовлетворяющие принципу причинности и описывающие релаксацию системы к равновесию. Решения уравнения мы будем искать для малых, но конечных ε, а в выражениях для средних перейдем к пределу $\varepsilon \to 0$. Это даст возможность при решении задачи автоматически выбрать правильный обход полюса (удовлетворяющий принципу причинности), а при вычислении предела избавиться от произвола в выборе параметра ε. Используя указанное преобразование для исходного уравнения (1), мы перепишем полученное из него уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial \delta f(t,\vec{r},\vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \vec{r}} - \frac{eE}{m}\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{v})}{\partial \vec{v}} = -\varepsilon\delta f|_{\varepsilon>0,\varepsilon\to 0}. \tag{6}$$

Теперь с помощью уравнений (5), (6) мы можем исследовать проблему продольных колебаний в электронной плазме. Будем, описывая колебательный процесс, искать решение указанных уравнений в виде продольной плоской волны, распространяющейся, например, вдоль оси z:

$$\delta f(t,\vec{r},\vec{v}) = f_{k\omega}(\vec{v})\exp(-\imath\omega t + \imath kz),$$

$$E_z(t,\vec{r},\vec{v}) = E_{k\omega}(\vec{v})\exp(-\imath\omega t + \imath kz),$$

$$E_x = E_y = 0.$$

Тогда для фурье-компонент получаем уравнения:

$$-\imath\omega f_{k\omega} + \imath v_z k f_{k\omega} - \frac{e}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_z}E_{k\omega} = -\varepsilon f_{k\omega}|_{\varepsilon>0,\varepsilon\to 0},$$

$$\imath k E_{k\omega} = -4\pi n\int f_{k\omega}(\vec{v})d\vec{v}.$$

Откуда

$$f_{k\omega} = \imath\,\frac{e}{m}\,\frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_z}}{\omega + \imath\varepsilon - kv_z}\,E_{k\omega},$$

$$\imath k E_{k\omega} = -4\pi e\,\imath\,\frac{e}{m}E_{k\omega}\int\frac{\frac{\partial f_0}{\partial v_z}}{\omega + \imath\varepsilon - kv_z}d\vec{v}. \tag{7}$$

Уравнение (7) представляет собой дисперсионное уравнение. Используя формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm \imath\varepsilon} = P\frac{1}{x} \mp \delta(x),$$

где символ P означает операцию последующего вычисления интеграла в смысле главного значения, свойства максвелловского распределения и тот факт, что подынтегральное выражение зависит только от переменной v_z, нетрудно привести это уравнение к виду

$$1 - J(k,\omega) + \imath I(k,\omega) = 0. \tag{8}$$

Здесь

$$J(k,\omega) = \frac{\omega_0}{k}\frac{m}{\theta}\sqrt{\frac{m}{2\pi\theta}}P\int dv_z\frac{v_z}{\omega - v_z k}e^{-\frac{mv_z^2}{2\theta}},$$

$$I(k,\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_0^2\,\omega\,m^{3/2}}{k^3\,\theta^{3/2}}\,e^{-\frac{m\omega^2}{2\theta}},$$

где $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ – ленгмюровская частота. Интеграл $J(k,\omega)$ не берется точно, поэтому ограничимся рассмотрением частного случая малых k (длинноволновый предел). Представим подынтегральную функцию (без максвелловской экспоненты) в виде

$$\frac{v_z}{\omega}\frac{1}{1-\frac{v_z k}{\omega}} = \frac{v_z}{\omega} + \frac{v_z^2}{\omega^2}k + \frac{v_z^3}{\omega^3}k^2 + \frac{v_z^4}{\omega^4}k^3 + \frac{v_z^5}{\omega^5}k^4 + \frac{v_z^6}{\omega^6}\frac{1}{1-\frac{v_z k}{\omega}}.$$

Это "разложение" еще нужно усреднить по максвелловскому распределению. При этом имеем соотношения:

$$\overline{v_z} = \overline{v_z^3} = \overline{v_z^5} = 0, \quad \overline{v_z^2} = \frac{\theta}{m}, \quad \overline{v_z^4} = \frac{3\theta^2}{m^2}.$$

В результате уравнение (7) приобретает вид

$$1 - \frac{\omega_0}{\omega^2}\left[1 + \frac{3\theta}{m\omega^2}k^2 + \frac{m}{\theta\omega^4}k^4 \left\langle\left(\frac{v_z^6}{1-\frac{kv_z k}{\omega}}\right)\right\rangle\right] + \imath I(k,\omega) = 0.$$

Угловыми скобками обозначено усреднение по максвелловскому распределению.

Будем искать решение полученного уравнения колебаний в виде $\omega = \Omega - \imath\gamma$ для систем с малым затуханием, т.е. $\gamma \ll \Omega$. Сохраняя только главные члены в действительной и мнимой частях дисперсионного уравнения, получаем

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\left(1 + \frac{3\theta}{m\Omega^2}k^2 + \cdots\right) - \imath\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}(1+\cdots) + \imath I(k,\Omega) = 0.$$

Приравнивая нулю действительную часть, имеем

$$\Omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{3\theta}{m\Omega^2}k^2 + \cdots\right)$$

Откуда в первом приближении получаем для частоты продольных плазменных колебаний

$$\Omega = \omega_0\left(1 + \frac{3\theta}{2m\Omega^2}k^2 + \cdots\right) \tag{9}$$

Таким образом, в нулевом приближении частота продольных плазменных колебаний Ω совпадает с ленгмюровской частотой ω_0, а в первом приближении закон дисперсии квадратичен по волновому числу k. Для декремента затухания колебаний в нулевом приближении имеем формулу Ландау (1946)

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2}I(k,\omega_0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega_0^4\kappa^2}{k^3}e^{-\frac{\kappa^2}{2k^2}}, \tag{10}$$

где $\kappa = 1/r_D^2 = m\omega_0/\theta$. Как видно из формулы (10), декремент затухания плазменных волн, имеющих длину $\lambda \gg \lambda_D$ (или $kr_D \ll 1$), экспоненциально мал и возрастает с уменьшением длины волны.

Плазменные колебания – это колебания плотности электронного газа – характерный для плазмы коллективный эффект, в образовании которого в качестве "упругой силы" фигурирует электростатическое поле $\vec{E}$. Причина же возникновения затухания Ландау носит кинематический характер. Для смешанного состояния системы вероятность каждого чистого состояния входит в равновесном случае с гиббсовским весом, а так как вероятность невырожденного состояния с большим значением импульса пропорциональна максвелловской экспоненте $\exp[-p^2/2m\theta]$, то вероятность процесса распада состояния будет пропорциональна той же экспоненте. Отсюда и экспонента в формуле Ландау.

Задача 2. Исследовать релаксацию начального возмущения, вызванного электрическим полем, в электронной плазме [2].

Решение

Рассмотрим электронную плазму, в которой возмущению электрическим полем подвергается только электронное распределение при неизменном распределении ионов. Будем полагать также, что начальное возмущение мало, так что начальная функция распределения электронов

$$f(0, \vec{r}, \vec{v}) = f_0(\vec{v}) + \delta f(\vec{r}, \vec{v}),$$

где $f_0(\vec{v})$ – равновесное максвелловское распределение, а $\delta f \ll f_0$. Возмущение остается малым и в дальнейшие моменты времени, так что уравнение Власова для электронной плазмы можно линеаризовать; ищем функцию распределения в виде

$$f(t, \vec{r}, \vec{v}) = f(0, \vec{r}, \vec{v}) + \delta f(t, \vec{r}, \vec{v}).$$

Для малой поправки $\delta f(t, \vec{r}, \vec{v})$ и потенциала самосогласованного поля $\varphi(t, \vec{r})$ имеем уравнения, аналогичные уравнениям (4) и (5):

$$\frac{\partial \delta f(t, \vec{r}, \vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m}\nabla\varphi\frac{\partial f_0(\vec{r}, \vec{v})}{\partial \vec{v}} = 0, \tag{11}$$

$$\triangle\varphi = -4\pi e \int \delta f(t, \vec{r}, \vec{v}) d\vec{v}. \tag{12}$$

Будем искать решение уравнений в виде

$$\delta f(t, \vec{r}, \vec{v}) = f_{\vec{k}}(t, \vec{v}) e^{\imath \vec{k}\vec{r}},$$

$$\varphi(t, \vec{r}) = \varphi_{\vec{k}}(t) e^{\imath \vec{k}\vec{r}}.$$

Для фурье-образов из (11), (12) получаем

$$\frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} + \imath \vec{k}\vec{v} f_{\vec{k}} + \imath \frac{e}{m} \varphi_{\vec{k}} \vec{k} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0, \tag{13}$$

$$k^2 \varphi_{\vec{k}} = -4\pi e \int f_{\vec{k}} d\vec{v}. \tag{14}$$

Для решения этих уравнений воспользуемся односторонним преобразованием Фурье, определив образ $f_{\omega\vec{k}}^{(+)}(\vec{p})$ функции $f_{\vec{k}}(t, \vec{p})$ как

$$f_{\omega\vec{k}}^{(+)}(\vec{v}) = \int\limits_0^\infty f_{\vec{k}}(t, \vec{v}) e^{\imath\omega t}\, dt.$$

Обратное преобразование дается формулой

$$f_{\vec{k}}(t, \vec{v}) = \int\limits_{-\infty+\imath\sigma}^{+\infty+\imath\sigma} f_{\omega\vec{k}}^{(+)}(\vec{v}) e^{-\imath\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \tag{15}$$

где интеграл берется в комплексной плоскости ω по прямой, параллельной вещественной оси и проходящей над ней ($\sigma > 0$), выше всех особенностей функции $f_{\omega\vec{k}}$.

Умножим обе стороны уравнения (13) на $e^{-\imath\omega t}$ и интегрируем по t. Заметив, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} e^{\imath\omega t}\, dt = f_{\vec{k}} e^{\imath\omega t} \Big|_0^\infty - \imath\omega \int\limits_0^\infty f_{\vec{k}} e^{\imath\omega t}\, dt = -g_{\vec{k}} - \imath\omega f_{\omega\vec{k}}^{(+)}$$

(где $g_{\vec{k}}(\vec{v}) \equiv f_{\vec{k}}(0, \vec{v})$), и разделив обе стороны уравнения на $\imath(\vec{k}\vec{v} - \omega)$, находим

$$f_{\omega\vec{k}}^{(+)} = \frac{1}{\imath(\vec{k}\vec{v} - \omega)} \left[g_{\vec{k}} - \imath \frac{e}{m} \varphi_{\omega\vec{k}}^{(+)} \vec{k} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} \right] \tag{16}$$

Аналогичным образом из (14) получаем

$$k^2 \varphi_{\omega\vec{k}}^{(+)} = -4\pi e \int f_{\omega\vec{k}}^{(+)}(\vec{v}) d\vec{v}. \tag{17}$$

Из уравнений (16), (17) находим

$$\varphi^{(+)}_{\omega\vec{k}} = -\frac{4\pi e}{k^2\varepsilon_l(\omega,k)}\int \frac{g_{\vec{k}}(\vec{v})}{\imath(\vec{k}\vec{v}-\omega)}d\vec{v}, \tag{18}$$

где

$$\varepsilon_l(\omega,k) = 1-\frac{4\pi e^2}{k^2}\int \vec{k}\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}}\frac{d\vec{v}}{\vec{k}\vec{v}-\omega-\imath 0} \tag{19}$$

– продольная диэлектрическая проницаемость плазмы. Вводя составляющую скорости v_x вдоль направления $\vec{k}$, перепишем эту формулу в виде

$$\varphi^{(+)}_{\omega\vec{k}} = -\frac{4\pi e}{k^2\varepsilon_l(\omega,k)}\int \frac{g_{\vec{k}}(v_x)}{\imath(kv_x-\omega)}dv_x,$$

где

$$g_{\vec{k}}(v_x) = \int g_{\vec{k}}(\vec{v})dv_y dv_z.$$

Для дальнейшего определения временной зависимости потенциала по формуле обращения

$$\varphi_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty+\imath\sigma}^{+\infty+\imath\sigma} e^{-\imath\omega t}\varphi^{(+)}_{\omega\vec{k}}d\omega \tag{20}$$

необходимо предварительно установить аналитические свойства $\varphi^{(+)}_{\omega\vec{k}}$ как функции комплексной переменной ω.

Выражение вида

$$\varphi^{(+)}_{\omega\vec{k}} = \int\limits_0^{\infty}\varphi_{\vec{k}}(t)e^{\imath\omega t}dt$$

как функция комплексной переменной имеет смысл лишь в верхней полуплоскости. Детальный анализ показывает [2. С. 74-75], что асимптотический закон убывания потенциала дается выражением

$$\varphi_{\vec{k}}(t) \sim e^{-\imath\omega'_k t}e^{-\imath\omega''_k t},$$

т.е. с течением времени возмущение поля затухает экспоненциально с декрементом $\gamma_k = |\omega''_k|$. Здесь ω'_k и ω''_k – действительная и мнимая части соответственно того из корней уравнения $\varepsilon_l(\omega,k)=0$, который обладает наименьшей по величине мнимой частью.

Для длинноволновых возмущений $kr_D \ll 1$ частота ω'_k и декремент затухания γ_k совпадают с таковыми для плазменных волн и даются формулами (9) и (10). Декремент затухания таких волн экспоненциально мал. В обратном же случае коротковолновых возмущений, когда $kr_D \sim 1$, затухание становится очень сильным, декремент γ_k даже велик по сравнению с ω'_k.

Искомая функция $f_{\vec{k}}(t, \vec{p})$ получается подстановкой (16) в интеграл (15). Помимо полюсов в нижней полуплоскости, происходящих от $\varphi_{\omega \vec{k}}$, подынтегральное выражение имеет также полюс в точке $\omega = \vec{k}\vec{v}$ на вещественной оси. Именно этот полюс и будет определять асимптотическое поведение интеграла при больших t. По вычету в нем находим

$$f_{\vec{k}}(t, \vec{v}) \sim e^{-i\vec{k}\vec{v}t} \tag{21}$$

Таким образом, возмущение функции распределения не затухает с течением времени. Распределение становится, однако, все более быстро осциллирующей функцией скорости (период осцилляций по скорости $\sim 1/kt$). Поэтому возмущение плотности (т.е. интеграл $\int f_{\vec{k}} d\vec{v}$) затухает, как и потенциал $\varphi_{\vec{k}}$.

Эволюция функции распределения, согласно (21), относится ко времени, когда поле можно считать затухшим; формула (21) соответствует просто свободному разлету частиц – каждая со своей постоянной скоростью. Действительно, функция вида

$$f(t, \vec{r}, \vec{v}) = g(\vec{v}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \vec{k}\vec{v}t)}$$

есть решение кинетического уравнения свободных частиц

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = 0$$

при заданном начальном ($t = 0$) распределении по скоростям и периодическом ($\sim e^{i\vec{k}\vec{r}}$) распределении по координатам.

Задача 3. Показать возможность возникновения плазменного эхо в электронной плазме [2].

Решение

Термодинамически обратимый характер затухания Ландау проявляется в нелинейном явлении, называемом плазменным эхо. Это явление возникает в результате тех незатухающих осцилляций функции распределения (21), которые остаются после бесстолкновительной релаксации возмущений плотности (и поля) в плазме. Суть эффекта заключается в следующем. Предположим, что в плазме два возмущения создаются импульсами некоторого внешнего потенциала в моменты времени, разделенные интервалом τ. Первый импульс модулирует функцию распределения плазмы с помощью некоторого волнового вектора k_1, а второй – $k_2 > k_1$. Возмущение плотности, созданное первым импульсом, затухнет за время $\sim 1/v_T k_1$. Будем полагать, что $\tau > 1/v_T k_1$. В этом случае затухание произойдет раньше, чем появится второй импульс. Второй импульс модулирует функцию распределения плазмы с некоторым новым волновым вектором k_2, соответственно, вызванное им возмущение плотности снова затухнет за время $\sim 1/v_T k_2$, но в момент времени

$$\tau' = \frac{k_2}{k_2 - k_1}\tau$$

возникает вновь. Это возмущение и будет представлять собой плазменное эхо.

Рассмотрим данное явление в электронной плазме. Пусть на плазму действует одномерное возмущение, создаваемое двумя импульсами внешнего (создаваемого "сторонними" зарядами) потенциала $\varphi^{(\text{ст})}$, прилагаемыми к плазме с интервалом τ в моменты времени $t = 0$ и $t = \tau$:

$$\varphi^{(\text{ст})} = \varphi_1 \delta(t) \cos k_1 x + \varphi_1 \delta(t - \tau) \cos k_2 x, \tag{22}$$

где $\delta(t)$ – огибающая импульсов возмущения. При этом предполагается, что $k_2 > k_1$, а $\tau \gg 1/k_1 v_T$, $1/\gamma(k_1)$, где $\gamma(k_1)$ – декремент затухания Ландау, v_T – средняя тепловая скорость электронов. При выполнении указанных условий возмущение плотности газа, вызываемое первым импульсом, успевает затухнуть к моменту времени τ, так как время ее затухания $\sim 1/v_T k_1$.

Возмущение функции распределения $f = f_0 + \delta f$ удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению, которое с учетом членов второго порядка имеет вид

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v_x \frac{\partial \delta f}{\partial x} + \frac{e}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{df_0}{dv_x} = -\frac{e}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \delta f}{\partial v_x}; \tag{23}$$

при этом потенциал φ, возникающий в плазме (включающий в себя также и "стороннюю" часть $\varphi^{(\text{ст})}$), удовлетворяет уравнению

$$\triangle(\varphi - \varphi^{(\text{ст})}) = 4\pi e \int \delta f dv_x. \tag{24}$$

Функция распределения в (24) предполагается уже проинтегрированной по v_x и v_y.

Будем искать решение уравнений (23), (24) в виде интегралов Фурье:

$$\delta f = \frac{1}{2\pi}\int f_{\omega' k'} e^{i(k'x-\omega' t)} d\omega' dk',$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int \varphi_{\omega'' k''} e^{i(k''x-\omega'' t)} d\omega'' dk''.$$

Подставив эти выражения в (23) и (24), умножив затем уравнения на $e^{-i(kx-\omega t)}$ и интегрируя их по $dxdt$, получим

$$(kv_x-\omega) f_{\omega k} + \frac{e}{m}\varphi_{\omega k}\frac{\partial f_0}{\partial v_x} =$$

$$= -\frac{e}{2\pi m}\int (k-k')\varphi_{\omega-\omega', k-k'}\frac{df_{\omega' k'}}{dv_x} d\omega' dk', \tag{25}$$

$$-k^2\varphi_{\omega k} = 4\pi e\int f_{\omega k} dv_x - k^2\varphi_{\omega k}^{(\text{ст})}, \tag{26}$$

где

$$\varphi_{\omega k}^{(\text{ст})} = \pi\varphi_1[\delta(k+k_1)+\delta(k-k_1)] + \pi\varphi_2[\delta(k+k_2)+\delta(k-k_2)]e^{i\omega\tau}$$

В линейном приближении, т.е. в пренебрежении правой стороной в уравнении (23), решения этих уравнений есть

$$f_{\omega k}^{(1)} = -e\frac{df_0}{dv_x}\frac{k}{kv_x-\omega}\varphi_{\omega k}^{(1)},$$

$$\varphi_{\omega k}^{(1)} = \frac{\varphi_{\omega k}^{(\text{ст})}}{\varepsilon_l(\omega,k)}, \tag{27}$$

где $\varepsilon_l(\omega,k)$ – диэлектрическая проницаемость, определяемая соотношением (19). Этому решению соответствуют возмущения, затухающие от моментов времени $t=0$ и $t=\tau$ и соответственно с декрементами $\gamma(k_1)$ и $\gamma(k_2)$.

Во втором приближении надо подставить (27) в правую часть уравнения (23), и для членов второго порядка в возмущениях функции распределения и потенциала получаются уравнения:

$$(kv_x-\omega) f_{\omega k}^{(2)} + \frac{e}{m}k\varphi_{\omega k}^{(2)}\frac{df_0}{dv_x} = \frac{1}{m}\frac{dI_{\omega k}}{dv_x}, \tag{28}$$

$$k^2\varphi_{\omega k}^{(2)} = -4\pi e\int f_{\omega k}^{(2)} dv_x, \tag{29}$$

где

$$I_{\omega k} = -\frac{e}{2\pi}\int (k-k')\varphi^{(1)}_{\omega-\omega',k-k'} f^{(1)}_{\omega' k'} d\omega' dk'. \tag{30}$$

Интересующий нас эффект – плазменное эхо с волновым вектором $k_2 - k_1$ – будет заключен в членах в правой части (28), содержащих $\delta(k \pm (k_2 - k_1))$. Соберем такие члены в выражении $I_{\omega k}$. К моменту времени $t = \tau$ возмущение $\varphi^{(1)}$, происходящее от приложенного при $t = 0$ импульса φ_1, уже затухнет. Поэтому заранее очевидно, что при подстановке (27) в (30) надо учесть в $\varphi^{(1)}_{\omega k}$ лишь член с φ_2; интересующие нас члены вида

$$I_{\omega k} = I_\omega(k_1, k_2)\delta(k - k_2 + k_1) + I_\omega(-k_1, -k_2)\delta(k + k_2 - k_1) \tag{31}$$

получаются при этом от членов в $f^{(1)}_{\omega k}$, содержащих φ_1. После выполнения интегрирования по dk' в (30) получим в результате

$$I_\omega(k_1, k_2) = \frac{e^2}{4m}\varphi_1\varphi_2 k_1 k_2 \frac{df_0}{dv_x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\imath(\omega-\omega')\tau} d\omega}{(k_1 v_x + \omega')\varepsilon_l(\omega', k_1)\varepsilon_l(\omega - \omega', k_2)}, \tag{32}$$

причем переменную интегрирования ω' надо понимать как $\omega' + \imath 0$.

Интеграл (32) можно вычислить с учетом того, что τ предполагается большим ($\tau \gg 1/kv_T,\ 1/\gamma$). Для этого смещаем в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω' контур интегрирования, "зацепляющийся" при этом за полюсы подынтегрального выражения. Эти полюсы расположены в нулях функции ε_l и в точке $\omega' = -k_1 v_x - \imath 0$. Первые из них имеют отличные от нуля отрицательные мнимые части $-\gamma(k_1)$ или $-\gamma(k_2)$, и вклады от них в интеграл (вычеты в полюсах) затухают с увеличением τ как $\exp[-\gamma\tau]$. Незатухающий же вклад возникает только от вещественного полюса $\omega' = -k_1 v_x - \imath 0$. Таким образом, получим

$$I_\omega(k_1, k_2) = -\imath\pi \frac{e^2}{2m}\frac{df_0}{dv_x}\frac{\varphi_1\varphi_2 k_1 k_2 e^{\imath(\omega + k_1 v_x)\tau}}{\varepsilon_l(-k_1 v_x, k_1)\varepsilon_l(\omega + k_1 v_x, k_2)}. \tag{33}$$

Возвращаясь к уравнениям (28), (29) и подставив $f^{(2)}_{\omega k}$ из первого уравнения во второе, находим

$$\varphi^{(2)}_{\omega k} = -\frac{4\pi e}{k^2 \varepsilon_l(\omega, k)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dI_{\omega k}}{dv_x}\frac{dv_x}{kv_x - \omega - \imath 0}. \tag{34}$$

При вычислении производной $dI_{\omega k}/dv_x$ надо дифференцировать только экспоненциальный множитель в (34), поскольку $k_1 v_T \tau \gg 1$.

Собирая теперь полученные выражения (31) – (34) и совершая обратное преобразование Фурье, получим интересующий нас потенциал эха с волновым вектором $k_3 = k_2 - k_1$ в виде

$$\varphi^{(2)} = Re\{A(t)e^{\imath k_3 x}\}.$$

Выражение для амплитуды $A(t)$ запишем в асимптотическом пределе при $t - \tau \to \infty$. В этом пределе интеграл по ω определяется вычетом подынтегрального выражения только в полюсе $\omega = k_3 v_x - \imath 0$. Окончательно находим

$$A(t) = -\imath \pi e^3 \varphi_1 \varphi_2 \tau \frac{k_1^2 k_2}{k_3^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0}{dv_x} \frac{e^{-\imath v k_3 (t-\tau')} dv_x}{\varepsilon_l(k_3 v_x, k_3)\varepsilon_l(-k_1 v_x, k_2)}, \tag{35}$$

где $\tau' = k_2 \tau / k_3$.

Это выражение – амплитуда эха – максимально при $t = \tau'$, причем максимальное значение пропорционально τ, т.е. промежутку времени между двумя импульсами. По обе стороны от максимума амплитуда $A(t)$ убывает, но по различным законам. Асимптотически при $t - \tau \to \infty$ выражение (35) определяется вычетом подынтегрального выражения в его полюсе с наименьшей по величине отрицательной мнимой частью; этот полюс лежит при $\varepsilon_l(k_3 v_x, k_3) = 0$, и его мнимая часть равна $Im\ v_x = -\gamma(k_3)/k_3$. По другую сторону от максимума, при $t - \tau' \to -\infty$, интеграл определяется вычетом в полюсе при $\varepsilon_l(-k_2 v_x, k_1) = 0$, для которого $Im v_x = \gamma(k_1)/k_1$ (путь интегрирования должен быть при этом смещен в верхнюю полуплоскость комплексного v_x). В результате находим, что

$$A(t) \propto \exp[-\gamma(k_3)(t - \tau')] \quad \text{при} \quad t - \tau' \quad \to \infty,$$

$$A(t) \propto \exp[-\frac{k_3}{k_1}\gamma(k_1)(\tau' - t)] \quad \text{при} \quad t - \tau' \quad \to -\infty.$$

Таким образом, амплитуда эха перед достижением его максимума возрастает с инкрементом $k_3\gamma(k_1)/k_1$, а за максимумом убывает с декрементом $\gamma(k_3)$.

Задача 4. Найти статическое электрическое поле покоящегося точечного заряда в однородной равновесной электронной плазме в приближении самосогласованного поля [1-3].

Решение

Поместим точечный заряд в начало координат, тогда плотность заряда будет описываться функцией

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}).$$

Введем самосогласованный потенциал электрического поля в системе

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{e}(U + \tilde{U}),$$

который определяет величину вектора напряженности

$$-e\vec{E}(,\vec{r}) = -grad(U + \tilde{U}) = -\frac{\partial(U + \tilde{U})}{\partial\vec{r}},$$

где под U мы теперь понимаем энергию электрона как в поле положительного равномерно "размазанного" в пространстве положительного заряда ионов, так и в поле точечного заряда. В статическом случае $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ уравнение Власова для одночастичной функции распределения электронов

$$\frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial\vec{r}} - \frac{\partial(U + \tilde{U})}{\partial\vec{r}}\frac{\partial f}{\partial\vec{p}} = 0$$

или

$$\vec{v}\,\frac{\partial f}{\partial\vec{r}} + \frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}} = 0, \tag{36}$$

где $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\partial\varphi/\partial\vec{r}$. Ограничимся рассмотрением малых возмущений. В этом случае решение уравнения (36) будем искать в виде $f = f_0 + \delta f$. Тогда линеаризованное уравнение Власова примет вид

$$\vec{v}\,\frac{\partial\delta f}{\partial\vec{r}} + \frac{e}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}} = 0. \tag{37}$$

Дополним уравнение (37) 4-м уравнением Максвелла

$$\triangle\varphi(\vec{r}) = -4\pi q\delta(\vec{r}) + 4\pi en\int\delta f d\vec{v}. \tag{38}$$

Учитывая свойства максвелловского распределения

$$\frac{\partial f_0}{\partial\vec{v}} = -\frac{m}{\theta}f_0$$

и переходя в уравнениях (37), (38) к фурье-компонентам

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

$$\delta f(\vec{r},\vec{v}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int f_{\vec{k}}(\vec{v}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k},$$

получаем вместо системы дифференциальных уравнений систему алгебраических уравнений вида

$$f_{\vec{k}} - \frac{e}{\theta} f_0 \varphi_{\vec{k}} = 0, \tag{39}$$

$$k^2\varphi_{\vec{k}} = 4\pi q - 4\pi e n \int f_{\vec{k}} d\vec{v}. \tag{40}$$

Из (39) имеем, что

$$f_{\vec{k}} = \frac{e}{\theta} f_0 \varphi_{\vec{k}}.$$

Подставляя это выражение в правую часть (40), получаем с учетом нормировки максвелловского распределения

$$k^2\varphi_{\vec{k}} = 4\pi q - 4\pi e n \varphi_{\vec{k}} \int f_0 d\vec{v} = 4\pi q - 4\pi e n \varphi_{\vec{k}}.$$

Откуда фурье-образ самосогласованного потенциала

$$\varphi_{\vec{k}} = \frac{4\pi q}{k^2+\kappa^2},$$

где

$$\kappa^2 = \frac{4\pi e^2 n}{\theta} = \frac{1}{r_D^2}.$$

Величина r_D называется дебаевским радиусом экранирования. Теперь мы можем, совершив прямое фурье-преобразование, найти координатную зависимость потенциала самосогласованного поля:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{4\pi q}{k^2+\kappa^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}. \tag{41}$$

Для вычисления интеграла (41) воспользуемся сферическими координатами в $\vec{k}$-пространстве. При этом для каждого значения $\vec{r}$ будем направлять ось k_z по радиусу-вектору $\vec{r}$. Тогда

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi} \frac{4\pi q k^2}{k^2+\kappa^2} e^{ikr\cos\Theta} \sin\Theta d\Theta dk =$$

$$= \frac{q}{\imath\pi r}\int\limits_0^\infty \frac{k}{k^2+\kappa^2}\left(e^{\imath kr}-e^{-\imath kr}\right)dk = \frac{q}{\imath\pi r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\imath\xi r}\xi}{\xi^2+\kappa^2}d\xi. \quad (42)$$

Последний интеграл в формуле (42) может быть вычислен с помощью интегральной формулы Коши. Учитывая, что подынтегральное выражение содержит простые полюсы в точках $\xi = \pm\imath\kappa$, выберем контур интегрирования, состоящий из прямой, совпадающей с действительной осью в комплексной плоскости ξ и полуокружности в верхней полуплоскости радиуса R, где $R \to \infty$. Поскольку интеграл по верхней полуоси в пределе $R \to \infty$ обращается в нуль, из интегральной формулы Коши получаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\imath\xi r}\xi}{\xi^2+\kappa^2}d\xi = 2\pi\imath\frac{e^{-\kappa r}}{2\imath\kappa} = \frac{e^{-\kappa r}}{\kappa}. \quad (43)$$

Используя формулы (42) и (43), окончательно для потенциала самосогласованного поля имеем

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r}e^{-\kappa r}. \quad (44)$$

В результате для потенциала мы получили известную формулу Дебая. Соответственно для одночастичной функции распределения электронов имеем выражение вида

$$f(\vec{r},\vec{v}) = f_0(\vec{v})\left(1+\frac{eq}{r\theta}e^{-\kappa r}\right). \quad (45)$$

Формулы (44), (45) описывают еще один коллективный эффект в плазме – свойство экранировать статические заряды.

1.2. Задачи для самостоятельной работы

1. С помощью линеаризованного уравнения Власова совместно с уравнениями Максвелла определить частоту $\omega = \omega(k)$ и затухание γ поперечных колебаний в электронной плазме.

2. Вычислить поперечную диэлектрическую проницаемость плазмы.

3.* Определить продольную и поперечную диэлектрические проницаемости для ультрарелятивистской электронной плазмы ($T_e \gg mc^2$) [2][1]

4.* Найти мнимую часть ε_l для нерелятивистской электронной плазмы ($T_e \ll mc^2$) при $\omega/k \sim c \gg v_T$ [2].

[1]Символом * отмечены задачи повышенной трудности.

5.* Найти мнимую часть продольной диэлектрической проницаемости для нерелятивистской электронной плазмы ($T_0 \ll mc^2/k$) при $\omega/k \approx c \gg v_{T_0}$, где $v_{T_0} = \sqrt{kT_0/m}$ – некоторая средняя тепловая скорость электрона [2].

6. Найти закон дисперсии продольных и поперечных плазменных волн в ультрарелятивистской электронной плазме.

7.* Определить уравнение для продольных колебаний в электрон-ионной системе и определить частоту ее собственных колебаний и их затухание [1].

8.* Установить аналитические свойства функции $\varphi^{(+)}_{\omega\vec{k}}$ [2].

9. Используя результаты задачи 4 раздела 1.1, найти среднюю энергию взаимодействия частиц электронной плазмы друг с другом.

10. Найти полное число избыточных отрицательных частиц внутри сферы Дебая (сфера радиуса r_D вокруг заряда q).

11. Найти энергию взаимодействия между зарядом q и зарядом внутри сферы Дебая.

2. Кинетическое уравнение Больцмана

2.1. Задачи с решениями

Задача 1. Найти стационарное решение кинетического уравнения Больцмана для газа однородно распределенных молекул в отсутствие внешнего поля [1-3].

Решение

Кинетическое уравнение Больцмана для разреженного газа запишем в виде [1-3]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = J_{\text{ст}} = \frac{1}{v}\int u(f'f_1' - ff_1)d\omega d\vec{p}_1. \tag{46}$$

Здесь $v = V/N$ – удельный объем, приходящийся на одну частицу газа; $f = f(t,\vec{r},\vec{p})$, $f' = f(t,\vec{r},\vec{p}')$, $f_1 = f(t,\vec{r},\vec{p}_1)$, $f_1'f = f(t,\vec{r},\vec{p}_1{}')$ – одночастичные функции распределения, где $\vec{p},\vec{p}_1$ и $\vec{p}\,',\vec{p}_1'$ – импульсы двух частиц до и после столкновения соответственно; $d\omega = ada d\varphi$, где a – прицельное расстояние и

φ – азимутальный угол в задаче о рассеянии двух частиц; $u = |\vec{p} - \vec{p}_1|/m$ – относительная скорость рассеивающихся частиц; $J_{\text{ст}}$ – интеграл столкновений, характеризующий баланс частиц в единичном объеме фазового пространства.

В стационарном случае $(\partial f/\partial t) = 0$ для газа однородно распределенных молекул $(\partial f/\partial \vec{r}) = 0$ и в отсутствие внешних сил $(\partial U/\partial \vec{r}) = 0$ уравнение (46) принимает вид

$$\int u(f'f_1' - ff_1)d\omega d\vec{p}_1 = 0. \tag{47}$$

Найдем явный вид одночастичной функции распределения, удовлетворяющей уравнению (47). Для этого умножим левую и правую части уравнения на произвольную функцию $\varphi(\vec{p}) = \varphi(t, \vec{r}, \vec{p})$ и проинтегрируем по $\vec{p}$. В результате получим уравнение

$$\int u\varphi(\vec{p})(f'f_1' - ff_1)d\omega d\vec{p}_1 d\vec{p} = 0. \tag{48}$$

Левую часть уравнения (48) можно представить в более удобном для дальнейшего анализа виде, используя следующую лемму.

Лемма

Обозначим левую часть уравнения (48) как

$$I = \int u\varphi(\vec{p})(f'f_1' - ff_1)d\omega d\vec{p}_1 d\vec{p}.$$

Тогда имеет место соотношение

$$I = \frac{1}{4}\int u(\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1')(f'f_1' - ff_1)d\omega d\vec{p}_1 d\vec{p}, \tag{49}$$

где

$$\varphi = \varphi(t, \vec{r}, \vec{p}), \quad \varphi' = \varphi(t, \vec{r}, \vec{p}\,'), \quad \varphi_1 = \varphi(t, \vec{r}, \vec{p}_1), \quad \varphi_1' = \varphi(t, \vec{r}, \vec{p}_1\,'). \tag{50}$$

Доказательство

Рассмотрим интеграл

$$I = \int u\varphi(\vec{p})(f(\vec{p}_1\,')\, f(\vec{p}\,') - f(\vec{p}_1)f(\vec{p}))d\omega d\vec{p}_1 d\vec{p}. \tag{51}$$

При записи подынтегральных функций в правой части (51) мы опустили общие для всех функций аргументы t и $\vec{r}$.

Проведем в выражении (51) замену переменных $\vec{p} \leftrightarrow \vec{p}_1$, тогда автоматически $\vec{p}\,' \leftrightarrow \vec{p}_1\,'$. В результате получаем еще один вариант записи интеграла (51)

$$I = \int u\varphi(\vec{p}_1)(f(\vec{p}\,')\,f(\vec{p}_1') - f(\vec{p})f(\vec{p}_1))d\omega d\vec{p}_1 d\vec{p}. \qquad (52)$$

Перейдем в интеграле (51) от переменных $\vec{p}, \vec{p}_1$ к новым переменным $\vec{p}\,', \vec{p}_1'$. Учитывая соотношение

$$u = \frac{1}{m}|\vec{p} - \vec{p}_1| = \frac{1}{m}|\vec{p}\,' - \vec{p}_1\,'|$$

и явный вид якобиана перехода от исходных к новым переменным

$$\left|\frac{\partial(\vec{p}, \vec{p}_1)}{\partial(\vec{p}\,', \vec{p}_1\,')}\right| = 1,$$

получаем

$$I = \int u\varphi(\vec{p})(f(\vec{p}_1\,')\,f(\vec{p}\,') - f(\vec{p}_1)f(\vec{p}))d\omega d\vec{p}_1\,' d\vec{p}\,'.$$

Проводя в последнем выражении формальную замену $\vec{p} \leftrightarrow \vec{p}\,'$, $\vec{p}_1 \leftrightarrow \vec{p}_1\,'$, получаем третью форму записи интеграла

$$I = -\int u\varphi(\vec{p}\,')(f(\vec{p}_1\,')\,f(\vec{p}\,') - f(\vec{p}_1)f(\vec{p}))d\omega d\vec{p}_1 d\vec{p}. \qquad (53)$$

Наконец, проводя в выражении (53) замену $\vec{p} \leftrightarrow \vec{p}_1$, получим четвертую форму записи интеграла I

$$I = -\int u\varphi(\vec{p}_1\,')(f(\vec{p}_1\,')\,f(\vec{p}\,') - f(\vec{p}_1)f(\vec{p}))d\omega d\vec{p}_1 d\vec{p}. \qquad (54)$$

Вводя обозначения вида (50), получаем из (51) – (54) искомое соотношение (36).

Теперь выбирая в качестве функции φ логарифм одночастичной функции распределения f, уравнение (48) с учетом соотношения (49) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{4}\int u \ln\frac{f\,'f_1\,'}{ff_1}(f\,'f_1\,' - ff_1)d\omega d\vec{p}_1 d\vec{p} = 0. \qquad (55)$$

Теперь учитывая неотрицательность подынтегрального выражения в левой части (55), получаем

$$(f\,'f_1\,' - ff_1) = 0$$

или

$$\ln f(\vec{p}) + \ln f(\vec{p}_1) = \ln f(\vec{p}\,') + \ln f(\vec{p}_1{}'). \tag{56}$$

Для сокращения записей в уравнении (56) не указаны общие для всех функций переменные t и $\vec{r}$. Мы видим, что логарифм стационарной функции распределения представляет собой аддитивный интеграл движения. При упругом ударе не изменяют своей величины три аддитивные функции – энергия, импульс и момент импульса. В однородном случае в числе аддитивных интегралов движения момент импульса можно не учитывать. Поэтому в однородном случае $\ln f$ является линейной комбинацией энергии ε и импульса $\vec{p}$ молекулы:

$$\ln f = \beta(\mu - \varepsilon + \vec{u}_0\vec{p}), \quad f(\vec{p}) = \exp[\beta(\mu - \varepsilon + \vec{u}_0\vec{p})].$$

Константы $\beta, \mu, \vec{u}_0$ определяются из условий:

$\int f d\vec{r} d\vec{p} = N$ – общее число молекул газа,
$N\int \varepsilon f d\vec{r} d\vec{p} = U$ – их суммарная энергия,
$N\int \vec{p} f d\vec{r} d\vec{p} = \vec{P}$ – их суммарный импульс.

Замечая, что

$$\int \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m}\right) d\vec{p} = (2m\pi/\beta)^{3/2},$$

находим

$$U = \frac{3}{2}\frac{N}{\beta}, \quad \vec{P} = mN\vec{u}_0, \quad \mu = \frac{mu_0^2}{2} + \frac{1}{\beta}\ln\frac{N}{V}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}.$$

Так как энергия одноатомного газа равна $U = \frac{3}{2}N\theta$, то $\beta = 1/\theta$. Величина $\vec{u}_0$ представляет собой скорость движения газа как целого. Величина μ – химический потенциал газа. Если газ как целое покоится, то $\vec{u}_0 = 0$ и стационарное распределение представляет собой равномерное распределение (по $\vec{r}$) и распределение Максвелла (по $\vec{p}$):

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = n(2\pi m\theta)^{-3/2}\exp\left(-\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m\theta}\right).$$

Для пространственно неоднородной системы стационарное решение имеет тот же вид, что и для рассматриваемого случая, но величины β, μ и $\vec{u}_0$ становятся функциями t и $\vec{r}$.

Задача 2. Используя уравнение Больцмана, вывести H-теорему Больцмана для простейшей пространственно однородной системы в отсутствие внешних полей.

Решение

Для определения энтропии в равновесной классической статистической физике используют функцию микропараметров вида $-k \ln \rho$, где ρ – равновесная функция распределения изучаемой системы. В результате равновесная энтропия может быть определена согласно известным формулам равновесной статистической физики как

$$S = -k\langle \ln \rho \rangle = -k \int \ln \rho \, \rho \, d\Gamma, \tag{57}$$

где интегрирование ведется по фазовому пространству изучаемой системы. Однако в случае неравновесных систем формула (57) не может быть использована для определения энтропии, т.к. в этом случае среднее значение логарифма полной функции распределения $\langle \ln \rho \rangle$ не будет изменяться со временем [1]. С другой стороны, как известно из термодинамики, в изолированной системе при необратимых процессах энтропия должна возрастать. Таким образом, в случае неравновесных состояний определение энтропии (57) становится неверным. Однако если принять за энтропию неравновесного состояния разреженного газа среднее значение логарифма одночастичной функции распределения

$$S(t) = -k \langle \ln f(t) \rangle \,,$$

удовлетворяющей кинетическому уравнению Больцмана, то такая энтропия уже может возрастать.

Рассмотрим для простоты пространственно однородную изолированную систему в отсутствие внешних полей. Для такой системы $U = 0$, $f = f(t, \vec{p})$, $\int f d\vec{p} = \rho = const$ и уравнение Больцмана принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = J_{\text{ст}} = \int u(f' f_1' - f f_1) d\omega dp_1. \tag{58}$$

Введем H-функцию с помощью соотношения

$$H(t) = \int f \ln f d\vec{p}$$

и вычислим ее производную по времени

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \ln f d\vec{p} + \int \frac{\partial f}{\partial t} \vec{p} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \ln f d\vec{p} + \frac{\partial}{\partial t} \int f d\vec{p} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \ln f d\vec{p}.$$

Предполагая, что одночастичная функция f удовлетворяет уравнению Больцмана (46), получаем для производной по времени от H-функции

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int J_{\text{ст}} \ln f d\vec{p}. \tag{59}$$

С использованием леммы Боголюбова уравнение (59) можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{4} \int \ln \frac{f' f_1'}{f f_1} \left(f' f_1' - f f_1 \right) u \, d\omega \, d\vec{p} \, d\vec{p}_1. \tag{60}$$

Подынтегральное выражение в правой части формулы (60) всегда неотрицательно, так как всегда

$$\ln \frac{x}{y} \left(x - y \right) \geq 0.$$

Для случая $f' f_1' = f f_1$ производная по времени $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Согласно предыдущей задаче, это условие определяет равновесное состояние системы. Так как в неравновесных состояниях

$$\frac{\partial f}{\partial t} < 0,$$

то в процессе эволюции изолированной системы ее H-функция не может возрастать:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \leq 0.$$

В этом и состоит H-теорема Больцмана. Подчеркнем, что указанная теорема имеет не динамический, а статистический характер. Поведение H-функции Больцмана с точностью до знака сходно с изменением термодинамической энтропии изолированной системы, которая, по второму началу термодинамики, при приближении системы к равновесию может только возрастать. Это указывает на связь H-функции Больцмана с энтропией. Это позволило Больцману трактовать величину $(-kH)$ как энтропию неравновесного газа, а саму H-теорему – как статистическое обоснование второго начала термодинамики.

Задача 3. Используя уравнение Больцмана, вычислить стационарные коэффициенты переноса в газе Лоренца [1-3].

Решение

Рассмотрим бинарную смесь газов, в которой атомы одного сорта значительно легче атомов другого сорта и концентрация легких атомов много меньше концентрации тяжелых (либо относительные размеры легких атомов очень малы). Такая газовая смесь называется газом Лоренца. Будем интересоваться стационарными процессами переноса в газе Лоренца, связанными с движением легких частиц в среде тяжелых, например, проводимостью или диффузией. Для определенности предположим, что $m \ll m_1$, $n \ll n_1$, где m и m_1 – массы и n и n_1 – концентрации легких и тяжелых частиц смеси соответственно. В общем случае для описания кинетики смеси мы должны записать систему связанных уравнений для функций распределения двух компонент. Однако предположение о низкой концентрации легкой компоненты позволяет учитывать в уравнении Больцмана для нее только столкновения с тяжелыми частицами. В этом случае мы можем записать уравнение Больцмана для одночастичной функции распределения $f = f(t, \vec{p}, \vec{r})$ легкой компоненты в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = J_{\text{ст}} = n_1 \int u(f' f_1' - f f_1) d\omega d\vec{p}_1,$$

где n_1 – концентрация тяжелых частиц, $\vec{p}$, $\vec{p}_1$ – импульсы легкой и тяжелой компонент до соударения и $u = |\vec{v} - \vec{v}_1| = (1/m)|\vec{p} - \vec{p}_1|$ – относительная скорость легкой и тяжелой частиц, $f_1 = f(t, \vec{p}_1, \vec{r})$ – одночастичная функция распределения для тяжелых частиц.

Будем считать, что система легких частиц является слабонеравновесной, т.е. одночастичную функцию распределения можно представить в виде

$$f = f(t, \vec{p}, \vec{r}) = f_0(\vec{p}, \vec{r})\{1 + \Phi(t, \vec{p}, \vec{r})\},$$

где f_0 – равновесное максвелловское распределение. Предположение об отношении масс частиц $m \ll m_1$ позволяет считать, что тяжелые частицы практически неподвижны, поскольку отношение средних тепловых скоростей обратно пропорционально корню квадратному из отношения масс частиц. Поэтому, полагая систему тяжелых частиц равновесной и пренебрегая отдачей тяжелых частиц при их столкновениях с легкими, имеем:

$$\vec{p}_1 \cong \vec{p}_1{}', \quad f_1 \cong f_1{}' \cong const, \quad \int f_1 d\vec{p}_1 = 1.$$

По той же причине величина скорости легких атомов при столкновениях с тяжелыми частицами остается практически неизменной, хотя направление их скорости может сильно меняться. Тогда имеем

$$u = |\vec{v} - \vec{v}_1| \cong v.$$

В результате сделанных предположений интеграл столкновений упрощается и принимает вид

$$J_{\text{ст}} = n_1 \int v(f' - f) d\omega.$$

Введем для дальнейшего вместо интегрирования по $d\omega$ интегрирование по углам

$$d\omega = ada d\varphi = \sigma(v,\psi) d\Omega, \quad d\Omega = sin\theta d\theta d\varphi,$$

где $\sigma(\theta,\psi)$ – дифференциальное сечение рассеяния на "неподвижном" центре частицы, имеющей скорость v, в телесный угол $d\Omega$ с изменением направления ее полета на угол ψ (угол рассеяния, т.е. угол между направлениями векторов $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$). Тогда искомое упрощенное уравнение Больцмана приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = n_1 v \int \sigma(\theta,\psi)(f' - f) d\Omega.$$

Причем при сделанных допущениях

$$f = f(t,\vec{p},\vec{r}) = f(t,v,\theta,\varphi,\vec{r}),$$

$$f' = f(t,\vec{p}\,',\vec{r}) = f(t,v,\theta',\varphi',\vec{r}).$$

Ограничимся рассмотрением стационарной задачи, когда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Будем также полагать, что внешнего поля нет ($U = 0$), т.е. будем рассматривать явления переноса, поддерживаемые внешними источниками, типа диффузии или теплопроводности. Будем рассматривать также для простоты одномерные процессы переноса, т.е. будем полагать, что функция f меняется только вдоль одной оси, например, оси z. Выбор системы отсчета показан на рис. 1. Тогда функции распределения

$$f = f(v,\theta,z), \quad f' = f(v,\theta',z).$$

Записывая величину v_z как $v\cos\theta$, мы можем представить стационарное кинетическое уравнение Больцмана в виде

$$v\cos\theta \frac{\partial f(v,\theta,z)}{\partial z} = n_1 v \int \sigma(\theta,\psi)[f'(v,\theta',z) - f(v,\theta,z)] d\Omega. \tag{61}$$

Одночастичная функция распределения f не зависит от азимутального угла

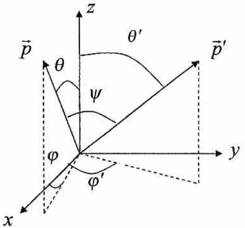

Рис. 1. Выбор системы координат

φ, но зависит от угла θ. Зависимость этой функции от угла θ можно представить в виде разложения по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$, где

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \cos\theta \quad \text{и т.д.}$$

Поскольку функция распределения мало отличается от локально равновесного распределения $f_0(v, z)$, то в разложении f по полиномам Лежандра мы можем ограничиться, следуя Лоренцу, поправкой первого порядка, т.е.

$$f(v, \theta, z) \cong f_0(v, z)[1 + \cos\theta\, \Phi(v, z)].$$

Опуская в уравнении (61) члены второго порядка малости, получаем

$$\cos\theta \frac{\partial \ln f_0(v, z)}{\partial z} = n_1 v \Phi(v, z) \int \sigma(\theta, \psi)(\cos\theta' - \cos\theta') d\Omega. \tag{62}$$

Выберем наиболее оптимальным образом систему координат при интегрировании по телесному углу. Направим оси x и y так, что $\varphi' = 0$. Тогда, используя известное стереометрическое соотношение, получаем

$$\cos\theta' = \sin\theta \sin\psi \cos\varphi + \cos\theta \cos\psi.$$

Учитывая соотношения

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi = 0,$$

перепишем уравнение (62) в виде

$$\cos\theta\frac{\partial\ln f_0}{\partial z} = -2\pi n_1 v\Phi\cos\theta\int\sigma(\theta,\psi)(1-\cos\psi)\sin\psi d\psi.$$

Откуда

$$\Phi(v,z) = -\frac{1}{n_1\Sigma}\frac{\partial\ln f_0(v,z)}{\partial z}, \tag{63}$$

где

$$\Sigma = 2\pi\int\limits_0^\pi\sigma(\theta,\psi)(1-\cos\theta')\sin\psi d\psi$$

– эффективное или транспортное сечение рассеяния. Вводя эффективную длину свободного пробега

$$\Lambda = \frac{1}{n_1\Sigma},$$

уравнение (63) можно переписать в виде

$$f = f_0 - \Lambda\cos\theta\frac{\partial f_0}{\partial z}. \tag{64}$$

Используя решение (64), мы можем вычислить кинетические характеристики системы, например, диффузионный поток частиц

$$(j_z)_{\text{дифф}} = \int v_z n f d\vec{v} = \int v\cos\theta\, n\,(f_0 - \Lambda\cos\theta\frac{\partial f_0}{\partial z})2\pi v^2\sin\theta dv d\theta =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}n\int\limits_0^\infty v f_0\Lambda 4\pi v^2 dv.$$

Введем обозначения

$$f_0 = \rho(z)F(\vec{v}),\quad F(\vec{v}) = F(\vec{v},T(z))$$

– нормированное на единицу равновесное локальное распределение по скоростям легких частиц,

$$n(z) = n\rho(z) = \frac{N}{V}\rho(z)$$

– локальная плотность легких частиц. Тогда

$$(j_z)_{\text{дифф}} = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(n(z)\int\limits_0^\infty v\Lambda F(\vec{v})4\pi v^2 dv\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(n(z)\langle v\Lambda\rangle\right) = -\frac{1}{3}\langle v\Lambda\rangle\frac{\partial}{\partial z}n(z) - \frac{1}{3}n(z)\frac{\partial}{\partial T}\langle v\Lambda\rangle\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Записывая диффузионный поток в виде

$$(j_z)_{\text{дифф}} = -D\frac{\partial n(z)}{\partial z} - D_T\frac{\partial T}{\partial z},$$

мы получаем явные выражения для коэффициента диффузии и термодиффузии

$$D = \frac{1}{3}\langle v\Lambda\rangle, \qquad D_T = \frac{1}{3}n(z)\frac{\partial}{\partial T}\langle v\Lambda\rangle.$$

Совершенно аналогично можно исследовать вопрос о теплопроводности

$$(j_z)_{\text{тепл}} = \int v_z\frac{mv^2}{2}nf d\vec{v} = -\kappa_{\text{т}}\frac{\partial n(z)}{\partial z} - \kappa\frac{\partial T}{\partial z},$$

где

$$\kappa = \frac{1}{3}n(z)\frac{\partial}{\partial T}\langle v\frac{mv^2}{2}\Lambda\rangle$$

– коэффициент теплопроводности и

$$\kappa_{\text{т}} = \frac{1}{3}\langle v\frac{mv^2}{2}\Lambda\rangle$$

– коэффициент диффузионного переноса тепла.

2.2. Задачи для самостоятельной работы

1.* Используя решение задачи 3 раздела 2.1, вычислить коэффициенты проводимости и теплопроводности вырожденного электронного газа в металле [1].

2. Используя решение предыдущей задачи, построить кинетическую теорию термоэлектрических явлений (эффекты Зеебека, Пельтье и Томсона).

3.* Вычислить коэффициент диффузии тяжелого газа в легком [2].

3. Кинетическое уравнение Больцмана с релаксационным членом

3.1. Задачи с решениями

Задача 1. Используя кинетическое уравнение Больцмана с релаксационным членом, рассчитать коэффициенты диффузии, теплопроводности и диффузионного переноса тепла в газе в отсутствие внешних полей и в приближении постоянного времени пробега молекул τ (времени релаксации) и постоянной длины свободного пробега λ.

Решение

Рассмотрим для простоты одномерный стационарный процесс переноса частиц и тепла в одноатомном газе. Выберем систему координат, ось z которой совпадает с направлением, вдоль которого имеется неоднородность в системе. Для стационарного процесса одночастичная функция распределения $f = f(\vec{v}, z)$ не зависит от времени, поэтому $\partial f/\partial t = 0$. Поскольку в системе отсутствуют внешние поля, то $\partial U/\partial z = 0$. Тогда кинетическое уравнение Больцмана с релаксационным членом примет вид

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{f - f_0}{\tau}. \tag{65}$$

Здесь f_0 – локально-равновесное значение одночастичной функции распределения, представляющее собой локальное распределение Максвелла и имеющее в рассматриваемом случае вид

$$f_0 = n(z) \left(\frac{m}{2\pi\theta(z)} \right)^{3/2} \exp(-\frac{mv^2}{\theta}) = ng(\vec{v}),$$

где $n(z)$ – локально-равновесная концентрация молекул газа, $\theta(z) = kT(z)$ и $T(z)$ – локально-равновесная температура системы. Рассмотрим случай, когда градиент температуры и концентрации частиц в системе достаточно мал, т.е. газ находится в слабонеравновесном состоянии. Напомним, что само уравнение с релаксационным членом по смыслу своего введения приспособлено именно к описанию состояний, близких к равновесному. В этом случае квадратичными относительно возмущения членами в f можно пренебречь. Иными словами, будем полагать, что $(f - f_0)/f_0 \ll 1$. В этом приближении уравнение (65) можно линеаризовать и представить в виде

$$f = f_0 - \tau v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} = f_0 - \tau v_z g(\vec{v}) \frac{\partial n}{\partial z} - \tau v_z n \frac{\partial g}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Эффекты более высокого порядка можно рассчитать методом последовательных приближений.

Вычислим с помощью функции f неравновесную плотность потока числа частиц в стационарном состоянии

$$J_N = J_{Nz} = \int v_z f d\vec{v} =$$

$$= \int v_z f_0 d\vec{v} - \frac{\partial n}{\partial z}\int \tau v_z^2 g(\vec{v})d\vec{v} - \frac{\partial \theta}{\partial z} n \frac{\partial}{\partial \theta}\int \tau v_z^2 g(\vec{v})d\vec{v} =$$
$$= -\frac{\partial n}{\partial z}\left\langle\left(\tau\frac{v^2}{3}\right)\right\rangle - \frac{\partial \theta}{\partial z} n\frac{\partial}{\partial \theta}\left\langle\left(\tau\frac{v^2}{3}\right)\right\rangle. \qquad (66)$$

При записи формулы (66) мы использовали свойства симметрии функции $f(\vec{v})$ относительно величин v_x, v_y, v_z и заменили под знаком интеграла величину v_z^2 на $(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/3$, а также учли, что $\int v_z f_0 d\vec{v} = 0$. Угловыми скобками в формуле (66) обозначено усреднение с помощью нормированного локально-равновесного распределения Максвелла. Аналогично плотность потока тепла в рассматриваемой системе можно записать в виде

$$J_Q = J_{Qz} = \int v_z \frac{mv^2}{2} f d\vec{v} =$$
$$= -\frac{\partial n}{\partial z}\left\langle\left(\tau\frac{v^2}{3}\frac{mv^2}{2}\right)\right\rangle - \frac{\partial \theta}{\partial z} n\frac{\partial}{\partial \theta}\left\langle\left(\tau\frac{v^2}{3}\frac{mv^2}{2}\right)\right\rangle. \qquad (67)$$

Выражения (66) и (67) можно представить в виде

$$J_N = -D\frac{\partial n}{\partial z} - D_\theta\frac{\partial \theta}{\partial z},$$
$$J_Q = -\kappa_N\frac{\partial n}{\partial z} - \kappa\frac{\partial \theta}{\partial z},$$

где D – коэффициент диффузии, D_θ – коэффициент термодиффузии, κ – коэффициент теплопроводности и κ_N – коэффициент диффузионного переноса тепла.

Для окончательного расчета коэффициентов переноса необходимо знать зависимость времени релаксации от скорости $\tau = \tau(v)$. Для расчета этой зависимости необходим более детальный анализ механизмов релаксации в рассматриваемой модели и расчет сечений рассеяния частиц на основе микроскопической модели. При не слишком низких температурах молекулы газа, например, ведут себя качественно как твердые упругие частицы, взаимодействующие друг с другом лишь при непосредственных столкновениях. Такому характеру взаимодействия отвечает слабо зависящее от скорости сечение столкновения молекул $\sigma \approx \pi d^2$, где d – диаметр молекул. Обратное время релаксации пропорционально плотности n, скорости v и сечению рассеяния σ. Тогда в случае, когда сечение рассеяния не зависит от скорости, имеем, что время релаксации $\tau \sim v^{-1}$, а длина свободного пробега $\lambda = \tau v$ не зависит от скорости. С другой стороны, уравнение Больцмана с релаксационным членом применяется не только для газов, но и, например, для описания кинетических процессов в металлах и полупроводниках. В таких средах приходится вводить несколько времен релаксации, например, время релаксации за счет процессов рассеяния электронов на большие углы при пренебрежимо малом изменении энергии (такой тип релаксации эффективен в случае электропроводности) и время релаксации за счет рассеяния, при котором направление движения электронов остается почти неизменным, но сильно меняется его энергия (такой тип релаксации отвечает за теплопроводность). Для невырожденных металлов и полупроводников в приближении сферических поверхностей постоянной энергии и изотропного времени релаксации $\tau(\vec{v}) = \tau(v)$ само время релаксации электронов в кристалле можно представить в виде: $\tau = \tau_0 v^p$, где $p = 3$, если рассеяние электронов происходит на колебаниях решетки и $p = -1$ (как и для газов), если рассеяние электронов происходит на статических точечных дефектах. Для вырожденных металлов в рамках того же приближения время релаксации τ можно считать константой $\tau = \tau(v_F) = \tau(\varepsilon_F^{1/2})$, где ε_F – энергия Ферми. В настоящей задаче мы остановимся на двух самых простых приближениях: $\tau = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$.

Тогда имеем:

1) приближение $\tau \doteq \text{const}$,

$$D = \frac{\tau\theta}{m}, \quad D_\theta = \frac{n\tau}{m}, \quad \kappa_N = \frac{5}{2}\frac{\tau\theta^2}{m}, \quad \kappa = \frac{5\theta n\tau}{m}. \tag{68}$$

2) приближение $\lambda = \text{const}$,

$$D = \frac{\lambda\overline{v}}{3}, \quad D_\theta = \frac{n\lambda\overline{v}}{6\theta}, \quad \kappa_N = \frac{2}{3}\lambda\theta\overline{v}, \quad \kappa = n\lambda\overline{v}. \tag{69}$$

В действительности, как показано в [1] различие между величинами, определяемыми формулами (68) и (69), не слишком велико. При этом нужно учитывать, что расхождение между формулами (68) и (69) и экспериментальными данными составляет десятки процентов.

Задача 2. С помощью кинетического уравнения Больцмана с релаксационным членом определите проводимость σ_e электронного газа в металле.

Решение

Рассмотрим металлический образец, помещенный в постоянное электрическое поле $\vec{E}$, направленное вдоль оси z в отсутствие градиента температур и концентрации электронов, что является обычными условиями при вычислении электропроводности. Поскольку мы рассматриваем стационарное состояние системы (постоянный ток), то одночастичная функция распределения электронов в металле не зависит от времени: $\partial f/\partial t = 0$. Тогда кинетическое уравнение Больцмана с релаксационным членом для электронов примет вид

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial v_z} = -\frac{f - f_0}{\tau_e}. \tag{70}$$

Здесь e – модуль заряда электрона, m – его масса, τ_e – время релаксации электронов в металле, характерное для электропроводности. При записи уравнения (70) мы учли, что для электрона

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -eE.$$

Рассмотрим случай слабого поля. Тогда, как и в предыдущей задаче, мы можем считать, что $(f - f_0)/f_0 \ll 1$. В этом приближении из уравнения (70) получаем

$$f = f_0 - \tau_e \left(v_z \frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right). \tag{71}$$

Поскольку в рассматриваемой системе отсутствуют градиенты температуры и концентрации электронов, т.е. $\theta = \mathrm{const}$ и $n = \mathrm{const}$, то $\frac{\partial f_0}{\partial z} = 0$. Тогда формула (71) примет вид

$$f = f_0 - \tau_e \frac{eE}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v_z} = f_0 - \tau_e e E v_z \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon},$$

где ε – энергия электрона.

Плотность электрического тока дается формулой

$$J_e = \int e v_z f d\vec{v} = -e^2 E \int \tau v_z^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} d\vec{v}. \tag{72}$$

Дальнейшие вычисления проведем для двух случаев: электронов, подчиняющихся распределению Максвелла и Ферми-Дирака.

Распределение Максвелла

Для невырожденного электронного газа локально-равновесное распределение f_0 в случае, когда $\theta = \mathrm{const}$ и $n = \mathrm{const}$, является равномерным по координатам и максвелловским по скоростям:

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2\theta} \right).$$

Замечая, что для распределения Максвелла имеет место соотношение

$$\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{\tau_e} f_0,$$

формулу для плотности электрического тока можно записать в виде

$$J_e = \frac{ne^2 E}{\theta} \int \tau_e v_z^2 f_0 d\vec{v}. \qquad (73)$$

Воспользуемся при вычислении электропроводимости τ-приближением, т.е. будем предполагать, что время релаксации τ_e не зависит от скорости и эту величину можно вынести за знак интеграла. От этого приближения легко освободиться, рассматривая вырожденный электронный газ, что и будет сделано в следующем разделе. В рамках τ-приближения формулу (73) можно переписать в виде

$$J_e = \frac{ne^2 E}{\theta} \tau_e \int v_z^2 f_0 d\vec{v}.$$

Учитывая, что для максвелловского распределения

$$\frac{m\overline{v_z^2}}{2} = \frac{1}{2} m \int v_{z0}^2 d\vec{v} = \frac{1}{2}\theta,$$

для плотности тока получаем

$$J_e = \frac{ne^2 \tau_e}{m} E.$$

Тогда проводимость равна

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau_e}{m}. \qquad (74)$$

Распределение Ферми-Дирака

Функцию распределения Ферми-Дирака, определяемую соотношением

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/\theta} + 1},$$

где μ – энергия Ферми, следует нормировать для того, чтобы можно было воспользоваться кинетическим уравнением Больцмана с релаксационным членом для одночастичной функции распределения. Условие нормировки для равномерного распределения частиц по объему имеет вид

$$\int f_0 d\vec{v} = n.$$

Тогда для случая спина 1/2 нормированная функция распределения может быть записана как

$$f_0 = \frac{2m^3}{(2\pi\hbar)^3}n(\varepsilon) = 2\left(\frac{m}{h}\right)^3 \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/\theta}+1}.$$

Далее, при $\theta \ll \mu$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/\theta}+1} \approx -\delta(\varepsilon-\mu),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Тогда плотность электрического тока (73) будет иметь вид

$$J_e = -2e^2E(\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \tau_e v_z^2 \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/\theta}+1}d\vec{v} =$$

$$= 2e^2E(\left(\frac{m}{h}\right)^3 \int \tau_e v_z^2 \delta(\varepsilon-\mu)d\vec{v}.$$

Далее

$$\int F(v)v_z^2 d\vec{v} = \frac{4\pi}{3}\int F(v)\left(\frac{2\varepsilon}{m}\right)^{3/2}\frac{1}{m}d\varepsilon = \frac{8\pi}{3}\sqrt{2}m^{-3/2}\int F(v)\varepsilon^{1/2}d\varepsilon,$$

где $F(v)$ – произвольная функция модуля скорости.

Тогда плотность тока есть

$$J_e = e^2\tau_e(\mu)\mu^{3/2}\left(\frac{16\pi}{3}\right)\sqrt{2}m^{-5/2}\left(\frac{m}{h}\right)^3.$$

Для вырожденного электронного газа

$$\mu \approx \mu_0 = \frac{h^2}{8\pi^2 m}(3\pi^2 n)^{3/2},$$

где μ_0 – энергия Ферми при абсолютном нуле температур. Тогда проводимость вырожденного электронного газа в металлах при $\theta \ll \mu$ есть

$$\sigma = \frac{J_e}{E} = \frac{ne^2\tau_e}{m}.$$

Последняя формула совпадает с (74), за исключением того, что здесь не делалось предположения о независимости времени релаксации τ_e от скорости; в выражение для проводимости входит только значение τ_e, соответствующее поверхности Ферми.

Задача 3. С помощью кинетического уравнения Больцмана с релаксационным членом определите проводимость σ_e невырожденного электронного газа при наличии поперечного магнитного поля.

Решение

Рассмотрим влияние поперечного магнитного поля, перпендикулярного направлению электрического поля, на статическую электропроводность для максвелловского электронного газа в отсутствие градиента температуры и концентрации электронов. Для рассматриваемой системы кинетическое уравнение Больцмана с релаксационным членом имеет вид

$$-\vec{a}\,\nabla f = -\frac{f - f_0}{\tau_e}, \tag{75}$$

где

$$\nabla = \nabla_{\vec{v}} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial v_x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial v_y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial v_z}$$

и $\vec{a}$ – ускорение, равное в гауссовой системе единиц

$$\vec{a} = \frac{e}{m}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}]\right).$$

Как и в предыдущей задаче, будем рассматривать слабонеравновесные состояния системы. Тогда одночастичную функцию распределения можно представить как

$$f = f_0(1 + \varphi),$$

где $\varphi \ll f_0$. В случае распределения Максвелла

$$\nabla f_0 = -\frac{m\vec{v}}{\theta} f_0.$$

Таким образом,

$$-\vec{a}\,\nabla f_0 = \frac{e f_0}{\theta}\,\vec{E}\,\vec{v} + \frac{e f_0}{c\theta}\vec{v}\,[\vec{v}, \vec{H}]; \tag{76}$$

но так как $\vec{v}\,[\vec{v}, \vec{H}] = 0$, то последний член в правой части этого равенства обращается в нуль. Далее имеем

$$-\vec{a}\,\nabla\varphi = \frac{e}{m}\,(\vec{E}\,\nabla\varphi + \frac{1}{c}[\vec{v}, \vec{H}]\nabla\varphi), \tag{77}$$

но первый член в правой части будет порядка E^2, поскольку $\varphi = 0$ при $\vec{E} = 0$. Из соотношений (75) – (77) получаем

$$\varphi f_0 = \frac{e\tau_e}{\theta}\,f_0\vec{E}\vec{v} - \frac{e\tau_e f_0}{mc}[\vec{v}, \vec{H}]\nabla\varphi),$$

или

$$\frac{\varphi}{\tau_e} - \frac{e}{\theta} f_0 \vec{E}\vec{v} + \frac{e}{mc}[\vec{v}, \vec{H}]\nabla\varphi) = 0, \tag{78}$$

где мы пренебрегли членами порядка E^2.

Будем искать решение уравнения (78) в виде

$$\varphi = \vec{\alpha}\,\vec{v} + \vec{\beta}[\vec{v}, \vec{H}],$$

где $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ – постоянные векторы, перпендикулярные вектору $\vec{H}$, абсолютная величина которых определяется из уравнения (78)

$$\frac{\vec{\alpha}\vec{v}}{\tau_e} - \frac{e}{\theta}\vec{E}\vec{v} + \frac{1}{c}\vec{\beta}[\vec{v}, \vec{H}] + \frac{e}{mc}[\vec{v}, \vec{H}](\vec{\alpha} - [\vec{\beta}, \vec{H}]) = 0. \tag{79}$$

Здесь использованы соотношения

$$\nabla(\vec{\alpha}\vec{v}) = \vec{\alpha}, \quad \nabla(\vec{\beta}[\vec{v}, \vec{H}]) = -[\vec{\beta}, \vec{H}].$$

Легко видеть, что

$$[\vec{v}, \vec{H}][\vec{\beta}, \vec{H}] = (\vec{v}\vec{\beta})H^2 - (\vec{H}\vec{\beta})(\vec{v}\vec{H}).$$

Последний член в правой части этого соотношения равен нулю, поскольку мы предположили, что вектор $\vec{\beta}$ перпендикулярен $\vec{H}$. Таким образом, уравнение (79) эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{\vec{\alpha}\vec{v}}{\tau_e} - \frac{e}{\theta}\vec{E}\vec{v} - \frac{eH^2}{mc}\vec{v}\vec{\beta} = 0,$$

$$\frac{\vec{\beta}[\vec{v}, \vec{H}]}{\tau_e} + \frac{e}{mc}\vec{\alpha}[\vec{v}, \vec{H}] = 0.$$

Приравнивая нулю по отдельности коэффициенты при $\vec{v}$ и $[\vec{v}, \vec{H}]$, находим

$$\frac{\vec{\alpha}}{\tau_e} - \frac{e}{\theta}\vec{E} - \frac{eH^2}{mc}\vec{\beta} = 0,$$

$$\frac{\vec{\beta}}{\tau_e} + \frac{e}{mc}\vec{\alpha} = 0.$$

Решая эту систему из двух уравнений относительно $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, получаем

$$\vec{\alpha} = \frac{e\vec{E}\tau_e}{\theta}\left[1 + \left(\frac{eH\tau_e}{mc}\right)^2\right]^{-1},$$

$$\vec{\beta} = -\frac{e^2\vec{E}\tau_e^2}{mc\theta}\left[1 + \left(\frac{eH\tau_e}{mc}\right)^2\right]^{-1}$$

Таким образом, пренебрегая членами более высокого порядка, чем EH или H^2, имеем

$$f = f_0 \left\{ 1 + \frac{e\tau_e\xi}{\theta}\vec{E}\vec{v} - \frac{e^2\tau_e^2}{mc\theta}\vec{E}[\vec{v}, \vec{H}] \right\}. \tag{80}$$

Здесь использовано обозначение

$$\xi = \left[1 + \left(\frac{eH\tau_e}{mc} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Если магнитное поле $\vec{H}$ направлено вдоль оси z, то (80) принимает вид

$$f = f_0 \left[1 + \frac{e\tau_e\xi}{\theta}(E_x v_x + E_y v_y) - \frac{e^2\tau_e^2 H}{mc\theta}(E_x v_y - E_y v_x) \right]. \tag{81}$$

Теперь можно непосредственно найти отличные от нуля компоненты тензора проводимости

$$J_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y,$$

$$J_y = \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y,$$

где вектор плотности тока определяется через функцию распределения f соотношением $\vec{J} = \int e\vec{v} f d\vec{v}$.

Будем для простоты полагать, что время релаксации τ_e не зависит от скорости. В этом случае с помощью соотношения (81) можно сделать выводы относительно эффекта Холла и изменения электрического сопротивления в магнитном поле. Предположим, что имеется образец в форме длинной тонкой пластины, вдоль которой (вдоль оси x) течет ток, причем плоскость пластины перпендикулярна оси z (направлению магнитного поля). Условие отсутствия тока в направлении y выполняется в том случае, если коэффициенты при v_y в формуле (81) при пренебрежении членами более высокого порядка по сравнению с H^2 равны нулю:

$$E_y = \omega_C \tau_e E_x, \tag{82}$$

где

$$\omega_C = \frac{eH}{mc}.$$

В τ-приближении соотношение (82) не зависит от скорости носителей тока. Требуя, чтобы коэффициент при v_y был равен нулю, и учитывая лишь члены порядка не выше H^2, вместо (81) получаем следующее выражение:

$$f = f_0 \left[1 + \frac{e\tau_e}{\theta}(\xi + \omega_C^2\tau_e^2)E_x v_x \right] = f_0 \left[1 + \frac{e\tau_e}{\theta}E_x v_x \right].$$

Полученное выражение не зависит от H. Тогда в рассматриваемом приближении изменение сопротивления в магнитном поле отсутствует. Этот вывод справедлив, в действительности, только для образцов в виде длинной тонкой пластины, перпендикулярной магнитному полю. Учитывая, что в рассматриваемом случае проводимость σ_{xx} определяется формулой (74) и, соответственно, $J_x = (ne^2\tau_e/m)E_x$, мы можем вычислить с учетом (82) постоянную Холла

$$\mathcal{R} = \frac{E_y}{J_x H} = \frac{1}{enc}.$$

Заметим, что в полупроводниках в выражении для постоянной Холла под m нужно понимать эффективную массу носителей тока.

3.2. Задачи для самостоятельной работы

• 1. Используя уравнение Больцмана с релаксационным членом, показать, что коэффициент теплопроводности κ идеального газа при условии постоянства давления равен:

$$\kappa_\tau = \frac{5}{2}\frac{n\tau\theta}{m} \quad (\tau\text{-приближение}) \quad \text{и} \quad \kappa_\lambda = \frac{1}{3}n\lambda\langle v\rangle \quad (\lambda\text{-приближение}).$$

• 2. Используя уравнение Больцмана с релаксационным членом, определить коэффициент первой вязкости η идеального газа в τ-приближении и в отсутствие внешних полей, считая θ и n постоянными величинами. Получить в этом приближении соотношение Чепмена для отношения коэффициентов вязкости и теплопроводности идеального газа: $\eta/\kappa = (2/5)m$.

• 3. Показать с помощью уравнения Больцмана с релаксационным членом, что коэффициент теплопроводности невырожденного электронного газа в τ-приближении при условии $J_e = 0$ равен $\kappa_e = 5n\tau\theta/(2m)$. Используя решение задачи 2, получить соотношение Видемана-Франца в τ-приближении: $e^2\kappa_e/\sigma\theta = 5/2$.

4.* Решить предыдущую задачу для вырожденного электронного газа [1].

5. Стационарный газ, состоящий из атомов массой m, при постоянной температуре T ограничен стенкой в плоскости $x = 0$, которая испускает с постоянной частотой атомы примеси с той же массой. Следовательно, существует установившийся градиент концентрации $\partial n/\partial x$, где $n(x)$ – плотность чуже-

родных атомов на расстоянии x от стенки – везде малая по сравнению с полной плотностью частиц в газе.

а) Записать стационарную функцию распределения по скоростям $f_0(\vec{v}, x)$ для примесных атомов, предполагая, что существует локальное равновесие.

б) Используя уравнение Больцмана с релаксационным членом, вычислить поправку первого порядка к этому распределению.

в) Вычислить в первом порядке среднюю скорость атомов примеси.

г) Вычислить коэффициент диффузии примесных атомов в газе.

6. В приближении $\tau_e = \tau_0/v$, где τ_0 – среднее значение длины свободного пробега, не зависящее от скорости, вычислить для невырожденного электронного газа: а) напряженность электрического поля Холла E_y, при котором ток в направлении y равен нулю; б) увеличение удельного сопротивления при ограничении членами порядка H^2 в поперечном магнитном поле. При решении использовать уравнение Больцмана с релаксационным членом.

7. Используя решение задачи 3 раздела 2.1, вычислить для вырожденного металла при условии $J_y = J_z = 0$ и условии изотермичности $\nabla_y T = \nabla_z T = 0$ следующие кинетические коэффициенты:

а) коэффициент Зеебека

$$\alpha = \frac{\nabla_x(\varsigma/e)}{\nabla_x T} \qquad \text{при} \quad J_x = 0;$$

б) коэффициент Нернста

$$N = \frac{\nabla_y(\varsigma/e)}{H_z \nabla_x T} \qquad \text{при} \quad J_x = 0;$$

в) коэффициент теплопроводности

$$\kappa = -\frac{C_x}{\nabla_x T} \qquad \text{при} \quad J_x = 0.$$

Здесь электрохимический потенциал $\varsigma = \mu - e\varphi$, где μ – химический потенциал свободных электронов.

8. Для модели, рассмотренной в задаче 3 раздела 2.1, рассчитать в приближении $\tau_e = \tau_0/v$ поперечный температурный градиент (эффект Эттингаузена) $A_E = \frac{(\partial T/\partial y)}{J_x H}$, вычисляемый при условии $J_y = (\partial T/\partial x) = 0$.

9. Найти стационарное решение кинетического уравнения Больцмана для газа во внешнем поле.

10. Найти стационарное решение кинетического уравнения Больцмана для газа в цилиндрическом сосуде радиуса R и длины L, вращающемся вокруг своей оси с угловой скоростью ω.

11.* Решить уравнение Больцмана для процесса стационарной диффузии легкой примеси в среде тяжелых частиц. Рассмотреть случай, когда столкновения частиц можно аппроксимировать моделью упругих шаров [1].

Библиографический список

[1] Квасников, И.А. Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем / И.А. Квасников. – М.: МГУ, 1987. – 559 с.

[2] Лифшиц, Е.М. Физическая кинетика / Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 2002. – 536 с.

[3] Базаров, И.П. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика / И.П. Базаров, Э.В. Геворкян, П.Н. Николаев. – М.: МГУ, 1989. – 240 с.

[4] Зайцев, Р.О. Введение в современную кинетическую теорию / Р.О. Зайцев. – М.: Комкнига, 2006. – 480 с.

[5] Базаров, И.П. Задачи по термодинамике и статистической физике / И.П. Базаров, Э.В. Геворкян, П.Н. Николаев. – М.: МГУ, 1997. – 352 с.

[6] Кондратьев, А.С. Задачи по термодинамике, статистической физике и кинетической теории / А.С. Кондратьев, П.А. Райгородский. – М.: Физматлит, 2007. – 254 с.

[7] Гречко, Л.Г. Сборник задач по теоретической физике / Л.Г. Гречко [и др.] – М.: Высшая школа, 1984. – 320 с.

[8] Кондратьев, А.С. Задачи по статистической физике / А.С. Кондратьев, В.П. Романов. – М.: Наука, 1992. – 120 с.

[9] Киттель, Ч. Элементарная статистическая физика / Ч. Киттель. – М.: ИЛ, 1960. – 279 с.

[10] Блатт, Ф.Дж. Теория подвижности электронов в твердых телах / Ф.Дж. Блатт. – М.: Физматлит, 1963. – 224 с.

[11] Блатт, Ф.Дж. Физика электронной проводимости в твердых телах / Ф.Дж. Блатт. – М.: Мир, 1971. – 472 с.

[12] Кайзер, Дж. Статистическая термодинамика неравновесных процессов / Дж. Кайзер. – М.: Мир, 1990. – 603 с.

[13] Климонтович, Ю.Л. Статистическая физика / Ю.Л. Климонтович. – М.: Наука, 1982. – 608 с.

[14] Балеску, Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Том 2 / Р. Балеску. – М.: Мир, 1978. – 392 с.

[15] Силин, В.П. Введение в кинетическую теорию газов / В.П. Силин. – М.: Наука, 1977. – 331 с.

[16] Либов, Р. Введение в теорию кинетических уравнений / Р. Либов. – М.: Мир, 1974. – 372 с.

[17] Kubo, R. Statistical physics II. Nonequilibrium statistical mechanics / R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume. – Springer-Verlag: NY, 1978. – 279 p.