

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

РАЗРАБОТКА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ СО СКВОЗНОЙ
ДОКУМЕНТАЦИЕЙ ПРОЦЕССОВ ПО ФИЗИКЕ

Электронный контент для унифицированной базовой части УМКД по физике

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование образовательной деятельности»
Программы развития СГАУ на 2009-2018 годы по проекту «Разработка образовательных программ со
сквозной документацией процессов по информатике, математике и физике»

Соглашение №1/3 от 03.06.2013 г.

САМАРА 2013

УДК 53(075)

ББК22.387

P177

Авторы-составители: Гусева Светлана Ивановна,
Завершинский Игорь Петрович,
Кнестяпин Владислав Николаевич,
Овчинникова Ирина Владимировна

Разработка образовательных программ со сквозной документацией процессов по физике [Электронный ресурс] : Электронный контент для унифицированной базовой части УМКД по физике / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т. им. С.П. Королева (нац. исслед. унт); авт.- сост. С. Н. Гусева, И.П. Завершинский, В.Н. Кнестяпин, И.В. Овчинникова.-Электрон. текстовые и граф. данные.(15.58 Мб.) – Самара, 2013. – 1 эл. оптич. диск (CD – ROM)

Режим доступа: <http://www.ssau.ru/struct/deps/physics>

В состав научно-образовательного модуля входят:

1. Лекции по механике и термодинамике.
2. Лекции по электромагнетизму.
3. . Лекции по оптике и атомной физике.
4. Лекции по колебаниям и волнам.
5. Задания для самостоятельной работы по механике и термодинамике.
6. Задания для самостоятельной работы по электромагнетизму.
7. Задания для самостоятельной работы по оптике и атомной физике.

Электронный контент для унифицированной базовой части УМКД по физике предназначены для студентов 1-6 факультетов всех направлений бакалавров и специальностей (ФГОС-3) по курсам физики.

Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

ЛЕКЦИИ ПО МЕХАНИКЕ И ТЕРМОДИНАМИКЕ

САМАРА 2013

УДК 53(075)

Л-43

Рецензент: канд. физ.-мат наук, доц. С м и р н о в а Н . П

Лекции по механике и термодинамике. / В. Н. Кнестяпин, И. В. Овчинникова, С. И. Гусева, И. П. Завершинский. - Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 83 с.: ил.

Пособие содержит базовый курс лекции по механике и термодинамике для студентов 1 – 6 факультетов СГАУ всех специальностей и направлений.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

Предмет механики

Механика изучает механическое движение тел. *Механическое движение* — это изменение положения тела с течением времени. Собственно механика имеет дело с такими системами, движение которых можно описать конечным числом функций времени $q_1(t), \dots, q_n(t)$. Число n необходимых функций называют *числом степеней свободы* системы.

Замечание. Таким образом, собственно механика изучает системы с конечным числом степеней свободы. Иногда сферу действия механики расширяют, включая в нее течение жидкости и колебания упругих тел.

Сами величины $q_1, \dots, q_n$ называют *координатами*. Зависимость координат от времени называют *законом движения*. *Основная задача механики* состоит в определении закона движения данной механической системы при данных начальных условиях.

Основные модели механики — материальная точка и твердое тело.

Материальная точка — это модель тела, размерами которого в условиях задачи можно пренебречь. (Размерами тела можно пренебречь, если они много меньше каких-то других характерных размеров задачи. Например, если вы бросаете камень размером 5 см на расстояние 20 м, то камень можно, очевидно, считать материальной точкой.) По самому смыслу, материальная точка имеет три степени свободы.

Твердое тело — это система материальных точек и связей, таких что расстояние между двумя любыми материальными точками остается неизменным. Хотя твердое тело может состоять из большого или даже бесконечного (сплошное тело) числа материальных точек, наличие связей приводит к тому, что число степеней свободы конечно и равно шести.

Кинематика материальной точки

Системы координат

Для описания движения материальной точки нужно ввести какую-либо систему координат. Ниже мы рассмотрим наиболее употребительные системы.

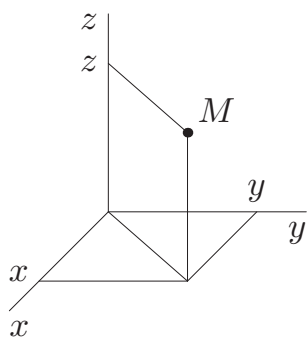
Декартова система координат. Движение материальной точки описывается функциями $x(t), y(t), z(t)$.

Полярная система координат (на плоскости). Движение материальной точки описывается функциями $r(t), \varphi(t)$.

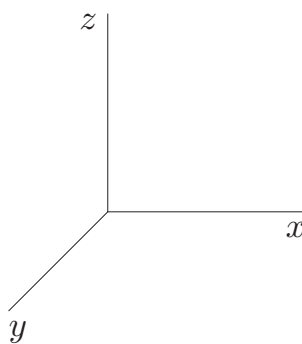
Связь с декартовыми координатами

$$x = r \cos \varphi,$$

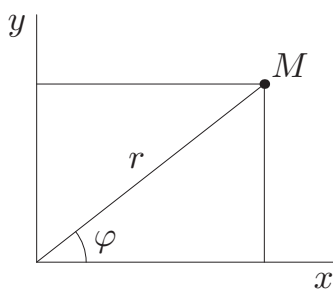
$$y = r \sin \varphi.$$



“Правая” декартова система координат

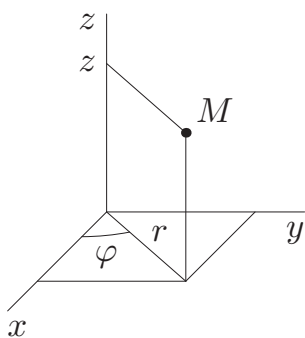


“Левая” (не будем пользоваться)

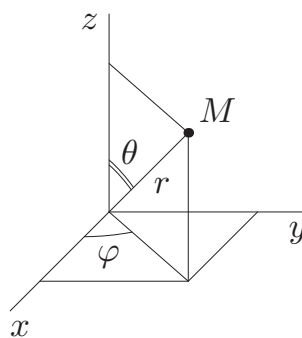


Полярная система координат

Цилиндрическая система координат (в пространстве). Движение материальной точки описывается функциями $r(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$.



Цилиндрическая система координат



Сферическая система координат

Связь с декартовыми координатами такая же, как для полярной системы координат.

Сферическая система координат. Движение материальной точки описывается функциями $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$. Связь с декартовыми координатами

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Выбор той или иной системы координат для описания движения материальной точки диктуется соображениями удобства.

Скорость и ускорение

Рассмотрим сначала движение точки по прямой. Положение ее характеризуется функцией $x(t)$.

Средней скоростью на интервале $[t_1, t_2]$ называется

$$v_{\text{ср}} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Мгновенной скоростью (или просто скоростью) в момент времени t_1 называется предел средней скорости на $[t_1, t_2]$ при $t_2 \rightarrow t_1$

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Немного математики. Производная. Таблица производных. Правила дифференцирования. Как известно, такой предел называется *производной функции* $x(t)$

$$v(t) = x'(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$$

(это все разные обозначения производной). Приведем тут же маленькую таблицу производных и некоторые правила дифференцирования для дальнейших ссылок.

Таблица производных

функция	производная
x^a	ax^{a-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x

Правила дифференцирования

$$\begin{aligned}(f + g)' &= f' + g'; & (cf)' &= cf', \quad c = \text{const}; \\(fg)' &= f'g + g'f & & \text{(правило Лейбница);} \\[g(f(x))]' &= g'(y)|_{y=f(x)} f'(x) & & \text{(производная сложной функции).}\end{aligned}$$

Ускорение определяется аналогично скорости

$$a = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = v' = x''$$

(вторая производная от координаты x , другие обозначения $\ddot{x}$ и d^2x/dt^2).

Немного математики. Интегрирование. Первообразная. Определенный интеграл. Пусть дана функция $f(x)$ и нужно найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, а сама операция, обратная дифференцированию, называется *интегрированием* и обозначается

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Таблица первообразных и правила интегрирования следуют из таблицы производных и правил дифференцирования.

Таблица интегралов

функция	интеграл
$x^a, \quad a \neq -1$	$x^{a+1}/(a+1) + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1/x$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$

Сразу отметим, что интегрирование — неоднозначная операция. Функции $F(x)$ и $F(x) + c$, где $c = \text{const}$, имеют одну и ту же производную, а потому обе являются первообразными для $f(x)$.

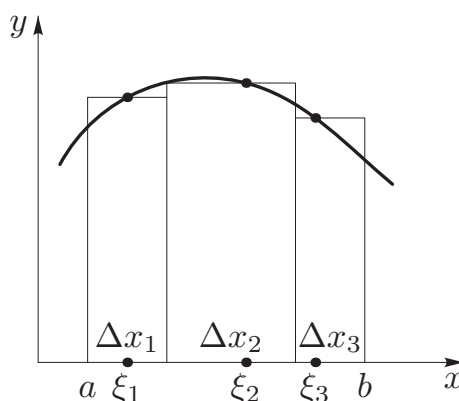
Правила интегрирования

$$\begin{aligned} \int [f(x) + g(x)] dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx; \quad \int [cf(x)] dx = c \int f(x) dx, \quad c = \text{const}; \\ \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int g'(x)f(x) dx \quad (\text{интегрирование по частям}); \\ \int g(f(x))f'(x) dx &= \int g(y) dy \Big|_{y=f(x)} = G(f(x)) \quad (\text{замена переменной в интеграле}). \end{aligned}$$

В последней формуле через $G(x)$ обозначена первообразная функции $g(x)$.

Наряду с введенным выше так называемым *неопределенным интегралом* в математическом анализе используется понятие *определенного интеграла*. Пусть задана функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на несколько меньших отрезков, пусть их длины равны $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$, длину наибольшего отрезка обозначим через Δ . На каждом отрезке выберем по точке $\xi_1, \xi_2, \dots$ и составим сумму $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots$. Геометрически эта сумма равна площади ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке. *Определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется предел этой суммы при измельчении разбиения

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots$$



Определенный интеграл

(геометрически определенный интеграл равен площади под графиком функции $f(x)$).

Оказывается, что определенный интеграл просто связан с неопределенным (или с первообразной). Именно, имеет место *формула Ньютона—Лейбница*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

В механике чаще встречается интегрирование, чем дифференцирование. Причина этого в том, что основной задачей является получение закона движения, то есть зависимость координат от времени, а из уравнений движения (подробнее ниже) обычно определяется ускорение. Координаты же должны быть затем восстановлены интегрированием.

Домашнее задание. Вспомнить формулы для скорости v координаты x при прямолинейном равномерном и прямолинейном равноускоренном движении.

Рассмотрим теперь общий трехмерный случай. Пусть x, y, z — декартовы координаты точки M .

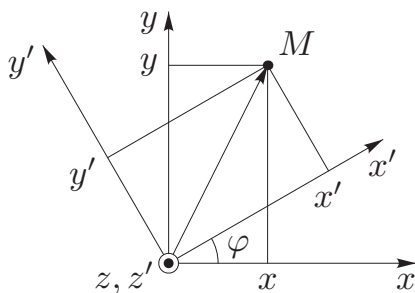
Вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$ называется *радиус-вектором* точки M .

Вектор $\mathbf{v} = (x', y', z')$ называется *скоростью* точки M (иначе записывается как $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$).

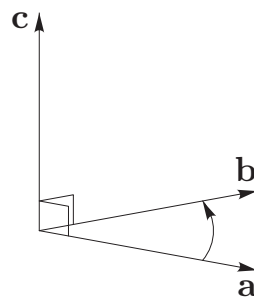
Вектор $\mathbf{a} = (x'', y'', z'')$ называется *ускорением* точки M (иначе записывается как $\mathbf{a} = \mathbf{v}' = \mathbf{r}''$).

Немного математики. Операции над векторами. Математики, которые будут читать вам линейную алгебру, объяснят, что вектор $\mathbf{b}$ характеризуется своими проекциями на оси некоторой декартовой системы координат, в нашем случае тройкой (b_x, b_y, b_z) . При замене системы координат проекции изменяются по определенным правилам, которые следуют из геометрической интерпретации вектора.

Домашнее задание. Написать формулы преобразования проекций вектора при повороте системы координат на угол φ вокруг оси z .



Поворот системы координат



Векторное произведение

Для векторов определены умножение на число, сложение, скалярное и векторное произведения.

Вектор $\mathbf{c}$ называется *произведением вектора $\mathbf{b}$ на число a* , если

$$c_x = ab_x, \quad c_y = ab_y, \quad c_z = ab_z$$

(записывается $\mathbf{c} = a\mathbf{b}$).

Вектор $\mathbf{c}$ называется *суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$* , если

$$c_x = a_x + b_x, \quad c_y = a_y + b_y, \quad c_z = a_z + b_z$$

(записывается $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$).

Число c называется *скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$* , если

$$c = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

(записывается $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, иногда применяются обозначения $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ или $c = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$). Как вас учили в школе, величина скалярного произведения равна произведению модулей векторов на косинус угла между ними. В частности, скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю.

Вектор $\mathbf{c}$ называется *векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$* , если

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

(записывается $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, иногда встречается обозначение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или даже $\mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$). Правила расстановки индексов в этих на первый взгляд сложных формулах на самом деле просты. Первые три индекса (индекс в левой части и индексы в первом произведении в правой части) всегда идут в порядке $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$. Индексы во втором произведении в правой части получаются перестановкой индексов в первом произведении. Отметим, что эти формулы справедливы только для “правой” системы координат (“левые” мы уже договорились не использовать). Геометрически вектор $\mathbf{c}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а его направление определяется правилом правого винта: если крутить винт от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$, то он будет ввинчиваться по направлению вектора $\mathbf{c}$. Абсолютная же величина вектора $\mathbf{c}$ равна произведению модулей векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на синус угла между ними. В частности, векторное произведение двух параллельных векторов равно нулю.

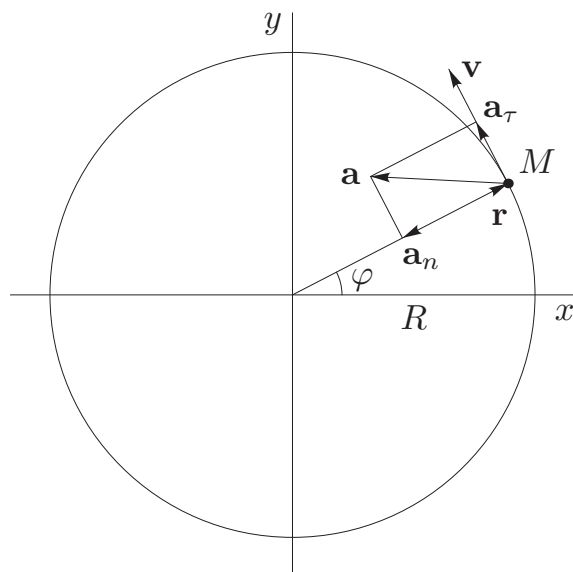
Движение по окружности

Естественно воспользоваться полярными координатами. Тогда

$$x = R \cos \varphi,$$

$$y = R \sin \varphi,$$

причем от времени зависит только φ .



Движение по окружности

Чтобы найти скорость, продифференцируем координаты по времени

$$v_x = -\dot{\varphi} R \sin \varphi,$$

$$v_y = \dot{\varphi} R \cos \varphi.$$

Величина $\dot{\varphi} = \omega$ называется *угловой скоростью* движения материальной точки. С помощью прямого вычисления убеждаемся, что $\mathbf{r}\mathbf{v} = 0$, то есть скорость перпендикулярна радиус-вектору, следовательно, она направлена по касательной к окружности. Модуль скорости

$$|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = R^2 \omega^2.$$

Таким образом линейная скорость связана с угловой равенством

$$v = \omega R.$$

Для определения ускорения дифференцируем дальше

$$\begin{aligned}a_x &= -\dot{\varphi}^2 R \cos \varphi - \ddot{\varphi} R \sin \varphi, \\a_y &= -\dot{\varphi}^2 R \sin \varphi + \ddot{\varphi} R \cos \varphi.\end{aligned}$$

Величину $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = \varepsilon$ называют *угловым ускорением* движения материальной точки. (Иногда угловое ускорение обозначают буквой β .) Для анализа удобно разбить ускорение на две части $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$, где

$$\mathbf{a}_n = (-R\omega^2 \cos \varphi, -R\omega^2 \sin \varphi) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

называется *нормальным ускорением* (оно сонаправлено с $\mathbf{r}$, а потому перпендикулярно к скорости), а

$$\mathbf{a}_\tau = (-R\varepsilon \sin \varphi, R\varepsilon \cos \varphi)$$

называется *тангенциальным ускорением* (оно сонаправлено со скоростью).

Абсолютная величина нормального ускорения может быть выражена через ω или v

$$a_n = \omega^2 R = v^2/R.$$

Используя уже полученное равенство $v = \omega R$, найдем $dv/dt = \varepsilon R$, после чего проекция тангенциального ускорения на направление скорости также может быть выражена двумя способами

$$a_\tau = \varepsilon R = dv/dt$$

(подчеркнем, что в этой формуле стоит производная абсолютной величины скорости). Поскольку тангенциальное и нормальное ускорения перпендикулярны друг другу, то величина полного ускорения равна

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Замечания. Тангенциальное и нормальное ускорения имеют смысл при движении по любой траектории, а не только по окружности. Все выведенные выше формулы сохраняют силу, однако не так то просто вычислить радиус кривизны произвольной траектории!

Введенные нами угловые характеристики (скорость и ускорение) встретятся еще раз при изучении кинематики твердого тела. Не следует смешивать эти понятия.

Законы Ньютона

Событием называют мгновенное происшествие, происходящее в данной точке пространства. (Например: материальная точка M в момент времени t проходит через точку с координатами x, y, z .) Для того чтобы описывать события, мы должны добавить к системе координат “часы” и превратить ее в *систему отсчета*.

Замечание. Настоящее осознание понятий “событие” и “система отсчета” приходит в теории относительности.

Первый закон Ньютона. Преобразования Галилея

Первый закон Ньютона гласит: существуют системы отсчета, в которых всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Такие системы отсчета называются *инерциальными*. Равномерное прямолинейное движение тела (в отсутствие воздействия со стороны других тел) называют движением по инерции, а первый закон Ньютона называют еще законом инерции.

Оказывается, что все инерциальные системы отсчета могут быть получены из одной

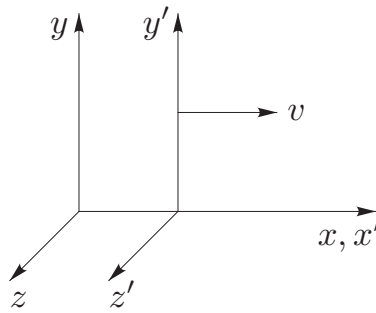
- сдвигом начала координат,
- изменением начала отсчета времени,
- поворотом осей координат,
- равномерным прямолинейным движением.

Одно и то же событие будет иметь разные координаты и время в разных инерциальных системах отсчета. Довольно очевидно, как пересчитываются координаты и время в первых трех (из четырех перечисленных) случаях. При равномерном прямолинейном движении

$$\begin{aligned}x &= x' + vt', \\ y &= y', \quad z = z', \\ t &= t' .\end{aligned}$$

Ввиду особой важности эти формулы получили название *преобразования Галилея*.

Замечания. Преобразованиями Галилея называют также всю совокупность преобразований от одной инерциальной системы отсчета к другой (включая сдвиги и повороты).



Преобразование Галилея

В теории относительности показано, что формулы преобразований Галилея не совсем точны. Они приближенно справедливы при малых (по сравнению со скоростью света) скоростях движения систем отсчета друг относительно друга. При больших скоростях формулы преобразований Галилея должны быть заменены формулами преобразований Лоренца.

Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона утверждает, что для любой материальной точки

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Здесь m — масса материальной точки, $\mathbf{a}$ — ее ускорение, $\mathbf{F}$ — действующая на материальную точку сила. Поскольку и понятие массы, и понятие силы относятся к фундаментальным (то есть к с трудом поддающимся определению), то нужно пояснить, в чем заключается смысл закона. Предполагается, что сила может зависеть от координат материальной точки, ее скорости и от времени $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Таким образом, закон связывает $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}' = \mathbf{v}$ и $\mathbf{r}'' = \mathbf{a}$. Эту связь называют *уравнением движения*.

Немного математики. Дифференциальные уравнения. Уравнения, связывающие функцию и ее производные, называются *дифференциальными уравнениями*. Содержание второго закона Ньютона в том, что движение тел можно описывать такими уравнениями. В данном случае это уравнения *второго порядка*, потому что в них входит вторая производная (а третья уже не входит). Математики объяснят вам, что решение дифференциального уравнения неединственно: оно содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения. В нашем случае их две. Чтобы определить эти постоянные и однозначно зафиксировать решение, мы должны задать *начальные условия*

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$$

— начальные координаты и скорости в момент времени $t = 0$. Совокупность уравнения и начальных условий

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \end{aligned}$$

называется *задачей Коши*. Решение задачи Коши уже единственно и описывает движение материальной точки под действием заданной силы при заданных начальных условиях.

Домашнее задание. Пусть материальная точка движется в поле тяготения Земли. Тогда сила $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Написать закон движения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Указать зависимость от начальных условий.

Обобщение на случай системы N материальных точек довольно очевидно. Для каждой материальной точки нужно записать уравнение движения

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Сила $\mathbf{F}_i$, действующая на i -ую материальную точку, может теперь зависеть от координат и скоростей всех материальных точек

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t).$$

Начальные условия также нужно задать для всех материальных точек системы

$$\mathbf{r}_i(0) = \mathbf{r}_{i0}, \quad \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_{i0}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Принцип относительности

Выше мы уже говорили, что во всех инерциальных системах отсчета тело, на которое не действуют другие тела, движется равномерно и прямолинейно. Однако справедливо и более сильное утверждение: все физические явления протекают совершенно одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Это утверждение называется *принципом относительности*.

Нас сейчас интересуют механические явления. Мы уже знаем, что движение материальной точки описывается уравнением $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ и что это уравнение не определяет движения однозначно — нужны еще начальные условия. Принцип относительности нужно понимать так, что при создании одинаковых начальных условий (независимо от того, в какой системе отсчета они созданы) в одинаковых системах дальнейшее механическое движение будет одинаковым.

Нетрудно видеть, что принцип относительности накладывает некоторые ограничения на вид функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (точнее, на функции $\mathbf{F}_i$ для системы материальных точек, но в целях упрощения обозначений мы будем писать уравнения так, будто точка всего одна).

В системе отсчета (x, y, z, t) закон движения материальной точки есть решение задачи Коши

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ \mathbf{r}(0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

В системе отсчета $(x', y', z', t' = t)$ закон движения той же материальной точки при тех же начальных условиях есть решение задачи Коши

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}' &= \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t'), \\ \mathbf{r}'(0) &= \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

(Штрих здесь обозначает не дифференцирование, а другую систему отсчета.) Функция $\mathbf{F}$ в обоих случаях одна и та же, поскольку системы одна и та же. Постоянные $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ одни и те же в соответствии с формулировкой принципа относительности. В соответствии с тем же принципом решения двух задач должны совпадать, то есть должны совпадать функции $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$. Это возможно, только если совпадают сами уравнения $m\mathbf{a}' = \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$ и $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (с точностью до замены штрихованных координат и времени нештрихованными). Таким образом, математическая формулировка принципа относительности состоит в инвариантности (неизменности) уравнений движения относительно преобразований Галилея.

Замечания. Принцип относительности часто понимают неправильно. Особенно много проблем это порождает в теории относительности. Будьте бдительны!

Принцип относительности, очевидно, не может применяться к системам материальных точек, которые взаимодействуют с внешними телами. В этом случае следовало бы “переносить” из одной системы отсчета в другую внешние тела, что автоматически изменяет уравнения движения.

Домашнее задание. Пусть система состоит из двух материальных точек, а

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3$$

(сила тяготения Ньютона). Показать, что уравнения движения этой системы инвариантны относительно преобразований Галилея.

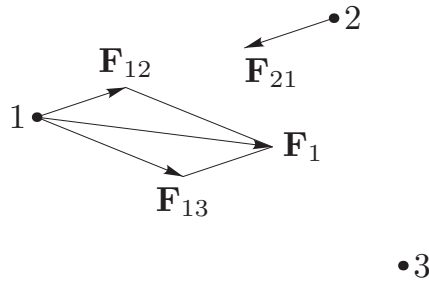
Третий закон Ньютона

Третий закон предполагает, что силу, действующую на материальную точку, можно представить в виде суммы, каждый член которой обусловлен действием какой-то другой материальной точки. (На рисунке показан случай системы из трех точек.)

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13}.$$

Третий закон утверждает, что

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$



Третий закон Ньютона

и аналогично для любой другой пары индексов, а также что

$$\mathbf{F}_{12} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0,$$

то есть $\mathbf{F}_{12} \parallel \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Замечание. Третий закон Ньютона не является столь фундаментальным, как второй. На сегодняшний день дифференциальными уравнениями второго порядка (обыкновенными или в частных производных) описываются практически любые физические системы. В то же время с точки зрения современной физики третий закон Ньютона — всего лишь досадный компромисс, другой способ записи фундаментального закона сохранения импульса, приспособленный для механики с ее дальнодействующими силами. К примеру, в электродинамике уравнение движения заряженной частицы в форме второго закона Ньютона сохраняется (с поправкой на релятивизм), а вот третьего закона нет и в помине.

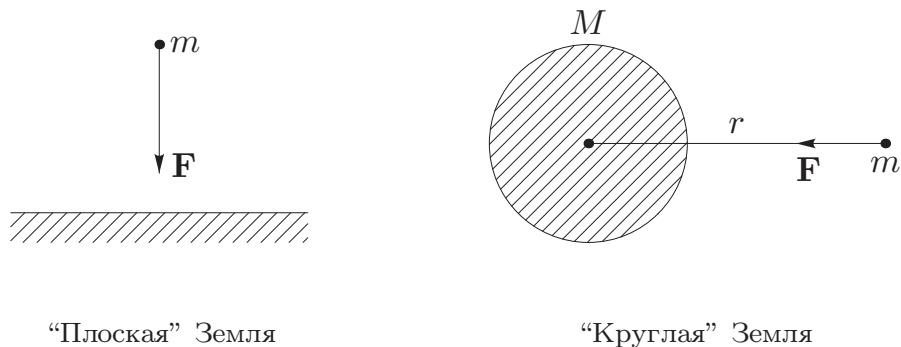
Силы в механике

С математической точки зрения *механическая система считается заданной, если заданы силы*, действующие на все материальные точки системы. Тогда можно с помощью второго закона Ньютона составить уравнения движения, решить их, и найти закон движения каждой материальной точки. Однако на практике силы редко бывают заданы явно. Вместо этого механическая системы описывается “на словах”. Мы должны уметь переводить такое “физическое” описание на язык математики. Поскольку общих рецептов здесь нет, то мы просто перечислим те силы, с которыми нам придется иметь дело.

Силы делятся на “настоящие”, те для которых действительно можно указать выражение $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, и силы реакции связей. Из “настоящих” сил мы встретимся с силой тяжести и силой упругости.

Сила тяжести. Сила тяжести — это сила взаимодействия материальной точки и Земли. В модели “плоской” Земли

$$F = mg,$$



где m — масса материальной точки, а g — ускорение свободного падения.
В модели “круглой” Земли

$$F = G \frac{mM}{r^2},$$

где M — масса Земли, G — гравитационная постоянная. Это *закон всемирного тяготения*.

Сила упругости. Сила упругости — это сила, с которой действует на материальную точку прицепленная к ней пружина. Величина этой силы определяется *законом Гука*

$$F = kx,$$

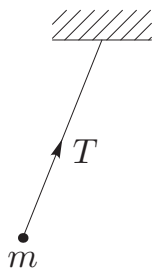
где x — удлинение пружины по сравнению с недеформированным состоянием, k — жесткость пружины.

Силы реакции связей. Материальные точки редко бывают предоставлены сами себе. Чаще что-то мешает им двигаться свободно. Они привязаны нитками или лежат на плоскости. Такие ограничения называют *связями*. Связи уменьшают число степеней свободы системы. При наличии связей некоторые координаты (вообще говоря, координаты и скорости) оказываются зависимыми. Эту зависимость называют *уравнением связи*. Например, если материальная точка лежит на столе, то она имеет не три, а две степени свободы. Если ввести декартову систему координат, и направить ось z перпендикулярно столу, то уравнением связи будет $z = 0$.

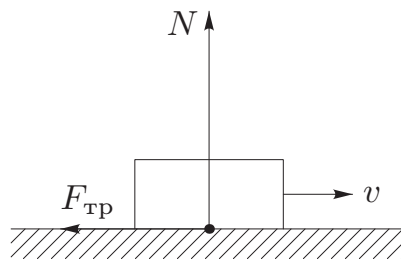
При наличии связей возникают дополнительные силы, которые называются *силами реакции связей*. Отличие их от “настоящих” состоит в том, что невозможно дать формулу вычисления силы реакции связи. Эта сила ровно такая, какая нужна для того, чтобы выполнялось уравнение связи.

Замечание. Подставляя “настоящие” силы во второй закон Ньютона, мы получаем уравнения движения, решая которые, находим закон движения. С силами реакции связей все наоборот: подставляя уравнения связей в закон Ньютона, мы можем определить силы реакции связей.

Сила натяжения нити. Если материальная точка привязана к нитке, то на нее действует сила натяжения нити T . Сила натяжения нити всегда направлена вдоль нити.



Сила натяжения нити



Сила реакции опоры и сила трения

Сила реакции опоры. Если материальная точка соприкасается с каким-либо твердым телом, например, лежит на столе, то на нее действует сила реакции опоры N . Эта сила всегда направлена перпендикулярно поверхности опоры.

Сила трения покоя. Помимо силы реакции опоры на материальную точку может действовать сила трения. Сила трения всегда направлена по касательной к поверхности опоры. Если материальная точка не движется, то силу трения называют силой трения покоя. Абсолютная величина силы трения покоя не может быть больше μN , где μ — коэффициент трения. Если вычисленная из уравнений движения сила трения оказывается больше этой величины, тело начинает скользить по опоре.

Сила трения скольжения. Абсолютная величина этой силы равна

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

а направлена она всегда против скорости движения.

Законы сохранения

Немного математики. О функциях многих переменных. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$. Аналогично случаю одной функции одной переменной можно ввести понятие производной. Забудем на время, что f зависит от y , тогда остается одна переменная x и можно определить производную обычным образом. Такая производная называется *частной*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2, y) - f(x_1, y)}{x_2 - x_1}.$$

Точно так же определяется частная производная по y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1) = \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1}.$$

Предположим теперь, что x и y сами являются функциями какой-то переменной t . Тогда f также является (сложной) функцией t . Нетрудно догадаться, что

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Все приведенные конструкции легко обобщаются на большее число переменных.

Нам будут часто встречаться функции от векторов, например, $f(\mathbf{r})$. Под этим понимается функция от компонент вектора $f(x, y, z)$. Частные производные такой функции $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ также образуют вектор

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

который называют еще *градиентом* функции f .

Домашнее задание. Проверить, что частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ при повороте системы координат действительно преобразуются как компоненты вектора.

Аналогично функциям одной переменной можно определить высшие производные (вторую, третью ...) через повторное дифференцирование. При этом *смешанные производные* типа $\partial^2 f/\partial x \partial y$ обладают свойством

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

(значение производной не зависит от порядка дифференцирования).

Понятие об интегралах движения

Мы записали уравнения движения (второй закон Ньютона) в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Напомним, что $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, поэтому это дифференциальные уравнения второго порядка.

Частным случаем такого уравнения является

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0.$$

Действительно, выполняя дифференцирование, найдем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{a} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

В это соотношение входят $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$.

Особая роль уравнения движения в форме

$$\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0$$

в том, что оно немедленно “интегрируется”

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = c \quad (= \text{const})$$

и приводит к соотношению между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ (без $\mathbf{a}$!), то есть к дифференциальному уравнению меньшего (первого) порядка. Функция Φ называется *первым интегралом* исходного дифференциального уравнения $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему N материальных точек с массами m_i , $i = 1, 2, \dots, N$. *Импульсом материальной точки* называется вектор

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i.$$

Импульсом системы материальных точек называется сумма импульсов отдельных точек

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i.$$

Закон сохранения импульса утверждает, что, при некоторых дополнительных условиях, импульс системы материальных точек остается постоянным, то есть $d\mathbf{P}/dt = 0$.

Чтобы вывести закон сохранения импульса, запишем уравнения движения для каждой точки системы

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N, t), \quad i = 1, \dots, N.$$

Заметим, что $\mathbf{a}_i = d\mathbf{v}_i/dt$, а потому левую часть можно записать в виде $d\mathbf{p}_i/dt$. Правую часть в соответствии с третьим законом Ньютона представим в виде

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{i \text{ внешн.}}$$

Итак

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{i \text{ внешн.}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Дифференцируя импульс системы по времени, найдем

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{i \text{ внешн.}}$$

Стоящую справа двойную сумму можно представить как сумму всех элементов таблицы

$$\begin{array}{ccccc} \times & \mathbf{F}_{12} & \mathbf{F}_{13} & \dots & \mathbf{F}_{1N} \\ \mathbf{F}_{21} & \times & \mathbf{F}_{23} & \dots & \mathbf{F}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{F}_{N1} & \mathbf{F}_{N2} & \mathbf{F}_{N3} & \dots & \times \end{array}$$

в которой диагональные элементы отсутствуют (по условию $j \neq i$). В этой таблице для любого наддиагонального элемента найдется поддиагональный противоположного знака (например, $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$). Поэтому сумма всех элементов равна нулю

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн.}},$$

посредством $\mathbf{F}_{\text{внешн.}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{i \text{ внешн.}}$ обозначена сумма всех внешних сил, действующих на точки системы.

Если $\mathbf{F}_{\text{внешн.}} = 0$, то мы приходим к *закону сохранения импульса*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0, \quad \mathbf{P} = \text{const.}$$

Замечания. Мы совсем не пользовались утверждением $\mathbf{F}_{12} \parallel \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ третьего закона Ньютона.

Обычно закон сохранения импульса формулируют для систем, на которые вообще не действуют внешние силы (такие системы называют *изолированными*). Однако из нашего вывода закона сохранения импульса видно, что достаточно, чтобы сумма внешних сил равнялась нулю (чтобы внешние силы компенсировались).

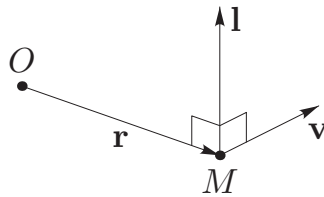
Не нужно забывать, что закон сохранения импульса — векторный закон. В ряде случаев сумма внешних сил не равна нулю, однако ее *проекция* на какую-то ось все же равна нулю. Тогда имеет место *сохранение проекции импульса* на соответствующую ось.

Закон сохранения момента импульса

Моментом импульса материальной точки M относительно данного начала координат O называется вектор

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i,$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор относительно O .



Момент импульса материальной точки

Замечание. Мы специально подчеркиваем, что момент импульса исчисляется относительно некоторой точки. Бессмысленно говорить просто о моменте импульса.

Моментом импульса системы материальных точек относительно точки O называется сумма моментов импульса отдельных точек относительно точки O

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i.$$

Моментом силы, действующей на материальную точку, относительно точки O называется вектор

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Замечания. Иногда момент силы определяют безотносительно какой-либо материальной точки, на которую сила действует, а пользуются понятием *точка приложения силы*.

Как и момент импульса, момент силы исчисляется относительно какой-либо точки.

Закон сохранения момента импульса утверждает, что, при некоторых дополнительных условиях, момент импульса системы остается постоянным, $d\mathbf{L}/dt = 0$.

Для вывода закона сохранения импульса продифференцируем $\mathbf{L}$ по времени

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d(m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Представляя, как и ранее, силы $\mathbf{F}_i$ в виде суммы внутренних и внешних, найдем

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i \text{ внешн.}}$$

Если мы представим двойную сумму в правой части через сумму элементов таблицы, то заметим, что в выражении $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}$ можно поменять местами i и j , от этого сумма не изменится. Действительно, можно сначала сложить элементы каждой строки, а затем сложить полученные результаты. Но можно сначала сложить элементы каждого столбца, а затем сложить результаты. Поэтому

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}).$$

Остается воспользоваться условиями $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ и $\mathbf{F}_{ij} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = 0$, и мы видим, что двойная сумма равна нулю. Итак

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}},$$

где $\mathbf{M}_{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{i \text{ внешн}}$ — сумма моментов внешних сил, действующих на точки системы.

Если $\mathbf{M}_{\text{внешн}} = 0$, то мы приходим к *закону сохранения момента импульса*

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \quad \mathbf{L} = \text{const.}$$

Замечания. Для доказательства нам потребовались все утверждения третьего закона Ньютона.

В отличие от закона сохранения импульса, моменты внешних сил труднее компенсировать, поскольку они зависят не только от самих внешних сил, но и от положения материальных точек системы. Поэтому закон сохранения момента импульса обычно формулируется для изолированной системы.

Для неизолированных систем в ряде случаев удастся воспользоваться произволом в выборе начала координат для того чтобы “занулить” момент внешних сил (или хотя бы его проекцию).

Закон сохранения момента импульса — закон векторный, поэтому отдельные проекции могут сохраняться, даже если полный момент и не сохраняется.

Понятие силового поля. Работа силы

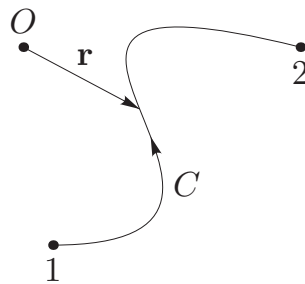
Будем предполагать, что сила, действующая на материальную точку, не зависит от ее скорости (приведенные выше примеры сил тяжести и упругости удовлетворяют этому предположению). Поскольку сила в этом случае зависит только от координат и времени, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, то можно “отделить” силу от материальной точки, считая ее характеристикой самого пространства.

Силовое поле — это сила, заданная в каждой точке пространства в каждый момент времени.

Замечание. Настоящее изучение “полей”, то есть функций $\mathbf{r}$ и t , ждет нас в следующем семестре, когда мы столкнемся с электромагнитным полем.

Если задана кривая C , то можно определить *работу силы* (точнее, *работу силового поля*)

$$A = \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$



Работа силы

Немного математики. Криволинейный интеграл второго рода. Стоящий здесь интеграл называется *криволинейным интегралом второго рода*. Он похож на

определенный интеграл. Пусть кривая C задана параметрически, то есть задана функция $\mathbf{r}(\tau)$, такая что $\mathbf{r}$ пробегает кривую C , когда τ пробегает отрезок $[0, 1]$. Тогда

$$\int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(\tau)) \mathbf{r}'(\tau) d\tau.$$

Справа стоит уже обыкновенный (не криволинейный) определенный интеграл. От способа параметризации кривой C значение криволинейного интеграла на самом деле не зависит.

Если $\mathbf{F}$ не зависит от t , то данное нами определение работы вполне однозначно. Если же $\mathbf{F}$ зависит от t явно, $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, то нужно еще указать, как в процессе вычисления интеграла меняется время. Есть две естественные возможности, которые мы условно назовем работа-1 и работа-2.

Работа-1: время при вычислении интеграла полагается постоянным (а сам интеграл зависит от него как от параметра),

Работа-2: время меняется в соответствии с движением материальной точки по траектории C под действием самой же силы $\mathbf{F}$ (то есть параметр τ есть время, а $\mathbf{r}'(\tau) = \mathbf{v}(\tau)$).

Оба определения применяются в механике.

Замечание. Очевидно, определение работы-2 можно распространить и на силы, зависящие от скорости материальной точки.

Работа-2 и изменение кинетической энергии

Рассмотрим одну материальную точку, на которую действует сила $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Вычислим работу-2

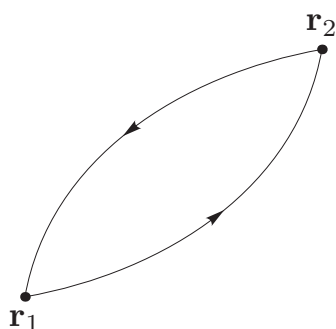
$$\begin{aligned} A^{(2)} &= \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t) \mathbf{v}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{a}(t) \mathbf{v}(t) dt = \\ &= \left. \frac{mv^2(t)}{2} \right|_{t_1}^{t_2} = \frac{mv^2(t_2)}{2} - \frac{mv^2(t_1)}{2}. \end{aligned}$$

Величина $mv^2/2$ называется *кинетической энергией материальной точки*.

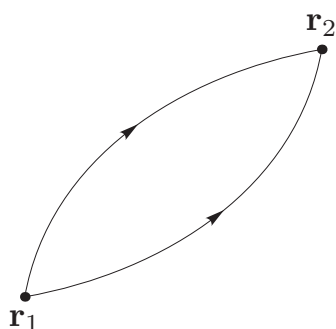
Работа-1 и понятие потенциального поля

Силовое поле $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ называется *потенциальным*, если работа-1 $A^{(1)} = 0$ для любой замкнутой кривой C .

Определение потенциальности можно переформулировать таким образом: работа-1 для *незамкнутой* кривой C не зависит от формы кривой, а только от начальной и конечной точек. Таким образом, можно говорить о



Работа по замкнутому пути
равна нулю



Работа по незамкнутому пути
не зависит от пути

работе при перемещении из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_2$ безотносительно кривой, по которой это перемещение происходит. Нетрудно понять, что работа при перемещении из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_3$ равна сумме работ при перемещении из точки $\mathbf{r}_1$ в точку $\mathbf{r}_2$ и перемещении из точки $\mathbf{r}_2$ в точку $\mathbf{r}_3$. Для произвольных $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ это возможно, только если существует функция $U(\mathbf{r}, t)$ (зависимость от t как от параметра, вспомни определение работы-1), такая что

$$\int_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = -(U(\mathbf{r}_2, t) - U(\mathbf{r}_1, t)).$$

(общий знак “минус” в правой части по историческим причинам). Функция $U(\mathbf{r}, t)$ называется *потенциальной энергией* силового поля $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$.

Немного математики. Еще о криволинейном интеграле второго рода. Как восстановить силу, если известна потенциальная энергия? Поскольку криволинейный интеграл второго рода аналогичен определенному интегралу, а формула, определяющая потенциальную энергию, похожа на формулу Ньютона—Лейбница, нетрудно догадаться, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial U(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}}.$$

Иначе говоря, криволинейный интеграл от градиента некоторой функции равен разности значений функции на концах контура интегрирования

$$\int_{\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1)$$

и обратно, если криволинейный интеграл равен разности значений некоторой функции на концах контура интегрирования, то подынтегральное выражение есть градиент этой функции.

Формула, выражающая силу через потенциальную энергию, дает простой *критерий потенциальности*: поле $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ является потенциальным,

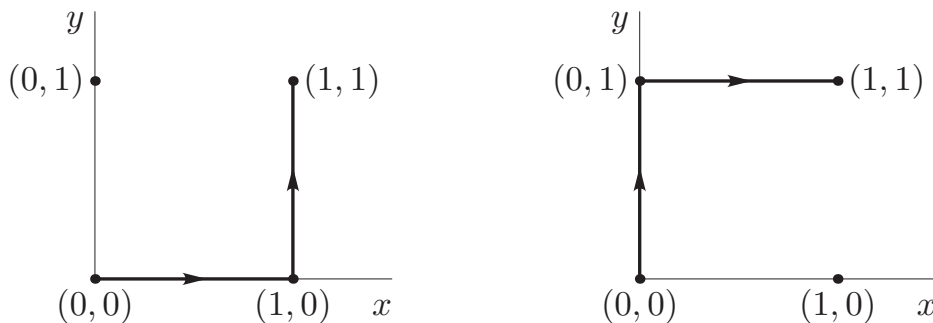
если

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

Домашнее задание. Проверьте, что сила, равная градиенту потенциальной энергии, удовлетворяет этому критерию потенциальности.

Непотенциальное поле (двумерное). Пусть $F_x = 0$, $F_y = x$. Тогда $\partial F_x / \partial y = 0$, $\partial F_y / \partial x = 1$, так что критерий потенциальности не выполняется.

Домашнее задание. Вычислите работу этого силового поля при перемещении по ломаным $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1)$ и $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (1, 1)$.



Обобщение понятия потенциальных сил на систему материальных точек выглядит следующим образом: силы, действующие в системе материальных точек называются потенциальными, если

$$\mathbf{F}_i = - \frac{\partial U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t)}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Замечание. Подчеркнем, что потенциальная энергия — *одна* на всю систему материальных точек, нет потенциальной энергии *отдельных* точек.

Домашнее задание. Переформулируйте определение потенциальности в терминах работы-1 для случая системы материальных точек.

Закон сохранения энергии

Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий отдельных материальных точек

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Полной механической энергией системы называется сумма кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + U.$$

Разумеется, речь идет только о системах, точки которых взаимодействуют потенциальными силами.

Замечание. Иногда понятие потенциальной энергии (а вместе с ним и полной) вводят для систем, в которых между точками действуют также непотенциальные силы. При этом подразумевают следующее разбиение

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_{i \text{ непотенц.}}$$

Хотя такое разбиение неоднозначно, оно прижилось в механике.

Будем полагать, что

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_{i \text{ внешн.}}$$

Продифференцируем полную энергию по времени

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \mathbf{v}_i + \frac{\partial U}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \left(m_i \mathbf{a}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{F}_{i \text{ внешн.}} + \frac{\partial U}{\partial t}. \end{aligned}$$

Если потенциальная энергия не зависит от времени явно, $\partial U / \partial t = 0$, а внешние силы отсутствуют (система изолирована), то мы приходим к *закону сохранения энергии*

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E = \text{const.}$$

Замечания. Величина $\mathbf{F}_i \mathbf{v}_i$ называется *мощностью*, которую развивает сила $\mathbf{F}_i$ (это выражение уже возникало при рассмотрении работы-2). Закон сохранения энергии справедлив, если мощность, развиваемая всеми внешними силами, равна нулю, однако на практике это трудно гарантировать, поэтому обычно требуют изолированности системы.

Наличие непотенциальных сил портит закон сохранения, однако, если эти силы действуют в течение некоторого конечного промежутка времени, то в остальное время энергия сохраняется.

Нужно также упомянуть о силах реакции. Поскольку никакого выражения через координаты для них нет, потенциальными их считать нельзя. Тем не менее и при наличии

сил реакции закон сохранения энергии во многих случаях справедлив. Действительно, как уже было отмечено, достаточно, чтобы мощность сил реакции равнялась нулю. Это справедливо для силы натяжения нити и силы реакции опоры, поскольку они перпендикулярны скорости материальной точки (такие силы реакции и сами связи называются *идеальными*). Это верно и для силы трения покоя, поскольку скорость равна нулю. Единственной “плохой” силой в механике остается сила трения скольжения.

В заключение приведем выражения для потенциальной энергии сил тяжести и упругости.

В модели плоской Земли

$$U = mgz,$$

где ось z перпендикулярна поверхности Земли.

В модели круглой Земли

$$U = -G \frac{mM}{r},$$

где r — расстояние от материальной точки до центра Земли.

Потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины

$$U = kx^2/2,$$

где x — удлинение пружины по сравнению с недеформированным состоянием.

Домашнее задание. Получите эти выражения.

Законы сохранения и симметрия пространства

Мы получили законы сохранения как следствие уравнений движения (второго и третьего законов Ньютона). Однако с точки зрения современной физики законы сохранения являются в некотором смысле более фундаментальными, чем уравнения движения. Оказывается, что законы сохранения тесно связаны с симметриями пространства и времени.

Закон сохранения энергии накладывает наибольшие ограничения на силы: они должны зависеть только от координат, да еще быть потенциальными. С другой стороны, совершенно не используются утверждения третьего закона Ньютона. Совмещение потенциальности с третьим законом приводит к замечательной интерпретации законов сохранения.

Утверждение

$$\mathbf{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}$$

третьего закона Ньютона соответствует разложению потенциальной энергии в сумму

$$U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j < i}}^N u_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j).$$

Условие $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ означает

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial u_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j}.$$

Такое возможно, только если u_{ij} зависит не от $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ по отдельности, а от их разности $u_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Условие $\mathbf{F}_{ij} \parallel \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ означает, что u_{ij} зависит не от вектора $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ (три переменных), а только от его модуля $u_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ (одна переменная).

Домашнее задание. Показать, что

$$\mathbf{F}_{ij} = -\frac{\partial u_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i},$$

и проверить сделанные утверждения о зависимости u_{ij} от $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$.

Геометрическая интерпретация зависимости u_{ij} только от $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ состоит в том, что такая u_{ij} (а значит и U) не меняется при *сдвиге*

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}.$$

Зависимость u_{ij} только от $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ соответствует неизменности u_{ij} при *поворотах*.

Отсутствие явной зависимости u_{ij} от времени соответствует неизменности u_{ij} при *сдвигах времени*

$$t' = t + a.$$

Таким образом, законы сохранения оказываются связанными с фундаментальными симметриями пространства, которые мы обсуждали в связи с принципом относительности. Остались “невостребованными” только преобразования Галилея (равномерное прямолинейное движение). Оказывается, что им тоже соответствует закон сохранения, который иногда называют *теоремой о движении центра масс*.

Поскольку законы сохранения выполняются в любой инерциальной системе отсчета, они оказываются связанными друг с другом. Рассмотрим только один пример, восходящий еще к Гюйгенсу.

Запишем сохранение энергии в двух инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга со скоростью $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N) \right) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i'^2}{2} + U(\mathbf{r}'_i, \dots, \mathbf{r}'_N) \right) &= 0.\end{aligned}$$

Здесь штрихованные и нештрихованные величины связаны равенствами

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{u}t, \quad \mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{u}.$$

Выражая штрихованные величины во втором равенстве через нештрихованные, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \mathbf{u} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i u^2}{2} + U(\mathbf{r}_i + \mathbf{u}t, \dots, \mathbf{r}_N + \mathbf{u}t) \right) = 0.$$

Третья сумма представляет собой постоянную величину $Mu^2/2$, где M — сумма масс всех материальных точек. Пользуясь инвариантностью потенциальной энергии при сдвигах, можно убрать слагаемое $\mathbf{u}t$ из всех аргументов. Тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \mathbf{u} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} + U(\mathbf{r}_i, \dots, \mathbf{r}_N) \right) = 0.$$

Но последние два слагаемых сохраняются, поэтому

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \mathbf{u} = 0.$$

При произвольном $\mathbf{u}$ это возможно, только если

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = 0.$$

Нетрудно видеть, что мы получили закон сохранения импульса.

Замечания. Оказывается, что можно не только получить одну сохраняющуюся величину, если известна другая, можно вывести их зависимость от координат и скорости, опираясь только на формулы преобразований из одной инерциальной системы отсчета в другую. В частности, выражения $m\mathbf{v}$ и $mv^2/2$ для импульса и кинетической энергии могут быть выведены из преобразований Галилея.

Связь законов сохранения друг с другом и с преобразованиями из одной инерциальной системы отсчета в другую особенно вышукло проступает в теории относительности, где энергия и импульс объединяются в один четырехмерный вектор.

Заметим, наконец, что оказывается возможным обобщить понятие потенциальности и на некоторые силы, зависящие от скорости (например, на силу Лоренца). Обобщенная потенциальная энергия уже сама зависит от скорости, а сила вычисляется по формуле

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

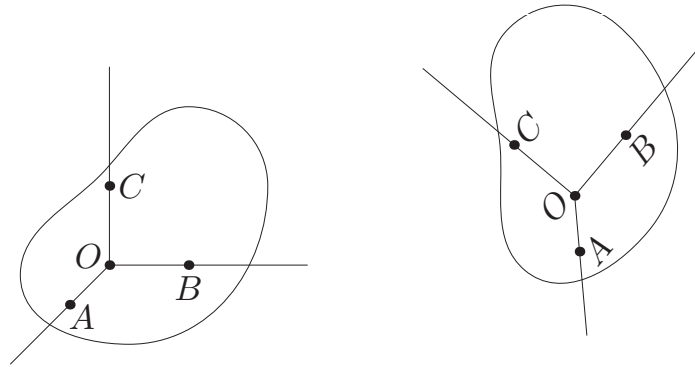
При этом, как уже отмечалось, третий закон Ньютона теряет силу, но законы сохранения остаются, остается неизменной их связь друг с другом и с симметриями пространства.

Кинематика твердого тела

Число степеней свободы. Углы Эйлера

Как мы уже говорили, *твердое тело* — это система материальных точек и связей, таких что расстояние между двумя любыми материальными точками остается неизменным. Нетрудно догадаться, что и *углы* между векторами, соединяющими любые три точки твердого тела, тоже остаются неизменными.

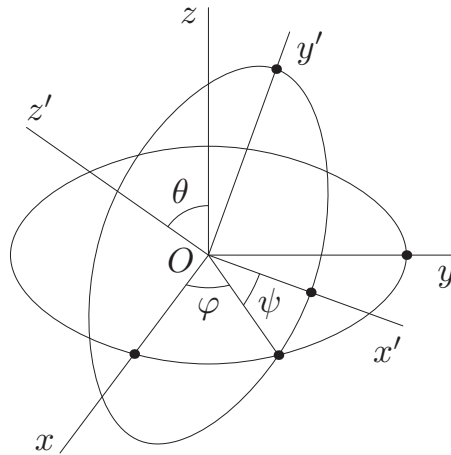
Домашнее задание. Докажите неизменность скалярных произведений векторов, соединяющих любые три точки твердого тела. Выведите из этого неизменность углов.



Вмороженная система координат

Неизменность расстояний и углов дает возможность ввести *вмороженную систему координат*. Рассмотрим начальное положение твердого тела. Совместим начало неподвижной лабораторной декартовой системы координат с какой-либо точкой O твердого тела. Точки твердого тела, лежащие на осях координат (на положительных полуосях) и отстоящие от начала координат на 1 м (или 1 мм — масштаб не важен), обозначим через A , B , C . Рассмотрим какое-либо положение твердого тела в процессе движения. Точки O , A , B , C уже не совпадают со своими начальными положениями, однако расстояния между точкой O и точками A , B , C по-прежнему равны 1 м, а углы между векторами OA , OB , OC — по-прежнему прямые. Это означает, что можно ввести декартову систему координат с началом в O и осями, проходящими через A , B , C . В этой — вмороженной — системе координат точки A , B , C в процессе движения имеют постоянные координаты, равные их начальным значениям.

Домашнее задание. Покажите, что координаты *любой точки* твердого тела во вмороженной системе остаются неизменными в процессе движения.



Углы Эйлера

Описание движения твердого тела — это описания движения каждой его точки. Ясно, что описание движения твердого тела сводится к описанию движения замороженной системы координат относительно лабораторной. Движение замороженной системы координат опишем в два приема. Сначала опишем движение начала координат O . На это уйдет три координаты. Поворот осей замороженной системы координат относительно лабораторной также можно описать тремя координатами, например тремя *углами Эйлера*. Таким образом, для описания движения твердого тела в общем случае нужно шесть координат. Три степени свободы, связанные с координатами точки O и соответствующие поступательному движению, называют *поступательными*, а три степени свободы, соответствующие углам Эйлера — *вращательными*.

Замечание. Конечно, такое разбиение условно (определенный смысл имеет только полное число степеней свободы), однако оно практически удобно и вошло в обиход.

Домашнее задание. Сколько поступательных и вращательных степеней свободы имеет твердое тело в двумерном пространстве? А в четырехмерном?

Из сказанного выше есть одно важное исключение. Если все точки твердого тела расположены на одной прямой (например, тело представляет собой тонкий стержень), то степеней свободы пять, а не шесть. Поступательное движение по-прежнему описывается тремя координатами некоторой точки O твердого тела, однако для описания вращений достаточно двух координат, например двух сферических углов.

Замечание. Если на твердое тело наложены связи, то, как и в случае материальной точки, число степеней свободы уменьшается. Довольно типичны два случая. Если

одна из точек твердого тела закреплена, то остается всего три (вращательных) степени свободы. Если закреплены две точки (твердое тело на оси), то остается всего одна (вращательная) степень свободы. Одна степень свободы остается также в некоторых случаях качения твердого тела.

Угловая скорость

Координаты любой точки твердого тела в лабораторной системе координат выражаются через координаты какой-то одной его точки O в лабораторной системе координат и углы Эйлера

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + A\mathbf{r}',$$

где векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_O$ составлены из координат точек M и O в лабораторной системе координат, а вектор $\mathbf{r}'$ составлен из (постоянных) координат точки M во вращаемой системе координат. Матрица A описывает преобразование компонент вектора от вращаемой системы координат к лабораторной. Последнее слагаемое нужно понимать как произведение

$$\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx}x' + a_{xy}y' + a_{xz}z' \\ a_{yx}x' + a_{yy}y' + a_{yz}z' \\ a_{zx}x' + a_{zy}y' + a_{zz}z' \end{pmatrix}.$$

Компоненты матрицы a_{xx} и т. д. зависят от углов Эйлера, а через них — от времени, компоненты же x' , y' , z' от времени не зависят.

Немного математики. Кое-что о матрицах. Матрица — это прямоугольная таблица чисел. Число строк и число столбцов таблицы — это *размеры матрицы*. Например, матрица A — матрица 3×3 , а $\mathbf{r}'$ — матрица 3×1 . Матрицы с равным числом строк и столбцов называются *квадратными*.

Для матриц одинакового размера естественно определяется операция *сложения*. Матрица C называется суммой матриц A и B (записывается $C = A + B$), если для всех i, j

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Матрица B называется произведением матрицы A на число c (записывается $B = cA = Ac$), если для всех i, j

$$b_{ij} = ca_{ij}.$$

Для случая, когда второй размер матрицы A (число столбцов) совпадает с первым размером матрицы B (числом строк), определяется *произведение* $C = AB$

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

(частный случай этого равенства явно выписан выше). Квадратные матрицы (определенного размера) хороши тем, что их можно и умножать и складывать. При этом операции сложения и умножения матриц обладают многими свойствами операций сложения

и умножения чисел, однако, в отличие от произведения чисел, произведение матриц, вообще говоря, некоммукативно, то есть $AB \neq BA$.

Нам понадобится еще операция *транспонирования* матрицы. Она сводится к замене элемента a_{ij} элементом a_{ji} и наоборот: $B = A^T$, если

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Квадратная матрица A называется *симметричной*, если $A^T = A$, и *антисимметричной*, если $A^T = -A$. Нетрудно показать, что $(AB)^T = B^T A^T$.

Квадратная матрица называется *единичной*, если ее элементы $a_{ii} = 1$, а остальные равны нулю. Нетрудно проверить, что единичная матрица обладает свойством обычной единицы: ее произведение на любую квадратную матрицу A того же размера равно матрице A .

Элементы матрицы A довольно сложно зависят от углов Эйлера (частный случай мы рассматривали в первой лекции). Мы не будем выписывать эту зависимость явно. Вместо этого мы установим некоторое свойство матрицы A . Возьмем три единичных вектора вдоль осей в замороженной системы, они имеют компоненты $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ во замороженной системе координат. Компоненты в лабораторной системе получим, умножив на матрицу A , они оказываются равны (a_{xx}, a_{yx}, a_{zx}) , (a_{xy}, a_{yy}, a_{zy}) , (a_{xz}, a_{yz}, a_{zz}) . Поскольку это все те же единичные взаимно перпендикулярные векторы, то модуль каждого из них равен единице, а скалярные произведения равны нулю, и мы получаем условия на элементы матрицы A . Например, из равенства единице модуля первого вектора найдем $a_{xx}^2 + a_{yx}^2 + a_{zx}^2 = 1$. Все условия оказывается возможным записать в компактном виде

$$AA^T = 1,$$

где 1 означает единичную матрицу 3×3 . Матрица A с таким свойством называется *ортогональной*.

Домашнее задание. Проверьте, что условие $AA^T = 1$ действительно порождает условия нормированности и ортогональности векторов (a_{xx}, a_{yx}, a_{zx}) , (a_{xy}, a_{yy}, a_{zy}) , (a_{xz}, a_{yz}, a_{zz}) . Проверьте, что условие $A^T A = 1$ эквивалентно условию $AA^T = 1$.

Продифференцируем условие $AA^T = 1$ по времени, учитывая, что единичная матрица от времени не зависит (производная от матрицы — это матрица, составленная из производных от элементов)

$$\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = 0.$$

Согласно свойству операции транспонирования $(\dot{A}A^T)^T = A\dot{A}^T$. Таким образом, полученное равенство означает, что $(\dot{A}A^T)^T = -\dot{A}A^T$, то есть что $\dot{A}A^T$ — антисимметричная матрица.

Антисимметричная матрица 3×3 имеет всего три независимых элемента

$$\dot{A}A^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

из которых можно составить вектор $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Этот вектор называется *угловой скоростью твердого тела*.

Скорость произвольной точки нетрудно теперь выразить через скорость точки O и угловую скорость. Дифференцируя соотношение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_O + A\mathbf{r}'$ по времени, получим

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \dot{A}\mathbf{r}' = \mathbf{v}_O + \dot{A}(A^T A)\mathbf{r}' = \mathbf{v}_O + (\dot{A}A^T)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_O) = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O).$$

Замечания. Угловая скорость является характеристикой движения твердого тела как целого. Хотя в полученную формулу для скорости произвольной точки входят радиус-вектор и скорость точки O , угловая скорость не зависит от того, какая точка взята в качестве начала координат. Иначе говоря, можно написать

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'})$$

с какой-то другой точкой O' , а угловая скорость останется прежней (проверьте!). Здесь имеется некая антианалогия с моментом импульса, который зависит от выбора начала координат.

Если тело закреплено на оси, то вектор угловой скорости направлен вдоль оси. Действительно пусть точки A и B лежат на оси. Тогда их скорости равны нулю. Но

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A),$$

поэтому $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = 0$, что означает $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. В этом случае часто говорят об угловой скорости как о скалярной величине ω .

Уравнения движения твердого тела

Общие уравнения движения. Центр масс

Поскольку твердое тело — это система материальных точек, то для него справедливы те общие соотношения, которые мы получили при выводе законов сохранения. В частности

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}}, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}}.$$

Нетрудно понять, что выписанные равенства как раз и представляют собой уравнения движения твердого тела. При этом импульс $\mathbf{P}$ и момент

импульса $\mathbf{L}$ выражаются через координаты какой-либо точки O и углы Эйлера, и мы получаем шесть уравнений для шести переменных. Поскольку в дальнейшем все силы будут только внешними, индекс “внешн” будем опускать.

Первое из этих уравнений нетрудно проанализировать. *Центром масс* системы материальных точек называется точка C с радиус-вектором

$$\mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i / m,$$

где $m = \sum_{i=1}^N m_i$ — полная масса системы. Очевидно, что координаты центра масс твердого тела во вращающейся системе координат постоянны, так что центр масс — это какая-то “вращающаяся” в твердое тело точка. Скорость центра масс равна

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i / m,$$

Вспоминая определение импульса

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i,$$

видим, что импульс выражается через скорость центра масс

$$\mathbf{P} = m \mathbf{v}_c,$$

причем эта связь такая же, как для одной материальной точки. Окончательно первое из уравнений движения твердого тела можно записать так

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F}.$$

Иначе говоря, центр масс твердого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе твердого тела, под действием всех сил, приложенных к твердому телу.

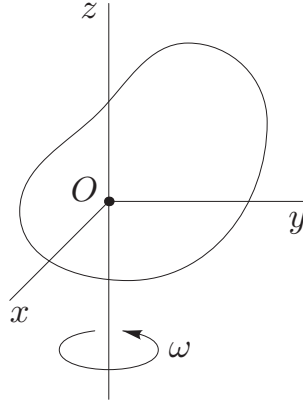
Замечание. На самом деле это утверждение справедливо для любой системы материальных точек, а не только для твердого тела. Оно получило название *теоремы о движении центра масс*. Мы уже упоминали о нем в связи с законами сохранения.

Поскольку мы без всяких усилий получили уравнение движения центра масс твердого тела, то в качестве “какой-либо точки O ” часто оказывается удобно выбирать центр масс тела C .

В противоположность уравнениям для поступательного движения, уравнения для углов оказываются очень сложными, поэтому далее мы рассмотрим два простых частных случая: тело на оси и так называемое плоское движение твердого тела.

Тело на оси. Основное уравнение вращательного движения

Пусть твердое тело закреплено на оси. Как мы уже говорили, в этом случае оно имеет одну степень свободы, так что нужно всего одно уравнение движения. Поместим начало координат O в какую-либо точку на оси вращения. Ось z системы координат направим по оси вращения. Тогда необходимое уравнение движения получится, если расписать z -компоненту уравнения $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$.



Твердое тело на оси

Сделаем некоторые приготовления. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ направлена по оси z , поэтому скорость i -ой точки тела с радиус-вектором $\mathbf{r}_i$ равна $\mathbf{v}_i = (-\omega y_i, \omega x_i, 0)$. Проекция момента импульса этой точки на ось z равна

$$l_{iz} = m_i(x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) = m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega.$$

Суммируя моменты импульса отдельных точек тела, получим

$$L_z = J\omega, \quad J = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

Величина J называется *моментом инерции тела относительно оси z* . Очевидно, она не меняется во время движения, поскольку выражения $x_i^2 + y_i^2$ не меняются во время движения.

Замечание. Момент инерции определяется относительно некоторой оси. Бессмысленно говорить о моменте инерции, не указывая ось, к которой он относится. С другой стороны, ось не обязана быть осью вращения. Можно говорить о моменте инерции относительно любой воображаемой оси.

Подставляя найденное выражение для L_z в уравнение $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$, получаем

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_z.$$

Это соотношение получило не очень удачное название *основного уравнения вращательного движения*. Производную $d\omega/dt = \beta$ обычно называют *угловым ускорением твердого тела*.

Замечания. Угловое ускорение можно ввести как производную $d\omega/dt$ в общем случае, но это как-то не прижилось.

При применении основного уравнения вращательного движения нужно помнить, что в правой части стоит z -компонента суммы моментов внешних сил относительно какой-то точки на оси. Эта величина не зависит от выбора начала координат O на оси. Действительно, $M_z = xF_y - yF_x$. В это выражение вовсе не входит координата z , которая только и меняется при выборе другого начала координат O' .

Силы реакции оси не дают вклада в z -компоненту момента внешних сил. Действительно, они приложены в точках с $x = 0$, $y = 0$, так что по формуле $M_z = xF_y - yF_x$ их вклад равен нулю.

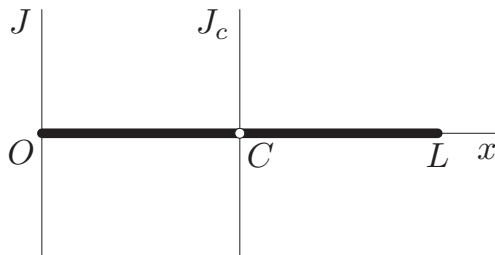
Момент инерции

Выше мы называли моментом инерции твердого тела относительно оси z величину

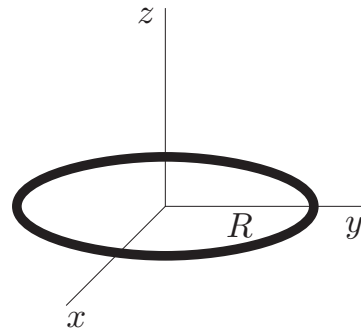
$$J = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

В таком виде формула хороша для твердых тел, состоящих из отдельных материальных точек. Если же тело сплошное, то следует писать

$$J = \int \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) d^3r.$$



Момент инерции стержня



Момент инерции кольца

В качестве примера вычислим момент инерции стержня длины L и массы m относительно оси, проходящей через его конец и перпендикулярной стержню. Имеем

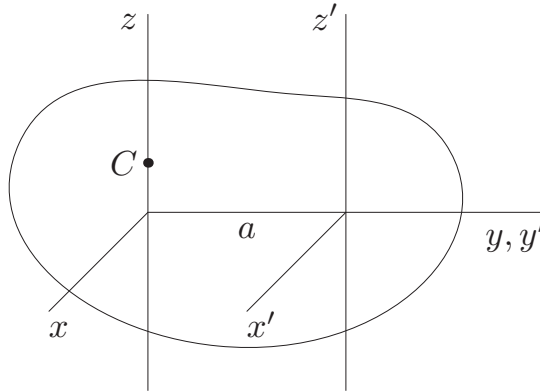
$$J = \int_0^L \frac{m}{L} x^2 dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{mL^2}{3}.$$

При вычислении моментов инерции оказываются полезными следующие два приема.

Теорема Штейнера. Пусть известен момент инерции J_c относительно некоторой оси z , проходящей через центр масс. Тогда момент инерции относительно любой другой оси z' , параллельной данной, вычисляется по формуле

$$J = J_c + ma^2,$$

где a — расстояние между осями.



К теореме Штейнера

Для доказательства введем две системы координат (x, y, z) и (x', y', z') . Имеем $x = x'$, $y = y' + a$, $z = z'$. Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = \sum_i m_i (x_i^2 + (y_i - a)^2) = \\ &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \sum_i m_i y_i + a^2 \sum_i m_i = J_c + ma^2. \end{aligned}$$

Вторая сумма равна нулю, так как представляет собой y -координату центра масс $y_c = (\sum_i m_i y_i)/m$, которая равна нулю.

Замечание. Одна из осей в теореме Штейнера должна проходить через центр масс. Теорема неверна для двух произвольных осей.

В качестве примера вычислим момент инерции уже рассмотренного стержня относительно оси, проходящей через середину стержня, и перпендикулярной стержню. Это как раз J_c из теоремы Штейнера, поэтому $mL^2/3 = J = J_c + mL^2/4$, откуда $J_c = mL^2/12$.

Плоская фигура. Пусть все точки тела лежат в плоскости xy . Тогда

$$J_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = J_y + J_x.$$

Применим это соотношение для вычисления момента инерции кольца радиусом R и массой m относительно его диаметра (оси x на рисунке). Момент инерции кольца относительно оси z , перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр, легко вычисляется по определению

$$J_z = mR^2.$$

Моменты инерции относительно осей x и y , очевидно, равны в силу симметрии кольца

$$J_x = J_y.$$

Теперь можно написать

$$J_x = \frac{1}{2} J_z = mR^2/2.$$

Плоское движение

Плоским движением твердого тела называется такое движение, когда направление угловой скорости остается постоянным, а скорость какой-либо точки O (и тогда любой точки) перпендикулярна угловой скорости.

Плоское движение можно еще описать, сказав, что оно эффективно двумерное: разные точки твердого тела движутся в параллельных плоскостях, а сами эти плоскости перпендикулярны угловой скорости. Примером плоского движения является качение цилиндра по наклонной плоскости.

Как уже говорилось в начале лекции, в двумерном пространстве твердое тело имеет три степени свободы: две поступательных и одну вращательную. Уравнения движения, соответствующие поступательным степеням свободы, имеют вид

$$m \frac{dv_{cx}}{dt} = F_x, \quad m \frac{dv_{cy}}{dt} = F_y.$$

Уравнение вращательного движения проще всего записать, взяв в качестве базовой точки центр масс тела C . Приготовления аналогичны тем, что мы делали, когда рассматривали тело на оси. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$. Скорость точки с радиус-вектором $\mathbf{r}_i$ равна $\mathbf{v}_i = (v_{cx} - \omega(y_i - y_c), v_{cy} + \omega(x_i - x_c), 0)$. Момент импульса одной точки

$$\begin{aligned} l_{iz} &= m_i(x_i v_{iy} - y_i v_{ix}) = m_i[x_i v_{cy} - y_i v_{cx} + \omega(x_i(x_i - x_c) + y_i(y_i - y_c))] = \\ &= m_i[x_c v_{cy} - y_c v_{cx} + \omega[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2] + \\ &\quad + m_i[(x_i - x_c)(v_{cy} + \omega x_c) + (y_i - y_c)(-v_{cx} + \omega y_c)]. \end{aligned}$$

При вычислении момента импульса всего тела последнее слагаемое обращается в нуль вследствие определения центра масс

$$L_z = m(x_c v_{cy} - y_c v_{cx}) + J_c \omega,$$

где $J_c = \sum_i m_i[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2]$ — момент инерции твердого тела относительно оси z , проходящей через центр масс. Как и в случае тела на оси, эта величина остается постоянной в процессе движения. Первое слагаемое в формуле для L_z тоже имеет простую интерпретацию — это момент импульса “тела как целого” относительно начала координат лабораторной системы отсчета.

Суммарный момент внешних сил может быть записан аналогично

$$M_z = \sum_i x_i F_{iy} - y_i F_{ix} = x_c F_y - y_c F_x + \sum_i (x_i - x_c) F_{iy} - (y_i - y_c) F_{ix},$$

где $F_x = \sum_i F_{ix}$ (аналогично для y), а последнюю сумму естественно называть суммарным моментом внешних сил относительно центра масс тела

$$M_{cz} = \sum_i (x_i - x_c) F_{iy} - (y_i - y_c) F_{ix}.$$

Если мы теперь подставим найденные выражения для L_z и M_z в уравнение $dL_z/dt = M_z$, то получим

$$J_c \frac{d\omega}{dt} = M_{cz}.$$

Действительно, дифференцируя выражение $m(x_c v_{cy} - y_c v_{cx})$ по времени, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(x_c v_{cy} - y_c v_{cx}) &= m(\dot{x}_c v_{cy} - \dot{y}_c v_{cx}) + \\ &\quad + m(x_c \dot{v}_{cy} - y_c \dot{v}_{cx}) = m(x_c \dot{v}_{cy} - y_c \dot{v}_{cx}), \end{aligned}$$

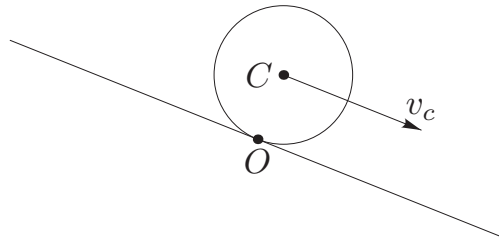
а это выражение сокращается с $x_c F_y - y_c F_x$ в силу уже выписанных уравнений поступательного движения.

Замечания. Некоторая громоздкость вывода уравнения вращательного движения в этом случае по сравнению со случаем тела на оси (уравнение-то получилось то же самое) связана с тем, что исходный закон изменения момента импульса $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$ справедлив только в инерциальной системе отсчета (в нашем случае — в неподвижной лабораторной). Нельзя просто записать этот закон, выбрав в качестве базовой точки центр масс тела C , поскольку он, вообще говоря, движется с ускорением.

В уравнения плоского движения твердого тела входят только масса тела и момент инерции. Таким образом тело характеризуется всего двумя числами. Два совершенно разных твердых тела будут двигаться совершенно одинаково, если только их массы и моменты инерции совпадают. Этот удивительный вывод справедлив и в общем случае с одним маленьким уточнением: твердое тело однозначно характеризуется своей массой и тремя моментами инерции (так называемыми главными моментами), то есть всего четырьмя числами.

Мгновенная ось вращения

Как мы видели выше, при плоском движении скорость точки твердого тела с радиус-вектором $\mathbf{r}$ равна $\mathbf{v} = (v_{cx} - \omega(y - y_c), v_{cy} + \omega(x - x_c), 0)$. Если $\omega \neq 0$, то существует точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю $\mathbf{v} = 0$. Координаты этой точки равны $x = x_c - v_{cy}/\omega$, $y = y_c + v_{cx}/\omega$, координата z произвольна. Таким образом, существует целая прямая, такая что ее точки в данный момент времени имеют нулевую скорость. Эта прямая называется *мгновенной осью вращения тела*.



Качение цилиндра по наклонной плоскости

Замечание. В общем трехмерном случае прямой, точки которой в данный момент времени имели бы нулевые скорости, нет. Однако справедливо следующее обобщение: существует прямая, точки которой имеют скорости, направленные вдоль этой прямой. Таким образом, наиболее общее движение твердого тела есть винтовое движение: вращение вокруг какой-либо прямой с одновременным поступательным движением вдоль этой же прямой.

В ряде случаев удастся записать уравнение вращательного движения, взяв за базовую точку не центр масс C , а мгновенную ось вращения O . Выражения для координат мгновенной оси вращения можно записать в векторном виде $\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c / \omega^2$. Модуль вектора $\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_c$ равен $|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_c| = v_c / \omega$. Момент инерции относительно оси O можно найти по теореме Штейнера

$$J_o = J_c + mv_c^2 / \omega^2.$$

В отличие от момента инерции J_c момент инерции J_o зависит от времени

$$\frac{dJ_o}{dt} = m \left(\frac{v_c^2}{\omega^2} \right)'.$$

Момент внешних сил относительно точки C можно выразить через момент относительно O

$$\begin{aligned} M_{cz} &= M_{oz} + [(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{F}]_z = M_{oz} - \frac{\mathbf{v}_c \mathbf{F}}{\omega} = \\ &= M_{oz} - \frac{m}{\omega} \left(\frac{v_c^2}{2} \right)' = M_{oz} - \frac{m\omega}{2} \left(\frac{v_c^2}{\omega^2} \right)' - \frac{mv_c^2}{\omega^2} \omega' \end{aligned}$$

(при переходе ко второй строке мы использовали уравнение $m d\mathbf{v}_c / dt = \mathbf{F}$). После сделанных приготовлений мы можем записать

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(J_o \omega) &= \frac{d}{dt}(J_c \omega + mv_c^2 / \omega) = J_c \frac{d\omega}{dt} + m \left(\frac{v_c^2}{\omega} \right)' = \\ &= M_{cz} + m\omega \left(\frac{v_c^2}{\omega^2} \right)' + \frac{mv_c^2}{\omega^2} \omega' = M_{oz} + \frac{\omega}{2} J_o'. \end{aligned}$$

Если $J_o' = 0$ (это справедливо, например, для качения цилиндра по наклонной плоскости), то

$$J_o \frac{d\omega}{dt} = M_{oz}.$$

Замечание. Подчеркнем, что записать уравнение движения в столь простом виде можно только при соблюдении условия $J_o' = 0$, что справедливо далеко не всегда. Уравнением же $J_c d\omega / dt = M_{cz}$ можно пользоваться в любом случае.

Законы сохранения

Нам осталось обсудить особенности применения законов сохранения при наличии твердых тел. Поскольку твердое тело представляет собой частный случай системы материальных точек, то для механических систем,

в состав которых входят твердые тела, справедливо все то, что уже обсуждалось для системы материальных точек. В частности, силы реакции связей между отдельными точками твердого тела, а также их моменты компенсируются, что приводит к законам сохранения импульса и момента импульса. При этом импульс твердого тела вычисляется по формуле $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_c$, а момент импульса — по формуле $L_z = J\omega$ для тела на оси и $L_z = m(x_c v_{cy} - y_c v_{cx}) + J_c\omega$ для плоского движения тела.

Обсудим более подробно закон сохранения энергии. Во-первых, нам нужно выражение для кинетической энергии твердого тела. Кинетическая энергия твердого тела — это сумма кинетических энергий всех его точек. Для тела на оси $\mathbf{v}_i = (-\omega y_i, \omega x_i, 0)$, поэтому

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \omega^2 (x_i^2 + y_i^2)}{2} = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Для плоского движения $\mathbf{v}_i = (v_{cx} - \omega(y_i - y_c), v_{cy} + \omega(x_i - x_c), 0)$, а потому

$$\begin{aligned} T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} &= \sum_i \frac{m_i (v_{cx}^2 + v_{cy}^2)}{2} + \sum_i m_i \omega [-v_{cx}(y_i - y_c) + v_{cy}(x_i - x_c)] + \\ &+ \sum_i \frac{m_i \omega^2 ((x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2)}{2} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} \end{aligned}$$

(последняя сумма в верхней строке равна нулю по определению центра масс).

Во-вторых, нам нужно выражение для потенциальной энергии. Пусть все внешние силы (о силах реакции связей между отдельными точками твердого тела поговорим позднее), действующие на все точки твердого тела являются потенциальными. Тогда потенциальная энергия твердого тела — это просто сумма потенциальных энергий отдельных точек. Поскольку потенциальная энергия отдельной точки зависит от ее координат, а они, в свою очередь, зависят от координат центра масс и углов Эйлера, то потенциальная энергия в общем случае зависит от координат центра масс и углов Эйлера, то есть не только от положения твердого тела, но и от его ориентации. Исключение составляет случай однородного поля, например поля тяжести плоской Земли. В этом случае $U_i = m_i g z_i$, поэтому

$$U = \sum_i U_i = mgz_c.$$

Для сферической Земли такой простой результат уже неверен.

В-третьих, работа-2 внешних сил, как и в случае материальной точки, связана с кинетической энергией.

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{F} \mathbf{v}_c + \sum_i \mathbf{F}_i (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c)) \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathbf{F} \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{F}_i \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F} \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \mathbf{M}_c) dt. \end{aligned}$$

Для плоского движения, используя уравнения движения твердого тела, получаем

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= \int_{t_1}^{t_2} (F_x v_{cx} + F_y v_{cy} + \omega M_{cz}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (m \dot{v}_{cx} v_{cx} + m \dot{v}_{cy} v_{cy} + J_c \dot{\omega} \omega) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} \right) dt = \left(\frac{m v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2} \right) \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Замечание. Член $\int M_{cz} \omega dt$ записывают еще в виде $\int M_{cz} d\varphi$, где φ — угол поворота вокруг оси z .

Наконец, покажем, что мощность, развиваемая силами реакции связей между отдельными точками твердого тела, равна нулю. Выше мы уже нашли, что $\sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i = \mathbf{F} \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \mathbf{M}_c$. Но сумма всех сил реакции связей и сумма их моментов равны нулю, а потому $\sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i = 0$. Таким образом, силы реакции связей не портят закона сохранения энергии.

Математический и физический маятники

Математический маятник

Математический маятник — это материальная точка массы m , подвешенная на нити длиной l . Пусть движение материальной точки происходит в плоскости xy . Заимствуя выражения для компонент ускорения из первой лекции

$$a_x = -\dot{\varphi}^2 l \cos \varphi - \ddot{\varphi} l \sin \varphi,$$

$$a_y = -\dot{\varphi}^2 l \sin \varphi + \ddot{\varphi} l \cos \varphi$$

(мы только заменили R на l), мы можем записать второй закон Ньютона для нашей материальной точки в виде

$$m(-\dot{\varphi}^2 l \cos \varphi - \ddot{\varphi} l \sin \varphi) = mg - T \cos \varphi,$$

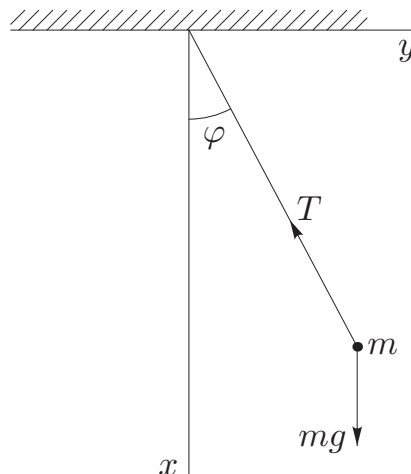
$$m(-\dot{\varphi}^2 l \sin \varphi + \ddot{\varphi} l \cos \varphi) = -T \sin \varphi.$$

Умножая второе уравнение на $\cos \varphi$ и вычитая из него первое, умноженное на $\sin \varphi$ (на самом деле это просто преобразование к повернутым осям), получим

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi.$$

Это и есть уравнение движения математического маятника. Принято записывать его в виде

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$



Математический маятник

До сих пор наше рассмотрение было точным. Если угол отклонения маятника от вертикали составляет не более $5\text{--}7^\circ$ (около 0.1 радиана), то можно воспользоваться разложением синуса в ряд Тейлора

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \dots$$

Относительная величина второго члена в правой части составляет $\varphi^2/6$, что для углов порядка 0.1 радиана дает погрешность менее 0.2%. При указанных амплитудах можно ограничиться первым членом в правой части и записать

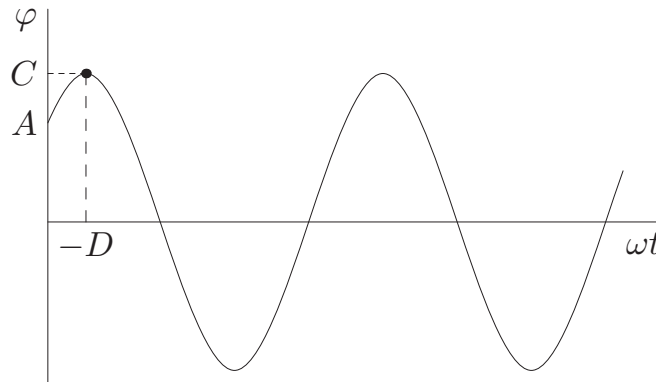
$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Это уравнение называется *уравнением гармонических колебаний*. Его решение имеет вид

$$\varphi(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$ — частота колебаний, A и B — произвольные постоянные.

Домашнее задание. Проверьте, что выписанная зависимость $\varphi(t)$ действительно удовлетворяет уравнению движения.



Колебания маятника

Поскольку синус и косинус — периодические функции с периодом 2π , то движение математического маятника также является периодическим с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{l/g}.$$

Периодическое движение маятника называют еще *колебательным*, а T — *периодом колебаний математического маятника*. Колебания, происходящие по закону синуса и косинуса, называются *гармоническими*.

Замечание. Точное уравнение движения маятника также имеет периодические решения, то есть описывает колебания. Однако эти колебания происходят по более сложному закону, чем закон синуса и косинуса, то есть уже не являются гармоническими.

Постоянные A и B определяются из начальных условий. Имеем

$$\varphi(0) = A = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega B = \dot{\varphi}_0.$$

Вместо A и B часто используют *амплитуду колебаний* $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ и *начальную фазу* D , которая определяются из условий

$$\cos D = A/C, \quad \sin D = -B/C.$$

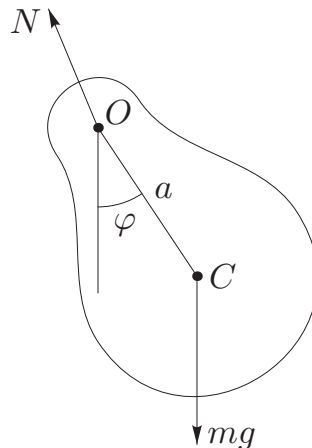
Зависимость $\varphi(t)$ переписывается в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t \right) = \\ &= C(\cos D \cos \omega t - \sin D \sin \omega t) = C \cos(\omega t + D). \end{aligned}$$

Таким образом, C представляет собой максимальное значение φ во время движения, а D — начальное (при $t = 0$) значение аргумента косинуса.

Физический маятник

Физический маятник — это твердое тело, подвешенное на горизонтальной оси.



Физический маятник

Пусть масса маятника равна m , момент инерции относительно оси вращения равен J_o , а центр масс отстоит от оси вращения на расстояние a . Тогда уравнение вращательного движения записывается в виде

$$J_o \ddot{\varphi} = -mga \sin \varphi$$

(мы учли, что $\omega = \dot{\varphi}$, поэтому $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$). Это уравнение полностью аналогично уравнению движения математического маятника. Для малых колебаний можно написать

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mga}{J_o} \varphi,$$

откуда получаем выражение для *периода колебаний физического маятника*

$$T = 2\pi \sqrt{J_o/mga}.$$

Тело на пружине

Еще один распространенный случай колебаний — колебания тела на пружине. Рассмотрим сперва горизонтальные колебания. Пусть материальная точка лежит на горизонтальном столе и прикреплена пружиной к вертикальной стене. Пусть трение об стол отсутствует. Записывая второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось (причем начало координат соответствует положению материальной точки при недеформированной пружине), находим

$$m\ddot{x} = -kx$$

(мы учли, что $a_x = \ddot{x}$). В отличие от маятников, мы сразу получили уравнение гармонических колебаний, которое в этом случае является “точным” (конечно, ровно настолько, насколько точен закон Гука).

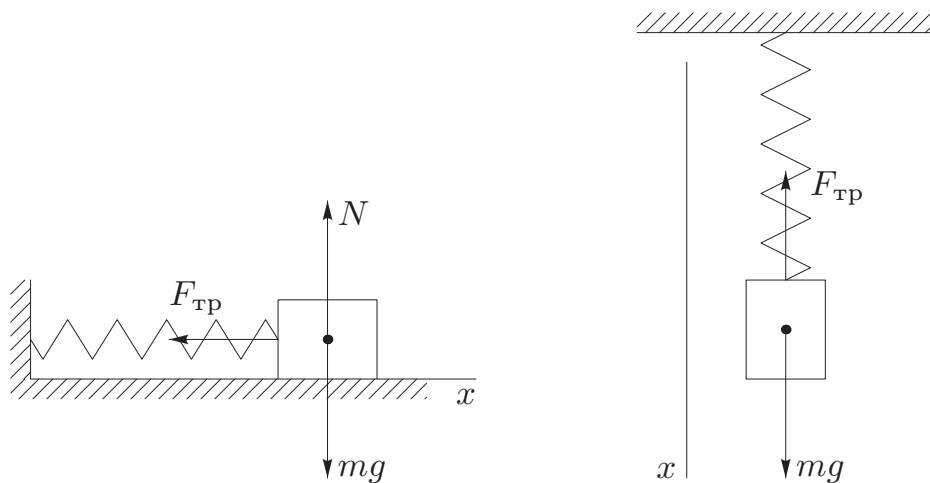
Период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}.$$

Рассмотрим теперь материальную точку, которая подвешена за пружину к потолку. Вводя вертикальную ось и выбирая начало координат, как и ранее, найдем

$$m\ddot{x} = -kx + mg.$$

Положение равновесия (такое положение тела, когда сумма действующих на него сил равна нулю), определяется из уравнения $-kx_0 + mg = 0$ и



Тело на пружине (горизонтальный и вертикальный случаи)

имеет координату $x_0 = mg/k$. Отсчитывая координату y от положения равновесия $y = x - x_0$, имеем

$$m\ddot{y} = -ky.$$

Это то же самое уравнение, которое мы получили в горизонтальном случае, поэтому и движение материальной точки точно такое же. Обычно сразу отсчитывают координату от положения равновесия, тогда сила тяжести в уравнение не входит.

Термодинамика

Термодинамика изучает *равновесные состояния термодинамических систем* и *квазистатические процессы*, которые совершаются с этими системами.

Замечание. Мы понимаем термодинамику в узком смысле как теорию равновесных состояний термодинамических систем. Иногда можно услышать о какой-то неравновесной термодинамике. Оставим подобные высказывания на совести авторов.

Понятие термодинамической системы — очень глубокое и сложное понятие. Фактически весь наш курс будет посвящен объяснению того, что такое термодинамическая система.

Термодинамические параметры. Уравнения состояния

Термодинамические системы состоят из *большого числа одинаковых частиц* (молекул, атомов, ионов и т. п.). Иначе говоря, термодинамическая система является механической системой специального вида. Однако поведение термодинамических систем имеет свои качественные особенности, которые и позволяют выделить учение о них в отдельный раздел физики. “Большое число” означает, что количество частиц измеряется в молях, причем один моль, как известно, содержит

$$N_A = 6 \cdot 10^{23}$$

частиц (N_A называется *числом Авогадро*). Это поистине астрономическое число. Для сравнения: одно столетие состоит всего лишь из $3 \cdot 10^9$ секунд.

Термодинамические системы *занимают большой объем*. Конечно, по человеческим меркам этот объем не так велик (один моль газа при нормальных условиях занимает 22.4 литра), но в молекулярном масштабе (характерный размер молекулы газа $3 \cdot 10^{-10}$ м, такой же порядок имеет радиус действия межмолекулярных сил) он огромен.

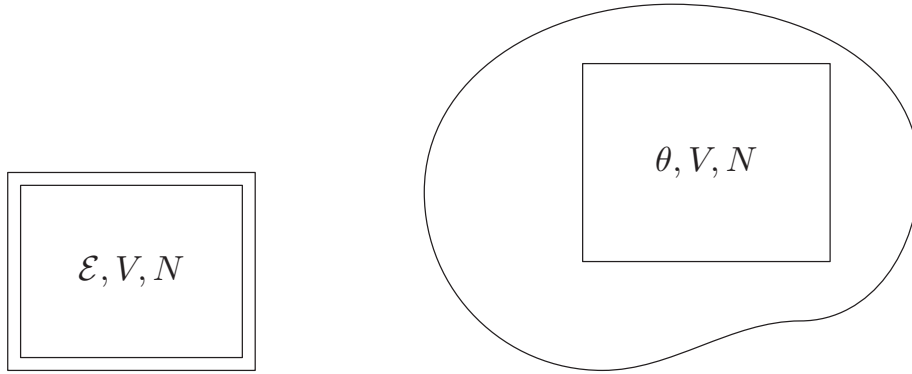
Для каждой термодинамической системы существует *состояние термодинамического равновесия*, которого она при фиксированных внешних условиях с течением времени самопроизвольно достигает. Сформулированное утверждение называется *нулевым началом термодинамики*.

Замечание. Важность этого положения была осознана уже после того, как первое и второе начала получили свои названия. Вообще термодинамика развивалась долго и мучительно, так что накопила немало “болезней роста”.

Понятие состояния равновесия является центральным в термодинамике. С одной стороны, оно аналогично понятию состояния механической системы. Однако из самого определения следует, что состояние термодинамического равновесия характеризуется не координатами и скоростями всех

частиц системы, как это было в механике, а скорее теми “фиксированными внешними условиями”, в которые помещена система. Такие условия описываются на языке *термодинамических параметров*.

Разберемся в этом подробнее на примере системы типа газа. Один из наиболее очевидных способов поместить газ в неизменные внешние условия — поместить его в сосуд с жесткими теплоизолированными стенками. Тогда фиксированными оказываются число частиц N , объем V и *внутренняя энергия газа* $\mathcal{E}$, под которой в термодинамике понимают обычную механическую энергию газа как механической системы. Число частиц, объем и внутренняя энергия как раз и представляют собой примеры термодинамических параметров.



Система в теплоизолированных стенках

Система в термостате

Разумеется, предложенный выше способ фиксации внешних условий не является единственно возможным. Другой популярный способ — сделать стенки теплопроводящими и привести систему в контакт с *термостатом* — другой термодинамической системой, обычно с гораздо большим числом частиц. В этом случае фиксированы N и V , а внутренняя энергия $\mathcal{E}$ уже не фиксирована и уступает свое место *температуре* θ . Если рассмотренные ранее параметры имели четкий механический смысл, то температура — это уже специфический термодинамический параметр. Сделаем сразу замечание по поводу обозначений. Буквой θ мы будем обозначать температуру в энергетических единицах

$$\theta = kT,$$

а температурой по шкале Кельвина T пользоваться не будем. При этом не имеющие физического смысла постоянная Больцмана

$$k = 1.38 \cdot 10^{23} \text{ Дж/К}$$

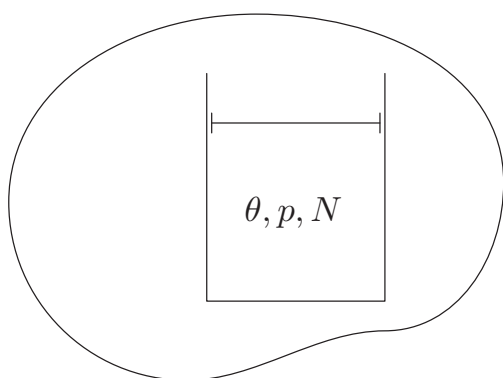
и универсальная газовая постоянная

$$R = 8.31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$$

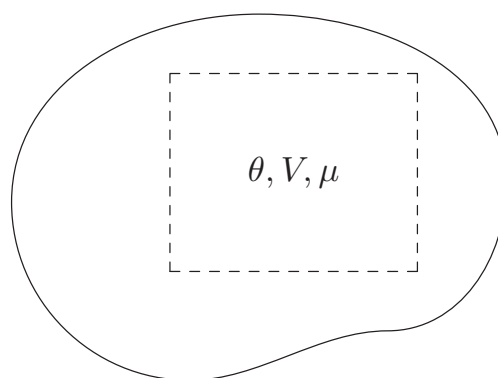
оказываются изгнанными из всех формул.

Способы “фиксации внешних условий” можно множить. Рассмотрим еще два.

Возьмем систему в термостате, но одну из стенок сделаем подвижной. Тогда фиксированными оказываются число частиц N , температура θ и давление p , объем же уже не фиксирован.



Система под поршнем



Воображаемые стенки

Наконец, мысленно выделим в “большой” системе подсистему объемом V . Эти “воображаемые стенки” фиксируют объем V и температуру θ (термостатом служит “большая” система за вычетом подсистемы). Число частиц уже не фиксировано, но третий параметр все равно есть. Он называется *химическим потенциалом* μ , а о его физическом смысле мы поговорим позднее.

Рассмотренные примеры достаточно наглядны и демонстрируют одну интересную особенность: термодинамические параметры естественным образом разбиваются на пары, такие что можно фиксировать либо один параметр из пары, либо другой, но не оба одновременно. В рассмотренных примерах такими парами были внутренняя энергия $\mathcal{E}$ и температура θ , объем V и давление p , число частиц N и химический потенциал μ . Переменные из одной пары называются *сопряженными*.

Замечание. Как мы увидим позднее, естественно считать, что теплоизолированные стенки фиксируют не внутреннюю энергию, а *энтропию* S (еще один специфический термодинамический параметр), поэтому первая пара сопряженных параметров естественнее выглядит так: $S-\theta$.

Если мы зафиксировали число частиц, объем и температуру, то это не означает, конечно, что у термодинамической системы нет определенного давления. Просто значение этого параметра не фиксируется “неизменными внешними условиями”, о которых идет речь в нулевом начале термодинамики, а устанавливается самопроизвольно в результате перехода системы в состояние равновесия. В отличие от фиксированных параметров в соответствии с характером состояния термодинамического равновесия значение давления не остается постоянным, а *флуктуирует* около своего *равновесного значения*. Мы оценим эти флуктуации в разделе “Статистическая физика”, а пока, забегаая вперед, скажем, что они малы $\Delta p/p \sim N^{-1/2}$, так что в термодинамике ими пренебрегают и говорят о равновесных значениях.

Если зафиксировать другие значения числа частиц, объема и температуры, то и равновесное значение давления установится другое. Иначе говоря, давление является функцией числа частиц, объема и температуры $p = p(\theta, V, N)$. Эту связь называют *уравнением состояния*. Аналогично для энтропии и химического потенциала имеем уравнения состояния $S = S(\theta, V, N)$ и $\mu = \mu(\theta, V, N)$.

Если мы введем *пространство термодинамических параметров*, координатами в котором будут θ, S, p, V, μ, N , то уравнения состояния описывают некоторую трехмерную поверхность в этом шестимерном пространстве. Эту поверхность называют *поверхностью равновесных состояний*.

Замечания. Обычно уравнением состояния называют только уравнение $p = p(\theta, V, N)$, однако для полного описания системы нужны все три уравнения.

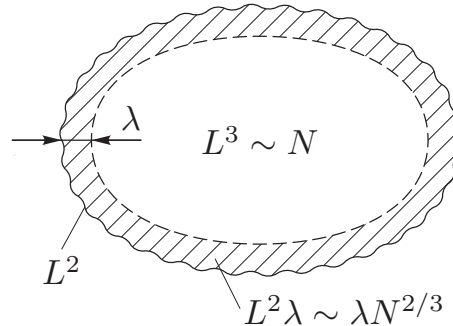
Мы настаиваем на том, что термодинамические параметры являются характеристиками именно равновесного состояния системы. Бессмысленно говорить о давлении или температуре в неравновесной системе. Таким образом точки пространства термодинамических параметров вне поверхности равновесных состояний не имеют физического смысла.

Различные термодинамические системы (например, разные газы) различаются именно формой поверхности равновесных состояний, другими словами, уравнениями состояния. При этом вовсе не обязательно, чтобы отличались все (три) уравнения. Как мы вскоре увидим, все идеальные газы имеют оно и то же уравнение $p = p(\theta, V, N)$, а вот $S = S(\theta, V, N)$ уже отличаются.

Чтобы конкретизировать систему в механике, нужно было задать число материальных точек, их массы и действующие между ними *силы*. В термодинамике мы должны задать *уравнения состояния*.

Принцип аддитивности. Эквивалентность ансамблей

Поскольку “неизменные внешние условия” можно фиксировать различными способами, возникает вопрос об эквивалентности этих способов. Поясним это на примере. Возьмем некоторую термодинамическую систему и проведем два опыта. Пусть в первом опыте фиксированы температура θ , объем V и число частиц N . Пусть при этих условиях устанавливается равновесное значение давления p . Во втором опыте поместим систему в другие внешние условия. Зафиксируем те же значения температуры θ и числа частиц N и значение p , которое было равновесным в первом опыте. Будет ли равновесное значение объема V таким же, как фиксированное значение в первом опыте?



Вообще говоря, ответ отрицательный. Однако, учитывая, что термодинамическая система — это система большого числа частиц в большом объеме, можно ожидать, что различие будет тем меньше, чем больше размер системы. Действительно, непосредственно “чувствуют” стенку (и могут “сказать”, подвижна она или нет) лишь те частицы, которые находятся от нее на расстояниях порядка радиуса межмолекулярного взаимодействия λ . Число таких частиц при увеличении объема (при постоянной плотности) растет как $\lambda V^{2/3}$, тогда как общее число частиц растет как V . Если мы будем интересоваться только “объемными” эффектами и пренебрегать “поверхностными”, то различные способы фиксации внешних условий будут эквивалентными.

Замечание. Об эквивалентности различных способов фиксации внешних условий принято говорить об эквивалентности различных ансамблей. Эта терминология пришла из статистической физики.

Для автоматического выделения объемных эффектов принято проводить над всеми термодинамическими параметрами, их функциями и уравнениями так называемую *термодинамическую предельную процедуру*. Она

заключается в вычислении предела при $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, причем *удельный объем* $V/N = v = \text{const}$. При этом каждая величина оказывается пропорциональной какой-то степени объема (или числа частиц). Чаще всего встречаются два случая.

Если послепредельная величина пропорциональна нулевой степени числа частиц, то ее называют *неаддитивной*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(\theta, vN, N) = \tilde{f}(\theta, v).$$

Примерами таких величин являются давление p , температура θ , химический потенциал μ . Например, уравнение состояния $p = p(\theta, V, N)$ после предельной процедуры выглядит так

$$p = \tilde{p}(\theta, v).$$

Если послепредельная величина пропорциональна первой степени числа частиц, то ее называют *аддитивной*

$$N \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F(\theta, vN, N)}{N} = N \tilde{f}(\theta, v).$$

Примерами таких величин являются объем V , энтропия S , внутренняя энергия $\mathcal{E}$. Например, уравнение $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\theta, V, N)$ после предельной процедуры выглядит так

$$\mathcal{E} = N \tilde{\mathcal{E}}(\theta, v).$$

Замечания. Наличие всего двух типов термодинамических параметров — аддитивных и неаддитивных — называется *принципом аддитивности*. Разумеется, какие-то уравнения могут включать величины другого типа аддитивности (например, пропорциональные N^2), но все такие соотношения все равно должны быть *однородны* по аддитивным термодинамическим параметрам.

Отметим, что в каждой паре сопряженных переменных одна аддитивная, а другая — неаддитивная, например, объем V и давление p .

Мы будем всегда обозначать аддитивные переменные большими буквами, а неаддитивные — малыми.

Разумеется, в термодинамике явно проводить предельную процедуру не нужно. Уравнения состояния с самого начала уже должны быть заданы так, чтобы выполнялось условие однородности. Термодинамическая предельная процедура проводится в статистической физике, когда уравнения состояния вычисляются исходя из представлений о взаимодействии молекул.

Для проведения предельной процедуры важна *пространственная однородность* системы и одинаковость составляющих ее частиц. Поэтому системы во *внешних полях* нужно рассматривать “послетермодинамическими” методами.

В случае *фазовых переходов* возникает специфическая пространственная неоднородность системы (разделение фаз), однако она не только не портит предельной процедуры, но прямо с ней связана.

До сих пор у нас не было случая, чтобы сделать одно важное замечание. Неизменности внешних условий вовсе недостаточно для того, чтобы говорить о равновесном состоянии. Наружная стена дома в лютый мороз представляет собой хороший пример системы, в которой вроде бы ничего не происходит, но которая, тем не менее, не является равновесной. На самом деле в ней протекает стационарный процесс передачи тепла от комнаты к окружающему воздуху. Такого рода состояние можно реализовать, только задавая *температуру* снаружи и изнутри, с *теплоизолированными* стенками ничего не получится. Причина в том, что в системе существует ненулевой *поток* тепла, так что влияние границы распространяется гораздо дальше радиуса межмолекулярного взаимодействия. Мы должны уточнить понятие равновесного состояния: в равновесии не только термодинамические параметры не меняются во времени, но и отсутствуют потоки любого типа. Именно при этих условиях все способы фиксации “неизменных внешних условий” оказываются, после проведения предельной процедуры, эквивалентными.

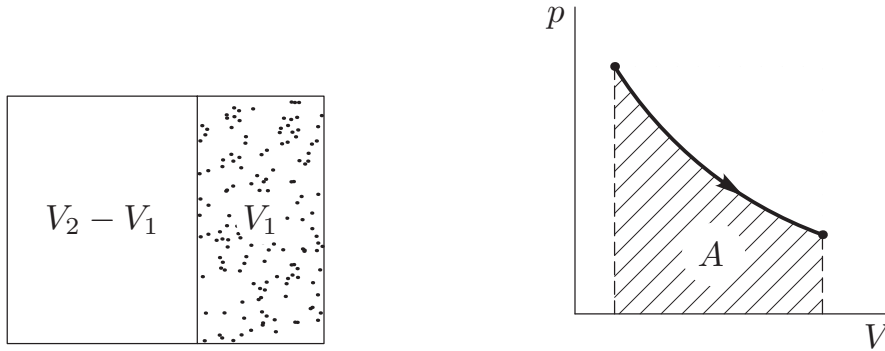
Квазистатические процессы. Первое и второе начала термодинамики

Квазистатический процесс — это непрерывная последовательность равновесных состояний, иначе говоря, это кривая C на поверхности равновесных состояний. Пусть система типа газа описывается уравнениями состояния $p = p(\theta, V, N)$, $S = S(\theta, V, N)$, $\mu = \mu(\theta, V, N)$. Тогда квазистатический процесс можно описать, задав функции $\theta(t)$, $V(t)$, $N(t)$, $t \in [0, 1]$. Параметр t можно условно рассматривать как время, помня, что никакого реального времени нет, а есть только равновесные состояния.

Замечание. По самому своему определению квазистатические процессы являются обратимыми. В учебниках обычно пишут еще всякую чушь про неравновесные необратимые процессы. На самом деле процессы, при которых промежуточные состояния не являются равновесными, не могут быть описаны в рамках термодинамики, поскольку промежуточным состояниям нельзя сопоставить термодинамических параметров. В рамках термодинамики мы можем рассматривать только начальные и конечные состояния системы в таких процессах, если эти состояния являются равновесными. При некоторых дополнительных предположениях можно связать параметры начального и конечного состояний.

Стандартным примером является расширение газа в пустоту. Пусть сосуд объемом V_2 разделен перегородкой на две части так, что объем одной из них равен V_1 , и пусть в этой части находится газ. Перегородку вынимают, и газ заполняет весь объем V_2 . Начальное и конечное состояния равновесные. Связь параметров начального

и конечного состояний получается из дополнительного условия равенства внутренних энергий газа (теплоизолированные стенки) или температур (система в термостате) в начальном и конечном состояниях.



Расширение газа в пустоту

Изображение процесса на p — v -диаграмме

Поскольку кривую C на трехмерной поверхности равновесных состояний в шестимерном пространстве термодинамических параметров изобразить сложно, обычно изображают ее проекции на какие-то двумерные плоскости, например, на плоскость p — v . О такой проекции говорят как о p — v -*диаграмме*.

Имея кривую C на поверхности равновесных состояний, можно определить ряд интегральных характеристик процесса.

Работой газа называется интеграл

$$A = \int_C p dV = \int_0^1 p(\theta(t), V(t), N(t)) V'(t) dt.$$

Геометрическая интерпретация: работа равна площади под графиком процесса на p — v -диаграмме. Нетрудно видеть, что физический смысл работы такой же, как в механике.

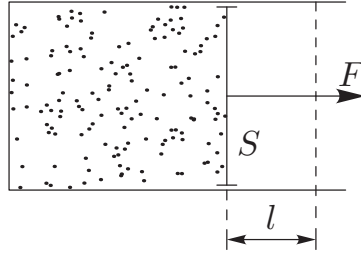
Домашнее задание.

Проверьте это утверждение, используя рисунок.

В механике мы получали результат $A = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$. В термодинамике это так, если система помещена в сосуд с теплоизолированными стенками. В общем случае

$$(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) + A = Q.$$

Величину Q называют *количеством теплоты*, которое получила система в данном процессе. Приведенное выше равенство называется *первым*



Работа газа

началом термодинамики. Оно представляет собой обобщение закона сохранения энергии на тепловые процессы.

Замечание. Никакого разумного независимого определения количества теплоты нет, так что приходится определять его через первое начало.

Второе начало термодинамики утверждает, что количество теплоты может быть записано в виде, аналогичном работе

$$Q = \int_C \theta dS,$$

где S — некоторый новый термодинамический параметр, который называется *энтропией*.

Замечания. Мы хотим подчеркнуть, что работа и количество теплоты определяются для процессов. Бессмысленно говорить о работе или количестве теплоты в данном равновесном состоянии или о разности работ или количеств тепла в двух состояниях. Энтропия же, наоборот, является термодинамическим параметром, то есть имеет определенное значение для данного равновесного состояния системы.

На самом деле в правой части первого начала термодинамики есть еще одно слагаемое $\int_C \mu dN$. Оно не получило специального названия и редко приводится в книгах, однако оно проясняет смысл еще одного термодинамического параметра — *химического потенциала*. Химический потенциал — это приращение внутренней энергии системы при добавлении в нее еще одной частицы.

После предыдущего замечания становится видна удивительная симметрия первого начала. Согласно ему, приращение внутренней энергии равно сумме трех слагаемых, каждое из которых имеет один и тот же вид: это интеграл от неаддитивной переменной по сопряженной к ней аддитивной

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \int_C (\theta dS - p dV + \mu dN).$$

Связь уравнений состояния. Термодинамические потенциалы

Немного математики. Дифференциальные формы. Выше мы записали первое и второе начала термодинамики в интегральной форме. В термодинамике сложилась традиция записывать эти (и другие) соотношения в дифференциальной форме.

Дифференциальной формой (первого порядка) называется выражение

$$\delta B = b_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + b_n(x_1, \dots, x_n) dx_n,$$

где $b_1(x_1, \dots, x_n), \dots, b_n(x_1, \dots, x_n)$ — заданные функции. Дифференциальную форму можно интегрировать по кривой

$$\int_C \delta B = \int_C [b_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + b_n(x_1, \dots, x_n) dx_n],$$

причем справа стоит обычный криволинейный интеграл второго рода. Как мы уже видели в механике, значение интеграла, вообще говоря, зависит не только от начальной и конечной точек, но и от формы кривой. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, сама дифференциальная форма обозначается значком δB , а не dB . Обозначение dB сохраняется для дифференциальных форм, которые являются полными дифференциалами. Если

$$dB = b_1(x_1, \dots, x_n) dx_1 + \dots + b_n(x_1, \dots, x_n) dx_n,$$

то, как мы уже видели $b_i = \partial B / \partial x_i$. Кроме того, выполняются условия $\partial b_i / \partial x_j = \partial b_j / \partial x_i$. С этими условиями мы тоже уже знакомы, они встречались нам при обсуждении потенциальных сил. В контексте дифференциальных форм они называются *условиями интегрируемости*.

Сделаем еще одно замечание по поводу принятых в термодинамике обозначений. Частные производные типа $\partial \mathcal{E} / \partial \theta$ принято писать, дополнительно указывая, какие переменные при вычислении производной фиксированы, например $(\partial \mathcal{E} / \partial \theta)_{VN}$. Это связано с тем, что термодинамические величины часто выражаются через различные наборы независимых параметров, например, внутреннюю энергию можно выразить через θ , V , N , а можно выразить через θ , p , N — производная $\partial \mathcal{E} / \partial \theta$ будет разной.

Первое и второе начало в дифференциальной форме имеют вид

$$d\mathcal{E} = \theta dS - p dV + \mu dN.$$

Это соотношение сразу же приводит к ряду следствий. Предварительно введем *свободную энергию* $\mathcal{F} = \mathcal{E} - \theta S$. Тогда

$$d\mathcal{F} = -S d\theta - p dV + \mu dN.$$

Смысл перехода к свободной энергии в том, что теперь независимыми переменными являются θ , V , N .

Уменьшение числа уравнений состояния за счет принципа аддитивности. Согласно принципу аддитивности

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\theta, V, N) &= Nf(\theta, v), & S(\theta, V, N) &= Ns(\theta, v), & V &= vN, \\ p(\theta, V, N) &= p(\theta, v), & \mu(\theta, V, N) &= \mu(\theta, v).\end{aligned}$$

Подставляя в первое начало, найдем

$$N df + f dN = -Ns d\theta - pN dv - pv dN + \mu dN.$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$\frac{dN}{N}(f + pv - \mu) = -df - s d\theta - p dv.$$

Поскольку переменная N входит только в конструкцию dN/N , правая и левая части равенства должны быть равны нулю, и мы получаем формулу для расчета химического потенциала

$$\mu = f + pv$$

и первое начало в редуцированном виде

$$df = -s d\theta - p dv.$$

Таким образом, достаточно задать два уравнения состояния $s = s(\theta, v)$ и $p = p(\theta, v)$. Тогда свободную энергию f можно определить, интегрируя равенство $df = -s d\theta - p dv$, а уравнение состояния для химического потенциала оказывается ненужным — химический потенциал можно рассчитать по формуле $\mu = f + pv$ (если же уравнение все-таки задано, то оно должно согласовываться с этой формулой).

Условие согласованности уравнений состояния. Применяя условие интегрируемости к дифференциальной форме

$$df = -s d\theta - p dv,$$

которая по построению является полным дифференциалом, получим

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_\theta = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v.$$

Это условие непротиворечивости уравнений состояния $s = s(\theta, v)$ и $p = p(\theta, v)$. Только при соблюдении этого условия форма $df = -s d\theta - p dv$ действительно будет представлять собой полный дифференциал и можно будет определить f интегрированием. В термодинамике уравнения состояния должны быть с самого начала заданы так, чтобы условие согласованности выполнялось.

Термодинамический потенциал. Обратим внимание на сходство соотношения

$$df = -s d\theta - p dv$$

и выражения

$$dU = -F_x dx - F_y dy$$

для потенциальной силы в механике. Мы видим, что, если интерпретировать независимые переменные θ и v как координаты, а уравнения состояния $s = s(\theta, v)$ и $p = p(\theta, v)$ — как соответствующие компоненты сил, то свободная энергия аналогична потенциальной энергии в механике. В связи с этим ее называют еще *термодинамическим потенциалом*.

Замечание. Термодинамический потенциал — это обобщенное название. Если мы посмотрим на выражение

$$d\mathcal{E} = \theta dS - p dV + \mu dN,$$

то увидим, что свободная энергия также может быть названа термодинамическим потенциалом, только независимыми переменными являются S , V и N . Таким образом, для каждого возможного выбора независимых переменных (а мы помним, что от каждой пары сопряженных можно взять только одну) можно указать свой термодинамический потенциал. Некоторые из них (например, внутренняя энергия и свободная энергия) имеют собственные имена и часто употребляются, другие менее популярны.

Свободная энергия является *производящей функцией* для уравнений состояния $s = s(\theta, v)$ и $p = p(\theta, v)$. Действительно, зная $f(\theta, v)$ можно сразу написать

$$s(\theta, v) = -\frac{\partial f(\theta, v)}{\partial \theta}, \quad p(\theta, v) = -\frac{\partial f(\theta, v)}{\partial v}.$$

Таким образом, достаточно знать всего одну функцию $f(\theta, v)$, чтобы иметь полное описание термодинамической системы. По этой причине в общетеоретических вопросах удобнее брать за основу свободную энергию (или другой термодинамический потенциал), а не уравнения состояния.

Наконец, как правило уравнение состояния $s = s(\theta, v)$ не задается непосредственно. Отчасти это связано с историческими причинами (понятие энтропии сформировалось ближе к концу развития термодинамики), отчасти с тем, что, в отличие от давления, энтропию нельзя непосредственно

измерить, а значит, нельзя непосредственно определить уравнение состояния $s = s(\theta, v)$ экспериментально. Поэтому обычно вместе с уравнением $p = p(\theta, v)$ задают *теплоемкость* системы.

Пусть задан процесс $\theta(t)$, $V(t)$, $N(t)$, $t \in [0, 1]$ и задано уравнение состояния $S = S(\theta, V, N)$. Тогда количество теплоты $\delta Q = \theta dS$, которое передается системе в этом процессе, можно представить в виде

$$\delta Q = \theta dS = \Phi(t) dt = C(t)\theta'(t) dt = C(t) d\theta.$$

Смысл выделения множителя $C(t)$ понятен — с его помощью переданное системе количество теплоты связывается с изменением температуры системы. Величина C называется *теплоемкостью системы в данном процессе*.

Замечание. Мы подчеркиваем, что теплоемкость зависит от процесса, хотя значение $C(t)$ и связано с вполне конкретным равновесным состоянием. Чтобы теплоемкость стала полноценной функцией состояния, нужно указать тип процесса.

Принято для описания системы использовать *теплоемкость при постоянном объеме* C_{VN}

$$C_{VN} = \left(\frac{\delta Q}{d\theta} \right)_{VN}.$$

В соответствии с принципом аддитивности $C_{VN}(\theta, V, N) = Nc_V(\theta, v)$. Имеем $(\delta Q)_{VN} = \theta(\partial S/\partial\theta)_{VN} d\theta$, поэтому

$$C_{VN} = \theta \left(\frac{\partial S}{\partial\theta} \right)_{VN}, \quad c_V = \theta \left(\frac{\partial s}{\partial\theta} \right)_v.$$

Итак, для описания системы типа газа в термодинамике нужно задать уравнения $p = p(\theta, v)$ и $c_V = c_V(\theta, v)$. Первое принято называть просто *уравнением состояния*, а второе — *калорическим уравнением*.

Условие согласованности уравнения состояния с калорическим уравнением нетрудно получить, продифференцировав еще раз по температуре условие согласованности $(\partial s/\partial v)_\theta = (\partial p/\partial\theta)_v$. Мы получим

$$\left(\frac{\partial c_V}{\partial v} \right)_\theta = \theta \left(\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2} \right)_v.$$

Термодинамические величины идеального газа

Идеальным газом называется термодинамическая система, которая имеет уравнения состояния

$$p = \theta/v, \quad c_V = \text{const.}$$

Первое есть просто уравнение Менделеева—Клапейрона, которое в школе записывают в виде

$$pV = \nu RT.$$

Учитывая, что количество вещества $\nu = N/N_A$, газовая постоянная $R = N_A k$, получим $pV = N\theta$, или $p = N\theta/V = \theta/v$.

Вычислим все термодинамические величины идеального газа, исходя из уравнений состояния.

Прежде всего проверим, что выполняется условие согласованности уравнения состояния и калорического уравнения. Имеем

$$\frac{\partial c_V}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0,$$

так что условие согласованности выполняется.

Следующий шаг — расчет энтропии. Воспользуемся уравнениями

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_v = \frac{c_V}{\theta}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_\theta = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v.$$

Для идеального газа

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)_v = \frac{c_V}{\theta}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_\theta = \frac{1}{v}.$$

Интегрируя первое из этих соотношений, найдем $s(\theta, v) = c_V \ln \theta + \varphi(v)$, где $\varphi(v)$ определяется после подстановки во второе уравнение

$$s(\theta, v) = c_V \ln \theta + \ln v + s_0.$$

Замечание. Значение возникающей *энтропийной постоянной* s_0 в принципе определяется *третьим началом термодинамики*. Мы не будем на этом подробно останавливаться. Отметим лишь, что в конкретных задачах вычисляется обычно разность значений энтропии в двух состояниях и величина s_0 в ответ не входит.

Теперь, зная $p(\theta, v)$ и $s(\theta, v)$, мы можем рассчитать свободную энергию. Имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_v = -s, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_\theta = -p.$$

Интегрируя первое уравнение, находим $f(\theta, v) = -c_V(\theta \ln \theta - \theta) - \theta \ln v - \theta s_0 + \chi(v)$. Значение $\chi(v)$ определяется после подстановки во второе уравнение

$$f(\theta, v) = -c_V \theta (\ln \theta - 1) - \theta \ln v - \theta s_0 + \varepsilon_0.$$

Постоянная энергии ε_0 в принципе не может быть определена. То же самое мы наблюдали в механике — начало отсчета потенциальной энергии можно выбирать произвольно.

Химический потенциал может быть вычислен по формуле $\mu = f + pv$ и отличается от f на величину $pv = \theta$. Наконец, внутренняя энергия вычисляется по формуле

$$\varepsilon = f + \theta s.$$

Подстановка уже полученных выражений приводит к весьма простому результату

$$\varepsilon(\theta, v) = c_V \theta + \varepsilon_0.$$

Этот результат также известен из школьной программы. Там вы писали

$$U = \frac{3}{2} \nu RT,$$

что соответствует нашей формуле при $c_V = 3/2$ (проверьте!). В разделе “Статистическая физика” мы увидим, что такое значение c_V имеет для одноатомного газа.

Простейшие процессы с идеальным газом. Цикл Карно

Термодинамика первоначально развивалась как наука о превращении тепла в механическую работу. Лишь значительно позднее было осознано, что термодинамика — это прежде всего наука о свойствах вещества. Соответственно центр тяжести первоначально был смещен в сторону процессов, и лишь позднее была осознана важность и глубина понятия равновесного состояния. Тем не менее, в любом учебнике термодинамики до сих пор можно найти разделы, посвященные процессам. По сравнению с учением о равновесных состояниях такие разделы носят явно выраженный технический, а не научный, характер. Мы также отдадим дань традиции.

Простейшие виды процессов получаются, если зафиксировать две из трех независимых переменных. Принято всегда фиксировать N , тогда из двух оставшихся пар сопряженных переменных θ — s и p — v нужно выбрать еще одну фиксированную переменную.

Изохорный процесс. Объем системы $V = \text{const}$. Работа системы равна нулю $A = 0$, а количество теплоты

$$Q = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = c_V N(\theta_2 - \theta_1).$$

В соответствие с самим своим определением, теплоемкость в этом процессе равна c_V .

Изобарный процесс. Давление в системе $p = \text{const}$. Работа системы

$$A = p(V_2 - V_1) = N(\theta_2 - \theta_1).$$

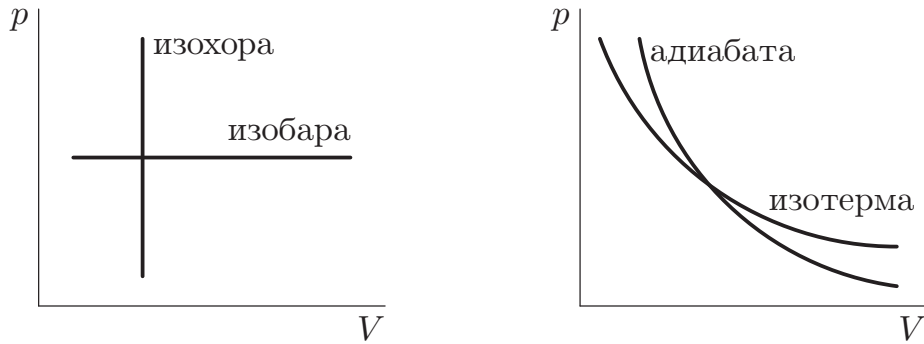
Количество теплоты

$$Q = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + A = c_V N(\theta_2 - \theta_1) + N(\theta_2 - \theta_1) = (c_V + 1)N(\theta_2 - \theta_1).$$

Теплоемкость в этом процессе равна

$$c_p = c_V + 1.$$

Это равенство называют *соотношением Майера*.



Изотермический процесс. Температура системы $\theta = \text{const}$. Уравнение процесса можно еще записать в виде $pV = \text{const}$. Работа системы

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{N\theta}{V} dV = N\theta \ln \frac{V_2}{V_1} = N\theta \ln \frac{p_1}{p_2}$$

(при вычислении мы использовали уравнение состояния $pV = N\theta$ и следствие из него $p_1 V_1 = p_2 V_2$). Количество теплоты равно работе, поскольку внутренняя энергия не меняется

$$Q = A.$$

Адиабатный процесс. Энтропия системы $S = \text{const}$. Поскольку $\delta Q = \theta dS$, то $\delta Q = 0$. Именно это условие, а не постоянство энтропии, обычно берут в качестве определения адиабатного процесса.

Поскольку энтропия — не очень наглядная величина, получим уравнение адиабатного процесса в переменных (p, v) . Имеем

$$s = c_V \ln \theta + \ln v + s_0 = \text{const}.$$

Объединяя логарифмы, найдем

$$\theta^{c_V} v = \text{const.}$$

Это уравнение процесса в переменных (θ, v) . Чтобы переписать его в переменных (p, v) , воспользуемся уравнением состояния $pv = \theta$. Исключая θ , найдем

$$pv^\gamma = \text{const.},$$

где $\gamma = c_p/c_V$ называется *показателем адиабаты*. Уравнение адиабаты в переменных (p, v) называется *уравнением Пуассона*. Поскольку всегда $c_p > c_V$, то $\gamma > 1$ и на p — v -диаграмме адиабата идет круче изотермы.

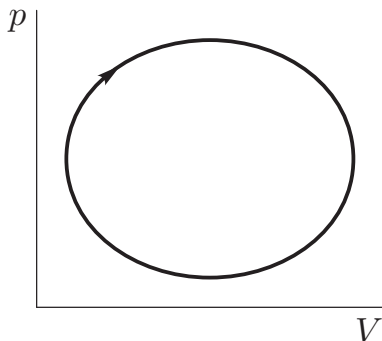
Работа газа в адиабатном процессе равна убыли его внутренней энергии

$$A = -(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = -c_V N(\theta_2 - \theta_1).$$

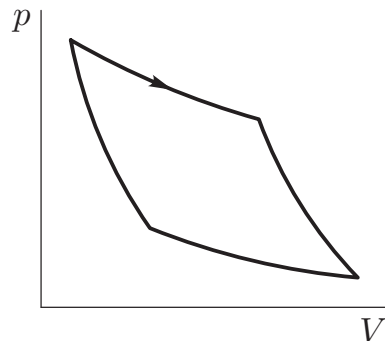
Используя уравнение Пуассона и уравнение состояния, можно выразить работу через начальный и конечный объемы или начальное и конечное давления.

Отметим, что с “механической” точки зрения, наиболее элементарными являются адиабатный и изотермический процесс. При адиабатном процессе нам вообще не нужен термостат, а все воздействие на систему сводится к изменению объема. При изотермическом процессе термостат нужен, но только один. В то же время для проведения изохорного или изобарного процесса нужен целый набор термостатов с различными температурами.

Особую роль в термодинамике играют *циклические процессы* или просто *циклы*. Квазистатический процесс называется *циклическим*, если начальное и конечное состояния системы совпадают. Особая роль циклов связана с тем, что их можно повторять вновь и вновь. Фактически все тепловые машины (двигатели, холодильники и т. п.) используют циклические процессы.



Циклический процесс



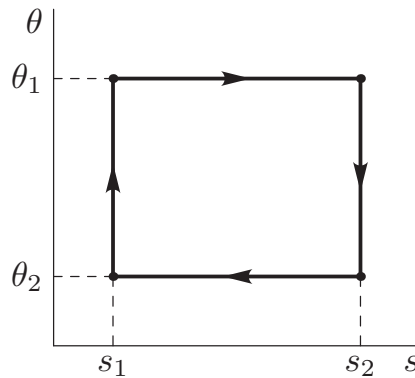
Цикл Карно

Простейшим с “механической” точки зрения циклом является цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. Этот цикл называется *циклом Карно*. В контексте этого цикла термостат с большей температурой θ_1 принято называть *нагревателем*, а термостат с меньшей температурой θ_2 — *холодильником*. Саму же термодинамическую систему, с которой проводят процесс, принято называть *рабочим телом*. Если цикл Карно используется для превращения тепла в работу, то при каждом проходе цикла рабочее тело получает некоторое количество тепла Q_1 от нагревателя и отдает некоторое количество тепла $|Q_2|$ холодильнику (количество тепла Q_2 рабочее тело отдает, поэтому $Q_2 < 0$). Поскольку начальное и конечное состояния рабочего тела совпадают, совпадают и их внутренние энергии. Тогда работа за цикл

$$A = Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|.$$

Естественным образом определяется *коэффициент полезного действия* (КПД) цикла Карно

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}.$$



Цикл Карно в переменных θ — s

Чтобы выразить КПД цикла Карно через температуры нагревателя и холодильника, изобразим цикл Карно не на привычной p — v -диаграмме, а на θ — s -диаграмме. Обозначая максимальную и минимальную энтропии через S_1 и S_2 и вспоминая, что $\delta Q = \theta dS$, получим для количеств тепла выражения

$$Q_1 = \theta_1(S_1 - S_2), \quad Q_2 = \theta_2(S_2 - S_1),$$

подставляя которые в формулу для КПД, найдем

$$\eta_C = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1}$$

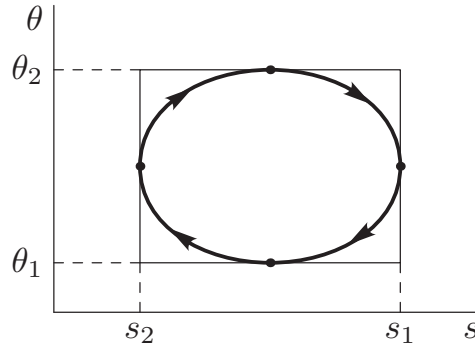
(индекс C напоминает нам, что формула справедлива только для цикла Карно).

Отметим, что при выводе этой формулы мы не пользовались тем, что рабочее тело — идеальный газ. Таким образом, формула для КПД цикла Карно справедлива для любого рабочего тела.

Обобщить определение КПД на произвольные циклы не так просто. Как уже отмечалось выше, для осуществления таких циклов нужны не два, а больше термостатов. Нагревателями и холодильниками их назвать уже нельзя, поскольку, вообще говоря, один и тот же термостат будет как отдавать тепло рабочему телу на одном участке цикла, так и получать его от рабочего тела на другом участке. Непонятно, какой вклад должен давать теплообмен с этим термостатом в величину Q_1 , стоящую в знаменателе формулы $\eta = A/Q_1$ для КПД. Ситуацию можно довести до абсурда, если проходить изотерму θ_1 в обычном цикле Карно туда-сюда-обратно. Полученное рабочим телом за два прямых прохода тепло вдвое больше обычного, а КПД, стало быть, вдвое меньше. К тому же простое суммирование количеств теплоты, полученных рабочим телом от разных нагревателей, не учитывает того, что тепло, полученное от нагревателя с меньшей температурой, в термодинамическом смысле “менее ценно”.

Приведенные соображения достаточно ясно показывают, что КПД является не научной, а технической характеристикой. На практике КПД, скажем, двигателя внутреннего сгорания определяют по расходу бензина при работе на стандартных оборотах и стандартном усилии на валу. Производство оборотов и усилия дает мощность, а по справочнику можно посмотреть удельную теплоту сгорания бензина. Поделив одно на другое, получают КПД (и это правильно). Не следует слишком серьезно относиться к теоретическому сравнению КПД различных циклов. Единственный научно бесспорный способ сравнения — по производству энтропии, но все циклы на равновесных процессах в этом смысле эквивалентны, поскольку энтропии не производят.

Отдавая дань традиции, мы все же сравним КПД произвольного цикла с КПД цикла Карно. При этом под Q_1 будем понимать тепло, переданное рабочему телу всеми термостатами, даже если потом оно было им же отдано обратно. Аналогично будем понимать Q_2 . Сравним КПД произвольного цикла будем с КПД цикла Карно с теми же максимальной и



Сравнение КПД произвольного цикла с КПД цикла Карно

минимальной температурами θ_1 и θ_2 и энтропиями S_1 и S_2 . Тогда

$$Q_1 = \int_{1-2-3} \theta dS \leq \int_{1-2-3} \theta_1 dS = \theta_1(S_1 - S_2),$$

$$|Q_2| = \int_{1-4-3} \theta dS \geq \int_{1-4-3} \theta_2 dS = \theta_2(S_1 - S_2).$$

Теперь уже нетрудно сделать оценку

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \leq 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} = \eta_C.$$

Циклы можно использовать не только для превращения тепла в работу. Например, тепловой двигатель, работающий по циклу Карно, но пущенный в обратную сторону, превращается в *холодильную машину*. При каждом проходе цикла рабочее тело отбирает у холодильника тепло $|Q_2|$ и отдает нагревателю тепло Q_1 . Эффективность холодильных машин естественно оценивать по отношению $\xi = |Q_2|/A$, и это еще более непонятная величина, чем КПД.

Условия устойчивости. Фазовые переходы

В самом начале наших лекций мы предупреждали, что почти весь курс будет посвящен объяснению того, что такое термодинамическая система. Сейчас мы готовы сделать последний штрих (скорее, жирный мазок). Состояние термодинамического равновесия должно быть *устойчивым*. С точки зрения физики это понятно, поскольку состояние равновесия — это состояние, в которое система самопроизвольно переходит, а стало быть, будучи из него выведена, должна в него вернуться. Так что устойчивость понимается совсем как в механике, и нам должно быть ясно, что одними равновесными состояниями, как мы это делали до сих пор, мы не обойдемся. Нужно ввести по крайней мере некоторый класс неравновесных состояний и некоторый принцип, определяющий направление неравновесных процессов.

Локально равновесные состояния. Второе начало термодинамики для неравновесных процессов

В качестве класса неравновесных состояний возьмем *локально равновесные состояния*. Они характеризуются тем, что, хотя полностью вся система еще не находится в состоянии термодинамического равновесия, отдельные малые ее части уже находятся в состоянии равновесия. Тогда для отдельных малых частей можно ввести термодинамические параметры. Поскольку они меняются от части к части, то говорят о *локальных значениях термодинамических параметров*. Иными словами, неаддитивные параметры, такие как температура и давление, зависят от координат: $p(\mathbf{r})$, $\theta(\mathbf{r})$. Аддитивные же параметры, например, энтропия, представляются в виде интегралов

$$(*) \quad S = \int_{(V)} s(\theta(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) \frac{d^3 r}{v(\mathbf{r})},$$

где функция $s(\theta, v)$ та же, что для полностью равновесной системы.

Второе начало термодинамики для неравновесных процессов утверждает, что для теплоизолированной в целом системы с фиксированными общим объемом и количеством частиц неравновесные процессы приводят только к возрастанию энтропии

$$dS > 0.$$

Энтропия в неравновесном процессе может меняться за счет изменения локальных значений $\theta(\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})$ при условии, что такие изменения сохраняют

значения полной энергии и числа частиц

$$(**) \quad \mathcal{E} = \int_{(V)} \varepsilon(\theta(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) \frac{d^3 r}{v(\mathbf{r})}, \quad N = \int_{(V)} \frac{d^3 r}{v(\mathbf{r})}.$$

Таким образом, в состоянии равновесия энтропия имеет максимальное значение. Это аналогично определению устойчивого положения равновесия в механике как такого положения тела, при котором его потенциальная энергия минимальна.

Условия устойчивости системы типа газа

С математической точки зрения поиск равновесного состояния и исследование его устойчивости представляет собой вариационную задачу для функционала (*) при ограничениях (**). Если бы величина S была просто функцией двух переменных θ и v , и не было бы дополнительных условий, то необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial v} = 0$$

определили бы равновесные значения параметров, а достаточное условие максимума — условие отрицательной определенности матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial v} & \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

(два неравенства) как раз было бы условием устойчивости. Нечто подобное происходит и в задаче (*)—(**). Необходимое условие экстремума говорит, что $\theta(\mathbf{r})$ и $v(\mathbf{r})$ в равновесии не зависят от координат (пространственная однородность восстанавливается), при этом значения термодинамических параметров оказываются связанными обычными уравнениями состояния. Достаточные же условия экстремума приводят к следующим условиям устойчивости системы типа газа

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_{\theta} < 0, \quad c_V > 0.$$

Замечание. Теперь мы знаем о термодинамических системах все. Термодинамические системы описываются термодинамическими параметрами, которые разбиваются на пары сопряженных параметров, для газа: p — V , θ — S , μ — N . Мы можем фиксировать

стенками половину параметров (по одному из каждой пары сопряженных), равновесные значения второй половины определяются из уравнений состояния. Справедлив принцип аддитивности. Уравнения состояния согласованы друг с другом (это следствие начал термодинамики) и удовлетворяют условиям устойчивости.

Проверим, что условия устойчивости выполняются для уравнений состояния идеального газа

$$pv = \theta, c_V = \text{const.}$$

Имеем $(\partial p / \partial v)_\theta = -\theta / v^2 < 0$, так что первое условие выполняется. Второе же выполняется, если постоянная $c_V > 0$ (например, $c_V = 3/2$ для одноатомного газа).

Математическое исследование задачи (*)—(**) довольно сложно, но приведем его в качестве необязательного материала.

Решение вариационной задачи. Имеем

$$S = \int_{(V)} s(\theta(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) \frac{d^3 r}{v(\mathbf{r})} = \max,$$

$$\mathcal{E} = \int_{(V)} \varepsilon(\theta(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) \frac{d^3 r}{v(\mathbf{r})}, \quad N = \int_{(V)} \frac{d^3 r}{v(\mathbf{r})},$$

где $\varepsilon(\theta, v)$ и $s(\theta, v)$ — локальные значения удельных внутренней энергии и энтропии. Эта задача на условный экстремум с помощью процедуры Лагранжа сводится к эквивалентной задаче на безусловный экстремум для функционала

$$\tilde{S} = S + \lambda_1 \left(\int_{(V)} \varepsilon(\theta, v) \frac{d^3 r}{v} - \mathcal{E} \right) + \lambda_2 \left(\int_{(V)} \frac{d^3 r}{v} - N \right) = \max$$

по отношению к вариациям $\theta(\mathbf{r})$, $v(\mathbf{r})$ и изменениям не зависящих от $\mathbf{r}$ множителей Эйлера λ_1 и λ_2 . Приравнявая нулю первую вариацию этого функционала

$$\delta \tilde{S} = \int_{(V)} \frac{d^3 r}{v} \left\{ \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} + \lambda_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right) \delta \theta + \left(\frac{\partial s}{\partial v} + \lambda_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} - \frac{s}{v} - \lambda_1 \frac{\varepsilon}{v} - \frac{\lambda_2}{v} \right) \delta v \right\} = 0,$$

получаем, что равный нулю коэффициент при вариации $\delta \theta$

$$\frac{\partial s(\theta(\mathbf{r}), v(\mathbf{r}))}{\partial \theta(\mathbf{r})} + \lambda_1 \frac{\partial \varepsilon(\theta(\mathbf{r}), v(\mathbf{r}))}{\partial \theta(\mathbf{r})} = c_V(\theta(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) \left(\frac{1}{\theta(\mathbf{r})} + \lambda_1 \right) = 0$$

определяет всюду одинаковое значение температуры

$$1/\theta(\mathbf{r}) = 1/\theta = -\lambda_1 = \text{const.}$$

Приравнявая нулю коэффициент при δv и подставляя в него $\lambda_1 = -1/\theta$, получаем, учитывая, что $\partial s / \partial v = \partial p / \partial \theta$ и $\partial \varepsilon / \partial v = \theta(\partial p / \partial \theta) - p$,

$$\frac{pv - \theta s + \varepsilon - \lambda_2 \theta}{\theta v} = \frac{\mu(\theta, v(\mathbf{r})) - \lambda_2 \theta}{\theta v(\mathbf{r})} = 0,$$

т. е. $\lambda_2 \theta = \mu(\theta, v(\mathbf{r})) = \text{const}$, что определяет всюду в равновесной системе одинаковое значение плотности $1/v(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) = \text{const}$.

Для второй вариации, взятой при условии $\delta\tilde{S} = 0$ (при этом выражение, стоящее в фигурных скобках под интегралом в $\delta\tilde{S}$ равно нулю), имеем

$$\begin{aligned} \delta^2 \tilde{S}|_{\delta\tilde{S}=0} = & \int_{(V)} d^3r \delta\left(\frac{1}{v}\right) \{ \dots \} + \int_{(V)} \frac{d^3r}{v} \left\{ \left(\frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2} \right) \delta\theta^2 + \right. \\ & + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial v^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v^2} + \frac{s + \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2}{v^2} - \frac{1}{v} \frac{\partial s}{\partial v} - \frac{\lambda_1}{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \right) \delta v^2 + \\ & \left. + \left(2 \left(\frac{\partial^2 s}{\partial \theta \partial v} + \lambda_1 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta \partial v} \right) - \frac{1}{v} \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} + \lambda_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right) \right) \delta v \delta \theta \right\}. \end{aligned}$$

Используя ранее найденные значения λ_1 и λ_2 , а также выписанные выше термодинамические соотношения, находим, что коэффициент при $\delta\theta^2$ равен $-c_V/\theta^2$, коэффициент при δv^2 — $(\partial p/\partial v)_\theta/\theta$, а коэффициент при $\delta\theta \delta v$ равен нулю. Таким образом, под интегралом в выражении для $\delta^2 \tilde{S}$ остается диагональная квадратичная форма относительно независимых вариаций $\delta\theta$ и δv

$$\delta^2 \tilde{S}|_{\delta\tilde{S}=0} = \int_{(V)} d\mathbf{r} \frac{1}{v} \left\{ -\frac{1}{\theta^2} c_V \delta\theta^2 - \frac{1}{\theta} \left(-\frac{\partial p}{\partial v} \right)_\theta \delta v^2 \right\}.$$

Термодинамическая устойчивость равновесного состояния системы типа газа реализуется в случае $\delta^2 \tilde{S}|_{\delta\tilde{S}=0} < 0$, что эквивалентно условиям

$$c_V > 0, \quad \left(-\frac{\partial p}{\partial v} \right)_\theta > 0.$$

Равновесное значение удельного объема определяется из условия $\partial\tilde{S}/\partial\lambda_2 = 0$, что сразу дает $v = V/N$, а равновесное значение удельной внутренней энергии — из условия $\partial\tilde{S}/\partial\lambda_1 = 0$, что при условии независимости от $\mathbf{r}$ величин θ и v дает $\varepsilon = \mathcal{E}/N$.

Равновесие газа во внешнем поле. Распределение Больцмана

Задача о равновесии системы во внешнем потенциальном поле $U(\mathbf{r})$ ставится точно так же, как для пространственно однородной системы, только внутренняя энергия равна

$$\mathcal{E} = \int_{(V)} [\varepsilon(\theta(\mathbf{r}), v(\mathbf{r})) + U(\mathbf{r})] \frac{d^3r}{v(\mathbf{r})}.$$

Условие равновесия имеет вид

$$\mu(\theta, v(\mathbf{r})) + U(\mathbf{r}) = \text{const}.$$

Решение вариационной задачи. Единственное отличие от случая пространственно однородной системы — в уравнение для v входит новый член

$$\frac{pv - \theta s + \varepsilon + U - \lambda_2 \theta}{\theta v} = \frac{\mu(\theta, v(\mathbf{r})) + U(\mathbf{r}) - \lambda_2 \theta}{\theta v(\mathbf{r})} = 0,$$

что и приводит к выписанному выше уравнению.

Для идеального газа $\mu(\theta, v) = -\theta \ln v + \varphi(\theta)$, а потому

$$n(\mathbf{r}) = 1/v(\mathbf{r}) = n_0 \exp\left(-\frac{U(\mathbf{r})}{\theta}\right).$$

Эта формула называется *распределением Больцмана*. Отметим, что распределение давления

$$p(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})\theta$$

совпадает с распределением концентрации.

В частном случае поля тяжести плоской Земли, когда $U = mgz$, формула

$$n(z) = n_0 e^{-mgz/\theta}$$

называется *барометрическим распределением*.

Газ Ван-дер-Ваальса

Газ Ван-дер-Ваальса описывается уравнениями состояния

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \theta, \quad c_V = \text{const},$$

где a и b — некоторые положительные постоянные. При $a = 0$, $b = 0$ газ Ван-дер-Ваальса переходит в идеальный газ.

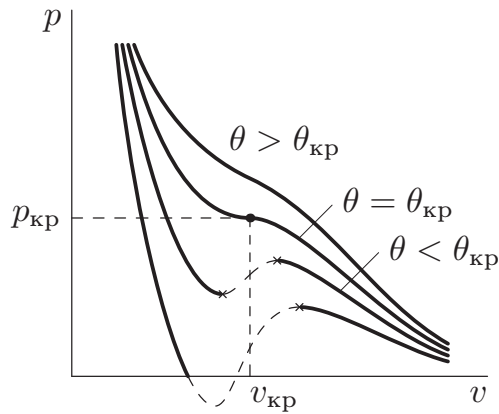
Домашнее задание. Проверьте, что выполняется условие согласованности.

Свободная энергия газа Ван-дер-Ваальса имеет вид

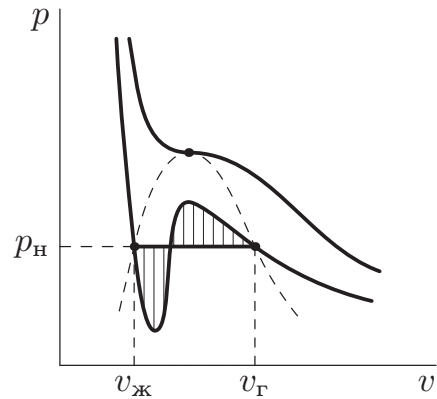
$$f = c_V \theta (\ln \theta - 1) - \theta \ln v + \varepsilon_0 - \theta s_0 - a/v - \theta \ln(1 - b/v)$$

(два последних слагаемых отличают ее от свободной энергии идеального газа).

Домашнее задание. Проверьте, что из этого выражения действительно следуют уравнения состояния.



Изотермы Ван-дер-Ваальса



Правило Максвелла

Что касается условий устойчивости, то второе из них выполняется, если постоянная $c_V > 0$, а вот первое выполняется только при температурах, выше критической $\theta_{кр} = 8a/27b$. При температурах ниже критической изотерма Ван-дер-Ваальса имеет характерный вид, показанный на рисунке, так что существует область $(\partial p / \partial v)_\theta > 0$ (при достаточно низких температурах существует даже область $p < 0$). Очевидно, что уравнение Ван-дер-Ваальса должно быть как-то подправлено в этой области.

Оказывается, что при температурах ниже критической и некотором интервале значений объема системы, устойчивое равновесное состояние не является пространственно однородным. Система разделяется на две фазы, которые характеризуются одинаковыми значениями неаддитивных параметров (давления и температуры), но разными значениями удельного объема v . Фазу с большим значением $v_г$ называют газом, а фазу с меньшим $v_ж$ — жидкостью. Саму область значений температуры и объема, в которой происходит расслоение на фазы называют областью двухфазных состояний. Оказывается, что уравнение состояния $p(\theta, v)$ в двухфазной области устроено очень просто — давление не зависит от объема (его еще называют давлением насыщенного пара p_n). Чтобы свободная энергия в однофазной области всюду совпадала со своим исходным выражением, должно выполняться условие

$$\int_{v_ж}^{v_г} p(\theta, v) dv = p_n(v_г - v_ж),$$

где под интегралом стоит исходное уравнение состояния. Это условие называется правилом Максвелла. Геометрически оно означает, что площади на p — v -диаграмме под исходной изотермой и исправленной равны. Правило Максвелла определяет зависимость величин $v_г$, $v_ж$, p_n от температуры.

Зависимость $p_n(\theta)$ называют *кривой фазового равновесия*. К сожалению, выписать эту зависимость явно для уравнения Ван-дер-Ваальса не удается. Мы приведем приближенные формулы для температуры много ниже критической

$$v_{\Gamma} = \frac{\theta b^2}{a} e^{a/b\theta} + \dots, \quad v_{\text{ж}} = b + \dots, \quad p_n = \frac{a}{b^2} e^{-a/b\theta} + \dots$$

и для температур, близких к критической

$$v_{\Gamma/\text{ж}} = v_{\text{кр}} \left(1 \pm 2\sqrt{1 - \theta/\theta_{\text{кр}}} + \dots \right), \quad p_n = p_{\text{кр}} (1 - 4(1 - \theta/\theta_{\text{кр}}) + \dots),$$

где *критической объем* и *критическое давление* равны $v_{\text{кр}} = 3b$, $p_{\text{кр}} = a/27b^2$.

Поскольку калорическое уравнение должно быть согласовано с уравнением состояния, то исправление уравнения состояния влечет за собой изменение калорического уравнения. Оказывается, что в двухфазной области теплоемкость перестает быть постоянной, она зависит и от температуры и от объема (от объема — линейно). Кроме того, на границе двухфазной области она испытывает скачок. Поведение теплоемкости в двухфазной области описывается формулой

$$\tilde{c}_V(\theta, v) = c_V(\theta, v_{\Gamma}) + (v - v_{\Gamma})\theta \frac{d^2 p_n}{d\theta^2} - \theta \left(\frac{dv_{\Gamma}}{d\theta} \right)^2 \frac{\partial p_{\Gamma}}{\partial v_{\Gamma}}$$

(или такой же формулой с заменой “Г” на “ж”). Первый член — это теплоемкость в однофазной области на границе с двухфазной (для газа Ван-дер-Ваальса — просто постоянная c_V). Второй член дает линейную зависимость от объема и обеспечивает согласованность с уравнением состояния, третий же дает скачок на границе двухфазной области. Производная $\partial p_{\Gamma}/\partial v_{\Gamma}$ вычисляется в однофазной области на границе с двухфазной и по условию устойчивости отрицательна, так что скачок теплоемкости положителен.

Для газа Ван-дер-Ваальса можно привести приближенные выражения для температур, много меньших критической

$$\tilde{c}_V(\theta, v) = c_V + 1 + (v - v_{\text{ж}}) \frac{a^3}{b^4 \theta^3} e^{-a/b\theta} + \dots,$$

и близких к ней

$$\tilde{c}_V = c_V + \frac{9}{2} + (v - v_{\Gamma}) \frac{24\theta p_{\text{кр}}}{5\theta_{\text{кр}}^2} + \frac{36}{5} \sqrt{1 - \theta/\theta_{\text{кр}}} + \dots$$

Вывод формулы для теплоемкости в двухфазной области приведем в качестве необязательного материала.

Вывод формулы для теплоемкости. Так как вдоль прямолинейного участка изотермы, определяемой условием Максвелла

$$\mu(\theta, p_{\text{н}}(\theta)) = \mu(\theta, v_{\text{ж}}(\theta, p_{\text{н}}(\theta))) = \mu(\theta, v_{\text{г}}(\theta, p_{\text{н}}(\theta))),$$

химический потенциал не зависит от величины “суммарного” удельного объема v , то на участке изотермы $v_{\text{ж}}(\theta) \leq v \leq v_{\text{г}}(\theta)$ имеем

$$\mu = f(\theta, v_{\text{ж}}) + p_{\text{н}} v_{\text{ж}} = f(\theta, v_{\text{г}}) + p_{\text{н}} v_{\text{г}} = \tilde{f}(\theta, v) + p_{\text{н}} v,$$

где $f(\theta, v_{\text{ж}}(\theta, p_{\text{н}}(\theta)))$ и $f(\theta, v_{\text{г}}(\theta, p_{\text{н}}(\theta)))$ — значения удельной свободной энергии, определяемой исходными уравнениями состояния $p = p(\theta, v)$ и $c_V = c_V(\theta, v)$ в точках $v = v_{\text{ж}}$ и $v = v_{\text{г}}$, а $\tilde{f}(\theta, v)$ — удельная свободная энергия на прямолинейном не вандерваальсовском участке изотермы. Дифференцируя эту величину $\tilde{f}(\theta, v)$ по температуре

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\theta, v) = -\frac{\partial \tilde{f}(\theta, v)}{\partial \theta} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} [\mu(\theta, p_{\text{н}}(\theta)) - p_{\text{н}}(\theta) v] = \\ &= -\frac{\partial \mu(\theta, p_{\text{н}})}{\partial \theta} - \frac{\partial \mu(\theta, p_{\text{н}})}{\partial p_{\text{н}}} \frac{dp_{\text{н}}}{d\theta} + v \frac{dp_{\text{н}}}{d\theta}, \end{aligned}$$

и учитывая, что если $\mu(\theta, p)$ — химический потенциал, рассчитанный с помощью исходных, т. е. не спрямленных уравнений состояния, то производные $-\partial \mu(\theta, p)/\partial \theta$ и $\partial \mu(\theta, p)/\partial p$ в точках левее $v = v_{\text{ж}}$ и правее $v = v_{\text{г}}$ при $p = p_{\text{н}}(\theta)$ соответствуют значениям удельной энтропии и удельного объема чистых жидкой $s_{\text{ж}} = s(\theta, v_{\text{ж}}(\theta))$ и газообразной $s_{\text{г}} = s(\theta, v_{\text{г}}(\theta))$ фаз, сразу получаем два варианта выражения для удельной энтропии двухфазной системы

$$\tilde{s}(\theta, v) = s_{\text{ж}} + (v - v_{\text{ж}}) \frac{dp_{\text{н}}}{d\theta} = s_{\text{г}} + (v - v_{\text{г}}) \frac{dp_{\text{н}}}{d\theta}.$$

Сопоставление этих выражений приводит к уравнению Клапейрона—Клаузиуса

$$\frac{dp_{\text{н}}}{d\theta} = \frac{s_{\text{г}} - s_{\text{ж}}}{v_{\text{г}} - v_{\text{ж}}}$$

(название глупое, потому что гораздо проще промерить кривую фазового равновесия непосредственно, чем решать это уравнение).

Обозначим $c_V(\theta, v_{\text{ж}})$ и $c_V(\theta, v_{\text{г}})$ величины удельных теплоемкостей системы, задаваемой исходным калорическим уравнением в точках, непосредственно левее $v = v_{\text{ж}}(\theta)$ и правее $v = v_{\text{г}}(\theta)$, и заметим, что ввиду равенства давления насыщенного пара давлению, определяемому исходным уравнением состояния в только что упомянутых “внешних” точках $v_{\text{ж}}$ и $v_{\text{г}}$,

$$p_{\text{н}}(\theta) = p(\theta, v_{\text{ж}}(\theta)) = p(\theta, v_{\text{г}}(\theta)),$$

производную $dp_{\text{н}}/d\theta$ можно выразить через производные от функции, выражающей уравнение состояния $p = p(\theta, v)$, взятые в точках $v = v_{\text{ж}}(\theta)$ и $v = v_{\text{г}}(\theta)$,

$$\frac{dp_{\text{н}}(\theta)}{d\theta} = \frac{\partial p_{\text{ж}}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{\text{ж}}}{\partial v_{\text{ж}}} \frac{dv_{\text{ж}}}{d\theta} = \frac{\partial p_{\text{г}}}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{\text{г}}}{\partial v_{\text{г}}} \frac{dv_{\text{г}}}{d\theta},$$

где $p_{\text{ж}} = p(\theta, v_{\text{ж}})$ и $p_{\text{г}} = p(\theta, v_{\text{г}})$. Тогда для теплоемкости в двухфазной области $v_{\text{ж}} \leq v \leq v_{\text{г}}$

$$\tilde{c}_V(\theta, v) = \theta \frac{\partial \tilde{s}(\theta, v)}{\partial \theta}$$

получим, учитывая сложную зависимость $s_{\text{ж}}$ (а также $s_{\text{г}}$) от температуры, $s_{\text{ж}} = s(\theta, v_{\text{ж}}(\theta))$, вследствие чего

$$\frac{\partial s_{\text{ж}}}{\partial \theta} = \frac{\partial s(\theta, v_{\text{ж}})}{\partial \theta} + \frac{\partial s(\theta, v_{\text{ж}})}{\partial v_{\text{ж}}} \frac{dv_{\text{ж}}}{d\theta} = c_V(\theta, v_{\text{ж}}) + \frac{\partial p(\theta, v_{\text{ж}})}{\partial \theta} \frac{dv_{\text{ж}}}{d\theta},$$

соответственно с выбором формулы для энтропии тоже два варианта эквивалентных выражений

$$\begin{aligned}\tilde{c}_V(\theta, v) &= c_V(\theta, v_{\text{ж}}) + (v - v_{\text{ж}}) \theta \frac{d^2 p_{\text{н}}}{d\theta^2} - \theta \left(\frac{dv_{\text{ж}}}{d\theta} \right)^2 \frac{\partial p_{\text{ж}}}{\partial v_{\text{ж}}}, \\ \tilde{c}_V(\theta, v) &= c_V(\theta, v_{\text{г}}) + (v - v_{\text{г}}) \theta \frac{d^2 p_{\text{н}}}{d\theta^2} - \theta \left(\frac{dv_{\text{г}}}{d\theta} \right)^2 \frac{\partial p_{\text{г}}}{\partial v_{\text{г}}}.\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что полученный результат для удельной теплоемкости системы $\tilde{c}_V(\theta, v)$ на максвелловском участке изотермы полностью удовлетворяет требованию согласования с уравнением состояния на этом же участке $\tilde{p}(\theta, v) = p_{\text{н}}(\theta)$,

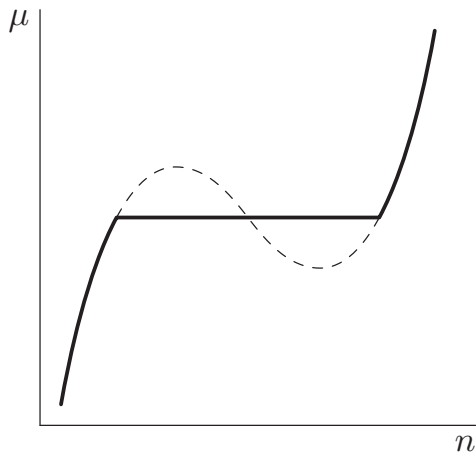
$$\frac{\partial \tilde{c}_V(\theta, v)}{\partial v} = \theta \frac{\partial^2 p_{\text{н}}(\theta)}{\partial \theta^2}.$$

Газ Ван-дер-Ваальса во внешнем поле. Пространственное разделение фаз

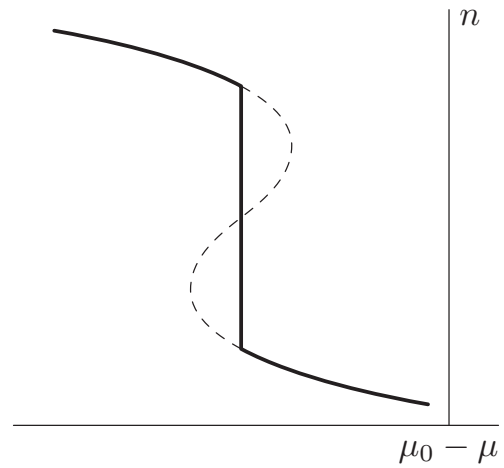
Исследуем качественно распределение давления и плотности числа частиц двухфазной системы, помещенной в однородное поле тяжести и задаваемой уравнением состояния Ван-дер-Ваальса.

Домашнее задание. Используя приведенное ранее выражение для свободной энергии, вычислите химический потенциал газа Ван-дер-Ваальса.

При температурах ниже критической график функции $\mu(\theta, n)$, где $n = 1/v$ (нам сейчас удобнее будет рассуждать на языке концентрации) для системы, описываемой уравнением состояния вандерваальсовского типа, имеет характерный вид, показанный на рисунке. “Горбатый” участок графика должен быть заменен горизонтальным отрезком по правилу Максвелла. Если повернуть координатные оси, то можно получить зависимость $n(\mu)$. Поскольку условие равновесия в поле силы тяжести $U(z) = mgz$ имеет вид $\mu + mgz = \mu_0 = \text{const}$, то этот же график определяет зависимость $n(z)$ (с точностью до масштаба по оси z). Видно, что зависимость $n(z)$ имеет скачок при некотором $z = z_0$. Этот скачок есть не что иное как



Химический потенциал
газа Ван-дер-Ваальса



Зависимость концентрации
от высоты

граница раздела фаз. Ниже z_0 мы имеем плотную жидкую фазу, а выше — разреженную газовую. Конечно, попадет ли точка z_0 внутрь сосуда, зависит от условия нормировки

$$N = \int_{(V)} n(z) d^3r.$$

Вполне может статься, что число частиц в сосуде так мало (или так велико), что весь сосуд окажется заполненным газом (жидкостью).

Итак, важнейший качественный вывод нашего рассмотрения — это явление пространственного разделения фаз во внешнем поле. Отметим сразу же, что оно сохраняется и в пределе выключения поля (т. е. при $g \rightarrow 0$). При этом, поскольку график $n(z)$ получается из графика $n(\mu)$ растягиванием в $1/mg$ раз вдоль горизонтальной оси, жидкостный и газовый “хвосты” выпрямляются, и жидкая и газовая фазы становятся пространственно однородными с характерными значениями плотностей, которые определяются только температурой системы (вся же система в целом пространственно однородной отнюдь не является из-за разделения фаз). Эту привычную картинку двухфазной системы (сосуд с жидкостью и насыщенным паром над ней) можно встретить в любом руководстве по термодинамике. Однако без введения внешнего поля с теоретической точки зрения совершенно непонятно, как из первоначально пространственно однородной системы, взятой при температуре $\theta > \theta_{\text{кр}}$, при понижении температуры ниже критической получается пространственно неоднородная система с разделившимися фазами. Дело здесь, конечно, в том, что свободная энергия

системы (или другой термодинамический потенциал, минимум которого соответствует равновесному состоянию) вырождена по различным пространственным вариантам расположения фаз друг относительно друга. Включение внешнего силового поля (даже бесконечно малого) снимает это вырождение. Взаимное расположение фаз становится конкретным (в частности, при нашем выборе поля $U(z) = mgz$ жидкость, как это мы привыкли в жизни, располагается внизу в интервале высот $0 < z < z_0$, а выше, при $z > z_0$ — газ) и оно сохраняется при “выключении” поля.

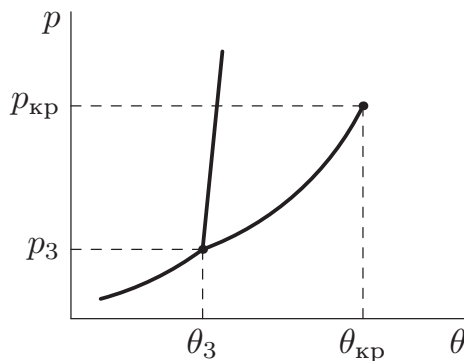
Общие замечания о фазовых переходах

На примере газа Ван-дер-Ваальса мы познакомились с системой, в которой происходит фазовый переход. Эта модель качественно правильно описывает фазовый переход жидкость—газ, наблюдаемый в реальных системах. Основной особенностью является наличие критической температуры, выше которой двухфазные состояния невозможны, а также постоянство давления на двухфазном участке изотермы. Что касается количественного описания, то оно оставляет желать лучшего, особенно в окрестности критической точки. Поэтому эпитет “реальный газ”, которым иногда награждают газ Ван-дер-Ваальса, нужно воспринимать условно.

Как мы видели, важную роль при исследовании фазовых переходов играют условия устойчивости. Именно неустойчивость пространственно однородного состояния системы в некоторой области значений параметров приводит к расслоению системы на фазы.

Нужно сказать также несколько слов по поводу терминологии. Хотя в отношении фазовых переходов и употребляются слова “переход” и “происходит”, в действительности понятие фазового перехода относится к равновесным состояниям системы, а вовсе не к процессам (“чайник кипит!”). С точки зрения термодинамики фазовый переход — это особенность в уравнениях состояния. Например, у первоначально гладкой изотермы Ван-дер-Ваальса после исправления по правилу Максвелла появляются угловые точки. С геометрической точки зрения особенности уравнений состояния естественно описывать как особенности проекции поверхности равновесных состояний на плоскость неаддитивных параметров (для газа — на плоскость θ и p). При этом в однофазной области проекция однозначная — разные точки на поверхности состояний проецируются в разные точки на плоскости θ и p . В двухфазной области проекция неоднозначна. Так, весь двухфазный участок изотермы Ван-дер-Ваальса проектируется в одну точку. Такие точки на плоскости θ и p с особенностями проектирования группируются в линии, уже названные нами ранее кривыми фазового равновесия. Уравнение Ван-дер-Ваальса описывает одну такую линию, кото-

рая начинается в точке $\theta = 0$, $p = 0$ и заканчивается в *критической точке* $\theta = \theta_{\text{кр}}$, $p = p_{\text{кр}}$. У реальных веществ кривых фазового равновесия обычно больше.



Фазовая диаграмма реального вещества

Удовлетворительной классификации фазовых переходов до сих пор не предложено. Вероятно, это связано с тем, что число типов возможных особенностей уравнений состояния слишком велико и не поддается описанию. За неимением лучшего пользуются очень старой классификацией, по которой фазовые переходы делятся на переходы первого и второго родов. Если значения энтропии по разные стороны кривой равновесия S_1 и S_2 различны, то говорят о фазовом переходе *первого рода*. По формуле $\delta Q = \theta dS$ такому переходу соответствует *скрытая теплота* $Q = \theta(S_2 - S_1)$. В газе Ван-дер-Ваальса как раз происходит фазовый переход первого рода во всех точках кривой равновесия, кроме критической. Если же $S_1 = S_2$, то говорят о фазовом переходе *второго рода*. Фазовый переход второго рода происходит, в частности, в газе Ван-дер-Ваальса в критической точке.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

*ЛЕКЦИИ ПО
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМУ*

САМАРА 2013

УДК 53(075) Э

Л-43

Рецензент: канд. физ.-мат наук, доц. С м и р н о в а Н . П

Лекции по электромагнетизму. / В. Н. Кнестяпин, И. В. Овчинникова, С. И. Гусева, И. П. Завершинский. - Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 64 с.: ил.

Пособие содержит базовый курс лекции электричеству и магнетизму для студентов 1 – 6 факультетов СГАУ всех специальностей и направлений.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

Электромагнитное взаимодействие

Мир состоит из взаимодействующих частиц. Всё, что мы видим, построено из элементарных частиц, есть такие кирпичики мироздания. На макроскопическом уровне много взаимодействий, на самом деле, в основании всего лежит четыре типа фундаментальных взаимодействий. Они называются:

- 1) сильное,
- 2) электромагнитное,
- 3) слабое,
- 4) гравитационное.

Они перечислены в порядке убывания силы взаимодействия.

Сильное взаимодействие определяет структуру атомных ядер и более глубокие структуры.

Следующее - электромагнитное взаимодействие. Оно послабее на два порядка сильного.

Сильное взаимодействие проявляется на малых расстояниях, 10^{-13} см, электромагнитное взаимодействие проявляется на любых расстояниях. Далее идёт слабое взаимодействие, вообще, играющее незаметную роль на макроскопическом уровне. И, наконец, самое слабое гравитационное взаимодействие, примерно на сорок порядков слабее электромагнитного. Но почему именно гравитационное взаимодействие мы ощущаем более часто, например, вы хотите подпрыгнуть, а вас тянет вниз. Это происходит за счёт того, что в нём участвуют все частицы.

Эти взаимодействия характерны тем, что в них участвуют определённые частицы, частицы, обладающие определёнными свойствами.

На макроскопическом уровне электромагнитное взаимодействие самое важное, вот то, что мы видим на Земле - это всё электромагнитное взаимодействие.

Электрический заряд

Частицы, участвующие в электромагнитном взаимодействии, обладают специальным свойством - *электрическим зарядом*. Что такое электрический заряд? Первичное понятие. Нельзя его описать в других более понятных терминах. Электрический заряд - неотъемлемое свойство элементарной частицы. Если есть частица, обладающая электрическим зарядом, например, электрон, всем вам известный электрон, лишить его этого свойства невозможно. Электрон обладает и другими свойствами: массой, спином, магнитным моментом. Имеются частицы и не обладающие этим свойством. Если частица не участвует в электромагнитном взаимодействии (а как это определить? берём частицу, находим действующую на неё силу, есть книжки, в которых дано руководство для даль-

нейших действий), итак, если частица не участвует в электромагнитном взаимодействии, то она не обладает электрическим зарядом.

Заряды всех тел кратны величине $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, это заряд электрона. Это означает, что в природе встречается минимальный заряд, равный e . Можно было бы принять $e=1$, но в силу ряда причин, в частности, по исторической причине, e выражается таким числом.

Есть такие частицы - кварки, заряд которых дробный: $\frac{1}{2} \cdot e$, $\frac{1}{3} \cdot e$ и т.д. То, что их заряд дробный не противоречит тому, что я сказал, так как кварки самостоятельно не наблюдаются. Считается, что нельзя выделить кварки индивидуально, чтобы получить частицу с дробным зарядом. Чтобы было более понятно, я приведу такой пример. Имеем намагниченную спицу с южным и северным полюсом, они ведут себя, как точечные источники тока, но, сломав спицу пополам, на одном конце остаётся южный полюс, а на другом выскакивает северный. Так и при делении кварков, они делятся, но появляются новые кварки, а не их половинки.

Заряды бывают двух знаков: "+" и "-". Как понимать отрицательный и положительный знак? Можно было бы назвать их другими символами, но которые входят в математические понятия, потому что математика - базовая наука.

Электромагнитное поле

Ещё раз повторю, мир состоит из взаимодействующих частиц, но частицы не взаимодействуют друг с другом. Этот вопрос занимал ещё Ньютона. Он считал, что сама идея взаимодействия через пустое пространство это абсурд. Нынешняя физика так же отвергает взаимодействие через пустое пространство. Например, откуда Земля "знает", что где-то от неё на расстоянии 150 млн. км находится Солнце, к которому она должна притягиваться? Поле является переносчиком взаимодействия, в частности, переносчиком электромагнитных взаимодействий является электромагнитное поле. Что такое поле? опять таки первичное понятие, невозможно его выразить более простыми словами. Надо понимать так: имеем частицу заряженную, одну единственную, и то, что создаёт частица в пространстве, это и есть электромагнитное поле. Некоторые формы этого электромагнитного поля мы видим, свет есть проявление электромагнитного поля. Другая заряженная частица погружена в это поле и взаимодействует с этим полем там, где она находится. Таким образом, решена проблема взаимодействия. Электромагнитное поле - это переносчик электромагнитного взаимодействия.

Опять таки, поле мы не можем описать обычными словами. Вот стол, он деревянный, коричневый и т.д., его можно описать бесконечно большим набором свойств. Электромагнитное поле го-

раздо более простая вещь. Движение частицы, находящейся в электромагнитном поле, описывается следующим уравнением.

Второй закон Ньютона:
$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = q \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + q \cdot \left[\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$$

Заряженная частица, обладающая зарядом q , движется в электромагнитном поле согласно этому уравнению. Видим, что сила, действующая на частицу со стороны электромагнитного поля, определяется двумя векторными полями: $\vec{E}(\vec{r}, t)$, то есть в каждой точке пространства задан вектор $\vec{E}$, который может меняться со временем (математик может сказать, если в каждой точке пространства задана скалярная функция, что задано скалярное поле, если задана векторная функция - задано векторное поле), поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$ называется *напряжённостью электрического поля*, поле $\vec{B}(\vec{r}, t)$ - *индукция магнитного поля*. Почему они так называются, нам сейчас неважно, это термины. Почему они разделены? Потому что влияние их на частицу различны. Поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$ не содержит никаких характеристик частицы кроме заряда. Если $v = 0$, то второе слагаемое вылетает. Это означает, что магнитное поле действует только на движущиеся частицы. Неподвижные заряды не чувствуют магнитного поля.

Когда говорится о функциях координат, имеется в виду, что мы находимся в некоторой инерциальной системе. Если заряд движется, то в другой инерциальной системе он будет покоиться. Это означает, что, если в одной инерциальной системе отсчёта существует только $\vec{E}(\vec{r}, t)$, то в другой появится и $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Вот эти два векторных поля полностью описывают электромагнитное поле. Задать электромагнитное поле означает задать шесть функций от координат и времени.

Как задать поле в этом помещении? Помещаем пробный заряд, измеряем силу, делим на q , получаем $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Чуть сложнее измерить $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Есть более изящные методы измерения, основанные на этом уравнении. И получим исчерпывающее описание этой вещи. Это описание на много проще описания этого стола.

Уравнения поля

Могу ли я конкретно, физически соорудить поле? Ответ, вообще говоря, нет. Не всякое векторное поле $\vec{E}$ может представлять реальное электрическое поле $\vec{E}$, и не всякое векторное поле $\vec{B}$ представляет магнитное поле $\vec{B}$. Реальное электромагнитное поле обладает структурой, и эта структура и выражается полевыми уравнениями, которые выступают в роли фильтров.

Электромагнитное поле создаётся заряженными частицами, или, иначе говоря, заряженные частицы являются источниками электромагнитного поля.

Основная задача теории:

предъявлено распределение заряженных частиц, и мы должны *найти поле*, которое создаётся этими частицами.

Вопрос: как можно описать распределение частиц, как предъявить распределение зарядов? Кстати, никакие другие свойства кроме заряда не важны. Можно взять какую-то частицу, измерить её заряд и повесить на неё бирку, и так со всеми частицами. Но технически это сделать невозможно.

Вот имеем некоторую систему координат. В точке с радиус-вектором $\vec{r}_i$ выбираем некоторый элемент объёма ΔV_i , определяем заряд этого элемента объёма. Пусть внутри этого элемента объёма находится заряд Δq_i . Теперь определяем такую величину: $\rho(\vec{r}_i) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta V_i}$. Будем уменьшать объём, при этом окажется, что отношение $\frac{\Delta q_i}{\Delta V_i}$ стремится к некоторому пределу. Считается, что элемент объёма очень мал, но число частиц в нём велико, такова реальность.

$$\Delta q = \rho(\vec{r}_i) \cdot \Delta V$$

Определённая выше функция $\rho(\vec{r}_i)$, называется *плотностью заряда*. Понятно, что всё распределение заряда описывается функцией $\rho(\vec{r}_i)$. Если имеются отдельные точечные заряды, то они подпадают под эту функцию. И она такова, что, если в точке $\vec{r}_1$ находится точечный заряд, то тогда $\rho(\vec{r}_1) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$. Скалярная функция $\rho(\vec{r})$ позволяет полностью описать мир с точки зрения электродинамики. Но не только она, скорость заряда тоже влияет на электромагнитное поле. Так как магнитное поле создаётся движущимися зарядами, нам нужно учесть ещё движение, и для этого нужна ещё одна характеристика. Берём в нашей системе координат точку $\vec{r}_i$ и вычисляем такую величину: $\vec{j}(\vec{r}_i) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \cdot \sum_{\Delta V_i} q_k \cdot \vec{v}_k$. Формулы надо научиться читать повествовательно! В этом случае: ловите все частицы этого объёма, заряд частицы умножаем на её скорость, делим на объём, а потом переходим к пределу, получаем некоторый вектор и этот вектор приписываем точке, в окрестности которой производили измерения... Получаем векторное поле. $\vec{j}(\vec{r}, t)$ - *плотность тока*.

Кстати, в механике аналогичная величина - плотность импульса. Вместо заряда возьмём массу, получим суммарный импульс, если разделить его на объём, получим плотность импульса.

Источники электромагнитного поля полностью характеризуются скалярной функцией $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ и векторной функцией $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$. Вот я уже говорил там о цветочках в саду, птички летают... с точки зрения электродинамики система должна быть описана функциями ρ и $\vec{j}$. Действительно, если дать эти функции, то по ним можно было бы дать цветную картинку, кстати, телевизор это и делает, а частью этого электромагнитного поля являются волны, которые попадают вам в глаз. Задание этих функций задаёт поле, потому что, если известны источники, то известно и поле.

Полевые уравнения

$$1) \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

$$2) \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

$$3) \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

$$4) \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \int_S \left(\vec{j} + \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Всё электричество сидит в этих уравнениях. Они, на самом деле, симметричны и красивы. Эти уравнения постулируются, они лежат в основе теории. Это фундаментальные уравнения теории. Вот, кстати, интересно. Теория существует неизменно с семидесятых годов XIX века по сей день, и никаких поправок! Ньютоновская теория не выдержала, а электродинамика стоит около 1,5 века, работает на расстоянии 10^{-16} м и никаких отклонений.

Для расшифровки этих уравнений потребуются некоторые математические конструкции.

2

Поток вектора.

Задано некоторое поле $\vec{A}(\vec{r})$, в какой-то точке пространства задан вектор $\vec{A}(\vec{r}_i)$. В окрестности этой точки выбираем площадку dS , площадку ориентированную, её ориентация характеризуется



вектором $\vec{n}$. Тогда конструкция $\vec{A} \cdot \vec{n} \cdot dS$ называется *поток вектора $\vec{A}$ через площадку dS* . При этом площадка настолько мала, что вектор $\vec{A}$ может считаться в пределах этой площадки постоянным.

Теперь ситуация другая. Рассмотрим некоторый кусок поверхности. Эту поверхность разбиваем на элементы. Вот, например, выделенный элемент под номером i , его площадь ΔS_i , его нормаль

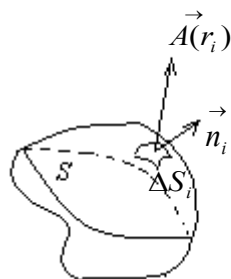


рис.2.2

$\vec{n}_i$. Где-то в пределах элемента выбираем вектор $\vec{A}(\vec{r}_i)$, сам элемент задаётся радиус-вектором $\vec{r}_i$, то есть какая-то точка внутри элемента имеет

радиус-вектор $\vec{r}_i$. Сумма по всем элементам поверхности образует такую сумму: $\sum_i \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta S_i$, а теперь предел $\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta S_i$ обозначается так:

$$\int_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \cdot dS \equiv N_A.$$

Ну, это стандартный опять приём: интеграл есть предел суммы по определению, предел этой суммы называется *поток вектора $\vec{A}$ через поверхность S* .

Так, если дует ветер, в каждой точке некоторой поверхности определён вектор скорости, тогда поток вектора скорости по этой поверхности - будет объём воздуха, проходящего через поверхность за единицу времени. Если векторное поле $\vec{A}$ не поле скоростей, а нечто другое, то ничего там не течёт. Это есть некий термин, и не надо понимать его буквально.

Если поверхность замкнута, то разобьём её на маленькие элементы. Но берётся ограничение: вектор нормали выбирается наружу (выбор нормали влияет на знак). Если поверхность замкнута, то нормаль берётся наружу, а соответствующий интеграл снабжается кружочком. Это, что касается термина поток.

Если $\vec{A}$ - поле скоростей, то скалярное произведение $\vec{n} \cdot \vec{r}$ отрицательно (см. рис.2.2 цифра 1), это газ или воздух, втекающий в поверхность. А берём площадку 2, здесь поток положительный, это воздух, вытекающий из поверхности. Если мы вычислим такую штуку $\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \cdot dS$ для потока скорости ветра через замкнутую поверхность, (это будет разность воздуха втекающего и вытекающего) и, если течение стационарное, то есть скорость со временем не меняется, то такой интеграл будет равен нулю, хотя и не всегда.

Если взять $\vec{A} = \rho \cdot \vec{v}$, то такая штука $\oint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$ означает, что масса втекающего воздуха

равна массе вытекающего.

Циркуляция потока.

Линии, вдоль которых направлено поле, называются силовыми линиями, а для любого векторного поля они интегральных кривых. Рассмотрим некоторую достаточно разбиваем кривую на элементы, вот выделяю его, маленький вектор $\vec{\Delta \ell}_i$. В пределах определяем значение вектора $\vec{A}(r_i)$, берём скаляр- $\vec{A}(r_i) \cdot \vec{\Delta \ell}_i$, получаем число и суммируем по всем

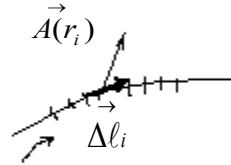


рис.2.3

называются силовыми линиями, а для любого векторного поля они интегральных кривую ℓ . Последующий элемент, я этого элемента ное произведение элементам¹. В

пределе получаем некоторое число: $\lim_{\Delta \ell_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{A}(r_i) \cdot \vec{\Delta \ell}_i$, которое обозначаем $\int_l \vec{A}(r) \cdot \vec{d\ell}$.

Берём замкнутую кривую ℓ (интеграл тогда будет снабжён кружочком), задаём произвольно направление, $\oint_l \vec{A} \cdot \vec{d\ell}$ - это некоторое число, зависящее от вектора $\vec{A}$ и $\vec{d\ell}$, называется *циркуляцией* вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру.

Если дует ветер, то циркуляция по замкнутому контуру, не всегда правда, равна нулю. А если возьмём вихрь, то циркуляция заведомо не равна нулю.

Статическое электромагнитное поле (электростатика)

В прошлый раз я нарисовал четыре уравнения. Начнём их жевать потихоньку. И сделаем упрощения. Прежде всего, положим $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. $\frac{\partial}{\partial t}$ от чего? От всего, то есть ничего со временем не меняется.

Особенность физики в чём состоит? Не в предмете! Все науки имеют свой предмет рассмотрения, биология - наука изучающая жизнь на Земле и т.д. Физика отличается взглядом на мир. С точки зрения электричества он характеризуется двумя векторными полями, кстати, если задать эти штуки, например, дать опи-

¹ Компьютер так бы и считал: разбивал с заданной точностью кривую на элементы и суммировал. Как завести в компьютер векторное поле? Таблицей: пространство разбиваем на ячейки и заносим значение вектора в каждой ячейке, кривая

сание зарядов в этой аудитории, то мы сможем восстановить всю ту картинку, которую вы сейчас наблюдаете.

Итак, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. И второе $\vec{j} = 0$.

В каждой точке пространства ничего не меняется, и все заряды неподвижны, то есть все заряды прибиты просто гвоздями. Тогда уравнения принимают вид:

$$1) \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV$$

$$2) \oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$3) \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$

$$4) \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Вот при такой подстановке $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ и $\vec{j} = 0$ наши четыре фундаментальные уравнения принимают такой вид.

Третье уравнение означает, что поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю, четвёртое - циркуляция вектора $\vec{B}$ по любому замкнутому контуру равна нулю. Из этих двух уравнений следует, что $\vec{B} = 0$. Это не очевидно, но мы ещё до этого доберёмся. Магнитное поле отсутствует. В статическом электромагнитном поле отсутствует магнитное поле, а электрическое описывается двумя уравнениями. В этих уравнениях сидят все свойства электростатического поля, то есть ничего больше не надо. И мы эти свойства сейчас извлечём.

Общие свойства электростатического поля

Прежде всего, что означают эти уравнения? Первое уравнение утверждает, что, если мы возьмём некоторую замкнутую поверхность S , V - объём этой поверхности, разбиваем поверхность на элементы, определяем в пределах каждого элемента напряжённость поля и вычисляем такую

так же заносится в виде таблицы. В анализе есть способы, как брать такие интегралы, но нас это сейчас не волнует, нам нужно понять смысл.

вещь $\vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$, суммируем, никто нам не запрещает это сделать, это математическая вещь, физика сидит в равенстве:

$$(\text{поток вектора напряжённости через замкнутую поверхность}) = \int_V \rho \cdot dV = \int_V dq = q$$

Таким образом, поток вектора $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность равен заряду внутри этой поверхности.

Например, стены, пол, потолок - это замкнутая поверхность. Можем сосчитать поток через эту замкнутую поверхность и получим число, и, если это число отлично от нуля, то это означает, что здесь находится заряд. Электромагнитное взаимодействие очень сильное, и в силу этого мы имеем нейтральное вещество. Ноль получим. Это не означает, что здесь нет электрических полей, но заряда нет.

Берём замкнутый контур, вычисляем циркуляцию. Второе уравнение утверждает, что, какой бы контур мы не взяли, циркуляция равна нулю. Отсюда следует, что силовые линии электромагнитного поля не могут быть замкнутыми. Мы могли бы взять контур, совпадающий с этой линией, скалярное произведение $\vec{E} \cdot \vec{dl}$ не меняет знак, следовательно, интеграл не равен нулю. Силовые линии не могут быть замкнуты, но тогда что с ними?

Имеется некоторая область, из которой силовые линии выходят, тогда берём замкнутую поверхность S и по этой замкнутой поверхности



рис.2.4

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS > 0. \text{ Это}$$

означает, что $q > 0$.

Если наоборот, силовые линии входят в окружаемую поверхность, тогда интеграл отрицательный.

ласть, эту область тельный. Нормаль

направлена наружу, в первом случае произведение $\vec{E} \cdot \vec{n}$ положительно, а здесь отрицательно.

Можно сказать, что силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных или уходят в бесконечность, но не может быть так, чтобы линия замкнулась на себя. Для магнитного поля, мы увидим дальше, что силовые линии всегда замкнуты, в отличие от электростатических, которые никогда не замкнуты.

Потенциал

$$\text{Вот такое математическое утверждение: } \oint_{\ell} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}).$$

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

Вы, вот, словами должны читать сами формулы. Кстати, физику можно излагать без слов, так же, как математику. Из того, что циркуляция для любого контура равна нулю, следует, что векторное поле $\vec{E}(\vec{r})$ может быть выражено через некоторую функцию от $\vec{r}$, называемую градиентом скалярного поля $\varphi(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla} \varphi = \vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \text{ Любому скалярному полю } \varphi \text{ можно поставить в}$$

соответствие векторное поле $\vec{\nabla} \varphi$ вот по такому рецепту. Это векторное поле называется градиентом скалярного поля φ .

Смысл векторного поля. $\vec{\nabla} \varphi$ - это вектор, направление вектора $\vec{\nabla} \varphi$ это направление, в котором функция φ меняется наиболее быстро. Направление вектора $\vec{\nabla} \varphi$ это направление быстрого изменения функции φ , а величина вектора характеризует скорость изменения функции φ в этом направлении. Ну, скорость по отношению к пространственному перемещению.

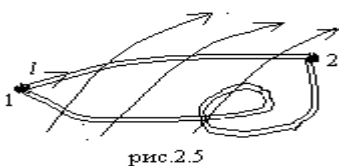
Температура, заведомо скалярная величина. В данной точке сунули термометр, он что-то показал, сунули в другую, он покажет другую температуру. А теперь, градиент от этого скалярного поля. Температура в данной точке такая, сместились в эту сторону на метр - другая температура, и так во все стороны, где температура выше, туда будет направлен её градиент $\vec{\nabla} t$, а величина этого вектора $\frac{\Delta \ell}{\Delta t}$.

Другой пример - плотность. Имеем стационарную атмосферу. Направление градиента плотности воздуха будет по вертикали и именно сверху вниз (вниз плотность будет возрастать).

Вот смысл градиента.

Это следствие $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$ чисто математическое, это можно доказать. Что физически означает уравнение $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$? Какую физическую интерпретацию можем ему дать?

Рассмотрим некоторую кривую с направлением. Вот имеем электрическое поле:



Возьмём точечный заряд q и будем перемещать заряд по заданной кривой из точки (1) в точку (2). Поскольку на заряд действует сила со стороны электрического поля, работа электрического поля при перемещении заряда вдоль кривой ℓ равна:

$$A_{12} = \int_{\ell} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\ell} q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \cdot \int_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

Работа, которая совершается электрическим полем при перемещении заряда, если я взял и принёс заряд из точки (1) в точку (2), а потом принёс его обратно (контур замкнулся!). То тогда следует, что

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \oint_{\ell} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = A_{12} = 0.$$

Работа по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю.

Это означает другое: что работа по перемещению заряда из точки (1) в точку (2) не зависит от пути перемещения.

Это, может быть, не очень очевидно. Вот я перешёл по некоторому пути из (1) в (2), поле совершило некоторую работу, кстати, эта работа положительна. Положу рельсы из точки (1) в точку (2). Поставлю на них вагончик от игрушечной железной дороги, помещу в вагончик заряд, и этот вагончик поедет, (избыток кинетической энергии перейдёт во внутреннюю). В точке (2) перевожу стрелки и пускаю вагончик по другому пути. Так вагончик будет ездить, к нему можно приделать вертушку... но известно, что циркуляция ноль, и построить вечного двигателя нельзя.

А теперь мы имеем такой математический результат: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r})$. Электростатическое поле – это градиентное поле. Эта скалярная функция $\varphi(\vec{r})$, градиентом которой является напряжённость электрического поля, называется *потенциалом* электрического поля.

Не всякое векторное поле можно получить как градиент потенциала. Электростатическое поле представляется одной скалярной функцией координат, а не тремя, как можно было бы думать по его векторному характеру. Задать одну функцию координат – и получим картину электрического поля.

Какой физический смысл этого скалярного поля?

$$A_{12} = \oint_{\ell} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\ell} q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \cdot \oint_{\ell} \left(-\vec{\nabla} \varphi \right) \cdot d\vec{\ell} \quad (*)$$

А теперь займёмся тем, что у нас стоит под интегралом. $d\vec{\ell}$, вектор $d\vec{\ell}$ – это есть:

$$d\vec{\ell} = \vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz, \quad \text{а} \quad \text{вся} \quad \text{подынтегральная} \quad \text{конструкция}$$

$$d\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \varphi = \left(\vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz \right) \cdot \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot dz = d\varphi \quad \text{есть} \quad \text{пол-}$$

ный дифференциал.

$$\text{Тогда, возвращаясь к формуле (*), мы пишем: } A_{12} = -q \cdot \oint_{\ell} d\vec{\ell} \cdot \vec{\nabla} \varphi = -q \cdot \oint_{\ell} d\varphi = q \cdot \left(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) \right)$$

Мы придём из точки (1) в точку (2), суммируя изменение потенциала. Мораль такая: вот у нас начальная точка $\vec{r}_1$, заряд переносим в точку $\vec{r}_2$, здесь значение потенциала $\varphi(\vec{r}_2)$, и работа равна $A_{12} = q \cdot \left(\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) \right)$. Работа по перемещению заряда из одной точки в другую равна величине заряда, умноженной на разность потенциалов.

Теперь мы имеем два описания электростатического поля. Либо мы задаём напряжённость $\vec{E}$, либо мы задаём в каждой точке потенциал φ . Слова «разность потенциалов» вы должны пони-

мать буквально – это разность. Вот синоним разности потенциалов, который употребляется в электротехнике, - напряжение. Это означает, что многие из вас склонные употреблять слова «напряжение в цепи» не знали их значения. Это синоним разности потенциалов.

Что означают слова, что напряжение городской сети 220 вольт? Вот есть две дырки (разность потенциалов между дырками 220V), если вы вырвете заряд из одной и будете с ним ходить, а потом вернёте его в другую дырку, то работа поля будет равна $q \cdot 220 \text{ V}$. Нагляднее пример с аккумулятором: вы взяли металлический шарик с клеммы аккумулятора, положили его в карман, ходили где-то с ним и потом приложили его ко второй клемме, то работа будет такая: $q \cdot 12 \text{ V}$.

3

Там, где у нас было напряжение и разность потенциалов, добавьте такую формулу:

$$\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = U_{12} = \int_{\ell_{12}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}.$$

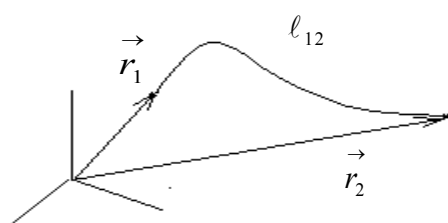


рис.3.1

Вот точка $\vec{r}_1$, вот точка $\vec{r}_2$, эта кривая ℓ_{12} , и смысл такой: вот эта формула – универсальный железный рецепт для нахождения разности потенциалов. Если вы когда-нибудь сталкиваетесь с требованием или потребностью найти разность потенциалов между двумя точками, значит, рука должна automatica-

тически писать эту формулу, а когда мы её напишем, потом можно думать. Слова «разность потенциалов» должны просто рефлексивно вызывать вот эту формулу.

О чём речь? В чём рецепт? Если вам надо найти разность потенциалов между одной точкой и другой, когда напряжённость поля во всём пространстве задана (вектор напряжённости поля), рецепт: соедините точку 1 с точкой 2 кривой ℓ_{12} и вычислите вот такой интеграл $\int_{\ell_{12}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. Результат не зависит от выбора пути, ну, и поэтому его можно всегда выбирать наиболее разумным способом.

Ну, к примеру, что значит **разумная выборка**? Вот допустим у вас силовые линии поля вот такие радиальные кривые:

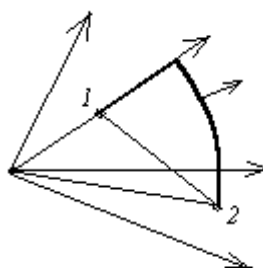


рис.3.2

И вам надо найти потенциал вот точка 1 ну, а, допустим, вот точка 2. Как выбрать кривую, идущую из 1 в 2? Первая мысль, конечно, взять её вот так: провести по линейке, по ней вычислять. Мысль, конечно, быстрая, но не очень правильная, потому что во всех точках этой кривой вектор переменный и направлен ещё под углом к прямой, и угол ещё меняется – взять интеграл сложно. Зато, через точку 2 проведёте сферу и путь такой: вдоль радиуса – раз, и потом вот по этой дуге – два. Вот разумный выбор кривой. Почему? Потому что вот на этой ветке вектор $\vec{E}$ всюду параллелен прямой, интеграл немедленно сводится просто к обыкновенному интегралу, а вот на этой ветке вектор $\vec{E}$ всюду перпендикулярен кривой, и она никакого вклада не делает. Вот разумный выбор кривой для нахождения разности потенциалов.

Ну, это в качестве примера. Если представлять себе конкретный вид поля, то такая кривая легко находится, учитывая, что у вас поля произвольной конфигурации, сложной, не будут попадаться, ну, вот здесь у нас в процессе занятия электродинамикой. Ну, конечно, если задано какое-нибудь такое, очень произвольное, поле, то там нет возможности выбирать кривую специальным образом, ну и тогда надо там линейку приложить, но это математическая проблема, можно посчитать. Так, ладно, всё. Следующий пункт.

Поля, создаваемые распределениями зарядов с хорошей симметрией

Ну и сразу такое определение: при достаточно хорошей симметрии напряжённость поля может быть найдена из уравнения $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV$. Значит, при достаточно хорошей симметрии поле всегда может быть найдено вот из этой интегральной теоремы. Ну, у нас это первое уравнение Максвелла. А теперь частные случаи.

1) Центральная (сферическая) симметрия. Пусть плотность заряда $\rho(\vec{r})$ есть $\rho(|\vec{r}|)$.

Значит, плотность, которая, вообще, функция координат точки $\vec{r}$, зависит только от $|\vec{r}|$, то есть только от расстояния до начала координат, это означает, что начало координат – центр симметрии.

Вот эта формулка $\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|)$ означает, что плотность на любой сфере радиуса r – константа, ка-

кая-то там плотность, ну, и отличная от нуля, на любой сфере она постоянна. Это означает, что распределение обладает сферической симметрией, и создаваемое им поле будет также обладать сфери-

ческой симметрией. Отсюда следует, что $\varphi(\vec{r})$ (потенциал как функция точки) это есть $\varphi(|\vec{r}|)$. От-

сюда эквипотенциальные поверхности – сферы с центром в начале координат, то есть вот на лю-

бой сфере потенциал – константа. Отсюда далее следует, что силовые линии поля, которые являются всегда ортогональными к эквипотенциальным поверхностям, силовые линии поля – вот такие радиальные лучи:

Конструкция электрического поля может быть только такая. Здесь никакой специфики электричества не было, все эти выкладки только из соображений симметрии. Любое векторное поле такой структуры, какая бы физическая природа у него ни была. Разрабатывая симметрии очень часто позволяет делать выводы конкретному предмету разговора.

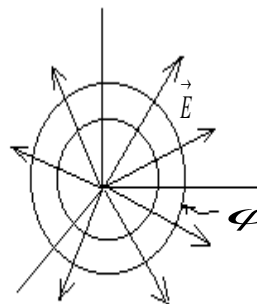


рис. 3.3

А теперь заметьте, что потенциал φ – константа относительно к

$\varphi(\vec{r}) = \varphi(|\vec{r}|)$, отсюда далее следует, что напряжён-

любой сфере $\vec{E}(\vec{r})$ может быть представлен так: $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. Вот это $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, радиус-вектор, делён-

ный на собственный модуль, есть единичный вектор $\vec{n}$ в направлении радиус-вектора. Всё. Пишем

далее эту формулу $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho(\vec{r}) \cdot dV$. В качестве замкнутой поверхности, которая фигу-

рирует в интеграле (поток вычисляется по замкнутой поверхности), выбираем сферу $S: r = const$.

Мы её (поверхность) можем брать любой, равенство от этого не зависит, но удобно взять $r = const$.

Пишем: $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_{r=const} E(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oint_{r=const} E(r) \cdot dS$. Это равенство вследствие того, что $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$, $\vec{n}$ -

единичный вектор в направлении радиус-вектора (это вектор нормали к сфере, но нормаль к сфере в данной точке совпадает по направлению с радиус-вектором данной точки, эти векторы параллель-

ны), а проекция радиус-вектора на самого себя – это его модуль, конечно, r . Дальше, $\vec{E}(\vec{r})$ во всех

точках сферы одно и тоже, выносим за знак интеграла: $E(r) \cdot \oint_{r=const} dS = E(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$ (вот это всё была

математика, она к физике никакого отношения пока не имела, а физика – это следующее равенство), эта величина должна равняться интегралу от плотности заряда по объёму сферы, по которой вычисляется поток (интеграл от плотности по объёму это есть полный заряд внутри сферы):

$E(r) \cdot \oint_{r=const} dS = E(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot q(r)$, где $q(r)$ – заряд внутри сферы радиуса r . И это утверждение

верно для сферы любого радиуса. Отсюда вывод – при центральной симметрии напряжённость поля во всех точках сферы радиуса r равна:

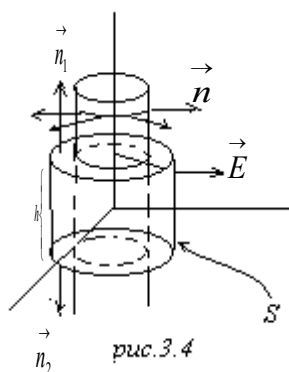
$$\vec{E} = \frac{q(r)}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к сфере. Эта формула, одна единственная, добывает все задачи центральной симметрии. Проблема одна – найти заряд, который находится внутри данной сферы, ну, это не очень тяжёлая проблема.

Можем немножко продолжить это дело. Вследствие того, что на любой сфере $r = const$, интеграл по объёму можно свести, в принципе, к однократному интегралу, интегрируя по шаровым

слоям, ну, напишу тут без подробных комментариев $q(r) = \int_{\text{шар}} \rho(r) \cdot dV = \int_0^r \rho(r') \cdot \underbrace{4\pi \cdot r'^2 \cdot dr'}_{dV}$. Вот это

$4\pi \cdot r'^2 \cdot dr'$ объём шарового слоя радиуса r' толщиной dr' . Почему я тут штрихи поставил, понятно. r стоит в верхнем пределе интеграла, ну тогда, чтоб не путать переменную интегрирования с верхним пределом, там я вместо r пишу r' . Значит, если вот эта функция $\rho(r)$ предъявлена, то такой интеграл вычисляется. Так, всё, с центральной симметрией конец. Второй случай.



2) Цилиндрическая симметрия. Вводим цилиндрические координаты (r, φ, z) , (x, y, z) переходит в (r, φ, z) . Вот у нас в цилиндрических координатах плотность $\rho(r, \varphi, z) = \rho(r)$ есть только функция от r , то есть не зависит от φ и не зависит от z . Это означает, что

имеется бесконечный цилиндр, и на поверхности цилиндра любого радиуса плотность заряда постоянна, и всё это дело продолжается до

бесконечности по z , вот такая ситуация. Сразу, конечно ясно, что физически это не реализуется, но в качестве некоторой идеализации это разумно. Напишем снова $\rho(r, \varphi, z) = \rho(r)$, значит, эквипотенциальные поверхности – это цилиндры с осью, совпадающей с осью симметрии, то есть с осью z . А силовые линии лежат в плоскостях ортогональных оси z . Так. В качестве замкнутой поверхности выбираем цилиндрическую поверхность радиуса r и высотой h , цилиндрическая поверхность, закрытая двумя крышками для того, чтобы она была замкнутой. Нормаль всегда берётся наружу. Из

соображений симметрии ясно $\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \cdot \vec{n}$ (напряжённость поля в любой точке цилиндрической поверхности направлена вдоль вектора $\vec{n}$, а величина зависит только от расстояния до оси симметрии). Поскольку у нас поверхность теперь задана в виде нескольких кусков, интеграл представится

как сумма интегралов по этим кускам: $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{\text{бок-пов-сти}} + \int_{\text{крышка1}} + \int_{\text{крышка2}}$.

Интеграл по крышкам равен нулю, потому скользит по крышкам, скалярное произведение с ноль.

что вектор $\vec{E}(\vec{r})$ нормалью –



рис. 3.5

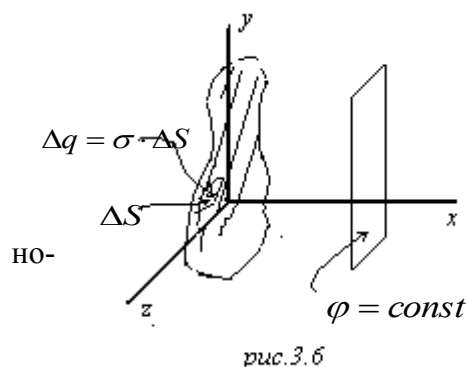
$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{\text{боклов-сти}} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{\text{боклов-сти}} E(r) \cdot \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{n}}_1 \cdot dS = E(r) \cdot \int_{\text{боклов-сти}} dS = E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot h = = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \oint_V \rho \cdot dV.$$

Внутренняя начинка этого цилиндра V , это интеграл по V . $\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \oint_V \rho \cdot dV = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \delta(r) \cdot h$, где $\delta(r)$ - это заряд на единицу длины цилиндра радиуса r , то есть это заряд лепёшки радиуса r единичной толщины. Отсюда мы получаем результат:

$$E(r) = \frac{\delta(r)}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

напряжённость поля во всех точках цилиндрической поверхности радиуса r .

Эта формула убивает все проблемы, связанные с цилиндрической симметрией. И, наконец, третий пункт.

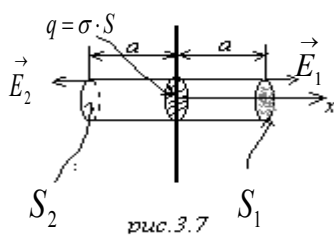


3) Поле, создаваемое равномерно заряженной плоскостью. Вот мы имеем плоскость YZ , заряженную до бесконечности. Эта плоскость заряжена с постоянной плотностью σ . σ

называется *поверхностная плотность заряда*. Если взять элемент поверхности ΔS , то в нём будет заряд $\Delta q = \sigma \cdot \Delta S$. Значит, симметрия такова, что при сдвигах вдоль y и z ничего не меняется, это означает, что производные по y и z от чего угодно должны равняться нулю: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. Это озна-

чает, что потенциал есть функция x только: $\phi(x, y, z) = \phi(x)$. Вот такое следствие. Это означает, что любая плоскость ортогональная оси x является эквипотенциальной поверхностью. На любой такой плоскости $\phi = \text{const}$. Силовые линии ортогональны этим плоскостям, значит силовые линии – прямые параллельные оси x . Из соображений симметрии следует, что, если здесь они идут вправо от плоскости, то слева они должны идти влево от плоскости (ожидается, что имеется зеркальная симметрия).

Вопрос, на самом деле, с зеркальной симметрией не такой простой. Вот ещё до не очень давнего времени, ещё на моей памяти, считалось, что зеркальная симметрия, конечно, имеет место в природе, что нет отличия между левым и правым. Но обнаружили в 60-х гг., что на самом деле такая симметрия не выполняется, природа отличает правое от левого. Будет ещё повод об этом поговорить. Но здесь это для нас выполняется.



Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор вдоль оси x . В качестве замкнутой поверхности берём цилиндр, прорезающий плоскость с двумя крышками. Напряжённости поля показаны на рисунке.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{\text{боклов-сти}} = \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot dS + \oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot dS = E_1 \cdot S_1 + E_2 \cdot S_2$$

Интеграл по боковой поверхности ноль, потому что силовые линии скользят по боковой поверхности. Но как площади оснований цилиндра $S_1 = S_2 = S$. Если крышки взяты на одинаковых расстояниях от плоскости, то опять вследствие симметрии $E_1 = E_2 = E(a)$ - функция расстояния до плоскости, тогда мы напишем так:

$$E_1 \cdot S_1 + E_2 \cdot S_2 = 2E(a) \cdot S. \text{ Тогда мы имеем: } 2E(a) \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \underbrace{\int_{\sigma \cdot S} \rho \cdot dV}_{\sigma \cdot S}, \text{ а это заряд, который сидит}$$

внутри нашей поверхности.

Отсюда получается: $E(a) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Что мы видим, что длина цилиндра, ну, расстояние от

крышек до плоскости, выпало из формулы, то есть на любом расстоянии от плоскости напряжённость поля одна и та же. Значит поле однородное. Напишем окончательно:

$$\vec{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{i}, & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{i}, & x < 0 \end{cases}$$

Эта формула автоматически учитывает и знак заряда: если. Вот эта формула даёт исчерпывающее описание поля заряженной плоскости. Если там не плоскость, а площадь конечной толщины, то поле надо разбить на тонкие пластины и вычислять.

Вот заметьте, для точечного заряда напряжённость поля убывает с расстоянием как $\frac{1}{r^2}$, для цилиндра – как $\frac{1}{r}$ и для плоскости вообще не убывает.

Два последние случая практически нереализуемые. Тогда какой смысл в этих формулах? Такой: например, эта формула справедлива вблизи середины плоского заряженного куска. Строго такая формула (однородное поле заполняет всё пространство) ни в какой физической ситуации не реализуется.

Поле, создаваемое произвольным распределением заряда.

Поле точечного заряда.

Пусть имеется один точечный заряд q . Это частный случай сферической симметрии. У нас есть формула: $\vec{E} = \frac{q(r)}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{n}$, где $q(r)$ – заряд внутри сферы радиуса r , но если заряд точки, то

для точечного заряда $q(r) = q$, при любом r . Понятно почему, на любом радиусе внутри сферы точка остаётся точкой. И для точечного заряда

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{n} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}. \text{ Это поле точечного за-}$$

$$\text{ряда. Потенциал поля точечного заряда: } \varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}.$$

Поле системы точечных зарядов. Принцип суперпозиции.

Пусть мы имеем систему зарядов $q_1, q_2, \dots$, тогда напряжённость поля, создаваемая системой точечных зарядов, в любой точке равна сумме напряжённостей, создаваемых каждым из зарядов. Я мог бы сразу написать

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_1 \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \right) + q_2 \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \right) + \dots, \text{ если}$$

тали формулы. Учитесь читать формулы повество-

умножьте на вектор $\vec{r} - \vec{r}_1$, и разделите на модуль

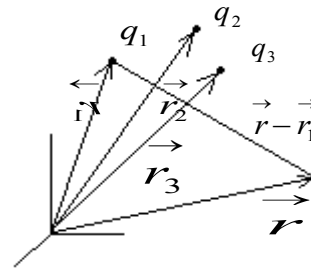


рис.3.8

бы вы свободно читательство. Заряд q_1 этого вектора, а что

такое модуль вектора это длина. Эта вся штука даёт вектор, направленный вдоль вектора $\vec{r} - \vec{r}_1$.

То, что поля складываются это совершенно не очевидно. Это следствие линейности уравнений Максвелла. Уравнения линейны по $\vec{E}$. Это означает, что, если вы нашли два решения, то они складываются. Бывают ли поля, для которых не выполняется принцип суперпозиции? Бывают. Гравитационное поле не в ньютоновской теории, а в правильной, не удовлетворяет принципу суперпозиции. Земля создаёт в некоторой точке определённую напряжённость. Луна тоже. Поставили Землю и Луну, напряжённость в точке не равна сумме напряжённостей. Уравнение поля не линейно, физически это означает, что гравитационное поле является само себе источником. Так. Всё, конец.

4

В прошлый раз мы остановились на обсуждении поля, создаваемого системой зарядов. И мы видели, что поля, создаваемые каждым зарядом в отдельности в данной точке, складываются. При этом я подчеркнул, что это не самая очевидная вещь, - это свойство электромагнитного взаимодействия. Физически оно связано с тем, что поле само для себя не является источником, формально это следствие того, что уравнения линейны. Есть примеры физических полей, которые сами для себя являются источником. То есть, если в каком-то объёме это поле есть, так оно создаёт само поле в окружающем пространстве, формально это проявляется в том, что уравнения не линейны. Я там

написал формулу для напряжённости $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_i \frac{q_i \cdot \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right)}$, напишем ещё формулу для потенциала.

Потенциал системы точечных зарядов.

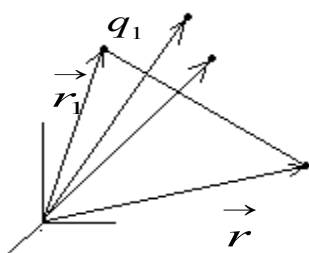


рис. 4.1

Имеется система зарядов q_1, q_2 и т.д. И тогда для некоторой точки $\vec{r}$ мы напишем такую формулу:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}.$$

Значит, вот такой рецепт для потенциала. Напряжённость равна сумме напряжённостей, потенциал равен сумме потенциалов.

Замечание. Практически всегда удобнее вычислять потенциал, а не напряжённость, по понятным причинам: напряжённость – это вектор, и векторы надо складывать по правилу сложения векторов, ну, правилу параллелограмма, это занятие, конечно, более скучное, чем складывать числа, потенциал – это скалярная величина. Поэтому, практически всегда, когда мы имеем достаточно плотное распределение заряда, ищем потенциал, напряжённость поля потом находим по формуле:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial \vec{r}}.^1)$$

Поле, создаваемое произвольным ограниченным распределением заряда¹⁾.

Ну, что тут означает эпитет «ограниченный»? То, что заряд локализован в конечной области пространства, то есть мы можем охватить этот заряд замкнутой поверхностью такой, что вне этой поверхности заряда нет. Понятно, что с точки зрения физики это не ограничение, ну, и, действительно, мы имеем дело практически всегда только с ограниченными распределениями, нет такой ситуации, чтобы заряд был размазан по всей вселенной, он концентрируется в определённых областях.

Вот такая проблема: область занята зарядом, по этой области размазан электрический заряд, мы

должны полностью охарактеризовать этот заряд и найти создаваемое им поле. Что значит полностью охарактеризовать распределение заряда? Возьмём элемент объёма dV' , положение этого элемента задаётся

радиус-вектором $\vec{r}'$, в этом элементе сидит заряд $dq = \rho(\vec{r}') \cdot dV'$. Для того, чтобы найти поле, нам нужно знать заряд каждого элемента объёма, это означает, что нам нужно знать плотность заряда в каждой

точке. Вот эта функция $\rho = \rho(\vec{r}')$ предъявлена, она для нашей цели исчерпывающе характеризует распределение заряда, больше ничего знать не надо.

Пусть нас интересует поле в точке $\vec{r}$. А дальше принцип суперпозиции. Мы можем считать заряд dq , который сидит в этом элементе объёма, точечным²⁾. Мы можем написать сразу выражение для потенциала, который создаёт этот элемент в этой точке:

$$d\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \text{ это потенциал, создаваемый элементом в точке } \vec{r}. \text{ А теперь понятно, что}$$

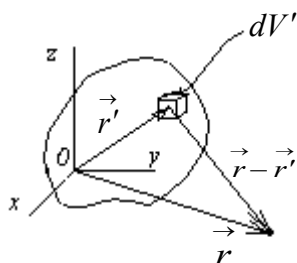


рис. 4.2

¹⁾ Здесь я ввёл новый математический символ $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ – частная производная, но чтоб не было недоразумений:

$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} = i \cdot \frac{\partial}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial}{\partial y} + k \cdot \frac{\partial}{\partial z}$. Удобнее писать $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ вместо $\vec{\nabla}$, потому что оно прямо содержит в себе указание на

то, что нужно делать.

Между прочим, вот, в порядке упражнения полезно было бы для вас вычислить $\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$, и убе-

диться, что вы получите предыдущую формулу для напряжённости поля. Это, вот, для самопроверки (не в физике, а в математической квалификации), если вы её получите – это признак того, что вы владеете соответствующим в математике, если нет, – тогда пойдите к своему преподавателю мат. анализа, и пусть он вас там или научит, или накажет.

¹⁾ Поле, создаваемое заданным распределением заряда.

²⁾ Любое распределение заряда, рассматриваемое из бесконечности, ну, или издалека, оно всегда ведёт себя как точечный заряд.

полный потенциал в этой точке мы найдём суммированием по всем элементам. Ну, и напомним эту

сумму как интеграл:
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad 3)$$

Этот рецепт срабатывает железно для любого предъявленного распределения заряда, никаких проблем, кроме вычисления интеграла, нет, но компьютер такую сумму посчитает. Напряжённость поля находится: $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}}$. Когда интеграл вычислен, то напряжённость находится просто дифференцированием.

Поле на большом расстоянии от ограниченного распределения заряда.

Заодно познакомимся со стандартным приёмом получения приближённых решений. Проблема такая опять. Имеем распределение заряда¹⁾, мы теперь попробуем получить более точную формулу, не так радикально, а, вот, если уйти достаточно далеко, но ещё, когда это распределение не выглядит совсем точечным, хотим получить более точное приближение. Пусть у нас L – характерный линейный размер системы, будем считать, что $|\vec{r}| \gg L$, это можно оформить иначе:

$$\forall \vec{r}' \quad \frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} \ll 1, \quad \vec{r}' \text{ это в пределах распределения, } \frac{|\vec{r}'|}{|\vec{r}|} - \text{это малая величина.}$$

А теперь вот чем займёмся: $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}.$

З Стандартный приём: когда у вас имеется сумма, в которой одно слагаемое большое, а другие маленькие, то всегда есть смысл вынести большое слагаемое за скобку и получить в сумме единицу плюс какие-то маленькие добавки, которая разлагается в ряд.

Пишем дальше: $\sqrt{r^2 \cdot \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)} \approx r \cdot \sqrt{1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}} \approx r \cdot \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}\right).$ Мы избавились от

корня, ну, потому что $(1+x)^n = 1 + n \cdot x + \dots$. А теперь, добывши этот результат, займёмся формулой для потенциала:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &\cong \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{r \cdot \left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}\right)} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{r} \cdot \left(1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2}\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV'}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \cdot \vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} \cdot dV' \quad 3) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \overbrace{\int_V \rho(\vec{r}') \cdot dV'}^{q - \text{это полный заряд}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r} \cdot \overbrace{\int_V \rho(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \cdot dV'}^{\vec{p} - \text{дипольный момент}}. \end{aligned}$$

Тогда мы получаем такую формулу для потенциала:

³⁾ Интегрирование ведётся по $\vec{r}'$, когда по $\vec{r}'$ интегрирование будет проведено, то эта переменная вылетает вообще, мы получаем число, это $\vec{r}'$ сидит здесь как параметр, то есть значение интеграла зависит от $\vec{r}$, от положения точки, в которой ищется потенциал.

¹⁾ Очевидная вещь, что, если мы отойдём достаточно далеко от этого распределения, то какое станет поле? Как от точечного заряда. Значит, на большом расстоянии можно ответ писать сразу: потенциал как от точечного заряда.

²⁾ Это пока точная формула, тут стоит малая величина и квадрат малой величины, вот, если б мы выкинули их, мы получили бы поле точечного заряда, мы же выкинем квадрат малой величины и сделаем формулу более аккуратной.

³⁾ Интегрирование ведётся по штрихованной переменной, по координатам элемента объёма, относительно этого интегрирования $r = const$.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots$$

Если бы мы произвели разложение поля в точке, вот я там выкинул $\left(\frac{r'}{r}\right)^2$, если ещё взять следующие поправки, то тут пошло бы слагаемое, которое характеризовало бы не дипольный момент, а, так называемый, квадрупольный момент и дальше моменты более высоких порядков. Вот сама такая процедура называется разложением по мультиполям. Мультиполь нулевого порядка – это просто заряд, дальше, мультиполь первого порядка – это дипольный момент, дальше там квадрупольный момент. Дипольный момент задаётся вектором, квадрупольный бы момент задавался квадратной матрицей из девяти элементов, но вследствие симметрии там было бы только шесть отличных от нуля и так далее.

Это мы нашли потенциал, ну, а теперь поупражняемся в нахождении напряжённости.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) & - \text{это даст напряжённость поля точечного заряда, вычислим } \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right). \\ \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \\ &= \vec{i} \left[\vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \vec{p} + \dots^1 \right] + \vec{j} \left[\vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \dots \right] + \vec{k} \left[\vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \dots \right] = \\ &= \vec{i} \left(\vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right) + \vec{j} \left(\vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right) + \vec{k} \left(\vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \right) = \dots = \frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = \\ &= \frac{\vec{p}}{r^3} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}^2 = \frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5}. \end{aligned}$$

Тогда для напряжённости поля получаем:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{p} \right) + \dots$$

Поле диполя.

¹⁾ $\vec{p}$ - постоянный вектор, характеризующий распределение заряда, постоянная величина.

²⁾ Есть общий рецепт: $\vec{\nabla} f(r) = \frac{df}{dr} \cdot \vec{\nabla} r$.

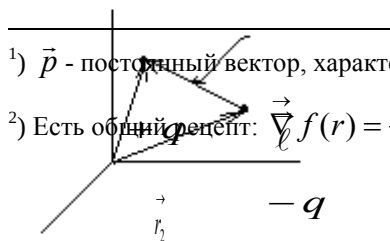


рис. 4.3

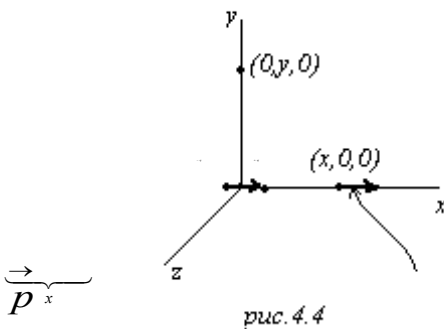
Диполем называется такое распределение заряда, для которого полный заряд равен нулю, однако дипольный момент не равен нулю: $q = 0$, $\vec{p} \neq 0$. Легко предъявить такое распределение. Пусть мы имеем два одинаковых точечных заряда, но противоположных знаков. $q = \sum q_i = q - q = 0$. Дипольный момент у нас был определён: $\vec{p} = \int_V \rho(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \cdot dV'$. Это что означает?

Заряд в маленьком элементе объёма dq умножается на радиус-вектор и суммируется по всем зарядам, если записать это дело через сумму, то это будет так: $\sum q_i \vec{r}_i'$. Вот этот интеграл, если представить всё это как совокупность точечных зарядов, изображается вот такой суммой, каждый заряд умножается на свой радиус-вектор и всё складывается.

Между прочим, в механике, если мы брали бы массу частицы, умножали на радиус-вектор и суммировали, чтобы мы получили? Мы получили бы массу системы умноженную на радиус-вектор центра масс. Если начало координат выбрать в центре масс системы, то «дипольный момент – распределение масс» всегда равнялся бы нулю. Электрический заряд имеет разные знаки, здесь ситуация другая.

Значит, дипольный момент для нашей системы равняется: $\vec{p} = q\vec{r}_1 - q\vec{r}_2 = q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = q\vec{\ell}$. Дипольный момент двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов – это вектор, идущий из отрицательного заряда в положительный, умноженный на заряд.

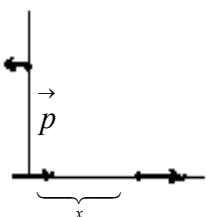
Теперь найдём электрическое поле. Пусть дипольный момент, вектор $\vec{p}$, в начале координат ориентирован вдоль оси OX , $\vec{p} = p\vec{i}$. Вычислим поле в точке $(x, 0, 0)$.



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n}) - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \text{ где } \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда
$$\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{3\vec{i}(p\vec{i} \cdot \vec{i}) - p\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 x^3} = \frac{2p\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 x^3}.$$

Мораль такая: на оси OX напряжённость поля убывает как $\frac{1}{x^3}$, то есть она обратно пропорциональна кубу расстояния, от точечного заряда – обратно пропорциональна квадрату расстояния. Направление вектора $\vec{E}$ в точке $(x, 0, 0)$ задаётся направлением вектора $\vec{i}$, то есть напряжённость направлен вдоль оси OX .



Теперь возьмём точку $(0, y, 0)$.
$$\vec{E}(0, y, 0) = \frac{3\vec{j}(p\vec{i} \cdot \vec{j}) - p\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 y^3} = -\frac{p\vec{i}}{4\pi\epsilon_0 y^3}.$$

Это что означает? Что для этого диполя вектор $\vec{E}$ в точке $(x, 0, 0)$ такой, а здесь в точке $(0, y, 0)$ вектор $-\vec{E}$ и по величине в два раза меньше, на том же самом расстоянии, $x=y$.

Электрический диполь, ориентированный таким образом, создаёт поле с такими силовыми линиями:

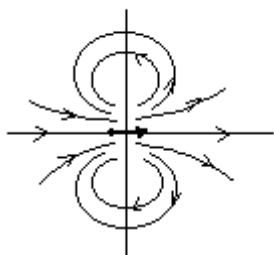


рис. 4.6

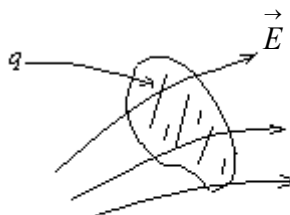
Вот такую структуру имеет поле диполя.

Многие молекулы обладают дипольным моментом, и с этим связаны свойства вещества, которые мы рассмотрим в следующий раз.

5

СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА ОГРАНИЧЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Проблема такая: имеем поле, имеем какой-то заряд, размазанный по некоторой области, локализованный. Нас интересует, какая сила будет действовать на заряженное тело, ну, или в конечном итоге, как оно будет двигаться, находясь во внешнем электрическом поле.



то заряд, размазанный по некоторой области, локализованный. Нас интересует, какая сила будет действовать на заряженное тело, ну, или в конечном итоге, как оно будет двигаться, находясь во внешнем электрическом поле.

Вы должны, конечно, представлять, что, если это ограниченное распределение есть точечный заряд, то вы знаете, какая сила действует на него (мы видели в механике, что, если сила представляется как градиент от некоторой скалярной функции, то эта функция интерпретируется как потенциальная энергия), при этом имеет место закон сохранения энергии $\frac{m \cdot v^2}{2} + U(\vec{r}) = \text{const}$, при этом заряд движется так: $\frac{m \cdot v^2}{2} + q \cdot \phi(\vec{r}) = E = \text{const}$, это называется полной энергией (сумма кинетической и потенциальной энергии). Это для точечного заряда.

рис. 5.1

если это ограниченное распределение, то вы знаете, какая сила действует на него (мы видели в механике, что, если сила представляется как градиент от некоторой скалярной функции, то эта функция интерпретируется как потенциальная энергия), при этом имеет место закон сохранения энергии $\frac{m \cdot v^2}{2} + U(\vec{r}) = \text{const}$, при этом заряд движется так: $\frac{m \cdot v^2}{2} + q \cdot \phi(\vec{r}) = E = \text{const}$, это называется полной энергией (сумма кинетической и потенциальной энергии). Это для точечного заряда.

Ну, в общем-то, понятно, как это можно сделать, надо разбить распределение на совокупность точечных зарядов, находить силы, действующие на каждый из этих зарядов, и суммировать потом все силы по всему распределению. Вот такая программа. Ну, как она реализуется, мы сейчас увидим.

На точечный заряд действует сила $\vec{F} = q \cdot \vec{E} = -q \cdot \vec{\nabla} \cdot \phi = -\vec{\nabla} \cdot \left(q \cdot \phi(\vec{r}) \right) = -\vec{\nabla} \cdot U(\vec{r})$, где

$U(\vec{r}) = q \cdot \phi(\vec{r})$, оказывается, потенциальной энергией заряда в электрическом поле (мы видели в механике, что, если сила представляется как градиент от некоторой скалярной функции, то эта функция интерпретируется как потенциальная энергия), при этом имеет место закон сохранения энергии $\frac{m \cdot v^2}{2} + U(\vec{r}) = \text{const}$, при этом заряд движется так: $\frac{m \cdot v^2}{2} + q \cdot \phi(\vec{r}) = E = \text{const}$, это называется полной энергией (сумма кинетической и потенциальной энергии). Это для точечного заряда.

¹⁾ То есть мы можем охватить этот заряд замкнутой поверхностью такой, что вне этой поверхности заряда нет.

²⁾ А если кто не знает, тогда пусть себя высечет, потому что должен знать.

Потенциальная энергия ограниченного распределения заряда во внешнем поле.

Пусть имеется распределение заряда, разобьём заряд на малые элементы объёма dV , в этом элементе объёма заряд $dq = \rho(\vec{r}) \cdot dV$. $\underbrace{\rho(\vec{r}) \cdot dV}_{dq} \cdot \varphi(\vec{r})$ – это потенциальная энергия заряда в элементе объёма dV , энергия элементарного заряда. Тогда вся потенциальная энергия этого распределения будет равна $U = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}) \cdot dV$.

Это точная формула. Теперь мы займёмся получением приближённой формулы.

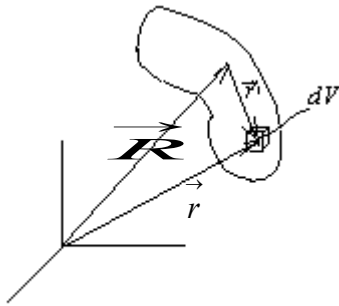


рис.5.2

Выберем некоторую точку внутри распределения, радиус-вектор этой точки будет $\vec{R}$, радиус-вектор $\vec{r}'$ – это вектор, идущий из выбранной точки в этот элемент объёма, $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$. Тогда потенциал в точке $\vec{r}$ – это $\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{R} + \vec{r}')^1) = \varphi(\vec{R}) + \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r})|_{\vec{R}} + \dots$. Пока написано разложение с точностью до первых производных, дальше там пойдут слагаемые со вторыми производными и так далее, это факт математический.

В основе этого вычисления лежит следующее предположение: будем считать, что потенциал мало меняется в пределах распределения, то есть распределение не слишком велико. Это означает, что второе слагаемое много меньше первого, то есть значение потенциала в некоторой точке внутри такое-то, а добавка к потенциалу, когда мы доходим до края распределения, мала, поэтому далее слагаемые мы выкидываем вообще. Подставим теперь это дело

в формулу для потенциальной энергии:

$$U = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot \varphi(\vec{r}) \cdot dV = \int_V \rho(\vec{r}') \left[\varphi(\vec{R}) + \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \varphi|_{\vec{R}} \right] \cdot dV' = \int_V \rho(\vec{r}') \cdot \varphi(\vec{R}) \cdot dV' + \int_V \rho(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \cdot \vec{\nabla} \varphi|_{\vec{R}} \cdot dV' =$$

$$= \varphi(\vec{R}) \cdot \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}') \cdot dV'}_q + \underbrace{\vec{\nabla} \varphi|_{\vec{R}}}_{-\vec{E}(\vec{R})} \cdot \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}') \cdot \vec{r}' \cdot dV'}_{\vec{p}}.$$

Мы добыли вот такую симпатичную формулу: $U = q \cdot \varphi(\vec{R}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{R}) + \dots$, где $\vec{R}$ – радиус-вектор, идущий в некоторую точку внутри распределения, это опять разложение по мультиполям.

Что это физически означает? Главный вклад в потенциальную энергию – полный заряд на значение потенциала где-то внутри распределения, поправочное слагаемое, учитывающее дипольный момент распределения (дипольный момент характеризует как там размещены друг относительно друга отрицательные и положительные заряды), и др. характеристики, учитывающие моменты более высоких порядков.

Чтобы дальше эта буква $\vec{R}$ не вводила в заблуждение, перепишем результат так:

$$U = q \cdot \varphi(\vec{r}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \dots$$

¹⁾ А дальше мы будем считать, что вектор $\vec{r}'$ достаточно мал, и эту скалярную функцию мы можем разложить

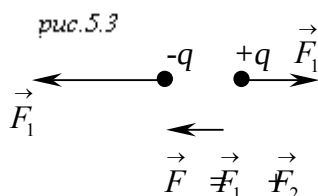
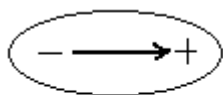
²⁾ Функцию плотности я переведу в функцию, зависящую от $\vec{r}'$, $\vec{r}'$ задаёт точку однозначно.

А теперь мы можем найти силу (сила – это градиент потенциальной энергии), пишем:
 $\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot U = -q \cdot \vec{\nabla} \cdot \varphi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \right) + \dots$ И окончательно получим такой результат:

$$\vec{F} = -q \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \right) + \dots$$

Сила, действующая на диполь во внешнем поле

Пусть $q=0$, но $\vec{p} \neq 0$. Тогда сила равняется $\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{p} \cdot \vec{E} \right)$. Где это в физике может проявиться? Очень многие тела электрически нейтральны, то есть заряда не имеют, но имеют отличный от нуля дипольный момент. Простейший объект такого рода – молекула. Молекула – это такое образование, у которого положительные и отрицательные заряды в сумме дают ноль, но не совпадают в пространстве. Такая система обладает дипольным моментом $\vec{p}$, на который действует сила $\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{p} \cdot \vec{E} \right)$.



Кстати, легко понять, почему возникает сила, действующая на диполь. Скажем, поле создаётся положительным зарядом, имеем диполь, систему, состоящую из отрицательного заряда $-q$ и положительного $+q$. Результирующая сила такая: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Если вы для такой ситуации примените формулу, то увидите, что она даст правильный результат.

Момент силы, действующей на диполь во внешнем поле

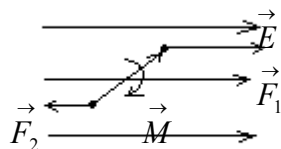


рис. 5.4

Пусть мы имеем однородное электрическое поле и диполь, который изобразим как два точечных заряда. На заряд $+q$ действует сила $\vec{F}_1$, на заряд $-q$ – сила $\vec{F}_2$. Если поле однородно, то эти силы в сумме дадут ноль, но момент не равен нулю. Две такие силы создают вращающий момент, вектор этого момента направлен перпендикулярно плоскости рисунка. На электрически диполь в однородном поле действует вот такой момент $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$, этот момент сил стремится развернуть диполь так, чтобы его дипольный момент стал параллелен вектору $\vec{E}$.

Это вот что означает: если поле диполь помещён в электрическое поле $\vec{E}$, как показано на рисунке 5.5, то бы диполь стал его дальше в момент будет поворачивать его так, что- параллельным $\vec{E}$, а сила будет втягивать электрическое поле.

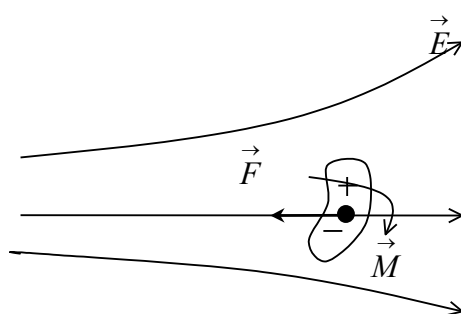


рис. 5.5

Теперь мы можем понять, как будет вести себя вещество в электростатическом поле.

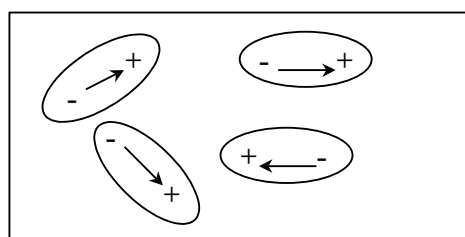
ВЕЩЕСТВО В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

С точки зрения электричества, вещество делится на проводники и диэлектрики¹⁾. *Проводники* – это тела, в которых имеются свободные носители заряда, то есть заряженные частицы, которые могут свободно перемещаться внутри этого тела (например, электроны в металле, ионы в жидкости или газе). *Диэлектрики* – это тела, в которых нет свободных носителей заряда, то есть нет заряженных частиц, которые могли бы перемещаться в пределах этого диэлектрика. Поведение этих тел в электрическом поле различно, и сейчас мы эти различия рассмотрим.

Диэлектрики в электрическом поле

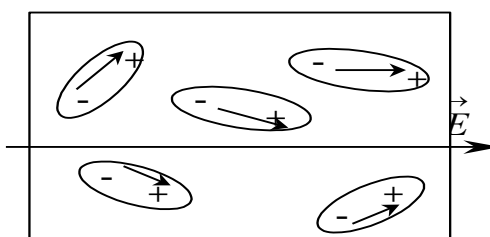
Диэлектрики – это тела, состоящие из нейтральных молекул. Молекулы бывают полярные (обладающие дипольным моментом) и неполярные (не обладающие дипольным моментом). *Диэлектрик, состоящий из полярных молекул, во внешнем поле поляризуется*, то есть приобретет дипольный момент за счёт преимущественной ориентации молекулярных диполей в направлении внешнего поля.

Вот имеем кусок диэлектрика, внешнее поле отсутствует. Дипольные моменты молекул ориентированы хаотически, и в среднем дипольный момент любого элемента объёма равен нулю (рис.5.6).



$$\vec{E}=0$$

рис.5.6



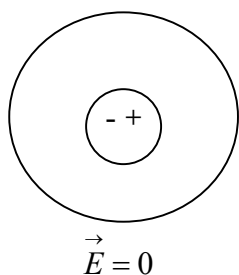
$$\vec{E} \neq 0$$

рис.5.7

Однако, если мы поместим внешнее электрическое поле, появится преимущественная ориентация, все эти дипольные моменты сорентируются примерно так, как показано на рисунке 5.7.

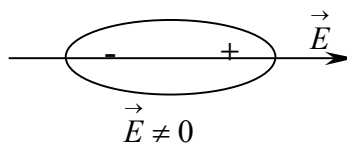
Они не смогут все построиться вдоль поля, потому что хаотическое тепловое движение разрушает структуру, но, по крайней мере, на фоне этого хаоса они будут все стремиться сорентироваться вдоль поля.

Диэлектрик, состоящий из неполярных молекул, также поляризуется, потому что эти молекулы приобретают дипольный момент во внешнем поле.



$$\vec{E}=0$$

рис.5.8. Это неполярная молекула



$$\vec{E} \neq 0$$

рис.5.9

¹⁾ Там (подробнее на другом месте) мы рассмотрим разделение, но здесь на проводники и диэлектрики. (и по группам параметров молекул заряды в ней совмещены).

$\vec{E} = 0$, однако, если мы внесём эту молекулу во внешнее электрическое поле, то внешнее поле растаскивает положительный и отрицательный заряды, и молекула приобретает дипольный момент.

Поляризация диэлектрика характеризуется вектором $\vec{P}$. Смысл этого вектора следующий: если мы возьмём элемент объёма dV , то дипольный момент этого объёма будет равен $d\vec{p} = \vec{P}(\vec{r})dV$. Значение дипольного момента малого объёма диэлектрика пропорционально объёму элемента, и коэффициентом стоит вектор $\vec{P}$, короче $\vec{P}$, – это плотность дипольного момента.

Теперь немного математики. У нас имеется фундаментальное уравнение (первое уравнение Максвелла, которое связывает электрическое поле с зарядом) $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$. Из этого интегрального закона следует дифференциальный такой: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$, это по теореме Остроградского-Гаусса.

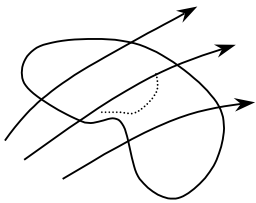


рис.5.10

Имеет место такая замечательная математическая теорема для произвольного векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ $\oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$.

Смысл этой теоремы: имеем векторное поле, имеем замкнутую поверхность, вычисляем вектор $\vec{A}$ в каждой точке поверхности, умножаем на нормаль, на площадь маленькой поверхности и суммируем, этот интеграл зависит, конечно, от поведения $\vec{A}$ на поверхности, мы получили число, теперь, векторное поле ведёт себя как-то внутри этой поверхности, в каждой точке внутри вычисляем эту самую дивергенцию, получим число, интегрируем по объёму, получим равенство. Поведение вектора на поверхности, оказывается, связано с начинкой этого объёма. Оставляю вектор на поверхности прежним, а внутри я могу продеформировать это поле, но, как бы там ни деформировалось поле внутри, интеграл не изменится (хотя, в каждой точке дивергенция изменится).

Вот здесь действует такая хитрая связь поведения векторного поля на поверхности и поведения его внутри объёма..

Равенство $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ получается как следствие теоремы Остроградского-Гаусса. Здесь справа стоит плотность заряда, значит, дивергенция напряжённости равна плотности заряда. Поляризация диэлектрика эквивалентна появлению заряда с плотностью $\rho' = -\text{div} \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$. Это не очень очевидно. Если вектор поляризации постоянен, то никакой заряд в объёме не появляется. Вот, если вектор от точки к точке меняется, то это проявляется в том, что в данном элементе объёма появляется некий фиктивный заряд.

С учётом этого дела уравнение $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ переписывается в таком виде $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \right)$, где ρ – это плотность настоящих зарядов, а $-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ – плотность связанных зарядов, вот фиктивных зарядов, появляющихся в результате поляризации диэлектрика. Теперь мы это уравнение можем преобразовать. Умножим всё ϵ_0 на и величину $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ перенесём влево, мы получим такое уравнение:

$\vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} = \rho$, где ρ – это плотность настоящих зарядов, или $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$. Вектор $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

называется *индукцией электрического поля*, и для этой индукции мы получили вот такое замечательное уравнение: $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$.

А от него мы теперь с помощью теоремы Гаусса вернёмся к интегральному уравнению: $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{\text{свободн}} dV$. Для однородных диэлектриков $\vec{P}$ – линейная функция напряжённости поля ($\vec{P} \sim \vec{E}$), вообще, для произвольного диэлектрика $\vec{P}$ – это некоторая функция от напряжённости поля ($\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$). Пишем тогда $\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}$, где коэффициент χ называется *диэлектрическая восприимчивость*. Значит, этот коэффициент характеризует склонность диэлектрика к поляризации. Возвращаясь к выражению для $\vec{D}$, мы получим для однородного диэлектрика: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\varepsilon} \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$. Величина $\varepsilon = 1 + \chi$ называется *диэлектрическая проницаемость среды*. Это безразмерная величина, большая единицы. Тогда связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}}$$

Пример. Пусть мы имеем заряженный шар с зарядом $+Q$, помещённый в однородную бесконечную среду с диэлектрической проницаемостью ε . Какое поле будет существовать внутри этого диэлектрика?

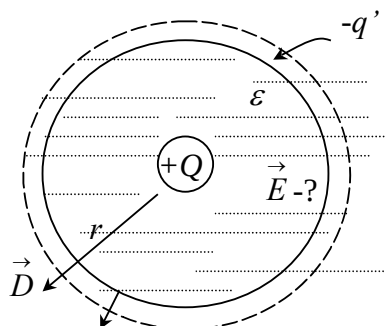


рис.5.11

Исходим из уравнения $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho_{\text{свободн}} dV$. Окружаем этот заряд сферой радиуса r . Вектор $\vec{D}$

должен быть направлен по радиусу, это следствие сферической симметрии. $\oint_{r=\text{const}} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 D(r) = Q$, от-

сюда мы получаем: $D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$; $\vec{E}(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}$.

Мораль: когда мы решали такую проблему для пустоты, напряжённость поля равнялась, когда шар поместили в диэлектрик, напряжённость поля в раз меньше, чем в пустоте. Легко понять, почему это получается. Когда заряд помещают в диэлектрик, то за счёт поляризации диэлектрика заряд $+Q$ обволакивается отрицательным зарядом $-q'$, который выступает на поверхности шара.

Результирующий заряд оказывается меньше, чем Q , однако, что существенно, индукция определяется только настоящим зарядом. Заряд, проступающий на диэлектрике, не влияет на ин-

дукцию (этот вектор специально так введён). На напряжённость поля влияют все заряды, в том числе и $-q'$.

Проводники в электростатическом поле

Проводники – это тела, в которых имеются свободные носители заряда, то есть заряженные частицы, которые могут свободно перемещаться внутри этого тела. Ну, обычно, употребляется слово проводник, то в качестве синонима идёт слово металл, металлы замечательны тем, что в них имеются свободные электроны. Но, на самом деле, понятие проводника шире. Вода, например, является проводником, не сама по себе чистая вода H_2O , она состоит из нейтральных молекул, и никаких там свободных частиц нет, но в воде обычно присутствует в растворённом виде соль, то есть йод, и за счёт этого практически вся вода является проводником.

З Кстати, уже в связи с тем, что мы в прошлый раз рассматривали, диэлектрики. Диэлектрическая проницаемость воды очень велика по сравнению с вот такой чистой водой, поэтому, вода является очень эффективным растворителем для многих веществ, ну, скажем, для твёрдых тел, которые устроены по ионной схеме. Так, если молекулы скреплены в твёрдом теле за счёт кулоновского взаимодействия (скажем, один атом электрон приобретает, другой теряет, вот эти атомы связаны кулоновскими силами), то такие связи вода разрушает очень эффективно за счёт своей большой диэлектрической проницаемости. Положительный и отрицательный заряды обволакиваются связанными зарядами, и эти связи разрушаются. Вода в этом плане является очень хорошим растворителем.

Вода, вообще, замечательное вещество. Все тела при охлаждении сжимаются, то есть плотность растёт (при охлаждении плотность увеличивается, при нагревании падает). Вот имеется аномальное явление в этом: максимальная плотность воды при $+4^{\circ}\text{C}$, при температуре ниже $+4^{\circ}\text{C}$ плотность опять падает, то есть дальнейшее падение температуры приводит к падению плотности, то есть к расширению воды. Вот это удивительное поведение связано с тем, что вода играет в нашей жизни вот такую выдающуюся роль: во-первых, хороший растворитель для различных минеральных солей, а во-вторых, вот такое аномальное поведение плотности. Если бы этого не было, то, к примеру, в водоёмах, озёрах, реках, жизни не было бы, водоёмы промерзали бы до дна, а так водоёмы не промерзают. Ну, почему промерзают? Верхний слой воды охлаждается и идёт книзу, поскольку у него больше плотность, тёплые слои снизу выталкиваются вверх и охлаждаются снова. И это охлаждение шло бы очень эффективно. На самом деле этого не происходит. Когда температура нижних слоёв $+4^{\circ}\text{C}$, они приобретают максимальную плотность и не всплывают. Охлаждение может идти только за счёт теплопроводности, не за счёт перемещения масс, а за счёт теплопроводности. Теплопроводность – медленный процесс, и, скажем, за зиму водоём не успевает промёрзнуть, а, вот, если бы плотность воды не вела себя так, то он бы промерзал до дна и, в конце концов, всё, что там живёт, отдавало бы концы, а так в этой воде $+4^{\circ}\text{C}$ живёт.

Некоторые утверждения:

1. *Напряжённость внутри проводника равна нулю* (это в электростатическом поле). По понятной причине. Если бы существовало поле, то на заряд e действовала бы сила равная $\vec{F} = e \cdot \vec{E}$, и под действием этой силы заряды внутри проводника двигались бы (электроны в металле двигались бы). До каких пор они могут двигаться? Ясно, что вечно двигаться они не могут, ну, скажем, у нас кусок железа лежит, и в нём они двигаются, двигаются и двигаются, железо греется при этом, а вокруг ничего не происходит. Это, конечно, было бы нелепо. А происходит следующее: имеем проводник и включается внешнее электростатическое поле, заряды начинают двигаться, при этом происходит такое перемещение зарядов внутри, что их собственное поле полностью гасит внешнее приложенное поле, на этом процесс останавливается. Это перемещение при обычных мерках практически мгновенно. Значение напряжённости электрического поля внутри проводника равно нулю. Отсюда следствие

2. *Потенциал внутри проводника – константа.* Ну, очевидно, напряжённость – это градиент потенциала, производная от потенциала, если напряжённость – ноль (это означает, что производная – ноль), сама функция – постоянная. Потенциал во всех точках проводника одинаков. Это утверждение верно для всех точек проводника вплоть до поверхности. Отсюда мораль:

3. *Поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью.* Ну, и отсюда:

4. *Силовые линии поля ортогональны поверхности проводника.*

Всё это можно резюмировать такой картинкой:

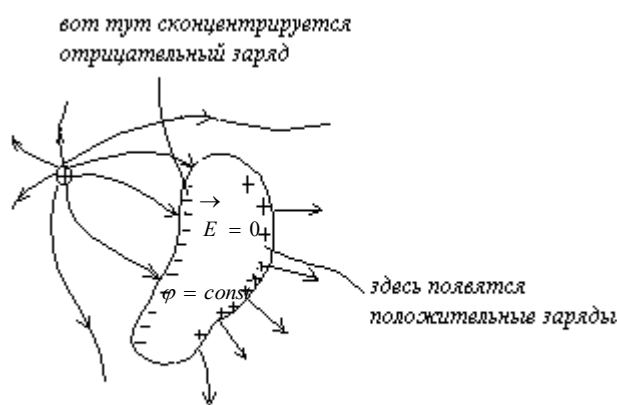


рис. 6.1

Скажем, имеем точечный заряд и проводник, внесённый в поле этого заряда. Произойдёт следующее: там, где силовые линии входят, сконцентрируется на поверхности проводника отрицательный заряд, скажем, электроны сюда подойдут, а на противоположной стороне появятся положительные заряды, это не скомпенсированные заряды ионов, из которых построена кристаллическая решётка.

Силовые линии поля будут ортогонально втыкаться в проводник, с другой стороны они будут исходить, опять же ортогонально к поверхности проводника. Ну, и, в общем-то, электрическое поле будет существенно изменено. Мы видим, что, если поверхность проводника будет внесена в поле заряда, вся конфигурация поля будет искажена. Если на проводник посадить заряд (либо снять с него часть электронов, либо насадить), этот заряд будет распределяться так, чтобы напряжённость внутри была равна нулю и чтобы поверхность проводника приняла во всех точках одинаковый потенциал.

Эту вещь полезно иметь в виду, тогда можно качественно представлять себе, как выглядит поле в окрестности заряженного проводника.

Я нарисую произвольный проводник и на него посажу заряд $+q$, ну, уединённый проводник (больше ничего нет). Какова будет структура поля? Соображения такие: поверхность эквипотенциальная, потенциал меняется непрерывно, значит, соседняя эквипотенциаль будет мало отличаться от этой. Вот, я могу более менее качественно нарисовать систему эквипотенциальных поверхностей. Дальше они будут так выпрямляться, и, в конце концов, на больших расстояниях орбитами будут сферы, как от точечного заряда. А теперь, силовые линии поля ортогональны этим поверхностям...



Вот такой ёж получился. Вот такая картина силовых линий.

рис. 6.2

Теперь немножко математики.

Мы имеем уравнение $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho$. В пустоте ($\rho = 0$) $\Rightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0)$, учитывая, что $\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \varphi$,

мы получаем такое уравнение: $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \varphi = 0$ ¹⁾. Потенциал электрического поля в пустоте удовлетворяет уравнению $\Delta \varphi = 0$, которое называется уравнением Лапласа.

Математически эта проблема сводится к решению такого уравнения при заданных граничных условиях, что $\varphi = \text{const}$ на заданной поверхности²⁾.

КОНДЕНСАТОРЫ

Пусть мы имеем отдельный проводник, на который посажен заряд q , этот проводник создаёт поле такой конфигурации, как на рисунке 6.2. Потенциал этого проводника одинаков во всех точках, поэтому можно говорить просто потенциал проводника, а, вообще-то, слово потенциал требует указания точки, в которой этот потенциал определяется. Можно показать, что потенциал уединённого проводника – линейная функция заряда, который на него посажен, $\varphi \sim q$, увеличите заряд вдвое, потенциал увеличится вдвое. Это не очевидная вещь, и я не могу привести каких-нибудь аргументов на пальцах, чтобы пояснить вот эту зависимость. Получается так, что структура поля не меняется, ну, картина силовых линий не меняется, просто растут напряжённости поля во всех точках пропорционально этому заряду, но общая картина не меняется. Ещё раз повторяю – не очевидная вещь. Ну, ладно, потенциал уединённого проводника – линейная функция заряда, $\varphi \sim q$. Пишем тогда

$\varphi = \frac{1}{C} \cdot q$, вводя коэффициент пропорциональности вот таким способом, где этот коэффициент пропорциональности C определяется геометрией проводника и называется ёмкостью уединённого проводника¹⁾. Ёмкость проводника не является его свойством, то есть на каком-то куске железа нельзя написать «ёмкость такая-то», потому что наличие или отсутствие посторонних тел вблизи меняет эту ёмкость. Его ёмкость, коэффициент пропорциональности, ёмкость отдельного проводника не является свойством этого проводника, она ещё зависит, помимо его, от наличия или отсутствия других тел. Однако, имеются устройства, которые называются конденсаторы, специальные устройства, для которых понятие ёмкости имеет однозначный смысл.

Конденсатором, вообще говоря, называется система из двух проводников, из которых один полностью охватывает другой, то есть, в идеале, конденсатор – вот такая штука:



рис. 6.3

Если на внутреннем проводнике заряд $+q$, а на внешнем $-q$. Внутри возникает электрическое поле вот такой конфигурации (силовые линии ортогональны поверхностям). И никакие внешние заряды не оказывают влияния на это поле, внешние поля не проникают внутрь проводящей полости, то есть от электростатического поля можно заэкранироваться. Хотите жить без электрического поля, вот, залезьте в железную бочку, закройте крышкой и всё, оно к вам туда не проник-

¹⁾ Скалярное произведение $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ это есть $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta$. Значит, $\vec{\nabla}^2$ обозначается Δ и называется оператор Лапласа.

²⁾ Есть целый раздел мат. физики, специально посвящённый решению этого уравнения, и мы обсуждать это не будем.

¹⁾ Слово «ёмкость», в общем-то, неудачное, потому что оно наводит на ассоциации бытовые, вроде ёмкость ведра или ёмкость чашки, на самом деле, никакого такого смысла нет. Это я вас просто предупреждаю, потому что часто бывают недоразумения; возникает такое ощущение, что ёмкость проводника связана с зарядом, который можно посадить на этот проводник; на любой проводник можно посадить любой заряд, будет просто разный потенциал при этом, ёмкость будет коэффициентом пропорциональности между потенциалом и зарядом и всё.

нет, скажем, транзистор у вас там в руках в этой бочке работать не будет, электромагнитные волны туда не будут проникать. Почему, кстати? А потому что внутри проводника поле равно нулю, поскольку напряжённость связана с распределением заряда на поверхности, а начинка проводника уже там не участвует, вы можете выкинуть эту начинку, получить полость, ничего от этого не изменится. Внутри проводника поле определяется только конфигурацией этих проводников и не зависит от внешних зарядов, тогда, если на внутреннем проводнике потенциал φ_1 , а на внешнем φ_2 , то мы снова будем иметь такую вещь, что внутренняя энергия пропорциональна заряду: $U = \varphi_1 - \varphi_2 \sim q$,

заряду q , который сидит на картинке внутри проводника. Тогда пишем: $U = \frac{1}{C} \cdot q$. Такое устройство

называется конденсатором, и величина C называется ёмкостью конденсатора. Вот это уже свойство устройства, на нём можно написать: «ёмкость C ». Конденсатор – это распространённые элементы в электричестве, в электротехнике и в радиотехнике, и на них прямо написано «ёмкость такая-то», и эта величина уже не зависит от того, что имеется вокруг. По размерности ёмкость что такое?

$[C] = \frac{[q]}{[U]} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Фарада}$, ёмкость в одну фараду – это ёмкость такого устройства, что, если

на него посадить заряд в 1 Кл (это колоссальный заряд), то разность потенциалов будет 1 В. Нет таких конденсаторов на свете, на Земле просто невозможно построить такой конденсатор, чтобы он имел ёмкость в фараду, поэтому, подходя к этой ёмкости, мы будем использовать микрофарады.

Энергия конденсатора

Условно, два проводника представляют конденсатор. Каким образом можно посадить заряд на эти проводники, ну, зарядить конденсатор? Так, например: берём заряд Δq и переносим с одного

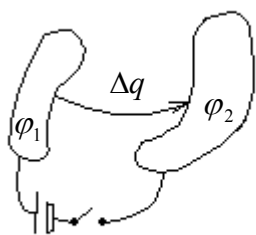


рис. 6.4

проводника на другой, допустим, с одного снимаем несколько электронов и тащим на другой, вот это процесс заряда конденсатора. Как фактически это делается, как можно перетащить электроны с одного проводника на другой? Имеем два проводника, подключается источник,

батарейка, ключ замыкается, батарея начинает перегонять заряды с одного проводника на другой. До каких пор нам удастся перегонять их это отдельный вопрос, мы его в своё время рассмотрим, а сейчас просто: внутри этой батареи действуют силы, сторонние силы по отношению к электростатике, и эти силы перегоняют заряды с одного проводника на другой. Ясно, чтобы это разделение произвести, нужно затратить определённую работу. Вот почему: мы сняли электрон, появился положительный заряд, и этот электрон начинает притягиваться к положительному заряду, нам надо совершать работу, чтобы оттащить его от этого заряда. Эту работу можно сосчитать. Пусть мы имеем два проводника, с потенциалами φ_1 и φ_2 , мы переносим заряд dq , при этом совершается работа, равная

$dA = dq \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = dq \cdot U$. Учтём теперь, что разность потенциалов является функцией заряда:

$U = \frac{q}{C}$, тогда работа $dA = \frac{q \cdot dq}{C}$, и полная работа будет $A = \int_0^q \frac{q \cdot dq}{C} = \frac{q^2}{2C}$. Если мы добиваемся того,

что на каждом проводнике становится заряд, равный по модулю q , то совершается такая работа. Спрашивается, куда эта работа девается? Запасается в виде энергии конденсатора, и её можно полу-

чить обратно. Энергия конденсатора равняется: $W_C = \frac{q^2}{2C}$. Кстати, это поясняет слово конденсатор

(накопитель): с одной стороны это накопитель заряда, с другой стороны это накопитель энергии, и в качестве накопителей энергии конденсаторы, действительно, используются. Если конденсатор разряжается, эта энергия освобождается. Кстати конденсаторы большой ёмкости (сооружения порядка этой аудитории) при замыкании разряжаются со страшным громом, это драматический процесс.

Энергия электростатического поля

Проблема такая: заряженный конденсатор обладает энергией, где локализована эта энергия, с чем она связана? Энергия – это интегральная характеристика, просто устройство обладает такой энергией, вопрос, повторяю, стоит в локализации энергии, то есть это энергия чего? Ответ такой: энергия конденсатора – это, на самом деле, энергия электростатического поля, энергия принадлежит полю, ни обкладкам конденсатора, ни заряду. Мы дальше получим чёткую теорему для энергии электромагнитного поля, а сейчас некоторые простые соображения.

Плоский конденсатор. Вот устройство, называемое плоским конденсатором, всем хорошо известное:

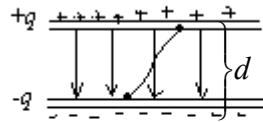


рис. 6.5

Имеется в виду, что расстояние между пластинами много меньше характерного линейного размера, $d \ll \sqrt{S}$, S – площадь пластин. Пластины имеют большую площадь, зазор маленький, в этом случае силовые линии поля однородны и внешние заряды на него не влияют. Напряжённость поля равняется $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, где $\sigma = \frac{q}{S}$. Мы знаем формулу для пластины с поверхностной плотностью σ : $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, между пластинами поля складываются, снаружи уничтожаются. Так

как поле однородное, разность потенциалов равняется: $U = \int_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Ed$, где d – расстояние между

пластинами. Тогда мы получим, что $U = \frac{d}{\epsilon_0 S} \cdot q$. Действительно, обнаружили, что разность потенциалов между пластинами – линейная функция заряда, это частное подтверждение общего правила. А коэффициент пропорциональности связан с ёмкостью: $\frac{d}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{C}$. Если объём конденсатора заполнен

начинкой из диэлектрика, то будет более общая формула: $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ ¹⁾.

А теперь займёмся формулой для энергии конденсатора: $W_C = \frac{q^2}{2C}$. Эта формула справедлива всегда. Для плоского конденсатора $q = \epsilon_0 S E$ мы получим: $W_C = \frac{\epsilon_0^2 S^2 E^2}{2 \frac{\epsilon_0 S}{d}} = \frac{\epsilon_0 S d E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V$, где V

– это объём области между пластинами. При наличии диэлектрика энергия плоского конденсатора равна: $W_C = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V$. Напряжённость поля внутри плоского конденсатора во всех точках одинако-

¹⁾ Вы должны уметь находить ёмкость сферического и цилиндрического конденсаторов.

ва, энергия пропорциональна объёму, а эта вещь $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ тогда выступает как плотность энергии,

$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{W_c}{V}$, энергия, приходящаяся на единицу объёма внутри конденсатора. Повторяю, дальше хорошее доказательство увидим, это пока как наводящее соображение, но положение таково. Электростатическое поле обладает энергией, и, если мы возьмём элемент объёма dV , а внутри этого элемента напряжённость поля равняется E , то внутри этого объёма будет содержаться энергия $dW = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot dV$, определяемая напряжённостью поля в точке внутри этого элемента. В любом ко-

нечном объёме V будет содержаться энергия, равная $W = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot dV$.

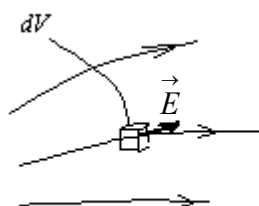


рис. 6.6

Что это значит? Буквально вот что. Сейчас в этой аудитории имеется электростатическое поле, связанное с тем, что Земля обладает некоторым зарядом, и заряд противоположного знака в атмосфере, это поле однородное, я уже упоминал, наверняка, напряжённость такая: в точках, в которые я сейчас ткнул, разность потенциалов порядка 100В, то есть напряжённость этого поля порядка 100В/м. Значит, в этой аудитории присутствует энергия, вычисленная по этой формуле:

$W = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot dV$, она размазана по всему пространству, энергия при-

надлежит электрическому полю. Можно ли её использовать? Тут тонкость такая, скажем, я пришёл с чемоданом, поставил тут чемодан, открыл его, потом закрыл, в объёме чемодана есть электрическое поле и, соответственно, энергия. Я взял чемодан и ушёл, унёс ли я эту энергию? Нет, потому что чемодан-то я унёс, а поле как было здесь, так и осталось. Тем не менее, можно ли эту энергию как-нибудь добыть? Да. Надо сделать так, чтобы энергия исчезла в этом объёме, скажем, электрическое поле исчезло в объёме этой аудитории, и тогда эта энергия выделится, если мы уничтожим поле, то энергия выделится.

Процедура, например, такая: вот имеется однородное поле, я беру металлическую пластину и

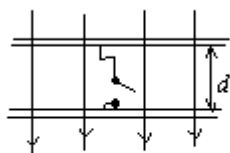


рис. 6.7

вдвигаю её в это поле перпендикулярно силовым линиям, работа при этом не совершается и ничего не происходит;двигаю ещё одну пластину таким же образом, тоже ничего не происходит, ну, правда, внутри проводящей пластины поле исчезает, на поверхности выступают заряды, но это ерунда. А теперь я беру проводничок к одной пластине, ключ и проводничок к другой, тоже невинное дело, ничего при этом не происходит. А когда я замыкаю ключ, что произойдёт? Эти две пластины соединяются, это один проводник, это означает, что их потенциалы должны уравниваться. Вначале на одном проводнике был потенциал φ_1 , на другом φ_2 , и разность потенциалов равнялась $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$, где d – это расстояние между пластинами, а когда я их соединяю проводником $\varphi_1 = \varphi_2$, как это может быть? Исчезает поле между пластинами, потому что разность потенциалов – это интеграл $\int_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. Когда я их закорачиваю проводником, получается такая конфигурация:

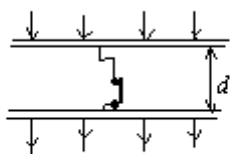


рис. 6.8

Энергия этого исчезнувшего поля выделяется при замыкании. Я мог бы её даже утилизировать: не просто замкнуть, а мотор вставить бы, и при замыкании заряд перетекал бы по обмоткам электромотора, он прокрутится и совершит работу (если вы ключ разомкнёте, поле не восстановится).

На сколько этот процесс реализуется? Что такое молния и гром? Имеем землю, имеем облако (это обкладки конденсатора), между ними такое электрическое поле:

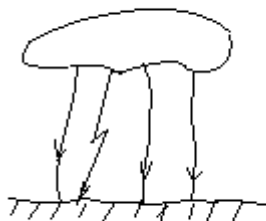


рис. 6.9

Что такое молния? Пробой, это порводничок, он сам собой замыкается. Происходит разряд, исчезает поле между облаком и землёй. Гром, это что такое? Выделение энергии этого поля. Весь этот гром, треск и молния – это выделение энергии между облаком и землёй.

Энергия конденсатора – это $W = \int_{\text{По всему пространству}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot dV = \frac{q^2}{2C}$. Конечно, чтобы взять этот инте-

грал, нужно знать всё поле во всём пространстве, и каким же образом получается такая простая формула $\frac{q^2}{2C}$? Ёмкость, на самом деле, это интегральная характеристика, для того, чтобы найти ёмкость какой-то системы зарядов, нужно знать поле во всём пространстве. Вся трудность вычисления интеграла эквивалентна трудности вычисления ёмкости.

СТАЦИОНАРНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Напомню, как мы добыли электростатику. У нас есть четыре уравнения Максвелла, в которых сидит всё электричество. Мы там положили $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\vec{j} = 0$, получили электростатику. Мы те-

перь ослабим эти наложенные условия, мы теперь положим $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, но $\vec{j} \neq 0$, получим стационар-

ное магнитное поле. То есть со временем ничего не меняется, но плотность тока $\vec{j}$, а $\vec{j}$ связано с движением заряда. Заряды двигаются, но стационарно, двигаются так, что в любой точке пространства со временем ничего не меняется. Наглядный пример: течёт река, массы воды движутся, но течение стационарно, скорость воды в каждой точке одна и та же. Когда ветер дует то туда, то сюда порывами, это не стационарное течение, а, если ветер дует без порывов: в ушах свистит и всё, а ничего не меняется со временем, то это пример стационарного течения.

Уравнения электростатики (первое и второе уравнения Максвелла) остаются без изменения, а третье и четвёртое будут иметь вид:

$$\left. \begin{array}{l} 3. \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \\ 4. \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Эти два уравнения описывают} \\ \text{стационарное магнитное поле} \end{array}$$

Стационарное означает неменяющееся со временем. Ладно, свойства этого поля мы обсудим в следующий раз.

7

Мы изучаем стационарное магнитное поле. Напомню исходные положения: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\vec{j} \neq 0$, то есть заряды движутся, но стационарно. Это поле будет описываться двумя уравнениями (третьим и четвёртым уравнениями Максвелла):

$$\begin{array}{l} 3. \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 \\ 4. \oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS. \end{array}$$

Что означает третье уравнение? Что поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю, где бы эта поверхность ни была взята и какую бы форму она не имела. Это означает, что вклады в поток знакопеременны, то есть где-то вектор направлен внутрь поверхности, а где-то наружу. Формально из равенства 3. можно показать, что, сколько линий выходит из поверхности, столько в неё и входит. Иначе, никакая силовая линия не заканчивается внутри замкнутой поверхности и никакая не начинается. Как это может быть? Это может быть только так: все силовые линии замкнуты. Короче говоря, из третьего уравнения следует, что *силовые линии индукции магнитного поля замкнуты*. То есть силовая линия может как-то идти, идти, но она обязательно вернётся и укусит себя за хвост.

Для электрического поля мы имели такую вещь: $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i$. Слева конструкция та-

кая же, но справа стоял заряд внутри поверхности. Отсюда силовые линии замкнуты и 2) отсутствуют магнитные заряды, то есть, из которых выходили бы таким образом (см. рис.7.1) такие частицы называются магнитными монополями.

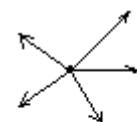


рис. 7.1

следствия: 1) силовых нет таких частиц индукции, та-

Магнитные монополи отсутствуют. Это специальная Физика вслед за природой, которую она отражает, любит симметрию, но ограничено, в частности справа стоит сумма зарядов, для магнитной индукции здесь стояла бы сумма магнитных монополей. Вот такое нарушение симметрии раздражает, повторяю, природа любит симметрию. Были попытки лет двадцать назад обнаружить монополи, так кажется, из сообщений симметрии должны они быть, но не обнаружили. Теории приходилось искать причины,

проблема физики. метрию, и уравнения, для напряжённости индукции здесь стояла

Z

почему их нет. Соображения симметрии настолько довлеют, что её нарушения требуют какого-то объяснения. Ну, разные есть гипотезы, в которых фигурируют эти монополи, но почему мы не обнаруживаем их здесь, тоже там разные объяснения, вплоть до того, что на ранних стадиях возникновения Вселенной они были и попросту оказались вытолкнутыми за пределы окружающего нас пространства. В общем, есть теории, в которых они фигурируют, и в рамках тех теорий ищутся объяснения, почему мы их не находим на Земле. Пока мы, ссылаясь на то, что они не обнаружены, пишем здесь ноль и имеем дело только с замкнутыми силовыми линиями.

Теперь обратимся к четвёртому уравнению. Читаем его: возьмём замкнутый контур, зададимся направлением обхода (обход и нормаль должны образовывать

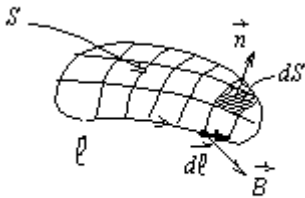


рис. 7.2

правый винт), в каждой точке определяем $\vec{B}$, берём скалярное произведение $\vec{B} \cdot \vec{d\ell}$, получаем число, для всех элементов находим эти скалярные произведения, получаем циркуляцию $\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell}$ по контуру, это некоторое число. Уравнение утверждает, что, если эта циркуляция отлична от нуля, то отлична от нуля правая часть. А здесь что? Плотность тока $\vec{j}$ свя-

зана с движущимися зарядами, скалярное произведение $\vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$ - это заряд, который проскакивает через эту площадку за единицу времени. Если циркуляция по контуру отлична от нуля, то это означает, что какие-то заряды пересекают поверхность, натянутую на этот контур. Это смысл четвёртого уравнения.

Тогда мы можем сделать такой вывод: силовые линии магнитного поля замкнуты, возьмём в качестве контура какую-то линию магнитного поля, по этой линии $\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} > 0$, потому что произ-

по силовой
линии

ведение $\vec{B} \cdot \vec{d\ell}$ не меняет знак. Это означает, что, если я возьму поверхность S , натянутую на силовую линию магнитного поля, то, заведомо, эту поверхность пересекают заряды таким образом:

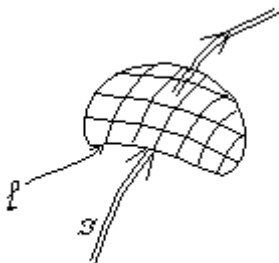


рис. 7.3

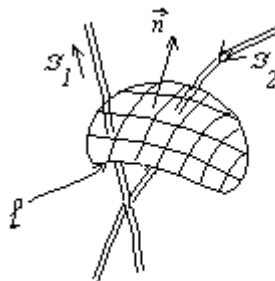


рис. 7.4

Можно сказать, что силовая линия магнитного поля всегда охватывает ток, иначе говоря, это выглядит так: если мы имеем проводник, по которому течёт ток $\mathfrak{I}$, для любого контура, который охватывает проводник с током, $\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 \mathfrak{I}$; если имеется несколько проводников, опять я возьму

контур, поверхность, на него натянутую, её протыкают два проводника, тогда $\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 (\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2)$,

при чём с учётом знаков: ток $\mathfrak{I}_1$ - положительный, $\mathfrak{I}_2$ - отрицательный. Мы имеем тогда

$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 \sum_k \mathfrak{I}_i$. Вот это сразу общие такие свойства магнитного поля и тока. Значит, силовая ли-

ния всегда охватывает ток.

Магнитное поле бесконечного прямого проводника с током

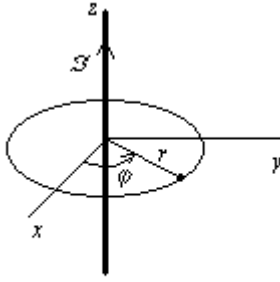


рис. 7.5

Пусть вдоль оси OZ расположен бесконечно длинный проводник, по которому течёт ток с силой $\mathfrak{I}$. А сила тока это что такое?

$$\mathfrak{I} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad \Delta q - \text{заряд, который пересекает поверхность } S \text{ за}$$

время Δt . Система обладает осевой симметрией. Если мы введём цилиндрические координаты r, φ, z , то цилиндрическая симметрия означает, что $\frac{\partial}{\partial \varphi}(\text{скаляр}) = 0$ и, кроме того, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, при смещении вдоль

оси OZ , мы видим то же самое. Таков источник. Магнитное поле

должно быть таким, чтобы удовлетворялись эти условия $\frac{\partial |\vec{B}|}{\partial \varphi} = 0$ и

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0$. Это означает вот что: силовые линии магнитного поля – окружности, лежащие в плоскости

ортогональной проводнику. Это немедленно позволяет найти магнитное поле.

Пусть у нас это проводник.

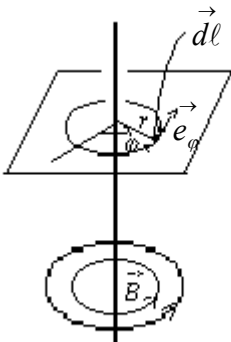


рис. 7.6

Вот ортогональная плоскость,

вот окружность радиуса r ,

я возьму тут касательный вектор, вектор, направленный вдоль φ , касательный вектор к окружности.

Тогда, $\vec{B} = B(r) \cdot \vec{e}_\varphi$, $d\vec{\ell} = d\ell \cdot \vec{e}_\varphi$ где $\vec{e}_\varphi^2 = 1$.

В качестве замкнутого контура выбираем окружность радиуса $r = \text{const}$. Пишем тогда

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{r=\text{const}} B(r) \cdot \vec{e}_\varphi \cdot d\ell \cdot \vec{e}_\varphi = \oint_{r=\text{const}} B(r) \cdot d\ell = B(r) \cdot \oint_{r=\text{const}} d\ell = B(r) \cdot 2\pi r, \text{ сумма длин по всей окружности}$$

(а интеграл это ни что иное, как сумма) – это длина окружности.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \int \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS \Rightarrow B(r) \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot \mathfrak{I}, \text{ где } \mathfrak{I} - \text{сила тока в проводнике. Справа стоит заряд, ко-}$$

торый пересекает поверхность за единицу времени. Отсюда мораль: $B(r) = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I}}{2 \cdot \pi \cdot r}$. Значит, прямой

проводник создаёт магнитное поле с силовыми линиями в виде окружностей, охватывающих про-

водник, и эта величина B убывает как $\frac{1}{r}$ при удалении от проводника, ну, и стремится к бесконеч-

ности, если мы приближаемся к проводнику, когда контур уходит внутрь проводника.

Этот результат только для случая, когда контур охватывает ток.

Понятно, что бесконечный проводник нереализуем. Длина проводника, – наблюдаемая величина, и никакие наблюдаемые величины не могут принимать бесконечных значений, не такой линейки, которая позволила бы измерить бесконечную длину. Это нереализуемая вещь, тогда какой толк в этой формуле? Толк простой. Для любого проводника, будет

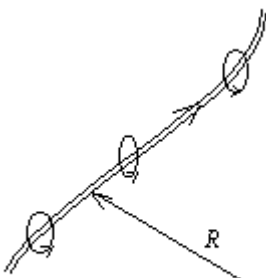


рис. 7.7

справедливо следующее: достаточно близко к проводнику силовые линии магнитного поля – вот такие замкнутые окружности, охватывающие проводник, и на расстоянии $r \ll R$ (R – радиус кривизны проводника), будет справедлива эта формула.

Магнитное поле, создаваемое произвольным проводником с током. Закон Био-Савара.

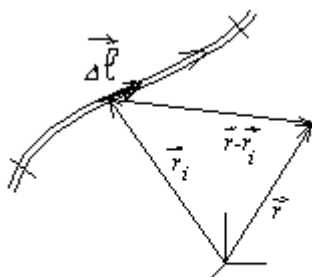


рис. 7.8

Пусть мы имеем произвольный проводник с током, и нас интересует магнитное поле, создаваемое куском этого проводника в данной точке. Как, кстати, в электростатике находили мы электрическое поле, создаваемое каким-то распределением заряда? Распределение разбивали на малые элементы и вычисляли в каждой точке поле от каждого элемента (по закону Кулона) и суммировали. Такая же программа и здесь. Структура магнитного поля сложнее, чем электростатическое, кстати, оно не потенциально, замкнутое магнитное поле нельзя представить как градиент скалярной функции, у него другая структура, но идея та же самая. Разбиваем проводник на малые элементы. Вот я взял маленький элемент $\Delta \ell_i$, положение этого элемента определяется радиус-

вектором $\vec{r}_i$, а точка наблюдения задаётся радиус-вектором $\vec{r}$. Утверждается, что этот элемент про-

водника создаст в этой точке индукцию $\Delta \vec{B}_i$ по такому рецепту: $\Delta \vec{B}_i = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I}}{4\pi} \cdot \frac{\Delta \vec{\ell}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$. Откуда

берётся этот рецепт? Его нашли в своё время экспериментально, трудно мне, кстати, представить, как это можно было экспериментально найти такую достаточно сложную формулу с векторным произведением. На самом деле это следствие четвёртого уравнения Максвелла

4. $\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$. Тогда поле, создаваемое всем проводником:

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I}}{4\pi} \cdot \sum \frac{\Delta \vec{\ell}_i \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$, или, мы можем написать теперь интеграл:

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I}}{4\pi} \cdot \int_{\ell} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$. Понятно, что вычислять такой интеграл для произвольного проводника

занятие не очень приятное, но в виде суммы это нормальная задача для компьютера.

Пример. Магнитное поле кругового витка с током.

Пусть в плоскости YZ располагается проволочный виток радиуса R, по которому течёт ток силы $\mathfrak{I}$. Нас интересует магнитное поле, которое создаёт ток. Силовые линии вблизи витка такие: Общая картина силовых линий тоже просматривается (рис. 7.10).

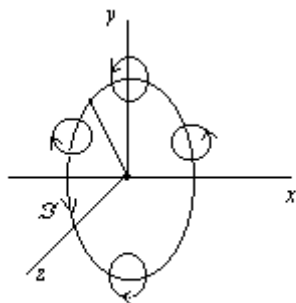


рис. 7.9

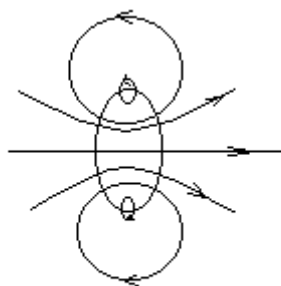


рис. 7.10

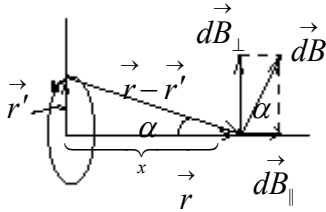


рис. 7.11

По идее, нас интересовало бы поле $\vec{B}(\vec{r})$, но в элементарных функциях указать поле этого витка нельзя. Найти можно только на оси симметрии. Мы ищем поле в точках $(x,0,0)$.

Направление вектора $\vec{B}$ определяется векторным произведением $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')$.

Вектор $\vec{B}$ имеет две составляющие: $B_{\perp}$ и $B_{\parallel}$. Когда мы начнём суммировать

эти вектора, то все перпендикулярные составляющие в сумме дадут ноль. $\int d\vec{B} = \int d\vec{B}_{\parallel} + \underbrace{\int d\vec{B}_{\perp}}_0 = \vec{i} \cdot \int dB_{\parallel}$. А

теперь пишем:

$$dB_{\parallel} = dB \cdot \sin \alpha, \quad dB = |d\vec{B}| =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I}}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}')|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I}}{4\pi} \cdot \frac{|\vec{dl}| \times |\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I} \cdot dl}{4\pi \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I} \cdot dl}{4\pi \cdot (x^2 + R^2)}, \quad \text{а} \quad \sin \alpha = \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I}}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}, \text{ и, наконец}^1, \quad \int dB = \frac{\mu_0 \mathfrak{I} \cdot R}{4\pi (x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{\int_{2\pi R} dl}.$$

Мы добыли такой результат:

$$\vec{B}(x,0,0) = \vec{i} \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I} \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

А теперь, в качестве проверки, поле в центре витка равна: $\vec{B}(0,0,0) = \vec{i} \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mathfrak{I}}{2R}$.

Поле длинного соленоида.

Соленоидом называется катушка, на которую намотан проводник.

Магнитное поле от витков складывается, и не трудно что структура силовых линий поля такая: они внутри дальше разреженно. То есть для длинного соленоида считать $\vec{B}=0$, а внутри соленоида $\vec{B}=\text{const.}$ го соленоида, ну, в окрестности. Скажем, его середина практически однородно, а вне соленоида это мы можем найти это магнитное поле внутри следую- вот я беру такой контур (рис.7.13), а теперь пишем:

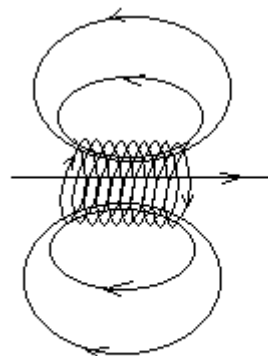
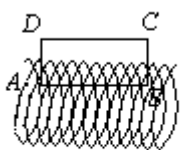


рис. 7.12

но догадаться, ри идут густо, а да снаружи бу-

Внутри длинно- дины, магнитное поле мало. Тогда ющим образом:



¹⁾ Мы учтем, что интегрируется по dl и для всех dl другие величины – константы.

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{AD} = {}^1) \int_{AB} B \cdot d\ell = B \cdot \int_{AB} d\ell = B \cdot \ell_{AB}.$$

$$\int_{S_{ABCD}} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = \Im \cdot \frac{N}{\ell} \cdot \ell_{AB} - \text{это полный заряд. Эту поверхность протыкают витки}$$

(полный заряд) = $\Im \cdot$ (число витков, протыкающих эту поверхность).

Мы получим такое равенство из нашего закона: $B \cdot \ell_{AB} = \mu_0 \cdot \frac{\Im \cdot N}{\ell} \cdot \ell_{AB}$, или

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \Im \cdot N}{\ell}.$$

8

Поле на большом расстоянии от ограниченного распределения тока. Магнитный момент

Имеется в виду, что в ограниченной области пространства текут токи, тогда есть простой рецепт для нахождения магнитного поля, которое создаёт это ограниченное распределение. Ну, кстати, под это понятие ограниченное пространство подпадает любой источник, поэтому тут никакого сужения нет.

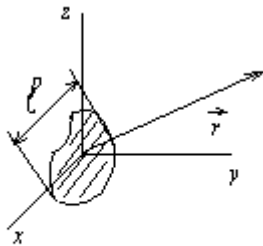


рис. 8.1

Если характерный размер системы ℓ , то $|\vec{r}| \gg \ell$. Напомню, что мы решали аналогичную проблему для электрического поля, создаваемого ограниченным распределением заряда, и там появилось понятие дипольного момента, и моментов более высокого порядка. Решать эту задачу я здесь не буду.

По аналогии (как делалось в электростатике) можно показать, что магнитное поле от ограниченного распределения на больших расстояниях подобно электрическому полю диполя. То есть структура этого поля такая:

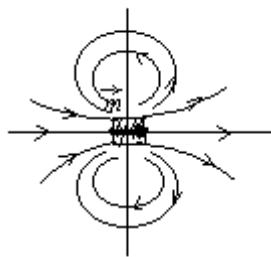


рис. 8.2

¹⁾ Интеграл по AD = интегралу по AB на отрезке AB векторы $\vec{B}$ и $\vec{d}$

по $CD=0$, потому что там $\vec{B} = 0$ по предположению.

Распределение характеризуется магнитным моментом $\vec{m}$. **Магнитный момент** $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \int \vec{r} \times \vec{j} \cdot dV$, где $\vec{j}$ – плотность тока или, если учесть, что мы имеем дело с движущимися заряженными частицами, то вот эту формулу для сплошной среды мы можем выразить через заряды частиц таким образом: $\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \vec{r}_i \times q_i \cdot \vec{v}_i$. Что эта сумма выражает? Повторяю, распределение тока создаётся тем, что движутся эти заряженные частицы. Радиус-вектор i -ой частицы векторно умножается на скорость i -ой частицы и всё это умножается на заряд этой i -ой частицы.

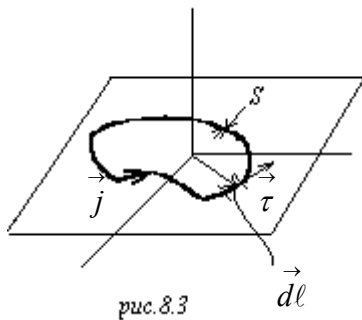
Такая конструкция, кстати, у нас в механике была. Если вместо заряда без множителя $\frac{1}{2}$ написать массу частицы, то, что это будет изображать? Момент импульса системы.

Если мы имеем частицы одного сорта ($m_i = m$, $q_i = q$, например, электроны), то тогда мы можем написать $\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i \vec{r}_i \times \frac{q \cdot m}{m} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{m} \sum_i \vec{r}_i \times m \vec{v}_i = \frac{q}{2m} \cdot \vec{L}$. Значит, если ток создаётся частицами одного сорта, то магнитный момент связан просто с моментом импульса этой системы частиц.

Магнитное поле, создаваемое этим магнитным моментом равно:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} - \vec{m}}{r^3} \quad (8.1)$$

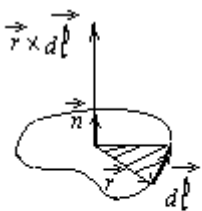
Магнитный момент витка с током



Пусть у нас имеется виток и по нему течёт ток силы $\mathfrak{I}$. Вектор $\vec{j}$ отличен от нуля в пределах витка. Возьмём элемент этого витка $d\vec{\ell}$, $\vec{j} \cdot dV = \frac{\mathfrak{I}}{S} \cdot \vec{\tau} \cdot S \cdot d\ell = \mathfrak{I} \cdot d\vec{\ell}$, где S – поперечное сечение витка, а $\vec{\tau}$ – единичный касательный вектор. Тогда магнитный момент определён так: $\vec{m} = \frac{\mathfrak{I}}{2} \cdot \int \vec{r} \times d\vec{\ell}$. А что такое $\vec{r} \times d\vec{\ell}$? Это вектор, направленный

вдоль вектора нормали к плоскости витка $\vec{n}$. А векторное произведение двух векторов – это удвоенная площадь треугольника, построенного на этих векторах. Если dS – площадь треугольника, построенного на векторах $d\vec{\ell}$ и $\vec{r}$, то $\vec{r} \times d\vec{\ell} = 2\vec{n} \cdot dS$. Тогда мы пишем магнитный момент равняется $\vec{m} = \frac{\mathfrak{I}}{2} \cdot \int 2\vec{n} \cdot dS = \mathfrak{I} \cdot \vec{n} \cdot \int dS = \mathfrak{I} \cdot S \cdot \vec{n}$. Значит,

(магнитный момент витка с током) = (сила тока) × (площадь витка) × (нормаль к витку)¹⁾.



А теперь мы формулу (8.1) применим для витка с током и сопоставим с тем, что мы добыли в прошлый раз, просто для проверки формулы, поскольку формулу эту я слепил по аналогии.

¹⁾ направление нормали задаётся правилом правого винта (обход и нормаль должны образовывать правый винт).

Пусть мы имеем в начале координат виток произвольной формы, по которому течёт ток силы $\mathfrak{I}$, тогда поле в точке на расстоянии x равно:
$$\vec{B}(x,0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\mathfrak{I} \cdot \vec{S} \cdot \vec{i} - \mathfrak{I} \cdot \vec{S} \cdot \vec{i}}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\mathfrak{I} \cdot \vec{S} \cdot \vec{i}}{x^3}$$
 ($\vec{m} = \mathfrak{I} \cdot \vec{S} \cdot \vec{n}$, $\vec{n} = \vec{i}$). Для круглого витка $S = \pi R^2$, $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\pi R^2 \mathfrak{I}}{x^3} \cdot \vec{i} = \frac{\mu_0 \mathfrak{I} R^2}{2x^3} \vec{i}$. На прошлой лекции мы находили магнитное поле круглого витка с током, при $x \gg R$ эти формулы совпадают.

На больших расстояниях от любого распределения тока магнитное поле находится по формуле (8.1), а всё это распределение характеризуется одним вектором, который называется магнитный момент. Кстати, простейший источник магнитного поля это магнитный момент. Для электрического поля простейший источник это монополь, для электрического поля следующий по сложности это электрический диполь, а для магнитного поля всё начинается с этого диполя или магнитного момента. Это, ещё раз обращаю внимание, постольку, поскольку нет этих самых монополей. Был бы монополь, тогда было бы всё также как в электрическом поле. А так у нас простейший источник магнитного поля это магнитный момент, аналог электрического диполя. Наглядный пример магнитного момента – постоянный магнит. Постоянный магнит обладает магнитным моментом, и на большом расстоянии его поле имеет такую структуру:

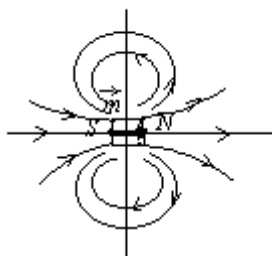


рис. 8.5

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле

Мы видели, что на заряженную частицу действует сила, равная $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Ток в проводнике есть результат движения заряженных частиц тела, то есть равномерно размазанного заряда в пространстве нет, заряд локализован в каждой частице. Плотность тока $\vec{j} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \sum_{\Delta V} q_i \cdot \vec{v}_i$. На i -ую частицу действует сила $\vec{F}_i = q_i \cdot \vec{v}_i \times \vec{B}$.

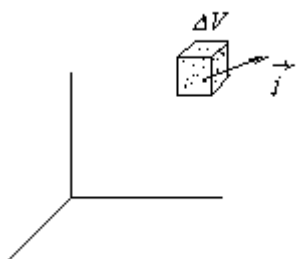


рис. 8.6

Выберем элемент объёма ΔV и просуммируем силы, действующие на все частицы этого элемента объёма $\Delta \vec{F} = \sum_{\Delta V} q_i \cdot \vec{v}_i \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} \cdot \Delta V$.

Сила, действующая на все частицы в данном элементе объёма, определяется как плотность тока на магнитное поле и на величину элемента объёма. А теперь перепишем её в дифференциальном виде: $d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} \cdot dV$, отсюда $\vec{j} \times \vec{B}$ – это **плотность силы**, сила, действующая на единицу объёма. Тогда мы получим общую формулу для силы: $\vec{F} = \int \vec{j} \times \vec{B} \cdot dV$.

Обычно ток течёт по линейным проводникам, редко мы сталкиваемся с случаями, когда ток размазан как-то по объёму. Хотя, между прочим, Земля имеет магнитное поле, а от чего это поле? Источник поля это магнитный момент, это означает, что Земля обладает магнитным моментом. А это означает, что тот рецепт

для магнитного момента показывает, что должны быть какие-то токи внутри Земли, они по необходимости должны быть замкнутыми, потому что не может быть стационарного разомкнутого поля. Откуда эти токи, что их поддерживает? Я не специалист в земном магнетизме. Какое-то время назад определённой модели этих токов ещё не было. Они могли быть там когда-то индуцированы и ещё не успели там затухнуть. На самом деле, ток можно возбудить в проводнике, и потом он быстро сам кончается за счёт поглощения энергии, выделения тепла и прочего. Но, когда мы имеем дело с такими объёмами как Земля, то там время затухания этих токов, однажды каким-то механизмом возбуждённых, это время затухания может быть очень длительным и длиться геологические эпохи. Может быть, так оно и есть. Ну, скажем, мелкий объект типа Луны имеет очень слабое магнитное поле, это означает, что оно затухло там уже, скажем, магнитное поле Марса тоже значительно слабее поля Земли, потому что и марс меньше Земли. Это я к чему? Конечно, есть случаи, когда токи текут в объёмах, но то, что мы здесь на Земле имеем это обычно линейные проводники, поэтому эту формулу сейчас трансформируем применительно к линейному проводнику.

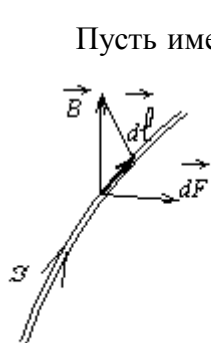


рис. 8.7

Пусть имеется линейный проводник, ток течёт с силой I . Выберем элемент проводника $d\vec{\ell}$, объём этого элемента dV , $\vec{j} \cdot dV = I \cdot d\vec{\ell}$, $\vec{F} = I \cdot \int d\vec{\ell} \times \vec{B}$. Сила, действующая на элемент проводника $d\vec{F} = I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B}$ перпендикулярна плоскости треугольника, построенного на векторах $d\vec{\ell}$ и $\vec{B}$, то есть направлена перпендикулярно к проводнику, а полная сила находится суммированием. Вот, две формулы решают эту задачу.

Магнитный момент во внешнем поле

Магнитный момент сам создаёт поле, сейчас мы собственное его поле не рассматриваем, а нас интересует, как ведёт себя магнитный момент, помещённый во внешнее магнитное поле. На магнитный момент действует момент силы, равный $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$. Момент силы будет направлен перпендикулярно к доске, и этот момент будет стремиться развернуть магнитный момент вдоль силовой линии. Почему стрелка компаса показывает на северный полюс? Ей, конечно, нет дела до географического полюса Земли, стрелка компаса ориентируется вдоль силовой линии магнитного поля, которая, в силу случайных причин, кстати, направлена примерно по меридиану. За счёт чего? А на неё действует момент. Когда стрелка, магнитный момент, совпадающий по направлению с самой стрелкой, не совпадает с силовой линией, появляется момент, разворачивающий её вдоль этой линии. Откуда у стрелки компаса берётся магнитный момент, это мы ещё обсудим.

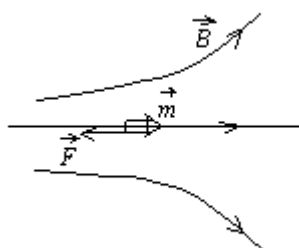


рис. 8.8

Кроме того, на магнитный момент действует сила $\vec{F}$, равная $\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$. Если магнитный момент направлен вдоль $\vec{B}$, то сила втягивает магнитный момент в область с большей индукцией. Эти формулы похожи на то, как действует электрическое поле на дипольный момент, там тоже дипольный момент ориентируется вдоль поля и втягивается в область с большей напряжённостью. Теперь мы можем рассмотреть вопрос о магнитном поле в веществе.

Магнитное поле в веществе

Атомы могут обладать магнитными моментами. Магнитные моменты атомов связаны с мо-

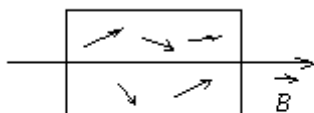


рис. 8.9

ментом импульса электронов. Уже была получена формула $\frac{q}{2m} \cdot \vec{L}$, где $\vec{L}$ – момент импульса частицы создающей ток. В атоме мы имеем положительное ядро и электрон e , вращающийся по орбите, на самом деле, в своё время мы увидим, что эта картина не имеет отношения к реальности, так нельзя представлять электрон, который вращается, но остаётся то, что электрон в атоме обладает моментом импульса, и этому моменту импульса будет отвечать такой магнитный момент: $\vec{m} = \frac{e}{2m} \cdot \vec{L}$. Наглядно, заряд, вращающийся по окружности, эквивалентен круговому току, то есть это элементарный виток с током. Момент импульса электрона в атоме квантуется, то есть может принимать только определённые значения, вот по такому рецепту: $L^2 = \ell(\ell+1) \cdot \hbar^2$, $L = \sqrt{\ell(\ell+1)} \cdot \hbar$, где вот эта величина $\hbar$ – это постоянная Планка. Момент импульса электрона в атоме может принимать лишь определённые значения, мы сейчас не будем обсуждать, как это получается. Ну, и вследствие этого магнитный момент атома может принимать определённые значения. Эти детали нас сейчас не волнуют, но, по крайней мере, будем представлять, что атом может обладать определённым магнитным моментом, есть атомы, у которых нет магнитного момента. Тогда вещество, помещённое во внешнее поле намагничивается, а это означает, что оно приобретает определённый магнитный момент вследствие того, что магнитные моменты атомов ориентируются преимущественно вдоль поля.

Элемент объёма dV приобретает магнитный момент $d\vec{m} = \vec{M} \cdot dV$, при чём вектор $\vec{M}$ имеет смысл плотности магнитного момента и называется вектором намагничивания. Имеется класс веществ, называемых **парамагнетики**, для которых $\vec{M} \uparrow \uparrow \vec{B}$, намагничивается так, что магнитный момент совпадает с направлением магнитного поля. Имеются **диамагнетики**, которые намагничиваются, так сказать, «против шерсти», то есть магнитный момент антипараллелен вектору $\vec{B}$, значит, $\vec{M} \uparrow \downarrow \vec{B}$. Это более тонкий термин. То, что вектор $\vec{m}$ параллелен вектору $\vec{B}$ понятно, магнитный момент атома ориентируется вдоль магнитного поля. Диамагнетизм связан с другим: если атом не обладает магнитным моментом, то во внешнем магнитном поле он приобретает магнитный момент, при чём магнитный момент антипараллелен $\vec{B}$. Этот очень тонкий эффект связан с тем, что магнитное поле влияет на плоскости орбит электронов, то есть оно влияет на поведение момента импульса. Парамагнетик втягивается в магнитное поле, диамагнетик выталкивается. Вот, чтобы это не было беспредметно, медь – это диамагнетик, и алюминий – парамагнетик, если взять магнит то алюминиевая лепёшка будет притягиваться магнитом, а тогда медная будет отталкиваться.

Понятно, что результирующее поле, когда вещество внесено в магнитное поле, это есть сумма внешнего поля и поля, создаваемого за счёт магнитного момента вещества. Теперь обратимся к уравнению $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \int \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$, или в дифференциальной форме $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$. Теперь такое утверждение: *намагничивание вещества эквивалентно наведению в нём тока с плотностью $\vec{j}' = \text{rot } \vec{M} = \nabla \times \vec{M}$* . Тогда это уравнение мы напишем в виде $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \text{rot } \vec{M})$.

Проверим размерность: M – это магнитный момент в единице объёма $[M] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\Im L^2}{L^3} = \frac{\Im}{L}$, размерность $[\text{rot } \vec{M}] = \frac{\Im}{L}$. Когда вы пишете какую-нибудь формулу, то размерность всегда полезно проверять, особенно если формула эта собственной выводки, то есть вы её не срисовали, не запомнили, а получили.

Намагниченность характеризуется вектором $\vec{M}$, он так и называется вектор намагниченности, это плотность магнитного момента или магнитный момент в единицу времени. Я говорил, что намагниченность эквивалентна появлению тока $\vec{j}' = \text{rot } \vec{M}$, так называемого молекулярного тока, и это уравнение эквивалентно такому: $\oint_{\ell} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{j}' \cdot \vec{n} \cdot dS$, то есть мы можем считать, что нет намаг-

ниченности, а есть такие токи. Зададимся таким уравнением:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \int_S (\vec{j} + \vec{j}') \cdot \vec{n} \cdot dS, \quad \vec{j} - \text{это настоящие токи, связанные с конкретными}$$

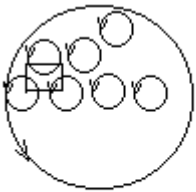


рис. 9.1

носителями зарядов, а $\vec{j}'$ это токи, связанные с намагниченностью. Электрон в атоме это круговой ток, возьмём область внутри, внутри образца все эти токи уничтожаются, но наличие таких круговых токов эквивалентно одному общему току, который обтекает этот проводник по поверхности, отсюда и такая формула. Перепишем это уравнение в таком виде:

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS + \mu_0 \cdot \oint_{\ell} \vec{M} \cdot d\vec{\ell}, \quad \oint_{\ell} (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS. \quad \text{Этот } \mu_0$$

тоже отправим влево и обозначим $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \equiv \vec{H}$, вектор $\vec{H}$ называется **напряжённостью магнитного**

поля, тогда уравнение приобретёт вид $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$. (циркуляция напряжённости магнитного поля по замкнутому контуру) = (сила тока через поверхность этого контура).

Ну, и, наконец, последнее. Мы имеем такую формулу: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$. Для многих сред намагниченность зависит от напряжённости поля, $\vec{M} = \alpha \vec{H}$, где α – **магнитная восприимчивость**, это коэффициент, характеризующий склонность вещества к намагничиванию. Тогда эта формула перепишется в виде $\vec{B} = \mu_0 (1 + \alpha) \cdot \vec{H}$, $\mu = 1 + \alpha$ – **магнитная проницаемость**, и мы полу-

чаем такую формулу: $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$.

Если $\mu > 1$, то это парамагнетики, $\mu < 1$ – это диамагнетики, ну, и, наконец, имеются вещества, для которых это μ принимает большие значения (порядка 10^3), $\mu \gg 1$ – это ферромагнетики (железо, кобальт и никель). Ферромагнетики замечательны тем. Что они не только намагничиваются в магнитном поле, а им свойственно остаточное намагничивание, если он уже однажды был намагничен, то, если убрать внешнее поле, то он останется намагниченным в отличие от диа- и парамагнетиков. Постоянный магнит – это и есть ферромагнетик, который без внешнего поля намагничен сам по себе. Кстати, имеются аналоги этого дела в электричестве: имеются диэлектрики, которые

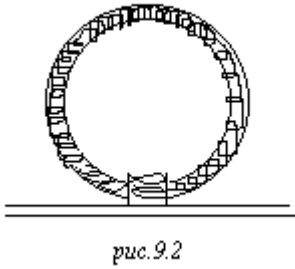
поляризованы сами по себе без всякого внешнего поля. При наличии вещества наше фундаментальное уравнение приобретает такой вид:

$$\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS,$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H},$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}).$$

А вот ещё **пример** ферромагнетика, бытовой пример магнитного поля в средах, во-первых, постоянный магнит, ну, и более тонкая вещь – магнитофонная лента.



Каков принцип записи на ленту? Магнитофонная лента - это тонкая лента, покрытая слоем ферромагнетика, записывающая головка - это катушка с сердечником, по которой течёт переменный ток, в зазоре создаётся переменное магнитное поле, ток отслеживает звуковой сигнал, колебания с определённой частотой. Соответственно, в контуре магнита имеется переменное магнитное поле, которое меняется вместе с этим самым током. Ферромагнетик намагничивается переменным током. Когда эта лента протягивается по устройству такого типа, переменное магнитное поле создаёт переменную э.д.с. и воспроизводится опять электрический сигнал. Это ферромагнетики на бытовом уровне.

КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

Приставке «квази-» русский эквивалент «якобы», то есть имеется в виду, что поле переменное, но не очень. Теперь мы полагаем, наконец, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, но оставим одно: $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ll \vec{j}$, чтобы не учитывать влияния электрического поля на магнитное. Уравнения Максвелла приобретают такой вид:

- 1) $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_V \rho \cdot dV,$
- 2) $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS,$
- 3) $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0,$
- 4) $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$

3) и 4) уравнения не изменились, это означает, что связь магнитного поля с токами в каждой точке осталась такой же, только мы теперь допускаем изменяющиеся со временем токи. Ток со временем может меняться, но связь магнитного поля и тока остаётся та же самая. Поскольку магнитная индукция $\vec{B}$ связана с током линейно, $\vec{B}$ будет меняться синхронно с током проводника: ток нарастает, магнитное поле нарастает, но связь между ними не меняется. А вот для электрического поля появляется новшество: циркуляция связана с изменением магнитного поля.

Обнаруживается связь между электрическими и магнитными полями, если магнитное поле меняется со временем. Переменное магнитное поле является источником вихревого (замкнутого) электрического поля. Эпитет «вихревой» это не какая-нибудь метафора, а это просто означает, что силовые линии электрического поля замкнуты. Явление электромагнитной индукции описывается

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS.$$

Магнитный поток $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$, «поток» – это термин, вы не должны думать, что там течёт,

это просто такая величина. Если поле однородное, а площадка перпендикулярна силовым линиям, то для этого случая $\Phi = B \cdot S$; если площадка ориентирована так, что нормаль к ней перпендикулярна силовым линиям, то есть магнитное поле скользит по этой поверхности площадки, то поток будет равен нулю. Наглядно величина Φ – это число силовых линий, пересекающих данную площадку. Это число на самом деле зависит от того, как густо мы их нарисуем, но тем не менее эти слова имеют смысл. Имеем однородное магнитное поле. Вот, я возьму площадку 1, тут поток один, теперь я возьму ту же самую площадку, но расположу в точке 2. Здесь (в точке 1) её пересекает пять силовых линий, а здесь (в точке 2) – только две. И, как бы я густо их ни рисовал, картина бы не изменилась.

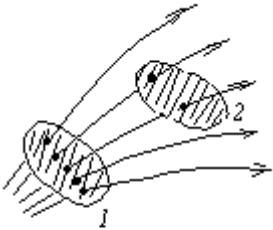


рис. 9.3

Что утверждает закон? А закон утверждает вот что: возьмём замкнутый контур ℓ , на этот контур опирается поверхность S , вычисляем магнитный поток через поверхность, и закон утверждает, если магнитный поток через поверхность, опирающуюся на контур, изменяется со

временем, то есть $\frac{d}{dt} \Phi \neq 0$, то циркуляция напряжённости по контуру не равна нулю и равна $-\frac{d}{dt} \Phi$.

Это означает, что в среднем имеется составляющая электрического поля вдоль этого контура, направленная всё время в одну сторону.

Если я возьму проволочный контур, магнитный поток через площадь будет меняться, то в этом контуре появится электрический ток. Вот такое явление и называется явлением электромагнитной индукции.

Явление электромагнитной индукции – это появление тока в контуре, если меняется магнитный поток через этот контур.

Электродвижущая сила

Интеграл $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ обозначают $\mathcal{E}$ и называется эта величина электродвижущая сила. Какой

смысл имеет термин? В своё время силами называли что ни попадя, сейчас слово «сила» употребляется в одном смысле: правая часть Второго закона Ньютона. И как раз наследие этих старых времён электродвижущая сила применительно к этой величине $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$.

Квазистационарные токи

Вот условие квазистационарности для тока: $\oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$. О чём говорит это уравнение?

Уравнение утверждает, что циркуляция напряжённости магнитного поля равняется полному току, который течёт через поверхность этого контура. А я теперь сделаю вот что: возьму поверхность (пузырь), опирающуюся на контур, а теперь стягиваю горловину. Когда я стягиваю этот контур к точке, вот эта левая часть стремится к нулю, потому что $\vec{H}$ нигде не может достигать бесконечных значений, а что делается с правой частью? Поверхность становится замкнутой при стягивании контура в точку. Из этих рас-

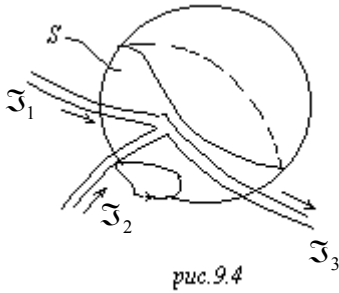


рис. 9.4

суждений мы получаем, что $\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$. Вот это есть условие квази-

стационарности тока. Физически это означает вот что: какой заряд за единицу времени втекает в замкнутую поверхность, такой заряд и вытекает. Это означает в частности вот что: если имеется три проводника, следствие из утверждения будет, что $I_3 = I_1 + I_2$. Охватим точку пересечения замкнутой поверхностью, поскольку токи втекающие за единицу времени и вытекающие равны, это и означает, что $I_3 = I_1 + I_2$.

ЗАКОН ОМА

Для металлических проводников с хорошей точностью выполняется такой закон: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, где величина σ называется проводимость, это некоторая константа, характеризующая способность проводника проводить ток. Это закон в дифференциальной форме, какое отношение он имеет к закону, который вы хорошо знаете $IR = U$? Это следствие, кстати, получите его для цилиндрического проводника.

Закон Ома для цепи с э.д.с.

Если присутствуют сторонние силы, то закон Ома можно написать так: $\vec{j} = \sigma \cdot (-\vec{\nabla} \varphi + \vec{E}_{\text{стор}})$.

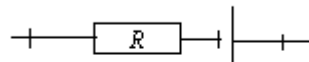


рис. 9.5

Эквивалент этого дела для такой цепи (см. рис. 9.5) $\varphi_1 - \varphi_2 = IR - \varepsilon$. Для замкнутой цепи $IR = \varepsilon$.

Закон сохранения заряда

В прошлый раз мы рисовали такую картинку (рис. 9.1). У нас есть такое уравнение:1)

$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS$. При стягивании контура к точке получим такое уравнение:

$0 = \mu_0 \cdot \oint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS$, сократим на магнитную постоянную и представим интеграл суммы как

сумму интегралов: $\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = - \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} \cdot dS$. Если поверхность фиксирована, то

$\oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS$, а из первого уравнения Максвелла $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_V \rho \cdot dV$, и

мы имеем: $\frac{d}{dt} \int_V \rho \cdot dV = - \oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$ - закон сохранения заряда.

Разрядка конденсатора

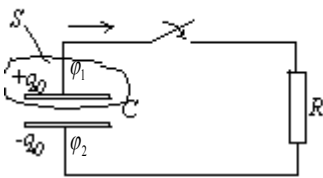


рис. 9.1

$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathfrak{I}R \Rightarrow \mathfrak{I} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}$, с другой стороны мы уже знаем, что для конденсатора $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}$, откуда $\frac{q}{C} = \mathfrak{I}R$. q , $\mathfrak{I}$ – функции времени, чисто формально нужно изгнать одну функцию. Охватим пластину замкнутой поверхностью, $\frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \rho \cdot dV}_q = - \underbrace{\oint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS}_{\mathfrak{I}} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\mathfrak{I}$ (плотность

тока в проводнике на сечение проводника – это сила тока). Составляем

систему уравнений $\begin{cases} \frac{q}{C} = \mathfrak{I}R \\ \frac{dq}{dt} = -\mathfrak{I} \end{cases}$, откуда получаем дифференциальное

уравнение $R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$, которое немедленно решается. Начальные условия у нас такие: $t=0$, $q(0)=q_0$, следовательно $A=q_0$. $q(t) = q(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$.

Явление самоиндукции

Это частный случай электромагнитной индукции. По контуру течёт ток, возникает переменное магнитное поле, $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS \neq 0$, э.д.с., которая наводится в контуре равна: $\varepsilon = \oint_{\ell} \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d\ell = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$, $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$. Это явление называется самоиндукцией. $\Phi \sim \mathfrak{I} \Rightarrow \Phi = L\mathfrak{I}$, L – коэффициент самоиндукции (самоиндуктивность), зависящий от геометрии контура и от окружающей среды. Тогда мы получили такой закон: $\varepsilon_{\text{самоинд}} = -L \cdot \frac{d\mathfrak{I}}{dt}$.

Индуктивность длинного соленоида

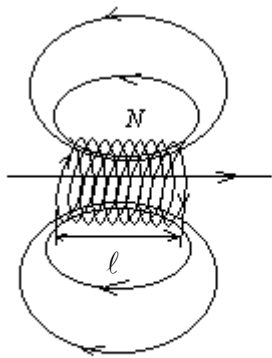


рис. 9.2

Рассмотрим один виток: $\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt}$, $\Phi = B \cdot S = \mu\mu_0 \mathfrak{I} \frac{N}{\ell} \cdot S = \mu\mu_0 \mathfrak{I} n \cdot S$, следовательно $\varepsilon_1 = -\mu\mu_0 \frac{SN}{\ell} \frac{d\mathfrak{I}}{dt}$. Это в одном витке, а полная э.д.с. находится суммированием по всем виткам: $\varepsilon = N\varepsilon_1 = -\mu\mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} \frac{d\mathfrak{I}}{dt}$, коэффициент перед – коэффициент самоиндукции $L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{\ell}$.

Вот вопрос: имеем катушку, что будет, если концы этой катушки всунуть в розетку? Меня этот вопрос интересовал с детства вот в связи с чем: это было давно и там всякие были проекты космических полётов, в качестве одного из проектов был такой: сделать длинный соленоид (такая магнитная пушка) в нём снаряд (металлический космический корабль), и в таком магнитном поле в длинной трубе он должен был бы разгоняться, выстреливаться и лететь. Была у меня такая книжка, там был этот один из проектов, ну, и я решил посмотреть. Взял соорудил картонную трубку, намотал на неё проволоку, посадил туда железную штучку и сунул в розетку посмотреть, будет ли оно лететь. Эффект был, конечно, впечатляющий, когда это всё со страшной вспышкой горело. Но сама проблема, что будет, если обмотку катушки всунуть в розетку, меня с тех пор занимает. Вот вопрос: что будет, если взять обмотанную катушку и сунуть в розетку? Ответ такой: если намотано там достаточно много витков, тогда сопротивление этой намотки будет равно нулю, будет течь переменный ток такой, что э.д.с. самоиндукции в каждый момент времени будет уравновешивать напряжение на клеммах розетки, чем больше индуктивность катушки, тем меньше будет ток, и ничего пикантного не произойдёт, при постоянном токе она сгорит, для постоянного тока такая катушка будет коротким замыканием. Переменный ток – катушку со сколь угодно малым сопротивлением, если у неё достаточно большая индуктивность, можно втыкать, и ничего страшного не произойдёт.

ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Мы уже задавались подобным вопросом для электрического поля и обнаружили, что дарового электрического поля создать нельзя, для этого требуются энергетические, а, следовательно, и финансовые затраты. С магнитным полем точно также: создать даром магнитное поле нельзя. Для того, чтобы создать магнитное поле, необходимо совершить определённую работу, мы сейчас её вычислим.

При нарастании тока в цепи возникает э.д.с., равная $\varepsilon = -L \cdot \frac{d\mathfrak{I}}{dt}$. Эта э.д.с. направлена «против шерсти» (против тока). Для поддержания этого тока требуется мощность $N = \mathfrak{I}\varepsilon$. Значит, работа, которую надо совершить за время dt равна: $dA = N \cdot dt = \varepsilon \mathfrak{I} \cdot dt = L \mathfrak{I} \frac{d\mathfrak{I}}{dt} \cdot dt = L \mathfrak{I} \cdot d\mathfrak{I}$. Мораль: для того, чтобы сила тока увеличилась на $d\mathfrak{I}$, надо совершить работу dA такую (она определяется уже наличным током к моменту времени t). Полная работа это будет интеграл: $A = \int_0^{\mathfrak{I}} L \mathfrak{I}' \cdot d\mathfrak{I}' = \frac{L \mathfrak{I}^2}{2}$. Для того, чтобы создать силу тока $\mathfrak{I}$, необходима работа $\frac{L \mathfrak{I}^2}{2}$, где L – коэффициент самоиндукции.

А теперь спрашивается, куда эта работа девается? Ответ: запасается в виде энергии магнитного поля. Наглядно: имеем генератор с ручкой, мы крутим эту ручку. Работа, которую мы совершаем, крутя эту ручку, переходит в энергию магнитного поля и размазывается по всему пространству.

Пусти магнитное поле локализовано в длинном соленоиде, тогда работа равняется: $A = \frac{L \mathfrak{I}^2}{2} = \frac{\mu \mu_0 N^2 S}{\ell} \cdot \frac{\mathfrak{I}^2}{2} = \underbrace{S \ell}_{V} \cdot \frac{\mu \mu_0 N^2 \mathfrak{I}^2}{2 \ell^2}$, но $\frac{\mu \mu_0 N \mathfrak{I}}{\ell} = B$, а $B = \mu \mu_0 H$, и мы получаем: $A = V \cdot \frac{BH}{2}$.

Эта работа равняется энергии магнитного поля: $W_B = V \cdot \frac{BH}{2}$, величина $\frac{BH}{2}$ имеет смысл плотности энергии. В элементе объёма содержится энергия $dW_B = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \cdot dV$, а в объёме V – $W = \int_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \cdot dV$.

Магнитное поле обладает энергией, и плотность энергии $\frac{BH}{2}$, можно ли её высвободить? Да, конечно, если магнитное поле исчезает, то эта энергия выделяется в той или иной форме.

Создание тока в цепи с индуктивностью

Это создание тока в любой цепи, потому что любая цепь обладает индуктивностью. Имеем такую систему: батарейка, ключ, R – сопротивление цепи, L – индуктивность цепи (не обязательно, чтобы была катушка, потому что, повторяю, любая цепь обладает индуктивностью, но мы нарисуем её). У нас есть правило для замкнутого контура: $\mathfrak{I} = \frac{\varepsilon}{R}$. В данном случае, если ток в цепи меняется, то у нас присутствует э.д.с. батарейки, сосредоточенные там сторонние силы, а кроме того, за счёт самоиндукции развивается э.д.с. Пишем: $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon' = \varepsilon_0 - L \cdot \frac{d\mathfrak{I}}{dt}$ (– это э.д.с. самоиндукции), мы по-

лучаем такое уравнение: $\mathfrak{I} = \frac{\varepsilon_0 - L \cdot \frac{d\mathfrak{I}}{dt}}{R}$, или $L \cdot \frac{d\mathfrak{I}}{dt} + R \mathfrak{I} = \varepsilon_0$, или $\frac{d\mathfrak{I}}{dt} + \frac{R}{L} \cdot \mathfrak{I} = \frac{\varepsilon_0}{L}$. Такое дифференциальное уравнение, линейное, первой степени, неоднородное, решается: $\mathfrak{I}(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$.

Определим A из начальных условий: $t = 0$, $\mathfrak{I}(0) = 0$, это означает, что $A = -\frac{\varepsilon_0}{R}$. Мы тогда получаем

окончательно: $\mathfrak{I}(t) = \frac{\varepsilon_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$. При $t \rightarrow \infty$ получаем $\mathfrak{I} = \frac{\varepsilon_0}{R}$ – разумное решение, а начальная стадия – экспоненциальное нарастание:

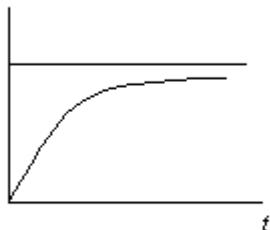


рис. 9.6

Почему, спрашивается, когда вы включаете свет, то он вспыхивает мгновенно? Ответ такой: просто мала индуктивность. Если, например, последовательно с лампочкой поставить хорошую катушку и пустить переменный ток, то лампа вообще гореть не будет, если же подсоединить к аккумулятору, то лампочка будет медленно загораться, а зато, когда вы её выключать будете, там тоже интересная вещь произойдёт: выключение магнитного поля – это выделение энергии, гром, молния и т.д.

Мы закончили обсуждение квазистационарных процессов. Теперь движемся дальше, и последняя тема у нас в электричестве – нестационарные поля.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

Ток смещения

Нестационарные поля описываются полным набором уравнений Максвелла без всяких изъятий:

$$\begin{aligned} 1) \quad \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot dS &= \int_V \rho \cdot dV \\ 2) \quad \oint_\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS \\ 3) \quad \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS &= 0 \\ 4) \quad \oint_\ell \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS \end{aligned}$$

То, что мы до сих пор рассматривали, это четыре уравнения. Но в четвёртом было изъято слагаемое $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Начнём выяснение роли этого слагаемого.

Кстати, весь набор называется «уравнения Максвелла», почему? Первое уравнение – это фактически закон Кулона; второе – закон электромагнитной индукции, который открыл Фарадей; третье – выражает тот факт, что линии магнитной индукции замкнуты, тут трудно даже указать ав-

торство; вот, если выкинуть это слагаемое $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, то четвёртое уравнение 4*. $\oint_\ell \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$ – это закон Био-Савара. Что сделал Максвелл? Одну вещь: он добавил в одно уравнение это слагаемое, и весь набор получил название «уравнения Максвелла».

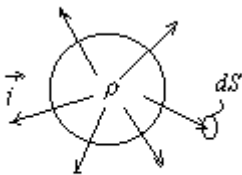


рис. 9.1

А теперь, вот, я не могу сказать, так ли Максвелл рассуждал, но можно привести пример, на котором это уравнение сломалось бы. Вот такой пример. Рассмотрим сферически симметричное распределение заряда, и пусть заряд растекается таким образом: скажем, имеем заряженный шар и заряд растекается из этого шара по радиальным лучам.¹⁾ А теперь спрашивается: какое магнитное поле создаёт вот такой сферически симметричный ток? Ну, поскольку у нас источник сферически симметричный, то магнитное поле должно также быть сферически симметричным. Что это означает? Картина поля должна быть такая, что, если это поле повернуть вокруг любой оси, проходящей через центр симметрии, оно должно переходить в себя. Прекрасно. Но из уравнения 3. следует, что силовые линии магнитного поля замкнуты, мы это уже обсуждали, и создать конфигурацию таких замкнутых линий, чтобы она обладала сферической симметрией, нельзя. Осевую симметрию можно, то есть, чтобы поле переходило в себя при поворотах вокруг некоторой оси, а чтобы оно переходило в себя при поворотах вокруг любой оси... Если напрячь воображение, ясно, что из замкнутых линий сферически симметричного магнитного поля

¹⁾ Это даже можно сделать. Известно, есть радиоактивный распад (когда из ядра вылетают заряженные α -частицы), возьмём шар вот такого радиоактивного вещества, из которого вылетают по радиусу α -частицы (это положительно заряженные ядра гелия), эти заряженные частицы представляют вот такой радиальный ток. То есть, эта ситуация реализуема.

создать нельзя. Из уравнения 3. следует, что для вот такого сферически симметричного тока $\vec{B} = 0$, то есть магнитное поле не создаётся, то есть магнитное поле не создаётся.

Возьмём такой контур ℓ , контур, площадь которого перпендикулярна линиям тока. Применим вот к этому контуру уравнение 4*. – циркуляция по этому контуру не равна нулю. Почему? Потому что уравнение говорит, что циркуляция равна плотности тока, умноженной на эту площадку. Через эту площадку ток течёт, а, раз ток течёт, то циркуляция по этому контуру равна силе тока через эту площадку, во всяком случае, не ноль. Значит, получается, из третьего уравнения следует, что $\vec{B} = 0$, а из уравнения 4*. следует, что $\vec{B} \neq 0$. Оказалось, что два уравнения конкурируют применительно к этой ситуации. Какой вывод, и что, вообще говоря, верно, создаёт такая конфигурация магнитное поле или не создаёт? Соображения симметрии – это более мощные соображения, значит, верно, что $\vec{B} = 0$, то есть выигрывает третье уравнение. Это означает, что четвёртое уравнение со звёздочкой не верно. Но, если добавить это слагаемое $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, тогда нет противоречий между этими двумя уравнениями.

Ещё одно соображение, повторяю, я не знаю, Максвеллу приходило это в голову или нет, но могло приходиться в голову и, наверно, приходило. Для электромагнитного поля в пустоте уравнение 2. даёт: $\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS$. Вот, когда пишется частная производная, имеется в виду, что контур фиксирован в пространстве, контур не движется. Смысл его такой, что, если меняется со временем (не то, что контур переехал куда-нибудь), то возникает электрическое поле. Уравнение 4*. даёт для пустого пространства $\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$, потому что $\vec{j}$ в пустоте нет. Нарушается симметрия, то есть, вообще говоря, здесь было бы неплохо, если бы циркуляция по равнялась бы потоку от производной $\vec{B}$. Какая физика стоит за этим уравнением? Переменное магнитное поле создаёт электрическое поле, а переменное электрическое поле – ничего не создаёт. Вот, соображения симметрии в нынешней физике очень популярны, ну, потому что это ключ ко многим проблемам, нарушение симметрии раздражает и нуждается в объяснении. На самом деле, если мы возьмём полное уравнение 4., то настоящее уравнение в пустоте даст следующее: $\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$. Уравнение 2. Фарадей открыл экспериментально, а это – симметричное явление электромагнитной индукции – это Максвелл высосал из пальца. Никаких экспериментальных данных для этого не было, потому что, на самом деле, этот эффект очень трудно наблюдаем (константа очень мала), и практически создать переменное электрическое поле и обнаружить возникновение магнитного поля в те времена было невозможно. Можно было сыграть на очень больших производных, короче говоря, просто двигая электрическим зарядом, заметное магнитное поле не создастся, скажем, если вы этот заряд дёргаете с частотой миллион колебаний в секунду, можно мыло бы заметить магнитное поле. Если двигать заряд, согласно уравнению 4., создастся магнитное поле, но настолько маленькое при умеренных частотах, что практически его обнаружить нельзя. Максвелл написал его по аналогии, следствием оказалось существование электромагнитных волн, о которых до Максвелла никто и не помышлял. И когда примерно через двадцать лет электромагнитные волны были обнаружены, вот тогда эта Максвелловская теория и вот это уравнение 4. были признаны, наконец, и все эти построения из гипотезы превратились в теорию.

Величина $\vec{j}' = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (это величина, по размерности равная плотности тока) называется *током смещения*. Название принадлежит Максвеллу, название осталось, а аргументация пропала: ничего там не смещается, и название «ток смещения» не должно вызывать в вас никаких ассоциаций с тем, что там что-то смещается, это термин, который остался по историческим причинам.

Мораль такая: переменное электрическое поле само по себе создаёт магнитное поле. И всё замыкается! Переменное магнитное поле является источником электрического, переменное электрическое поле является источником магнитного, и уравнения в вакууме приобретают симметричный вид (отличие только в знаке перед производной, но это не столь страшное нарушение симметрии).

Введение этого тока смещения в первом примере спасает дело: на этой картине $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{j}$ и $\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} = 0$. Короче говоря, циркуляция $\vec{H}$ по любому контуру – ноль. Таким образом, четвертое уравнение для этого сферически симметрично растекающегося тока даёт, что магнитное поле равно нулю. Эта Максвелловская поправка навела порядок, и теория стала непротиворечивой.

Закон сохранения энергии для электромагнитного поля

Я напишу уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

$$1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Теперь делаем следующее: уравнение 2) я скалярно умножу на $\vec{H}$, уравнение 4) я скалярно умножу на $\vec{E}$: $\vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Теперь из второго уравнения вычтем первое:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \underbrace{\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})}_{\vec{\nabla} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}]} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Для однородного диэлектрика $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2}{2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \right)$. Это были наводящие со-

ображения, на самом деле, в общем случае $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} \right)$, точно также $\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} \right)$. То-

гда уравнение приобретает такой вид: $\frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}}_w \right) + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot [\vec{E} \times \vec{H}]}_{\vec{S}}$ или

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Есть теорема Гаусса, которая сводит интеграл по объёму от дивергенции к поверхностному интегралу¹⁾. Имеет место тождество $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \cdot dV = \oint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$, буква у меня S у меня уже занята, поэто-

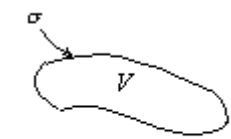


рис. 9.2

му я пишу σ . Тогда выбираем в пространстве некоторый объём V , σ – ограничивающая его поверхность, и мы получаем такую вещь: $\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \cdot dV + \oint_{\sigma} \vec{S} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV$. В те тока нет, и мы получаем уравнение $\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \cdot dV = - \oint_{\sigma} \vec{S} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$ (9.1).

Напомню закон сохранения заряда: $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = - \oint_{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$. Смысл какой? Если заряд убывает, то за счёт того, что он вытекает через поверхность, ограничивающую объём.

Теперь смотрим на формулу (9.1): скорость изменения w в объёме выражается через изменение вектора $\vec{S}$ через эту поверхность. Структура одинаковая, вопрос, что такое w и что такое $\vec{S}$? Что такое w , мы уже знаем: $w = \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$ это *плотность энергии электромагнитного поля*, плотность энергии электромагнитного поля в единице объёма. Тогда интеграл – это полная энергия электромагнитного поля в объёме. $\vec{S} \cdot \vec{n} \cdot dS$ это энергия, протекающая через единицу площади за единицу времени, а $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ это плотность потока энергии (*вектор Пойнтинга*), по размерности $[\vec{S} \cdot \vec{n} \cdot dS] = Bm$, а $[\vec{S}] = \frac{Bm}{m^2}$.

¹⁾ Физические законы такие вообще, что, когда в них встречается дивергенция какого-то вектора, то у всякого физика непременно возникает желание интегрировать по объёму эту дивергенцию.

$\vec{j} \cdot \vec{E}$ - это работа электромагнитного поля в единице объёма. Эта работа может проявляться в виде тепла или в виде работы, если там стоит мотор, например.

А теперь применение этой теоремы. Такая цепь (см. рис.9.2.), кружочком обозначен мотор. Ключ замыкается, мотор вертится, и я желаю применить эту теорему. Возьму замкнутую поверхность σ , тогда мы получим

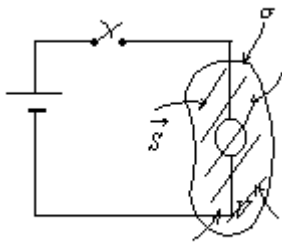


рис.9.3

$$\int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \cdot dV = - \oint_{\sigma} \vec{S} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$$
. Интеграл – это мощность электродвигателя или

работа в единицу времени, $N = \frac{dA}{dt} = - \oint_{\sigma} \vec{S} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$. Мотор совершает ра-

боту за счёт энергии, которая втекает в объём. Это я к чему говорю? Мотор совершает работу за счёт того, что через замкнутую поверхность, которой его можно охватить, из вакуума течёт энергия поля, которая представляется вектором Пойнтинга. Это означает, что для того,

чтобы электромотор работал. В окрестности должны присутствовать два поля, так как $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Энергия передаётся через пустое пространство и втекает внутрь этого объёма. Спрашивается тогда, чего же электрика валяют дурака и тянут провода от источника к потребителю? Ответ очевиден: провода нужны для того, чтобы создать такие поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ соответствующей конфигурации. Тогда вопрос другой, а нельзя ли создать такие поля, чтобы энергия передавалась через пустоту без проводников? Можно, но это в следующий раз. Так, всё, конец.

12

В прошлый раз мы рассмотрели вектор Пойнтинга. Напомню, энергия электромагнитного поля передаётся через пустое пространство, не по проводам. В общем виде ситуация тут такая: имеется некоторая область, в эту область загоняется какая-то энергия (скажем, из этой области торчит вал с ручкой и тут человек этот вал крутит) и дальше эта энергия через пустое пространство втекает в другую область, там, например, находится некоторое устройство, которое перерабатывает втекающую сюда энергию и на выходе выдаёт снова какую-то работу (скажем, здесь стоит генератор или электромотор).

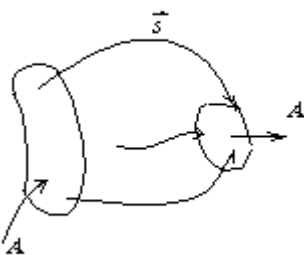


рис.12.1

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Я уже говорил, что Максвелл усовершенствовал уравнения (добавил туда ток смещения), и получилась, наконец, замкнутая теория, и венцом постижения этой теории было предсказание существования электромагнитных волн. Надо понимать, что никто этих волн до Максвелла не видел, никто даже не подозревал, что такие вещи могут быть. Но, как только были получены эти уравнения, из них математически следовало, что должны существовать электромагнитные волны, и лет через двадцать после того, как это предсказание было сделано, они стали наблюдаемы, и тогда был триумф теории.

Уравнения Максвелла допускает существование вещи, которая называется электромагнитной волной. Но в природе оказывается так – то, что возможно в рамках правильной теории, то и на самом деле существует.

Сейчас мы должны будем усмотреть вслед за Максвеллом, что должны быть эти волны, то есть совершить такое математическое открытие, чтобы, глядя на уравнения Максвелла, сказать: «А, ну, конечно, должны быть волны».

Уравнения Максвелла в пустоте

Чем замечательна пустота? В пустоте нет зарядов $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Уравнения приобретают вид:

$$1) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$3) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ну, и сразу бросается в глаза замечательная симметрия, симметрия нарушается только тем, что в уравнении 4) константа размерная и знак. Размерная константа – несущественно, это связано с системой единиц, можно выбрать такую систему единиц, где эта константа просто единицей будет. Это дифференциальные уравнения, но положение осложняется тем, что переменные перекрещиваются. Поставим для начала скромную задачу – написать уравнение, которое содержало бы только одну неизвестную величину, $\vec{E}$ например.

Значит, первая наша цель – исключить из уравнения 2) $\vec{B}$. Как исключить? А очень просто: мы видим, что в четвёртом уравнении сидит переменная $\vec{B}$, если мы на это уравнение подействуем векторно оператором $\vec{\nabla}$, то в правой части выскочит $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$...

Второе уравнение даёт: $\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} \right] = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$. Добавляя четвёртое уравнение мы получаем: $\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} \right] = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ или¹⁾

$$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0.}$$

Мы получили уравнение, которое утверждает, что вторая производная по времени от $\vec{E}$ связана со вторыми производными от компонент по координатам, то есть изменение величины $\vec{E}$ в данной точке со временем увязано с пространственным изменением этой величины.

¹⁾ Имеет место такое математическое тождество $\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{a} \right] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{a}$. Из первого уравнения $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$,

поэтому $\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} \right] = \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E}$.

Волновое уравнение и его решение

Вот чисто математическая проблема:

уравнение вида $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \xi = 0$, где $\xi = \xi(x, y, z, t)$ – функция координат и времени, $\vec{k}$ и ω

константы, называется *волновым уравнением*.

Не будем решать уравнение в частных производных, а я сейчас предъявлю одно важное частное решение, и будет доказано, что оно действительно является решением.

Утверждение. Функция вида $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 e^{\frac{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}{u}}$ удовлетворяет волновому уравнению (частное решение).

Частное решение, вообще-то, угадывается и проверяется методом тыка. Вот, мы сейчас подставим это решение в уравнение и проверим. Что уравнение утверждает? Что вторая производная по времени от этой функции совпадёт с пространственными производными.

Пишем: $\frac{\partial \xi}{\partial t} = i \xi_0 e^{iu} \cdot \frac{du}{dt} = -i \omega \xi_0 e^{iu} = -i \omega \xi$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi$.

Вот чем замечательна комплексная экспонента: можно было бы записать действительные синусы и косинусы, но дифференцировать экспоненты гораздо приятнее, чем синусы и косинусы.

Дальше: $\vec{\nabla} \cdot \xi = \xi_0 e^{iu} \cdot i \vec{\nabla} \cdot u$.

$\vec{\nabla} \cdot u = i \frac{\partial}{\partial x} (\vec{k} \cdot \vec{r}) + j \frac{\partial}{\partial y} (\vec{k} \cdot \vec{r}) + k \frac{\partial}{\partial z} (\vec{k} \cdot \vec{r}) = i \frac{\partial}{\partial x} (k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z) + \dots$

$\vec{\nabla} \cdot u = i k_x + j k_y + k k_z = i \vec{k}$, значит, $\vec{\nabla} \xi = i \vec{k} \xi$. Опять замечательная вещь: оператор ∇ дей-

ствует на функцию ξ , эта функция просто умножается на $i \vec{k}$, тогда немедленно находим повторное действие оператора¹⁾: $\vec{\nabla}^2 \xi = i \vec{k} (\vec{\nabla} \xi) = -\vec{k}^2 \xi$.

Подставим в исходное уравнение: $-\frac{1}{c^2} \omega^2 \xi - \vec{k}^2 \xi = 0$, отсюда получаем $\frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k}^2$.

Мораль такая: функция вида $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 e^{\frac{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}{u}}$ удовлетворяет нашему уравнению, но только при таком условии:

$$\boxed{\frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k}^2}.$$

Это факт математический. Нам остаётся сообразить теперь, что эта функция изображает.

Если перейти в действительную область, то есть взять сужение этого множества функций на класс действительных функций, это будет решение такого типа: $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$. Чтобы не мучиться с тремя переменными, можно это дело упростить: пусть $\vec{k} = k \vec{i}$, тогда $\vec{k} \cdot \vec{r} = kx$. Заметим, что это никакое не ограничение общности, ось x мы всегда можем выбрать вдоль вектора $\vec{k}$. Мы получили функцию от двух переменных: $\xi(\vec{r}, t) = \xi(x, t)$. А теперь будем смотреть, что эта функция представляет.

¹⁾ Воспользуемся формулой $\vec{\nabla}(\alpha \vec{a}) = \vec{a} \vec{\nabla} \alpha + \alpha \vec{\nabla} \vec{a}$ и учтём, что $\vec{\nabla} \cdot \vec{k} = 0$.

Делаем мгновенную фотографию: фиксируем момент времени $t = t_1$ и смотрим пространственную конфигурацию.

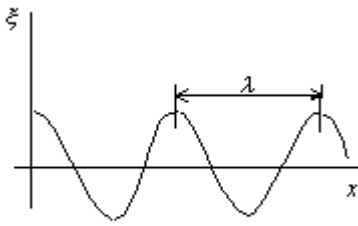


рис. 12.2

Период синуса 2π , ясно, когда x меняется на λ – длину волны (пространственный период), то синус должен измениться на 2π , мы имеем такое соотношение: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Мы проинтерпретировали константу k – волновое число, а вектор – волновой вектор. Эта мгновенная фотография показывает, как функция зависит от пространства.

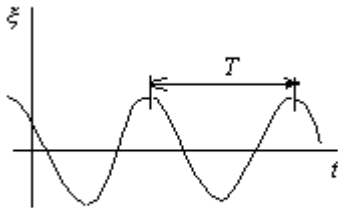


рис. 12.3

Теперь будем следить за временным изменением, то есть сидим в точке x и смотрим, что делается с функцией ξ со временем. Фиксируем $x = x_1$, тогда $\xi(x_1, t) = \xi_0 \sin(kx_1 - \omega t)$, значит, в фиксированной точке опять синусоидальная функция времени. Мы имеем, поскольку период синуса 2π , $\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$, то есть мы проинтерпретировали константу ω , ω называется частотой.

И остаётся, наконец, последнее: запустить обе переменные λ и t , что тогда эта функция будет изображать? Тоже легко понять.

Если $u = kx - \omega t = \text{const}$, то $\xi(u) = \text{const}$, а $kx - \omega t = \text{const}$ означает в свою очередь, что $\frac{x}{t} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow x = \frac{\omega}{k}t$. Для событий, для которых координата – линейная функция времени $x = \frac{\omega}{k}t$, функция всё время одна и та же. Это можно проинтерпретировать так: если мы будем бежать вдоль оси x со скоростью $v = \frac{\omega}{k}$, то мы будем всё время видеть перед собой одно и то же значение этой

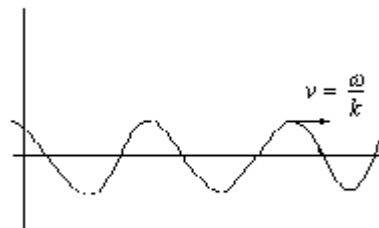


рис. 12.4

функции.

Функция, которую мы получили – это синусоидальная волна, бегущая вправо вдоль оси x .

Если мы запустим x и t одновременно, то окажется, что эта синусоида бежит вдоль оси со скоростью $v = \frac{\omega}{k}$, вот такое решение мы получили, ну и тогда понятно, почему это называется волной.

Вот то, что я говорил, что, если мы будем бежать с такой скоростью, мы будем видеть одно и то же значение функции, наглядно:

Волны на воде. Для волны на воде – это отклонение волны от горизонтального уровня. Когда вы будете бежать вдоль этой волны со скоростью её распространения, то вы всё время будете видеть перед собой одну и ту же высоту над поверхностью воды.

Другой пример – **звуковая волна.**

Имеем синусоидальную звуковую волну. Как её создать? Источник колеблется с одной частотой (такой гул на одной частоте мы редко воспринимаем, он, кстати, очень раздражает). Если идёт такая волна определённой тональности, то, когда вы стоите, у вас в ухе давление со временем меняется и создаёт силу, которая давит на перепонку в ухе, колебания перепонки передаются в мозг, с помощью там разных передаточных устройств, и мы будем слышать звук. А что будет, если вы будете бежать вдоль волны со скоростью её распространения? Будет постоянное давление на перепонку и всё, не будет никакого звука. Правда, пример гипотетический, потому что, если в воздухе бежать со скоростью звука, то у вас будет так свистеть в ушах, что вам не будет не до восприятия этой струны.

Волна бежит со скоростью $\frac{\omega}{k}$, но у нас такое соотношение: $\frac{\omega}{k} = c = v$. Мы видим, что скорость – это та константа, которая стоит в уравнении.

Решением волнового уравнения является синусоидальная волна, бегущая со скоростью c .

А теперь вернёмся к уравнениям Максвелла. Мы там получили, что $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0$.

Для магнитного поля аналогично. Такая функция $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ удовлетворяет этому уравнению. При условии, что $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$ – *скорость света*. Значит, должны быть электромагнитные волны, распространяющиеся с такой скоростью $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. И вот тут уже круг замкнулся. Максвелл получил волновое уравнение и определил скорость волны, а к тому времени было известно экспериментальное значение скорости света, и обнаружилось, что эти скорости равны.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

ЛЕКЦИИ ПО ОПТИКЕ И АТОМНОЙ ФИЗИКЕ.

САМАРА 2013

УДК 53(075)

Л-43

Рецензент: канд. физ.-мат наук, доц. С м и р н о в а Н . П

Лекции по оптике и атомной физике. / В. Н. Кнестяпин, И. В. Овчинникова, С. И. Гусева, И. П. Завершинский. - Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 105 с.: ил.

Пособие содержит базовый курс лекции оптике для студентов 1 – 6 факультетов СГАУ всех специальностей и направлений.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

1 Лекция №1 "Электромагнитные волны"

Система уравнений Максвелла. Волновое уравнение и скорость света. Плоские волны. Фазовая скорость. Вопросы для самостоятельной работы.

Цель первой лекции — доказать существование и вывести основные свойства электромагнитных (ЭМ) волн с помощью уравнений Максвелла; познакомиться с математическим аппаратом представления волн простейшего вида.

1.1 Система уравнений Максвелла

Электромагнитное поле в вакууме описывается двумя векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженностью электрического и магнитного полей, соответственно, которые мы будем называть основными. Для описания эффекта влияния ЭМ поля на материальные объекты необходимо дополнительно ввести векторы плотности электрического тока проводимости $\mathbf{j}$, электрического смещения $\mathbf{D}$ и индукции магнитного поля $\mathbf{B}$.

Уравнения Максвелла, Джеймс Кларк Максвелл (1831–1879), связывают между собой в каждой точке пространства с координатой (x, y, z) в любой момент времени t эти пять векторных величин системой дифференциальных уравнений. Совместно эти уравнения описывают эволюцию ЭМ поля, выражая в математической форме фундаментальные законы электричества и магнетизма

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} &= \mathbf{j}, & \text{обобщенный закон Ампера,} \\ (1) \quad \text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= 0, & \text{закон ЭМ индукции Фарадея,} \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho, & \text{закон Гаусса для эл. поля,} \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, & \text{закон Гаусса для магн. поля,} \end{aligned}$$

где ρ обозначает объемную плотность электрических зарядов; точка на векторе обозначает операции дифференцирования по времени; знаки "rot" и "div" обозначают операции векторного анализа — ротора и дивергенции.

Если ввести векторный дифференциальный оператор "набла"

$$(2) \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

то ротор и дивергенцию можно в декартовой системе координат представить в следующем виде

$$(3) \quad \text{rot } \mathbf{H}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} \equiv [\nabla, \mathbf{H}(x, y, z)],$$

$$(4) \quad \text{div } \mathbf{D}(x, y, z) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \equiv (\nabla, \mathbf{D}(x, y, z)),$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ обозначают орты декартовой системы координат.

Первое уравнение Максвелла является обобщением на случай переменного магнитного поля закона Био–Савара–Лапласа: оно выражает зависимость магнитного поля от плотности тока проводимости и плотности тока смещения $\dot{\mathbf{D}}$ (т. е. скорости изменения электрического поля). Второе уравнение представляет собой закон ЭМ индукции Фарадея; третье выражает наши данные о том, что у магнитного поля нет других источников, кроме электрического тока; четвертое уравнение является обобщением закона Кулона.

Система из четырех уравнений Максвелла (1), связывая между собой 5 основных, или независимых, величин

$$\mathbf{E}, \quad \mathbf{H}, \quad \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} \quad \text{и} \quad \mathbf{j},$$

не является замкнутой. Для того чтобы эти уравнения при заданных распределениях $\mathbf{j}$ и ρ допускали единственное решение для векторов поля, необходимо добавить **материальные уравнения**, которые описывают "отклик" материальной среды на действие ЭМ поля.

Для физически изотропной среды материальные уравнения имеют линейную форму

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E}, & \text{закон Ома в дифференциальной форме,} \\ (5) \quad \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mu \mathbf{H}, \end{aligned}$$

где ε_0 и μ_0 — соответственно **электрическая и магнитные постоянные**¹, $\varepsilon(x, y, z)$ и $\mu(x, y, z)$ — относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, а σ — ее удельная проводимость.

Основные уравнения Максвелла (1) и материальные уравнения (5) линейны. Таким образом в изотропной среде справедлив принцип суперпозиции: при наложении поля не оказывают влияние друг на друга.

Большая часть курса будет посвящена распространению света в среде, в которой не происходит его заметное ослабление. Такая среда называется прозрачной. Она должна быть непроводящей, т. е. $\sigma = 0$.

1.2 Волновое уравнение

Рассмотрим поле в области, где нет сторонних эл. зарядов и токов, т. е. $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. Первое и второе уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{aligned} (6) \quad \text{rot } \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} &= 0, & \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} &= 0, & \mathbf{B} &= \mu_0 \mu \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Член с током смещения в первом уравнении этой системы имеет первостепенное значение. Его присутствие означает возможность появления ЭМ волн. Таким образом, теория Максвелла позволяет с блестящим успехом развить электромагнитную теорию света.

Дифференциальное уравнение, которому должен удовлетворять вектор напряженности электр. или магн. полей в отдельности, получаются путем

¹По современным данным: $\varepsilon_0 = 8,85418782 \times 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 1,2566370614 \times 10^{-6}$ Гн/м

исключения. Для среды с постоянной магнитной проницаемостью $\mu = \text{const}$ найдем с использованием соотношения векторной алгебры

$$(7) \quad \text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

найдем, что

$$(8) \quad \Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \ddot{\mathbf{E}} - \text{grad div } \mathbf{E} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Материальное уравнение для $\mathbf{D}$ дает

$$(9) \quad \varepsilon \text{div } \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \text{grad } \varepsilon = 0.$$

Тогда уравнение (8) можно записать так

$$(10) \quad \Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \text{grad} (\mathbf{E} \cdot \text{grad } \ln \varepsilon) = 0,$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 299,792.458$ км/с – скорость света. Аналогично можно получить уравнения для вектора $\mathbf{H}$

$$(11) \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} + (\text{grad } \ln \varepsilon) \times \text{rot } \mathbf{H} = 0.$$

Для однородного диэлектрика, $\text{grad } \ln \varepsilon = 0$, уравнения (10) и (11) преобразуются к стандартным уравнениям волнового движения

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} &= 0, \end{aligned}$$

Следовательно из уравнений Максвелла следует теоретическая возможность существования волн ЭМ природы, распространяющихся со скоростью

$$(13) \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Существование ЭМ волн впервые экспериментально было доказано в 1888 г. Генрихом Рудольфом Герцем (1857–1894). В результате исследований Г.Р. Герц доказал, что (1) максвелловское предположение о токе смещения верно; (2) ЭМ волны полностью тождественны световым: они отражаются и преломляются, поляризуются и способны интерферировать.

Термин "скорость распространения ЭМ волны" имеет однозначный физический смысл лишь для волн простого вида, например плоских волн. Поэтому скорость, определяемая уравнением (13) не определяет скорость распространения произвольного решения (12).

Значение скорости v , как правило, определяется косвенно по отношению к скорости света c . Согласно закону преломления для плоской волны, падающей на границу двух однородных сред,

$$(14) \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2},$$

где θ_i и θ_t – угол падения и преломления соответственно, а v_1 и v_2 – скорость волны в первой и второй среде. Отношение скоростей обозначается

	$n(\text{желтая линия})$	$\sqrt{\varepsilon}$
Воздух	1.000294	1.000295
Водород H_2	1.000138	1.000132
Углекислый газ CO_2	1.000449	1.000473
Угарный газ CO	1.000340	1.000345

Таблица 1: Абсолютные показатели преломления и статические диэлектрические постоянные некоторых газов (по Л. Больцману)

как n_{12} – **относительный показатель преломления** для преломления света из первой среды во вторую. **Абсолютный показатель преломления** каждой среды определяется при падении света на среду из вакуума

$$(15) \quad n = \frac{c}{v}.$$

Обозначая абсолютные показатели преломления двух сред как n_1 и n_2 , найдем

$$(16) \quad n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Сопоставив формулы (13) и (16), получим формулу Максвелла

$$(17) \quad n = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Для того чтобы найти значение абсолютного показателя преломления среды n необходимо знать диэлектрическую и магнитную проницаемость среды. Для большинства прозрачных сред в оптической области диапазона ЭМ волн $\mu \cong 1$, поэтому

$$(18) \quad n \cong \sqrt{\varepsilon}.$$

Эта формула, полагая что ε есть диэлектрическая постоянная среды, дает верное значение для показателя преломления среды с низкой дисперсией (газы). Для твердых тел и некоторых жидкостей между значениями, получаемым из формулы Максвелла и эксперимента, находится существенное расхождение, см. Таблицы 1 и 2². В этом случае необходимо учесть дисперсию, т. е. зависимость ε от частоты ЭМ поля.

1.3 Плоские волны. Фазовая скорость.

Простейшее решение волновых уравнений (10) и (11) – это **монохроматическая плоская бегущая волна**. Колебания напряженностей эл. и магн. полей происходят по закону

$$(19) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}}{v} \right) \right]$$

$$(20) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}}{v} \right) \right],$$

²Значения для показателя преломления n веществ приведены для желто-оранжевой линии $\lambda_D = 5893 \text{ \AA}$ в спектре излучения паров натрия.

	$n(\text{желтая линия})$	$\sqrt{\varepsilon}$
Бензол C_6H_6	1.482	1.489
Метиловый спирт CH_3	1.34	5.7
Этиловый спирт C_2H_5OH	1.36	5.0
Вода H_2O	1.33	9.0

Таблица 2: Абсолютные показатели преломления и статические диэлектрические постоянные некоторых жидкостей

где $\mathbf{N}$ – единичный вектор, задающий направление распространения волны, $\mathbf{r}(x, y, z)$ – радиус-вектора точки P в пространстве, в которую пришла волна; $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ – амплитуды волны.

Левая часть уравнений (19) остается неизменной при замене $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{N} \cdot \mathbf{r} + \lambda$, где

$$(21) \quad \lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = vT = \frac{v}{\nu}.$$

Здесь λ называется **длиной волны** в данной среде, T – **период колебаний** и ν – **частота волны**. Длина волны той же частоты, распространяющейся в вакууме, равна

$$(22) \quad \lambda_0 = cT = n\lambda.$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$ характеризуют быстроту изменения фазы волны с течением времени. Для характеристики быстроты изменения фазы с расстоянием вводят **волновое число**

$$(23) \quad \kappa = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\nu}{c}.$$

Удобно определить векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ в направлении $\mathbf{N}$, длина которых равна

$$(24) \quad |\mathbf{k}_0| = 2\pi\kappa = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$$

и

$$(25) \quad |\mathbf{k}| = n|\mathbf{k}_0| = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\omega}{c} = \frac{\omega}{v}.$$

Векторы $\mathbf{k} = k\mathbf{N}$ называется **волновым вектором** в данной среде, а $\mathbf{k}_0 = k_0\mathbf{N}$ – волновым вектором в вакууме.

Аргумент гармонической волны называется **фазой**

$$(26) \quad \varphi(t, \mathbf{r}) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

В фиксированный момент времени $t = t_0$ точки пространства, имеющие одинаковое значение φ , образуют плоскость равной фазы, называемую **волновым фронтом**

$$(27) \quad \begin{aligned} d\varphi &= \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}, \\ d\varphi &= 0 - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{в данный момент времени,} \\ d\varphi &= 0, \quad \text{в случае когда } d\mathbf{r} \text{ перпендикулярно } \mathbf{k}. \end{aligned}$$

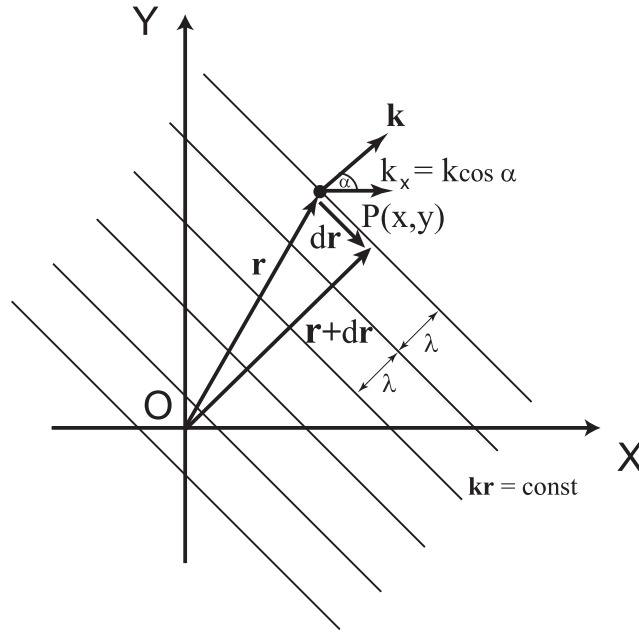


Рис. 1: Плоская волна. Волновой фронт перпендикулярен плоскости XY .

В заданный момент времени значение фазы будет постоянно, т. е. $d\varphi = 0$ во всех точках, образованных смещением на вектор $d\mathbf{r}$, перпендикулярный направлению распространения волны $\mathbf{k}$. Так как геометрическое место этих точек образует плоскость, такие волны называют **плоскими**.

В каждый момент времени волновые поверхности (поверхности одинакового значения поля) представляют собой плоскости, перпендикулярные вектору $\mathbf{k}$. Уравнение волновой поверхности имеет следующий вид

$$(28) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z = \text{const},$$

где $k_{x,y,z}$ – проекции волнового вектора, которые определяют скорость распространения фазы в направлении координатных осей XYZ соответственно. С физической точки зрения волновое число k представляет собой число радиан фазы на единицу смещения вдоль направления распространения волны $\mathbf{N}$. Величина k_x соответствует числу радиан, отнесенному к единицы смещения вдоль положительного направления оси X . Аналогичный смысл имеют k_y и k_z . Если продвинуться на расстояние длины волны λ вдоль $\mathbf{N}$, то фазы волны возрастет на 2π радиан. Если перемещение происходит вдоль оси X , что чтобы фаза волны увеличилась на 2π радиан, надо пройти расстояние $\lambda / \cos \alpha$, где α – направляющий косинус. Таким образом, увеличение фазы на единицу длины оси X меньше чем волновое число k в $\cos \alpha$ раз. Так и должно быть, поскольку проекция вектора $\mathbf{k}$ на направление $\mathbf{e}_x$ (т. е. $k_x = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_x$) всегда меньше длины вектора в отношении, определяемом косинусом соответствующего угла.

Фазовая скорость определяется как $\frac{|d\mathbf{r}|}{dt}$ при $\varphi = \text{const}$, т. е.

$$(29) \quad d\varphi = \omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad v_{ph} = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Соответственно скорость v в уравнении (19) будет фазовой скоростью. Это

– скорость перемещения постоянной фазы волны в направлении $\mathbf{k}$

$$(30) \quad v \equiv v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

В некоторых случаях фазовая скорость ЭМ волны, попавшей в вещество, может оказаться больше чем скорость света c . Для плоской волны это произойдет когда $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ будет меньше единицы (случай аномальной дисперсии). Согласно специальной теории относительности скорость перемещения физической материи и скорость передачи информации (сигнал) не могут превышать скорости света в вакууме (максимальная скорость). Это означает, что фазовая скорость не соответствует скорости, с которой распространяется сигнал. Это связано с тем, что плоская монохроматическая волна является физической абстракцией (волна бесконечно протяженная в во времен и пространстве) никогда не реализующейся на практике. В линейных средах, где соблюдается **принцип суперпозиции**, физические волны, локализованные в пространстве – группа или пуч волн, представляют собой суперпозицию монохроматических волн. Скорость распространения пуча волн, **групповая скорость**, в веществе, не обладающем сильной дисперсией, соответствует скорости распространения энергии.

Принимая во внимание формулу Эйлера

$$(31) \quad e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

при работе с плоскими волнами удобно пользоваться комплексной формой записи

$$(32) \quad \mathbf{E} = \Re \{ \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \},$$

$$(33) \quad \mathbf{H} = \Re \{ \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \},$$

где $\Re$ обозначает реальную часть комплексной экспоненты, а амплитуда может быть как действительной, так и комплексной или мнимой. При работе с уравнениями линейными относительно $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, символ $\Re$ можно отбросить и работать непосредственно с комплексной функцией. В конечных выражениях только реальная часть будет иметь физический смысл. Однако при работе выражениями квадратичными по полям (энергия, поток) необходимо вычислять сперва реальную часть прежде чем делать вычисления.

Комплексная форма записи удобна для дифференцирования как по времени так и по координате. Например

$$(34) \quad \text{rot } \mathbf{H} = -i[\mathbf{k}, \mathbf{H}], \quad \dot{\mathbf{H}} = i\omega \mathbf{H}.$$

Тогда система уравнений Максвелла (1) в однородном незаряженном диэлектрике сводится к системе алгебраических уравнений вида

$$(35) \quad [\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \omega \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{H}] = -\omega \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}.$$

Умножая обо уравнения на $\mathbf{k}$, получим

$$(36) \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Это соотношение выражает условие **поперечности ЭМ волны**, т. е. векторы эл. и магн. полей лежат в плоскостях перпендикулярных направлению распространения волны. Из (35), что векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов. Кроме этого

$$(37) \quad \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} |\mathbf{E}| = \sqrt{\mu_0 \mu} |\mathbf{H}|.$$

1.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Записать уравнения Максвелла (1) и материальные уравнения (5) в гауссовой системе единиц.
2. Запишите уравнения Максвелла в интегральном виде.
3. Какую "роль" играет скорость света в гауссовой системе единиц?
4. Используя первое и второе уравнения Максвелла, выведите закон сохранения заряда в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Используя теорему Гаусса запишите это соотношение в интегральной форме.

5. Доказать, что если среда является прозрачной, то она – непроводящая.
6. Вывести волновое уравнение для вектора магнитной напряженности ЭМ поля (11).
7. Почему бессмысленно вводить вектор длины волны λ ?
8. Выведите условие совместности (или дисперсионное соотношение)

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2.$$

уравнений (35), полагая $\mathbf{k}$ произвольным (реальным или комплексным) вектором, направленным перпендикулярно $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

2 Лекция №2 "Отражение и преломление света"

Вывод законов отражения и преломления света.

Явление полного отражения света.

Цель настоящей лекции – вывести законы отражения и преломления света на основе уравнений Максвелла. Идея заключается в том, что поведение ЭМ на границе полностью определяется граничными условиями для векторов электр. и магн. поля волны.

2.1 Вывод законов отражения и преломления света

Когда плоская волна падает на идеально гладкую границу³ двух однородных сред с различными оптическими свойствами, происходит ее расщепление на две волны: **преломленную** и **отраженную**, распространяющиеся во второй и первой среде, соответственно, в направлении от границы раздела. Факт существования отраженной и преломленной волн следует из граничных условий, которым должны удовлетворять векторы ЭМ поля на границе раздела. Мы наивно предположим, что эти волны также являются плоскими, и выведем соотношения между направлениями их распространения.

Итак, на гладкую границу раздела двух незаряженных однородных диэлектриков (проницаемости $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и $\varepsilon_1 = n_1^2$ и $\varepsilon_2 = n_2^2$) падает плоская монохроматическая волна. Пусть поверхность раздела – плоскость XY ; ось X – линия пересечения поверхности раздела с плоскостью падения XZ ; ось Z направлена перпендикулярно к плоскости падения, см. рис. 2

$$(38) \quad \mathbf{E}_i = \mathbf{A}_i \exp[i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{B}_i = \frac{[\mathbf{k}_i, \mathbf{E}_i]}{\omega_i},$$

$$(39) \quad \mathbf{E}_r = \mathbf{A}_r \exp[i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{B}_r = \frac{[\mathbf{k}_r, \mathbf{E}_r]}{\omega_r},$$

$$(40) \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{A}_t \exp[i(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{B}_t = \frac{[\mathbf{k}_t, \mathbf{E}_t]}{\omega_t},$$

где индексы $i(ncident)$, $r(eflected)$ и $t(ransmitted)$ относятся к падающей, отраженной и преломленной волне; $\mathbf{A}$ – амплитуда, ω – циклическая частота $\mathbf{k}$ – волновой вектор

$$(41) \quad \begin{aligned} \mathbf{k}_i^2 &= \frac{\omega_i^2 n_1^2}{c^2}, & k_{ix} &= |\mathbf{k}_i| \sin \theta_i, & k_{iy} &= 0, & k_{iz} &= |\mathbf{k}_i| \cos \theta_i, \\ \mathbf{k}_r^2 &= \frac{\omega_r^2 n_1^2}{c^2}, & k_{rx} &= |\mathbf{k}_r| \sin \theta_r, & k_{ry} &= 0, & k_{rz} &= -|\mathbf{k}_r| \cos \theta_r, \\ \mathbf{k}_t^2 &= \frac{\omega_t^2 n_2^2}{c^2}, & k_{tx} &= |\mathbf{k}_t| \sin \theta_t, & k_{ty} &= 0, & k_{tz} &= |\mathbf{k}_t| \cos \theta_t. \end{aligned}$$

³Все полученные ниже формулы справедливы при условии, что при переходе через плоскую поверхность раздела двух сред показатель преломления скачкообразно изменяется от значения n_1 до значения n_2 на расстоянии меньше длины волны, т. е. порядка нескольких десятков микрон.

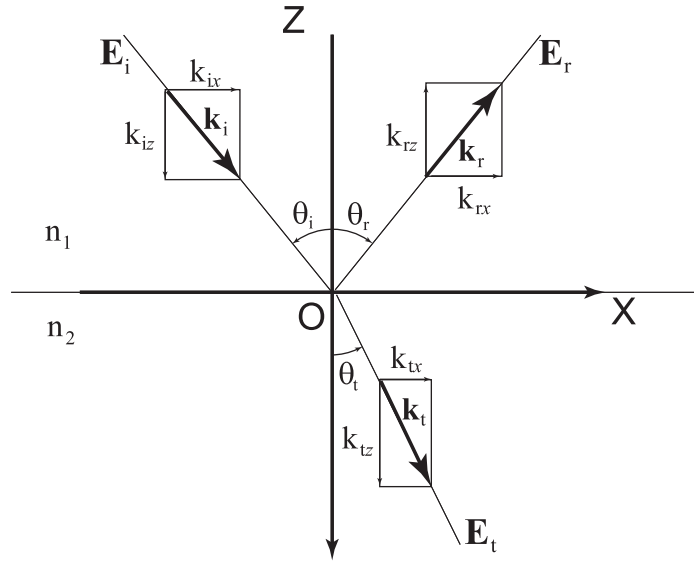


Рис. 2: Отражение и преломление волн на поверхности. Волновые векторы для падающей $\mathbf{k}$, отраженной $\mathbf{k}_r$ и преломленной $\mathbf{k}_t$ волн лежат в плоскости падения XZ .

Здесь θ_i – угол падения, θ_r – угол отражения, θ_t – угол преломления.

Для вывода законов отражения и преломления света на потребуется выразить параметры преломленной и отраженной волн через параметры падающей. Это можно сделать при помощи граничных условий, вытекающих из уравнений Максвелла, которые справедливы не только для однородной среды, но на границе между двумя материалами. Именно уравнения Максвелла требуют, чтобы три волны были согласовались друг с другом надлежащим образом.

Первое граничное условие, которое следует из закона Фарадея, можно записать для вектора напряженности электрического поля в следующем виде

$$(42) \quad \mathbf{E}_{2\tau} = \mathbf{E}_{1\tau},$$

т. е.

тангенциальная компонента вектора напряженности эл. поля по обе стороны границы раздела одинаковая.

В нашем случае $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$, а $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$. Применяя условие (42) для выбранной системы координат, получим

$$(43) \quad \begin{aligned} (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)_y &= \mathbf{E}_y, \\ (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r)_z &= \mathbf{E}_z. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать из (43), что **постоянство частоты волны при отражении и преломлении**

$$(44) \quad \omega_r = \omega_t = \omega_i \equiv \omega.$$

Нестрогое доказательство следует из того факта, что отраженная и преломленная – это вторичные волны, возникающие в результате вынужденных

колебаний электронов среды под действием поля падающей (первичной) волны. Таким образом, на границе раздела временная зависимость фазы вторичных волн и первичной волны одинаковая.

Из (43) и (44) также следует, что в плоскости падения XU на границе $z = 0$ должны совпадать фазы трех волн (38)

$$(45) \quad \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}.$$

Отсюда следует, что

волновые векторы падающей, отраженной и преломленной волн лежат в одной плоскости.

Выписывая явно компоненты, получим

$$(46) \quad xk_{ix} + zk_{iz} = xk_{rx} + zk_{rz} = xk_{tx} + zk_{tz}.$$

Поскольку уравнение (46) выполняется в любой точке на границе, то

$$(47) \quad k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}, \quad k_{iz} = k_{rz} = k_{tz}.$$

Используя соотношения для проекций волновых векторов из (41) найдем, что

$$(48) \quad \sin \theta_i = \sin \theta_r, \quad \cos \theta_i = \cos \theta_r.$$

Следовательно

$$(49) \quad \theta_i = \theta_r.$$

Это соотношение вместе с утверждением, что $\mathbf{k}_r$ лежит в плоскости падения, суть **закон отражения** света.

Замечая, что $\frac{|\mathbf{k}_t|}{|\mathbf{k}_i|} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}$, также найдем, что

$$(50) \quad \sin \theta_i = n_{12} \sin \theta_t.$$

Это соотношение вместе с утверждением, что $\mathbf{k}_t$ лежит в плоскости падения, суть **закон преломления** света (закон Снелла).

Когда свет падает в оптически более плотную среду, т. е. $n_2 > n_1$ и относительный показатель для преломления света из первой среды во вторую $n_{12} > 1$

$$(51) \quad \sin \theta_t = \frac{1}{n_{12}} \sin \theta_i < \sin \theta_i < 1.$$

Законы отражения и преломления проверяют с помощью прибора, называемого *оптической шайбой*. Прибор состоит из неподвижного градуированного диска, устанавливаемого вертикально на штативе, и свободно перемещающегося по окружности диска осветителя. Узкий пучок света падает на стеклянный полуцилиндр с матовой поверхностью оснований. Полуцилиндр закрепляется на диске так, чтобы середина его плоской поверхности совпадала с центром диска. Пучок света направляется от осветителя вдоль радиуса диска и на границе воздух–стекло частично отражается, а частично преломляется. Пучок выходит из стекла в воздух перпендикулярно цилиндрической поверхности и поэтому не преломляется. Угол падения, отражения и преломления света измеряют по шкале диска.

Вещество	Показатель преломления, n	Предельный угол, $\bar{\theta}_i$
Вода	1,333	$48^\circ 35'$
Стекло	1,5	$41^\circ 50'$
Алмаз	2,4	$24^\circ 40'$

Таблица 3: Относительные показатели преломления и углы полного отражения

2.2 Явление полного отражения света

Закон преломления позволяет объяснить интересное и практически важное явление – **полное отражение света**. С помощью опыта с оптической шайбой можно наблюдать переход узкого луча света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду, т. е. $n_2 < n_1$ или относительный показатель для преломления света из первой среды во вторую $n_{12} = \frac{n_2}{n_1} < 1$. Эксперимент показывает, что при увеличении угла падения увеличивается угол преломления света. Кроме этого интенсивность преломленного луча света убывает, причем особенно быстро, когда угол преломления приближается к $\frac{\pi}{2}$. При этом доля отраженной от границы энергии ЭМ волны близка к 100 %. Такой ситуации соответствует некоторый предельный угол падения $\bar{\theta}_i$: при угле падения $\theta_i > \bar{\theta}_i$ весь падающий свет отражается от границы обратно в первую среду (стекло), – происходит полное отражение света.

Наименьший угол падения $\bar{\theta}_i$, при котором наступает полное отражение, называется **предельным углом полного отражения**

$$(52) \quad \bar{\theta}_i = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

Если свет переходит из какой-либо среды с абсолютным показателем преломления n в воздух, то

$$(53) \quad \bar{\theta}_i \cong \arcsin \frac{1}{n_{12}}.$$

Численные значения относительных показателей преломления некоторых веществ (относительно воздуха) и угла полного отражения приведены в таблице 3

Явление полного отражения ЭМ волны – это интересный физический феномен. По мере приближения угла падения к предельному значению интенсивность преломленной волны обращается в нуль, уменьшаясь *непрерывно*. Интенсивность отраженной волны, *непрерывно* возрастаая, становится равной интенсивности падающей волны. Кроме этого, эксперимент показывает, что ЭМ поле во второй среде не исчезает, отсутствует лишь поток энергии ЭМ волны через границу!

Закон преломления (50) не имеет решения в области действительных значений угла преломления θ_t . В самом деле получается, что полное отражение возникает при углах падения, синус которых $n_{12} \leq \sin \theta_i \leq 1$, при этом угол преломления

$$(54) \quad \sin \theta_t > 1!$$

Это означает, что для значений угла падения, при которых свет полностью отражается, не существует вещественных значений угла преломления. Для дальнейшего анализа целесообразно определить для углов $\theta_i > \bar{\theta}_i$ комплексный угол преломления Θ_t

$$(55) \quad \sin \Theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n_{12}}, \quad \cos \Theta_t = \pm i \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{n_{12}^2} - 1}.$$

Тогда фазу "преломленной" волны

$$(56) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \mathbf{A}_t \exp[i(\omega_t t - x k_{tx} - z k_{tz})], \\ k_{tx} &= \frac{\lambda_2}{2\pi} \sin \theta_t, \quad k_{tz} = \frac{\lambda_2}{2\pi} \cos \theta_t, \\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= \frac{n_2}{n_1}. \end{aligned}$$

можно записать следующим образом

$$(57) \quad e^{i\omega \left(t - x \frac{\sin \theta_i}{v_1}\right)} e^{\pm \frac{z}{2h}},$$

где величина h называется **эффективной глубиной проникновения** волны в оптически менее плотную среду

$$(58) \quad h = \frac{\lambda_1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_i - n_{12}^2}}.$$

Ясно, что энергия ЭМ волны через границу не течет. Это значит, что в формуле для косинуса в (55) надо взять знак "минус". Тогда получим, что

$$(59) \quad \mathbf{E}_t = \underbrace{\mathbf{A}_t \exp\left(-\frac{z}{2h}\right)}_{\text{амплитуда неоднородной волны}} \times \exp\left[\underbrace{i\omega \left(t - x \frac{\sin \theta_i}{v_1}\right)}_{\text{фаза}}\right].$$

Это формула показывает, что при полном отражении преломленная волна является **плоской неоднородной волной**. Это значит, что фаза волны "распространяется" в направлении оси X (в плоскости падения), а ее амплитуда убывает экспоненциально в перпендикулярном направлении z от границы раздела. Фазовая скорость неоднородной волны равна

$$(60) \quad v_{2x} = \frac{v_1}{\sin \theta_i} = \frac{c}{n_1 \sin \theta_i} = \frac{\frac{c}{n_2}}{\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i} = \frac{\sin \bar{\theta}_i}{\sin \theta_i} v_2,$$

где $v_2 = \frac{c}{n_2}$ — фазовая скорость плоской ЭМ волны во второй среде. Ясно, что фазовая скорость неоднородной волны непостоянна и зависит как от свойств среды, так и от угла падения.

Для оценки эффективной глубины проникновения рассчитаем интенсивность падающей волны, за отражающую поверхность. Интенсивность ЭМ излучения (света) I определяется как средний во времени поток излучения, проходящий за единицу времени через единицу площади в направлении к нормали к ней (в гауссовой системе)

$$(61) \quad I = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \langle \mathbf{E}^2 \rangle.$$

Для оценки можно считать, что интенсивность прямо пропорциональна квадрату амплитуды волны. Тогда

$$(62) \quad I_t = I_0 \exp\left[-\frac{z}{h}\right],$$

где I_0 – некоторая постоянная, зависящая от угла падения света и показателя преломления. Таким образом, при проникновении волны в оптически менее плотную среду на глубину h порядка

$$(63) \quad h \sim \frac{\lambda_1}{4\pi}$$

интенсивность ЭМ волны убывает в $e = 2,71$ раз. Интенсивность волны ведет себя так как показано на рис. 3. Поэтому на расстояниях бóльших по сравнению с эффективной глубиной проникновения от границы раздела ЭМ поле во второй среде практически полностью затухает. Так как поглощение света прозрачной средой не происходит, то энергия, переносимая к границе падающей волной, должна целиком возвратиться в первую среду!

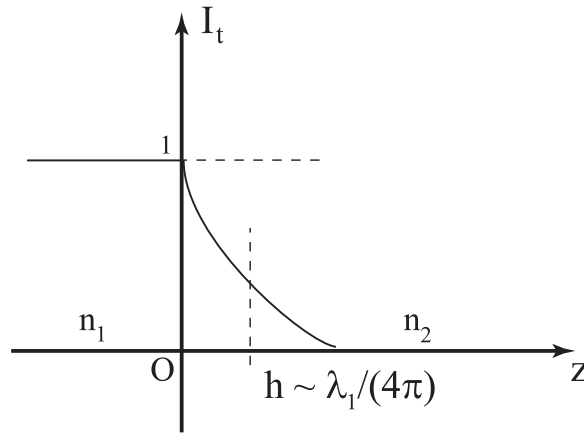


Рис. 3: Зависимость интенсивности волны снизу от границы раздела.

Проникновение падающей ЭМ волны в поверхностный слой полностью отражающей поверхности (на расстояние порядка длины волн) можно продемонстрировать для ЭМ сантиметрового диапазона ($\lambda_0 = 1,25$ см). Для этого берут две парафиновые призмы, имеющие сечение в виде равнобедренного прямоугольного треугольника, и располагают друг относительно друга так, что между гранями, на которых луч испытывает полное отражение, есть воздушный зазор, см. рис. 4. Полное отражение наступает лишь тогда, когда толщина воздушной прослойки имеет тот же порядок величины, что и длина падающей волны. Более тонкие воздушные прослойки, например в четверть длины волны, не являются непреодолимым "препятствием" для

падающей ЭМ волны. Поле в воздушной прослойке не вызывает преломления волны на границе с воздухом, однако во второй призме (оптически более плотном веществе) может возбудить "преломленный" луч.

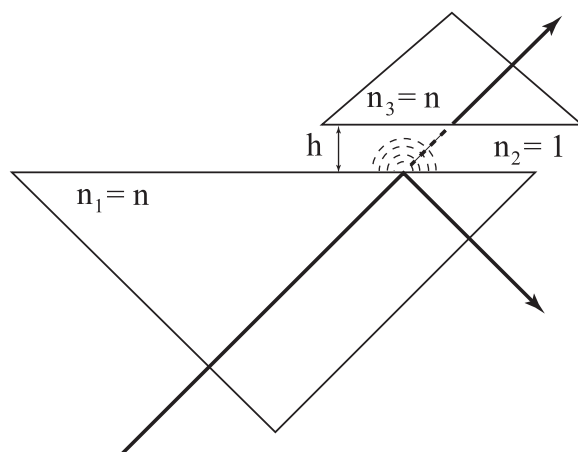


Рис. 4: Для достаточно малого зазора внутреннее отражение не будет полным.

2.3 Вопросы для самостоятельной работы

1. Предположим, что граница раздела двух сред не является достаточно "резкой", но гладкой: показатель преломления изменяется постепенно на расстоянии нескольких длин волн. Что при этом будет происходить с отраженной волной? Ответ объясните.
2. Сформулировать граничные условия для основных векторов ЭМ поля.
3. Доказать соотношения (45) и (47).
4. Почему полное отражение света является более "совершенным", чем отражение от металлических зеркал?

3 Лекция №3 "Формулы Френеля"

Вывод формул. Анализ формул Френеля.

Цель лекции — вывести соотношения между амплитудами падающей и отраженной волны, а также падающей и преломленной волны.

3.1 Вывод формул

На гладкую границу раздела двух незаряженных однородных диэлектриков (проницаемости $\mu_1 = \mu_2 \cong 1$ и $\varepsilon_1 = n_1^2$ и $\varepsilon_2 = n_2^2$) падает плоская монохроматическая волна. Пусть поверхность раздела — плоскость XY ; ось X — линия пересечения поверхности раздела с плоскостью падения XZ ; ось Z направлена перпендикулярно к плоскости падения.

Напряженности определены формулами (38) в Лекции №2. Для того чтобы в дальнейшем не загромождать формулы индексами, обозначим амплитуды падающей, отраженной и преломленной волны следующим образом

$$(64) \quad \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_r \rightarrow \mathbf{R}, \quad \mathbf{A}_t \rightarrow \mathbf{T}.$$

Вообще говоря эти векторы направлены под произвольным углом к плоскости падения. Можно доказать, что плоскую волну, вектор $\mathbf{E}$ которой произвольно ориентирован относительно плоскости падения, можно представить в виде суммы двух плоских волн с взаимно перпендикулярными поляризациями: у одной в плоскости падения, а у другой — перпендикулярно ей.

Компоненты векторов, лежащих в плоскости падения XZ , будем обозначать с индексом $\parallel$, а индексом $\perp$ — в перпендикулярной плоскости:

$$(65) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}_{\parallel} + \mathbf{R}_{\perp}, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{T}_{\parallel} + \mathbf{T}_{\perp}. \end{aligned}$$

Перпендикулярные компоненты направлены под прямым углом к плоскости рисунка, см. рис. 5, и обозначены как $\circ$.

Декартовы компоненты напряженности эл. поля падающей волны равны

$$(66) \quad \begin{aligned} E_{ix} &= -A_{\parallel} \cos \theta_i e^{i\varphi_i}, \\ E_{iy} &= A_{\perp} e^{i\varphi_i}, \\ E_{iz} &= A_{\parallel} \sin \theta_i e^{i\varphi_i}, \end{aligned}$$

где φ_i обозначает фазу падающей волны

$$(67) \quad \varphi_i = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i - z \cos \theta_i}{v_1} \right).$$

Соответствующие компоненты вектора напряженности магнитного поля получаются с помощью формулы (в гауссовой системе единиц $\mu_0 = 1$)

$$(68) \quad \mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i}{\omega}.$$

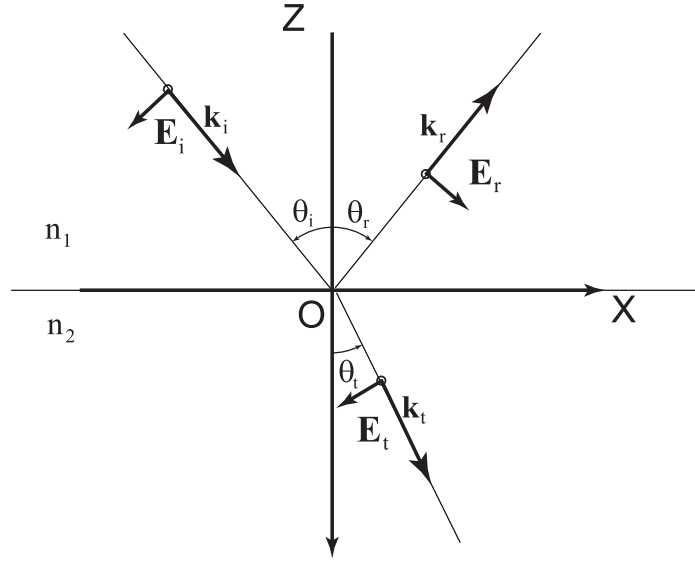


Рис. 5: Перпендикулярные и параллельные плоскости падения компоненты вектора напряженности.

Результат таков:

$$\begin{aligned}
 H_{ix} &= -A_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_i}, \\
 H_{iy} &= -A_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_i}, \\
 H_{iz} &= A_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_i}.
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

Соответствующие формулы для компонент электрического поля отраженной волны имеют вид

$$\begin{aligned}
 E_{rx} &= R_{\parallel} \cos \theta_i e^{i\varphi_r}, \\
 E_{ry} &= R_{\perp} e^{i\varphi_r}, \\
 E_{rz} &= R_{\parallel} \sin \theta_i e^{i\varphi_r},
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

и магнитного поля

$$\begin{aligned}
 H_{rx} &= R_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_r}, \\
 H_{ry} &= -R_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_r}, \\
 H_{rz} &= R_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\varepsilon_1} e^{i\varphi_r}.
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

где φ_r обозначает фазу отраженной волны

$$\varphi_r = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{v_1} \right).
 \tag{72}$$

Аналогично для компонент электрического и магнитного поля преломленной волны справедливы формулы

$$\begin{aligned}
 E_{tx} &= -T_{\parallel} \cos \theta_t e^{i\varphi_t}, \\
 E_{ty} &= T_{\perp} e^{i\varphi_t}, \\
 E_{tz} &= T_{\parallel} \sin \theta_t e^{i\varphi_t},
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
(74) \quad H_{tx} &= -T_{\perp} \cos \theta_t \sqrt{\varepsilon_2} e^{i\varphi_t}, \\
H_{ty} &= -T_{\parallel} \sqrt{\varepsilon_2} e^{i\varphi_t}, \\
H_{tz} &= T_{\perp} \sin \theta_t \sqrt{\varepsilon_2} e^{i\varphi_t}.
\end{aligned}$$

где φ_t обозначает фазу преломленной волны

$$(75) \quad \varphi_t = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_t + z \cos \theta_t}{v_2} \right).$$

Теперь воспользуемся граничным условием (42) Лекции №2 для тангенциальных компонент напряженности **Е**. В данном случае имеем

$$(76) \quad E_{ix} + E_{rx} = E_{tx}, \quad E_{iy} + E_{ry} = E_{ty}.$$

Точно такое же граничное условие должно выполняться для тангенциальных компонент напряженности **Н**

$$(77) \quad H_{ix} + H_{rx} = H_{tx}, \quad H_{iy} + H_{ry} = H_{ty}.$$

Используя формулы (76), (77) и (70), (71), (73), (74), также (66) и (69) найдем

$$\begin{aligned}
(78) \quad A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp}, \\
\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i (A_{\perp} - R_{\perp}) &= \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t T_{\perp},
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
(79) \quad \cos \theta_i (A_{\parallel} - R_{\parallel}) &= \cos \theta_t T_{\parallel}, \\
\sqrt{\varepsilon_1} (A_{\parallel} + R_{\parallel}) &= \sqrt{\varepsilon_2} T_{\parallel}.
\end{aligned}$$

Это уравнения показывают, что проекции векторов напряженности ЭМ поля параллельные плоскости падения и перпендикулярные к ней не перемешиваются между собой. Это значит, что при отражении и преломлении ЭМ волн, плоско поляризованных параллельно и перпендикулярно плоскости падения, изменение поляризации не происходит. Таким образом, волна любой другой поляризации будет себя вести в данной ситуации как линейная комбинация этих двух независимых волн.

Формулы Френеля, Огюстен Жан Френель (1788–1827), выражают параллельные и перпендикулярные компоненты амплитуды преломленной и отраженной волны через соответствующие компоненты падающей

$$\begin{aligned}
(80) \quad T_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{\parallel}, \\
T_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp}, \\
R_{\parallel} &= \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} A_{\parallel}, \\
R_{\perp} &= \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} A_{\perp}.
\end{aligned}$$

Используя закон преломления формулы Френеля можно записать в другом виде

$$\begin{aligned}
 T_{\parallel} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \frac{A_{\parallel}}{\cos(\theta_i - \theta_t)}, \\
 T_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}, \\
 R_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}, \\
 R_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}.
 \end{aligned}
 \tag{81}$$

На рисунках 6 и 7 изображены зависимости коэффициентов Френеля

$$r_{\parallel} \equiv \frac{R_{\parallel}}{A_{\parallel}}, \quad r_{\perp} \equiv \frac{R_{\perp}}{A_{\perp}}
 \tag{82}$$

в зависимости от угла падения θ_i для двух случая отражения: (1) отражение света от границы со средой с большим показателем преломления, см. рис. 6; (2) с меньшим показателем преломления, см. рис. 7.

3.2 Анализ формул Френеля

Формулы Френеля содержат также информацию о скачкообразном изменении фазы ЭМ при ее отражении от границе двух диэлектриков. Кроме этого мы рассмотрим случай нормально, скользящего падения света, а также вопрос о возможности полной поляризации естественного света волны при отражении.

1. **Соотношение между фазами волн при преломлении.** Его можно получить из формул Френеля (80): компоненты $T_{\parallel}$ и $T_{\perp}$ имеют такой же знак, что и $A_{\parallel}$ и $A_{\perp}$ (или $\mathbf{T}_{\parallel} \uparrow\uparrow \mathbf{A}_{\parallel}$ и $\mathbf{T}_{\perp} \uparrow\uparrow \mathbf{A}_{\perp}$). Это значит, что

Фаза $\parallel$, $\perp$ -амплитуды преломленной волны равна фазе соответствующей амплитуды падающей волны.

2. **Явление Брюстера.** Если угол падения такой, что $\theta_B + \theta_t = \frac{\pi}{2}$, то $\tan(\theta_B + \theta_t) = \infty$. Следовательно

$$R_{\parallel} = 0, \quad R_{\perp} = -\sin(\theta_B - \theta_t).
 \tag{83}$$

На рис. 6 видно, что для рассматриваемого случая $n_{12} = 1.52$ угол Брюстера равен $\theta_B = 56^\circ 29'$ и $r_{\parallel} = 0$ при $\theta_i = \theta_B$. Таким образом,

если естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков под углом Брюстера θ_B , где $\tan \theta_B = n_{12}$, то отраженный свет будет полностью поляризованным в плоскости перпендикулярной плоскости падения.

При этом в преломленной волне компонента электр. поля параллельная плоскости падения больше, чем перпендикулярная компонента

$$(84) \quad \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = \cos(\theta_B - \theta_t) = \sin(2\theta_B) < 1.$$

Это означает, что преломленный свет будет **частично поляризованным**.

Отражение света под углом Брюстера от стеклянной плоскопараллельной пластинки дает простейший способ получения линейно поляризованного света, правда невысокой интенсивности. Для увеличения интенсивности применяется несколько стеклянных пластинок, сложенных в стопку (стопа Столетова).

3. **Соотношение между фазами волн при отражении.** Если вторая среда является более оптически плотной, чем первая ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), то $\theta_t < \theta_i$. В соответствии с формулами Френеля (81), знаки $R_{\perp}$ и $A_{\perp}$ амплитуд противоположные (или $\mathbf{R}_{\perp} \uparrow \downarrow \mathbf{A}_{\perp}$) и, соответственно, фазы отличаются на π , так как $\exp(i\pi) = -1$. На рис. 6 видно, что $r_{\perp}$ является отрицательной величиной для всех углов падения. При этом же условии $\tan(\theta_i - \theta_t) > 0$, но $\tan(\theta_i + \theta_t) < 0$ при $\theta_i + \theta_t > \pi/2$, соответственно фазы $R_{\parallel}$ и $A_{\parallel}$ также отличаются на π . Это будет происходить тогда, когда $\theta_i > \theta_B$.

Таким образом,

при падении света на границу раздела со стороны оптически менее плотной среды при любых углах падения фаза перпендикулярной составляющей напряженности электр. поля в отраженной волне изменяется на π радиан. Фаза параллельной составляющей скачком изменяются на π радиан при переходе через угол Брюстера.

Если вторая среда является более оптически плотной, то для $\theta_i < \bar{\theta}_i$ изменение фазы перпендикулярной составляющей напряженности электр. поля не происходит, см. рис. 7. Фаза параллельной составляющей также изменяется скачком при переходе через угол Брюстера.

4. **При нормальном падении света различие между перпендикулярными и параллельными компонентами не наблюдается.**

Случай нормального падения соответствует углу падения $\theta_i = 0$. Из закона преломления следует, что угол преломления также равен нулю, $\theta_t = 0$.

$$\begin{aligned}
(85) \quad T_{\parallel} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} A_{\parallel}, \\
T_{\perp} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} A_{\perp}, \\
R_{\parallel} &= -\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_{\parallel}, \\
R_{\perp} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} A_{\perp}.
\end{aligned}$$

Различие в знак между компонентами отраженной и падающей волны чистая формальность, поскольку направления $\mathbf{R}_{\perp}$ и $\mathbf{A}_{\perp}$ всегда совпадают, а направления $\mathbf{R}_{\parallel}$ и $\mathbf{A}_{\parallel}$ должны быть противоположны.

Далее, если $n_1 < n_2$ (случай перехода света в оптически более плотную среду) отражение света сопровождается скачкообразным изменением фазы на π радиан. Если $n_1 > n_2$, то отражение происходит без изменения фазы.

5. При скользющем падении света происходит его "полное отражение".

При скользющем падении $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ радиан, тогда

$$\begin{aligned}
(86) \quad T_{\parallel} &= T_{\perp} = 0, \\
R_{\parallel} &= -A_{\parallel}, \quad R_{\perp} = -A_{\perp}.
\end{aligned}$$

Приведем простой пример. Изображение на гладкой поверхности моря заходящего за горизонт Солнца по яркости не уступает яркости Солнца!

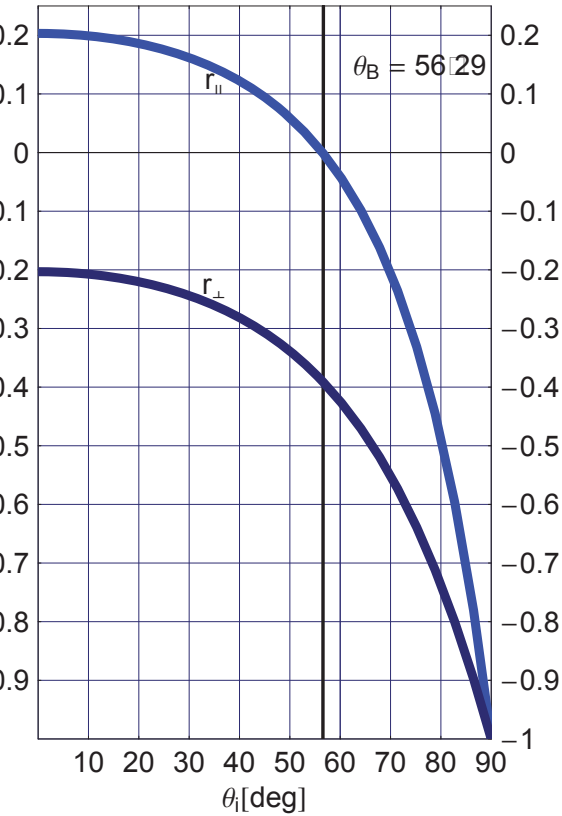
В заключении необходимо заметить, что исследования отражения под углом Брюстера позволили обнаружить небольшие отклонения от предсказаний формул Френеля. Отступления от формул Френеля объясняется тем, что при отражении и преломлении граница между двумя средами не является математической, т. е. идеально гладкой с скачкообразным изменением оптических свойств. Существенным здесь является роль переходного молекулярного слоя, свойства которого отличаются от свойств сплошных сред, которых он разграничивает. Если это принять во внимание, то отступления от формул Френеля объясняются.

3.3 Вопросы для самостоятельной работы

1. Выведите формулы (70)–(74).
2. Выведите формулы Френеля (80) и (81).
3. В чем состоит физическая причина изменения скачком разности фаз колебаний между параллельными компонентами напряженности электрич. поля падающей и отраженной волнами при преходе через угол Брюстера? Как при этом изменятся фаза напряженности магн. поля в отраженной волне?

4. Какие физические факторы определяют значение угла Брюстера?
5. Какие отступления от формул Френеля были обнаружены экспериментально?

Air to Glass (optical wavelengths): $n_{12}=1.52$
 0 10 20 30 40 50 60 70 80



6: Теоретические кривые для коэффициентов Френеля отраженной волны видимого света на границе воздух-стекло, $n_{12} = 1,52$. Угол Брюстера равен $56^{\circ}29'$.

Glass to Air (optical wavelengths): $n_{12}=\frac{1}{1.51}$
 0 10 20 30 40 50 60 70 80

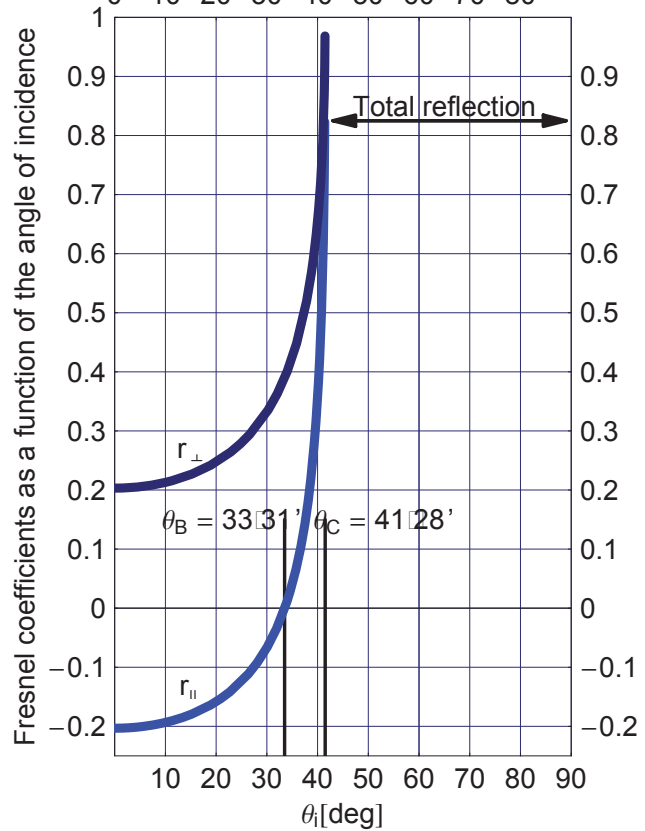


Рис. 7: Теоретические кривые для коэффициентов Френеля отраженной волны видимого света на границе стекло-воздух, $n_{12} = \frac{1}{1,51}$. Угол Брюстера равен $\theta_B = 33^{\circ}31'$. Угол полного внутреннего отражения равен $\theta_C = 41^{\circ}28'$.

4 Лекция №4 "Энергия и интенсивность света"

*Закон сохранения энергии для ЭМ поля. Интенсивность света.
Коэффициенты отражения и пропускания.*

Цель — сформулировать закон сохранения энергии для ЭМ поля; рассчитать как распределяется энергия между отраженной и преломленной волнами при падении света на границе двух различных оптических сред.

4.1 Закон сохранения энергии для ЭМ поля

В электромагнитной теории интенсивность света характеризуется плотностью потока энергии поля. Из курса общей физика известно, что полная энергия поля, заключенного в некотором объеме однородной изотропной среды (диэлектрик), равна

$$(87) \quad W = \int_V dV [w_e(x, y, z) + w_m(x, y, z)],$$

где $dV = dxdydz$ — элемент объема в декартовой системе координат, w_e и w_m — соответственно плотности энергии электрич. и магн. поля

$$(88) \quad w_e = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad w_m = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}.$$

Почему выражение (87) можно отождествить с величиной полной энергии ЭМ поля? Ответ можно получить, если рассмотреть быстроту изменения $\frac{dW}{dt}$. Для замкнутой системы изменение полной энергии должно быть обусловлено работой, которую совершает поле над зарядами, находящимися в нем.

Из уравнений Максвелла (1) следует, что⁴

$$(89) \quad \frac{dW}{dt} = - \int_V dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \frac{c}{4\pi} \int_V dV \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}],$$

где согласно тождеству векторного анализа

$$(90) \quad -\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \equiv \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Формула (89) является прямым следствием уравнений Максвелла и материальных уравнений (5). Докажем, что (89) представляет собой закон **сохранения энергии для ЭМ поля**.

Известно, что электрич. ток, называемый **током проводимости**, связан с упорядоченным движением заряженных частиц внутри макроскопических тел. Плотность тока проводимости связана с величиной напряженности эл. поля в проводнике законом Ома, записанном в данном случае в дифференциальной форме

$$(91) \quad \mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E},$$

⁴В этой лекции мы будем пользоваться гауссовой системой единиц

где σ – удельная проводимость. Электр. ток, называемый **конвекционным током**, описывает направленное движение макроскопических заряженных тел как целого

$$(92) \quad \mathbf{j}_v = \rho \mathbf{v},$$

где ρ – удельная плотность заряда тела, а $\mathbf{v}$ – скорость его движения.

Таким образом, первое слагаемое представляет собой сумму мощности электрического тока проводимости Q и кулоновской силы P (характеризует механическую работу, совершаемую полем в единицу времени)

$$(93) \quad \int dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \int dV (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_v) \cdot \mathbf{E} = \underbrace{\int dV \sigma \mathbf{E}^2}_Q + \underbrace{\int dV \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}_P.$$

Согласно закону Джоуля–Ленца мощность тока проводимости определяет количество теплоты Q , выделяющееся в проводнике в единицу времени. Для диэлектрика ($\sigma = 0$) и диссипации энергии нет, $Q = 0$.

Интеграл по объему во втором слагаемом формулы (89) с помощью теоремы Остроградского–Гаусса преобразуется к интегралу по поверхности Σ , ограничивающую данную систему

$$(94) \quad \int_V dV \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \int_{\Sigma} d\Sigma [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности. Если мысленно представить себе возможность существования таких физических процессов внутри системы, что на ее границах поле можно считать пренебрежимо малым, то интеграл по поверхности будет стремиться к нулю. Поэтому в изолированной непроводящей системе уменьшение полной энергии W определяется механической работой, которую совершает ЭМ поле

$$(95) \quad \frac{dW}{dt} = -P.$$

Если представить себе систему, в которой свободные заряды отсутствуют, то согласно (89) уменьшение энергии ЭМ поля должно вызываться истечением поля через внешнюю границу физической системы. Таким образом поверхностный интеграл должен представлять собой **поток энергии** через границу. Этот поток можно отождествить с вектором

$$(96) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}],$$

называемым **вектором Умова–Пойтинга**, или вектором **плотности потока ЭМ энергии**. Поток вектора Умова–Пойтинга через замкнутую поверхность, ограничивающую непроводящую систему заряженных частиц, равен энергии, теряемой этой системой вследствие излучения ЭМ волн

$$(97) \quad \oint_{\Sigma} d\Sigma \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = -\frac{dW}{dt}.$$

Поэтому

модуль вектора $\mathbf{S}$ равен энергии, переносимой ЭМ волной за единицу времени через единицу площади поверхности, расположенной перпендикулярно к направлению распространения волны.

Плотность потока плоской ЭМ волны равна

$$(98) \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} E \mathbf{H} \mathbf{N} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 \mathbf{N} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H^2 \mathbf{N}.$$

Для $|\mathbf{S}|$ из (98) находим

$$(99) \quad |\mathbf{S}| = \frac{1}{4\pi} v \varepsilon E^2,$$

где $v = \frac{c}{n}$ — скорость распространения плоской волны. В диэлектрике объемная плотность энергии ЭМ поля (88) выражается формулой

$$(100) \quad w = w_e + w_m = \frac{1}{4\pi} \varepsilon E^2,$$

где $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \varepsilon E^2$. Поэтому

$$(101) \quad S = vw.$$

4.2 Интенсивность света

Мы выяснили, что вектор Умова–Пойтинга характеризуют плотность потока энергии и объемную плотность энергии. В полученные выше формулы (100) и (101) входят мгновенные значения величин. Так как в оптическом диапазоне частота ЭМ излучения очень велика, составляет порядка $\nu \sim 10^{15}$ Гц, мгновенное значение быстро изменяющихся со временем физических величин регистрировать невозможно. Физический смысл будет иметь только их средние значения за некоторый промежуток времени τ (**время разрешения** данного физического прибора) намного больший, чем время одного периода колебаний $T = 1/\nu$.

Вычислим среднее значение (за время регистрации) плотности потока энергии. Для этого необходимо представить напряженности полей, записанных в комплексной форме, следующим образом

$$(102) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \Re \{ \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} \} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \mathbf{E}_0^*(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}], \\ \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) &= \Re \{ \mathbf{H}_0 e^{i\omega t} \} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}], \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ комплексные функции координат, не зависящие от времени. Для среднего значения плотности потока энергии справедлива следующая

щая формула (зависимость от координат подразумевается)

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] dt \\
 (103) \quad &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2\tau} \frac{1}{4} \int_{-\tau}^{\tau} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 e^{2i\omega t} + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^* + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0^* e^{-2i\omega t}] dt, \\
 &= \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*] + \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0^*] \frac{1}{4\pi} \frac{T}{\tau} \sin(2\omega\tau).
 \end{aligned}$$

При выполнении условия $T/\tau \ll 1$ получается, что

$$(104) \quad \langle \mathbf{S} \rangle \cong \frac{c}{16\pi} [\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0^*] = \frac{1}{4\pi} v\varepsilon \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0) = \frac{1}{4\pi} v\varepsilon \left(\frac{1}{2} A^2\right),$$

где A — амплитуда световой волны (действительная величина). Эта величина называется **интенсивностью** и обозначается символом I .

Теперь закон сохранения энергии принимает более простую форму. Для непроводящей среды при условии, что механическая работа не совершается, получается из формулы (97)

$$(105) \quad \oint d\Sigma \mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S} \rangle = 0.$$

Смысл этой формулы следующий. Среднее значение полного потока через замкнутую поверхность равен нулю.

4.3 Коэффициенты отражения и пропускания

В качестве весьма полезного для практических приложений примера исследуем как энергия ЭМ волны, падающей на границу двух прозрачных сред, разделяется на отраженную и преломленную волну. Согласно (104) интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды волны

$$(106) \quad I = \langle |\mathbf{S}| \rangle = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\varepsilon} \Re(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) = \frac{cn}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2.$$

Учитывая направление распространения волн, запишем выражения для интенсивности падающего, отраженного и преломленного света

$$\begin{aligned}
 I_i &= \langle |\mathbf{S}_i| \rangle \cos \theta_i = \frac{cn_1}{8\pi} A^2 \cos \theta_i, \\
 I_r &= \langle |\mathbf{S}_r| \rangle \cos \theta_i = \frac{cn_1}{8\pi} R^2 \cos \theta_i, \\
 I_t &= \langle |\mathbf{S}_t| \rangle \cos \theta_t = \frac{cn_1}{8\pi} T^2 \cos \theta_t,
 \end{aligned}
 \quad (107)$$

где A, R и T — соответственно амплитуды падающей, отраженной и преломленной световых волн.

Отношения соответствующих интенсивностей можно представить в следующем виде

$$(108) \quad \varrho = \frac{I_r}{I_i} = \frac{R^2}{A^2}, \quad \tau = \frac{I_t}{I_i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \frac{T^2}{A^2}$$

называются **коэффициентом отражения (отражательной способностью)** и **коэффициентом пропускания (пропускательной способностью)**. В соответствии с законом сохранения энергии

$$(109) \quad \varrho + \tau = 1.$$

Отражательная и пропускательная способность зависят от поляризации падающей волны. Пусть α_i угол между плоскостью поляризации падающей волны и плоскость падения (**азимут поляризации** падающей волны, $\tan \alpha_i = \frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}}$), то удобно ввести следующие коэффициенты

$$(110) \quad \varrho_{\parallel} = \frac{R_{\parallel}^2}{A_{\parallel}^2}, \quad \varrho_{\perp} = \frac{R_{\perp}^2}{A_{\perp}^2}, \quad \tau_{\parallel} = \frac{T_{\parallel}^2}{A_{\parallel}^2}, \quad \tau_{\perp} = \frac{T_{\perp}^2}{A_{\perp}^2}.$$

Азимут поляризации α_i считается положительным, когда плоскость поляризации поворачивается по часовой стрелки вокруг направления распространения волны и изменяется в пределах $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$.

Нетрудно убедиться, что

$$(111) \quad \varrho = \varrho_{\parallel} \cos^2 \alpha_i + \varrho_{\perp} \sin^2 \alpha_i,$$

$$(112) \quad \tau = \tau_{\parallel} \cos^2 \alpha_t + \tau_{\perp} \sin^2 \alpha_t$$

где α_t – азимут поляризации преломленной волны и

$$(113) \quad \varrho_{\parallel} = \left(\frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2 = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)},$$

$$(114) \quad \varrho_{\perp} = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 = \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)}.$$

и

$$(115) \quad \tau_{\parallel} = \frac{\sin(2\theta_i) \sin(2\theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)},$$

$$(116) \quad \tau_{\perp} = \tau_{\parallel} \cos^2(\theta_i - \theta_t).$$

На рисунках 8 и 9 изображены зависимости коэффициентов отражения от угла падения.

В соответствии с законом сохранения энергии

$$(117) \quad \varrho_{\parallel} + \tau_{\parallel} = 1, \quad \varrho_{\perp} + \tau_{\perp} = 1.$$

Коэффициент отражения $\bar{\varrho}$ и пропускания $\bar{\tau}$ для **неполяризованного света** получается усреднением ϱ_α по всем возможным α_i . Учитывая, что среднее значение $\langle \cos^2 \alpha_i \rangle = \langle \sin^2 \alpha_i \rangle = \frac{1}{2}$, найдем

$$(118) \quad \bar{\varrho} = \frac{1}{2}(\varrho_{\parallel} + \varrho_{\perp}),$$

$$(119) \quad \bar{\tau} = 1 - \bar{\varrho}.$$

Даже в этом случае в отраженном свете будут преобладать колебания в плоскости перпендикулярной плоскости падения, т. е. отраженный свет будет **частично поляризованным**. Степень поляризации равна

$$(120) \quad P = \frac{I_{r\perp} - I_{r\parallel}}{I_{r\perp} + I_{r\parallel}} = \frac{\varrho_{\perp} - \varrho_{\parallel}}{2\bar{\varrho}}.$$

4.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Вывести формулы

$$(121) \quad \langle w_e \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} |\mathbf{E}_0|^2, \quad \langle w_m \rangle = \frac{\mu}{16\pi} |\mathbf{H}_0|^2$$

для среднего значения плотности энергии эл. и маг. поля. Показать, что $\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle$.

2. С помощью формул Френеля выразить тангенс азимута поляризации отраженной и преломленной волн через $\tan \alpha_i$

$$(122) \quad \tan \alpha_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \tan \alpha_i,$$

$$(123) \quad \tan \alpha_t = \cos(\theta_i - \theta_t) \tan \alpha_i,$$

используя следующие обозначения: $\tan \alpha_r = \frac{R_{\perp}}{R_{\parallel}}$ и $\tan \alpha_t = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$. Убедитесь в том, что всегда

$$(124) \quad |\tan \alpha_r| \geq |\tan \alpha_i|, \quad |\tan \alpha_t| \leq |\tan \alpha_i|.$$

Какой физический смысл этих неравенств? Зависимость азимута поляризации от угла падения изображена на рис. 10.

3. Выведите формулы для коэффициента отражения и пропускания для случая нормального падения света

$$(125) \quad \varrho = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2,$$

$$(126) \quad \tau = \frac{4n_2}{(n_2 + n_1)^2}.$$

Покажите, что чем меньше различие в оптических плотностях двух сред, тем меньше энергии приходится на отраженную волну и, соответственно, больше на прошедшую. Вычислите значения этих коэффициентов для границы воздух-стекло и воздух-вода. Показатели преломления $n_{12} = 1.5$ и $n_{12} = \frac{4}{3}$.

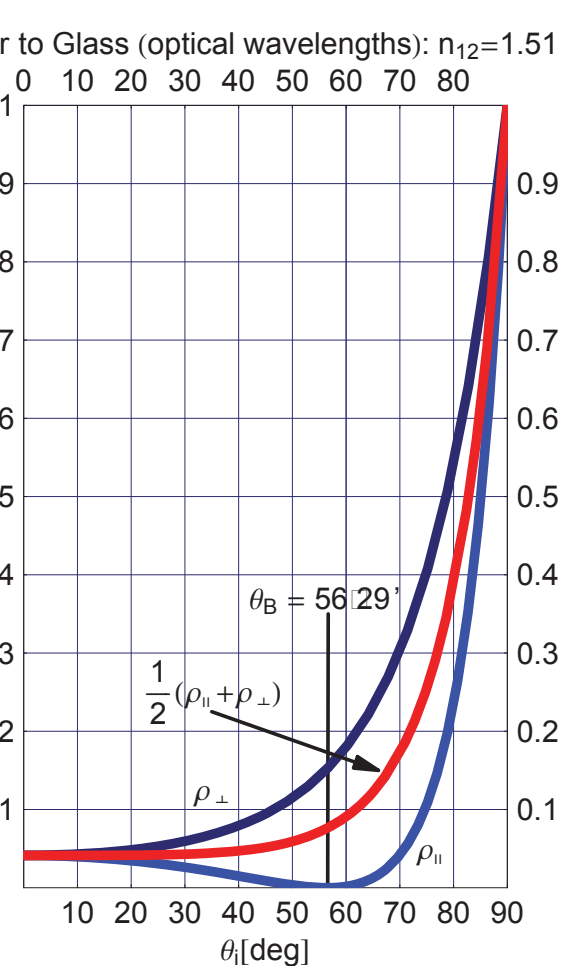


Рис. 8: Теоретические кривые для коэффициентов отражения видимого света на границе воздух–стекло, $n_{12} = 1,51$. Угол Брюстера равен $\theta_B = 56^{\circ}29'$.

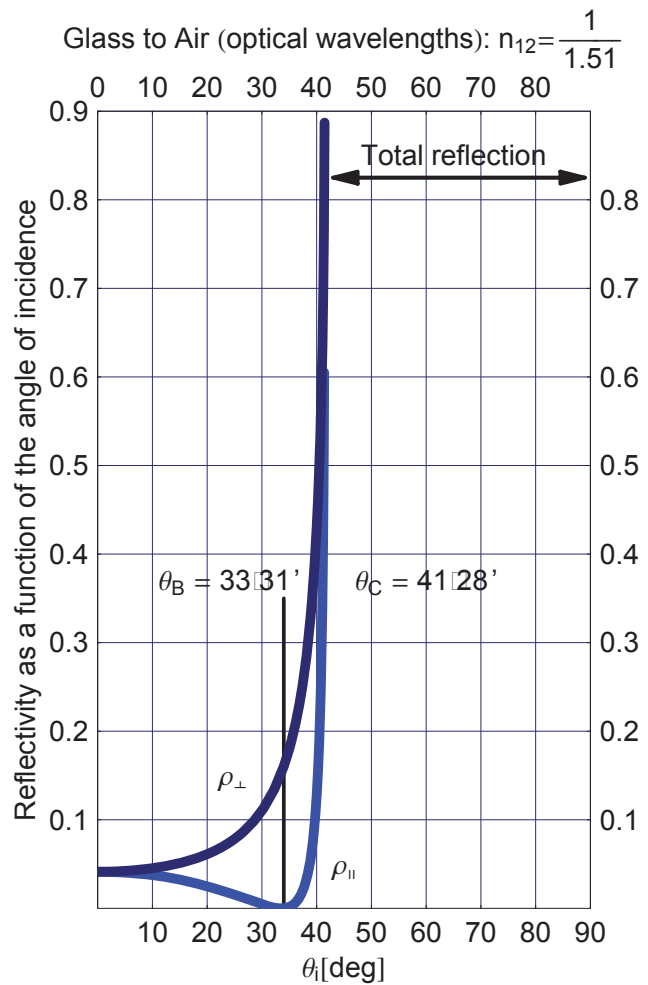


Рис. 9: Теоретические кривые для коэффициентов отражения видимого света на границе стекло–воздух, $n_{12} = \frac{1}{1,51}$. Угол Брюстера равен $\theta_B = 33^{\circ}31'$. Угол полного внутреннего отражения равен $\theta_C = 41^{\circ}28'$.

Air to Glass (optical wavelengths): $n_{12}=1.51$, $\alpha_i=45^\circ$

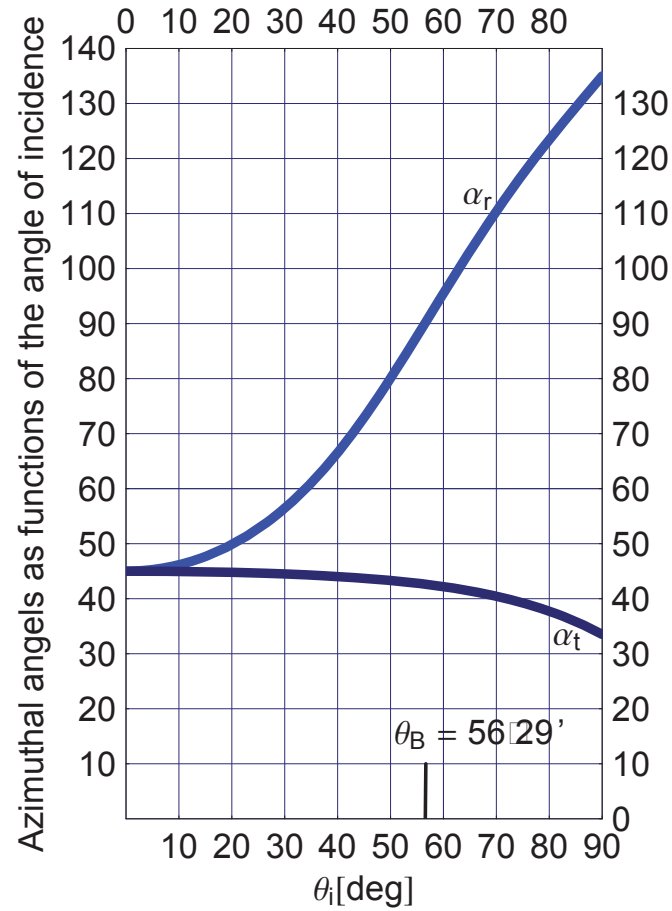


Рис. 10: На рисунке изображены теоретические кривые, показывающие зависимость азимутов поляризации α_r отраженной и α_t преломленной волн от угла падения θ_i на границе воздух–стекло для видимого света, $n_{12} = 1,51$. Азимут поляризации α_i падающей волны равен 45° .

5 Лекция №5 "Интерференция монохроматического света"

*Определение интерференции. Интерференция монохроматических волн.
Когерентность света. Интерференция, осуществляемая делением
волнового фронта.*

Цель настоящей лекции — вывести общие формулы для двухлучевой интерференции монохроматического света; рассмотреть интерференционные опыты, осуществляемые делением фронта волны.

5.1 Определение интерференции

Волновому движению любой природы присущи такие явления как интерференция и дифракция. Существует множество экспериментальных доказательств интерференции и дифракции света. Это позволяет утверждать, что при определенных физических условиях свет проявляет волновую природу. В лаборатории оптики вы можете наблюдать ИС, характеризующуюся образованием стационарной (постоянной во времени) интерференционной картины, например кольца Ньютона или интерференционные полосы, получаемые при освещении лазерным светом тонких пластинок. В обоих случаях интерференционная картина, которая представляет собой регулярное чередование областей повышенной и пониженной интенсивности света.

Интерференция света (ИС) – пространственное перераспределение средней плотности потока энергии светового излучения (интенсивности света), происходящее в результате суперпозиции волн.

Средняя плотность потока энергии, или интенсивность света, определяется величиной (см. формулу (106) Лекции №4)

$$(127) \quad I = \frac{cn}{4\pi} \langle \Re \mathbf{E} \cdot \Re \mathbf{E} \rangle = \frac{cn}{4\pi} \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0^*) = \frac{cn}{4\pi} \frac{1}{2} \mathbf{A}^2,$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$, $\mathbf{E}_0 = \mathbf{A} e^{-i\varphi}$ и амплитуда $\mathbf{A}$ предполагается действительной величиной.

5.2 Интерференция монохроматических волн

Мы покажем, что результирующая интенсивность света определяется соотношением фаз и поляризацией накладывающихся друг на друга волн. В качестве первого приближения в изучении интерференции световых волн от реальных источников света мы рассмотрим интерференцию строго монохроматических волн (в природе не существующих).

Пусть в направлении оси OX распространяются две плоские монохроматические линейно поляризованные волны

$$(128) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{A}_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{A}_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}, \end{aligned}$$

где $\varphi_i = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \delta_i$ — часть фазы, независящая от времени, для соответствующей волны, а $\mathbf{A}_i$ — действительная амплитуда волн.

Согласно принципу суперпозиции в некоторой точке P результирующая напряженность равна

$$(129) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Если векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ либо параллельны, либо антипараллельны друг другу, то можно провести сложение с следующим образом

$$(130) \quad E = e^{i\omega t} (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) = A e^{i(\omega t + \varphi)},$$

где A — результирующая амплитуда и φ — фаза волны. Эти величины можно найти при помощи векторной диаграммы, см. рис. 11,

$$(131) \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta,$$

$$(132) \quad \tan \delta = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Угол $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ на векторной диаграмме обозначает разность фаз накладываемых колебаний.

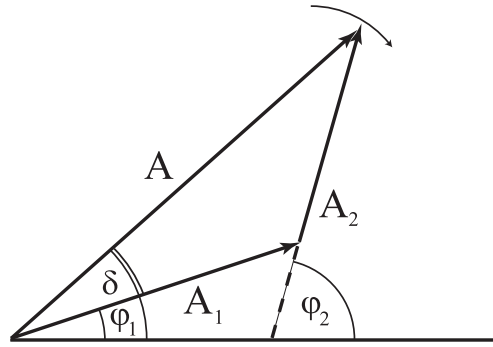


Рис. 11: Векторная диаграмма сложения двух колебаний по принципу суперпозиции.

Поскольку интенсивность волны прямо пропорциональна квадрату ее амплитуды, то вклад в результирующую интенсивность дают три слагаемых

$$(133) \quad I = I_1 + I_2 + I_{12},$$

где $I_i = \frac{cn}{4\pi} \frac{1}{2} A_i^2$ — интенсивность каждой волны в отдельности, а I_{12} — интерференционное слагаемое, которое для нашего простого случая может легко вычислено

$$(134) \quad I_{12} = \frac{cn}{4\pi} 2\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta.$$

Мы видим, что интенсивность результирующей волны в области суперпозиции двух монохроматических волн одинаковой частоты в одной области

пространства может оказаться больше, а в другой меньше суммы интенсивностей каждой волны. Таким образом происходит перераспределение энергии светового излучения в пространстве. В данном случае это перераспределение стационарное, так как разность фаз двух монохроматических волн одинаковой частоты в каждой точке пространства постоянна. Волны с одинаковой частотой и постоянной разностью фаз называются *когерентными*. Только когерентные волны, налагаясь друг на друга, дают устойчивую интерференционную картину с неизменным положением в пространстве максимумов и минимумов колебаний.

Очевидно, что максимумы результирующей интенсивности

$$(135) \quad I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

встречаются там, где

$$(136) \quad \pm\delta = 0, 2\pi, 4\pi \dots$$

Минимумы результирующей интенсивности

$$(137) \quad I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

соответствуют разности фаз

$$(138) \quad \pm\delta = \pi, 3\pi \dots$$

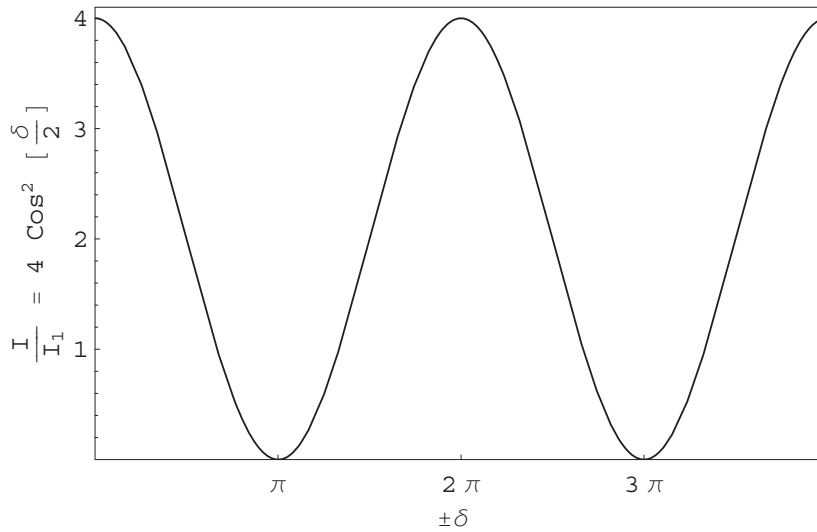


Рис. 12: Интерференция двух лучей света равной интенсивности. Зависимость интенсивности от разности фаз.

Рассмотрим частный случай интерференции двух волн одинаковой интенсивности $I_1 = I_2$. В этом случае

$$(139) \quad I = 2I_1(1 + \cos \delta) = 4I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}.$$

Это формул показывает, что результирующая интенсивность изменяется в пределах между максимальным $I_{\max} = 4I_1$ и минимальным $I_{\min} = 0$ значениями. Зависимость интенсивности от разности фаз показана на рис. 12. Пунктирная кривая показывает уровень результирующей интенсивности $2I_1$, если интерференции нет, т. е. $I_{12} = 0$.

5.3 Когерентность волн

Формула (139) показывает, что стационарная интерференционная картина будет возникать тогда, когда разность фаз δ (для данной точки пространства) остается постоянной во времени (при дополнительном условии, то поляризации волн во взаимно не перпендикулярны).

На результат интерференции волн существенное влияние оказывает их **когерентность**, — согласованное протекание во времени и пространстве волновых процессов. Две волны называются **когерентными**, если разность фаз колебаний остается постоянной во времени и при суперпозиции колебаний определяет амплитуду результирующего колебания.

Дело в том, что идеально гармонические колебания нельзя осуществить. В реальных колебательных процессах амплитуда, фаза и частота колебаний могут непрерывно хаотически изменяться во времени. Если, например, фазы двух колебаний φ_1 и φ_2 изменяются беспорядочно, но их разность $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ в одной и той же точке пространства остается постоянной, то колебания будут когерентны. Если разность фаз двух колебаний изменяется достаточно медленно, то в этом случае колебания остаются когерентными лишь в течение некоторого времени, пока их разность фаз не успела измениться на величину порядка π радиан. Это явление — проявление **временной когерентности**, связанной с некогерентностью излучения реальных источников света. Количественно это явление характеризуется физической величиной, которая называется *временем когерентности*. Ее мы подробно обсудим в последующих лекциях.

С другой стороны, как и идеально гармоническое колебание, идеально плоская волна также не существует. В реальных волновых процессах амплитуда и фаза волны изменяются не только вдоль направления распространения волны, но и в плоскости перпендикулярной этому направлению. Это вызвано особенностями процессов излучения и формирования волн протяженными источниками. Случайные изменения разности фаз в одни и те же промежутки времени в двух точках, расположенных в этой плоскости, увеличивается с ростом расстояния между ними. Колебания перестают быть когерентными на некотором расстоянии, когда случайные изменения разности фаз становятся сравнимыми с π . Это суть проявление **пространственной когерентности**. Ее точные количественные критерии мы рассмотрим в следующей лекции.

5.4 Интерференция, осуществляемая делением волнового фронта

Для получения когерентных источников света, которые соответственно излучают когерентные световые волны, существует простой способ, который нашел в 1815 г. француз О. Ж. Френель: необходимо разделить свет от одного источника света на два пучка и, заставив их пройти различные пути, свести вместе. Этот метод называется **деление волнового фронта**.

Первая экспериментальная демонстрация явления интерференции света была осуществлена англичанином Томасом Юнгом (1773–1829) во время публичных лекций в 1807 г. Этот уже классический опыт имеет не только

исторический, но и практический интерес (например, измерение углового расстояния между двум удаленными источниками света). Физическая идеализация этого опыта такова. Свет от **точечного** и **монохроматического источника** света S^5 падает на непрозрачный экран, в котором проделаны булавкой две близко расположенные узкие щели S_1 и S_2 , находящиеся на одинаковом расстоянии от источника S^6 . Узкие щели являются вторичными точечными *синфазными* источниками, лучи свет которых накладываются друг на друга и проецируются на экран, см. рис. 13.

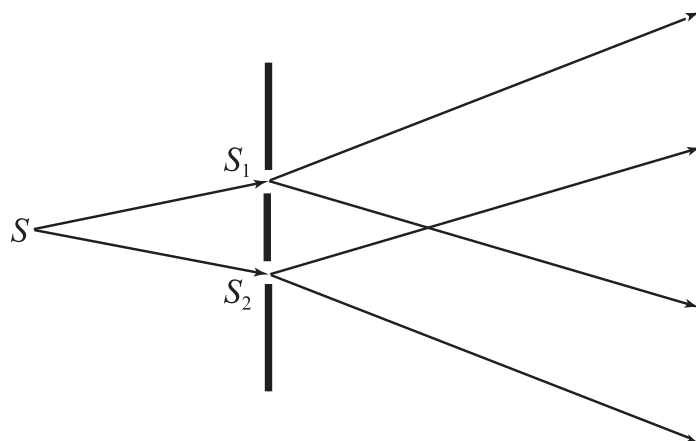


Рис. 13: Схема опыта Юнга. На рисунке показано сечение волнового фронта и экрана с щелями плоскостью, проходящей через точечный источник S и перпендикулярной экрану.

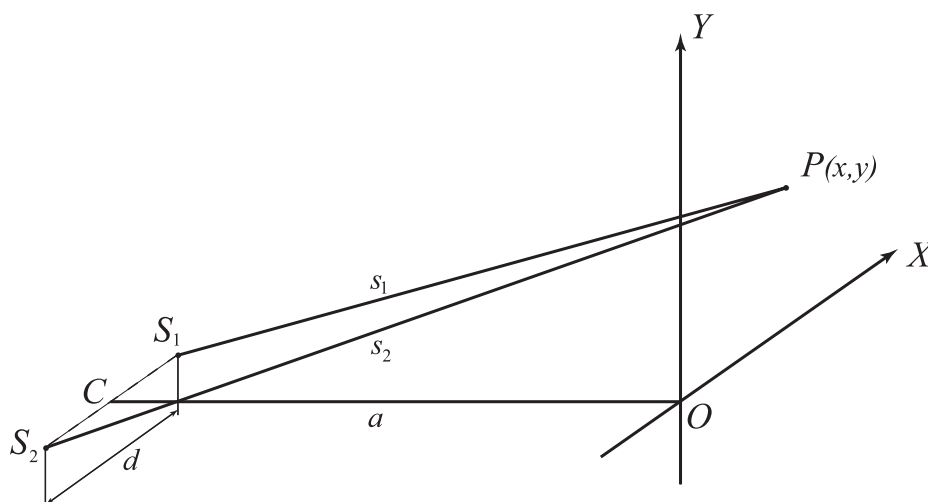


Рис. 14: Геометрия опыта Юнга.

Геометрия опыта изображена на рис. 14, где d обозначает расстояние между щелями S_1 и S_2 , а a – расстояние до проекционного экрана (плоскость XOY), на котором наблюдается интерференционная картина⁷. По

⁵В действительности это была дуговая лампа, расположенная позади красного свето-фильтра, $\lambda \cong 600$ нм. Размер источника – 0,25 мм. Расстояние от S до S_1S_2 составляло 1 м.

⁶На посеребренном экране щели шириной не более 0,1 мм с промежутком около $d = 0,7$ мм можно сделать при помощи лезвия бритвы.

⁷В опыте Т. Юнга расстояние $a = 5$ м; можно было наблюдать 6 параллельных полос

причине малости длины волны видимого света, интерференционная картина может быть получена, если *угол схождения* α двух лучей S_1P и S_2P очень мал⁸

$$(140) \quad \alpha \simeq \frac{d}{a} \ll 1.$$

Геометрическая *разность хода* двух лучей, пришедших из S_1 и S_2 в точку P с координатами x и y равна

$$(141) \quad \Delta s = s_2 - s_1 = \frac{2xd}{s_1 + s_2}.$$

При условии, что

$$(142) \quad x, y \ll a$$

выполняется условие

$$(143) \quad s_1 + s_2 \simeq 2a.$$

Тогда геометрическая разность хода двух лучей равна

$$(144) \quad \Delta s = x\alpha.$$

Разность фаз, соответствующая разности хода (144), равна

$$(145) \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha x.$$

По причине малости угла схождения α можно считать, что волны распространяются в одном направлении и, тогда, результирующая интенсивность может вычислена по формуле (139). Тогда согласно формулам (136) и (138) максимумы и минимумы интенсивности наблюдаются, когда

$$(146) \quad x_{\max} = m \frac{\lambda}{\alpha}, \quad x_{\min} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{\alpha},$$

где число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ называется порядком максимума (минимума) в данной точке.

Таким образом в точках экрана, координата которых равна $x_{\max}$, выполняется следующее условие

$$(147) \quad \Delta s = m\lambda.$$

Волны усиливают друг друга и результирующая интенсивность в 4 раза превосходит интенсивность каждой из волн. Напротив, в точка экрана с координатами $x_{\min}$, для которых выполняется условие

$$(148) \quad \Delta s = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$$

по обе стороны от центрального максимума.

⁸В опыте Т. Юнга $\alpha \simeq 0,00014$ рад.

волны полностью гасят друг друга, т. е. суммарная интенсивность света равна нулю.

В результате интерференционная картина вблизи центра экрана O представляет собой чередующиеся узкие темные и светлые полосы одинаковой ширины параллельные оси OY . Интенсивность света изменяется с изменением расстояния x по закону, см. рис. 12⁹,

$$(149) \quad I = 2I_1 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\alpha x}{\lambda} \right) \right].$$

Это формула показывает, что образование интерференционной картины обусловлено лишь перераспределением энергии светового излучения в пространстве. Среднее значение интенсивности по всей длине интерференционной картины равна сумме интенсивностей от двух источников.

Ширина интерференционной полосы (расстояние между соседними максимумами или минимумами)

$$(150) \quad \Delta x \simeq \frac{\lambda}{\alpha}$$

прямо пропорциональна длине волны λ и обратно пропорциональна углу схождения лучей α ¹⁰.

5.5 Вопросы для самостоятельной работы

1. Какой формы необходимо взять источник света в опыте Юнга, схема которого изображена на рис. 13 и 14, и как его расположить, для того чтобы картина интерференции была одинаковой во всех плоскостях, параллельных плоскости рисунка.
2. Как будет меняться интерференционная картина в опыте Юнга, если проекционный экран приближать к источникам S_1 и S_2 ? Как изменится интерференционная картина, если проекционный экран расположить перпендикулярно линии $S_1 S_2$?
3. Рассмотрите следующие опыты деления волнового фронта для демонстрации интерференции света: *бипризма Френеля*, *билинза Бийе*, *зеркало Ллойда* и *бизеркало Френеля*. В каждом случае изобразите оптическую схему опыта указав положения источника света S и двух мнимых источников света S_1 и S_2 . Опишите вид интерференционной картины в каждом опыте и найдите в каждом случае ширину интерференционной полосы.
4. Опыт показывает, что в опыте Юнга интенсивность не будет неизменной при переходе от одного интерференционного максимума к другому и не остается постоянной вдоль одной интерференционной полосы. Почему?
5. Докажите, используя формулу (149), что среднее значение суммарной интенсивности равно сумме интенсивностей от двух источников.

⁹Этот график не учитывает явления дифракции в каждой щели, приводящих к тому, что интенсивность света в максимумах не будет постоянной.

¹⁰В опыте Т. Юнга $\Delta x \simeq 4,3$ мм.

6 Лекция №6 "Пространственная когерентность"

Введение. Расчет видности. Критерий пространственной когерентности.

Цель лекции — исследовать роль размеров источника в интерференции света; рассчитать видность интерференционной картины в опыте Юнга в случае использования протяженного монохроматического источника света; найти причину ухудшения видности и сформулировать критерии пространственной когерентности, при которых получается допустимая контрастность полос.

6.1 Введение

Для наблюдения интерференции света при помощи бипризмы Френеля и подобных ей устройств геометрические размеры **монохроматического** источника света должны быть малы. С увеличением размеров источника уменьшается контрастность интерференционной картины. Для количественной характеристики контрастности интерференционных полос американский физик Альберт Майкельсон (1852–1931) ввел **функцию видности**

$$(151) \quad \mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ интенсивность света в максимумах и минимумах интерференционной картины соответственно. Ясно, что в случае интерференции света от двух одинаковых точечных источников монохроматического света, когда $I_{\min} = 0$, видность принимает максимальное значение $\mathcal{V} = 1$. Когда $I_{\min} \rightarrow I_{\max}$ видность $\mathcal{V} \rightarrow 0$, т. е. интерференционные полосы исчезают и экран, на который проецируется интерференционная картина, становится равномерно освещенным. Опыт показывает, что использование **протяженного источника света** приводит к ухудшению контрастности интерференционной картины и даже к ее полному исчезновению.

Это означает, что световое излучение протяженного источника света не является когерентным, хотя оно может быть монохроматическим. Степень когерентности такого излучения определяется контрастностью интерференционной картины.

При анализе явлений двухлучевой интерференции света от протяженного источника света по методу деления волнового фронта можно сформулировать условие когерентности излучения. Это условие учитывает степень *корреляцию фазы*, которая изменяется по фронту волны в результате статистических флуктуаций. Для этого вводят понятие **пространственной когерентности** излучения, которое количественно характеризуется двумя физическими величинами: **радиусом** и **углом пространственной когерентности**.

6.2 Расчет видности

Схема интерферометра Юнга с протяженным источником света приведена на рис. 15. Интерференция наблюдается на экране, плоскость которого перпендикулярна плоскости первичного протяженного S и вторичных

точечных S_1 и S_2 источников света. Протяженный источник света можно представить себе как светящийся отрезок, длина которого равна b . Угол равный

$$(152) \quad \Omega \approx \frac{d}{l}$$

называется апертурным углом или апертурой интерференции. Здесь l – расстояние между протяженным источником S и интерферометром S_1S_2 .

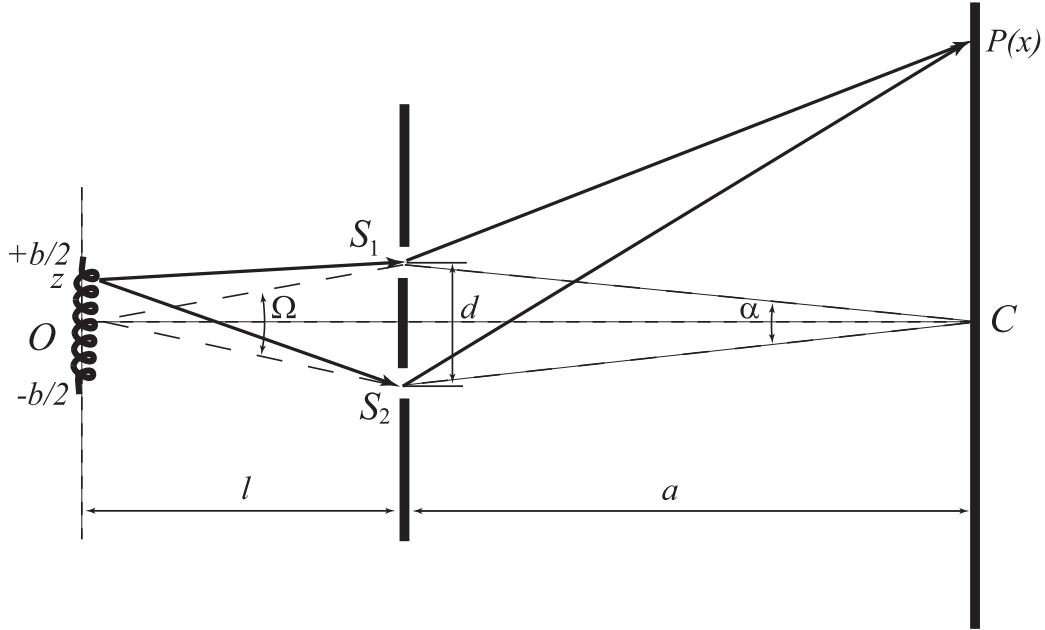


Рис. 15: Иллюстрация к расчету видности интерференционной картины в опыте Юнга от протяженного источника монохроматического света.

Светящийся отрезок можно представить как непрерывное линейное распределение **точечных некогерентных** источников света, суммарная интенсивность которых равна I_0 . Тогда элемент протяженного источника длиной dz и координатой z ($-\frac{b}{2} \leq z \leq +\frac{b}{2}$) излучает свет интенсивности

$$(153) \quad \frac{I_0}{b} dz.$$

При условии, что углы Ω и угол схождения лучей $\alpha \approx \frac{d}{a}$ малы, геометрическая разность хода двух лучей, идущих от точечного источника z , проходящих через S_1 и S_2 и пересекающихся в некоторой точке P на экране равна

$$(154) \quad \Delta s \simeq \Omega z + \alpha x.$$

Первое слагаемое показывает, что если $z \neq 0$, то вторичные источники света S_1 и S_2 уже не будут синфазными. Поэтому в точке P возникает дополнительная разность фаз

$$(155) \quad \delta(z, \Omega) = \frac{2\pi}{\lambda} \Omega z.$$

В результате интерференции интенсивность света изменяется с изменением расстояния x , от центра экрана O , по закону

$$(156) \quad dI(x, z) = \frac{2I_0 dz}{b} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\Omega z + \alpha x)\right) \right].$$

Если выделить другой точечный элемент источника, координата которого равна z' , то получится

$$(157) \quad dI(x, z') = \frac{2I_0 dz'}{b} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\Omega z' + \alpha x)\right) \right].$$

Формулы (156) и (157) показывают, что в интерферометре Юнга такое смещение точечного источника света приводит к тому, что интерференционная картина смещается параллельно своей длине. Это приводит к тому, что максимумы одной картины могут совпасть с минимумами другой и в результате интерференционная картина "размножается". В результате экран будет просто равномерно засвечен с интенсивностью .

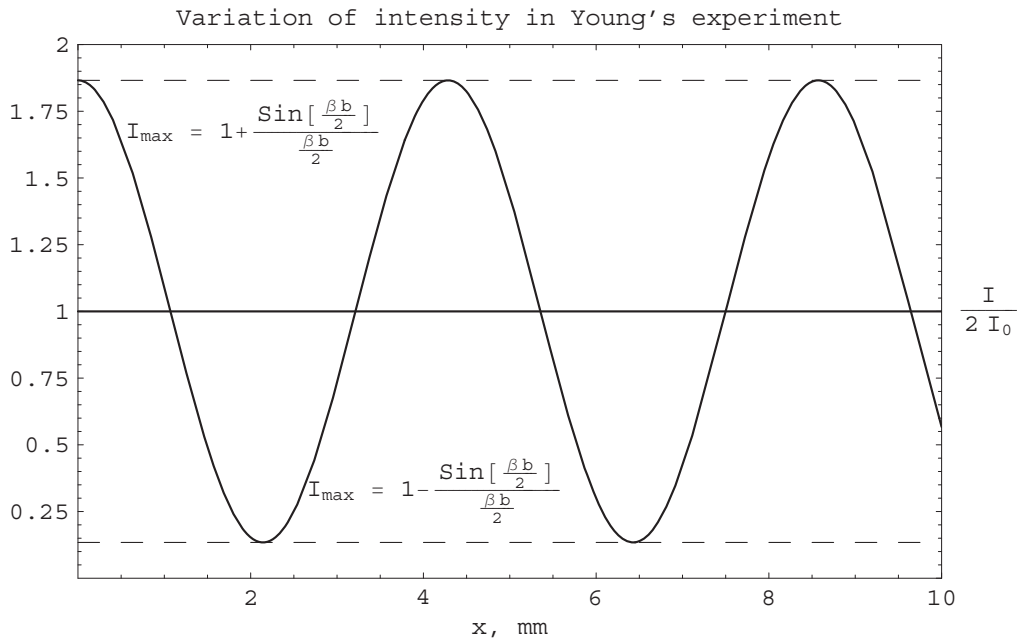


Рис. 16: Распределение интенсивности в интерференционной картине от протяженного источника света в опыте Юнга. При построении кривой использовались следующие параметры: $\lambda = 600$ нм, $d = 0,7$ мм, $b = 0,25$ мм, $\Omega = 0,0007$ рад и $\alpha = 0,00014$ рад.

Суммарное распределение интенсивности света, излучаемого протяженным источником света, получается путем сложения интерференционных картин некогерентных точечных источников

$$(158) \quad I(x) = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dI(x, z) = \frac{2I_0}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\Omega z + \alpha x)\right) \right].$$

Вычислив этот интеграл, получим

$$(159) \quad I(x) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin \frac{\beta b}{2}}{\frac{\beta b}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x\right) \right],$$

где $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \Omega$ временная переменная. График зависимости $I(x)$ показан на рис. 16. Интенсивность света в максимумах и минимумах равна

$$(160) \quad I_{\max} = 2I_0 \left[1 + \frac{|\sin \frac{\beta b}{2}|}{\frac{\beta b}{2}} \right], \quad I_{\min} = 2I_0 \left[1 - \frac{|\sin \frac{\beta b}{2}|}{\frac{\beta b}{2}} \right],$$

а функция видности очевидно имеет следующий вид

$$(161) \quad \mathcal{V} = \frac{|\sin \frac{\beta b}{2}|}{\frac{\beta b}{2}} = \frac{|\sin \frac{\pi \Omega}{\lambda/b}|}{\frac{\pi \Omega}{\lambda/b}}.$$

Исследуем зависимость функции видности (161) от размера протяженного источника света. Эта зависимость изображена на рис. 17. Значение видности $\mathcal{V} = 1$ соответствует точечному источнику света, так как для точечного источника $b \rightarrow 0$ формула (161) дает $\mathcal{V} \rightarrow 1$. Кривые, изображенные на рис. 16 и 17 показывают, что линейный источник света с равномерным распределением интенсивности дает такую же интерференционную картину, что и точечный источник. Однако их видность уменьшается. Таким образом, мы можем сделать следующий вывод:

видность интерференционных полос зависит от размера источника света. Измеряя видность полос можно определить, например, угловой размер источника, каким мы его видим из места расположения интерферометра

$$(162) \quad \phi = \frac{b}{l}.$$

6.3 Критерий пространственной когерентности

Если говорить о нелазерных источниках света, то когерентного излучения, для которого $\mathcal{V} = 1$ не существует. Поэтому необходимо получить количественный критерий, при какой видимости излучение можно называть когерентным.

Обозначим $\mathcal{V}_{\text{ког}}$ минимальное значение функции видности, при котором контрастность интерференционной картины еще можно считать удовлетворительной. Этому значению соответствует некоторый максимальный размер источника $b_{\text{ког}}$. Тогда, если выполняется условие $0 < b < b_{\text{ког}}$, то излучение протяженного источника света S можно считать **когерентным** (поскольку $\mathcal{V}_{\text{ког}} \leq \mathcal{V} \leq 1$ – интерференционные полосы четко различимы).

Если положить $\mathcal{V}_{\text{ког}} = \frac{1}{2}$, то $b_{\text{ког}} \simeq \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\Omega}$ ¹¹. Почему так можно сделать? Дело в том, что интерференционные полосы исчезают, если в некоторой точке P экрана с координатой x , геометрическая разность хода лучей, идущих от крайних точек источника равна $\frac{\lambda}{2}$ (максимумы интенсивности первой интерференционной картины наползают на минимумы второй). Соответ-

¹¹ Для выбранной геометрии опыта юнга $b_{\text{ког}} \cong 0.4286$ мм

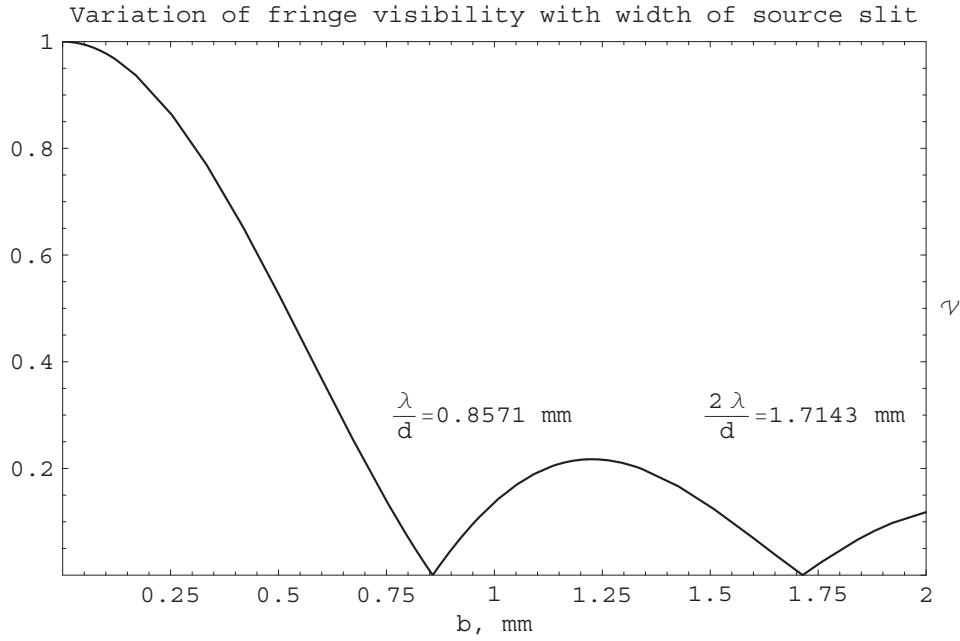


Рис. 17: Видность интерференционной картины от протяженного источника света с однородным распределением интенсивности.

ственно разность фаз (155), соответствующая крайним точкам протяженного источника не превышает π

$$(163) \quad \delta(b_{\text{ког}}, \Omega) = \frac{2\pi}{\lambda} \Omega b \lesssim \pi.$$

Полагая $\mathcal{V} = 0$ для $b \geq b_{\text{ког}}$ получим, что при выполнении условия

$$(164) \quad b\Omega \lesssim \frac{\lambda}{2}$$

излучение протяженного источника света можно считать когерентным. Это означает, что

протяженный линейный источник монохроматического света размером b можно свести к точечному источнику света лишь по отношению к излучению, заключенному в пределах угла $\Omega_{\text{ког}}$, причем

$$(165) \quad \Omega_{\text{ког}} \lesssim \frac{\lambda}{2b}.$$

6.3.1 Ширина и угол пространственной когерентности

Ширина когерентности, — расстояние по фронту волны, на котором излучение в различных точках фронта в один и тот же момент времени может считаться когерентным.

Пусть размер реального источника света b является постоянной заданной величиной. Тогда видность $\mathcal{V}$ нужно рассматривать как функцию расстояния между центрами щелей d , или базы интерферометра Юнга. Эта зависимость изображена на рис. 18.

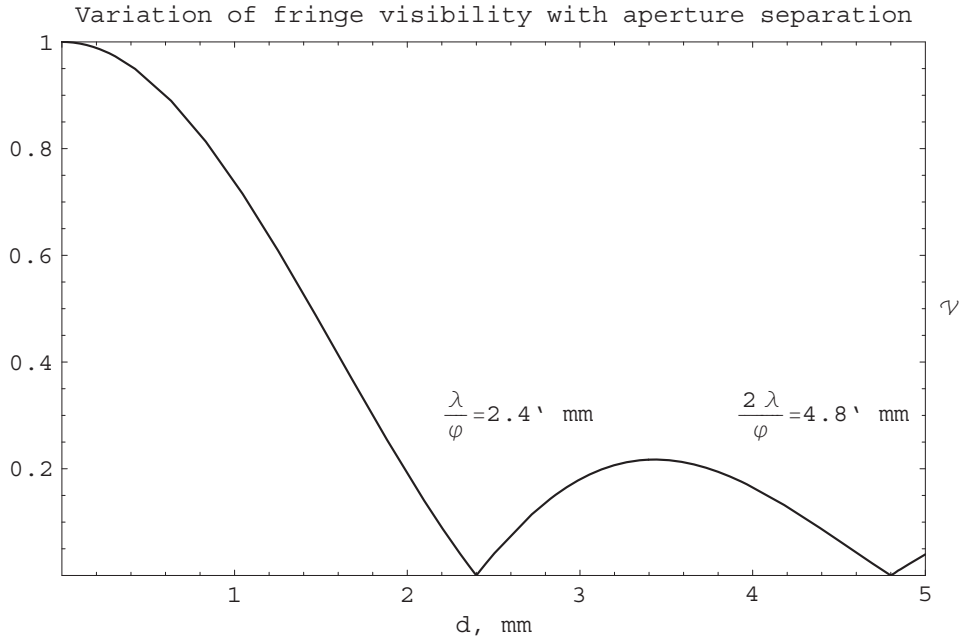


Рис. 18: Видность интерференционной картины от протяженного источника как функция расстояния d между центрами щелей интерферометра Юнга.

Согласно условию когерентности (164) интерференционная картина достаточно контрастная, если

$$(166) \quad d \lesssim \frac{1}{2} \frac{\lambda l}{b} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\varphi} \quad \text{или} \quad \varphi \lesssim \frac{\lambda}{2d}.$$

Поэтому расстояние

$$(167) \quad d_{\text{ког}} = \frac{\lambda l}{2b},$$

отсчитываемое по фронту волны, есть не что иное как ширина пространственной когерентности.

Угол пространственной когерентности $\varphi_{\text{ког}}$ определяется как максимальный размер источника, излучение которого можно считать когерентным. Поскольку $b \ll l$, то угол когерентности можно записать в виде

$$(168) \quad \varphi_{\text{ког}} = \frac{\lambda}{2d_{\text{ког}}} = \frac{b}{l}.$$

Физический смысл этих величин следующий: излучение некогерентного протяженного монохроматического источника можно считать когерентным на поперечнике, эффективный диаметр которого по порядку величины равен ширине пространственной когерентности. При этом источник излучения из центра этого поперечника виден под углом пространственной когерентности.

6.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Поскольку когерентного излучения физических источников света, для которых $\mathcal{V} = 1$ не существует, существует несколько значений $\mathcal{V}_{\text{ког}}$,

соответствующего удовлетворительной контрастности. Оцените численно величину радиуса и угла пространственной когерентности для следующих значений

$$\mathcal{V}_{\text{ког}} = 0.9; \quad \frac{\pi}{4}; \quad \frac{1}{e},$$

полагая, что $b = 0.25$ мм, $d = 0.7$ мм, $l = 1$ м, $\lambda = 600$ нм.

2. Оцените число интерференционных полос, которые видны на экране в интерферометре Юнга. На каком расстоянии от центра интерференционной картины интерференционные полосы размываются?
3. На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи от Солнца. При каком расстоянии d между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы? Угловой размер Солнца 0,001 рад.
4. Какому условию должны удовлетворять размеры источника света, чтобы могли наблюдаться интерференционные полосы в установках с 1) зеркалами Френеля и 2) зеркалом Ллойда?

7 Лекция №7 "Интерференция квазимонохроматического света"

Интерференция, осуществляемая делением амплитуды. Время и длина когерентности. Квазимонохроматический свет. Условие временной когерентности.

Цель лекции —

7.1 Интерференция, осуществляемая делением амплитуды

В прошлой лекции мы говорили о том, что на когерентность волн характеризует их согласованность как во времени, так и в пространстве. Временная когерентность связаны с тем, что свет, излучаемый реальными источниками света, вообще говоря, немонохроматический.

Далее, для того чтобы выполнить условие пространственной когерентности в опыте Юнга, линейный размер протяженного источника света должен быть очень мал. Если размер источника не достаточно мала, то в этом случае требуется очень малая апертура интерференции. Очень малый угол раскрытия получается, когда в качестве вторичных волновых центров S_1 и S_2 используются два зеркальных изображения первичного источника S . В этом случае на видность интерференционных полос, т. е. их контраст, заметное влияние будет оказывать степень немонохроматичности излучения.

Рассмотрим следующий интерференционный опыт по **методу деления амплитуды**. Схема опыта изображена на рис. 19. Сильно расходящийся пучок света от **протяженного** и **квазимонохроматического** источника света S падает на плоскопараллельную пластинку, толщина которой равна $d \approx 0.04 \text{ мм}$ ¹². Расстояние B от лампы до пластинки составляет несколько сантиметров. На пластинке происходит *деление амплитуды световой волны* в результате отражения и преломления света. Вторичными волновыми центрами являются два изображения лампы S_1 и S_2 , которые находятся на расстоянии $D = 2d$ друг от друга. Интерференционная картина, имеющая вид концентрических колец, получается на экране, расположенным за лампой на расстоянии A (примерно несколько метров). При этом прямой свет от источника на экран не попадает.

Угол раскрытия пучков света от когерентных источников S_1 и S_2 равен

$$(169) \quad \sin \Omega = \frac{Z}{(A+B)/\cos \beta} = \frac{d}{A+B} \sin 2\beta,$$

где $Z = D \sin \beta$, а β обозначает угловой размер интерференционного кольца на проекционном экране. Радиус кольца $R = A \tan \beta$ может равняться нескольким метрам.

Так как выполняются условия

$$(170) \quad Z \ll (A+B) \simeq A,$$

¹² Яркая лампа и красный светофильтр $\lambda = 700 \text{ нм}$ с узкой полосой пропускания $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} < 1$

то

$$(171) \quad \Omega \approx \frac{h \sin 2\beta}{A} \simeq 10^{-6} \text{ рад.}$$

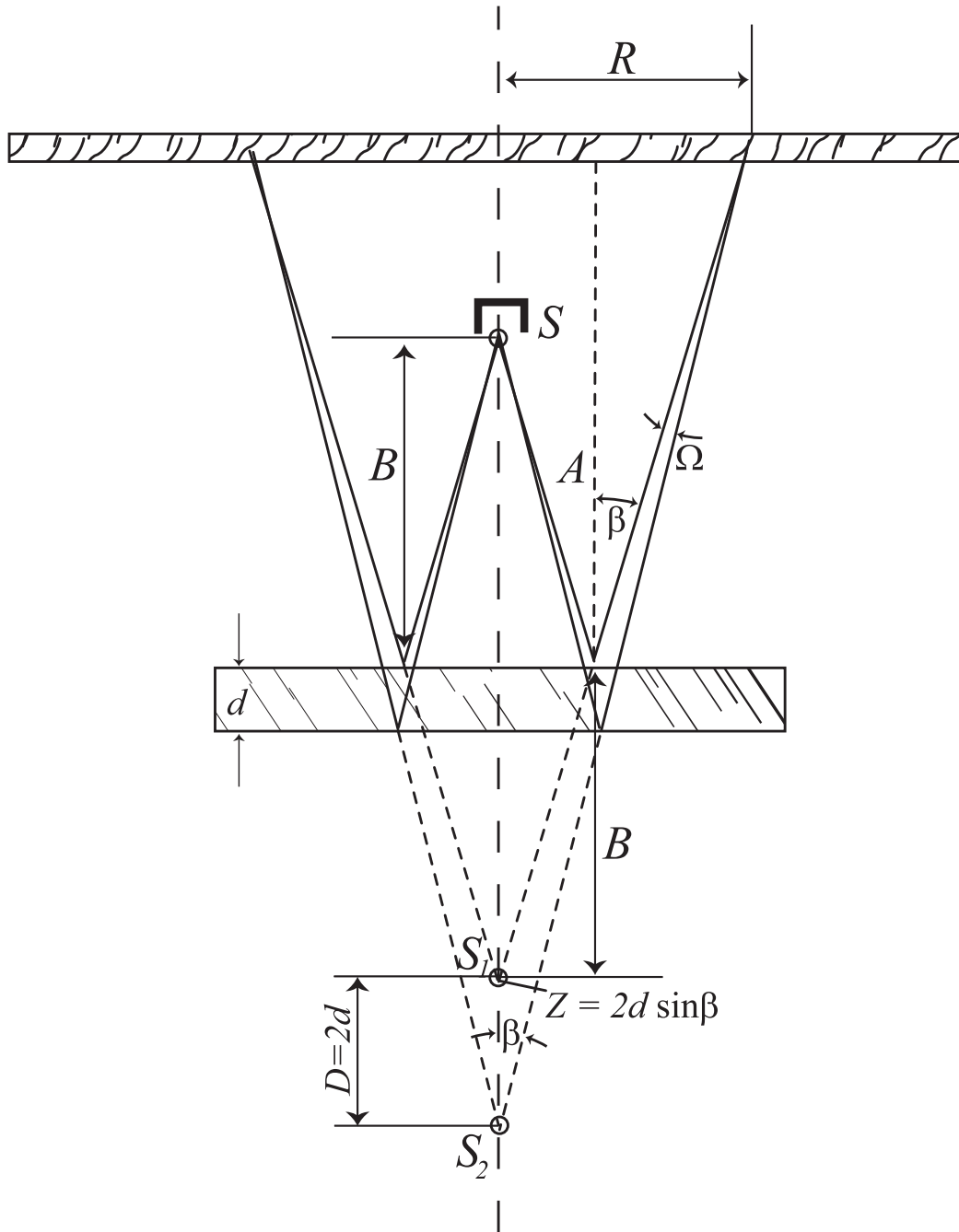


Рис. 19: Интерференционный опыт с плоскопараллельной пластиной. Зеркальные изображения S_1 и S_2 лампы S служат когерентными источниками. На экране проецируются кольцеобразные интерференционные полосы. Пропорции не соблюдены.

Ясно, что протяженный источник света размер, которого составляет несколько сантиметров, в данных условиях ведет себя как точечный.

Пусть свету интерференционному кольцу отвечает порядковое число n , определяющее геометрическую разность хода лучей $\Delta s = \lambda n$. Тогда

найдем, что

$$(172) \quad \cos \beta = \frac{\Delta s}{D} = \frac{n\lambda}{2d}.$$

Получается, что уменьшающимся значениям n соответствуют увеличивающиеся значения угла β , т. е. интерференционные кольца больших радиусов соответствуют меньшим порядкам интерференции. Внутреннему кольцу соответствует наибольший порядок

$$(173) \quad N_{\max} = \frac{2h}{\lambda} \cong 10^3!$$

Если бы источник света был строго монохроматический, то уменьшение видности для внутренних, или соответственно при увеличении геометрической разности хода, не наблюдалось бы. Причина размывания полос в данном опыте связана с тем, что свет, излучаемый первичным источником S не является монохроматическим.

7.2 Время и длина когерентности

Пусть излучение источника S состоит из двух близких спектральных линий с длинами волн λ и $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ и одинаковой интенсивности. Так происходит при наблюдении интерференции в свете D -линии паров Na , излучение которого представляет собой спектральные линии с $\lambda = 5890 \text{ \AA}$ и $\lambda' = 5896 \text{ \AA}$, или в свете зеленой линии паров ртути с длиной волны $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ и шириной $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$.

Центру интерференционной картины соответствует точки, где геометрическая разность хода лучей $\Delta s = 0$. В центр лучи света с различной длиной волны приходят с одинаковой фазой. При смещении от центра происходит постепенное смещение полос разного цвета друг относительно друга. Это происходит вследствие того, что согласно формулам (146) Лекции №5, положение максимумов и минимумов прямо пропорционально длине волны излучения. Если для данной точки P , соответствующей на экране некоторому порядку интерференции N , выполняются условия

$$(174) \quad \Delta s = N\lambda', \quad \Delta s = (N + \frac{1}{2})\lambda,$$

то в окрестности этой точки интерференционная полоса пропадет. Таким образом, условие первого исчезновения интерференционных полос имеет следующий вид

$$(175) \quad N = \frac{\lambda}{2(\lambda' - \lambda)} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}.$$

По мере возрастания порядка интерференции будет наблюдаться периодическая смена контрастности полос от максимального значения видности до минимального. Так, условие второго исчезновения $N' = 2N$.

Если предположить, что спектр источника света равномерен по полосе $\Delta\lambda$, то максимально возможный порядок интерференции немонахроматического света с заданной длиной волны и шириной определяется степенью монохроматичности света

$$(176) \quad N_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Это условие имеет простую физическую интерпретацию: интерференционная картина исчезает при совпадении максимума $(N + 1)$ -го порядка для длины волны λ с максимумом N -го порядка для длины волны λ' . Данному значению $N_{\max}$ отвечает максимально возможная разность хода

$$(177) \quad \Delta s_{\max} = N_{\max} \lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} \equiv L_{\text{ког}},$$

которая называется **длиной когерентности**. Время, за которое свет проходит этот путь, называется **временем когерентности**

$$(178) \quad \tau_{\text{ког}} = \frac{L_{\text{ког}}}{c}.$$

С помощью полученных формул можно оценить предельную толщину пластинки в описанном выше интерференционном опыте. В направлении, определяемом углом β , интерференционная картина будет размыта при условии, что разность хода, сходящихся на экране лучей, равна длине когерентности излучения. Тогда толщина пластинки не должна превышать по порядку величины

$$(179) \quad h \lesssim \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}.$$

7.3 Квазимонохроматический свет

Если мы говорим о монохроматическом свете, то имеем в виду ЭМ излучение одной определенной и строго постоянной частоты. Происхождение термина монохроматический свет связано с тем, что различие в частоте воспринимается человеком как различие в цвете.

Мы представляем монохроматический свет как гармоническое колебание, происходящее с неизменной амплитудой и частотой в течение бесконечно долгого промежутка времени. Однако понятие монохроматический свет является физической идеализацией, так как процессы излучения всегда ограничены во времени. Естественный свет есть сумма некоторого числа монохроматических волн со случайными амплитудами, частотами, фазами и поляризацией. Поскольку идеального монохроматического излучения нет, то монохроматическим считается излучение с узким спектральным интервалом, который можно приближенно характеризовать одной частотой (несущей частотой).

Спектр испускания газообразного вещества линейчатый: состоит из отдельных спектральных линий. В этом случае свет излучают атомы, которые практически не взаимодействуют друг с другом. Каждая линия соответствует переходу электрона из состояния атома с энергией E_n в состояние с энергией E_m . При этом испускается фотон, частота которого равна

$$(180) \quad \omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar},$$

где $\hbar = h/(2\pi)$ и h – постоянная Планка. Таким образом, излучаемый свет имеет вполне определенную частоту.

В действительности при квантовом переходе излучаются фотоны различных частот. Это связано с тем, что энергия возбужденного состояния E_n не имеет вполне определенного значения. Другими словами, возбужденный энергетический уровень имеет некоторую **естественную ширину**. В классической интерпретации естественная ширина линии излучения обуславливается тем, что в возбужденном состоянии атом пребывает в течение малого времени τ . Это время называется **временем жизни** атома на энергетическом уровне. Это время характеризует продолжительность времени излучения атома, т. е. получается, что излучение изолированного атома можно представить в виде пуга волн с длиной $L = c\tau$.

Получим формулу связи между шириной линии излучения и продолжительностью времени излучения атома. Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга для энергии и времени жизни состояния в квантовой механике

$$(181) \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq h,$$

энергия дискретного уровня E_n может иметь любое значение в интервале $E_n + \Delta E$ и $E_n - \Delta E$. Поэтому излучение отдельной спектральной линии соответствует интервалу частот

$$(182) \quad \Delta\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} \geq \frac{2\pi}{\tau}.$$

Эта формула показывает, что чем меньше время излучения, тем больше ширина линии излучения. Строго монохроматическое излучения возможно лишь при бесконечно большом времени излучения. А это возможно только для строго стационарного состояния, у которого $\Delta E = 0$.

Значение $\Delta\omega$ в формуле (182) определяет степень монохроматичности данной спектральной линии. Если ширина линии очень мала, то волну можно считать монохроматической с частотой равной средней частоте немонохроматической волны. Это выполняется при условии, что

$$(183) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1.$$

Это условие называется **условием квазимонохроматичности**. Приборы, с помощью которых из естественного излучения выделяют узкие спектральные интервалы, называются **монохроматорами**. Чрезвычайно высокая монохроматичность характерна для излучения некоторых типов лазеров. Ширина спектрального интервала излучения достигает величины $\Delta\lambda = 10^{-6} \text{ \AA}$, которая значительно уже, чем ширина линий атомных спектров.

7.4 Условие временной когерентности

При интерференции строго монохроматического света видность интерференционной картины не должна уменьшаться при увеличении разности хода лучей. Наблюдающееся ухудшением видимости полос связана с конечным временем и длиной когерентности излучения, испускаемым реальным источником света.

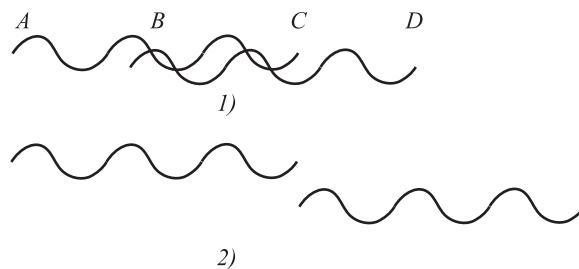


Рис. 20: Суперпозиция конечной длины цугов волн.

Если интерпретировать световую волну с конечным временем и длиной когерентности как синусоидальную определенной частоты и конечной продолжительности, то получается следующее. Интерференция квазимонохроматического света возникает, т. е. интерференционное слагаемое I_{12} в формуле (134) Лекции №5 только за счет перекрывающихся участков цугов волн. На рис. 20, 1 это отрезок BC . Длина участка BC соответствует разности хода интерферирующих волн. Когда разность хода становится столь большой, что цуги не перекрываются, интерференционная картина исчезает, — суммарная интенсивность приближается к сумме интенсивностей двух интерферирующих волн.

Таким образом, временная когерентность связана с запаздыванием одного цуга волн по сравнению с другим. Поэтому

с квазимонохроматической волной можно обращаться как с монохроматической в течение промежутка времени, меньших времени когерентности

$$(184) \quad t \leq \tau_{\text{ког}}.$$

Или, интерференционная картина размывается полностью при разности хода лучей равной длине когерентности

$$(185) \quad \Delta s_{\text{max}} \leq L_{\text{ког}}.$$

Это условие называется условием **временной когерентности**.

7.5 Вопросы для самостоятельной работы

1. Выведите формулу (169).
2. Известно, что интерференцию можно наблюдать не только в падающем, но и проходящем свете. Предложите возможную схему интерференционного опыта с источником света и плоскопараллельной пластинкой. Какие световые лучи будут при этом интерферировать друг с другом? Опыт показывает, что минимумы не так темны, как в случае падающего света. Почему?
3. Рассчитайте время и длину когерентности излучения для красной линии $\lambda = 630$ нм гелий-неонового лазера. Ширина линии равна $\Delta\lambda =$

10^{-3} нм.

4. Оцените степень монохроматичности белого (солнечного) света.

8 Лекция №8 "Принцип Гюйгенса–Френеля"

Формулировка принципа. Вычисление амплитуды волны. Примеры.

При внимательном рассмотрении на пятнышко света, прошедшего через узкое круглое отверстие, можно заметить, что его граница окружена чередующимися темными и светлыми кольцами. Они возникают за счет дифракции света на краях отверстия. **Явление дифракции света**, или огибания ЭМ волнами препятствий, в результате которого световая волна проникает в область геометрической тени, присуще любому волновому движению. Однако из-за малости длины волны света наблюдать дифракцию света в обычных условиях не просто. Волны заметным образом огибают препятствия, если геометрические размеры препятствия сравнимы с длиной волны.

8.1 Формулировка принципа

Задачи по расчету дифракционной картины, возникающей при огибании света препятствий, являются наиболее трудными в оптике. Всякая дифракционная задача сводится к нахождению решения дифференциальных уравнений Максвелла, удовлетворяющего определенным граничным условиям. В рамках настоящего курса "Оптики" мы рассмотрим приближенные методы расчета, используемые в волновой теории дифракции. Один из таких методов развит на основе **принципа Гюйгенса–Френеля**. Идея принципа следующая: *интерференция излучения от вторичных источников участка волнового фронта приводит к возникновению дифракции*.

Формулировка принципа. Для того чтобы вычислить амплитуду световой волны в любой точке пространства, надо мысленно окружить первичный источник света замкнутой поверхностью. Далее поверхность разбивают на множество маленьких участков (площадок), которые можно рассматривать как вторичные источники света. Амплитуды и фазы колебаний во вторичных источниках определяются амплитудой и фазой волны от первичного источника. Интерференция вторичных световых волн будет определять амплитуду и фазу колебания в рассматриваемой точке пространства.

Рассмотрим модель, объясняющую как свет, испущенный источником, попадает в произвольную точку пространства P . Пусть в точке P_0 , см. рис. 21, находится точечный источник монохроматического света. Будем считать, что среда оптически однородная и изотропная. Пусть сферическая поверхность Σ радиуса a будет обозначать волновой фронт в некоторый момент времени. Поскольку волна сферическая, на расстоянии a от источника напряженность равна

$$(186) \quad \frac{E_0}{a} e^{-i(\omega t - ka)},$$

где E_0 – амплитуда на единичном расстоянии и $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Напряженность вторичной световой волны от малого участка Q волновой поверхности в точке P прямо пропорциональна амплитуде первичной волны и площади

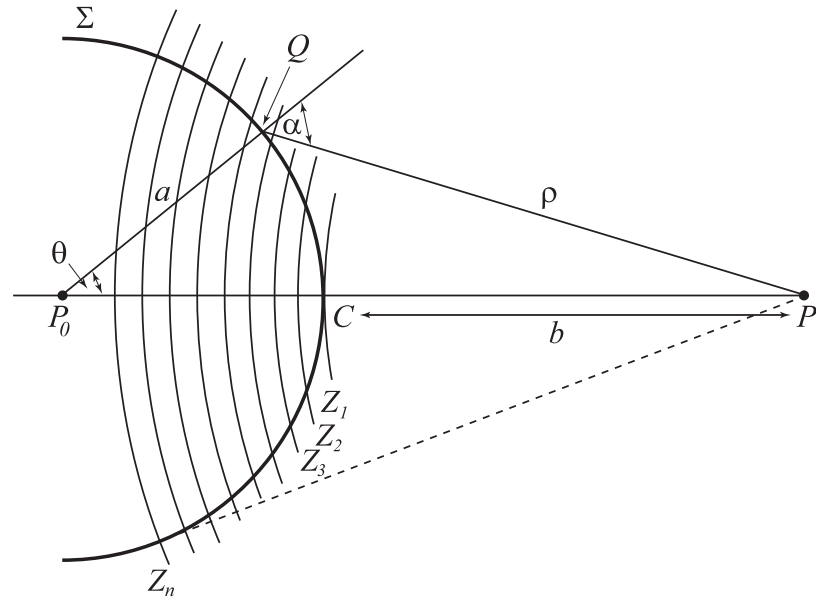


Рис. 21: Построение зон Френеля.

$d\sigma$ этого элемента

$$(187) \quad dE(P) = K(\alpha) \frac{E_0}{a} e^{-i(\omega t - ka)} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} d\sigma$$

где коэффициент пропорциональности $K(\alpha)$ учитывает неизвестную зависимость амплитуды вторичной волны от угла между нормалью к волновой поверхности в точке Q и направлением QP , $|QP| = \rho$. Этот угол называется **углом дифракции**. Согласно предположения О. Ж. Френеля коэффициент K принимает максимальное значение вдоль оси распространения волны, т. е. для $\alpha = 0$, и обращается в нуль для тех участков поверхности, для которых $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$. Результирующая напряженность в точке P определяется частью волнового фронта, которая не закрыта препятствием, расположенным на пути распространения волны

$$(188) \quad E(P) = \frac{E_0 e^{-i(\omega t - ka)}}{a} \int_{\Sigma} d\sigma \frac{e^{ik\rho}}{\rho} K(\alpha).$$

Зоны Френеля. Для вычисления интеграла в формуле (188) существует простой и наглядный метод, называемый **методом зон Френеля**. Проведем следующее графическое построение, изображенное на рис. 21. Будем считать, что радиус волнового фронта много больше длины волны $a \gg \lambda$. Расстояние от точки P до ближайшей точки C на волновой поверхности равно b . Далее разобьем поверхность Σ на кольцевые зоны $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ так, чтобы расстояния от краев соседних зон до точки P отличались на половину длины волны света

$$(189) \quad b, \quad b + \frac{\lambda}{2}, \quad b + \frac{2\lambda}{2}, \quad b + \frac{3\lambda}{2}, \quad \dots, \quad b + \frac{m\lambda}{2},$$

Преимущество подобного разбиения состоит в том, что для соответствующих точке $Z_1, Z_2, \dots$ соседних зон разность хода лучей равна $\frac{\lambda}{2}$ и вторичные волны от них в точке P ослабляют друг друга.

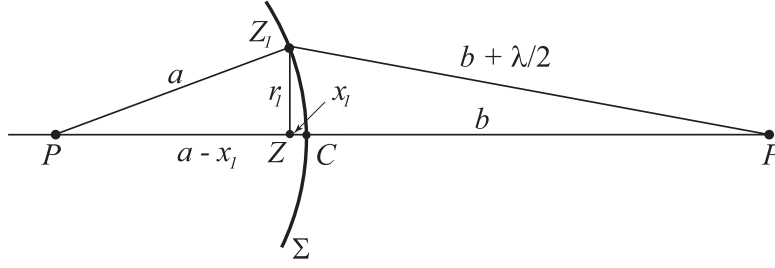


Рис. 22: Иллюстрация к вычислению радиуса и площади первой зоны Френеля.

Радиусы зон Френеля нетрудно вычислить и доказать, что их площади одинаковые. Согласно рис. 22 радиус r_1 первой зоны Френеля равен

$$(190) \quad r_1^2 = a^2 - (a - x_1)^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x_1)^2.$$

Так как $a \gg \lambda$ и $b \gg \lambda$, то найдем, что

$$(191) \quad x_1 = \frac{b\lambda}{2(a+b)} + \mathcal{O}(\lambda^2).$$

Радиус первой зоны Френеля равен

$$(192) \quad r_1 \cong \sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}.$$

Аналогично для зоны с порядковым номером m нетрудно вычислить

$$(193) \quad x_m \cong \frac{\lambda bm}{2(a+b)}, \quad r_m \cong \sqrt{\frac{ab\lambda m}{a+b}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Площадь первой зоны Френеля равна площади сферического сегмента

$$(194) \quad \sigma_1 = 2\pi a x_1 = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Площадь второй зоны Френеля

$$(195) \quad \sigma_2 = 2\pi a x_2 - \sigma_1 = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}.$$

Таким образом, площади зон равны.

8.2 Вычисление амплитуды волны

Теперь перейдем к непосредственному вычислению интеграла (188), разбивая волновой фронт на зоны Френеля. Из соображений симметрии двумерный интеграл по поверхности можно свести к одномерному. Из рис. 21 видно, что

$$(196) \quad \rho^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b) \cos \theta.$$

Тогда

$$(197) \quad \rho d\rho = a(a + b) \sin \theta d\theta.$$

Ясно, что площадь кольца, вырезанного из волнового фронта двумя близкими концентрическими сферами с центром в точке P равна

$$(198) \quad d\sigma = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \frac{2\pi a}{a + b} \rho d\rho.$$

Тогда интеграл (188) сводится к

$$(199) \quad E(P) = \frac{2\pi E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - ka)} \underbrace{\int_b^{b+2a} d\rho K(\rho) e^{ik\rho}}_?$$

Вклад от отдельной зоны в результирующую амплитуду (199) можно оценить при помощи теоремы о среднем

$$(200) \quad E_m \leq \frac{2\pi E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - ka)} K_m \int_{b+(m-1)\lambda/2}^{b+m\lambda/2} d\rho e^{ik\rho},$$

где K_m обозначает среднее значение коэффициента K по зоне Френеля с номером m . Результат дальнейшего вычисления можно представить в виде

$$(201) \quad E_m(P) = -\frac{2\pi i}{k} \frac{E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - ka - kb)} e^{ikm\lambda/2} (1 - e^{-ik\lambda/2}) K_m.$$

Так как $k\lambda = 2\pi$, последних два множителя преобразуются к

$$(202) \quad e^{ikm\lambda/2} (1 - e^{-ik\lambda/2}) = e^{i\pi m} (1 - e^{-i\pi}) = (-1)^m 2.$$

Тогда

$$(203) \quad E_m(P) = 2i\lambda (-1)^{m+1} K_m \frac{E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - k(a+b))}.$$

Это выражение показывает, что вклады от соседних зон Френеля в результирующее колебание противоположны по знаку. Согласно принципу суперпозиции найдем

$$(204) \quad E(P) = 2i\lambda \frac{E_0}{a + b} e^{-i(\omega t - ka - kb)} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} K_m.$$

Для приближенного вычисления ряда в формуле (204)

$$(205) \quad S = \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} K_m = K_1 - K_2 + K_3 - \dots + (-1)^{N+1} K_N$$

нужно принять еще одно дополнительное допущение: амплитуды колебаний в точке P монотонно убывает по мере увеличения угла дифракции

$$(206) \quad K_1 > K_2 > \dots K_N.$$

Для больших номеров зон Френеля амплитуда колебаний от вторичных источников пренебрежимо мала.

Перепишем выражение (254), разделяя коэффициенты от нечетных зон на равные части

$$(207) \quad S = \frac{K_1}{2} + \left(\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_1}{2} \right) + \left(\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_1}{2} \right) + \dots$$

Будем считать, что благодаря монотонности убывания выполняется равенство

$$(208) \quad K_m = \frac{K_{m-1} + K_{m+1}}{2}.$$

Тогда выражения в скобках (207) будут равны нулю. Если пренебречь действием последней зоны, то результирующее колебание в точке P равно

$$(209) \quad E(P) \cong i\lambda(K_1 \pm K_N) \frac{E_0}{a+b} e^{-i(\omega t - ka - kb)} \cong \frac{1}{2} E_1(P),$$

где знак "+" соответствует нечетному числу зон Френеля, а знак "—" — четному. Таким образом,

амплитуда результирующего колебания в точке P примерно равна половине амплитуды колебания, создаваемого центральной зоной Френеля. Распространение света в однородной среде происходит так, как если бы световой поток распространялся внутри узкого канала P_0P , т. е. по прямой.

Замечание. Малость длины волны света λ по сравнению с расстояниями a и b определяет прямолинейность распространения света. Если бы глаз мог воспринимать радиоволны, то точечный источник света на расстоянии нескольких метров от глаз казался бы светящимся шаром!

Отметим, что выражение (209) для амплитуды будет совпадать с выражением для амплитуды сферической волны, если

$$(210) \quad iK_1\lambda = 1, \quad \text{или} \quad K_1 = -\frac{i}{\lambda} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda}.$$

Пояснить полученный результат можно следующим образом. Множитель $e^{-i\pi/2}$ означает, что колебания первичной и вторичных волн отличаются по фазе на четверть периода. Множитель λ^{-1} в формуле (210) указывает на то, что амплитуды вторичных волн относятся к амплитуде первичной волны как $1 : \lambda$.

8.3 Примеры

Теперь рассмотрим такой случай. Пусть сферическая волна падает на непрозрачный экран, в котором проделано круглое отверстие. Вопрос: чему будет равна интенсивность света в точке P на рис. 21. Ответ дает принцип Гюйгенса–Френеля, если предположить что

1. непроницаемые части экрана не являются источниками вторичных волн;
2. точки участка волнового фронта, не закрытого экраном, являются такими же источниками вторичных волн, какими они были бы при отсутствии непроницаемых частей экрана.

Таким образом, амплитуда волны в точке P есть суперпозиция волн, испускаемых зонами Френеля незакрытыми экраном. Пусть экран закрывает все, кроме половины первой зоны Френеля. Тогда получим, согласно формулам (203) и (204), полагая $m = 1$ и умножая на $\frac{1}{2}$, что

$$(211) \quad E(P) = i\lambda K_1 \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)} = \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)}.$$

Амплитуда дифрагированной волны, и соответственно интенсивность, равна амплитуде "свободной" волны, т. е. в отсутствии экрана. Если открыта только первая зона Френеля, то

$$(212) \quad E(P) = 2i\lambda K_1 \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)} = 2 \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)}$$

и интенсивность волны $I(P) \sim |E(P)|^2$ в четыре раза превышает интенсивность волны при отсутствии экрана. Далее, если будут открыты первая и вторая зоны Френеля, то амплитуда $E(P) \simeq 0$. Это происходит потому, что вклады соседних зон компенсируют друг друга. Все эти выводы согласуются с экспериментом.

Из рассуждений о методу зон Френеля возникает необходимость появления светлого пятна (максимума) в случае, если на пути волны стоит непрозрачный круглый экран, размеры которого таковы, что он закрывает только первую зону Френеля. Согласно формуле (204),

$$(213) \quad E(P) = 2i\lambda \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)} [-K_2 + K_3 - K_4 + \dots].$$

Сумма коэффициентов в квадратных скобках равна $\frac{-K_2}{2}$ и, следовательно,

$$(214) \quad E(P) \approx -i\lambda \frac{E_0}{a+b} e^{ik(a+b)} K_2$$

Поскольку величина K_2 практически сопоставима с величиной $K_1 = \frac{1}{i\lambda}$, то за экраном в его тени на оси возникает светлое пятно. Это пятно называется **пятном Араго–Пуассона**.

8.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. В чем состоит физическое содержание принципа Гюйгенса–Френеля?
2. В чем заключаются трудности метода зон Френеля?
3. Вычислите радиусы зон Френеля и докажите, что их площади одинаковые.
4. Оцените площадь центральной зоны Френеля и поперечник канала распространения света, используя следующие данные $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ м, $r_0 \approx b \approx 1$ м.
5. Качественно объясните, как зависит интенсивность пятна Пуассона от расстояния до непрозрачного экрана?

9 Лекция №9 "Дифракция Френеля круглом отверстии"

Спираль Френеля. Дифракция на круглом отверстии. Зонная пластинка.

Для наглядной оценки результатов интерференции от зон Френеля пользуются графическим методом вычисления результирующей амплитуды. Результат сложения представляется векторной диаграммой, с помощью которой можно оценить результат дифракции на простых препятствиях в центре дифракционной картины.

9.1 Спираль Френеля

Результаты, полученные в Лекции №8 и представленные формулами (204) и (209), имеют главное значение в методе зон Френеля. Эти результаты можно наглядно интерпретировать с помощью векторной диаграммы.

Разобьем каждую зону Френеля на достаточно большое количество кольцевых участков, которые будем называть **подзонами**. Предположим, что амплитуды колебаний от каждой подзоны в точке наблюдения P изображаются вектором постоянной длины a . Колебания от крайних подзон зоны Френеля различаются по фазе на π радиан, так как разность хода лучей от этих участков равна $\frac{\lambda}{2}$. Отсюда следует, что разность фаз колебаний δ от соседних подзон должна быть равна $\delta = \frac{\pi}{N}$, где N — число подзон каждой зоны Френеля. Будем считать, что фазы волны, излучаемой первой подзоной центральной зоны Френеля за нуль.

Согласно принципу суперпозиции волновое возмущение, создаваемое, например, первой зоной Френеля, можно представить как результат действия когерентных световых колебаний, излучаемой ее подзонами. Математически задача формулируется следующим образом. Требуется найти амплитуду и фазу результирующего колебания, возникающего в результате сложения N когерентных колебаний одного направления, имеющих вид: $x_n = a \cos[\omega t + (n - 1)\delta]$, где n — номер колебания ($n = 1, 2, \dots, N$), δ — разность фаз колебаний между n и $n - 1$ колебаниями.

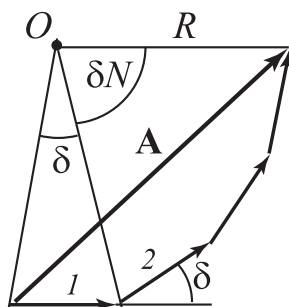


Рис. 23: Графическое вычисление амплитуды результирующего колебания.

На векторной диаграмме каждому колебанию, модуль которого равен a , сопоставим вектор $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$. Из этих N векторов можно построить цепочку, обозначив результирующий вектор как $\mathbf{A}$. Если провести описанную

окружность радиуса R с центром в точке O , то из рис. 23 видно, что

$$(215) \quad A = 2R \sin \frac{\delta N}{2}, \quad a = 2R \sin \frac{\delta}{2}.$$

Исключив R , получим

$$(216) \quad A = a \frac{\sin \frac{\delta N}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Фазу результирующего колебания можно найти следующим образом (опуская временную зависимость колебаний)

$$(217) \quad \begin{aligned} E_1(P) &= a + ae^{i\delta} + ae^{i2\delta} + \dots + ae^{i(N-1)\delta} \\ &= a(1 + e^{i\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta}) \\ &= a \frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1} = a \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}} = A e^{+i\frac{\pi}{2}} e^{-i\frac{\delta}{2}}. \end{aligned}$$

На рис. 24, *a* построена векторная диаграмма колебаний для $N = 8$ для первых трех зон Френеля. В соответствии с рис. 23 колебания возбуждаемые в точке наблюдения P подзонами первой зоны Френеля, изображаются на диаграмме векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_8$, образующие ломанную линию. При

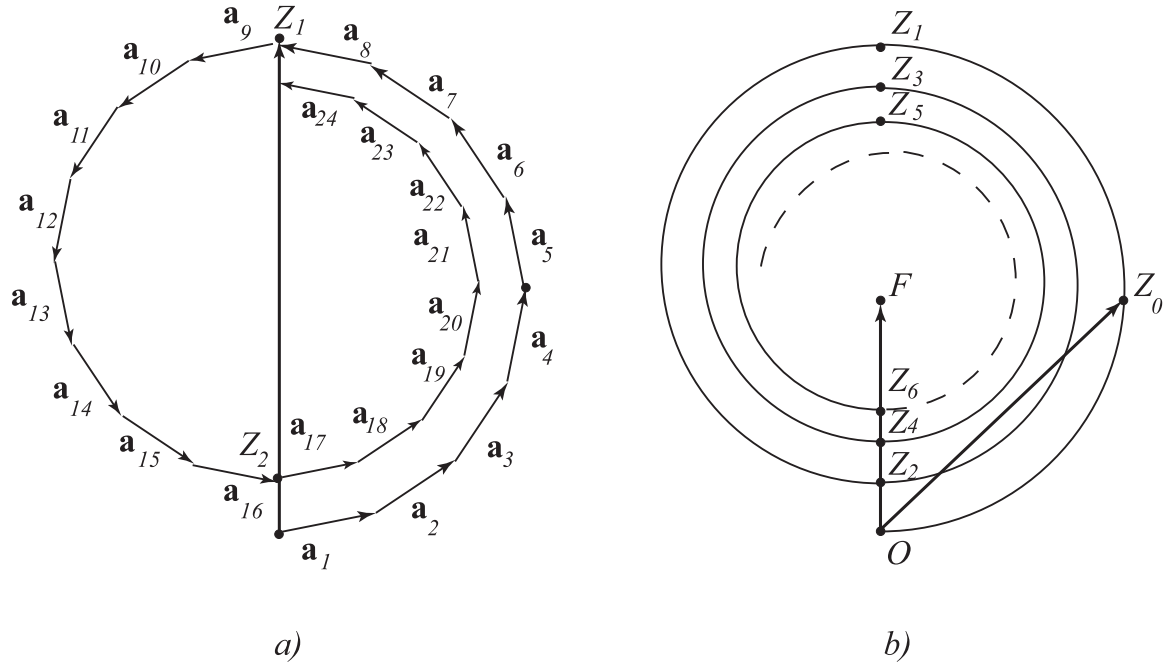


Рис. 24: Спираль Френеля.

переходе ко второй зоне Френеля мы должны учесть тот факт, что амплитуда a при удалении от точки наблюдения несколько уменьшается. Из-за этого ломанная кривая не замыкается. Если число подзон неограниченно увеличивать, то ломанная линия превратится в непрерывную спираль, которая обвивается вокруг фокуса F , см. рис. 24, *b*. Мы будем называть такую

спираль как **спираль Френеля**. Она позволяет определить амплитуду результирующего колебания в точке наблюдения P , расположенной в центре дифракционной картины, при открытии любого числа зон Френеля и их частей.

На рис. 24 отрезок $|OZ_0|$ пропорционален амплитуде при открытии внутренней половины первой зоны Френеля. Длина отрезков $|OZ_1|$, $|OZ_2|$, ... пропорциональна амплитудам при открытии первой, первой и второй и т. д. зон Френеля.

9.2 Дифракция на круглом отверстии

С помощью спирали Френеля можно оценить результат дифракции на круглом отверстии или круглом экране в центре дифракционной картины и определить ее вид.

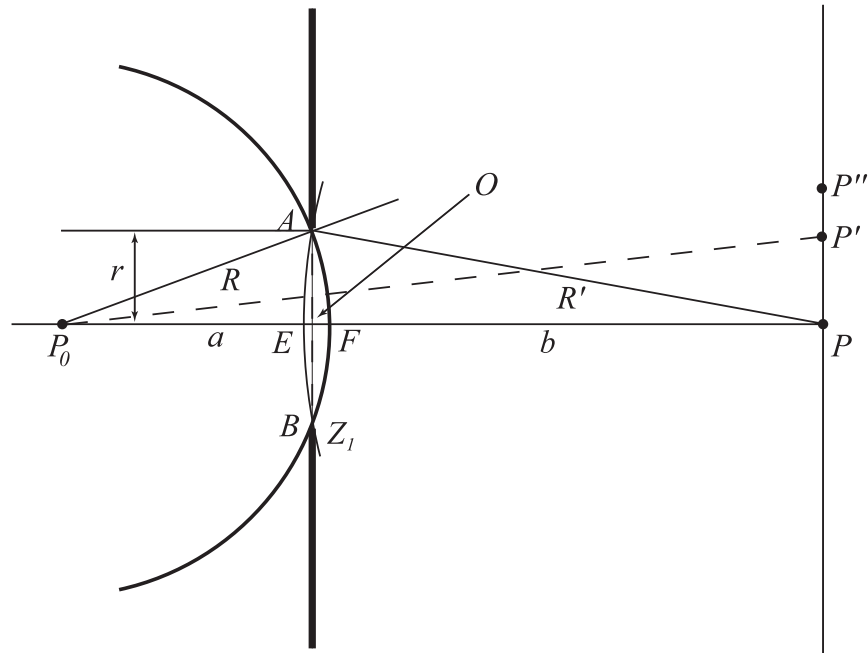


Рис. 25: Дифракция света на круглом отверстии.

Рассмотрим дифракцию на непрозрачном экране, в котором проделано круглое отверстие радиуса r , см. рис. 25. Найдем интенсивность света I за экраном в точке P , для которой отверстие: 1) равно первой зоне Френеля; 2) внутренней половине первой зоны; 3) сделали равным первой зоны Френеля и затем закрыли его половину (по диаметру)? Далее, 4) как будет меняться интенсивность дифракционной картины при удалении от центра P и 5) при расширении отверстия?

Пусть E_0 и I_0 обозначают амплитуду и интенсивность волны в точке P при свободном распространении волны, т. е. при отсутствии экрана. На рис. 25, b длина отрезка $|OF|$ пропорциональна E_0 . Действие непрозрачного экрана сводится к устранению той части волнового фронта, которую он закрывает. На действие открытой части волнового фронта влияние экран не оказывает. Общий световой поток пропорционален площади поверхности

отверстия. Однако вследствие интерференции вторичных световых волн от участков открытой части волнового фронта будет происходить либо усиление, либо ослабление результирующей интенсивности света на оси P_0P распространения пучка.

Оценить интенсивность света в центре дифракционной картины в зависимости от радиуса отверстия можно следующим способом. Построим сферу с центром в точке P_0 , где расположен источник света, так чтобы она проходила через края отверстия AB . Выбрав точку наблюдения, построим зоны Френеля и подсчитаем сколько зон укладывается в отверстии.

1. Если экран открывает центральную зону Френеля, то амплитуда колебания света в точке наблюдения пропорциональна отрезку $|OZ_1| = 2|OF|$ на рис. 24, b , т. е. $E \simeq 2E_0$, $I \simeq 4I_0$. Таким образом, интенсивность I в центре P дифракционной картины оказывается в четыре раза большей, чем было бы при свободном распространении волны.
2. Если отверстие равно внутренней половине первой зоны, то амплитуда колебания $E(P)$ пропорциональна отрезку $|OZ_0|$ спирали Френеля, т. е. $E \simeq \sqrt{2}E_0$, $I \simeq 2I_0$. Таким образом, интенсивность I в центре P дифракционной картины оказывается в два раза большей, чем было бы при свободном распространении волны.
3. Если половину отверстия, которое равно первой зоне Френеля, закрыли по диаметру, то амплитуда колебания $E(P)$ пропорциональна отрезку $|FZ_0|$ спирали Френеля, т. е. $E \simeq E_0$, $I \simeq I_0$. Таким образом, интенсивность I в центре P дифракционной картины оказывается равной интенсивности света при свободном распространении волны.
4. Характер дифракционной картины можно выяснить следующим образом. Поместим в точке P проекционный экран параллельный преграде с отверстием. Если мы сместимся из точки P в точку P' , то прямая P_0P' не будет осью симметрии экрана с отверстием. В этом случае частично будет открываться вторая зона Френеля, и по мере увеличения расстояния от оси симметрии P_0P разность хода между самой близкой и дальней точками на открытом отверстием фронте волны может стать равной $\frac{\lambda}{2}$. Таким образом, из-за интерференции вторичные волны будут компенсировать друг друга. Из соображений симметрии ясно, что множество таких точек будет представляться темным кольцом с центром в точке P . Далее, понятно, что вокруг темного кольца должно возникнуть светлое кольцо, например при смещении в точку P'' . Поэтому дифракционная картина от круглого отверстия представляет собой чередование концентрических светлые и темные колеи (с центром в точке P). Диаметр первого темного кольца будет несколько превышает диаметр отверстия. Из-за дифракции свет должен проникать в область геометрической тени, т. е. огибать препятствие.
5. Если увеличить радиус отверстия r , то при открытых двух первых зон Френеля в точке P наблюдается минимум интенсивности, так как действия первой и второй зоны практически полностью компенсируют друг друга. На спирали Френеля одновременной действие двух первых зон Френеля пропорционально отрезку $|OZ_2|$, длина которого очень

мала (по сравнению с длиной отрезка $|OZ_1|$). Если число открытых зон равно трем, то интенсивность света в точке P будет такой же, как получилось бы, если бы была открыта только третья зона Френеля. На рис. 24, b , совокупное действие трех зон Френеля пропорционально длине отрезка $|OZ_3|$. Всегда при четном числе открытых зон Френеля в точке P будет наблюдаться минимум (отрезки $|OZ_4|$, $|OZ_6|$, ...), а при нечетных — максимум (отрезки $|OZ_3|$, $|OZ_5|$, ...). Поскольку зоны с большим номером вносят меньший вклад в результирующее колебание (из-за большего угла дифракции), при большом числе зон, укладываемых в отверстие непрозрачного экрана, заметного влияния на интенсивность света на оси пучка экран оказывать не будет.

9.3 Зонная пластинка

Подтверждением соответствия рассуждений Френеля реальным процессам служат опыты с **зонной пластинкой**, — экран с чередующимися светлыми и темными кольцами. Радиусы колец выбраны так, что при данных a , b и λ кольца закрывают все четные (или, напротив, нечетные) зоны Френеля, оставляя открытыми нечетные (или четные).

Количество зон Френеля, укладываемых в круглом отверстии (его диаметр равен $d = 2r$) непрозрачного экрана, можно определить при помощи следующих геометрических построений, см. рис. 25. Расстояния $|P_0O| = a$ и $|OP| = b$. Пусть R обозначает радиус сферы с центром в точке P_0 , которая проходит через края отверстия A и B . Точка O отмечает середину хорды AB . Стрела OF сегмента равна

$$(218) \quad \frac{d}{2} = \sqrt{OF(2R - OF)} = \sqrt{OF(2(a + OF) - OF)} \cong \sqrt{2aOF}.$$

Если построить сферу с центром в точке P , так чтобы она касалась края отверстия, то аналогично найдем

$$(219) \quad \frac{d}{2} = \sqrt{OE(2R' - OE)} = \sqrt{OE(2(a + OE) - OE)} \cong \sqrt{2bOE}.$$

Далее для расстояния EF получим

$$(220) \quad EF = EO + OF = \frac{d^2}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Число зон Френеля, укладываемых в отверстии будет равно целой части от

$$(221) \quad m = \frac{EF}{\lambda/2} = \frac{d^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Следовательно радиус внешнего края зоны Френеля будет равен

$$(222) \quad r_m = \frac{d}{2} = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda.$$

Используя эту формулу можно прийти к заключению, что внутренним и внешние радиусы колец зонная пластинки соотносятся друг с другом в пропорции

$$(223) \quad 1 : \sqrt{3} : \sqrt{5} \quad \text{и} \quad 1 : \sqrt{2} : \sqrt{4}$$

Зонная пластинка со светлым центром удаляет все четные зоны, а пластинка с темным центром – все нечетные.

Пластинка фокусирует лучи как линза. С ее помощью можно создавать и изображения предметов (достаточно низкого качества). Это видно, если формулу (221) записать в виде формулы тонкой линзы

$$(224) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{d^2}{4m\lambda} = \frac{r_m^2}{m\lambda}.$$

Зонную пластинку используют в рентгеновских микроскопах, разрешающая способность которых намного превышает разрешение оптических.

9.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. С помощью спирали Френеля рассмотрите дифракцию Френеля на круглом экране. Объясните следующий парадоксальный результат: если экран достаточно мал, то в центре дифракционной картины должно быть светлое пятно. Какой вид будет иметь дифракционная картина в этом случае?
2. Монохроматическая плоская световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск. Рассмотрите дифракцию Френеля, если диск закрывает для точки наблюдения P первую зону Френеля. Какова интенсивность света I в точке P после того, как у диска удалили: 1) половину (по диаметру); 2) половину внешней половины первой зоны Френеля (по диаметру)?
3. Оцените размер круглого отверстия, на котором наблюдается дифракция Френеля, если расстояние от источника до экрана и от экрана до точки наблюдения равно порядка метра.

10 Лекция №10 "Дифракция Френеля на прямолинейном крае"

Зоны Шустера и спираль Корню. Дифракция на прямолинейном крае. Условие наблюдения дифракции Френеля.

Цель лекции — рассмотреть дифракцию Френеля от прямолинейного края экрана или узкой длинной щели. Эти задачи представляют физический интерес в связи вопросом о поведении световой волны вблизи края геометрической тени.

10.1 Зоны Шустера и спираль Корню

Для решения дифракции на прямоугольной щели или на прямолинейном крае экрана удобно разбивать волновой фронт не на *кольцеобразные зоны*, или *зоны Френеля*, а на *полосатые зоны*, или *зоны Шустера*.

Рассмотрим на процесс распространения плоской волны с точки зрения принципа Гюйгенса–Френеля. Пусть плоская волна, волновой фронт AB перпендикулярен плоскости рис. 26, распространяется вдоль оси X . Разобьем фронт плоской волны AB на полосатые зоны. Для этого постро-

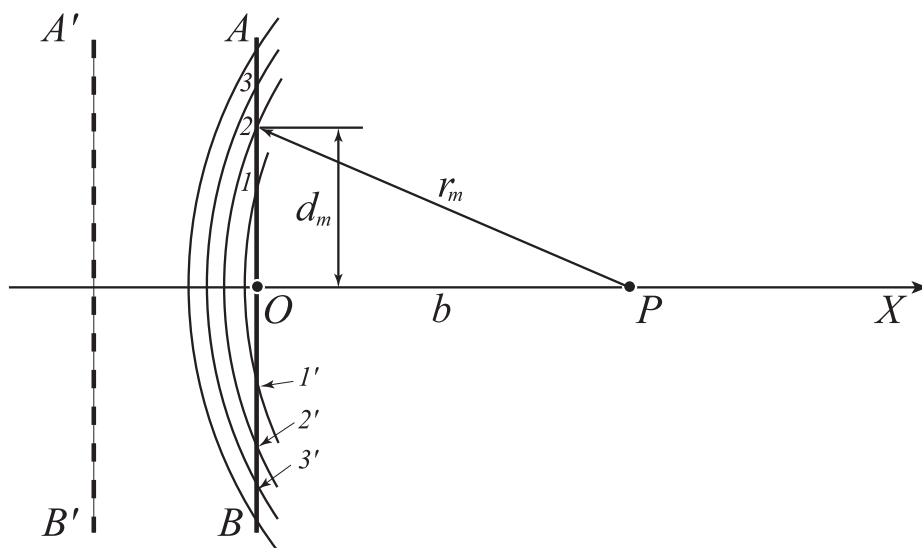


Рис. 26: Зоны Шустера.

им цилиндрические коаксиальные поверхности, радиусы которых равны

$$(225) \quad r_m = b + m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Ось цилиндров проходит через точку наблюдения P перпендикулярно плоскости рис. 26. В результате такого разбиения волновой фронт разобьется на прямоугольные полосы, называемые **зонами Шустера**. Ось, проходящая через точку O , делит центральную зону на две части. Зоны, находящиеся выше точки O имеют номера 1, 2, 3 и т. д., а зоны, находящиеся ниже — номера 1', 2', 3' и т. д. Ясно, что так как ширина (и площадь) зон с номером

m и m' одинаковая, поэтому световые колебания, которые они создают в точке P имеют одинаковую амплитуду и фазу.

Докажем, что ширина полосатых зон монотонно убывает и в пределе $r \rightarrow \infty$ стремится к $\frac{\lambda}{2}$. Заметим, что поскольку $\lambda \ll b$, то квадрат расстояния от точки P до дальней границы зоны Шустера с номером m равен

$$(226) \quad d_m^2 = \left(b + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2 = bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} \simeq bm\lambda.$$

Суммарная ширина первый N зон равна

$$(227) \quad d_1 + d_2 + \dots + d_N = \sqrt{\left(b + N \frac{\lambda}{2}\right)^2 - b^2} \approx \sqrt{bN\lambda} = \sqrt{N}d_1.$$

Отсюда найдем, что ширины последовательных зон Шустера равны

$$(228) \quad h_1 = \sqrt{b\lambda}, \quad h_2 = (\sqrt{2} - 1)h_1, \quad h_3 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})h_1, \quad \dots$$

Ясно, что ширина (и площадь) зон Шустера при удалении от центра фронта плоской волны сперва значительно убывают, а затем убывают монотонно

$$(229) \quad \begin{aligned} \frac{h_1}{h_2} &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 2.41, & \frac{h_2}{h_3} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 1.3, \\ \frac{h_3}{h_4} &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{4} - \sqrt{3}} = 1.19, & \frac{h_4}{h_5} &= \frac{\sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} = 1.135, \quad \dots \end{aligned}$$

или

$$(230) \quad h_1 : h_2 : h_3 : h_4 : \dots = 1 : 0.41 : 0.32 : 0.27 : 0.24 \dots$$

Из формулы (187) Лекции №7 следует, что амплитуда вторичной световой

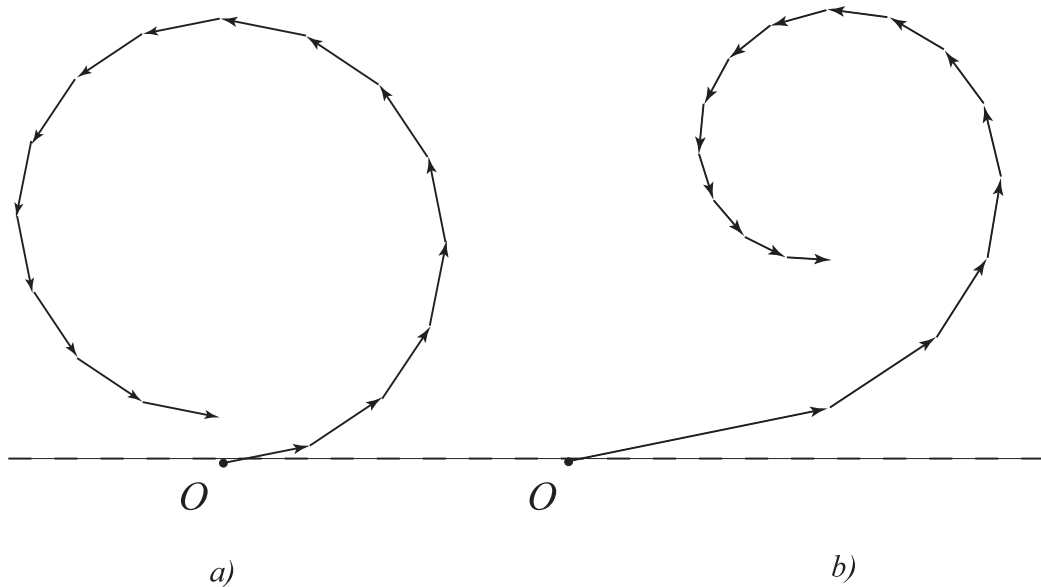


Рис. 27: Векторный диаграммы для а) зон Френеля и б) зон Шустера.

волны в точке P , излучаемой зонами Шустера, сперва (для первых) убывает очень быстро, а затем достаточно медленно. Таким образом, вклад в

результатирующую напряженность $E(P)$ определяется действием несколькими первыми десятки зон.

Для определения амплитуды результирующего колебания применим графический метод, см. рис. 27, *a* и *b*. Каждую зону Шустера разобьем на узкие полоски (подзоны). Колебание, создаваемое каждой подзоной в точке P , будем изображать на векторной диаграмме вектором. На рис. 27, *a* изображена векторная диаграмма для кольцевых зон, а на рис. 27, *b* — для полосатых зон, лежащий выше точки O . Отставание по фазе каждого следующего колебания в обоих случаях одинаково и равно $\alpha = \frac{\pi}{n}$, где n — количество подзон (рис. 27 выполнен для $n = 8$). Различие между этими векторными диаграммами состоит в следующем. Разбивая кольцевую зону на подзоны, см. предыдущую Лекцию №9, мы получили, что амплитуды вторичных световых волн, испускаемых подзонами (в пределах одной зоны), равны. Поэтому вклад в результирующее колебание, вносимое отдельной зоной Френеля, изображается ломанной кривой, вокруг которой можно описать полуокружность. Радиус полуокружности при переходе к зоне Френеля с бóльшим номером уменьшается, так как пропорционально уменьшается ее вклад в результирующее колебание.

Для зон Шустера ситуация другая. Разность фаз колебаний α от соседних подзон по-прежнему постоянна, однако по формулам (229) величина амплитуды вторичных световых колебаний, испускаемых подзонами, убывает в соответствии с пропорцией (230). Поэтому ломанная линия, которая получается при графическом сложении векторов, получается именно такой, как это изображено на рис. 27, *b*.

На векторной диаграмме зоны с номерами t и t' будут располагаться симметрично относительно точки O . Устремляя ширину подзон к нулю, мы получим непрерывную кривую, называемую **спиралью Корню**. Кривая изображена на рис. 28. Она состоит из двух симметричных ветвей, которые

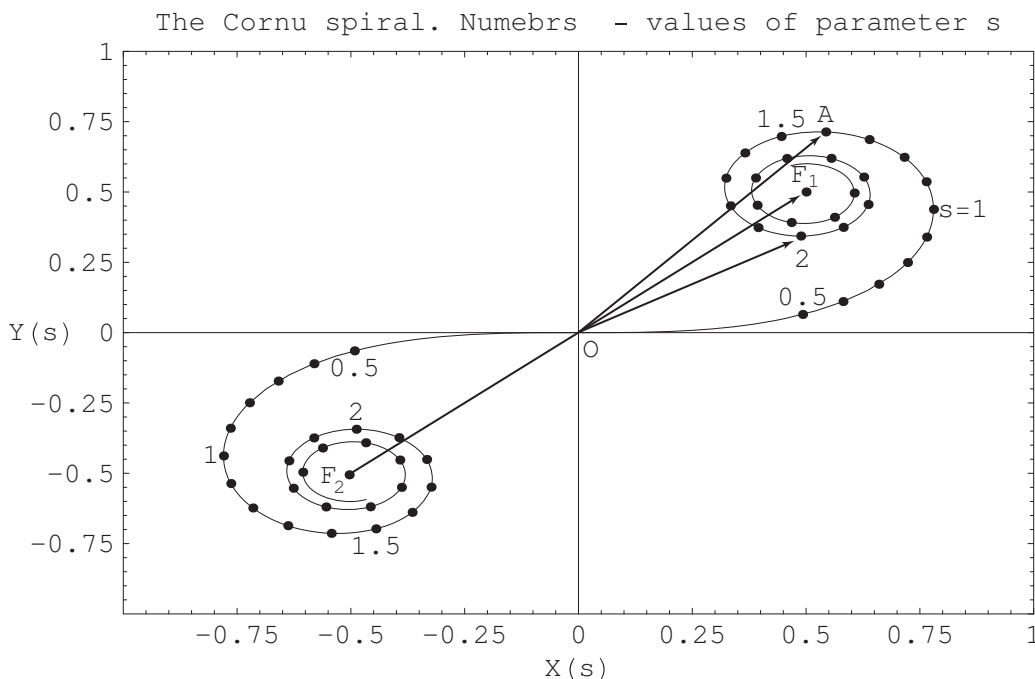


Рис. 28: Спираль Корню. Числа на спирали показывают значения параметра s .

обвиваются вокруг двух фокусов F_1 и F_2 . Верхняя ветвь спирали (участок OF_1) представляет действие верхней половины волнового фронта AB на рис. 26, а нижняя ветвь (участок F_2O) — нижней. Колебание возбуждаемое всем волновым фронтом соответствует вектору F_2F_1 . Колебание, возбуждаемое в точке P верхней частью первой зоны Шустера, соответствует вектору OA , первой и второй — вектору $O2$.

Уравнение спирали Корню может быть получено теоретически. Если координатные оси выбраны так, как показано на рис. 28, то в прямоугольных координатах уравнение спирали имеет вид

$$(231) \quad X(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds, \quad Y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi s^2}{2}\right) ds.$$

Эти интегралы называются **интегралами Френеля**. Их значение находится численными методами. Заметим, что

$$(232) \quad X(s) = -X(-s), \quad Y(s) = -Y(-s), \quad X(\infty) = Y(\infty) = 0.5.$$

Числа, отмеченные на спирали Корны, соответствуют значениям параметра s . Его величина определяет длину вектора

$$(233) \quad A = \sqrt{X(s)^2 + Y(s)^2},$$

проведенного из точки O в данную точку спирали с параметром s .

10.2 Дифракция на прямолинейном крае

С помощью спирали Корню можно решить задачу о дифракции Френеля на прямолинейном крае экрана. Рассмотрим плоскую волну, падающую на непрозрачную полуплоскость с прямолинейным краем, см. рис. 29. С по-

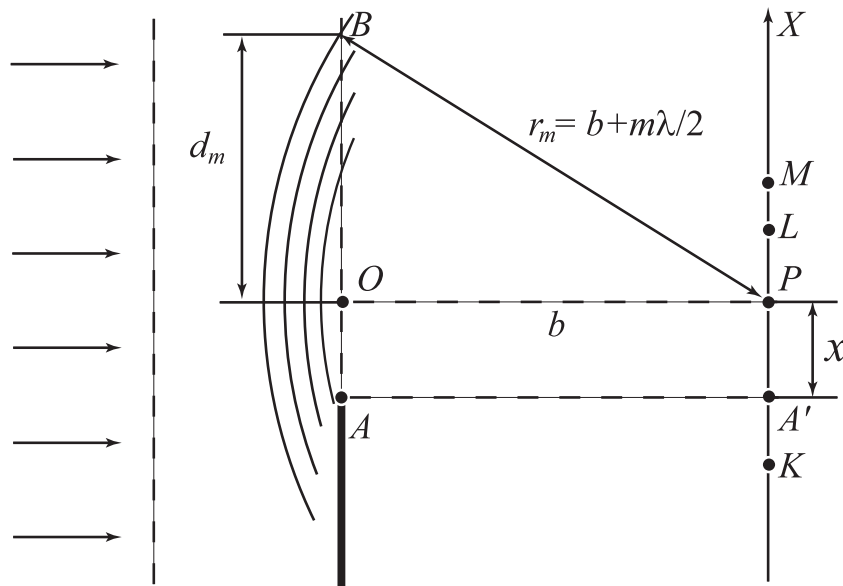


Рис. 29: Расчет зон Шустера при дифракции на прямолинейном крае полубесконечного непроницаемого экрана.

мощью спирали Корню найдем амплитуду светового колебания для точки P , находящейся на расстоянии x от края геометрической тени AA' экрана. Расчет амплитуды производится, считая, что точка O спирали соответствует рассматриваемой точке P . Искомые амплитуды изображены на рис. 30, $a-e$ для различных положений точки P на оси X . Для точки P , лежащей на границе геометрической тени (точка A') амплитуда светового колебания пропорциональна длине вектора OF_1 , рис. 30, a , так как все "штрихованные" зоны будут закрыты. При смещении точки P за границу геометрической тени (точка L) дополнительно к "штрихованным" зонам будут закрываться часть "нештрихованных" зон. Поэтому амплитуда колебания будет монотонно убывать, стремясь к нулю, рис. 30, b . Если точка P смещается вверх по оси X от геометрической тени, то дополнительно к "нештрихованным" зонам будут открываться "штрихованные" зоны. Поэтому необходимо учитывать левую часть спирали Корню.

Амплитуда возрастает, достигая первого максимума в точке L , рис. 30, c , и первого минимума в точке M , рис. 30, d . При дальнейшем движении к фокусу спирали F_2 амплитуда колебаний будет проходить максимумы и минимумы. При удалении от края геометрической тени на достаточно большое расстояние волновая поверхность будет полностью открытой. Соответствующая амплитуда пропорциональна длине вектора F_2F_1 , точно в два раза превышая амплитуду на границе геометрической тени, так как $|OF_1| = \frac{1}{2}|F_2F_1|$.

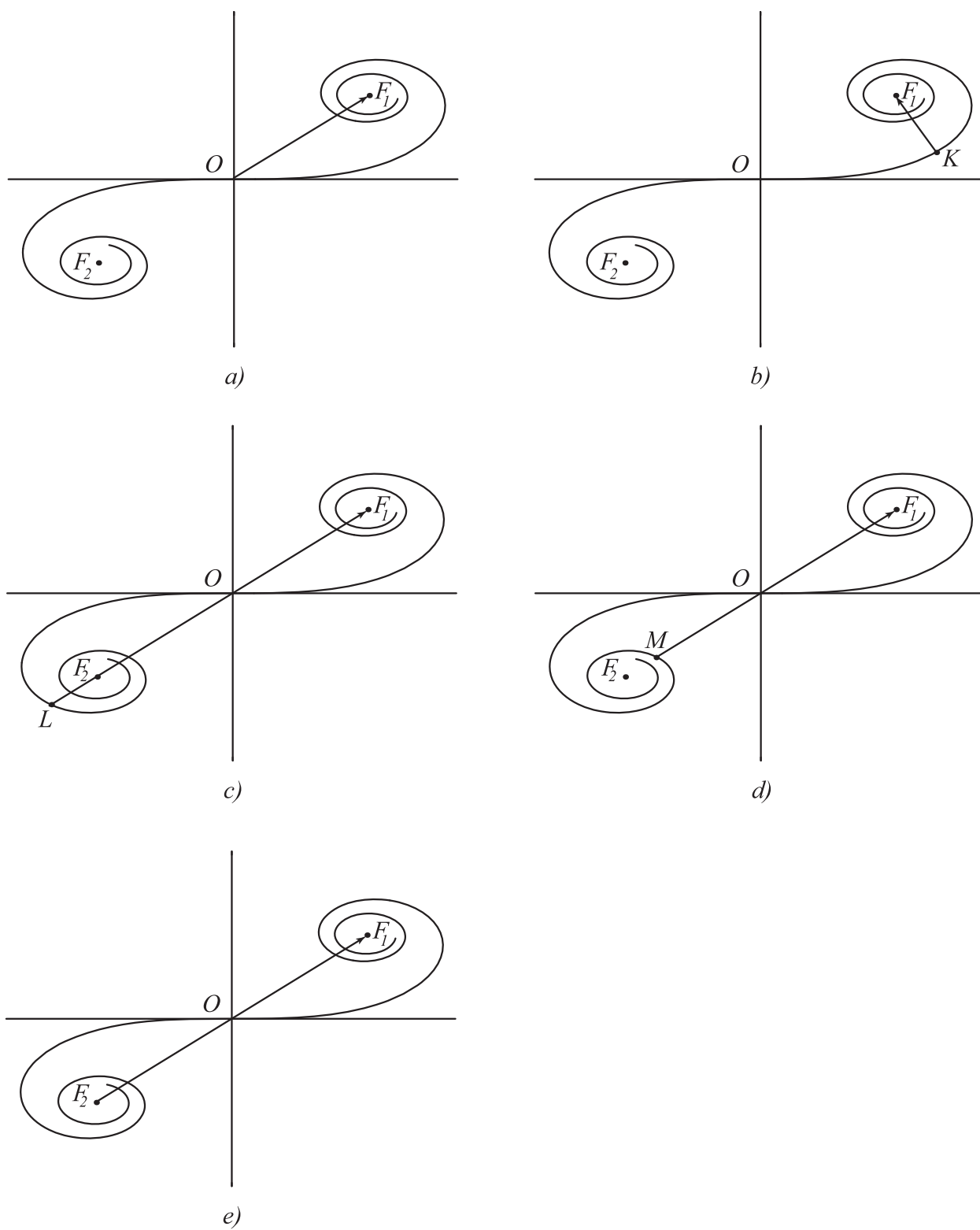


Рис. 30: К расчету амплитуды световых колебаний за полубесконечным непроницаемым экраном.

Распределение интенсивности дифракционной картины от прямолинейного края (для случая $\lambda = 600$ нм и $b = 1$ м), полученное с помощью спирали Корню¹³, показано на рис. 31. На этом рисунке видно, что нет резкой границы между светом и тенью в области геометрической тени, а освещенная область расщепляется в дифракционные полосы, параллельные краю экрана. Обозначим через $E_0 = |F_2 F_1|$ и $I_0 = E_0^2$ амплитуду и интенсивность

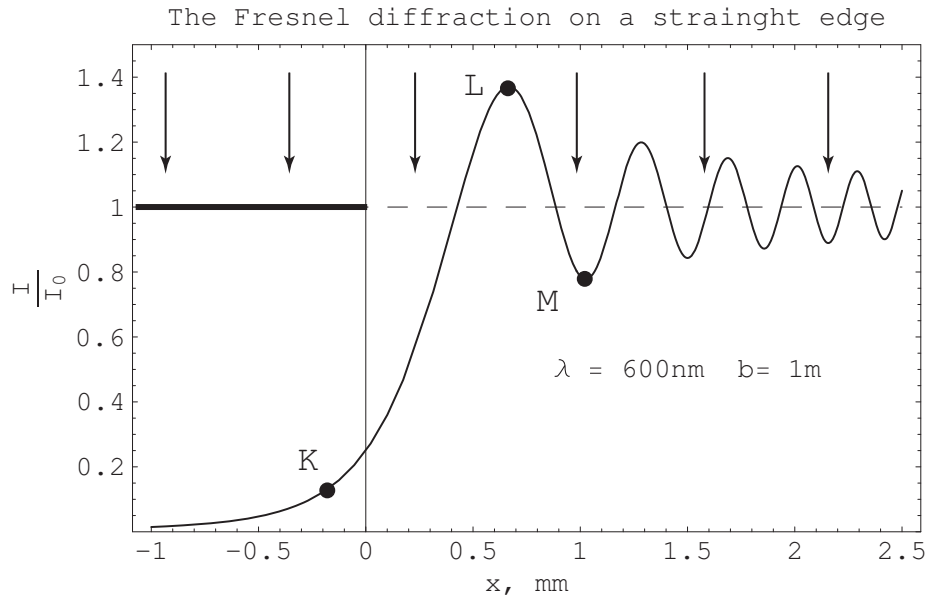


Рис. 31: Распределение интенсивности при дифракции Френеля на прямолинейном крае экрана.

плоской волны. Если точка P находится на краю геометрической тени, то амплитуда и интенсивность будут соответственно равны $\frac{1}{2}E_0$ и $\frac{1}{4}I_0$. С помощью спирали Корню можно определить интенсивности света в максимумах и минимумах. Например, в первом максимуме (точка L) и минимуме (точка M) соответственно равны $I = 1.37I_0$ и $I = 0.79I_0$.

10.3 Условие наблюдения дифракции Френеля

Понимание сути дифракции позволило разработать приближенные методы расчета оптических приборов, поскольку края линз в оправе представляют собой препятствия на пути распространения света. При этом выделяют два важных частных случая. Один из них – такое расположение препятствия относительно точки наблюдения, при котором волны от вторичных источников приходят в нее под разными углами и преодолевают пути, различающиеся на несколько длин волн. Это так называемая **дифракция Френеля**, или **дифракция в ближней зоне**, когда точка наблюдения близка к препятствию.

Количественный критерий того, что дифракция вблизи оси отверстия заметно выражено состоит в следующем: радиус центральной зоны Френеля

¹³Для плоской волны параметр $s = x\sqrt{\frac{2}{\lambda b}}$, где x и b – расстояния, определяющие положение элемента волновой поверхности относительно точки наблюдения P .

должен превышать размеры препятствия r

$$(234) \quad \sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda \geq r.$$

Отношение радиуса центральной зоны Френеля к линейному размеру препятствия называют **волновым параметром**

$$(235) \quad p = \frac{\sqrt{\frac{ab}{a+b}} \lambda}{r}.$$

Дифракция Френеля выражена отчетливо, если $p \gtrsim 1$, и дифракция практически отсутствует, если $p \ll 1$.

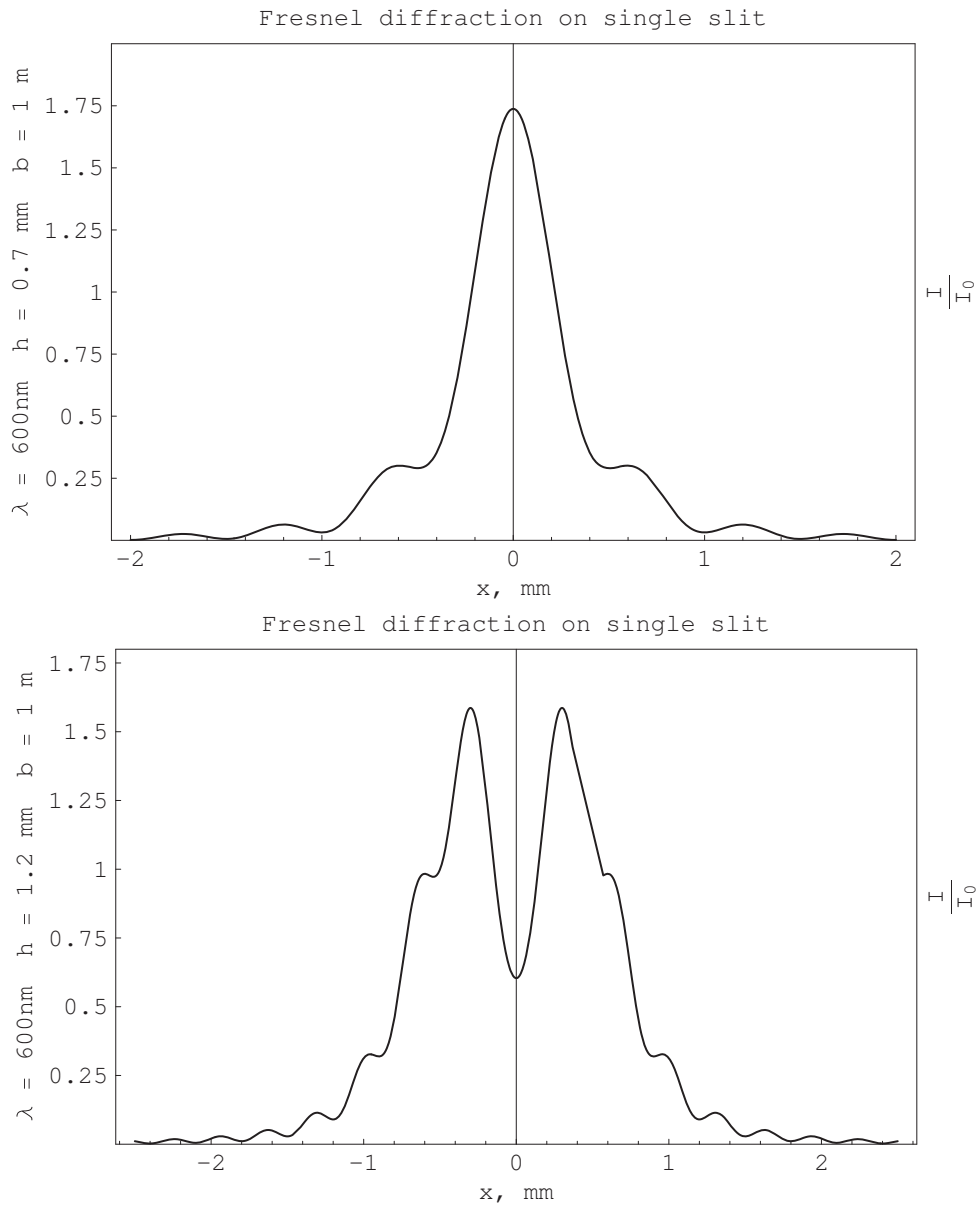


Рис. 32: Распределение интенсивности при дифракции Френеля на узкой длинной щели. Обозначения: h — ширина щели, b — расстояние от щели до экрана, λ — длина волны света, освещающего щель.

10.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. С помощью спирали Корню проанализируйте дифракцию на узкой бесконечно длинной щели. Докажите, что дифракционная картина представляет собой либо светлую, либо относительно темную центральную полосу, по обе стороны которой симметрично располагаются чередующиеся светлые и темные полосы, см. рис. 32.
2. Плоская монохроматическая волна падает нормально на длинную прямоугольную щель, за которой на расстоянии $b = 60$ см находится проекционный экран. Сначала ширину щели установили такой, что в середине дифракционной картины на экране наблюдался наиболее глубокий минимум. Раздвинув после этого щель на $\Delta h = 0.70$ мм, получили в центре картины следующий минимум. Найдите длину волны света.
3. Плоская световая волна длины $\lambda = 600$ нм падает нормально на непрозрачную длинную полосу ширины $h = 0.70$ мм. За ней на расстоянии $b = 1$ м находится проекционный экран. Найти с помощью рис. 28 отношение интенсивностей света в середине дифракционной картины и на краях геометрической тени.
4. Можно ли в принципе наблюдать дифракцию на препятствиях порядка метра. Какие условия необходимо создать, чтобы поставить такой опыт? Опишите схему такого мысленного опыта.

11 Лекция №11 "Дифракция Фраунгофера"

Постановка задачи. Область дифракции Фраунгофера.

Расчет распределения интенсивности.

Явления дифракции можно классифицировать в зависимости от расстояний между источником, проекционным экраном и препятствием, на котором дифрагирует свет. Если эти расстояния очень велики, дифракция будет происходить в параллельных лучах и называться **дифракцией Фраунгофера**. В противоположном случае говорят о дифракции в непараллельных лучах, или дифракции Френеля. Этот тип дифракции анализируется (в зависимости от задачи) с помощью спирали Френеля и спирали Корню.

Между дифракцией Френеля и Фраунгофера нет принципиального различия. *Область дифракции Френеля расположена вблизи препятствия, и простирается до расстояний, с которых дифракцию можно рассматривать как фраунгоферову.* В строгом смысле дифракция Фраунгофера имеет место на бесконечно больших расстояниях. Этот вид дифракции изучается отдельно в связи с тем, что дифракция такого рода часто встречается в разнообразных оптических приборах, например на диафрагме объектива фотоаппарата.

Цель настоящей лекции — установить область дифракции Фраунгофера и рассчитать распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера на прямоугольной щели.

11.1 Постановка задачи

Плоскую волну можно получить, располагая точечный источник света в фокусе собирающей линзы. Получающийся пучок параллельного света способен дифрагировать на каком-либо препятствии. Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости линзы, установленной на пути распространения дифрагированного света.

Пусть прямоугольная щель $a \times d$ освещается параллельным пучком монохроматического света, падающих нормально к плоскости отверстия. Схема опыта изображена на рис. 33. Требуется найти: 1) форму и размер изображения отверстия на экране, удаленном на расстояние b от щели, если плоскость экрана параллельна плоскости отверстия; 2) распределение интенсивности, получающееся в результате дифракции в плоскости экрана. Щель можно считать длинной, если ее высота a много меньше ее длины d . Если $d \approx 100a$, то щель рассматривается как бесконечно длинная.

Введем в *плоскости вторичных источников* (плоскость щели) и *плоскости дифракционной картины* (плоскость наблюдения) две прямоугольные системы координат с осями, параллельными сторонам щели: система $X'Y'$ с началом в точке O' (центр щели) и система XU с началом в точке O (центр проекционного экрана), $O'O = b$. Координаты точки P обозначим через x и y . Будем предполагать, что расстояние от препятствия до экрана намного превышает линейные размеры щели

$$(236) \quad \frac{a}{b} \ll 1, \quad \frac{d}{b} \ll 1.$$

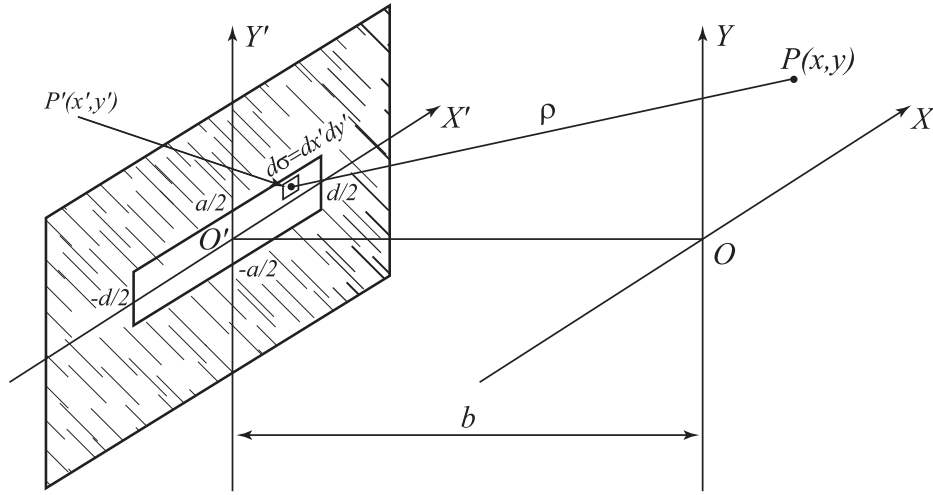


Рис. 33: Иллюстрация к расчету дифракции на прямоугольной щели.

Кроме этого нас будет интересовать дифракция в центральной части экрана, т. е. для малых углов дифракции.

Дифракция возникает в результате интерференции вторичных источников света, расположенных в площади щели. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля напряженность поля волны, дифрагированной на щели, представляется некоторым интегралом по площади Σ щели. Амплитуду плоской волны на площади щели Σ постоянная и равна

$$(237) \quad E_{P'}(x', y') = E_0.$$

Пусть $d\sigma = dx'dy'$ — элемент поверхности, образованный вокруг центра $P'(x', y')$; ρ — расстояние между P' и точкой наблюдения P . Световое поле в этой точке найдется по формуле

$$(238) \quad E_P(x, y) = \frac{k}{2\pi i} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' E_{P'}(x', y') \frac{e^{ik\rho}}{\rho},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и интегрирование ведется по открытой части волнового фронта плоской поверхности Σ . Согласно геометрии рис. 33

$$(239) \quad \rho = \sqrt{b^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Для аналитического вычисления интеграла (238) учтем, что дифракция имеет место для малых углов относительно направления $O'O$. Математически это условие формулируется так

$$(240) \quad \frac{|x - x'|}{b} \ll 1, \quad \frac{|y - y'|}{b} \ll 1.$$

Отсюда найдем с точностью величин, содержащих квадраты $x - x'$ и $y - y'$

$$(241) \quad \rho \cong b + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2b}$$

Тогда

$$(242) \quad E_P(x, y) = E_0 \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikb}}{b} e^{ik \frac{x^2+y^2}{2b}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{ik \frac{x'^2+y'^2}{2b}} e^{-ik \frac{xx'+yy'}{b}}.$$

Эта формула пригодна для описания *дифракции в приближении Френеля*. При выполнении определенных условий мы можем дополнительно упростить эту формулу и перейти к дифракции Фраунгофера.

11.2 Область дифракции Фраунгофера

Таким образом, мы свели задачу к определению напряженности световой волны в плоскости дифракционной картины из формулы (242). Постоянные слагаемые, которые появились перед интегралом не будут влиять на распределение интенсивности света в плоскости экрана. Действительно, если обозначить через $I_0 = E_0^2$ интенсивность падающего на щель света, то относительное распределение интенсивности в дифракционной картине будет определяться выражением

$$(243) \quad \frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{ik \frac{x'^2+y'^2}{2b}} e^{-ik \frac{xx'+yy'}{b}} \right|.$$

Далее, необходимо выполнить анализ подинтегрального выражения в формуле (242), которое содержит как квадратичные, так и линейные слагаемые по x' и y' . Квадратичные слагаемые в экспоненциальном множителе $e^{ik \frac{x'^2+y'^2}{2b}}$ значительно усложняют вычисление этого интеграла. Однако условие (236) позволяет сделать некоторые качественные оценки того, когда этим квадратичным слагаемым можно будет пренебречь. Для этого сделаем оценку максимального значения, которое принимает интересующий нас множитель

$$(244) \quad k \frac{x'^2 + y'^2}{2b} \leq k \frac{a^2 + d^2}{8b} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{a^2 + d^2}{4b}.$$

Если выполняется дополнительное условие

$$(245) \quad \frac{\pi}{\lambda} \frac{a^2 + d^2}{4b} \leq \frac{\pi}{4},$$

то для очень узкой щели ($a \rightarrow 0$) найдем, что

$$(246) \quad \frac{d^2}{b\lambda} \leq 1, \quad \text{или} \quad b \geq b_{\min} = \frac{d^2}{\lambda}.$$

Условие (246) гарантирует, что экспоненциальный множитель с квадратами x' и y' не будет сильно изменяться в пределах интегрирования по длине щели. Следовательно его можно заменить единицей. В данном случае мы

будем говорить о дифракции в параллельных лучах, или дифракции Фраунгофера,

$$(247) \quad \frac{I}{I_0} = \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy' \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} dx' e^{-ik \frac{xx' + yy'}{b}} \right|.$$

Все это значит, что

область дифракции Фраунгофера простирается от бесконечности до некоторого минимального расстояния $b_{\min} = \frac{d^2}{\lambda}$, которое, при заданной ширине щели, задает ширину первой зоны Шустера $h_1 = \sqrt{b_{\min} \lambda}$.

В свою очередь это значит, что если в площади щели укладывается небольшая часть первой зоны Шустера, то дифракция будет фраунгоферовской (колебания в плоскости щели совершаются и приходят в точку наблюдения практически в фазе). Если условие (246) для данной геометрии дифракционного опыта не выполняется, то дифракция будет френелевской, поскольку в этом случае в щели будет целиком укладываться первая зона Шустера или несколько первых зон.

Принимая во внимание, что в чистом виде дифракция Фраунгофера осуществляется лишь при $b \rightarrow \infty$, можно сделать вывод о том, что она действительно является дифракцией в параллельных лучах. Поэтому ее проще наблюдать, в фокальной плоскости собирающей линзы, расположенной между препятствием и экраном.

11.3 Расчет распределения интенсивности

Теперь нетрудно найти распределение интенсивности света, получающееся в результате дифракции в плоскости экрана. Дифракционный интеграл (248) запишем в виде произведения двух интегралов

$$(248) \quad E_P(x, y) \sim \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy' e^{ik \frac{yy'}{b}} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx' e^{ik \frac{xx'}{b}}.$$

Тогда

$$(249) \quad \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx' e^{-ik \frac{xx'}{b}} = 2 \frac{\sin \frac{2\pi x}{\lambda} \alpha}{\frac{2\pi x}{\lambda} \alpha}, \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy' e^{-ik \frac{yy'}{b}} = 2 \frac{\sin \frac{2\pi y}{\lambda} \beta}{\frac{2\pi y}{\lambda} \beta}$$

где $\alpha = \frac{d}{2b}$ и $\beta = \frac{a}{2b}$ – малые углы, под которыми из точки O видна половина каждой стороны прямоугольной щели. Окончательно, интенсивность

дифрагировавшего света определяется выражением

$$(250) \quad I_P = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \alpha\right)}{\frac{2\pi x}{\lambda} \alpha} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi y}{\lambda} \beta\right)}{\frac{2\pi y}{\lambda} \beta} \right]^2.$$

На рис. 34 изображен график функции $y = (\sin x/x)^2$. Главный максимум $y = 1$ при $x = 0$. Минимумы при $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$. Минимумы разделяют вторичные максимумы, положение которых определяется корнями трансцендентного уравнения $\tan x = x$. Эти корни асимптотически приближаются к значениям $x = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, где m – целое число.

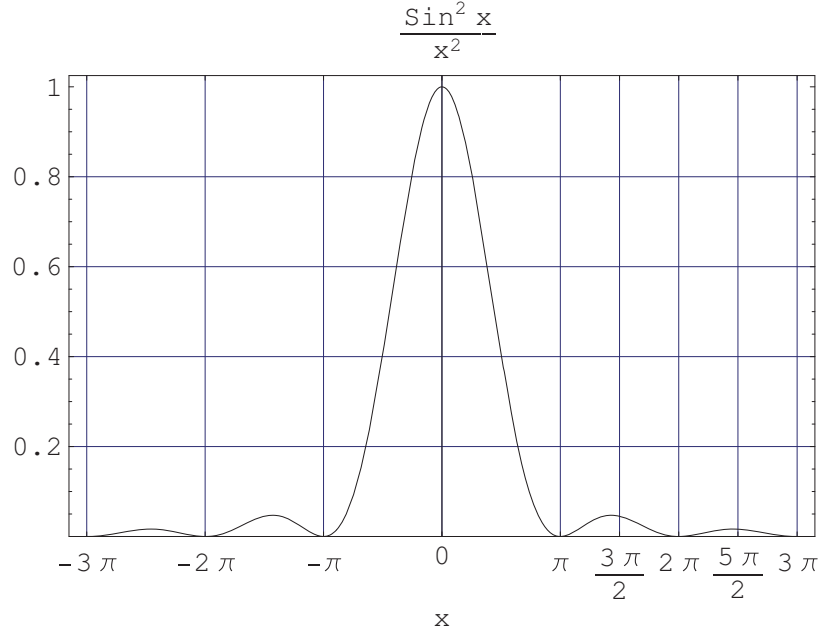


Рис. 34: График функции $y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$.

Ясно, что интенсивность света обращается в нуль вдоль двух семейств линий, параллельных сторонам прямоугольной щели. Координаты этих линий

$$(251) \quad x = \pm u \frac{\lambda}{2\alpha}, \quad y = \pm v \frac{\lambda}{2\beta} \quad (u, v = 1, 2, 3, \dots)$$

Расстояния между двумя соседними минимумами, а также от центра центрального максимума до первого минимума равны

$$(252) \quad \Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha}, \quad \Delta y = \frac{\lambda}{2\beta}.$$

Внутри каждого прямоугольника, образованного парами последовательных темных линий, интенсивность света достигает максимума. Однако интенсивность очень быстро убывает при удалении от центра дифракционной картины (для квадратного отверстия)

$$(253) \quad I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : I_4 : I_5 \dots = 1 : 0.047 : 0.017 : 0.008 : 0.005 \dots$$

Таким образом практически вся энергия дифрагировавшей световой волны сосредоточена в центральном светлом прямоугольнике со сторонами $\frac{\lambda}{2\alpha} \times \frac{\lambda}{2\beta}$,

см. рис. 35. Опыт также показывает, что чем больше щель, тем меньше эффективный размер дифракционной картины.

При увеличении одного из размеров щели период чередования дифракционных полос, перпендикулярных длинной стороне, уменьшается. При $a \ll d$ этот период становится очень малым. В дифракционной картине остаются полосы, параллельные длинной стороне щели, образующие дифракционную картину от щели, см. рис. 36.

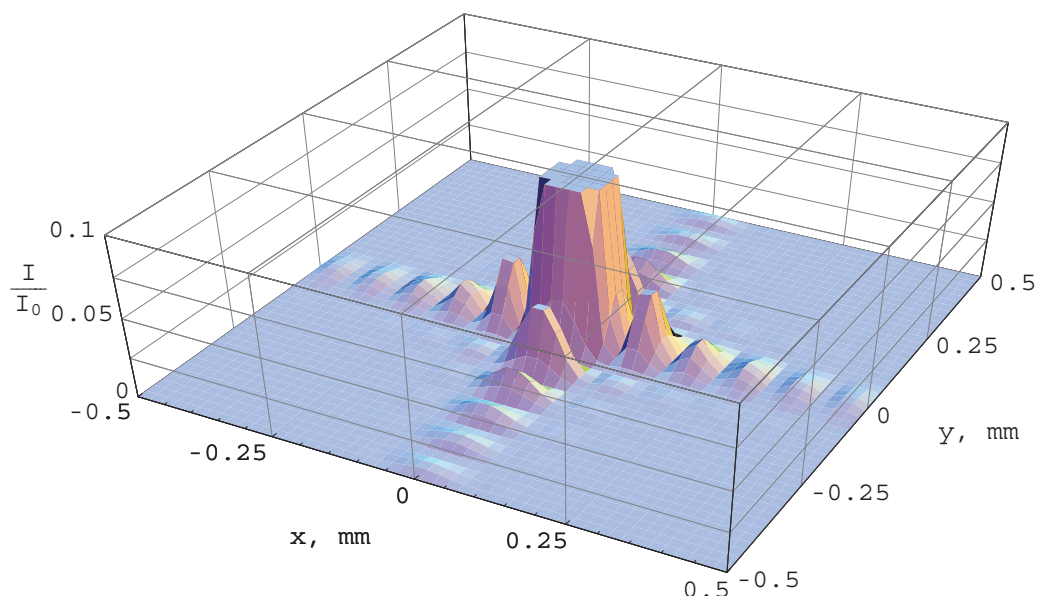


Рис. 35: Распределение интенсивности света дифракционной картины Фраунгофера от прямоугольного отверстия $7 \text{ мм} \times 7 \text{ мм}$ в монохроматическом свете $\lambda = 600 \text{ нм}$. Расстояние от плоскости щели до плоскости экрана $b = 1 \text{ м}$. Для того чтобы показать существование вторичных максимумов, центральный максимум не изображен выше плоскости $\frac{I}{I_0} = 0.1$.

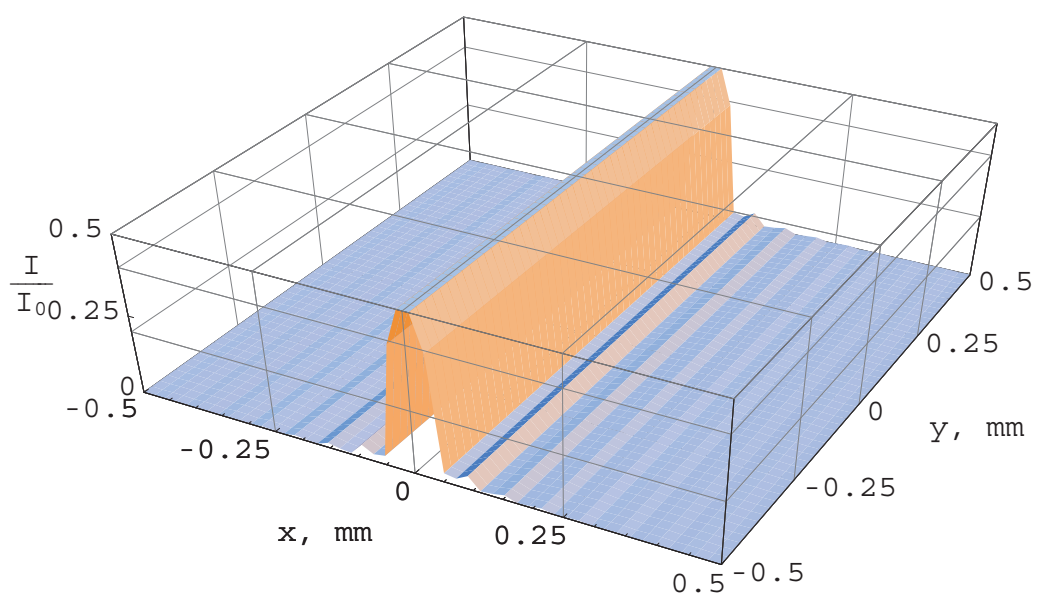


Рис. 36: Распределение интенсивности света дифракционной картины Фраунгофера от узкой щели $0.01 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$ в монохроматическом свете $\lambda = 600 \text{ нм}$. Расстояние от плоскости щели до плоскости экрана $b = 1 \text{ м}$.

11.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Объясните почему при наблюдении дифракции Фраунгофера в фокальной плоскости собирающей линзы, она не вносит дополнительной разности хода лучей от вторичных источников?
2. Найти первые пять максимумов функции $y = (\sin x/x)^2$ и значение функции в этих максимумах.
3. Квадратное отверстие со стороной $d = 2$ см освещается параллельным пучком солнечных лучей, падающих нормально к плоскости отверстия. Найти форму и размер изображения отверстия на экране, удаленным на 50 см от него, если плоскость экрана параллельна плоскости отверстия. Границей освещенности на экране считайте положение первого дифракционного минимума наиболее сильно отклоняемых лучей. Видимый спектр $\lambda = 7000\text{--}4000 \text{ \AA}$.

12 Лекция №12 "Дифракционная решетка"

Расчет распределения интенсивности. Условие максимумов и минимумов.

Угловая дисперсия и разрешающая способность решетки.

Дифракционная решетка (ДР) — спектральный прибор, представляющий собой совокупность большого числа регулярно расположенных штрихов (канавок, щелей или выступов), нанесенных на плоскую или вогнутую оптическую поверхность. ДР используется в спектральных приборах как элемент для пространственного разложения ЭМ излучения в спектр¹⁴. Наилучшими спектральными качествами обладают **отражательные дифракционные решетки**. Они представляют собой зеркальную (металлическую) поверхность, на которую нанесены параллельные штрихи. Фронт световой волны разбивается штрихами ДР на отдельные когерентные пучки, которые *претерпев дифракцию на штрихах, интерферируют*. Результирующая интерференционная картина образуется в отраженном от решетки свете. В современных решетках число линий на 1 мм может достигать 2000–3000. В **прозрачных дифракционных решетках** штрихи нанесены на прозрачную (стеклянную) поверхность, и интерференционная картина наблюдается в проходящем свете.

Если ширина прозрачных щелей (или отражательных полос) a , а ширина непрозрачных промежутков (или рассеивающих свет полос) b , то величина $d = a + b$ называется **периодом (или шагом) решетки**.

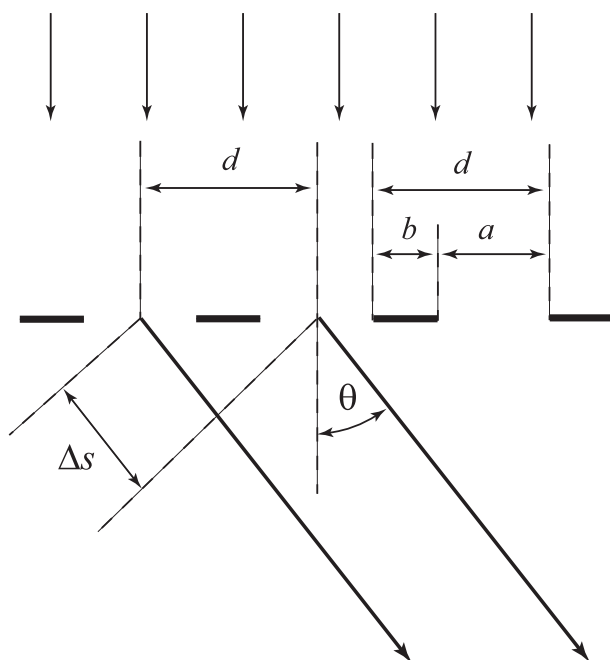


Рис. 37: Схема, иллюстрирующая принцип действия плоской щелевой дифракционной решетки.

¹⁴Принцип дифракции был открыт в 1785 г. американским астрономом Дэвидом Риттенхаусом (1732–1796). Он обнаружил, что пропуская белый свет через решетку, можно получить его спектр. В отличие от призмы решетка дает не один, а несколько спектров.

12.1 Расчет распределения интенсивности

Наша первая задача — найти угловое распределение интенсивности света при френгоферовой дифракции на решетке из N щелей и с периодом d при условии, что лучи монохроматического света с длиной волны λ падают на решетку нормально, а ширина щели равна a .

Опишем действие прозрачной щелевой решетки. Так как требуется рассчитать распределение интенсивности света в случае дифракции Френгофера на решетке, то можно считать, что экран, на котором наблюдается дифракционная картина, отодвинут на достаточно большое расстояние от решетки. Когерентные световые пучки, приходящие от N щелей решетки, можно считать параллельными. Выберем точку наблюдения на экране. Лучи, дифрагированные на решетке, образуют угол θ с нормалью к решетке, см. рис. 37. Вследствие того, что между когерентными параллельными пучками, идущими под углом от соседних щелей, существует разность хода $\Delta s = d \sin \theta$ и соответственно разность фаз $\alpha = 2\pi d \sin \theta / \lambda$. На векторной диаграмме колебание, приходящее в точку наблюдения от какой-либо щели решетки, изобразим вектором определенной длины a . Совокупный вклад нескольких щелей изображается ломанной линией с равными звеньями и равными углами α . Результирующее колебание изображается геометрической суммой этих векторов. Сложение векторов на плоскости формально тождественно сложению комплексных чисел $a \exp(i\alpha)$

$$(254) \quad A = a[1 + \exp(i\alpha) + \exp(2i\alpha) + \dots + \exp((N-1)i\alpha)] = a \frac{1 - \exp(Ni\alpha)}{1 - \exp(i\alpha)},$$

где колебание, возбужденное волнами, пришедшими от первой щели решетки, обозначено комплексным числом a .

Квадрат модуля комплексного числа A дает относительную интенсивность света в рассматриваемой точке экрана

$$(255) \quad I = |A|^2 = AA^* = |a|^2 \frac{2 - \exp(Ni\alpha) - \exp(-Ni\alpha)}{2 - \exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)} = |a|^2 \frac{1 - \cos(N\alpha)}{1 - \cos \alpha}.$$

Далее воспользуемся результатом лекции №10 для интенсивности дифрагированного света узкой длинной щели

$$(256) \quad |a|^2 = I_0 \left[\frac{\sin u}{u} \right]^2, \quad u = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta,$$

где I_0 — интенсивность света в направлении вперед.

Используя формулы (255) и (256), мы получим выражение для распределения интенсивности света дифракционной картины для данной решетки в зависимости от угла θ

$$(257) \quad I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin u}{u} \right]^2 \left[\frac{\sin Nv}{v} \right]^2, \quad v = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta.$$

Эта формула показывает, что дифракционная картина есть результат модуляции дифракцией от отдельных щелей (множитель $\frac{\sin^2 u}{u^2}$) многолучевой интерференцией волн (множитель $\frac{\sin^2 Nv}{v^2}$), дифрагированных на N щелях в направлении, определяемом углом θ .

12.2 Условие максимумов и минимумов

Исследуем полученное выражение (257) на максимумы и минимумы, исходя из причин их возникновения.

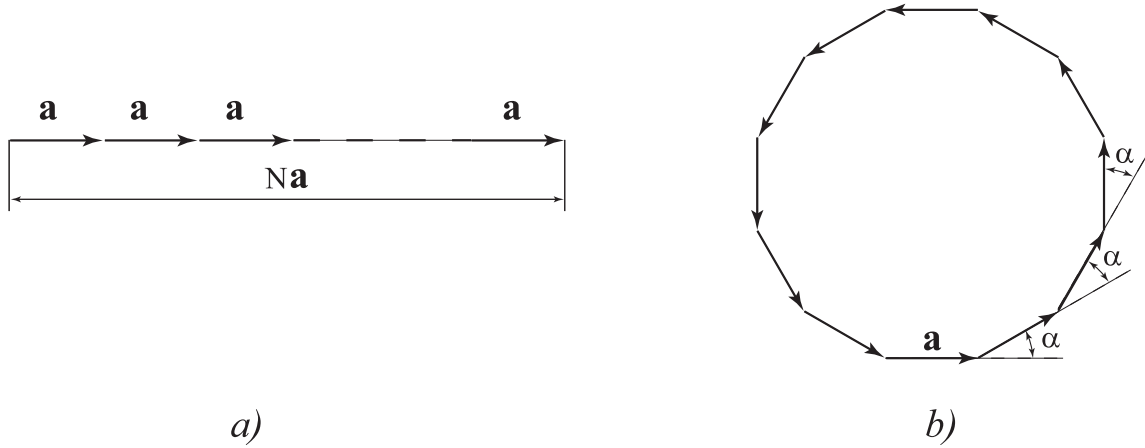


Рис. 38: Сложение комплексных амплитуд, приводящее а) к образованию главных дифракционных максимумов; б) дифракционных минимумов (на рисунке изображен случай для $N = 12$ векторов $\mathbf{a}$, разность фаз между которыми равна $\alpha = \frac{360^\circ}{N} = 30^\circ$).

1. **Условие главных максимумов интенсивности.** Главные максимумы возникают за счет интерференции световых волн от щелей решетки. Волны идущие от N щелей решетки будут усиливать друг друга, если в точке наблюдения они приходят с одинаковой фазой.

Действительно, волны от двух соседних щелей будут усиливать друг друга в точке наблюдения, если

$$(258) \quad d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где m называют **порядком интерференции**. Поскольку это соотношение выполняется попарно для всех соседних щелей, то оно и будет условием главных максимумов. Пучки света, относящиеся к различным значениям m называют **порядками спектра**, а создаваемые ими изображения входной щели — **спектральными линиями**. Все порядки, соответствующие положительным и отрицательным значениям m , симметричны относительно нулевого. По мере возрастания числа щелей ДР спектральные линии становятся более узкими и резкими. Действительно, легко убедиться в том, что интенсивность света в главных максимумах превышает в N^2 раз интенсивность света от одной щели в том же направлении.

2. **Условие дифракционных минимумов.** На своих местах также остаются и первичные минимумы, характерные для одной щели

$$(259) \quad a \sin \theta = n\lambda, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Однако появляются дифракционные минимумы, которые появляются за счет взаимной компенсации волн от всех N щелей. Положение этих

минимумов определяется из условия, что разности фаз колебаний от отдельных щелей равны $\frac{2\pi}{N}$. Векторы, изображающие эти колебания, имеют равные амплитуды и повернуты друг относительно друга на угол $\frac{2\pi}{N}$. Они образуют замкнутую ломанную линию, см. рис. 38, *b*. Следовательно, разность хода между различными световыми пучками должна быть равна

$$(260) \quad \frac{\lambda}{N}, \quad 2\frac{\lambda}{N}, \quad 3\frac{\lambda}{N}, \quad \dots, \quad \frac{N-1}{N}\lambda.$$

Углы, определяющие направления на дополнительные минимумы, находятся из условия

$$(261) \quad d \sin \theta = \frac{k}{N} \lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1.$$

Обратите внимание, что $k \neq 0, N, 2N, \dots$, так как тогда условие минимумов трансформируется в условие главных максимумов. Таким образом, формула (261) показывает, что главный максимум возникает при $n = mN$, а соседний минимум — при $n = mN + 1$.

3. Условие добавочных максимумов. Между двумя главными максимумами дифракционной картины находятся $N - 1$ добавочных минимума, которые разделяют $N - 2$ вторичных максимумов, интенсивность света в которых очень слаба. Они создают равномерный слабый фон в дифракционной картины, на которой резко очерчены главные максимумы.

На рис. 40, 1–3 приведены зависимости распределения интенсивности от угла дифракции θ для многолучевой интерференции, дифракции от одной щели и результирующее распределение интенсивности при дифракции от $N = 6$ щелей. Увеличение числа щелей не меняет положения главных максимумов, но делает их более интенсивными. Распределение интенсивности между максимумами зависит от соотношения периода решетки и ширины щели.

Так как положение главных максимумов (кроме центрального, соответствующего $\theta = 0$) зависит от длины волны света, падающего на решетку, то решетка разлагает белый свет ($\lambda = 380 \div 760$ нм) в спектр. Чем больше длина волны, тем дальше располагается от центрального максимума тот или иной максимум, соответствующей этой длине волны. Таким образом дифракционная решетка в каждом порядке спектра m разложит белый свет в спектр, в котором монохроматические составляющие (различные цвета) будут разделены в пространстве. Перекрывание соседних спектров наступает тогда, когда

$$(262) \quad m\lambda = m'\lambda'.$$

Ясно, что длинноволновая граница спектра первого порядка совпадает с началом коротковолновой границы спектра второго порядка. Следовательно, спектры второго и третьего порядка будут накладываться друг на друга.

12.3 Спектроскопические характеристики решетки

Основными спектроскопическими характеристиками ДР являются **разрешающая способность**, **угловая дисперсия** и **область дисперсии**. Эти величины не зависят от формы штриха, а определяются только периодичностью их расположения и их числом.

12.3.1 Разрешающая способность

Пусть на решетку падает немонахроматическое излучение. Рассмотрим случай излучения, в котором выделяется две спектральные линии равной интенсивности с длиной волны λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Каждая волна создает свою дифракционную картину. Если спектральные линии очень близки друг к другу, то дифракционные картины пространственно не разделены. Разрешающую способность дифракционной решетки принято рассчитывать в соответствии с **критерием Релея**: спектральные линии считаются пространственно разрешенными, если максимум интенсивности одной попадает на минимум другой.

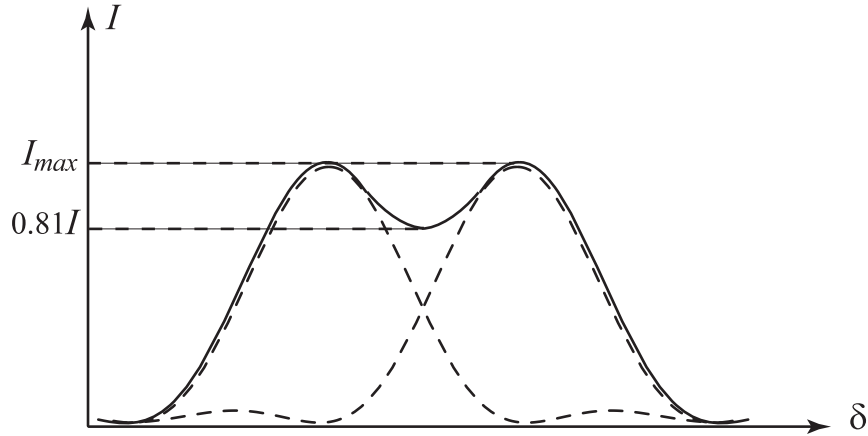


Рис. 39: Иллюстрация к критерию Релея. Согласно критерию эти две спектральные линии одинаковой интенсивности (распределение интенсивности монохроматического света $I(\delta) = I_{\max} \left[\frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} \right]^2$) разрешаются. Отношение результирующей интенсивности в минимуме к интенсивности спектральной линии в максимуме равно $\frac{8}{\pi^2} = 0.811$.

Рассмотрим главный максимум m -го порядка и соседний с ним минимум

$$(263) \quad d \sin \theta_{\max} = m(\lambda + \Delta\lambda), \quad d \sin \theta_{\min} = (m + \frac{1}{N})\lambda.$$

Согласно критерию Релея

$$(264) \quad (m + \frac{1}{N})\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda).$$

Разрешающая способность решетки определяется следующим образом

$$(265) \quad R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N|m|.$$

Если ширину решетки определить как $L = Nd$, а порядок m -го спектра порядка выразить через $m = d \sin \theta / \lambda$, то разрешающая способность может быть представлена в следующей форме

$$(266) \quad R = \frac{L}{\lambda} \sin \theta,$$

Эта формула означает, что разрешающая способность решетки равна числу длин волн, укладываемых в разности хода лучей, дифрагированных в направлении θ от двух крайних точек ДР (разделенных расстоянием $L = Nd$). Так как количество щелей очень велико, то разрешающая способность дифракционной решетки большая. Для повышения разрешающей способности необходимо переходить к большим значениям порядкам m спектра. Максимальный порядок ограничен углом отклонения $\theta \leq \pi/2$. Поэтому максимальная разрешающая способность равна

$$(267) \quad R_{\max} = \frac{L}{\lambda}.$$

Таким образом, максимальная разрешающая способность зависит от полного числа и не зависит от того, как на каждом периоде решетки распределены ее прозрачная и непрозрачная части. При заданных углах разрешающая способность может быть повышена только за счет L . Лучшие решетки имеют до 15 см ширины и содержат 100 000 периодов.

Однако, высокая разрешающая способность не всегда является единственным важным критерием в спектроскопических исследованиях. Например, если на решетку падает свет достаточно низкой интенсивности (свет от далеко удаленных от Земли звезд или галактик), то важно, чтобы как можно больше света было дифрагировано в определенный порядок спектра. Поэтому для проведения высокоточных измерений длин волн в спектре излучения необходимо взять дифракционную решетку хорошей угловой дисперсией.

12.3.2 Угловая дисперсия и область дисперсии

Угловая дисперсия характеризует степень пространственного (углового) разделения световых лучей с разной длиной волны. При работе с заданным порядком спектра m угловая дисперсия равна

$$(268) \quad \frac{\Delta \theta}{\Delta \lambda} = \frac{1}{\cos \theta} \frac{m}{d}.$$

Численно эта величина равна угловому смещению дифракционного максимума при изменении длины волны на единицу.

Таким образом, у решетки с меньшим периодом угловая дисперсия в данном порядке выше. Это очень важный факт, так как при меньших m интенсивность дифрагированного света в максимумах значительно больше, а спектральная область — шире. Этот недостаток устраняется при использовании отражательных ДР, называемых **эшеллетами**. За счет выбора формы штрихов (штрихам ДР придают треугольную несимметричную форму) до 80% отраженного света можно собрать в один или два ненулевых порядках интерференции (по одну сторону от центрального максимума).

Используя условие главных максимумов, легко показать, что угловая дисперсия не зависит от параметров решетки, а зависит только от угла дифракции θ , возрастая с увеличением θ (за исключением прозрачной щелевой решетки),

$$(269) \quad \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{\tan\theta}{\lambda}$$

Если спектральные линии спектров соседних порядков перекрываются, то дифракционная решетка, используемая в качестве спектрального аппарата, становится непригодной для исследования соответствующего участка спектра. Максимальная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, который наблюдать без наложения, называется **областью дисперсии**.

Если λ обозначает минимальную длину волны спектрального интервала, то из условия совпадения максимумов соседних порядков

$$(270) \quad d \sin\theta = (m+1)\lambda \quad d \sin\theta = m(\lambda + \Delta\lambda),$$

найдем ширину области дисперсии

$$(271) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Ясно, что при заданной длине волны ширина область дисперсии определяется только рассматриваемым порядком спектра: чем выше порядок, тем уже область.

12.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Оцените ширину одной щели, если известно, что на 1 мм поверхности дифракционной решетки укладывается 300 линий.
2. Описать характер спектров дифракционной решетки, если ее постоянная d равна 1) удвоенной, 2) утроенной, 3) учетверенной ширине щели a .
3. Какой максимальный порядок спектра может наблюдаться при дифракции света с длиной волны λ на решетке с периодом d ?
4. Найти условие главного дифракционного максимума при наклонном падении лучей на решетку (угол падения θ_0). Какой вид примет это условие, если $d \gg \lambda$, а порядок спектра $m \ll d/\lambda$?
5. Оцените дисперсионную область дифракционной решетки в спектре первого и второго порядков, если на нее падает белый свет.
6. Определите общее количество штрихов, которые должна иметь ДР, чтобы пространственно разделить две спектральные линии с $\Delta\lambda = 10^{-1} \text{ \AA}$ в центре видимой области спектра.

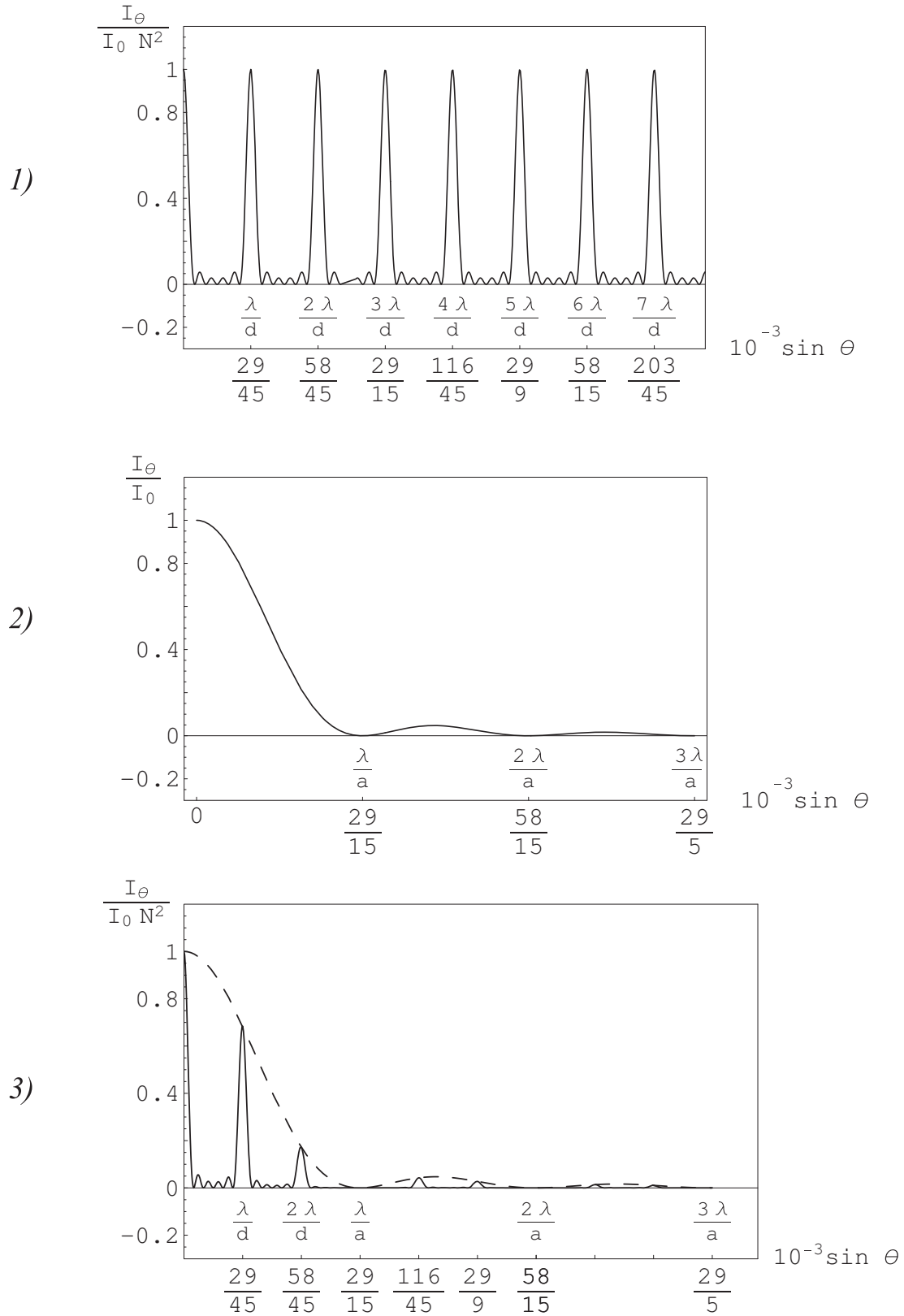


Рис. 40: 1) Распределение интенсивности в результате **многолучевой интерференции** от $N = 6$ щелей. На рисунке изображена нормированная функция $\left[\frac{\sin(N\pi d \sin \theta / \lambda)}{N\pi d \sin \theta / \lambda} \right]^2$; 2) Нормированное распределение интенсивности при **дифракции от одной щели**. На рисунке изображена функция $\left[\frac{\sin(\pi a \sin \theta / \lambda)}{\pi a \sin \theta / \lambda} \right]^2$; 3) Распределение интенсивности при дифракции на $N = 6$ щелях. Длина волны света $\lambda = 580$ нм, $a = 300$ нм, $d = 3a$.

13 Лекция №13 "Металлооптика"

Уравнения Максвелла в проводящей среде. Глубина проникновения, фазовая скорость и длина волны. Микроскопическая теория оптических свойств металлов.

Металлооптика — раздел физики, в котором изучается взаимодействие металлов с ЭМ волнами оптического диапазона.

В инфракрасной и видимой области оптического диапазона металлы отражают падающее излучение (характерный металлический блеск). Это явление объясняется преимущественным рассеянием света при его взаимодействии со свободными электронами. Их концентрация достигает в металлах $N_e \sim 10^{22} - 10^{23} \text{ см}^{-3}$. Электроны в процессе взаимодействия излучают вторичные волны, которые при сложении образуют отраженную волну высокой интенсивности. Формирование из рассеянного света отраженной волне происходит в тонком поверхностном *скин-слое* толщиной $\ll 1 \text{ мкм}$, в котором излучение, проникающее в металл экспоненциально затухает.

При взаимодействии ЭМ излучения с металлами роль свободных электронов является определяющей особенно для волн радиодиапазона и инфракрасной области спектра. Поэтому оптические и электрические свойства металлов оказываются взаимосвязаны: чем выше статическая проводимость металла, тем сильнее он отражает свет.

Ультрафиолетовый свет и излучения с более короткими длинами волн начинают взаимодействовать с электронами внутренних оболочек атомов. По своим оптическим свойствам металлы приближаются к диэлектрикам. Так в рентгеновской области спектра оптические свойства металлов определяются внутренними электронами, и металлы не отличаются от диэлектриков.

Оптические свойства металлов связаны с величиной их электрической проводимости $\sigma(\omega)$, зависящей от частоты. В рамках классической электродинамики оптические свойства однородных изотропных металлов принято выражать через *комплексную диэлектрическую проницаемость*, или, соответственно, *комплексный показатель преломления*. Мнимая часть этих величин характеризует степень затухания ЭМ волн в металле.

13.1 Уравнения Максвелла в проводящей среде

Металлы, как и большинство кристаллических твердых тел в природе, представляют собой поликристаллические образования, т. е. агрегаты мелких монокристаллов различной ориентации. Так как зерна ориентированы хаотично и их размеры чрезвычайно малы по сравнению с размерами поликристалла, то металлический образец можно рассматривать как изотропную среду. Поэтому рассмотрим макроскопически однородную изотропную среду с диэлектрической проницаемостью ϵ (эта величина не измеряется непосредственно), магнитной проницаемостью μ и электрической проводи-

мостью σ^{15} . Материальные уравнения

$$(272) \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \end{aligned}$$

необходимо дополнить законом Ома в дифференциальной форме

$$(273) \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Тогда уравнения Максвелла можно записать в следующей форме

$$(274) \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} &= \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

По сравнению с диэлектриками в правую часть первого уравнения Максвелла добавляется слагаемое с током $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Низкочастотной области спектра ток (это будет *ток проводимости*) обусловлен движением *свободных электронов*. В инфракрасной области спектра в движение вовлекаются *атомные ядра* кристаллической решетки, так как в этой области спектра находятся резонансные частоты их колебаний. В видимой и ультрафиолетовой областях в колебания вовлекаются *связанные электроны* металла. Смещения связанных электронов вызывает *поляризацию металлов* и появляется *ток поляризации*. Ток проводимости вызывает поглощение ЭМ волн, т. е. превращение ЭМ энергии в *джоулево тепло* (это учитывается введением σ), а ток поляризации — нет.

Однако, в высокочастотных ЭМ полях между движением свободных и связанных электронов нет существенной разницы. Поэтому при описании оптических свойств металлов ток проводимости не связывают с движением только свободных, а ток поляризации — только со связанными электронами.

Докажем, что если на поверхность металла падает ЭМ излучение, то $\operatorname{div} \mathbf{E} \simeq 0$. Вычисляя дивергенцию от обеих частей первого уравнения Максвелла, получим

$$(275) \quad -\frac{\varepsilon}{c} \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho.$$

Дифференцируя третье уравнение Максвелла по времени также найдем, что

$$(276) \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \dot{\rho}.$$

Исключая $\operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}$ с помощью этих уравнений, получим

$$(277) \quad \dot{\rho} + \frac{4\pi\sigma}{c} \rho = 0.$$

¹⁵ Для большинства металлов электропроводность равна по порядку величины $10^{17} (\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1}$.

Интегрирование этого уравнения дает

$$(278) \quad \rho(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \text{где} \quad \tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}.$$

Это уравнение показывает, что плотность распределения заряда в металле экспоненциально уменьшается с течением времени. Характерное время затухания определяется **временем релаксации** τ , которое по порядку величины равно 10^{-18} с. Это значение намного меньше, чем период колебания ЭМ волны в оптическом диапазоне. Следовательно, можно считать, что в металле $\rho \cong 0$ и

$$(279) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} \simeq 0$$

Далее, исключая $\mathbf{H}$ с помощью этого условия из первых двух уравнений Максвелла, найдем волновое уравнения для напряженности $\mathbf{E}$

$$(280) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \dot{\mathbf{E}}.$$

Так, если волна монохроматическая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, то уравнения (280) принимает следующий вид

$$(281) \quad \nabla^2 \mathbf{E} + \hat{k}^2 \mathbf{E} = 0,$$

где $\hat{k}^2$ квадрат волнового числа равен

$$(282) \quad \hat{k}^2 = \frac{\omega^2 \mu}{c^2} \left(\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right).$$

Эти уравнения формально совпадают с соответствующими уравнениями для непроводящей среде, если ввести **комплексную диэлектрическую проницаемость**

$$(283) \quad \hat{\varepsilon} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

Тогда

$$(284) \quad \hat{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n},$$

где $\hat{n} = \sqrt{\hat{\varepsilon}\mu}$ — **комплексный показатель преломления**. Если положить¹⁶

$$(285) \quad \hat{n} = n + i\kappa,$$

где n — **показатель преломления** и κ — **показатель поглощения**. Эти две величины могут быть выражены через материальные константы ε , μ и σ следующим образом

$$(286) \quad \begin{aligned} n^2 - \kappa^2 &= \mu\varepsilon, \\ n\kappa &= \frac{2\pi\mu\sigma}{\omega} = \frac{\mu\sigma}{\nu}. \end{aligned}$$

¹⁶ $\hat{k} = k + i s$.

Решение системы (286) удобно представить в виде

$$(287) \quad \begin{aligned} n^2 &= \frac{\varepsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2\nu^2}} + 1 \right], \\ \kappa^2 &= \frac{\varepsilon\mu}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2\nu^2}} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Так как для видимого диапазона $\frac{2\sigma}{\varepsilon\nu} \gg 1$, то формула для коэффициента поглощения значительно упрощается

$$(288) \quad \kappa = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\nu}}.$$

13.2 Глубина проникновения, фазовая скорость и длина волны

При распространении в электропроводящей среде плоской ЭМ волны (вдоль оси X) векторы напряженности могут быть представлены в следующем виде

$$(289) \quad \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\imath(\omega t - \hat{k}x)} = \mathbf{E}_0 e^{-sx} e^{-\imath(\omega t - kx)}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{-\imath(\omega t - \hat{k}x)} = \mathbf{H}_0 e^{-sx} e^{-\imath(\omega t - kx)}, \end{aligned}$$

где $\hat{k} = k + \imath s$. Эти формулы показывают, что амплитуда ЭМ волна в металле экспоненциально затухает по мере ее проникновения вглубь проводящей среды. При этом глубина проникновения равна

$$(290) \quad h = \frac{1}{2s} = \frac{c}{2\omega\kappa} = \frac{\lambda}{4\pi\kappa}.$$

Глубина проникновения для металлов намного меньше чем длины волны ЭМ излучения, падающего его металла. Например, в оптическом диапазоне

$$(291) \quad h \sim \frac{\lambda_0}{4\pi} \sqrt{\frac{\nu}{\mu\sigma}} \ll \lambda_0,$$

где $\lambda_0 = n\lambda$ – длина волны в вакууме. Таким образом, говорить о распространении света в проводнике нет никакого смысла.

Выражение для фазовой скорости ЭМ волны в проводнике имеет вид

$$(292) \quad v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \left[\frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon^2\nu^2}} + 1} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Эта формула показывает, что 1) наличие в среде проводимости уменьшает фазовую скорость света по сравнению с фазовой скоростью света в диэлектрике с теми же значениями ε, μ ; 2) скорость света в проводнике зависит от частоты, т. е. распространение монохроматических ЭМ волн в среде со слабой проводимостью наблюдается *дисперсия*.

13.3 Микроскопическая теория оптических свойств металлов

В отсутствии внешнего ЭМ поля, свободные электроны двигаясь хаотическим образом, не создают макроскопического тока. В случае, когда металл находится во внешнем ЭМ поле, электроны проводимости приобретают дополнительную скорость, **скорость дрейфа**, и их движение становится более упорядоченным, несмотря на то, что электроны взаимодействуют с ионами кристаллической решетки. Это упорядоченное движение электронного газа порождает электрический ток, индуцированные ЭМ полем.

Не усложняя деталями физический процесс, можно считать, что уравнение движения электрона проводимости имеет вид

$$(293) \quad m\ddot{\mathbf{r}} + m\beta\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

где m — эффективная масса электрона, e — его заряд и β — частота электронных столкновений (коэффициент затухания).

Для того чтобы выяснить физический смысл β в уравнении (293), рассмотрим движение электрона, когда поля нет $\mathbf{E} = 0$. В этом случае уравнение движения принимает следующий вид

$$(294) \quad \ddot{\mathbf{r}} + \beta\dot{\mathbf{r}} = 0$$

и его решение

$$(295) \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \frac{1}{\beta}\mathbf{v}_0 e^{-\beta t}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 e^{-\beta t}.$$

Ясно, что величина обратная β определяет **время затухания**, или **время релаксации**, $\tau \equiv \frac{1}{\beta}$. Типичные для металлов значения составляют $\beta = (2-50) \times 10^{13} \text{ с}^{-1}$.

Если опять предположить, что внешнее поле монохроматическое $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, то решение уравнения (293) имеет вид

$$(296) \quad \mathbf{r} = -\frac{e}{m(\omega^2 + i\beta\omega)} \mathbf{E}.$$

В данном случае движение электронов проводимости имеет периодический характер, порождающее переменный электрический ток. Плотность электрического тока равна

$$(297) \quad \mathbf{j} = N_e e \dot{\mathbf{r}} = \frac{N_e e^2}{m(\beta - i\omega)} \mathbf{E}.$$

Тогда электропроводность равна

$$(298) \quad \sigma = \frac{N_e e^2}{m(\beta - i\omega)} = \frac{N_e e^2 \beta}{m(\beta^2 + \omega^2)} + i \frac{N_e e^2 \omega}{m(\beta^2 + \omega^2)}.$$

Эта формула показывает, что когда $\omega \ll \beta$, электропроводность σ приближается к электростатическому значению $\sigma_0 = N_e e^2 / (m\beta)$, т. е. становится

вещественной. С другой стороны, когда $\omega \gg \beta$ (это случай волн оптического диапазона), мнимая часть σ превосходит вещественную часть. Поэтому ясно, что разделение вещественной и мнимой части диэлектрической проницаемости, которое ведет к формулам (286) и (287) оправдано лишь для волн $\omega \ll \beta$.

Зависимость комплексной диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и комплексного показателя преломления $\hat{n}$, согласно формуле (283), обусловлена не только зависимостью $\sigma(\omega)$ (*вклад электронов проводимости*), но и зависимостью $\varepsilon(\omega)$ (*вклад связанных электронов*).

Однако в инфракрасной и видимой области спектра вклад связанных электронов металла становится пренебрежимо малым. Тогда, полагая $\varepsilon = 1$, найдем

$$(299) \quad \hat{\varepsilon} \equiv \hat{n}^2 = 1 - \frac{4\pi N_e e^2}{m} \frac{1}{\omega(\omega - i\beta)}.$$

Отсюда

$$(300) \quad \text{Re } \hat{\varepsilon} \equiv n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{4\pi N_e e^2}{m(\omega^2 + \beta^2)},$$

$$(301) \quad \text{Im } \hat{\varepsilon} \equiv n\kappa = \frac{2\pi N_e e^2}{\beta\omega m(\omega^2 + \beta^2)}.$$

Критическое значение частоты, при котором реальная часть $\hat{\varepsilon}$ меняет знак

$$(302) \quad \omega_{\text{п}}^2 = \frac{4\pi N_e e^2}{m} - \beta^2,$$

называется **плазменной частотой свободных электронов**. Типичные для металлов значения составляют $(5-20) \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$. В терминах плазменной частоты мы можем записать

$$(303) \quad \text{Re } \hat{\varepsilon} = 1 - \frac{\omega_{\text{п}}^2 + \beta^2}{\omega^2 + \beta^2},$$

$$(304) \quad \text{Im } \hat{\varepsilon} = \frac{\beta(\omega_{\text{п}}^2 + \beta^2)}{2\omega(\omega^2 + \beta^2)}.$$

Так как $\omega_{\text{п}}^2 \gg \beta^2$, то

$$(305) \quad \omega_{\text{п}}^2 \simeq \frac{4\pi N_e e^2}{m}.$$

Если рассмотреть случай достаточно высоких частот $\omega^2 \gg \beta^2$, то

$$(306) \quad \text{Re } \hat{\varepsilon} \simeq 1 - \left(\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega} \right)^2,$$

$$(307) \quad \text{Im } \hat{\varepsilon} \simeq \frac{\beta}{2\omega} \left(\frac{\omega_{\text{п}}}{\omega} \right)^2.$$

Из полученных формул следует, что в области частот $\beta < \omega \ll \omega_{\text{п}}$, охватывающей для хорошо отражающих металлов ближний и средний инфракрасный диапазон ($\lambda \sim 1-10 \text{ мкм}$), реальная часть $\hat{\varepsilon}$ становится отрицательной

и $\kappa > 1$ ¹⁷. Для достаточно низких ω , коэффициент затухания κ становится намного больше единицы и, следовательно, коэффициент отражения стремится к единице.

С другой стороны, при $\beta \ll \omega > \omega_{\text{п}}$, реальная часть $\hat{\epsilon}$ положительная и $\kappa < 1$. Поэтому для достаточно больших частот ω падающего на металл излучения, коэффициент затухания κ становится намного меньше единицы и мнимая часть $\hat{\epsilon}$ во много раз меньше реальной части. Это означает, что металл реагирует на внешнее ЭМ излучение как диэлектрик.

Щелочные металлы ведут себя именно так, как описано выше. В инфракрасной области диапазона они непрозрачны и обладают высокой отражательной способностью. При некоторых критических частотах видимого и ультрафиолетового света они становятся прозрачными, имея достаточно низкую поглощательную способность. Это объясняется тем, что в металле возбуждаются плазменные колебания свободных электронов, которые приводят к появлению области прозрачности при $\omega \approx \omega_{\text{п}}$.

13.4 Вопросы для самостоятельной работы

1. Какими физическими факторами обусловлено уменьшение длины ЭМ волны в проводнике по сравнению с длиной волны в диэлектрике?
2. Оцените отношение $\frac{\sigma}{\nu}$ в формуле (291) в инфракрасной области частот.

¹⁷То, что реальная часть $\hat{\epsilon}$ меньше нуля означает, что разность фаз между колебанием внешнего электрического поля и электронов проводимости равна $\frac{\pi}{4}$ радиан.

14 Лекция №14 "Дисперсия и абсорбция света"

Основы электронной теории дисперсии. Законы поглощения света.

Дисперсия света — явление зависимости показателя преломления вещества n от частоты ν (длины волны λ) света. Следствием дисперсии света, например, является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его сквозь стеклянную призму; разложение солнечного света в спектр в радуге. Первые экспериментальные исследования дисперсии света, принадлежащие Ньютону (1672 г.), были выполнены по способу преломления в призме. Измеряя показатель преломления для различных длин волн (цветов), можно исследовать дисперсионную способность вещества призмы, т. е. функцию $n = n(\nu)$. Для веществ прозрачных в данной области спектра, n увеличивается с увеличением ν (уменьшением λ), чему и соответствует распределение цветов в спектре (фиолетовые лучи преломляются больше, чем красные) — **нормальная дисперсия света**. Вблизи полос поглощения вещества зависимость n от λ имеет более сложный характер. Даже общий ход дисперсии — увеличение показателя преломления при уменьшении длины волны света — не всегда имеет место. Так, Леру (1862 г.), наблюдая преломление в призме, наполненной парами йода, впервые обнаружил, что фиолетовые лучи преломляются меньше, чем красные, а другие лучи поглощаются йодом и не доступны для наблюдения. Эту особенность Леру назвал **аномальной дисперсией** — уменьшение n с уменьшением λ .

Дальнейшие систематические исследования показали, что явление аномальной дисперсии связано с поглощением света. У всякого вещества имеются свои полосы поглощения, и общий ход показателя преломления обусловлен распределением этих полос по спектру.

14.1 Основы электронной теории дисперсии

Важнейшим выводом теории Максвелла явилось положение, согласно которому скорость распространения монохроматической ЭМ волны связана с константами диэлектрика, в которой поле распространяется

$$(308) \quad v = \frac{c}{n}, \quad \text{где} \quad n = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

В диэлектрике скорость ЭМ волн зависит от частоты. Влияние дисперсии проявляется в распространении немонахроматических волн, поскольку различные частоты, составляющие волну, распространяются с различной скоростью. Объяснение дисперсии света дается электронной теорией вещества, позволяющей дать молекулярное толкование параметрам ϵ и μ и объяснить влияние частоты ЭМ поля на ϵ , и, следовательно, на n .

Дисперсия является следствием зависимости поляризации атомов от частоты. Простейшая классическая модель неподвижного атома — электрон, колеблющийся около положения равновесия по гармоническому закону. Под влиянием переменного электрического поля световой волны

$$(309) \quad E = E_0 e^{-i\omega t}$$

электрон дополнительно смещаются относительно положения равновесия на расстояние x , поляризуя атом. Дипольный момент атома, направленный вдоль поля равен

$$(310) \quad p_e = q_e x.$$

Если концентрация испытывающих поляризацию атомов равна N , то поляризация среды будет равна

$$(311) \quad P = N p_e = N q_e x.$$

Зная электрическую поляризацию среды, можно вычислить ее диэлектрическую проницаемость: $\varepsilon(\omega) = D/(\varepsilon_0 E) = (\varepsilon_0 E + P)/(\varepsilon_0 E)$. Таким образом,

$$(312) \quad \varepsilon = 1 + \frac{N_e q_e x}{\varepsilon_0 E},$$

где смещение x определяется величиной напряженности электрического поля волны E .

14.1.1 Уравнение колебаний оптического электрона

Задача сводится к определению смещения электрона под действием внешнего, периодически меняющегося с течением времени поля при учете сил, действующих на электрон атома, т. е. представляет собой задачу о вынужденных колебаниях электронов.

Однако, электрон, приведенный в колебание, постепенно отдает свою энергию, и, следовательно, колебания его будут затухающими. Не обсуждая физических причин, обуславливающих затухание колебаний в атоме, сила сопротивления должна иметь вид

$$(313) \quad F = -m_e \gamma \frac{dx}{dt} = -m_e \gamma \dot{x},$$

где $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ — масса электрона, γ — коэффициент затухания

$$(314) \quad \gamma = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0} \frac{q_e^2 \omega_0^2}{m_e c^3}.$$

Здесь ω_0 — круговая частота колебаний электрона, имеющая для оптической области спектра излучения порядок 10^{15}с^{-1} . По порядку величины $\gamma \sim 10^8 \text{с}^{-1}$, поэтому для оптических частот выполняется условие малости затухания

$$(315) \quad \gamma \ll \omega_0.$$

Если пренебречь влиянием окружающих молекул, также поляризованных проходящей через вещество ЭМ волной, действие ее на электрон определяется напряженностью электрического поля

$$(316) \quad F = q_e E.$$

Это допущение справедливо для разреженных газов, где среднее расстоянием между частицами велико. Для плотных газов, для жидкостей или

твердых тел необходимо учитывать это влияние, что приведет к изменению силы (316).

Итак, уравнение вынужденных колебаний электрона с учетом затухания имеет следующий вид

$$(317) \quad m_e \ddot{x} + m_e \omega_0^2 x + m_e \gamma \dot{x} = q_e E,$$

где предполагается, что напряженность E направлена вдоль оси X .

В установившемся режиме $x(t)$ является гармонической функцией с той же частотой, что и электрической поле

$$(318) \quad x(t) = x_0 e^{-i\omega t}.$$

Отсюда найдем, что

$$(319) \quad x = \frac{q_e}{m_e} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}.$$

Поэтому зависящая от частоты и изменяющаяся с течением времени поляризация равна

$$(320) \quad P = \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

14.1.2 Электронная и ионная дисперсия

Уравнение (317) обеспечивает полное решение задачи и дает как зависимость показателя преломления n от длины волны λ , так и абсорбцию вблизи собственных частот поглощения, вводимую формально при помощи коэффициента затухания γ . Далее следует ввести комплексную диэлектрическую проницаемость и комплексный показатель преломления

$$(321) \quad \hat{n} = n - i\kappa,$$

где n — действительная часть, определяющая фазовую скорость волны, а κ — коэффициент поглощения, характеризующий затухание волны.

Из написанных выше формул получим, что

$$(322) \quad n^2 - \kappa^2 = 1 + \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2},$$

$$2n\kappa = \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

Поскольку γ очень мала в оптической области, за исключением частот $\omega \approx \omega_0$, можно считать, что $\kappa(\omega) \approx 0$, а

$$(323) \quad n(\omega)^2 = 1 + \frac{q_e^2 N}{\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Если кроме электронов с собственной частотой ω_0 имеются электроны с другими частотами, то формулу (323) следует записать так

$$(324) \quad n(\omega)^2 = 1 + \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

где N_i — концентрация электронов в диэлектрике, собственная частота которых равна ω_{0i} .

К формуле (324) можно добавить дополнительное слагаемое, учитывающее колебания ионов. Ввиду их большой массы ионов частоты их собственных колебаний значительно меньше частот собственных колебаний легких электронов. Собственные колебания ионов лежат в далекой инфракрасной области, не оказывая, таким образом, влияние на дисперсию в оптической области спектра. Влиянием ионов объясняется различие статической диэлектрической проницаемости от ее значения в оптической области спектра. Например для воды $\sqrt{\varepsilon(0)} \simeq 9$, а для оптических частот $\sqrt{\varepsilon(\omega)} \simeq 1.33$. При учете колебания ионов в правой части (324) при $\omega \rightarrow 0$ появляются слагаемые, имеющие большие числовые значения,

$$(325) \quad \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 M_j} \frac{N_j}{\omega_{0j}^2},$$

где M_j — масса иона, ω_{0j} — собственная частота колебания иона (маленькая величина) и N_j — их концентрация.

14.1.3 Область нормальной дисперсии

Для разреженных газов (реальный газ при низком давлении) показатель преломления близок к единице, поэтому

$$(326) \quad n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1) \simeq 2(n - 1).$$

Формула (324) упрощается (без учета затухания)

$$(327) \quad n(\omega) \cong 1 + \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2}.$$

График этой функции называется **дисперсионной кривой**. Для малых частот $\omega \ll \omega_0$ получаем статическое значение диэлектрической проницаемости

$$(328) \quad n(0) = \sqrt{\varepsilon} = 1 + \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} \sum_i \frac{N_i}{\omega_{0i}^2}.$$

Для больших частот $\omega \gg \omega_0$ показатель преломления стремится к единице

$$(329) \quad n(\omega) = 1 - \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{\omega^2} \sum_i N_i.$$

Эта формула показывает, что для высоко-частотного диапазона характер связи электронов в атомах не играет роли. Показатель преломления в этой области спектра зависит лишь от полного числа колеблющихся электронов в единице объема.

14.1.4 Область аномальной дисперсии

С учетом малости затухания мы можем записать следующие формулы

$$(330) \quad \begin{aligned} n &= 1 + \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} N \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}, \\ \kappa &= \frac{q_e^2}{2\varepsilon_0 m_e} N \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \end{aligned}$$

Получается, что вблизи резонансной частоты $\omega_0 = \omega$ показатель преломления уменьшается с увеличением частоты. Это явление называется **аномальной дисперсией**. Так как резонансные частоты свободных атомов принадлежат ультрафиолетовой области спектра, показатель преломления в видимой области спектра всегда больше единицы.

Для того, чтобы получить количественное совпадение с опытом, в классической теории приходится вводить для каждой линии поглощения эмпирические константы. Оказывается, что N_i в формулах (322) допустимо считать пропорциональным плотности или числу атомов N_0 в единице объема

$$(331) \quad N_i = f_i N_0,$$

где безразмерный коэффициент f_i называют **силой осциллятора**, учитывающий долю участия осцилляторов или их эффективность в явлении дисперсии.

Качественные результаты классической теории подтверждаются квантовой. Кроме этого квантовая теория делает возможным связать силы осцилляторов с другими характеристиками электронных оболочек атомов, а именно волновыми функциями электронов в разных энергетических состояниях).

14.2 Законы поглощения света

Прохождение света через вещество ведет к возникновению колебаний электронов среды под действием ЭМ поля волны. Это сопровождается потерей энергии последней, затрачиваемой на возбуждение колебаний электронов. Частично эта энергия вновь возвращается первичному излучению в виде вторичных волн, излучаемых электронами. Частично энергия может переходить и в другие формы энергии. Таким образом, интенсивность света, проходящего через вещество, уменьшается.

14.2.1 Закон Бугера

Основным законом, описывающим поглощение света, является закон П. Бугера (открыт экспериментально в 1729 г.)

$$(332) \quad I = I_0 e^{-\alpha l},$$

где I_0 — интенсивность волны, вступающей в вещество, l — толщина слоя вещества и α — коэффициент поглощения, не зависящий от интенсивности

I_0 , но зависящий от длины волны. Эта закономерность показывает, что интенсивности света падает в геометрической прогрессии, когда толщина слоя нарастает в арифметической прогрессии. Физический смысл (его установил И. Ламберт в 1760 г.) этого закона состоит в том, что показатель поглощения не зависит от интенсивности света, а следовательно, и от толщины поглощающего слоя: при прохождении любого слоя вещества интенсивность светового пучка уменьшается на определенную долю, зависящую только от α и толщины слоя

$$(333) \quad \frac{dI}{I} = -\alpha dl.$$

Решение этого уравнения и является закон Бугера.

Зависимость $\alpha(\lambda)$ называют *спектром поглощения вещества*. Спектр поглощения изолированных атомов, например разреженных газов, имеет вид узких линий: α отличен от нуля только в определенных узких диапазонах длин волн (десятые–сотые доли Å), соответствующих частотам собственных колебаний электронов внутри атомов. Молекулярный спектр поглощения состоит из существенно более широких областей длин волн, в которых поглощение значительно. Ширина полос молекулярного поглощения равна единицы–тысячи Å. Поглощение твердых тел характеризуется очень широкими областями (тысячи–десятки тысяч Å) с большим значением κ .

В терминах квантовой теории процесс поглощения света связан с переходом электронов в поглощающих атомах, ионах, молекулах или твердом теле с более низких энергетических уровней на более высокие

$$(334) \quad \nu = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

В какой вид энергии переходит энергия поглощенного света определяется способом обратного перехода электрона в основное или нижнее возбужденное состояние: с излучением фотона или без излучения, или комбинированным путем.

С.И. Вавилов установил, что закон Бугера выполняется в крайне широких пределах изменения интенсивности света (примерно 10^{20} раз). Однако для ряда веществ в световых пучках очень большой интенсивности поглощение света перестает подчиняться закону Бугера: коэффициент поглощения становится функцией $\kappa(I_0)$. Происходит *нелинейное поглощение света*. Это явление обусловлено тем, что очень большая доля поглощающих атомов, перейдя в возбужденное состояние могут оставаться в нем сравнительно долго (больше, чем 10^{-8} с). Выбрав специальные вещества со значительно большим временем возбужденного состояния, Вавилов наблюдал, что при достаточно большой интенсивности света κ уменьшается. Это объясняется тем, что заметная часть молекул пребывает в возбужденном состоянии и теряет возможность поглощать свет.

14.2.2 Закон Бугера–Ламберта–Бера

Во многих случаях имеет место поглощение света молекулами газов или молекулами вещества, растворенного в практически непоглощающем растворителе. Оказывается, что коэффициент поглощения пропорционален концентрации C поглощающих молекул (правило Бера)

$$(335) \quad \alpha(\lambda) = A(\lambda)C$$

где $A(\lambda)$ – новый коэффициент, не зависящий от концентрации и характерный для молекулы поглощающего вещества. Тогда закон поглощения примет вид

$$(336) \quad I = I_0 e^{-A(\lambda)Cl}$$

Физический смысл этого закона Бугера–Лабмерта–Бера (336) состоит в том, что поглощающая способность молекулы не зависит от влияния окружающих молекул. Этот закон надо рассматривать как правило со многими исключениями, особенно при значительном увеличении концентрации, т. е. при значительном уменьшении взаимного расстояния между молекулами поглощающего вещества.

Введенный выше коэффициент поглощения γ , характеризующий затухание колебаний электрона в атоме, объясняет явление абсорбции экспоненциальным убыванием амплитуды волны, распространяющейся в поглощающей среде

$$(337) \quad E = E_0 e^{-\frac{2\pi}{\lambda_0} \kappa l}.$$

Ясно, что эта формула эквивалентна закону Бугера, и, следовательно, коэффициент поглощения должен быть равен

$$(338) \quad \alpha = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa.$$

14.3 Вопросы для самостоятельной работы

1. Выведите формулу (322).
2. Какие изменения, учитывающие действия окружающих молекул среды, необходимо внести в формулы (322)?

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

И. П. ЗАВЕРШИНСКИЙ, Е. Я. КОГАН

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН

САМАРА 2013

УДК 530.1
ББК 22.236.35
З_134

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А. Ю. П р и в а л о в

Завершинский И.П., Коган Е.Я. Лекции по теории колебаний и волн.: учебное пособие/ И. П. Завершинский, Е. Я. Коган. 2-е изд. перераб. и доп. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 159 с. : ил.

В курсе лекций представлены все основные разделы теории колебаний и волн. Кратко изложены основные теоретические положения и подробно описано большинство методов решения задач в этой области. Приведены примеры использования данных методов в основных областях приложений теории колебаний и волн: физики, химии, биологии, экологии и экономики. Это дает возможность научиться решать наиболее практически важные задачи. Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям "Прикладная математика и физика", "Физика" и др.

© Завершинский И. П., Коган Е. Я., 2013
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
1 Колебания. Основные понятия и способы описания.	9
1.1 Колебательные процессы. Основные понятия	9
1.2 Описание колебательных процессов	10
1.2.1 Прямое решение уравнений колебательного процесса	14
1.2.2 Построение фазового портрета	17
1.2.3 Выделение нормальных колебаний	18
2 Колебания в динамических системах с 1 –й степенью свободы	23
2.1 Линейные динамические системы с 1 –й степенью свободы	23
2.2 Гармонический осциллятор. Параметры колебаний	27
2.3 Нелинейные консервативные системы с 1 –й степенью свободы	30
2.4 Итерационные методы анализа колебательных систем	34
2.4.1 Метод разложения по малому параметру	34
2.4.2 Осциллятор Дуффинга. Метод Линштедта – Пуанкаре	36
3 Нелинейные диссипативные системы с 1 –й степенью свободы	39
3.1 Метод многих масштабов	39
3.2 Автоколебания. Метод ван дер Поля. Генератор ван дер Поля	42
3.3 Точечное отображение для генератора ван дер Поля	46
3.4 Быстрые и медленные движения	47
4 Динамические системы с 1.5 - а степенями свободы	49
4.1 Линейные динамические системы с 1.5–а степенями свободы	49
4.1.1 Вынужденные колебания гармонического осциллятора.	
Гармоническая внешняя сила	50
4.1.2 Негармоническая, но периодическая внешняя сила: $F(t) = F(t+T)$	53
4.1.3 Произвольная внешняя сила	54
4.1.4 Гармонический осциллятор под действием обобщенных внешних сил	55
4.2 Линейные системы с 1.5 – а степенями свободы с	
меняющимися под действием внешних факторов параметрами	57

4.2.1 Сравнимые частоты. Уравнение Матье	57
4.2.2 Стохастический параметрический резонанс	63
4.2.3 Медленное изменение параметров. Адиабатический инвариант	64
4.2.4 Движения в быстроосциллирующих полях	65
4.3 Нелинейные динамические системы с 1.5 – а степенями свободы	67
4.3.1 Осциллятор Дуффинга под внешним воздействием	67
4.3.2 Осциллятор Дуффинга под импульсным периодическим воздействием	68
4.3.3 Параметрически возбуждаемый нелинейный осциллятор	69
4.3.4 Хаотические колебания. Система Лоренца	70
5 Динамические системы с 2 -мя степенями свободы	72
5.1 Линейные колебания в системах с 2 -мя степенями свободы	72
5.2 Нелинейные колебания в системах с 2 -мя степенями свободы.	
Двухконтурный автогенератор	75
6. Колебания в динамических системах с 2.5 степенями свободы	77
7 Волновые процессы	79
7.1 Колебания в цепочках	79
7.2 Предельный переход к волновому процессу	81
7.3 Классификация волновых процессов	82
7.4 Примеры волновых процессов	83
8 Волны в однородных средах. Бегущие волны. Стоячие волны	89
8.1 Неограниченные среды. Задача Коши. Параметры волны	89
8.1.1 Волновое уравнение. Гармоническое начальное возмущение	91
8.1.2 Уравнение Клейна-Гордона. Группы волн. Дисперсия	92
8.1.3 Энергия и импульс волн	96
8.2 Конечный отрезок. Одномерный случай. Стоячие волны	97
8.3 Многомерные задачи. Волноводы и резонаторы	103
9 Волны в неоднородных средах	111
9.1 Пример решаемой задачи	111
9.2 Приближенные методы анализа волновых процессов	113
9.2.1 Метод последовательных приближений	113

	5
9.2.2. Асимптотический метод	117
9.3 Периодически неоднородные среды	122
10 Нелинейные волны. Типы нелинейных волн	123
10.1 Простые волны. Уравнение Римана. Уравнение Бюргерса	124
10.1.1 Уравнение Римана	124
10.1.2 Слабые ударные волны. Уравнение Бюргерса	130
10.2 Автоволны	134
10.2.1 Волна эпидемии. Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова. Фазовая автоволна переключения	134
10.2.2 Триггерная автоволна переключения	136
10.3 Солитоны	139
11 Взаимодействие волн	145
12 Автомодельные волны	150
Литература	152

Введение

Последние десятилетия характеризовались бурным развитием теории колебаний и волн, что привело к существенному изменению ее содержания.

Во-первых, в силу потребностей конкретных научных дисциплин чрезвычайно разрослась база применения идей теории колебаний и волн, она обогатилась примерами колебательных систем, расширилась феноменология колебательных процессов. Это привело к парадоксальному результату – обнаружился факт модельного единства колебательных и волновых процессов различной природы, что, в свою очередь, привело к тому, что предмет теории колебаний и волн существенно отличается от предметов конкретных дисциплин. Большинство научных дисциплин выделяют свой предмет, отправляясь от физической природы исследуемого объекта. Фундаментальное отличие теории колебаний и волн состоит в том, что ее *предмет* определяется по другому принципу, а именно, по наличию колебательной по своему характеру динамики безотносительно к физической сущности рассматриваемых явлений. Среди *задач теории колебаний и волн* можно назвать классификацию колебательных и волновых процессов, разработку математических моделей для их описания, выявление законов, являющихся общими для систем разной физической природы.

Во-вторых, произошли изменения, которые затронули содержание и методический инструментарий теории нелинейных колебаний и волн и связаны с появлением и широким распространением компьютеров. Те задачи, которые ранее требовали кропотливого исследования или же оставались недоступными, теперь оказалось возможным анализировать с привлечением методов численного моделирования с наглядным и быстрым представлением результатов посредством компьютерной графики. Все это ведет к необходимости переосмысления содержательной части теории колебаний и волн.

В силу этого, здесь основное внимание уделяется краткому обоснованию основных шагов построения той или иной модели явления из конкретной

предметной области, которые более подробно описаны в учебниках по теории колебаний и волн и другой специальной литературе, и, прежде всего, подробной демонстрации применения тех или иных математических методов к решению основных задач теории колебаний и волн.

Разбиение содержания по разделам в данной книге, прежде всего в первой части – теории колебаний несколько отличается от стандартного: линейные процессы $\rightarrow$ нелинейные процессы. Оно основано на классификации динамических систем по степеням свободы. В первой главе книги даются основные понятия теории колебаний и дается классификация колебательных систем. Глава 2 книги посвящена описанию колебаний в динамических системах с 1-й степенью свободы, к которым относятся свободные колебания в линейных и нелинейных динамических системах 2 – го порядка. Приведены примеры процессов, сводящихся к модели нелинейного консервативного осциллятора. Рассмотрен принцип получения точного решения уравнений колебательного процесса и основные методы качественного и приближенного анализа – метод фазовой плоскости, метод разложения по малому параметру, метод Линшtedта – Пуанкаре, метод многих масштабов, метод точечных отображений. В главе 3 описаны колебания в нелинейных диссипативных системах с 1 –й степенью свободы. В главе 4 рассмотрены колебания в динамических системах с полутора степенями свободы. Это - неавтономные системы 2 –го порядка и автономные системы 3 – го порядка. Рассматриваются такие явления, как резонанс, параметрический резонанс и динамический хаос. В разделе 4.1 рассматриваются вынужденные колебания гармонического осциллятора для гармонической, периодической и произвольной внешней силы. Рассмотрено явление резонанса. Раздел 4.2 посвящен описанию параметрически возбуждаемых систем с 1.5 – а степенями свободы. Рассмотрены случаи сравнимых частот, медленно меняющихся полей и быстроменяющихся параметров. Глава 5 посвящена описанию колебаний в динамических системах с 2 - мя степенями свободы. Это - неавтономные системы 3 –го порядка и автономные системы 4 – го порядка.

Глава 6 посвящена описанию линейных колебаний в системах из двух связанных осцилляторов под действием гармонических внешних сил.

В главе 7 даны основные понятия теории волн, проведен предельный переход от дискретных сред к непрерывным, приведены различные варианты классификации волновых процессов и приведены примеры описания волновых процессов различного вида. В главе 8 приведены основные методы описания волновых процессов в неограниченных и ограниченных однородных средах. Способ подачи материала предполагает опережающее или параллельное изучения курса «Уравнения математической физики» и предполагает знание основных методов решения начальных, краевых и смешанных задач математической физики. Глава 9 посвящена описанию волновых процессов в неоднородных средах, прежде всего, в слабонеоднородных и периодических средах. В главе 10 дано краткое введение в теорию нелинейных волн. Приведена классификация нелинейных волновых процессов по критерию взаимодействия волн друг с другом. Изложение материала следует данной классификации. Приведен ряд примеров описания нелинейных волновых процессов. В главе 11 рассмотрены методы описания процесса нелинейного взаимодействия волн. В главе 12 рассмотрены автомодельные волны.

1 Колебания. Основные понятия и способы описания

1.1 Колебательные процессы. Основные понятия

Колебательный процесс – это процесс, характеризующийся хотя бы приблизительной повторяемостью параметров, характеризующих состояние системы, число которых в данный момент времени, конечно.

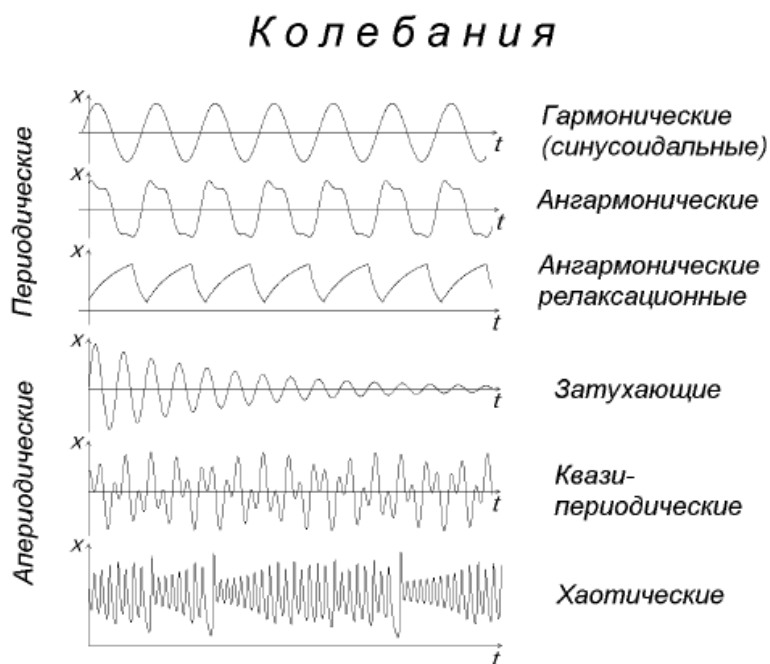


Рис.1.1.1 Зависимость амплитуды от времени для различных колебательных процессов

Под *состоянием* системы в некоторый момент времени понимается набор величин, количество которых достаточно для того, чтобы определить эти же величины в последующие моменты времени. Конечность числа параметров, характеризующих состояние системы, является основным критерием, разделяющим колебательные и волновые процессы.

Простейшим примером колебательной системы является гармонический осциллятор, описываемый 2-мя обыкновенными дифференциальными уравнениями 1-го порядка, дополненной 2-мя начальными условиями:

$$\dot{x} = v, \dot{v} = -2\gamma v - \omega_0^2 x \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0; \dot{x}|_{t=0} = v_0 \quad (1.1.1)$$

Решение (1.1.1) имеет вид повторяющихся с периодом $T = 2\pi/\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ функций $x(t) = e^{-\gamma t} (x_0 \cos \omega t + ((\gamma x_0 + v_0)/\omega) \sin \omega t)$, $v(t) = e^{-\gamma t} \{v_0 \cos \omega t - [\omega(1 + \gamma^2/\omega^2)x_0 + \gamma v_0] \sin \omega t\}$.

Приведенное определение колебаний очень широкое и подразумевает дальнейшую конкретизацию и детализацию. Например, говорят о колебаниях свободных и вынужденных, консервативных и диссипативных, линейных (гармонических) и нелинейных (ангармонических) и так далее.

Свободные колебания – колебания, происходящие в отсутствии внешних воздействий на систему. *Вынужденные колебания* – колебания, происходящие в присутствии внешних воздействий на систему.

Колебания называют *линейными* или *нелинейными*, если они описываются линейными или нелинейными уравнениями, соответственно.

Необходимым условием возникновения колебаний является наличие у системы состояния устойчивого равновесия (хотя бы метастабильного). При этом, если квазилинейная система выведена из данного состояния, то в соответствии с *принципом ле Шателье*, в ней возникают процессы, стремящиеся вернуть систему в исходное состояние. Динамический баланс обобщенных сил, выводящих и возвращающих систему в положение равновесия, и лежит в основе колебательного процесса. Такое утверждение в целом справедливо и для существенно нелинейных систем, однако при этом существует ограничение на амплитуду внешнего воздействия, поскольку метастабильную систему можно необратимо вывести из состояния равновесия. Кроме того, процесс установления равновесия не обязательно носит колебательный характер. Он может, например, носить характер экспоненциальной релаксации. Пример – RC – контур.

1.2. Описание колебательных процессов

Процесс, характеризующийся хотя бы приблизительной повторяемостью состояний системы, может быть описан различными способами, из которых базовыми являются два основных: формулировка дифференциальных или разностных уравнений, описывающих процессы в системе.

• Системы с непрерывным временем и их классификация

Если число параметров системы, позволяющих определить состояние системы, конечно $N < \infty$, то ее называют *сосредоточенной*. Колебательные

процессы в системах с непрерывным временем обычно описываются сосредоточенными системами дифференциальных уравнений. Сосредоточенной системой N – го *порядка*, в частности, является система N обыкновенных дифференциальных уравнений 1 –го порядка вида

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_N, t), i = \overline{1, \dots, N} \quad (1.2.1)$$

с N начальными условиями $x_i(0) = x_{i0}, i = \overline{1, \dots, N}$. Состояние системы, характеризуется в данном случае N величинами. Если число параметров системы, позволяющих определить ее системы, бесконечно $N \rightarrow \infty$, то ее называют *распределенной*. Т.о. математическим аппаратом, адекватным этому способу описания колебаний является аппарат теории обыкновенных дифференциальных уравнений [II.26-28, III.1-3,13,15-17]. Выделим два основных понятия теории дифференциальных уравнений, на базе которых будет структурировано дальнейшее изложение теории колебаний.

Степень свободы системы. Число степеней свободы динамической системы n равно числу величин, полностью характеризующих состояние системы N , деленному на два (для автономных систем - порядку системы дифференциального уравнения, деленному на два): $n = N/2$.

Это понятие возникло при развитии механики. Простейший тип механического движения – движение вдоль направления, задаваемого декартовой прямой, описывается вторым законом Ньютона для некоторой координаты, то есть обыкновенным дифференциальным уравнением 2 - го порядка. В этом случае говорят, что система обладает 1 – й степенью свободы.

Приведем методику расчета числа степеней свободы.

а. *Автономные системы.* Автономным системам отвечают дифференциальные или разностные уравнения, в которые время не входит явным образом – параметры системы не зависят от времени и на нее не действуют обобщенные внешние силы.

В этом случае уравнению 2 - го порядка (или системе 2 - х обыкновенных дифференциальных уравнений 1 - го порядка) соответствует система с 1 - й

степенью свободы, 3 - го порядка – с 1.5 - а степенями, 4 - го порядка - с 2 - мя и т.д. Автономные системы описывают свободные колебания.

Пример: Уравнение $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ - уравнение 2 - го порядка, параметры которого не зависят от времени и на нее не действуют обобщенные внешние силы – 1 – а степень свободы.

б. *Неавтономные системы.* Неавтономные системы – это системы, в которые время входит явно. Состояние автономной системы 2 – го порядка в произвольный момент времени t характеризуется 2 - мя величинами: x и $\dot{x}$ (или x_1 и x_2), т.е. $N = 2$. Если в нее явно входит время, то кроме указанных величин следует указать и момент времени, к которому они относятся: $(x, \dot{x}, t)$ (или (x_1, x_2, t)). Всего этих величин $N = 3 \Rightarrow n = N/2 = 1.5$. Поэтому наличие внешних сил или зависимости параметров системы от времени добавляет 0.5 степеней свободы. Неавтономные системы описывают вынужденные или параметрические колебания.

Пример: Уравнение $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon \sin \Omega t)x = f(t)$ - уравнение 2 - го порядка, параметры которого зависят от времени и на нее действуют обобщенные внешние силы – 1.5– ы степени свободы.

Фазовое пространство. Множество всех возможных состояний системы называют фазовым пространством. *Размерность фазового пространства* для автономных сосредоточенных систем равно количеству величин, характеризующих состояние системы, т.е. для автономных систем равно порядку системы N , а для неавтономных – $N + 1$.

Характер эволюции системы по аналогии с механикой и статистической физикой удобно характеризовать *фазовым объемом*. Элементарный фазовый объем $d\Gamma$ системы (1.2.1) равен: $d\Gamma = dx_1 dx_2 \dots dx_N$. Относительное изменение фазового объема с течением времени равно:

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{dx_1 dx_2 \dots dx_N} \left(\frac{dx_1}{dt} dx_2 \dots dx_N + \frac{dx_2}{dt} dx_1 dx_3 \dots dx_N + \dots + \frac{dx_N}{dt} dx_1 \dots dx_{N-1} \right) = \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} + \frac{d\dot{x}_2}{dx_2} + \dots + \frac{d\dot{x}_N}{dx_N}.$$

По отношению к тому, как меняется фазовый объем системы с течением времени, системы принято делить на консервативные и диссипативные.

Если фазовый объем не меняется с течением времени $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = 0$, то систему называют *консервативной*. Если фазовый объем меняется с течением времени $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} \neq 0$, то систему называют *диссипативной*.

Пример: Относительный фазовый объем гармонического осциллятора

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -2\gamma v - \omega_0^2 x \Rightarrow \frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{dx dv} \left(\frac{dx}{dt} dv + \frac{dv}{dt} dx \right) = \frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{d\dot{v}}{dv} = 0 - 2\gamma = -2\gamma, \quad (1.2.2)$$

поэтому эта система консервативная при $\gamma = 0$ и диссипативная при $\gamma \neq 0$.

Выделим также еще одно весьма важное определение. Система уравнений называется *динамической*, если она имеет единственное решение при $t \rightarrow \infty$. Большинство задач теории колебаний описываются динамическими системами.

• *Системы с дискретным временем.*

Точечным отображением (отображением последования) N – го порядка называют систему N алгебраических уравнений вида $x_{i;n+k} = f_i(x_{1;n}, x_{2;n}, \dots, x_{N;n})$, $k \geq 1$ с N начальными условиями $x_{in=0} = x_{in}$, $i = \overline{1, \dots, N}$.

Системы с непрерывным временем всегда могут быть сведены к системам с дискретным временем [I.1,11,12, II.13,16]. Кроме того, отображения последования могут формулироваться и независимо от систем с непрерывным временем. Анализ подобных отображений обычно проще решения дифференциальных уравнений. Стандартным способом исполнения процедуры перехода от непрерывных систем временем к дискретным является *метод отображений Пуанкаре* [I.1,11, II.13]. Проиллюстрируем методику реализации этого метода для автономной динамической системы третьего порядка, фазовое пространство которой трехмерно. Выберем двумерную площадку S таким образом, чтобы фазовые траектории многократно ее пересекали не по касательной. Зададим на S систему отсчета (X,Y) , на площадке выберем начальную точку (x,y) , из нее выпускается фазовая кривая и отслеживается следующее пересечение (x',y') с S с проходом в том же направлении. Если поменять начальную точку, поменяется и образ. Так возникнет отображение $x' = f_1(x,y)$, $y' = f_2(x,y)$ поверхности S в себя – *отображение Пуанкаре*, рис. 1.2.1.

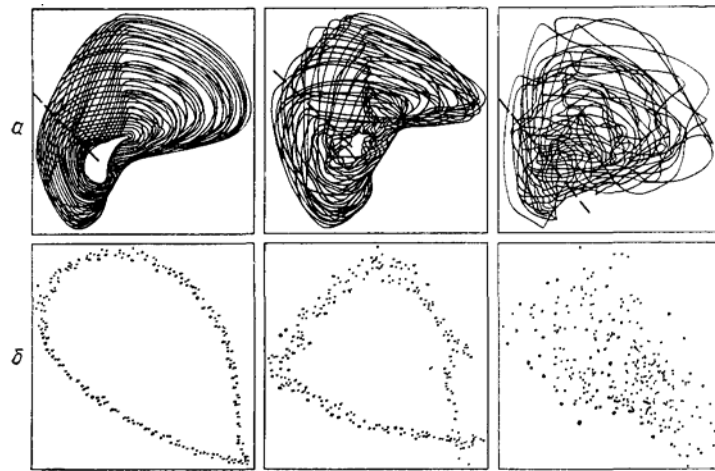


Рис. 1.2.1 Сечения Пуанкаре, полученные пересечением фазовых траекторий с плоскостью, проходящей через штриховую линию.

Этот метод, как и метод фазовой плоскости, является частично урезанным, так как информация о поведении системы между пересечениями теряется.

1.2.1 Прямое решение уравнений колебательного процесса

Этот метод оптимален при анализе линейных автономных систем и линейных неавтономных систем с постоянными коэффициентами.

• *Общая методика поиска решения линейных динамических систем.*

Здесь мы кратко изложим методику анализа поведения линейных динамических систем, поскольку для них доказан ряд мощных утверждений, серьезно формализующих и упрощающих поиск их решений.

Поведение линейных динамических систем описывается уравнением $\hat{L}\vec{x} = \vec{f}$, где $\hat{L}$ - линейный оператор, $\vec{f}$ - известная функция. Оператор $\hat{L}$ называется *линейным*, если для любых двух функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из области его определения выполняется условие $\hat{L}[C_1x_1(t)+C_2x_2(t)] = C_1\hat{L}x_1(t)+C_2\hat{L}x_2(t)$, где C_1, C_2 - постоянные. Из линейности оператора $\hat{L}$ следуют два утверждения, составляющие содержание *принципа суперпозиции*.

- 1) Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - два решения уравнения $\hat{L}\vec{x} = 0$, то их линейная комбинация $C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$ также является решением.
- 2) Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ - два решения неоднородного уравнения $\hat{L}\vec{x} = \vec{f}$, то их разность $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ является решением однородного уравнения $\hat{L}\vec{x} = 0$.

В частности, эти утверждения полностью справедливы для нормальной

системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\vec{x}} = \hat{F}(t)\vec{x} + \vec{g}(t) \Leftrightarrow \dot{x}_i = \sum_{j=1}^N f_{ij}(t)x_j + g_i(t), i = 1, \dots, N, \quad (1.2.3)$$

где $\hat{L} = \hat{I}d/dt - \hat{F}$ и лежат в основе методики нахождения их решений.

В самом деле, в соответствии с принципом суперпозиции, *общее решение однородной* ($g_i=0, i=1, \dots, N$) *линейной системы* (1.2.3) $\vec{x}(t)$ *можно искать в виде*

суперпозиции частных решений $\vec{x}_i(t)$ $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^N c_i \vec{x}_i(t)$, где c_i – N произвольных

констант, которые в силу теоремы существования и единственности решения системы (1.2.3) должны быть определены из N начальных условий $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$.

Линейно независимые частные решения системы (1.2.3) $\vec{x}_i(t)$ также называют *фундаментальной системой* решений (1.2.3).

Рассмотрим частные случаи представления системы (1.2.3).

I. Однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами N – го порядка.

Поиск решения в этом случае производится по следующей *схеме* [1.1-9]

1. Решение (1.2.3) ищется в виде $\vec{x}(t) = \vec{C}e^{\lambda t} \Leftrightarrow x_i(t) = C_i e^{\lambda t}, i = 1 \dots N$.

2. Разыскиваются N корней $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ получившегося характеристического

уравнения
$$\begin{pmatrix} f_{11} - \lambda & \dots & f_{1n} \\ . & . & . \\ f_{ln} & \dots & f_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

3. Записывается решение (1.2.3) для одной из переменных в виде

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\lambda_j t}, \text{ а остальные находятся с помощью оставшихся линейных связей.}$$

II. Если однородная система N – го порядка может быть представлена в виде одного дифференциального уравнения N – го порядка

$$x^{(N)} + a_1 x^{(N-1)} + \dots + a_N x = 0, \quad (1.2.4)$$

то поиск решения производится по аналогичной *схеме*

1. Решение (1.2.4) ищется в виде $x(t) = Ce^{\lambda t}$.

2. Ищутся корни характеристического уравнения $\lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_N = 0$.

3. Записывается решение уравнения (1.2.4) в виде $x(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\lambda_j t}$.

III. Интегрирование *неоднородной* ($g_i \neq 0, i=1, \dots, N$) системы типа (1.2.3) сводится к нахождению фундаментальной системы однородной. В самом деле, разыскивая решение (1.2.3) когда $g_i(t) \neq 0$ хотя бы при одном значении i в виде

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) x_i(t) \quad (1.2.5)$$

после подстановки в (1.2.3) получаем

$$\frac{d\hat{X}}{dt} \bar{c}(t) + \frac{d\bar{c}}{dt} \hat{X} = \hat{F} \cdot \hat{X} \cdot \bar{c}(t) + \bar{g}(t) \xRightarrow{\frac{d\hat{X}}{dt} = \hat{F} \cdot \hat{X}} \frac{d\bar{c}}{dt} \hat{X} = \bar{g}(t) \xRightarrow{\cdot \hat{X}^{-1}} \frac{d\bar{c}}{dt} = \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) \quad (1.2.6)$$

где $\hat{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$, $\bar{c} = (c_1, \dots, c_n)$. Отсюда $\bar{c}(t) = \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt + \bar{c}_0$. Подставляя это

соотношение в уравнения, полученные выше, получаем

$$\bar{x}(t) = \hat{X}(t) \bar{c}_0 + \hat{X}(t) \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt \quad \bar{x}_0 = \bar{x}(t_0) = \hat{X}(t_0) \bar{c}_0 \Rightarrow \bar{x}(t) = \hat{X}(t) \hat{X}^{-1}(t_0) \bar{c}_0 + \hat{X}(t) \int_{t_0}^t \hat{X}^{-1}(t) \bar{g}(t) dt. \quad (1.2.7)$$

Выражение (1.2.7), представляющее собой *общее решение неоднородного уравнения (1.2.3) есть сумма общего решения однородной части уравнения (1.2.3) и любого частного решения этого уравнения*: $\bar{x}_{o.n.}(t) = \bar{x}_{o.o.}(t) + \bar{x}_{ч.н.}(t)$.

Частное решение неоднородного уравнения иногда удается подобрать каким-либо другим способом (чаще всего это удается сделать для полиномов, тригонометрических и экспоненциальной функций). Для практических приложений важно отметить, что большинство практических методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и их точных или приближенных решений собрано в справочниках по ОДУ [III-1,3] и если не стоит задача последовательного решения системы, то следует немедленно обратиться к справочнику.

• **Выделение нормальных колебаний**

Уравнение линейного гармонического осциллятора можно представить в форме, отличающейся от (1.2.2). Такой переход производится с помощью линейного преобразования от динамических переменных x и y к новым

переменным [1.2,3], которые выбираются так, чтобы получающиеся для них уравнения описывали не взаимодействующие друг с другом системы.

Поэтому чаще всего выделение нормальных мод проводят для систем взаимодействующих осцилляторов, понижая, тем самым, порядок анализируемой системы. Проиллюстрируем принципы применения этого метода для гармонического осциллятора. Рассмотрим снова систему (1.2.2)

Умножим первое и второе уравнения на некоторые константы α и β и сложим

их. Такая процедура приводит к выражению $\frac{d}{dt}(\alpha x + \beta v) = -\frac{\beta}{\alpha} \omega_0^2 \left(\alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 2\gamma\beta)}{-\omega_0^2\beta} v \right)$.

Выберем коэффициенты α и β так, чтобы в этой формуле множители перед v , а, следовательно, и выражения в больших круглых скобках, справа и слева были одинаковы. Это выполняется, если $\beta = -(\alpha^2 - 2\gamma\alpha\beta)/(\omega_0^2\beta)$, или $\omega_0^2(\beta/\alpha)^2 - 2\gamma\beta/\alpha + 1 = 0$, откуда при $\gamma < \omega_0$ имеем $\beta/\alpha = \omega_0^{-2}(\gamma \pm i\omega)$. Это уравнение определяет только отношение коэффициентов, а не каждый из них по отдельности. Это объясняется линейностью уравнений (1.2.2). Один из коэффициентов, скажем α , следует находить из дополнительных соображений.

Введем функции $a(t)$ и $a^*(t)$ с помощью соотношений

$$a(t) = \alpha \left(x + (\gamma + i\omega)v/\omega_0^2 \right), \quad a^*(t) = \alpha \left(x + (\gamma - i\omega)v/\omega_0^2 \right) \quad (1.2.8)$$

Эти величины называют *нормальными колебаниями*. Подставляя формулы (1.2.8) в уравнение (1.2.2), находим, что нормальные колебания удовлетворяют уравнениям

$$\dot{a}(t) = (-\gamma - i\omega)a(t), \quad \dot{a}^*(t) = (-\gamma + i\omega)a^*(t) \quad (1.2.9)$$

Уравнения (1.2.9) называют уравнениями гармонического осциллятора в форме нормальных колебаний. Их решения можно записать так:

$$a(t) = a(0) \exp(i(-\omega + i\gamma)t), \quad a^*(t) = a^*(0) \exp(i(\omega + i\gamma)t) \quad (1.2.10)$$

Заметим, что если по физическому смыслу координата и скорость осциллятора - действительные величины, то начальные значения нормальных колебаний $a(0)$ и $a^*(0)$ комплексно сопряжены друг другу. Тогда из решений (1.2.10) следует, что нормальные колебания будут сопряжены друг другу и во все последующие моменты времени. В таком случае для описания динамики

осциллятора достаточно одного из уравнений (1.2.9). Поскольку нормальные колебания – комплексные функции, то число степеней свободы сохраняется при переходе от уравнения (1.2.2) к уравнениям (1.2.9). Из 1.2.10) следует, что колебанию $a(t)$ соответствует комплексная собственная частота $-\omega + i\gamma$, а колебанию $a^*(t)$ – собственная частота $\omega + i\gamma$. Этим исчерпывается спектр собственных частот линейного осциллятора с затуханием.

До этого момента коэффициент α оставался неопределенным. Как уже говорилось, поскольку уравнения линейны, его выбор обусловлен только соображениями удобства. Часто просто считают $\alpha = 1$, при рассмотрении параметрических процессов принято выбирать α так, чтобы в пределе нулевого затухания $\gamma=0$ энергия осциллятора определялась выражением $W = \omega_0 a^*(t)a(t)$. Тогда для каждого типа осциллятора коэффициент α получается свой. Например, для грузика на пружинке подставляя в последнее соотношение выражение $W = (mv^2/2 + kx^2/2)$ и формулы (1.2.8), находим, что $\alpha = (k/(2\omega_0))^{1/2}$. В такой нормировке нормальные колебания равны

$$a(t) = \sqrt{k/2\omega_0} \left(x + (\gamma + i\omega)v/\omega_0^2 \right), \quad a^*(t) = \sqrt{k/2\omega_0} \left(x + (\gamma - i\omega)v/\omega_0^2 \right).$$

Из этих уравнений можно выразить величины x и v :

$$x = \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} \left(\left(1 + \frac{i\gamma}{\omega} \right) a + \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega} \right) a^* \right), \quad v = \sqrt{\frac{\omega_0}{2k}} \frac{\omega_0^2}{i\omega} |a - a^*|.$$

Для осцилляторов других типов легко получить аналогичные выражения.

1.2.2 Построение фазового портрета

В ряде случаев, прежде всего для нелинейных систем, поведение системы можно качественно исследовать путем построения ее *фазового портрета* [1.2,5,7] – в простейшем случае динамической системы второго порядка вида

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y) \quad (1.2.11)$$

зависимости $y = y(x)$ или $x = x(y)$. Иногда фазовый портрет может быть получен непосредственно из системы (1.2.11) путем деления одного из уравнения системы на другое и решения полученного уравнения первого порядка. Однако это бывает редко. Эта зависимость несет меньшую информацию, чем решения $x=x(t)$, $y=y(t)$, однако позволяет исследовать поведение системы в окрестности

так называемых *особых точек* (x_j, y_j) , где $f_{1,2} = 0$ и, исходя из топологических соображений, качественно построить фазовые кривые на всей плоскости, давая представление о структуре решения при любых значениях x, y . Последовательность при построении фазового портрета состоит из 4-х шагов.

I. Поиск особых точек. Особые точки (x_j, y_j) , динамической системы определяются из уравнений $f_1(x_j, y_j) = 0, f_2(x_j, y_j) = 0$.

II. Линеаризация системы (1.2.11) в окрестности особой точки. Решение (1.2.11) ищется в виде $x = x_j + x', y = y_j + y'$, где $x' \ll x_j, y' \ll y_j$, а функции f_j раскладывают в ряд Тейлора с точностью до слагаемых первого порядка по x', y' . В результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_j)} x' + \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_j)} y', \\ \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_j)} x' + \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_j)} y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx'}{dt} = ax' + by', \\ \frac{dy'}{dt} = cx' + dy' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (1.2.12)$$

Матрицу $\hat{J} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_j)} & \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_j)} \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_j)} & \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_j)} \end{pmatrix}$ называют *матрицей Якоби*.

При этом необходимо выполнение условий $a^2 + b^2 \neq 0, c^2 + d^2 \neq 0$, если это не так, то линейного приближения недостаточно для исследования устойчивости.

III. Получение характеристического уравнения. Решение системы (1.2.12) ищется в виде $x' = A \exp(\lambda t), y' = B \exp(\lambda t)$. Эти соотношения подставляются в систему (1.2.12). В результате получается система линейных однородных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_j)} - \lambda \right) A + \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_j)} B = 0, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x_j, y_j)} A + \left(\frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{(x_j, y_j)} - \lambda \right) B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - \lambda)A + bB = 0, \\ cA + (d - \lambda)B = 0. \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Эта система имеет нетривиальное решение, только когда равен нулю определитель из коэффициентов при A и B :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} \Big|_{(x_j,y_j)} - \lambda & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \Big|_{(x_j,y_j)} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} \Big|_{(x_j,y_j)} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \Big|_{(x_j,y_j)} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.2.14)$$

Раскрывая его, получаем характеристическое уравнение для определения λ_i

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \text{Sp}[\hat{L}]\lambda + \text{Det}[\hat{L}] = 0 \Rightarrow \lambda^2 - S\lambda + D = 0, \quad (1.2.15)$$

где S – след матрицы $\hat{L}$, D – ее определитель.

IV. Решение характеристического уравнения и анализ его корней. Корни характеристического уравнения (1.2.14) равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4D}}{2} \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \text{ и могут быть:}$$

а) *Мнимыми* $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{D} = i\sqrt{ad - bc}$ при $S=0$, $D>0$. В этом случае особую точку называют *центром*. Пример – гармонический осциллятор при $\gamma = 0$. При этом система (1.2.11) имеет вид $\dot{x}' = y'$, $\dot{y}' = -\omega_0^2 x'$. Она может быть переписана в форме $dy'/dx' = -\omega_0^2 x'/y'$. Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение в виде уравнения эллипса $x'^2/\omega_0^2 + y'^2 = C = \text{const}$.

б) *Комплексно сопряженными* $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\eta$ при $S^2 \ll 4D$. В этом случае особую точку называют *фокусом*. Пример – гармонический осциллятор при $\gamma \neq 0$. При этом система (1.2.11) имеет вид $\dot{x}' = y'$, $\dot{y}' = -\omega_0^2 x' - 2\gamma x'$. Она может быть переписана в форме $dy'/dx' = -(2\gamma y' + \omega_0^2 x')/y'$, а после замены $y' = x'z$ в виде $\frac{zdz}{z^2 + 2\gamma z + \omega_0^2} = -\frac{dx'}{x'}$. Это уравнение с разделяющимися переменными при $\gamma^2 < \omega_0^2$

имеет решение, которое после возвращения к исходным переменным имеет вид

$$\sqrt{y'^2 + 2\gamma x' y' + \omega_0^2 x'^2} = C \exp\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \arctg \frac{y' + \gamma x'}{\omega_0^2 - \gamma^2 x'^2}\right). \text{ Делая упрощающую замену}$$

$u = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} x' = \omega x'$, $v = y' + \gamma x'$, последнее соотношение мы можем представить в

форме $u^2 + v^2 = C^2 \exp\left(\frac{2\gamma}{\omega} \arctg \frac{v}{u}\right)$. Наконец, после перехода к полярным координатам $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$, имеем уравнение *спирали* $\rho = C \exp(\gamma \varphi / \omega)$.

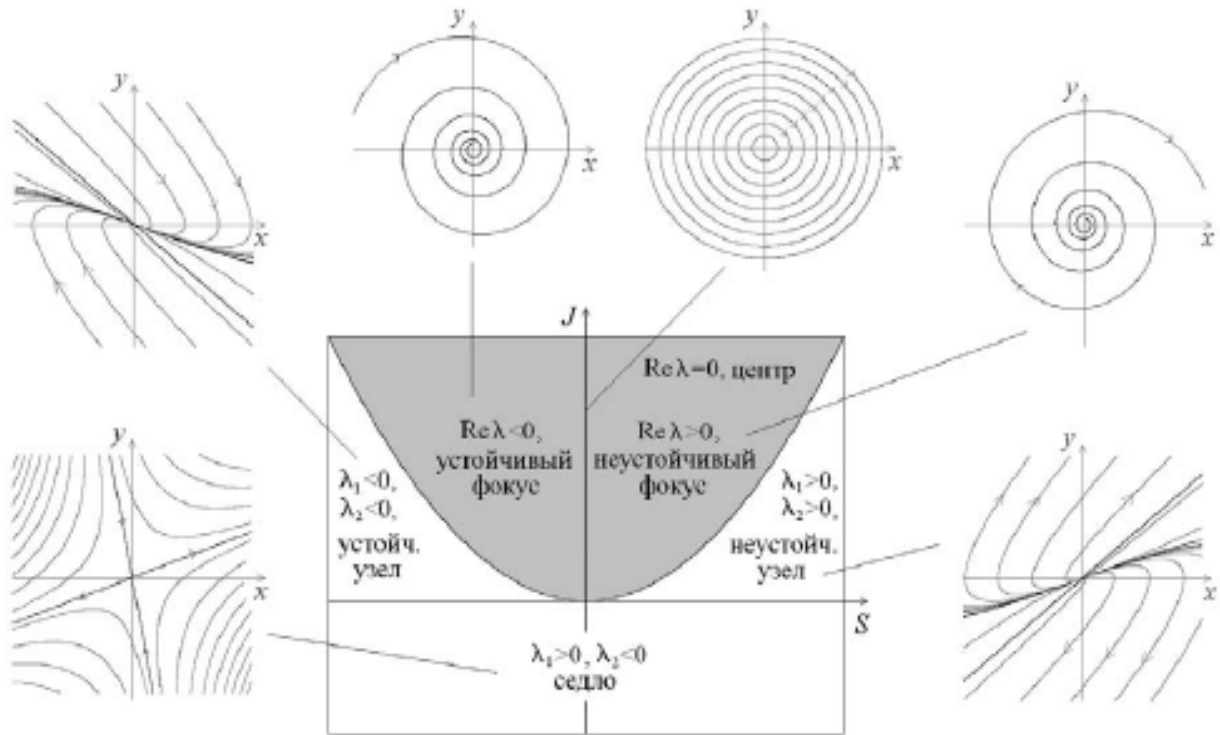


Рис.1.2.2 Фазовый портрет гармонического осциллятора

При этом, если $\eta = \text{Im}[\lambda_{1,2}] < 0$, ($S < 0$, $D > 0$), то особую точку называют *устойчивым фокусом*. Устойчивый фокус при этом является простейшим примером *аттрактора* размерности $d = 1$ – множеством, к которому асимптотически притягиваются фазовые траектории, рис.1.2.2.

Если $\mu = \text{Im}[\lambda_{1,2}] > 0$ ($S > 0$, $D > 0$), то особую точку называют *неустойчивым фокусом*.

в) Действительными и иметь один знак $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$ или $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ ($S^2 > 4D$). В этом случае особую точку называют *узлом*.

Повторяя те же действия, что и в предыдущем разделе, при $\gamma^2 > \omega_0^2$ приходим к уравнению фазовой траектории вида $v = C u^{q_2/q_1}$, где $v = y' + q_1 x'$, $u = y' + q_2 x'$, а $q_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$, $q_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$.

При этом если ($S < 0$, $D > 0$), $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то особую точку называют

устойчивым узлом. Это простейший пример *аттрактора* размерности $d = 1$, то есть множества, к которому притягиваются фазовые траектории.

Если $(S > 0, D > 0)$, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, то особую точку называют *неустойчивым узлом*.

г) Действительные и имеют разные знаки $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ или $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ ($D < 0$). В этом случае особую точку называют *седлом*. Этот случай реализуется при $\omega_0^2 < 0$. При этом $q_1 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0$, $q_2 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$.

У нелинейных систем может быть несколько особых точек различного типа. [I.1,2]). Рассмотрим законы совместного существования различных типов состояний равновесия и замкнутых траекторий. Пусть есть векторное поле на плоскости. Нарисуем замкнутый контур, рис. 1.2.3, не проходящий через состояние равновесия. Если взять на этом контуре точку S и двигать ее вдоль контура, то вектор поля, проходящий через эту точку, будет непрерывно вращаться. Когда точка сделает полный оборот, то вектор повернется на угол $2\pi j$, где j - целое число. Направление вращения вектора будем считать положительным, если оно совпадает с направлением движения S . Целое число j носит название *индекса Пуанкаре*. Для контура, изображенного на рисунке $j = 0$.

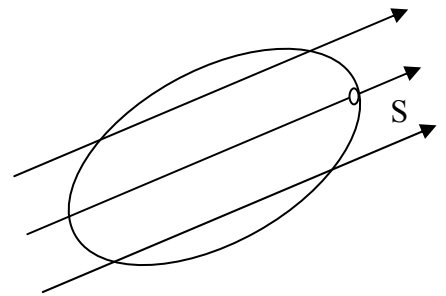


Рис. 1.2.3

Если состояние равновесия окружить замкнутым контуром, то нетрудно убедиться, что индексы Пуанкаре для центра, узла, фокуса равны $+1$, а для седла -1 . Для предельного цикла $j = +1$.

Индекс замкнутой кривой, содержащей внутри себя несколько особых точек, равен сумме индексов этих точек. Отсюда сразу ясно, например, что предельного цикла, внутри которого находятся два седла или два седла и фокус, существовать не может, так как для него $j = +1$, а для трех таких состояний равновесия общее $j = -1$. А вот в случае седла и двух фокусов предельный цикл может существовать, так как в этом случае сумма j равна $-1 + 1 + 1 = +1$. Два

состояния равновесия (седло и узел), могут слиться и исчезнуть, так как их совместный индекс $j = 0$ и т.д. Итак, опираясь на *теорию индексов Пуанкаре*, можно утверждать следующее.

1. Внутри замкнутой фазовой траектории находится, по крайней мере, одна особая точка, так как индекс такой траектории равен $+1$, а индекс замкнутой кривой, внутри которой нет особых точек, равен нулю.
2. Если внутри замкнутой фазовой траектории находится одна особая точка, то это не может быть седло, а обязательно точка с индексом $+1$.
3. Если внутри замкнутой фазовой траектории находятся несколько простых особых точек, то число их всегда нечетно, а число седел на единицу меньше числа остальных особых точек.
4. Если на фазовой плоскости есть узел или фокус, а также седло, то они могут быть соединены фазовой кривой.

2 Колебания в динамических системах с 1 – й степенью свободы

Колебания в системах с 1 – й степенью свободы в соответствии с классификацией – это свободные колебания в системах 2 – го порядка.

2.1 Линейные динамические системы с 1 – й степенью свободы

Колебательные процессы, соответствующие данным системам относятся с одной стороны к простейшим, а с другой стороны, к наиболее известным процессам, изученным наиболее подробно. Это базовые явления.

Изложение в этом разделе идет от частного к общему - приводятся примеры хорошо известных колебательных процессов из самых разных областей знания, и показывается, что их малые колебания описываются единым образом – на основе модели гармонического осциллятора.

Пример 1. Математический маятник. Свободные колебания математического маятника, рис.2.1.1 могут быть описаны с помощью *основного уравнения вращательного движения*

$$I\ddot{\epsilon} = \sum_j \vec{M}_j = \sum_j [\vec{F}_j, \vec{r}] \quad (2.1.1)$$

где I - момент инерции тела, $\ddot{\epsilon}$ - угловое ускорение, $\sum_j \vec{M}_j$ - сумма моментов сил,

действующих на тело. Потенциальная энергия маятника равна, рис. 2.1.1 $U = mgl(1 - \cos \varphi) = 2mgl \sin^2(\varphi/2)$. Положение равновесия определяется условием $dU/d\varphi = 0 \Rightarrow mgl \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Число n может принимать два значения для разных положений равновесия:

- Нижнее $n = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

Т.к. $\left. \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow -\varepsilon} = mgl \cos(-\varepsilon) = mgl \cos \varepsilon \approx mgl > 0$,

$\left. \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow +\varepsilon} = mgl \cos(+\varepsilon) = mgl \cos \varepsilon \approx mgl > 0$, то это

– минимум, т.е. устойчивое положение равновесия.

- Верхнее $n = 1 \Rightarrow \varphi = \pi$. Т.к.

$\left. \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow \pi - \varepsilon} = mgl \cos(\pi - \varepsilon) = mgl(\cos \pi \cos \varepsilon + \sin \pi \sin \varepsilon) \approx -mgl < 0$,

$\left. \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi \rightarrow \pi + \varepsilon} = mgl \cos(\pi + \varepsilon) = mgl(\cos \pi \cos \varepsilon - \sin \pi \sin \varepsilon) \approx -mgl < 0$

то это положение равновесия – максимум, т.е. неустойчивое положение равновесия. Любое, сколь угодно малое воздействие выводит маятник из него и возвращает в нижнее. Перебор остальных значений n не дает новых положений равновесия. Из нижнего положения равновесия маятник выводится тем или иным внешним воздействием, возвращающая сила – сила тяжести. Заметим, что момент силы натяжения нити равен нулю, поскольку $\vec{N} \parallel \vec{r}$. В проекции на ось z в пренебрежении трением в точке подвеса имеем $\ddot{\varphi} + (mgl/I) \sin \varphi = 0$, где $I = I_0 + ml^2$ – момент инерции тела. Для математического маятника $I_0 = 0$. После подстановки

$$\ddot{\varphi} + (g/l) \sin \varphi = 0. \quad (2.1.2)$$

Если $\varphi \ll 1$, то $\sin \varphi \approx \varphi$. В этом случае уравнение (2.1.2) становится линейным

$$\ddot{\varphi} + (g/l) \varphi = 0, \quad (2.1.3)$$

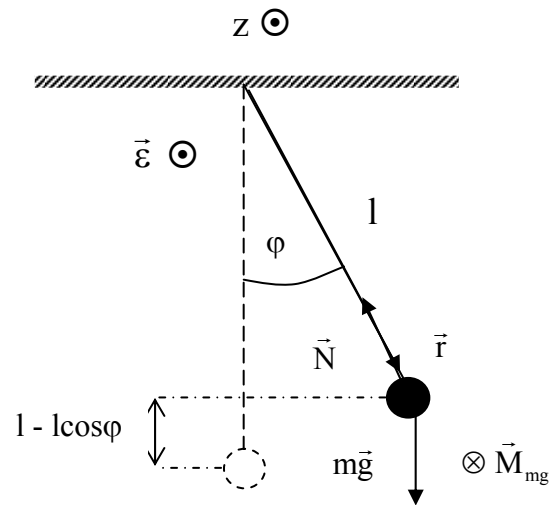


Рис. 2.1.1. Модель математического маятника

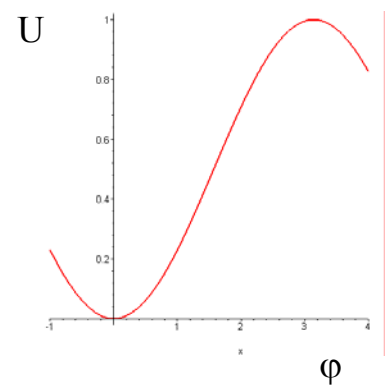


Рис.2.1.2 Потенциальная энергия маятника

а колебания называют *малыми*.

Пример 2. RLC-контур. Свободные колебания в RLC-контуре могут быть описаны с помощью *второго правила Кирхгофа*

$$\sum_j U_j = \sum_n \varepsilon_n, \quad (2.1.4)$$

где U_j – падение напряжения на j – м элементе, $\sum_n \varepsilon_n$ –

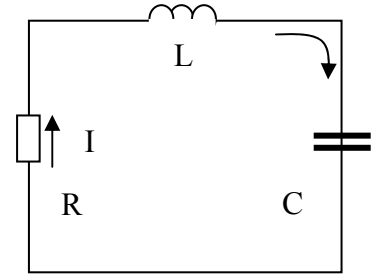


Рис.2.1.3

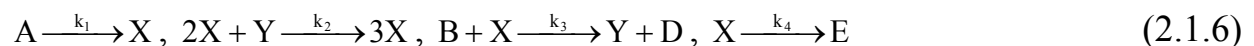
сумма э.д.с., действующих в контуре. Здесь $U_1 = U_R = IR$ – падение напряжения на активном сопротивлении, $U_2 = U_C = q/C$ – падение напряжения на конденсаторе, $\varepsilon_1 = \varepsilon_L = -L\dot{I}$ – э.д.с. индукции. В результате получим уравнение $IR + q/C = -L\dot{I}$. Дифференцируя последнее уравнение по времени и пользуясь определением силы тока $I = \dot{q}$, после деления уравнения на L , получаем окончательно уравнение того же вида, что и (2.1.3):

$$\ddot{I} + R\dot{I}/L + I/LC = 0. \quad (2.1.5)$$

Полная энергия рассматриваемой системы имеет вид $E = q^2/2C + LI^2/2 = q^2/2C + L\dot{q}^2/2$, поэтому роль потенциальной энергии здесь играет энергия конденсатора $U = q^2/2C$. Положение равновесия определяется условием $dU/dq = 0 \Rightarrow q/C = 0 \Rightarrow q = 0$. Это минимум, т.к. $d^2U/dq^2|_{q \rightarrow \pm \varepsilon} = 1/C > 0$.

Принцип ле Шателье в этом случае имеет вид *правила Ленца*: изменение магнитного потока, пронизывающего контур, приводит к появлению в цепи тока, направленного таким образом, чтобы восстановить равновесие в контуре.

Пример 3. Брюсселятор. Реакция, являющаяся моделью *реакции Белоусова-Жаботинского* [П.34]:



с учетом диффузии (процесс «5») и конвективного переноса реагентов X и Y (процесс «6») описывается системой

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \underbrace{-\vec{u}\nabla X}_{(6_1)} + \underbrace{k_1 A}_{(1)} + \underbrace{k_2 X^2 Y}_{(2)} - \underbrace{k_3 BX}_{(3)} - \underbrace{k_4 X}_{(4)} + \underbrace{D_1 \Delta X}_{(5_1)}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = \underbrace{-\vec{v}\nabla Y}_{(6_2)} + \underbrace{k_3 BX}_{(3)} - \underbrace{k_2 X^2 Y}_{(2)} + \underbrace{D_2 \Delta Y}_{(5_2)} \quad (2.1.7)$$

Концентрация вещества X увеличивается в процессах «1» и «2» (знаки «+») и

уменьшается в процессах «3» и «4» (знаки «-»). Концентрация вещества Y увеличивается в процессе «3» (знак «+») и уменьшается в процессе «2» (знак «-»). Поскольку появление данной молекулы в сфере взаимодействия не зависит от появления в этой сфере других частиц, то по теореме об умножении вероятностей результат взаимодействия представляется в виде произведения концентраций веществ, принимающих участие в акте взаимодействия.

В пренебрежении процессами диффузии и конвективного переноса и малых отклонениях от положения равновесия $X' = X - A \ll A$, $Y' = Y - B \ll B$ при $k_j = 1$, $\forall j$ система (2.1.7) сводится к виду

$$\dot{X}' = A^2 Y' + (B - 1) X', \quad \dot{Y}' = -A^2 Y' - B X', \quad (2.1.8)$$

которое может быть записано в форме одного уравнения

$$\ddot{Y}' + (B - 1 - A^2) \dot{Y}' + (1 - 2B) A^2 Y' = 0 \quad (2.1.9)$$

Пример 4. *Простейшая модель национальной экономики.* Динамику национальных доходов и расходов описывается уравнениями [II.30]

$$\dot{I} = I - aC, \quad \dot{C} = b(I - C - G), \quad (2.1.10)$$

где $I > 0$ - национальный доход, $C > 0$ - потребительские расходы, $G = G_0 = \text{const} \geq 0$ - правительственные расходы. При малых отклонениях от положения равновесия $I' = I - aG_0/(a-1) \ll aG_0/(a-1)$, $C' = C - G_0/(a-1) \ll G_0/(a-1)$ система (2.1.10) сводится к виду $\dot{I}' = I' - aC'$, $\dot{C}' = b(I' - C')$, которое может быть записано в форме одного уравнения

$$\ddot{C}' + (b-1)\dot{C}' + b(a-1)C' = 0. \quad (2.1.11)$$

Пример 5. *Модель Лотки-Вольтерра.* Будем полагать, что на замкнутом ареале живут хищники с концентрацией на единицу площади n и их жертвы – вегетарианцы с концентрацией на единицу площади N . Жертвы питаются растительной пищей, которая имеется в избытке, а хищники только жертвами. Будем считать, что скорость изменения числа особей каждого вида в отсутствие другого пропорционально общему их числу на данный момент. Учитывая то, что изменение численности вида из-за наличия другого будет пропорциональна

количеству встреч, то есть произведению численностей обоих видов, можно записать для скорости изменения числа жертв и хищников [1.2, II.33]:

$$\dot{N} = aN - bNn, \quad \dot{n} = -An + BnN, \quad (2.1.12)$$

где $a > 0$ – мальтузианский параметр, $b > 0$, $A > 0$ – коэффициент естественной смертности хищников, $B > 0$. Отсюда можно получить уравнение для отклонений численности видов от положения равновесия ($A/B, a/b$) пренебрегая членами второго порядка малости

$$\dot{N}' = -ABn'/b, \quad \dot{n}' = abN'/b, \quad (2.1.13)$$

Отсюда следует уравнение, описывающее изменение численности каждого вида: дифференцируя первое уравнение (2.1.13) после учета второго получим

$$\ddot{N}' + AaN' = 0 \quad (2.1.14)$$

2.2 Гармонический осциллятор. Параметры колебаний

Уравнения (2.1.3), (2.1.5), (2.1.9), (2.1.11), (2.1.14) могут быть записаны в единой!!! форме. Таким образом, малое колебание любой природы описывается единым образом – моделью **гармонического осциллятора**:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.2.1)$$

Различными в каждом конкретном случае будут лишь выражения для 2 – х параметров, значения которых определяют характер движения в системе – *коэффициента диссипации* 2γ , определяющий скорость уменьшения (или увеличения при $\gamma < 0$) амплитуды и ω_0 – *собственной частоты* колебаний.

Смысл этих параметров заключается в следующем.

Если промежуток времени $\Delta t = 1/\gamma$, то $A_0/A = e$. Отсюда вытекает физический смысл коэффициента затухания: величина $1/\gamma$ равна промежутку времени, по истечении которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Частота колебаний связана с *периодом* колебаний – минимальным промежутком

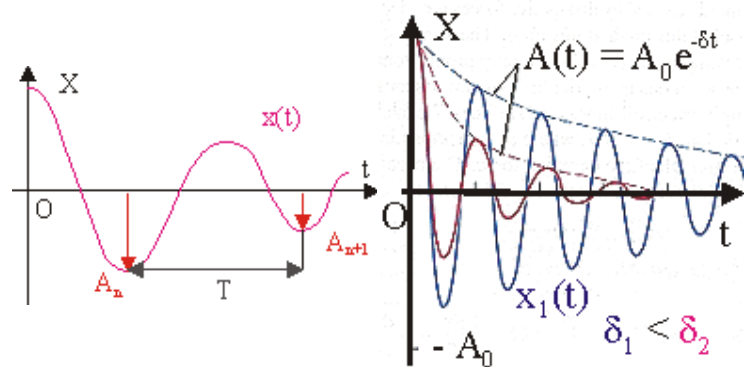


Рис.2.2.1

времени T , в течение которого фаза колебаний принимает то же значение, что и в момент времени $t = 0$: $\omega_0 = 2\pi/T$.

Уточним использованные термины. Для этого заметим, что общее решение уравнения (2.2.1) может быть переписано в виде [II.26-28, III.1,3]

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.2.2)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Уравнение (2.2.1) дополняется начальными условиями

$$x(t=0) = x_0; \dot{x}(0) = v_0 \quad (2.2.3)$$

Удовлетворяя решение (2.2.1) начальным условиям (2.2.3), получаем следующие выражения для амплитуды A и начальной фазы φ :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\gamma x_0 + v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\gamma}{\omega} - \frac{v_0}{x_0 \omega} \quad (2.2.4)$$

Для характеристики интенсивности затухания вводят также понятие *логарифмического декремента затухания*. Пусть T - период затухающего колебания, A_n и A_{n+1} - амплитудные значения функции $x(t)$ для двух ее последовательных экстремумов. Величина d , равная $d = \ln(A_n/A_{n+1})$ называется логарифмическим декрементом затухания. Выясним связь между γ и d :

$$d = \ln(A_n / A_{n+1}) = \ln(A_0 e^{-\gamma t} / A_{n+1} e^{-\gamma(t+T)}) = \ln(e^{\gamma T}) = \gamma T \quad (2.2.5)$$

Используя уравнение (2.2.4), можно преобразовать закон изменения амплитуды: $A_n = A_0 e^{-\gamma t} = A_0 e^{-\gamma T n / T} = A_0 e^{-dn}$, где $n = t/T$ - число колебаний за время t .

Если $n = 1/d$, то $A_0/A_n = e = 2.7318$. Если значение d невелико ($d \ll 1$), то можно показать, что $(A_n - A_{n+1})/A_n = d$. Логарифмический декремент связан с другой важной характеристикой колебаний - *добротностью* Q следующим соотношением: $Q = \pi/d = \pi/\gamma T$.

Полная энергия колебаний W складывается из *кинетической* W_K и *потенциальной* W_P энергий: $W = W_K + W_P = m\dot{x}^2/2 + m\omega^2 x^2/2$.

Подсчитаем полную механическую энергию E гармонического осциллятора, совершающего колебания по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi)$.

$W_K = m\dot{x}^2/2 = (mA^2\omega_0^2/2)\sin^2(\omega t + \varphi)$, $W_P = m\omega_0^2 x^2/2 = (mA^2\omega_0^2/2)\cos^2(\omega t + \varphi)$. Следовательно

$W = mA^2\omega_0^2/2$. Из закона сохранения энергии следует, что по мере совершения колебаний кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот. Максимальные значения кинетической и потенциальной энергий равняются максимальному значению полной механической энергии. При наличии трения в системе полная механическая энергия системы с течением времени уменьшается, но ее мгновенное значение, по-прежнему, равняется максимальной потенциальной энергии, относящейся к данному моменту времени. Следовательно, для затухающих колебаний, подчиняющихся закону $x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$, будет справедливо выражение: $W = mA^2(t)/2 = mA_0^2\omega_0^2 e^{-2\gamma t}/2$.

• *Точечное отображение для гармонического осциллятора.*

Рассмотрим

гармонический осциллятор

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{упомянутый}$$

выше с более простыми

начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0 = 0. \quad \text{Решение}$$

этого уравнения имеет вид:

$$x = e^{-\gamma t} (x_0 \cos \omega t + \gamma x_0 \omega^{-1} \sin \omega t),$$

$$v = -e^{-\lambda t} (\omega + \gamma^2 \omega^{-1}) x_0 \sin \omega t. \quad \text{Будем}$$

следить, для определенности, за

последовательными

пересечениями фазовой

траектории оси абсцисс. В

момент пересечения $\sin \omega t = 0$,

т.е. пересечения происходят в

моменты времени $t_n = \pi n / \omega$. В

эти моменты координата точки пересечения оси абсцисс фазовой траекторией

равна $x_n = x(t_n) = (-1)^n x_0 \exp(-\pi n \gamma / \omega)$, или, в рекуррентной форме

$$x_{n+1} = -\exp(-\pi \gamma / \omega) x_n = \rho x_n.$$

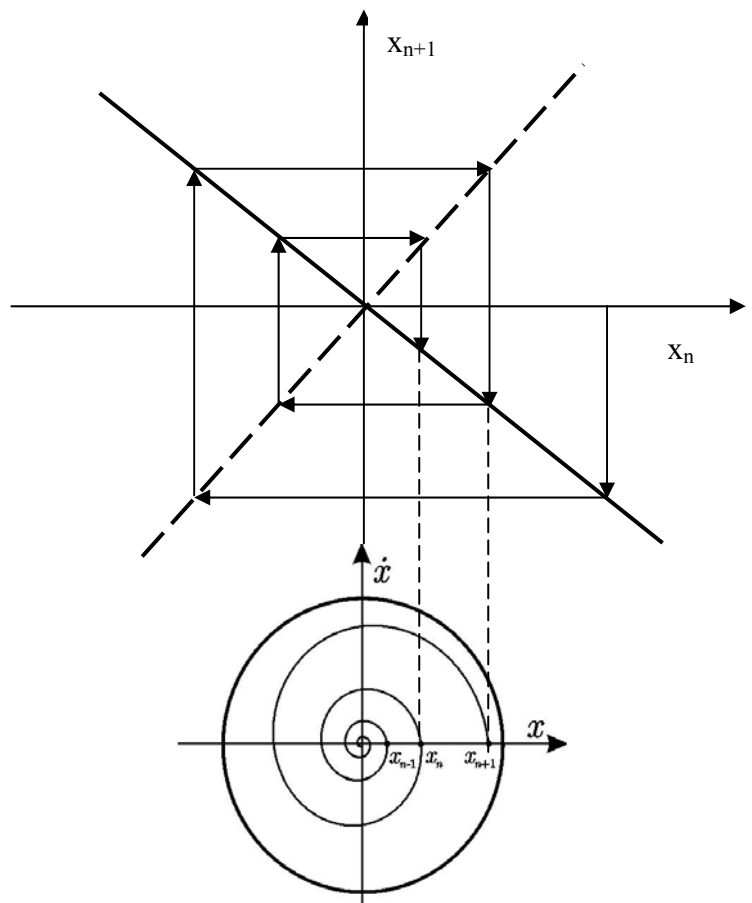


Рис. 2.2.2 Диаграмма Ламерея для гармонического осциллятора

(2.2.6)

Построим данную последовательность на плоскости (x_{n+1}, x_n) .

Методика построения следующая.

1. Выберем на оси x_n начальную точку x_1 при $n = 1$. Соответствующую ей точку x_2 найдем, используя (2.2.6).

2. Для нахождения следующей точки, превратим ординату x_2 в абсциссу x_2 , переходя на биссектрису $x_{n+1} = x_n$. Такому переходу соответствует придание точке x_2 статуса начального условия для второго шага. Новой абсциссе соответствует ордината x_3 , определяемая прямой (2.2.6).

3. Многократно повторяя это построение, получаем ломаную, называемую *лестницей Ламерея*, рис.2.2.2.

Эта последовательность в силу условия $|dx_{n+1}/dx_n| < 1$ сходится к предельной точке $x^* = 0$, определяемой из условия $x^* = f(x^*)$. Ее называют *неподвижной точкой отображения*. Видно, что данная последовательность соответствует периодически повторяющемуся процессу.

2.3 Нелинейные консервативные системы с 1 –й степенью свободы.

Примеры колебательных систем

В этом разделе рассмотрены нелинейные колебания в некоторых консервативных системах второго порядка. В отличие от линейных систем, для нелинейных не существует общих методов решения уравнений, в силу чего консервативные системы 2-го порядка представляют собой исключение, когда задача может быть решена до конца без использования приближенных методов.

Приведем примеры процессов, приводящих к уравнениям нелинейных консервативных колебаний.

Пример 1. Математический маятник. Рассмотрим уравнение (2.1.2): $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \Omega, \dot{\Omega} = -\omega_0^2 \sin \varphi$. Относительное изменение фазового объема системы равно нулю $\Gamma^{-1}\dot{\Gamma} = (d\dot{\varphi}/d\varphi + d\dot{\Omega}/d\Omega)/d\varphi d\Omega = 0 + 0 = 0$, поэтому система консервативна. Приведенное уравнение решается точно. Методика решения такова. Умножим уравнение на $\dot{\varphi}$: $\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi \dot{\varphi} = 0 \Leftrightarrow ((\dot{\varphi})^2)' - \omega_0^2 (\cos \varphi)' = 0$. Интегрируя последнее уравнение, получаем уравнение фазовых траекторий

$$(\dot{\varphi})^2 / 2 = \omega_0^2 \cos \varphi - \omega_0^2 \cos \varphi_0, \quad (2.3.1)$$

где константа интегрирования в правой части выбрана в удобной для дальнейшего анализа форме. Константа φ_0 имеет смысл максимального отклонения маятника от положения равновесия, где $\dot{\varphi} = 0$. Перепишем последнее уравнение в виде $(\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{-1/2} d\varphi = 2^{1/2} \omega_0 dt$ и проинтегрируем его еще раз. В результате

$$2^{-1/2} \int_0^{\varphi} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)^{-1/2} d\varphi = \omega_0 (t - t_0) \Leftrightarrow \int_0^{\varphi} (\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2))^{-1/2} d\varphi = 2\omega_0 (t - t_0),$$

причем $\varphi(t_0) = 0$. Константы φ_0 и t_0 могут быть выражены через начальные условия, но в данном случае использование начальных условий менее удобно. После замены переменных $\sin(\varphi/2) = x \sin(\varphi_0/2)$ получаем

$$\omega_0 (t - t_0) = \int_0^u \left[(1 - x^2)(1 - q^2 x^2) \right]^{-1/2} dx, \text{ где } \sin \frac{\varphi}{2} = x \sin(\varphi_0/2), \text{ } u = \sin(\varphi/2) \sin^{-1}(\varphi_0/2).$$

Обращение последнего интеграла приводит к решению, которое может быть выражено через эллиптический синус, [III.24,25]

$$\sin \varphi / \sin \varphi_0 = \operatorname{sn}[\omega_0 (t - t_0), \sin(\varphi_0/2)]. \quad (2.3.2)$$

Пример 2. Модель Лотки – Вольтерра. Снова рассмотрим модель Лотки-Вольтерра (2.1.12). Эта система, очевидно, путем замены переменной также может быть сведена к одному уравнению $\ddot{n} - n^{-1}(\dot{n})^2 = (a - bn)(\dot{n} + An)$, однако поиск его аналитического решения, в отличие от предыдущей задачи, несравнимо сложнее. Удобнее исследовать структуру его решения на фазовой плоскости. Анализ дает следующее:

I. У системы существует единственная особая точка $(b/a, B/A)$.

II. Уравнение для отклонений численности видов от положений

равновесия, получаем, линеаризуя исходную систему $\dot{N}' = -ABn'/b$, $\dot{n}' = abN'/b$.

III. Отсюда нетрудно получить характеристическое уравнение, разыскивая

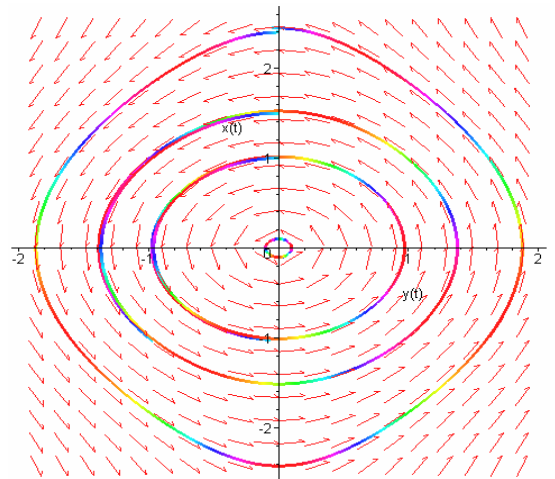


Рис.2.3.1

решение данной системы в виде $N' = C \exp(\lambda t)$, $n' = D \exp(\lambda t)$. В результате получим $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, где $\omega^2 = Aa$.

IV. Корни этого уравнения имеют вид: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, т.е. эта точка - центр.

Следовательно, численность каждого вида описывается уравнениями гармонических колебаний вида $\{n; N\} = \{n_0; N_0\} + \{n'; N'\} \sin(\omega t + \delta)$, которое описывает устойчивый колебательный процесс, существующий бесконечно долго. Это означает, что исчезновение одного из видов невозможно, об этом же говорит и фазовый портрет системы, уравнение которого можно получить, вводя обозначения, например, $n = x$, $y = dx/dt$. Тогда учитывая, что $dy/dt = \omega^2 x$, можно получить $dy/dx = -y/\omega^2 x$. Проводя интегрирование и вводя обозначение $k^2 = 2c$, где c - постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями, получим уравнение эллипса $y^2/k^2 + x^2/(k^2/\omega^2) = 1$ с полуосями k и k/ω . Таким образом особая точка системы также центр. Замкнутыми являются и фазовые траектории вдали от особой точки.

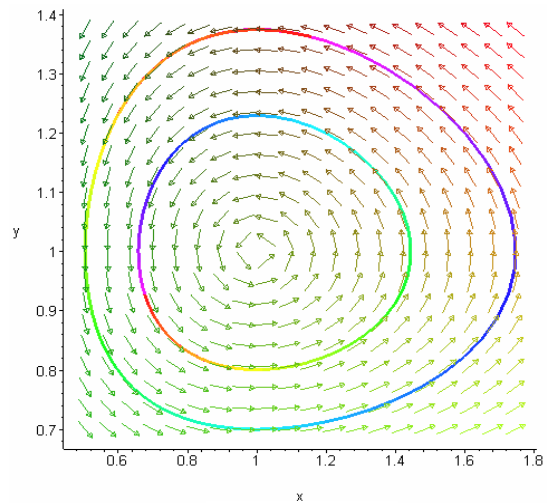


Рис.2.3.4

• *Спектр колебаний.*

Нелинейные колебания имеют еще одну важную характеристику – *спектр колебаний*. Известно, что периодическую функцию $F(t)$ можно разложить в ряд по гармоническим компонентам - синусам, косинусам или экспонентам, *ряд Фурье* [III.19-21], который имеет вид

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t / T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n t / T) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(2\pi n t / T + \chi_n), \quad (2.3.3)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \langle F(t) \rangle, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

$\sin \chi_n = -b_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\cos \chi_n = a_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. В ситуации, когда колебательный процесс

представляет собой суперпозицию отдельных гармонических сигналов, для характеристики такого процесса удобно использовать такую его характеристику, как *спектр колебаний*. При графическом отображении спектра колебаний по оси абсцисс указывают частоты колебаний ω_n или их номера n , а по оси ординат указывают квадраты их амплитуд a_n^2 . На рис.2.3.2 показан сигнал, представляющийся рядом

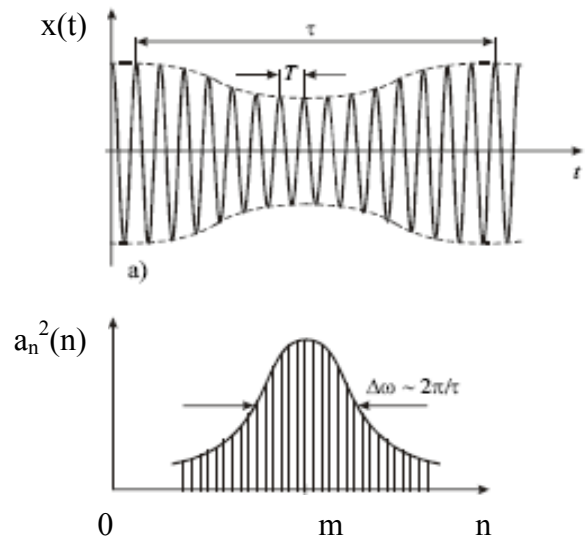


Рис. 2.3.2

(2.3.3), группирующийся вокруг частоты с номером m и его спектр. Спектр позволяет видеть, какая часть энергии сосредоточена в гармонике.

2.4 Итерационные методы анализа колебательных систем

Здесь демонстрируются основные принципы и детали применения приближенных методов анализа нелинейных колебательных систем – разложения по малому параметру. Необходимость их развития обусловлена двумя факторами – точное решение уравнений колебательного процесса часто записывается в сложном виде, а метод фазовой плоскости дает лишь основные представления об основных чертах процесса, но не дает решения.

2.4.1 Метод разложения по малому параметру

Как мы видели выше, анализ даже консервативных систем часто сопряжен с существенными техническими сложностями, уже там решение записывается только в неявном виде с использованием специальных функций. Поэтому часто для анализа нелинейных колебательных процессов приходится применять или *качественные методы* или (и) *методы теории возмущений*.

Рассмотрим осциллятор вида [I.1,14,II.3]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0. \quad (2.4.1)$$

Введем безразмерные время и координату $t = \omega_0 t$, $x = x/A$. Уравнение (2.4.1) примет вид

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 = 0 \quad (2.4.2)$$

где $\varepsilon = \alpha A / \omega_0^2$. Рассмотрим случай *слабой нелинейности*, когда $\varepsilon \ll 1$, т.е. уравнение (2.4.2) содержит *малый параметр*. Уравнение (2.4.2) близко к уравнению линейного консервативного осциллятора, оно отличается от него малым слагаемым порядка ε . Поэтому ясно, что при $\varepsilon \ll 1$ решение будет иметь вид квазигармонических колебаний (близких к гармоническим).

Построим приближенное решение (2.4.2). Наиболее простой способ состоит в том, чтобы искать решение в виде ряда по степеням $\varepsilon \ll 1$:

$$x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots \quad (2.4.3)$$

считая x_1 величинами порядка единицы - подобный прием называют методом *разложения по малому параметру*. Подставив (2.4.3) в (2.4.2), получим

$$\ddot{x}_1 + \varepsilon \ddot{x}_2 + \varepsilon^2 \ddot{x}_3 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots + \varepsilon x_1^2 + 2\varepsilon^2 x_1 x_2 + \dots = 0 \quad (2.4.4)$$

Приравнявая в (2.4.4) к нулю члены при одинаковых степенях ε , приходим к системе «зацепляющихся» уравнений:

$$\varepsilon^0: \ddot{x}_1 + x_1 = 0; \quad \varepsilon^1: \ddot{x}_2 + x_2 + x_1^2 = 0; \quad \varepsilon^2: \ddot{x}_3 + x_3 + 2x_1 x_2 = 0; \dots$$

Первое уравнение есть уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид $x = a \cos(t + \varphi)$, где амплитуда a и начальная фаза φ - постоянные, определяемые из начальных условий. Подставим это решение во второе уравнение, чтобы найти x_2 : $\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^2 = -a^2/2 - (a^2/2) \cos 2(t + \varphi)$. Это уравнение формально совпадает с уравнением линейного консервативного осциллятора под внешним воздействием. Его решение следует искать в виде $x_2 = a_1 \cos(t + \varphi_1) + x_{2\text{чн}}$. a_1 и φ_1 по-прежнему определяются из начальных условий. Как известно из теории линейных колебаний, в спектре вынужденных колебаний будут содержаться те частоты, которые присутствуют в спектре вынуждающей силы. В данном случае это нулевая и вторая гармоники. Нетрудно найти, что $x_{2\text{чн}} = -a^2/2 + (a^2/6) \cos 2(t + \varphi)$. Итак, получаем $x_2 = a_1 \cos(t + \varphi) - a^2/2 + (a^2/6) \cos 2(t + \varphi)$. Полученное решение содержит 4-е независимых постоянных, для определения которых имеются только 2-а начальных условия. Поэтому можно две из этих постоянных выбрать

произвольным образом. Наиболее удобно положить $a_1 = 0$ (константы произвольные и будет множитель при $\cos(t+\varphi_1)$ иметь вид a или $a + a_1$, безразлично). В дальнейшем условимся во всех высших порядках малости занулять составляющие, соответствующие собственным колебаниям. Таким образом, окончательный вид решения с точностью до членов порядка ε^2 таков:

$$x_2 \approx a \cos(t + \varphi) + \left(-a^2 / 2 + (a^2 / 6) \cos 2(t + \varphi)\right) + \dots \quad (2.4.5)$$

Как видно из выражения (2.4.5), в спектре колебаний появляются высшие гармоники: нулевая и вторая, амплитуды которых имеют порядок εa^2 , т.е. много меньше амплитуды основной составляющей. Можно продолжить описанную процедуру, продвигаясь во все более высокие порядки малости. В решении появятся высшие гармоники. Однако их амплитуды будут еще меньше (порядка $\varepsilon^{n-1} a^n$, где n - номер гармоники), поскольку нелинейность является слабой и амплитуды высших гармоник должны быстро уменьшаться с ростом их номера.

Остается вычислить константы a и φ . Пусть начальные условия имеют вид $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$. Тогда, используя выражение (2.4.5), легко найти, что

$$x_0 = a \cos \varphi - \varepsilon \left(a^2 / 2 - (a^2 / 6) \cos 2\varphi\right), \quad -y_0 = a \sin \varphi - (\varepsilon a^2 / 3) \sin 2\varphi. \quad (2.4.6)$$

Это система трансцендентных уравнений, получить точное решение которой в общем случае не удастся. Однако, учитывая, что в (2.4.6) содержится малый параметр, можно представить решение в виде рядов

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \dots, \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \dots \quad (2.4.7)$$

В разложениях (2.4.7) нужно учитывать то же число членов, что и в решении (2.4.5). Подставим (2.4.7) в систему (2.4.6) и выделим члены одинаковых порядков малости. В нулевом порядке по ε будем иметь: $a_0 \cos \varphi_0 = x_0$, $a_0 \sin \varphi_0 = -y_0$, откуда нетрудно найти амплитуду и начальную фазу нулевого порядка

$$a_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \varphi_0 = -2 \arctg(y_0 / (x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})).$$

Члены порядка ε^1 в (2.4.6) дают систему линейных уравнений относительно a_1 , φ_1 , найти решение которой не представляет труда

$$a_1 \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_1 \sin \varphi_0 - a_0^2 / 2 + (a_0^2 / 6) \cos 2\varphi_0 = 0, \quad a_1 \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_1 \cos \varphi_0 + (a_0^2 / 3) \sin 2\varphi_0 = 0.$$

2.4.2 Осциллятор Дуффинга. Метод Лиништедта – Пуанкаре

Прямое разложение по степеням малого параметра не всегда приводит к успеху. Дело в том, что на каждом шаге слагаемые предыдущего порядка малости переходят в правую часть и начинают играть роль внешней силы. При этом может возникнуть ситуация, при которой нем внешнее воздействие будет иметь частоту, равную частоте собственных колебаний осциллятора. Решение полученного уравнения будет нарастать, и их амплитуда может стать большей, чем допустимо соответствующим порядком теории возмущений. В силу сказанного, в данном случае надо модифицировать метод разложения по малому параметру так, чтобы исключить соответствующие слагаемые. Чтобы показать, как это делается, рассмотрим осциллятор Дуффинга [I.1,14,II.3]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0. \quad (2.4.8)$$

Используем замену переменных раздела 2.4.1. Тогда (2.4.8) примет вид

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad (2.4.9)$$

где теперь $\varepsilon = \beta A / \omega_0^2$. Будем снова рассматривать случай слабой нелинейности, т.е. положим $\varepsilon \ll 1$. Отыскивая решение в виде разложения по малому параметру $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$, будем иметь ε^0 : $\ddot{x}_1 + x_1 = 0$; ε^1 : $\ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0$. В нулевом порядке по ε по-прежнему получаем уравнение гармонического осциллятора, решение которого имеет вид $x_1 = a \cos(t + \varphi)$.

Найдем x_2 . После подстановки выражения для x_1 второе уравнение приводится к виду

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -x_1^3 = -a^3 \cos^3(t + \varphi) = -a^3 [3 \cos(t + \varphi) + \cos 3(t + \varphi)] / 4 \quad (2.4.10)$$

Найдем решение (2.4.10). Т.к. нелинейность кубичная, то в спектре воздействия содержатся первая и третья гармоники. Решение будем искать в виде суммы откликов на них: $x_2 = x_{21} + x_{23}$, удовлетворяющих уравнениям

$$\ddot{x}_{21} + x_{21} = (3a^3 / 4) \cos(t + \varphi), \quad \ddot{x}_{23} + x_{23} = (a^3 / 4) \cos 3(t + \varphi). \quad (2.4.11)$$

Решение второго уравнения системы (2.4.11) находится без труда и имеет вид гармонических колебаний на частоте вынуждающей силы: $x_{23} = (a^3 / 32) \cos 3(t + \varphi)$.

Но, что же касается первого уравнения системы (2.4.11), то в нем внешнее

воздействие имеет частоту, равную!!! частоте собственных колебаний осциллятора. Как известно из теории линейных колебаний, в этом случае возникает резонанс, выражающийся в неограниченном нарастании амплитуды колебаний по линейному закону. Соответствующее решение имеет вид

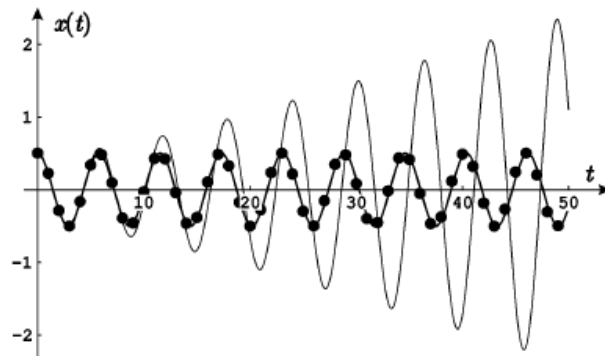


Рис.2.4.1 Решения уравнения (2.4..9). Жирная линия – точное решение, тонкие линии – метод итераций, кружки – метод Линштедта – Пуанкаре

$x_{21} = -(3a^3t/8)\cos(t + \varphi)$. Это так называемый *секулярный* или *вековой* член.

Окончательный вид решения с точностью до членов второго порядка малости:

$$x_{21} = a \cos(t + \varphi) + \varepsilon \left[-(3a^3t/8)\cos(t + \varphi) + (a^3/32)\cos 3(t + \varphi) \right] + \dots \quad x = \frac{a^3}{32} \cos 3(t + \varphi) \quad (2.4.12)$$

Обратим внимание, что, как бы ни был мал параметр ε , с течением времени второй член в решении (2.4.12), неограниченно нарастая, становится больше первого. Таким образом, справедливость разложения по степеням ε на больших временах нарушается. В чем причина неудачного результата? Дело в том, что колебания осциллятора Дуффинга являются *неизохронными*, т.е. их период зависит от амплитуды. Разложение по степеням ε принципиально не учитывает неизохронность: в спектре колебаний могут появиться только собственная частота линейных колебаний и её гармоники (отметим, что для осциллятора с квадратичной нелинейностью, рассмотренного в разделе 2.4.1, мы пришли бы к сходному результату, если бы продвинулись в вычислениях ещё на порядок).

Итак, необходимо модифицировать схему решения таким образом, чтобы можно было учесть неизохронность. Введем в уравнении (2.4.8) новую переменную $\tau = \omega t$. Поскольку $d/dt = \omega d/d\tau$, получим

$$\omega^2 \ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (2.4.13)$$

Схема действий такова – мы будем искать решение уравнения (2.4.13) в виде разложений в степенной ряд как для переменной x , так и для частоты ω : $x = x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \dots$, $\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$. Первый член в разложении для ω при этом представляет собой частоту линейных колебаний, которая в принятой нормировке равна единице. А следующие поправки $\omega_1, \omega_2, \dots$ будут играть двойную роль - описывать эффекты неизохронности и выбираться так, чтобы обнулить секулярные члены, позволяя избавиться от растущих слагаемых.

Подставим эти разложения в уравнение (2.4.13). Получим

$$(1 + 2\varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2(\omega_1^2 + 2\omega_2) + \dots)(\ddot{x}_1 + \varepsilon\ddot{x}_2 + \dots) + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + \dots = 0 \quad (2.4.14)$$

После несложных вычислений (2.1.14) приводится к виду

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \varepsilon(\ddot{x}_2 + x_2 + 2\omega_1 \ddot{x}_1 + x_1^3) + \dots = 0 \quad (2.4.15)$$

Приравнявая к нулю члены нулевого и первого порядков малости, будем иметь

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + x_2 = -2\omega_1 \ddot{x}_1 - x_1^3 \quad (2.4.16)$$

Решение первого уравнения системы (2.4.16) запишем в виде $x_1 = a \cos(\tau + \varphi) = a \cos(\omega t + \varphi)$. Подставив это соотношение в правую часть второго уравнения системы (2.4.16), найдем, что

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2\omega_1 a \cos(\tau + \varphi) - a^3 (3 \cos(\tau + \varphi) + \cos 3(\tau + \varphi)) / 4 \quad (2.4.17)$$

Теперь необходимо выбрать ω_1 таким образом, чтобы устранить члены, пропорциональные $\cos(\tau + \varphi)$, которые приводят к секулярному росту решения для x_2 . Для этого, очевидно, следует положить $\omega_1 = 3a^3 / 8$. Теперь уравнение (2.4.17) принимает вид $\ddot{x}_2 + x_2 = -(a^3 / 4) \cos 3(\tau + \varphi)$. Его решение $x_2 = (a^3 / 32) \cos 3(\tau + \varphi)$ не содержит секулярных составляющих и разложение остается равномерно пригодным при всех t . Окончательный вид найденного решения с точностью до членов $\sim \varepsilon^1$:

$$x \approx a \cos(\omega t + \varphi) + (\varepsilon a^3 / 32) \cos 3(\omega t + \varphi), \quad \omega \approx 1 + 3\varepsilon a^2 / 8 \quad (2.4.18)$$

Если параметр ε считается положительным, то частота колебаний растет с ростом амплитуды, при $\varepsilon < 0$ частота, наоборот, уменьшается.

3. Нелинейные диссипативные системы с 1 –й степенью свободы

Здесь рассмотрены нелинейные колебания в некоторых диссипативных системах второго порядка [1.1,2,14]. Эффективными способами анализа х систем, является метод фазовой плоскости и методы теории возмущений.

3.1 Метод многих масштабов

В реальных системах часто существует целый набор характерных времен задачи, связанных со скоростями протекания тех или иных процессов, часто сильно отличающихся друг от друга. В таких случаях кажется естественным выделить соответствующие временные масштабы задачи и проводить анализ поведения системы на соответствующем масштабе отдельно, таким образом, определяя вклад отдельного процесса в динамику системы.

Продemonстрируем данную методику на примере модели Дуффинга с учетом диссипативных процессов. Приближенное решение (2.4.18), полученное при помощи метода Линштедта - Пуанкаре, можно представить в виде

$$x = a \cos(t + 3a^2 \varepsilon t / 8 + \varphi) + (\varepsilon a^3 / 32) \cos(3t + 9a^2 \varepsilon t / 8 + 3\varphi) \quad (3.1.1)$$

Зависимость от времени входит в это выражение двояким образом: $x = x(t, \varepsilon t)$. Поскольку ε является малым параметром, зависимость от εt можно интерпретировать как медленное изменение параметров колебания. Продолжая разложение до более высоких порядков малости, мы придем к представлению решения в виде $x = x(t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \varepsilon^3 t)$. Введем обозначения $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$

Зависимость от очередного аргумента T_n характеризует изменения, которые проявляются на последовательно возрастающих масштабах времени.

Идея перехода от единственного времени t к набору переменных T_n лежит в основе *метода многих масштабов*, позволяющего получать решения широкого класса задач теории колебаний. Это связано с тем, что в конкретных системах часто существует целый набор характерных времен, связанных со скоростями протекания тех или иных процессов.

Продemonстрируем его применение на примере уравнения Дуффинга. Для большей общности включим в него слабое затухание

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (3.1.2)$$

Здесь γ считается величиной порядка единицы. Отметим, что *метод Линштедта - Пуанкаре неприменим в случае, когда учитывается затухание*, так как в нем изначально предполагается, что амплитуда и частота колебаний являются постоянными, и эффекты уменьшения амплитуды описать не удастся. При переходе к новым переменным T_n операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots = \hat{D}_0 + \varepsilon \hat{D}_1 + \varepsilon^2 \hat{D}_2 + \dots, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \hat{D}_0^2 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 + \varepsilon^2 (\hat{D}_1^2 + 2\hat{D}_1 \hat{D}_2) + \dots \quad (3.1.3)$$

Решение для переменной x по-прежнему будем искать в виде степенного ряда $x(t) = x_1(t) + \varepsilon x_2(t) + \varepsilon^2 x_3(t) + \dots$. Подставляя это разложение и разложение (3.1.3) в уравнение (3.1.2), получим

$$\hat{D}_0^2 x_1 + 2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 + \dots + \varepsilon \hat{D}_0^2 x_2 + \dots + 2\varepsilon \gamma \hat{D}_0 x_1 + \dots + x_1 + \varepsilon x_2 + \dots + \varepsilon x_1^3 + 3\varepsilon^2 x_1^2 x_2 = 0. \quad (3.1.4)$$

Приравняв к нулю члены порядка ε^0 и ε^1 , приходим к следующим уравнениям

$$\hat{D}_0^2 x_1 + x_1 = 0, \quad \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -2\varepsilon \hat{D}_0 \hat{D}_1 x_1 - 2\gamma \hat{D}_0 x_1 - x_1^3. \quad (3.1.5)$$

Решение первого уравнения системы (3.1.5) по-прежнему запишем в виде $x_1 = \cos(T_0 + \varphi)$, но теперь будем считать a и φ не постоянными, а функциями, зависящими от медленных переменных: $a = a(T_1, T_2, \dots)$, $\varphi = \varphi(T_1, T_2, \dots)$. Действительно, уравнение (3.1.2) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ переходит в уравнение гармонического осциллятора, потому что решение в порядке ε^0 - квазигармоническое колебание с медленно меняющейся амплитудой и фазой.

Подставим решение $x_1 = \cos(T_0 + \varphi)$ в правую часть второго уравнения системы (3.1.5). Учтем, что оператор $\hat{D}_0$ действует только на аргумент T_0 , а оператор $\hat{D}_1$ на медленно меняющиеся переменные a, φ . Получим

$$\begin{aligned} \hat{D}_0^2 x_2 + x_2 &= 2(\hat{D}_1 a \sin(T_0 + \varphi) + a \hat{D}_1 \varphi \cos(T_0 + \varphi)) + 2\gamma a \sin(T_0 + \varphi) - a^3 \cos^3(T_0 + \varphi) = \\ &= 2(\hat{D}_1 a + \gamma a) \sin(T_0 + \varphi) + (2a \hat{D}_1 \varphi - 3a^3/4) \cos(T_0 + \varphi) - (a^3/4) \cos 3(T_0 + \varphi) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

В правой части уравнения (3.1.6) следует приравнять к нулю секулярные члены, пропорциональные $\cos(T_0 + \varphi)$, $\sin(T_0 + \varphi)$. Это приводит к уравнениям

$$\hat{D}_1 a + \gamma a = 0, \quad \hat{D}_1 \varphi - 3a^2/8 = 0 \quad (3.1.7)$$

Таким образом, мы получили *укороченные* дифференциальные уравнения, которые описывают динамику медленно меняющихся переменных $a(T_1)$, $\varphi(T_1)$.

В случае консервативного осциллятора ($\gamma = 0$) уравнения (3.1.7) приводят к результату, в точности совпадающему с методом Линштедта - Пуанкаре $a = a_0$, $\varphi = 3a_0^2 T_1 / 8 + \varphi_0$, где a_0 , φ_0 - постоянные, определяемые из начальных условий. Величина $\hat{D}_1 \varphi$ - поправка к частоте, появляющаяся из-за нелинейных эффектов. Для нее мы получаем значение $3a^3 / 8$.

При $\gamma > 0$ найти решение укороченных уравнений не составляет труда:

$$a = a_0 e^{-\gamma T_1}, \quad \varphi = \varphi_0 + 3a_0^2 (1 - e^{-2\gamma T_1}) / 16\gamma. \quad (3.1.8)$$

Эти соотношения описывают экспоненциальное затухание амплитуды; при этом поправка к частоте также уменьшается. После исключения секулярных членов уравнение (3.1.6) принимает вид $\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -(a^3 / 4) \cos 3(T_0 + \varphi)$. Оно, очевидно, совпадает с уравнением, которое анализировалось в предыдущем разделе. Поэтому сразу запишем окончательный вид решения:

$$x \approx a(T_1) \cos(T_0 + \varphi(T_1)) + (\varepsilon a^3(T_1) / 32) \cos 3(T_0 + \varphi(T_1)), \quad (3.1.9)$$

Зависимость амплитуды и фазы от медленного времени дается соотношениями (3.1.8). При использовании метода многих масштабов более удобно оперировать комплексной формой записи. Представим решение для x_1 в виде $x_1 = A(T_1) e^{iT_0} + \text{к.с.}$, тогда уравнение (3.1.6) примет вид

$$\hat{D}_0^2 x_2 + x_2 = -((2i\hat{D}_1 A + 2i\gamma A) e^{iT_0} + \text{к.с.}) - (A e^{iT_0} + \text{к.с.})^3 = -((2i\hat{D}_1 A + 2i\gamma A) e^{iT_0} - A^3 e^{3iT_0} 3A^2 A^* + \text{к.с.}). \quad (3.1.10)$$

В правой части (3.1.10) следует потребовать уничтожения секулярных членов, пропорциональных e^{iT_0} . Это приводит к комплексному уравнению

$$\hat{D}_1 A + \gamma A - 3i|A|^2 A / 2 = 0. \quad (3.1.11)$$

Вводя вещественные амплитуду и фазу $A = 0.5a e^{i\varphi}$ и разделяя вещественную и мнимую части, снова приходим к уравнениям (3.1.9).

3.2 Автоколебания. Метод ван дер Поля. Генератор ван дер Поля

Здесь изложен еще один метод анализа нелинейных колебаний, применяемый в ситуациях, когда наибольшими слагаемыми в модели являются

слагаемые линейного консервативного осциллятора, а все остальные члены много меньше их. При этом, как известно из теории ОДУ, можно считать, что наличие этих слагаемых приводит к наличию медленной зависимости амплитуды колебаний от времени – *метод вариации произвольных постоянных*. Адаптация метода вариации произвольных постоянных к решению задач теории колебаний обычно называют *методом ван дер Поля*.

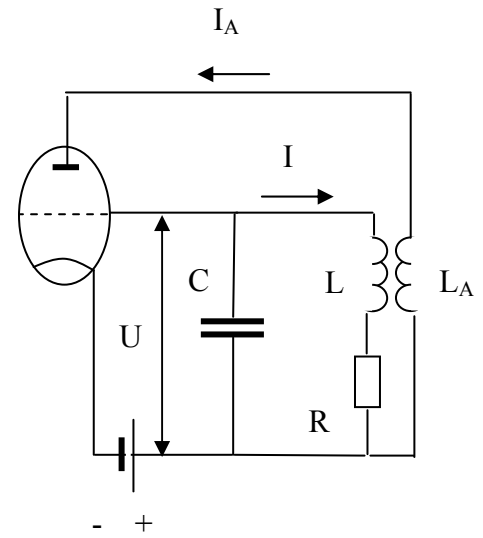


Рис.3.2.1

Для формулировки математической модели, описывающей процессы в схеме, показанной на рисунке, составим уравнения, описывающие изменение напряжения на конденсаторе C в RLC – контуре в сети сетки лампы. Аналогичное устройство может быть устроено на базе транзистора, [1.1,2]. При увеличении анодного тока I_A и соответствующем росте магнитного потока через катушку L_A возникает явление взаимной индукции катушек L и L_A , в силу чего в катушке L индуцируется ток I , направленный по правилу Ленца так, что конденсатор C заряжается и напряжение на сетке U возрастает. Тогда для RLC – контура в силу закона Ома для замкнутой цепи получаем равенство суммы падений напряжения на резисторе и конденсаторе (левая часть) сумме э.д.с. самоиндукции и взаимной индукции (правая часть), действующих в контуре

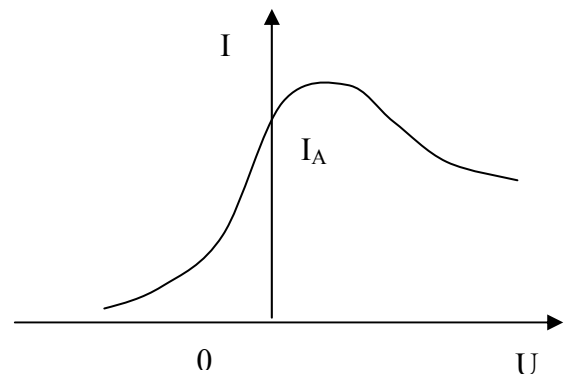


Рис.3.2.2

конденсатор C заряжается и напряжение на сетке U возрастает. Тогда для RLC – контура в силу закона Ома для замкнутой цепи получаем равенство суммы падений напряжения на резисторе и конденсаторе (левая часть) сумме э.д.с. самоиндукции и взаимной индукции (правая часть), действующих в контуре

$$RI + U = -L\dot{I} + M\dot{I}_A, \quad (3.2.1)$$

где M – коэффициент взаимной индукции, причем знак при соответствующем слагаемом соответствует положительности э.д.с. взаимной индукции при росте анодного тока I_A . Оно должно быть дополнено выражениями для тока и напряжения на конденсаторе $I = \dot{q}$, $U = q/C \Rightarrow I = C\dot{U}$ и выражением для

сеточной характеристики лампы $I_A = I_A(U)$. Подставляя эти выражения в (3.2.1), приходим к уравнению [1.1,2,5,9] $LC\ddot{U} + RC\dot{U} + U = M\dot{I}_A \Leftrightarrow LC\ddot{U} + (RC - MdI_A/dU)\dot{U} + U = 0$. В соответствии с определением сеточной характеристики $S(U) = dI_A/dU$ последнее уравнение переписывается в виде

$$LC\ddot{U} + [RC - MS(U)]\dot{U} + U = 0. \quad (3.2.2)$$

Очевидно, триод наиболее чувствителен к изменениям потенциала сетки в области максимальной крутизны сеточной характеристики. Для упрощения, без потери общности будем считать, что соответствующее рабочее напряжения $U_0 = 0$, чему соответствует анодный ток I_{A0} (точка перегиба на сеточной характеристике). Тогда в окрестности рабочей точки функция $S(U)$ может быть

$$\text{разложена в ряд Тейлора } S = S_0 + \left. \frac{dS}{dU} \right|_{U=U_0} U + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2S}{dU^2} \right|_{U=U_0} U^2 = S_0 - S_2 U^2.$$

Отметим важный факт – в силу условий $M > 0$, $S_0 > 0$ при малых отклонениях от U_0 имеет место следующая цепочка связей: $\uparrow U \Rightarrow \uparrow I_A \Rightarrow \uparrow M\dot{I}_A \Rightarrow \uparrow \dot{I} \Rightarrow \uparrow U$ и т. д., т.е. наблюдается *положительная обратная связь* между возмущениями параметров лампы и контура – малые возмущения нарастают. После подстановки выражения для сеточной характеристики в (3.2.2) получим $LC\ddot{U} + [RC - MS_0 + MS_2 U^2]\dot{U} + U = 0$. Вводя переменные $\alpha = (MS_0 - RC)/LC$, $\omega_0^2 = 1/LC$, $\beta = 2MS_2/(RC - MS_0)$, получим уравнение

$$\ddot{U} - \alpha[1 - \beta U^2]\dot{U} + \omega_0^2 U = 0. \quad (3.2.3)$$

Вводя далее безразмерные переменные $x = \beta^{1/2} U$, $2\gamma = \alpha/\omega_0$, $t = \omega_0 t$, получаем уравнение ван дер Поля

$$\ddot{x} - 2\gamma[1 - x^2]\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.2.4)$$

Фазовый портрет уравнения (3.2.4) при $\gamma = -0.4$, $\omega_0^2 = 8$ и $\gamma = 0.4$, $\omega_0^2 = 8$ соответственно приведен на рис. 3.2.3. Здесь наблюдается явление *бифуркации* – качественное изменение характера поведения нелинейной системы при изменении внешних параметров. В данном случае при $\gamma < 0$ начальное возмущение затухает, а при $\gamma \geq 0$ ($MS_0 > RC$) любое возмущение асимптотически стремится к аттрактору размерности $d = 2$ –

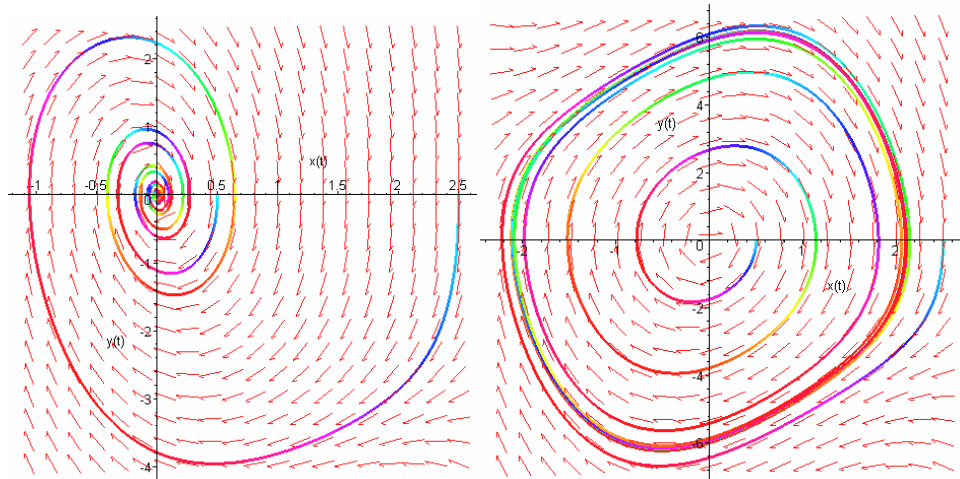


Рис.3.2.3. Фазовый портрет уравнения (3.2.4).

предельному циклу, описывающему периодическое решение.

Аналитическое описание явления автоколебаний может быть проведено только при условии $\gamma \ll 1$, когда можно воспользоваться методом ван дер Поля. Для этого перепишем уравнение (3.2.4) в виде $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\gamma[1 - x^2]\dot{x}$, выделив, как всегда, малые слагаемые в правую часть. Будем искать решения этого уравнения, как и ранее, в виде $x = A(\varepsilon t)\cos(\omega_0 t + \varphi(\varepsilon t))$, пренебрегая в дальнейшем слагаемыми $\sim \varepsilon^2$ и выше. В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} & \ddot{A}\cos(\omega_0 t + \varphi) - 2\dot{A}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{2\dot{A}\dot{\varphi}\sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} - 2A\omega_0\dot{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ & - \underline{A\ddot{\varphi}\sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\dot{\varphi}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} + \underline{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \\ & = 2\gamma[1 - A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]\underline{\dot{A}\cos(\omega_0 t + \varphi)} - A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{A\dot{\varphi}\sin(\omega_0 t + \varphi)} \end{aligned}$$

Слагаемые, подчеркнутые двумя чертами, являются слагаемыми основного приближения и всегда взаимно сокращаются в силу решения исходного приближения. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, в силу медленности зависимости амплитуды и фаза от времени и малости коэффициента затухания $\gamma \ll 1$, имеют порядок ε^2 и ими пренебрегают.

Для получения уравнения для медленно меняющейся амплитуды $\dot{A}$ умножим приведенное выше равенство на $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$. Для получения уравнения для $\dot{\varphi}$ умножим приведенное выше равенство на $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 2\omega_0 A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\omega_0 A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = A,$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 2\omega_0 A \dot{\varphi} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\omega_0 A \dot{\varphi} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = A \dot{\varphi},$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 2\gamma \omega_0 A^3 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \omega_0^{-1} \int_0^{2\pi} 2\gamma \omega_0 A^3 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \cos^2(\omega_0 t + \varphi) d\omega_0 t = \frac{\gamma A^3}{4},$$

а все остальные интегралы равны нулю [III.25], получаем

$$\dot{A} = \gamma(A - A^3/4), \quad A\dot{\varphi} = 0. \quad (3.2.5)$$

Первое уравнение системы (3.2.5) имеет стационарные состояния $A=0$ и $A=2$. Первое неустойчиво и соответствует неустойчивому фокусу, второе устойчиво и соответствует предельному циклу, показанных на рис.3.2.3.

3.3 Точечное отображение для генератора ван дер Поля

Рассмотрим осциллятор ван дер Поля в режиме квазигармонических автоколебаний. Поскольку мы имеем дело с системой второго порядка, фазовое пространство которой двумерно, можно получить одномерное отображение вида $x_{n+1} = f(x_n)$, причем в качестве x_n удобно выбрать точки пересечения траектории с положительной полуосью. Вновь рассмотрим уравнение ван дер Поля $LC\ddot{U} + [RC - MS_0 + MS_2 U^2]\dot{U} + U = 0$, но введем

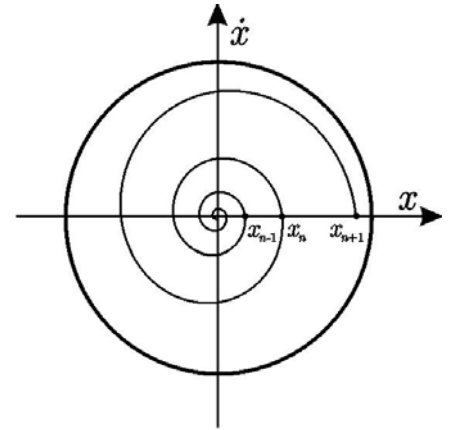


Рис.3.3.1

безразмерные переменные: $\tau = \omega_0 t$, $x = U(\omega_0 MS_2)^{1/2}$, тогда получим

$$\ddot{x} + [\lambda - x^2]\dot{x} + x = 0 \quad (3.3.1)$$

где $\lambda = (MS_0 - RC)/(LC)^{1/2}$. Соответствующее укороченное уравнение имеет вид $\dot{A} = A(\lambda - A^2)/2$. Домножим это уравнение на A и обозначим $\rho = A^2$. Тогда получим $\dot{\rho} = \rho(\lambda - \rho^2)$. Дополним последнее уравнение начальным условием $\rho(0) = \rho_0$, в результате получим $\rho = \lambda [1 + (\lambda - \rho_0)e^{-\lambda t} / \rho_0]^{-1} \Rightarrow x(t) \approx 2A(t)\cos(t + \varphi_0)$, где $A(t) = \lambda^{1/2} e^{\lambda t/2} (\lambda + A_0^2 (e^{\lambda t} - 1))^{-1/2}$. Без ограничения общности можно выбрать $\varphi_0 = 0$.

В точках пересечения с осью можно приближенно положить $\cos t \approx 1$, $t \approx 2\pi n$, (соответствие будет лучшим при меньших λ) и получить выражения

$$x_n = 2^{-1/2} \lambda^{1/2} x_0 e^{\pi n \lambda} \left(\lambda + x_0^2 (e^{2\pi n \lambda} - 1) \right)^{-1/2}, \quad x_{n+1} = 2^{-1/2} \lambda^{1/2} x_0 e^{\pi(n+1)\lambda} \left(\lambda + x_0^2 (e^{2\pi n \lambda} - 1) \right)^{-1/2},$$

где введено обозначение $x_0 = 2A_0$. После несложных вычислений находим явное выражение для функции последования

$$x_{n+1} = x_n e^{\pi \lambda} \left(1 + \frac{x_n^2 (e^{2\pi \lambda} - 1)}{4\lambda} \right)^{-1/2} \quad (3.3.2)$$

Отображение (3.3.2) имеет две неподвижные точки: $x_1 = 0$, что отвечает отсутствию колебаний, и $x_2 = 2\lambda^{1/2}$, что отвечает режиму установившихся автоколебаний. При этом значение амплитуды в точности соответствует найденному при помощи метода медленно меняющихся амплитуд. Проведем анализ неподвижных точек на устойчивость. Дифференцируя (3.3.2), получаем

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 8e^{\pi \lambda} \left(4 + \frac{x_n^2}{\lambda} (e^{2\pi \lambda} - 1) \right)^{-3/2} = \begin{cases} e^{\pi \lambda}, & x = x_1 \\ e^{-2\pi \lambda}, & x = x_2 \end{cases}.$$

Таким образом, нулевое состояние равновесия теряет устойчивость при $\lambda = 0$. При $\lambda > 0$ появляется вторая неподвижная точка, которая является устойчивой. Т.о., при помощи этого метода можно исследовать основные особенности динамики автоколебательных систем,

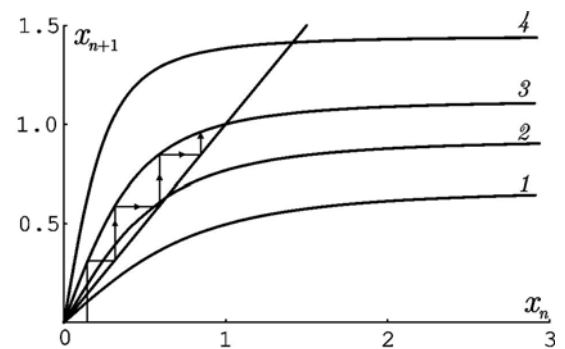


Рис.3.3.2

определять положения аттракторов, выяснять вопрос об их устойчивости и т.д.

3.4. Быстрые и медленные движения

Затронем еще один важный класс задач - сильно нелинейные колебания в сильно неконсервативных системах, для которых можно выделить временные интервалы с различным характером изменения переменных - участки быстрых и медленных движений (и снова метод многих масштабов). Типичный пример - *релаксационные автоколебания*. Здесь мы демонстрируем метод приближенного анализа, основанного на разделении быстрых и медленных движений для осциллятора Дуффинга с сильной диссипацией [I.14]

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (3.4.1)$$

где γ - большой параметр. Для определенности будем считать $\beta > 0$. Введем

новое время $\tau = t/2\gamma$. Уравнение (3.4.1) примет вид

$$\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} + x + \beta x^3 = 0, \quad (3.4.2)$$

где $\varepsilon = 1/4\gamma^2 \ll 1$. Таким образом, мы получили уравнение, содержащее малый параметр при старшей производной. Такие системы удобно анализировать при помощи метода разделения быстрых и медленных движений.

Перепишем уравнение (3.4.2) в виде системы уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \varepsilon \dot{y} = -y - x - \beta x^3 = f(x, y) \quad (3.4.3)$$

Из уравнений (3.4.3) видно, что $dy/d\tau = f(x, y)/\varepsilon \gg 1$ везде, за исключением области, где функция $f(x, y)$ близка к нулю. Условие $f(x, y) = 0$ определяет на плоскости (x, y) кубическую параболу $y = -x - \beta x^3$. Это подпространство медленных движений нашей системы. Фактически движение изображающей точки будет медленным не только на этой кривой, но и в ее окрестности ширины ε , так что можно говорить и об области медленных движений.

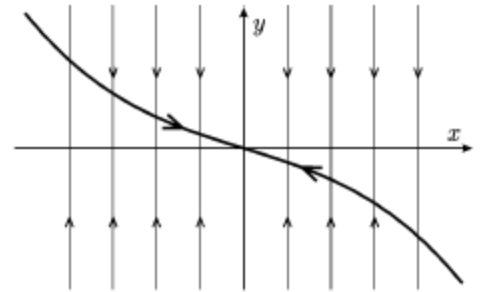


Рис. 3.4.1

Вне области медленных движений, разделив второе уравнение на первое, найдем уравнение фазовых траекторий $dy/dx = f(x, y)/\varepsilon y \gg 1$. Видно, что в области быстрых движений фазовые траектории близки к вертикальным прямым. Так можно построить фазовый портрет системы. Единственное состояние равновесия - устойчивый узел, расположенный в начале координат.

Изображающая точка вначале быстро выходит в подпространство медленных движений, а затем медленно стремится к положению равновесия.

Получим приближенное решение уравнения (3.4.1), анализируя быстрые и медленные движения по отдельности, а затем «сшивая» полученные решения. В области быстрых движений можно пренебречь двумя последними слагаемыми в правой части второго уравнения системы (3.4.3) и записать $\varepsilon \dot{y} \approx -y$. Решение этого уравнения есть $y = C_1 \exp(-\tau/\varepsilon)$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (3.4.3), найдем $x = C_2 - \varepsilon C_1 e^{-\tau/\varepsilon}$.

Постоянные $C_{1;2}$ определим из начальных условий. Если положить $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то нетрудно найти, что $C_1 = y_0$, $C_2 = x_0 + \varepsilon y_0$. Итак, решение для быстрых движений имеет вид $x_B = x_0 + \varepsilon y_0(1 - e^{-\tau/\varepsilon})$. Для медленных движений имеем уравнение первого порядка $y = -x - \beta x^3$. Разделив его на x^3 , получим $x^{-3}\dot{x} = -\beta - x^{-2} \xrightarrow{u=x^2} \dot{u} = 2(u + \beta) \Rightarrow u = -\beta + C_3 e^{2\tau}$, тогда в исходной переменной x $x_M = (C_3 e^{2\tau} - \beta)^{-1/2}$. Теперь необходимо сшить решения x_M и x_B . Для этого потребуем, чтобы $x_M(0) = x_B(\infty) = x_0 + \varepsilon y_0$. Это позволяет определить постоянную C_3 : $C_3 = \beta + (x_0 + \varepsilon y_0)^{-2}$. Т.о., выражение для x_M принимает вид

$$x_M = (x_0 + \varepsilon y_0) e^{-\tau} \left[1 + \beta (x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - e^{-2\tau}) \right]^{-1/2} \quad (3.4.3)$$

Окончательный вид решения: $x = x_B + x_M - x_M(0)$. Складывая выражения, имеем

$$x = -\varepsilon y_0 e^{-\tau/\varepsilon} + (x_0 + \varepsilon y_0) e^{-\tau} \left[1 + \beta (x_0 + \varepsilon y_0)^2 (1 - e^{-2\tau}) \right]^{-1/2} \quad (3.4.4)$$

Возвращаясь к исходному времени $t = 2\gamma\tau$, запишем (3.4.4) в виде

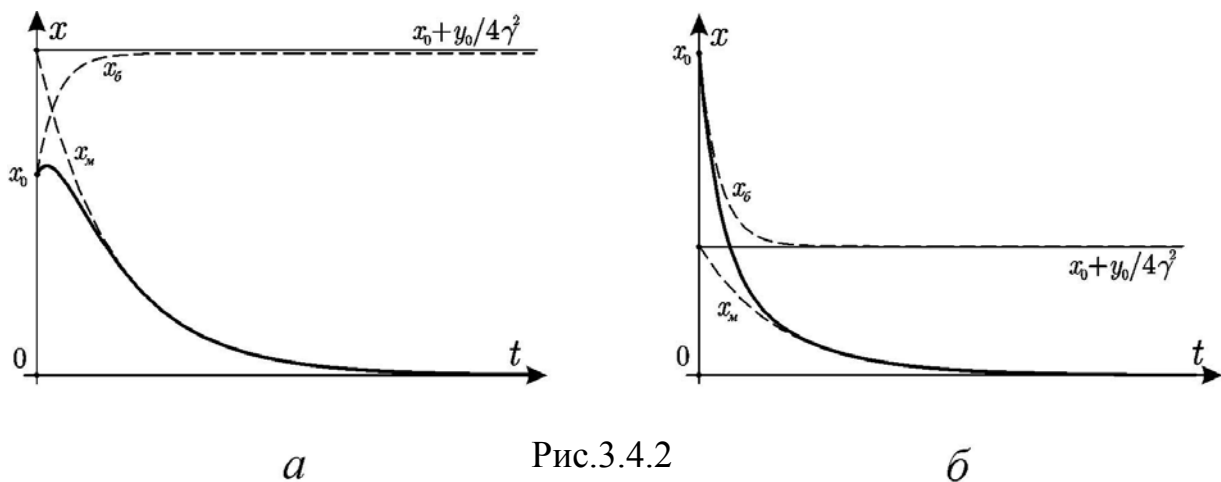


Рис.3.4.2

$$x = -\frac{y_0 e^{-2\gamma t}}{4\gamma^2} + \frac{(x_0 + y_0 / 4\gamma^2) e^{-t/2\gamma}}{\sqrt{1 + \beta (x_0 + y_0 / 4\gamma^2)^2 (1 - e^{-t/\gamma})}} \quad (3.4.5)$$

Характерные зависимости $x(t)$ для различных знаков y_0 , построенные по формуле (3.4.9), приведены на рис.3.4.2 (для определенности $x_0 > 0$).

4 Динамические системы с 1.5 - а степенями свободы

Данный раздел охватывает широкий класс колебательных процессов в неавтономных системах 2 –го порядка и автономных систем 3 – го порядка и таких явлений, как резонанс, параметрический резонанс и динамический хаос.

4.1 Линейные динамические системы с 1.5 – а степенями свободы

Невероятно, но факт: какой-либо линейной автономной системы 3 – го порядка колебательного типа, естественным образом следующей из исходных уравнений какого-либо процесса, нет. Поэтому в данной главе изложение начинается с изучения свойств неавтономных систем 2 – го порядка.

4.1.1 Вынужденные колебания гармонического осциллятора. Гармоническая внешняя сила

Уравнение линейных вынужденных колебаний в общем случае для систем 2 -го порядка имеет вид [1.1-4]

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t) \quad (4.1.1)$$

Будем считать, что внешняя сила действует на линейный гармонический осциллятор по гармоническому закону: $F(t) = f_0 \cos \omega t$, $f_0 = F_0 / m$. Уравнение

(4.1.1) - линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

Решение неоднородного уравнения $x(t)$ представляет сумму общего решения однородного уравнения $x_1(t)$ и частного решения неоднородного уравнения $x_2(t)$, т.е.

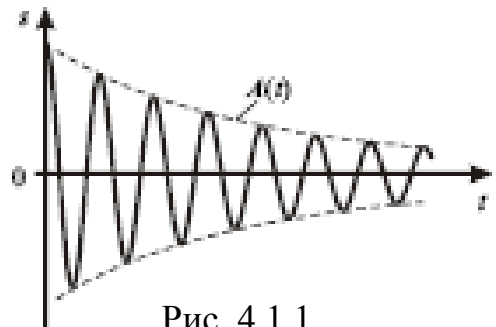


Рис. 4.1.1

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Функция $x_1(t)$ известна - это решение уравнения собственных затухающих колебаний, а второе будем искать в виде: $x_2(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, где A и ϕ - амплитуда и сдвиг фаз между смещением и внешней силой. Т.о., общее решение однородного уравнения будет иметь вид, приведенный на рис. 4.1.1

$$x = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi) + A \cos(\omega t + \phi), \quad (4.1.2)$$

Первое слагаемое правой части (4.1.2) описывает собственные затухающие колебания, зависящие от начальных условий. Из уравнения (4.1.2) следует, что в течение определенного промежутка времени осциллятор будет совершать сложное негармоническое движение, т.к. оно является результатом сложения двух асинхронных колебаний. Однако, через промежуток времени $t \sim 1/\gamma$ амплитуда и энергия собственных колебаний уменьшатся до нуля и они

прекратятся. При этом второе слагаемое останется неизменным и результирующее колебание будет гармоническим. Найдем величины A и γ . При этом воспользуемся *методом комплексификации*, запишем внешнюю силу в виде $F(t) = f_0 \exp(i\omega t)$ и

будем искать частное решение уравнения (4.1.1)

в виде $x = A \exp(i\omega t + \phi)$.

Замечая, что

$\cos(\omega t + \phi) = \Re[\exp(i\omega t + \phi)]$, а

уравнение (4.1.1) –

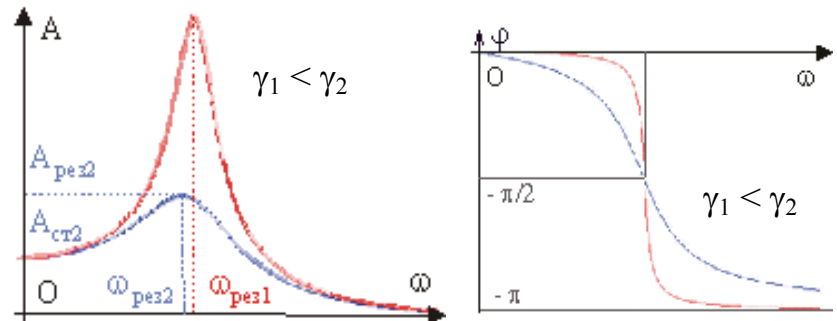


Рис. 4.1.2

линейное, вначале найдем это решение в комплексной форме, а затем выделим в нем действительную часть. Такой способ действий сильно упрощает вычисления в силу того, что и интегрирование и дифференцирование экспоненты дает снова экспоненту. В результате имеем

$$A[-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2] = f_0 \exp(i\phi) \Rightarrow A[-\omega^2 + \omega_0^2] = f_0 \cos\phi, \quad 2\gamma\omega = f_0 \sin\phi,$$

$$\operatorname{tg}\phi = 2\gamma\omega / [\omega_0^2 - \omega^2]; \quad A^2 = f_0^2 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]. \quad (4.1.3)$$

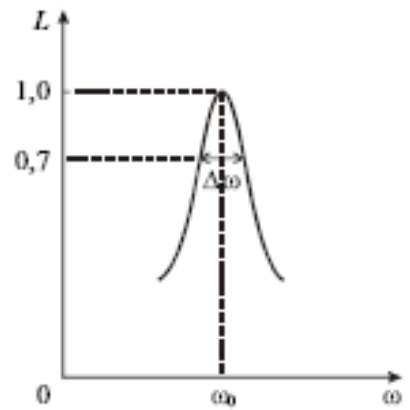


Рис. 4.1.3

Зависимость $A(\omega)$ называют *резонансной кривой*. Вид этой кривой зависит от величины коэффициента затухания γ . Амплитуда, соответствующая значению $\omega = 0$, называется *статическим смещением*. Из рис. 4.1.2 видно, что при определенном значении частоты вынуждающей силы амплитуда осциллятора становится максимальной. Явление, при котором амплитуда колебаний системы достигает максимального значения, характерного для некоторого значения частоты вынуждающей силы называется *резонансом*. Частота вынуждающей силы, при которой наступает данное явление, называется *резонансной*. Приравняв к нулю производную от A по частоте, получим значения резонансной частоты и амплитуды: $\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$, $A_{рез} = f_0 / 2\gamma\omega_0$.

При значении $\gamma = 0 \Rightarrow A_{\text{рез}} \rightarrow \infty$. Как следует из соотношения (4.1.3), сдвиг по фазе между силой и смещением зависит от соотношения частот собственной и вынуждающей силы, а также от значения коэффициента затухания γ . При значении $\omega = \omega_0$ смещение отстает от силы на $\pi/2$. Это означает, что в момент, когда сила достигает своего максимального значения, смещение равно нулю, а когда сила равна нулю, смещение максимально. С возрастанием частоты отставание смещения от силы растет и при очень больших частотах приближается к π , т.е. сила и смещение колеблются в противофазе. Фазовые соотношения между смещением и силой позволяют более глубоко понять сущность явления резонанса с точки зрения энергетических соображений. Пусть при $\omega = \omega_0$ сила и смещение равны законам: $F = F_0 \cdot \cos \omega_0 t$; $x = A \cdot \sin \omega_0 t$. Тогда скорость колеблющейся частицы равна: $\dot{x} = v = -A \cos \omega_0 t$. Видно, что скорость и сила колеблются в фазе. Мощность, сообщаемая осциллятору, равна $N = F \cdot \dot{v}$. $N > 0 \forall t$, значит, работа внешней силы достигает максимального значения. Самые неблагоприятные условия передачи энергии при $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$. В этих случаях фазы силы и скорости отличаются почти на π . Значит сила примерно половину времени направлена противоположно скорости и половину времени совпадает с ней.

Амплитуда вынужденных колебаний падает в $\sqrt{2}$ раз при значениях $\omega_{\pm} = \omega_{\text{рез}} \sqrt{1 \pm (2\gamma / \omega_{\text{рез}}) \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2) / (\omega_0^2 - 2\gamma^2)}}$. Величину $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ называют *шириной резонанса*. При $\gamma \ll 1 \Rightarrow \Delta\omega = 2\gamma$. Добротность $Q = \omega_0 / \Delta\omega$.

4.1.2 Негармоническая, но периодическая внешняя сила: $F(t) = F(t+T)$

Известно, что периодическую функцию можно разложить в ряд по гармоническим компонентам - синусам, косинусам или экспонентам, это разложение называется *рядом Фурье* [III.19-21]. Ряд Фурье имеет вид

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T} + \chi_n\right), \quad \text{где}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \langle F(t) \rangle, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt, \quad n=1,2,3,\dots,$$

$$\sin \chi_n = -b_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos \chi_n = a_n / \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Благодаря принципу суперпозиции отклик осциллятора на периодическую силу можно рассчитать как сумму откликов на действие каждой временной гармоники. Поэтому можно записать вынужденное решение в виде

$$x(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \chi_n + \phi_n) \quad (4.1.4)$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$ - частота n -й Фурье гармоники, а фазовые сдвиги ϕ_n , определяются из формул, подобных (4.1.3), где вместо ω следует подставить ω_n .

Если добротность $Q \gg 1$, характер решения зависит от того, попадает частота хотя бы одной из гармоник в полосу резонанса, или нет. Если существует такое n , что выполняется условие $|\omega_0 - 2\pi n/T| \ll \gamma$, то гармоника с этим номером оказывает значительно большее воздействие на осциллятор чем все остальные благодаря резонансу. В таком случае

$$x(t) \approx \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_n^2}} \cos(\omega_n t + \chi_n + \phi_n).$$

Если же все гармоники находятся вне резонанса, то их результирующее воздействие определяется, в основном, скоростью спада амплитуд a_n и b_n с ростом n . Т.о., резонанс возможен не только под действием гармонической внешней силы и данное выше определение резонанса требует обобщения. Резонанс под действием произвольной периодической внешней силы будет возникать, если собственная частота системы близка к частоте одной из фурье-гармоник ω_n и амплитуда этой гармоники $(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ не равна нулю.

4.1.3 Произвольная внешняя сила

Уравнение гармонического осциллятора допускает точное решение для вынужденных колебаний и в случае произвольной внешней силы. Для его получения воспользуемся переходом к нормальным колебаниям [1.3]. Для этого перепишем уравнение (4.1.5) в виде двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\gamma y + F(t). \quad (4.1.5)$$

Умножим второе уравнение на β и сложим с первым, тогда имеем

$(\dot{x} + \beta y) = -\beta\omega_0^2(x + (1 - 2\gamma\beta)y/(-\omega_0^2\beta)) + \beta F(t)$. Потребуем, чтобы выражения в круглых скобках справа и слева совпали, это выполняется, если $\beta = -(1 - 2\gamma\beta)/(\omega_0^2\beta)$, или $\omega_0^2\beta^2 - 2\gamma\beta + 1 = 0$. Отсюда находим $\beta_{1,2} = (\gamma \pm i\omega)/\omega_0^2$.

Подстановка $\beta = \beta_{1,2}$ в это уравнение приводит к системе

$$\dot{a} = -(\gamma + i\omega)a(t) + (\gamma + i\omega)F(t)/\omega_0^2, \quad \dot{a}^* = -(\gamma - i\omega)a^* + (\gamma - i\omega)F(t)/\omega_0^2, \quad (4.1.6)$$

где $a(t) = x + (\gamma + i\omega)y/\omega_0^2$, $a^*(t) = x + (\gamma - i\omega)y/\omega_0^2$ - нормальные координаты,

$$x = \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{i\gamma}{\omega} \right) a + \left(1 - \frac{i\gamma}{\omega} \right) a^* \right), \quad y = \frac{\omega_0^2}{2i\omega} |a - a^*| - \quad (4.1.7)$$

исходные переменные. Решение первого уравнения системы (4.1.6) ищем в виде $a(t) = A(t)\exp[(-\gamma - i\omega)t]$. Для $A(t)$ получается уравнение $\dot{A} = (\gamma + i\omega)\exp[(\gamma + i\omega)t]F(t)/\omega_0^2$, проинтегрировав которое и подставив результат в формулу для комплексной амплитуды, получаем

$a(t) = (\gamma + i\omega)\omega_0^{-2} \int_0^t \exp(-(\gamma + i\omega)(t - t'))F(t')dt'$. Используя это соотношение в первом из уравнений (4.1.7), получаем

$$x(t) = \omega^{-1} \int_0^t \exp(-\gamma(t - t'))\sin(t - t')F(t')dt'. \quad (4.1.8)$$

При выводе (4.1.8) предполагалось, что сила начинает действовать на неподвижный осциллятор в момент времени $t = 0$. Если начальные координата и (или) скорость осциллятора ненулевые, то к (4.1.8) следует добавить слагаемые, соответствующие собственным затухающим колебаниям. Другой вариант начальных условий состоит в том, что к моменту времени t сила действует достаточно долго. В этом случае в уравнении (4.1.8) нижний предел интегрирования следует заменить на $-\infty$. Если $\gamma=0$, то формулу (4.1.8) можно преобразовать к виду $x(t) = A(t)\cos\omega_0 t + B(t)\sin\omega_0 t$, где $A(t) = -\omega_0^{-1} \int_0^t \sin\omega_0 t' F(t')dt'$,

$B(t) = \omega_0^{-1} \int_0^t \cos\omega_0 t' F(t')dt'$. Если, например, $F(t) = F_0 \sin\omega_0 t$, то $A(t) = (F_0/2\omega_0)[t - \sin(2\omega_0 t)/(2\omega_0)]$ и при $t \rightarrow \infty$ решение неограниченно - получаем *секулярный* рост. Очевидно, что если с ростом t коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$

остаются малыми, то резонанса в системе нет. Таким образом, условие отсутствия резонанса записывается в виде $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{\sin \omega_0 t'; \cos \omega_0 t'\} F(t') dt' = 0$.

Математически это соотношение означает, что функция $F(t)$ не должна содержать собственных функций задачи. В общем случае, когда затухание не равно нулю, математически строгое определение резонанса заменяется физическим условием “значительного возрастания амплитуды колебаний”.

4.1.4 Гармонический осциллятор под действием обобщенных внешних сил

а. Часы с балансиром. Колебания часов с балансиром описываются уравнением [I.7]

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = p \sum_n \delta(t - t_n)$$

при условии $x(t_n) = 0$,
 $\dot{x}(t_n) = y(t_n) > 0$. Его

решение при $x(0) = 0$,
 $y(0) = y_1$ имеет вид: $x = y_1 \Omega^{-1} \exp(-\gamma t) \sin \Omega t$; $y =$

$y_1 \exp(-\gamma t) (\cos \Omega t - \gamma \Omega^{-1} \sin \Omega t)$. Через время $t = 2\pi/\Omega$ изображающая точка придет на полупрямую $x = 0, y > 0$ с ординатой $y' = y_1 \exp(-\delta)$, $\delta = 2\pi\gamma\Omega^{-1/2}$, $\Omega = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2}$. Затем она совершает скачок в точку $y_2 = y' + p$, т.е. y_1 преобразуется в y_2 по закону $y_2 = y_1 \exp(-\delta) + p$. Продолжая рассуждения, приходим к точечному отображению вида $y_{n+1} = e^{-\delta} y_n + p = q y_n + p$. Таким образом, фазовое пространство задачи есть плоскость (x, y) с разрезом по полупрямой $x = 0, y > 0$. Неподвижная точка отображения $y^* = f(y^*)$ находится на пересечении этой функции последования с биссектрисой $y_{n+1} = y_n$: $y^* = p/(1 - \exp(-\delta)) > 0$.

Ей соответствуют стационарные колебания $y = y^*(\cos \Omega t - \gamma \Omega^{-1} \sin \Omega t)$.

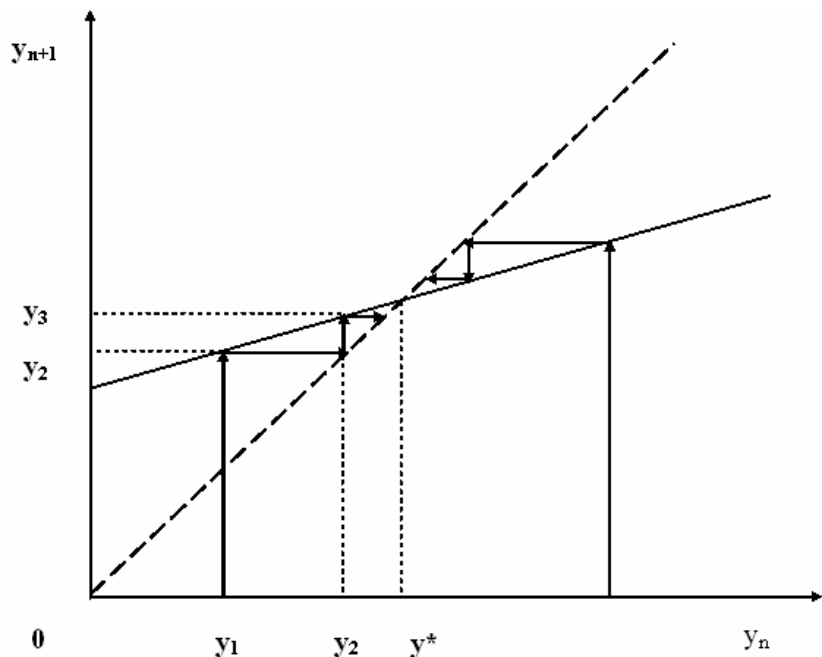


Рис.4.1.4. Диаграмма Ламерея часов с балансиром

Аналитически найти решение этого уравнения крайне затруднительно и его решение следует производить численно. Существует, однако, ряд предельных случаев, когда анализ решений уравнения (4.2.1) можно проводить аналитически. Прежде всего, это возможно при малых амплитудах изменения параметра, когда можно применить один из методов теории возмущений.

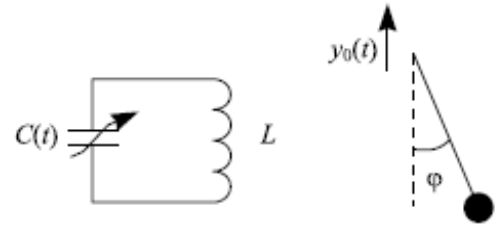


Рис. 4.2.1

Введем характерное время T изменения функций $g_k(t)$ и рассмотрим три различных частотных предела: сравнимые частоты ($\omega_0 T \sim 1$), медленное изменение параметров ($\omega_0 T \gg 1$), быстроосциллирующие поля ($\omega_0 T \ll 1$).

4.2.1 Сравнимые частоты. Уравнение Матье

Положим $n = 1$ и рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + 4\varepsilon \cos \Omega t] x = 0, \quad (4.2.2)$$

называемое *уравнением Матье*, где $0 < \varepsilon \ll 1$, где $g_k(t) = g_k(t+T) = g_k(t+2\pi/\Omega)$. В соответствии с последним условием решения уравнения (4.2.1) можно искать методом теории возмущений, где нулевое приближение ищется как решение уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Рассмотрим методы анализа решений уравнения (4.2.2).

а. Метод Флоке. Структура общего решения уравнения (4.2.1) определяется *теоремой Флоке-Ляпунова* [I.1-3, II.10,12,17]:

Система с n степенями свободы, описываемая дифференциальным уравнением порядка $2n$ с периодическими коэффициентами n – го порядка периода T , имеет $2n$ линейно независимых решений, образующих фундаментальную систему: $x(t) = \sum_{k=1}^{2n} C_k \exp(iq_k t) P_k(t)$, где $P_k(t) = P_k(t+T)$.

В соответствии с теоремой Флоке-Ляпунова будем искать частные решения уравнения (4.2.2) в виде $x(t) = \exp(iqt)P(t)$, $P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(ik\Omega t)$, где функция P является периодической с периодом $T = 2\pi/\Omega$. Это - аналог процедуры поиска частного решения линейного уравнения с постоянными

коэффициентами в виде $x(t) = P \exp(iqt) = P \exp(i\omega_0 t)$ с целью получения характеристического уравнения. При этом, в силу условия $\varepsilon \ll 1$, решение уравнения (4.2.2) должно быть близко к решению невозмущенного уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, то есть к функции $x = x_0 e^{i\omega_0 t}$.

Найдем с учетом (4.2.4) выражение для 1-й и 2-й производных:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} (e^{iqt} P(t)) = \frac{d}{dt} \left(e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} \right) = iqe^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k ik\Omega e^{ik\Omega t}; \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(iqe^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k ik\Omega e^{ik\Omega t} \right) = -q^2 e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} + iqe^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k ik\Omega e^{ik\Omega t} + \\ &+ iqe^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k ik\Omega e^{ik\Omega t} + e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k (-k^2 \Omega^2) e^{ik\Omega t} = -e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k (q^2 + 2qk\Omega + k^2 \Omega^2) e^{ik\Omega t} = -e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k (k\Omega + q)^2 e^{ik\Omega t}. \end{aligned}$$

Найдем с учетом (4.2.4) выражение для $x \cdot \cos \Omega t$:

$$x \cdot \cos \Omega t = e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} x_k e^{ik\Omega t} \frac{e^{-i\Omega t} + e^{i\Omega t}}{2} = e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x_k e^{i(k-1)\Omega t} + x_k e^{i(k+1)\Omega t}}{2} = e^{iqt} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{x_{k-1} e^{ik\Omega t} + x_{k+1} e^{ik\Omega t}}{2}.$$

Последнее действие можно произвести, так как суммирование в последнем выражении производится по всем целым k . В результате имеем

$$x \cdot \cos \Omega t = \frac{1}{2} \exp(iqt) \sum_{-\infty}^{\infty} (x_{k-1} + x_{k+1}) \exp(ik\Omega t). \quad (4.2.3)$$

Подставляя полученные выражения в (4.2.2) получаем равенство, которое

$$\text{должно быть выполнено } \forall t, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 \right\} x_k + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_{k-1} + x_{k+1}) \exp(ik\Omega t) = 0,$$

откуда следует рекуррентное соотношение вида

$$\left[\omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 \right] x_k + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_{k-1} + x_{k+1}) = 0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.2.4)$$

или, в развернутом виде [I.1]

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0: \quad \left[\omega_0^2 - q^2 \right] x_0 + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_{-1} + x_{+1}) = 0, \\ k = +1: \quad \left[\omega_0^2 - (\Omega + q)^2 \right] x_1 + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_0 + x_2) = 0 \\ k = -1: \quad \left[\omega_0^2 - (\Omega - q)^2 \right] x_{-1} + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_{-2} + x_0) = 0 \\ k = +2: \quad \left[\omega_0^2 - (2\Omega + q)^2 \right] x_2 + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_1 + x_3) = 0 \\ k = -2: \quad \left[\omega_0^2 - (2\Omega - q)^2 \right] x_{-2} + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_{-3} + x_{-1}) = 0 \\ k = +3: \quad \left[\omega_0^2 - (3\Omega + q)^2 \right] x_3 + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_2 + x_4) = 0 \\ k = -3: \quad \left[\omega_0^2 - (3\Omega - q)^2 \right] x_{-3} + 2\varepsilon \omega_0^2 (x_{-4} + x_{-2}) = 0 \\ \dots \quad \dots \end{array} \right.$$

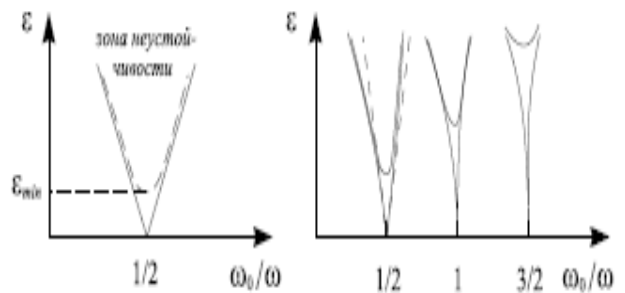


Рис. 4.2.2

При $\varepsilon \rightarrow 0$ решение уравнения (4.2.4) должно совпадать с решением уравнения гармонических колебаний

$$\begin{aligned} [\omega_0^2 - (k\Omega + q)^2]x_k = 0 &\Rightarrow \omega_0^2 - (k\Omega + q)^2 = 0 \xrightarrow{\text{из (4): } q=\omega_0} \omega_0^2 - (k\Omega + \omega_0)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_0^2 - k^2\Omega^2 - 2k\Omega\omega_0 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -k^2\Omega^2 - 2k\Omega\omega_0 = 0 \Rightarrow -k\Omega - 2\omega_0 = 0 \Rightarrow \Omega = -\frac{2}{k}\omega_0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Из (4.2.5) видно, что существует бесконечное количество частот $\Omega = -2\omega_0/k$, $k = -1, -2, -3, \dots$ (4.2.6)

удовлетворяющих данному условию.

Вначале рассмотрим случай $k = -1$, когда $\Omega = 2\omega_0$. При малых, но конечных $\varepsilon \ll 1$ решение уравнения (4.2.4) уже не должно совпадать с решением уравнения гармонических колебаний, но должно быть близко к нему. В низшем приближении можно ограничиваться теми членами, коэффициенты перед которыми минимальны. Считая главным коэффициентом x_0 , положим $q = \omega_0 + \delta$, $\delta \ll \omega_0$, $\Omega = 2\omega_0 + \Delta$ ($k = -1$). Кроме x_0 в силу (4.2.6) следует учесть еще только коэффициент x_{-1} . Остальные коэффициенты много меньше [1.1]. В результате имеем: $[\omega_0^2 - q^2]x_0 + 2\varepsilon\omega_0^2x_{-1} = 0 \Rightarrow -2\delta\omega_0x_0 + 2\varepsilon\omega_0^2x_{-1} = 0$,

$$[\omega_0^2 - (q - \Omega)^2]x_{-1} + 2\varepsilon\omega_0^2x_0 = 0 \Rightarrow 2\omega_0(\delta - \Delta)x_{-1} + 2\varepsilon\omega_0^2x_0 = 0, \text{ откуда}$$

$$4\omega_0^2\delta(\delta - \Delta)x_{-1} + 4\varepsilon^2\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \delta = \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} - \varepsilon^2\omega_0^2}. \quad (4.2.7)$$

Тогда решение (4.2.3) можно переписать в виде

$$x(t) = e^{i(\omega_0 + \delta)t} (x_{-1}e^{-i(2\omega_0 + \Delta)t} + x_0) = e^{\delta t} (x_{-1}e^{-i\Delta t} e^{-i\omega_0 t} + x_0 e^{i\omega_0 t}). \quad (4.2.8)$$

Из выражения (4.2.8) видно, что при условии существования комплексных корней у уравнения (4.2.7) $\varepsilon^2\omega_0^2 < \Delta^2/4 \Leftrightarrow -2\varepsilon\omega_0 < \Delta < 2\varepsilon\omega_0$ решение (4.2.8) может экспоненциально расти и этот рост – *параметрический резонанс* имеет место в полосе частот $2\omega_0 - 2\varepsilon\omega_0 < \Omega < 2\omega_0 + 2\varepsilon\omega_0$. Эта полоса не является единственной – их существует бесконечное количество резонансных частот (4.2.6) в окрестности которых имеется полоса $\Delta\Omega$, где наблюдается резонансная раскачка колебаний. Например, для следующего резонанса, т.е. при $k = -2$ ($\Omega = \omega_0 + \Delta$) наибольшими в разложении (4.2.4) являются слагаемые с $k = -3, -2, -1, 0$,

+1. В результате, для резонансной полосы имеем соотношение $-10\varepsilon^2\omega_0/3 < \Delta < 10\varepsilon^2\omega_0/3$. Видно, что она существенно уже первой.

б. Метод ван дер Поля.

Перепишем уравнение (4.2.2) вблизи первой резонансной полосы $\Omega = 2\omega_0 + \Delta$, $\Delta \ll 1$ в виде $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]x - 2\gamma\dot{x}$, где учтены и диссипативные слагаемые. Для решения этого уравнения в силу условия $\varepsilon \ll 1$ будем искать его решение в виде [1.1,2] $x = A(\varepsilon t) \cos(\omega_0 t + \varphi(\varepsilon t))$, пренебрегая в слагаемых $\sim \varepsilon^2$ и выше. В результате

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2\dot{A}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{2\dot{A}\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} - 2A\omega_0\dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ & - \underline{A\ddot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\dot{\varphi}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} + \underline{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} = 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]A \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ & - 2\gamma(\underline{\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)} - A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{A\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)}). \end{aligned}$$

Слагаемые, подчеркнутые двумя чертами - это слагаемые основного приближения и всегда взаимно сокращаются в силу исходного приближения. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, в силу медленности зависимости амплитуды и фазы от времени и малости коэффициента затухания $\gamma \ll 1$, имеют порядок ε^2 и ими можно пренебречь. Далее следует действовать так:

1. Для получения уравнения для $\dot{A}$ умножим приведенное выше равенство на $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$, замечая, что в силу теоремы о среднем значении в порядке $\sim \varepsilon^1$ A , φ и их производные могут быть вынесены за знак интеграла. Учитывая, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt = 4\varepsilon\omega_0^2 A \frac{\cos 2\varphi \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} + \sin 2\varphi \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} - \cos 2\varphi}{4\Delta} - \\ & - 4\varepsilon\omega_0^2 A \left\{ \frac{\cos 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} - \sin 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0}}{4(4\omega_0 + \Delta)} \cos 2\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{4(4\omega_0 + \Delta)} \right\} + \\ & + 4\varepsilon\omega_0^2 A \frac{\sin 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \cos \frac{2\pi\Delta}{\omega_0} + \cos 4\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0} \sin \frac{2\pi\Delta}{\omega_0}}{4(4\omega_0 + \Delta)} \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

раскладывая это выражение в ряд Тейлора по малому отношению $2\pi\Delta/\omega_0$ и

пренебрегая всеми слагаемыми порядка $\sim \varepsilon^2$ и выше, имеем окончательно

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t] A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt \approx 2\pi\varepsilon\omega_0 A \sin 2\varphi. \quad \text{Замечая также, что}$$

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi) dt \equiv 0, \quad \int_0^{2\pi/\omega_0} A \sin^2(\omega_0 t + \varphi) dt = A \frac{\pi}{\omega_0}, \quad \text{получаем, деля на } -2\pi:$$

$$\dot{A} = -\varepsilon\omega_0 A \sin 2\varphi - \gamma A. \quad (4.2.9)$$

2. Для получения уравнения для $\dot{\varphi}$ умножим приведенное выше равенство на $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$.

Проводя аналогичные выкладки, получим

$$\dot{\varphi} = -\Delta - \varepsilon\omega_0 \cos 2\varphi. \quad (4.2.10)$$

Решение уравнений (4.2.9-10) при $\gamma = 0$ приводит к полученным результатам.

Заметим здесь же, что здесь было удобнее использовать метод ван дер Поля в эквивалентной форме, разыскивая решение исходного уравнения в виде $x = A(\varepsilon t) \sin \omega_0 t + B(\varepsilon t) \cos \omega_0 t$. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]x - 2\gamma\dot{x}$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \sin \omega_0 t + \ddot{B} \cos \omega_0 t + 2\dot{A}\omega_0 \cos \omega_0 t - 2\dot{B}\omega_0 \sin \omega_0 t - \underline{\underline{A\omega_0^2 \sin \omega_0 t}} - \underline{\underline{B\omega_0^2 \cos \omega_0 t}} + \\ & + \underline{\underline{\omega_0^2 (A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t)}} = 4\varepsilon\omega_0^2 (A \cos 2\omega_0 t \sin \omega_0 t + B \cos 2\omega_0 t \cos \omega_0 t) - \\ & - 2\gamma (\dot{A} \sin \omega_0 t + \dot{B} \cos \omega_0 t + A\omega_0 \cos \omega_0 t - B\omega_0 \sin \omega_0 t). \end{aligned}$$

Как и выше, слагаемые, подчеркнутые двумя чертами, являются слагаемыми основного приближения и взаимно сокращаются в силу решения исходного приближения. Слагаемые, подчеркнутые одной чертой, в силу медленности зависимости амплитуды и фазы от времени и малости коэффициента затухания $\gamma \ll 1$, имеют порядок ε^2 и ими следует пренебречь.

Для получения уравнений для $\dot{A}$ и $\dot{B}$ умножим приведенное выше равенство последовательно на $\cos \omega_0 t$ и $\sin \omega_0 t$ и проинтегрируем полученные уравнения от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$, замечая, что в силу теоремы о среднем значении в порядке $\sim \varepsilon^1$ A и их производные могут быть вынесены за знак интеграла.

$$\text{Учитывая, что } \int_0^{2\pi/\omega_0} \{A; B\} \{\sin^2 \omega_0 t; \cos^2 \omega_0 t\} dt \approx \{A; B\} \int_0^{2\pi/\omega_0} \{\sin^2 \omega_0 t; \cos^2 \omega_0 t\} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{\{A; B\}}{2},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi/\omega_0} \{A; B\} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt &\approx \{A; B\} \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt \equiv 0, \quad \int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon \omega_0^2 A \cos 2\omega_0 t \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t dt \equiv 0, \\
\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon \omega_0^2 A \cos 2\omega_0 t \sin^2 \omega_0 t dt &\approx 4\varepsilon \omega_0^2 A \int_0^{2\pi/\omega_0} (\cos^2 \omega_0 t - \sin^2 \omega_0 t) \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{\omega_0 A}{2\pi} \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{8} \right) = -\frac{\omega_0 A}{2\pi \cdot 4}, \\
\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon \omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t dt &\approx 2\varepsilon \omega_0^2 B \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos 2\omega_0 t \sin 2\omega_0 t dt = \varepsilon \omega_0^2 B \int_0^{2\pi/\omega_0} \sin 4\omega_0 t dt \equiv 0, \\
\int_0^{2\pi/\omega_0} 4\varepsilon \omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t \cos^2 \omega_0 t dt &\approx 2\varepsilon \omega_0^2 B \int_0^{2\pi/\omega_0} (\cos^2 \omega_0 t - \sin^2 \omega_0 t) \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{\omega_0 B}{2\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\omega_0 B}{2\pi \cdot 4}.
\end{aligned}$$

в результате мы получим пару уравнений вида

$$\dot{A} = \varepsilon \omega_0 B - \gamma A, \quad \dot{B} = \varepsilon \omega_0 A - \gamma B. \quad (4.2.11)$$

Будем искать решение системы (4.2.11) в виде $A = A_0 \exp(\lambda t)$, $B = B_0 \exp(\lambda t)$, тогда получим пару линейных однородных алгебраических уравнений $(\gamma + \lambda)A - \varepsilon \omega_0 B = 0$, $(\gamma + \lambda)B - \varepsilon \omega_0 A = 0$, имеющих нетривиальные решения при

условии $\begin{vmatrix} \gamma + \lambda & -\varepsilon \omega_0 \\ -\varepsilon \omega_0 & \gamma + \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\gamma + \lambda)^2 = \varepsilon^2 \omega_0^2 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \varepsilon \omega_0$. Отсюда следует величина

порога параметрического резонанса вблизи первой резонансной частоты: $\varepsilon_{\min} = \gamma / \omega_0$. При меньших амплитудах изменения параметров возбуждение параметрического резонанса невозможно.

4.2.2 Стохастический параметрический резонанс

Рассмотрим явление стохастического параметрического резонанса на примере гармонического осциллятора [П.37]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + z(t)] x = 0 \quad (4.2.12)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, где $y = dx/dt$, $z(t)$ - гауссовская случайная функция с плотностью вероятностей $p(z) = \pi^{-1/2} \sigma^{-1} \exp \{-z^2/\sigma^2\}$ ($\langle z \rangle = 0$, $\langle z^2 \rangle = 2\sigma^2$) при $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ и найдем порог стохастического параметрического резонанса для вторых и четвертых моментов с учетом линейных потерь энергии. Перепишем (4.2.12) в виде двух уравнений первого порядка и усредним по ансамблю реализаций, получаем $\dot{\langle x \rangle} = \langle y \rangle$,

$\dot{\langle y \rangle} = -\omega_0^2 (\langle x \rangle + \langle zx \rangle)$ и $\langle x(0) \rangle = 0$, $\langle y(0) \rangle = 1$. Эта система не замкнута

относительно переменных $\langle x \rangle, \langle y \rangle$. По формуле Фуруцу-Новикова [II.37] $\langle z(t)R[z(\zeta)] \rangle = \int d\tau B(t, \tau) \langle \delta R[z(\zeta)] / \delta z(\tau) \rangle$, где $B(t, t') = \langle z(t)z(t') \rangle$ при $R = x$ имеем с учетом определения вариационной производной $\delta F[f] / \delta f(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \delta F[f] / \delta \int dT \delta f(T)$

$$\frac{\delta x}{\delta z} = 0, \quad \frac{\delta y}{\delta z} = -(1-z)\omega_0^2 \frac{\delta x}{\delta z} - \omega_0^2 x = -\omega_0^2 x \Rightarrow \langle zx \rangle = 0, \quad \langle x \rangle = \omega_0^{-1} \sin \omega_0 t, \quad \langle y \rangle = \cos \omega_0 t.$$

Получим уравнения для вторых моментов, для чего умножим уравнения на x и y и усредним полученные уравнения. В результате получим:

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}^2 \rangle &= \langle xy \rangle, \quad \langle x\dot{y} \rangle = \langle y^2 \rangle, \quad \langle y\dot{x} \rangle = -\omega_0^2 (\langle x^2 \rangle + \langle zx^2 \rangle), \\ \langle \dot{y}^2 \rangle &= -\omega_0^2 (\langle xy \rangle + \langle zxy \rangle), \quad \langle x^2(0) \rangle = \langle x(0)y(0) \rangle = \langle y^2(0) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Сложим 2 - е и 3 - е уравнения и используем формулу Фуруцу-Новикова:

$$\langle \dot{x}^2 \rangle = \langle xy \rangle, \quad \langle x\dot{y} \rangle = \langle y^2 \rangle - \omega_0^2 \langle x^2 \rangle, \quad \langle \dot{y}^2 \rangle = -2\omega_0^2 (\langle xy \rangle + \sigma^2 \omega_0^2 \langle x^2 \rangle). \quad (4.2.20)$$

Если интенсивность флуктуаций мала, задача имеет решение вида:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= 2\omega_0^{-2} [\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) (\cos 2\omega_0 t + (3\sigma^2 \omega_0 / 4) \sin 2\omega_0 t)], \\ \langle xy \rangle &= (4\omega_0)^{-1} [2 \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) \sin 2\omega_0 t + \sigma^2 \omega_0 (\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) \cos 2\omega_0 t)], \\ \langle y^2 \rangle &= 2^{-1} [\exp(\sigma^2 \omega_0^2 t) - \exp(-\sigma^2 \omega_0^2 t / 2) (\cos 2\omega_0 t - (\sigma^2 \omega_0 / 4) \sin 2\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Видно, что здесь имеет место стохастическая параметрическая раскачка колебаний за счет флуктуаций параметров с инкрементом $\Gamma = \sigma^2 \omega_0^2$. Для вторых моментов область устойчивости имеет вид $\sigma^2 > 2\gamma \omega_0^2$, для четвертых: $\sigma^2 > (2\gamma/3\omega_0^2) (\omega_0^2 + 3\gamma^2) / (\omega_0^2 + 6\gamma^2)$.

4.2.3 Медленное изменение параметров. Адиабатический инвариант

Пусть частота - медленно меняющаяся функция: $\omega(t) = \omega_0 f(t/\tau)$, т.е. $\omega_0 \tau \gg$

1. Перейдем в уравнении гармонического осциллятора без трения к переменной $\zeta = t/\tau$ и введем малый параметр $\varepsilon = (\omega_0 \tau)^{-1}$. Тогда имеем уравнение Хилла

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + f(\zeta)x = 0. \quad (4.2.21)$$

Решение (4.2.21) ищем методом, в квантовой механике называемым методом ВКБ, а в оптике - приближением геометрической оптики [I.2,3,II.35]. Сделаем замену переменной $x(\zeta) = \exp\left(\int_0^\zeta y(\zeta') d\zeta'\right) = \exp[\theta(\xi)]$. В оптике функцию θ называют

эйконалом. Имея в виду следующие соотношения $\dot{x} = y \exp[\theta(\xi)]$, $\ddot{x} + [\dot{y} + y^2] \exp[\theta(\xi)] = 0$, подставим их в (20), тогда получим уравнение Риккати $\varepsilon^2 \dot{y} + \varepsilon^2 y^2 + f(\zeta) = 0$,

$$(4.2.22)$$

решение которого ищется в виде ряда $y = \varepsilon^{-1} y_{-1} + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots$. Подставляя его в (4.2.22) имеем $\varepsilon^0 (y_{-1}^2 + f) + \varepsilon^1 (\dot{y}_{-1} + 2y_{-1}y_0) + \dots = 0$. Приравнивая последовательно нулю выражения в круглых скобках, получаем:

- из первого уравнения $y_{-1} = \pm \sqrt{f}$, используя это соотношение далее

- из второго уравнения $y_0 = y_{-1}^{-1} \dot{y}_{-1} / 2 = \ln|y_{-1}|^{-1/2} = \ln|f|^{-1/4}$ и т.д.

Т.о. решение уравнения (4.2.21) с указанной точностью имеет вид

$$x(\zeta) = \exp \left[\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^\zeta \sqrt{f(\zeta')} d\zeta' + \ln|f(\zeta)|^{-1/4} \right] = \frac{1}{\sqrt[4]{f(\zeta)}} \exp \left[\pm \frac{i}{\varepsilon} \int_0^\zeta \sqrt{f(\zeta')} d\zeta' \right]. \quad (4.2.23)$$

При заданных начальных условиях в размерных переменных (4.2.23)

$$\text{сводится к виду } x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \cos \left[\int_0^t \omega(t') dt' \right] + \varphi_0 = A(t) \cos[\Phi(t)].$$

Например, для пружины с переменной жесткостью $k(t) = m\omega^2(t)$, энергия

$$W = m \frac{\dot{x}^2 + \omega^2(t)x^2}{2}, \quad \dot{x}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \right) \cos[\Phi(t)] - \omega^2(t) \frac{A_0}{\sqrt{\omega(t)}} \sin[\Phi(t)],$$

причем в последнем выражении первое слагаемое можно отбросить в силу малости. В результате

$$W(t) = \frac{mA_0^2}{2} \left[\frac{\omega^2(t) \sin^2 \Phi(t) + \omega^2(t) \cos^2 \Phi(t)}{\omega(t)} \right] = \frac{mA_0^2}{2} \omega(t) \Rightarrow \frac{W(t)}{\omega(t)} = \frac{mA_0^2}{2} = \text{const.}$$

Такие комбинации динамических переменных системы, которые остаются постоянными при медленном изменении ее параметров, называются *адиабатическими инвариантами* [I.1, II.36]. Их существование, как и существование законов сохранения, может облегчить изучение системы.

4.2.4 Движения в быстроосциллирующих полях

Перепишем уравнение (4.2.2) в виде [I.3]

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + 4\varepsilon \cos \Omega t] x = -4\varepsilon \omega_0^2 x \cos \Omega t \Leftrightarrow \ddot{x} + f(x) = F(x) \cos \Omega t. \quad (4.2.24)$$

В задаче (4.2.24) есть два характерных времени изменения величины x —

медленное время $\tau_1 \sim \omega_0^{-1}$ и быстрое время $\tau_2 \sim \Omega^{-1} \ll \tau_1$.

В соответствии с этим в согласии с принципом суперпозиции будем искать ее решение в виде суммы двух функций, одна из которых (x_1) меняется медленно (с характерным временем τ_1), а другая (x_2) – быстро (с характерным временем τ_2): $x(t) = \langle x(t) \rangle + \mu x'(t) = \frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} x(t) dt + \frac{\omega_0}{\Omega} x'(t)$. Из рис. 4.2.3 видно, что усреднение по быстрому времени в соответствии с теоремой о среднем значении практически не меняет медленных функций. Подставим последнее уравнение в

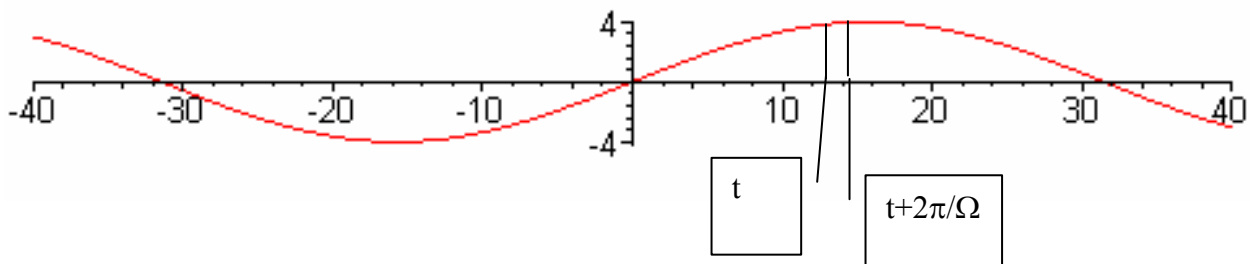


Рис. 4.2.3

(4.2.24). Разложим функции f и F в ряд Тейлора с точностью до слагаемых $\sim \mu^1$:

$$\frac{d^2 \langle x \rangle}{dt^2} + \mu \frac{d^2 x'}{dt^2} + f(\langle x(t) \rangle) + \mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x'(t) = F(\langle x(t) \rangle) \cos \Omega t + \mu \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x'(t) \cos \Omega t. \quad (4.2.25)$$

Для быстроменяющихся величин, с учетом того, что $F \sim \varepsilon$, получаем для величин первого порядка малости ($\mu \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x'(t) \cos \Omega t$ – величина второго порядка

малости), уравнение $\frac{d^2 x'}{dt^2} + \mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x'(t) = F(\langle x(t) \rangle) \cos \Omega t$. С учетом того, что

$\frac{d^2 x'}{dt^2} \sim \Omega^2 x'$, $\mu \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\langle x \rangle} x' = \omega_0^2 x' \ll \Omega^2 x'$, вторым слагаемым в правой части можно

пренебречь по сравнению с первым, откуда получаем частное решение, которое возволяет выразить быстроосциллирующую величину через амплитуду медленных движений осциллятора $\langle x \rangle$: $\mu \ddot{x}' = F(\langle x(t) \rangle) \cos \Omega t \Rightarrow$

$x' = -(F(\langle x(t) \rangle) / \mu \Omega^2) \cos \Omega t$. Подставим это соотношение в (4.2.25) и усредним его по $2\pi/\Omega$. Тогда получим замкнутое уравнение для медленных движений

$$\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + f(\langle x(t) \rangle) = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\langle x \rangle} \frac{F(\langle x(t) \rangle)}{\Omega^2} \langle \cos^2 \Omega t \rangle \Rightarrow \frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + f(\langle x(t) \rangle) = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=\langle x \rangle} \frac{F(\langle x(t) \rangle)}{2\Omega^2},$$

откуда $\frac{d^2\langle x \rangle}{dt^2} + f(\langle x(t) \rangle) = -\frac{1}{2\Omega^2} \frac{\partial}{\partial x} (F^2(x)) \Big|_{x=\langle x \rangle}$. Т.о., быстрые пульсации оказывают

влияние на медленные движения в следующем порядке теории возмущений.

4.3 Нелинейные динамические системы с 1.5 – а степенями свободы

К данному классу относятся свободные колебания в системах 3-го порядка и вынужденные колебания в системах 2 – го порядка.

4.3.1 Осциллятор Дуффинга под импульсным воздействием

Важный класс задач, в которых возникают дискретные отображения, связан с изучением систем, находящихся под импульсным периодическим воздействием. В качестве примера получим дискретное отображение для осциллятора с кубической нелинейностью и затуханием, совершающего колебания под действием последовательности δ – образных импульсов [I.14]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \sum_n \delta(t - nT) \quad (4.3.1)$$

Будем считать, что в промежутке между импульсами применим метод медленно меняющихся амплитуд. В этом случае решение представим в виде квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой $x = Ae^{i\varphi_0 t} + A^* e^{-i\varphi_0 t}$, где A, A^* – медленно меняющиеся функции времени. В промежутке между импульсами для комплексной амплитуды справедливо укороченное уравнение, которое в исходных обозначениях имеет вид

$$\frac{dA}{dt} = -\gamma A - \frac{3i\beta|A|^2 A}{2\omega_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{dt} = -\gamma a, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3\beta}{8\omega_0} a^2. \quad (4.3.2)$$

Решая уравнения (4.3.2), найдем следующие зависимости амплитуды и фазы от времени в промежутке между n -ым и $n+1$ -ым импульсами

$$a(t) = a_n e^{-\gamma t}, \quad \varphi(t) = \frac{3\beta a_n^2}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma t}}{\gamma} + \varphi_n, \quad (4.3.3)$$

где a_n и φ_n – начальные амплитуда и фаза сразу после n -го импульса. Если подставить выражения (4.3.3) в соотношения $x(t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, $v(t) = -a(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(t))$, следующие из связи x и A , то мы найдем зависимости

координаты и скорости осциллятора во времени на рассматриваемом промежутке времени. К моменту начала (n+1)-го импульса проходит время, равное периоду T. Поэтому координата осциллятора и скорость равны $x(T)$ и $v(T)$. В силу δ -образного характера воздействия сразу после этого импульса координата не изменится, а скорость получит добавку C. Поэтому для координаты и скорости после (n+1)-го импульса получаем выражения

$$x_{n+1} = a_n e^{-\gamma T} \cos\left(\omega_0 T + \frac{3\beta |a_n|^2}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right), \quad v_{n+1} = -\omega_0 a_n e^{-\gamma T} \sin\left(\omega_0 T + \frac{3\beta |a_n|^2}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} + \varphi_n\right) + C. \quad (4.3.4)$$

Удобно записать их в комплексной форме, введя переменную

$$z = \left(ix + \frac{v}{\omega_0} \right) \left(\frac{3\beta}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} \right)^{1/2}. \quad \text{Тогда относительно этой переменной из (4.3.4)}$$

получаем искомое отображение

$$z_{n+1} = A + B z_n \exp[i(|z_n|^2) + \omega_0 T], \quad (4.3.5)$$

$$\text{где } A = \frac{C}{\omega_0} \left(\frac{3\beta}{16\omega_0} \frac{1 - e^{-2\gamma T}}{\gamma} \right)^{1/2}, \quad B = e^{-\gamma T}$$

4.3.2 Осциллятор Дуффинга. Нелинейный резонанс

Рассмотрим уравнение Дуффинга $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon_0 \cos \Omega t - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \dot{x}$ и проанализируем его методом ван дер Поля. Полагая $\omega_0 = \Omega - \xi$, где $\xi \ll 1$ – расстройка частоты, перепишем уравнение в виде [I.14]

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \varepsilon_0 \cos \Omega t + (\Omega^2 - \omega_0^2)x - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \dot{x} = \varepsilon_0 \cos \Omega t + (\Omega - \omega_0)(\Omega + \omega_0)x - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \dot{x},$$

или, окончательно $\ddot{x} + \Omega^2 x = \varepsilon_0 \cos \Omega t + \xi(2\Omega - \xi)x - \alpha x^2 - \beta x^3 - 2\gamma \dot{x}$, имея в виду исследование резонансных явлений, характеризующихся не собственной частотой, а частотой внешней силы. Решение также будем искать его в виде $x = A(t) \cos(\Omega t + \varphi(t))$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \cos(\Omega t + \varphi) - 2\dot{A}\Omega \sin(\Omega t + \varphi) - 2A\dot{\varphi} \sin(\Omega t + \varphi) - \underline{\underline{A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi)}} - 2A\Omega\dot{\varphi} \cos(\Omega t + \varphi) - \\ & - \underline{A\ddot{\varphi} \sin(\Omega t + \varphi)} - \underline{A\dot{\varphi}^2 \cos(\Omega t + \varphi)} + \underline{\underline{A\Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi)}} = \varepsilon_0 \cos \Omega t + \xi(2\Omega - \xi)A \cos(\Omega t + \varphi) - \\ & - 2\gamma [\dot{A} \cos(\Omega t + \varphi) - A\Omega \sin(\Omega t + \varphi) - \underline{A\dot{\varphi} \sin(\Omega t + \varphi)}] - \alpha A^2 \cos^2(\Omega t + \varphi) - \beta A^3 \cos^3(\Omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Для получения уравнения для $\dot{A}$ умножим приведенное выше равенство

на $\sin(\Omega t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\Omega$. Для получения уравнения для $\dot{\varphi}$ умножим приведенное выше равенство на $\cos(\Omega t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\Omega$. Учитывая,

$$\text{что } \int_0^{2\pi/\Omega} \cos \Omega t \sin(\Omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \sin \varphi dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \sin(2\Omega t + \varphi) dt = \frac{\pi}{\Omega} \sin \varphi,$$

$$\int_0^{2\pi/\Omega} \cos \Omega t \cos(\Omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \cos \varphi dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\Omega} \cos(2\Omega t + \varphi) dt = \frac{\pi}{\Omega} \cos \varphi,$$

$$\text{получаем } \frac{dA}{dt} = -\gamma A - \frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \sin \varphi, \quad A \frac{d\varphi}{dt} = -\xi A - \frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \cos \varphi + \frac{3\beta}{8\Omega} A^3.$$

Резонансная кривая, т.е. зависимость $A = A(\xi)$, получается как состояние равновесия этой системы

$$\gamma A_0 = -\frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \sin \varphi_0,$$

$$\xi A_0 - \frac{3\beta}{8\Omega} A_0^3 = -\frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \cos \varphi_0,$$

откуда, возводя в квадрат обе части и складывая их, получим

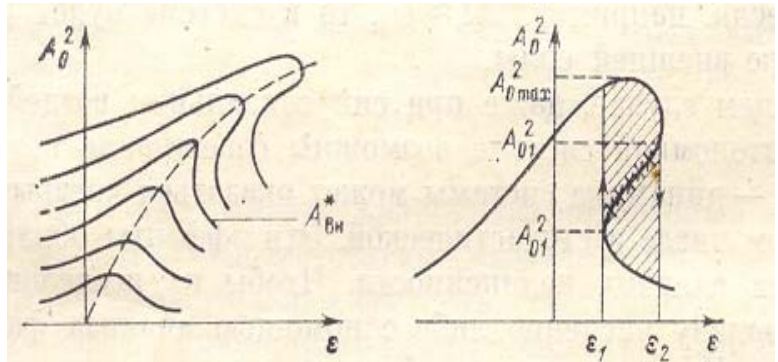


Рис. 4.3.1

$$\left(\xi A_0 - \frac{3\beta}{8\Omega} A_0^3 \right)^2 + \gamma^2 A_0^2 = \left(\frac{\pi}{\Omega} \varepsilon_0 \right)^2, \text{ откуда } \xi = \frac{3\beta}{8\Omega} A_0^2 \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{\Omega^2 A_0^2} \varepsilon_0^2 - \gamma^2}.$$

В диапазоне $0 \leq A_0 < \sqrt{\frac{8\Omega\gamma}{3\beta}}$ резонансная кривая, как и в линейном случае, однозначна, вне этого диапазона – неоднозначна, рис.4.3.1.

4.3.3. Параметрически возбуждаемый нелинейный осциллятор

Рассмотрим уравнение параметрически возбуждаемого нелинейного осциллятора без трения

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - 4\varepsilon \cos \Omega t)x + \beta x^3 + 2\gamma \dot{x} = 0. \quad (4.3.6)$$

Перепишем уравнение (4.3.6) вблизи первой резонансной полосы $\Omega = 2\omega_0 + \Delta$, $\Delta \ll 1$ в виде $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 4\varepsilon \omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t]x - 2\gamma \dot{x} - \beta x^3$, где учтены и диссипативные слагаемые. Для решения этого уравнения в силу условия $\varepsilon \ll 1$ можно воспользоваться методом ван дер Поля. Будем, как и в параграфе 3.2,

искать его решение в виде $x = A(\varepsilon t) \cos(\omega_0 t + \varphi(\varepsilon t))$. В результате получим соотношение, отличающееся от полученного выше последним слагаемым:

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2\dot{A}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{2\dot{A}\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{\underline{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)}} - 2A\omega_0\dot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ & - \underline{A\ddot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} - \underline{A\dot{\varphi}^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)} + \underline{\underline{A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)}} = 4\varepsilon\omega_0^2 \cos[(2\omega_0 + \Delta)t] A \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ & - 2\gamma \left(\underline{\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)} - A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - \underline{A\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi)} \right) - \beta A^3 \cos(\omega_0 t + \varphi) \left(\frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2} \right). \end{aligned}$$

Далее снова умножим приведенное выше равенство сначала на $\sin(\omega_0 t + \varphi)$, а потом на $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ и проинтегрируем полученное уравнение от 0 до $0 + 2\pi/\omega_0$, замечая, что в силу теоремы о среднем значении в порядке $\sim \varepsilon^1 A$, φ и их производные могут быть вынесены за знак интеграла. Учитывая интегральные соотношения, приведенные ранее и возвращаясь к исходным обозначениям, получим $\dot{A} = -\gamma A - (\varepsilon\Omega A/8) \sin 2\varphi$; $\dot{\varphi} = -\Delta + 3\beta A^2/8\Omega - (\varepsilon\Omega/8) \cos 2\varphi$.

Даже при отсутствии линейной расстройки $\Delta = 0$, есть расстройка $\sim A^2$, приводящая к сдвигу фазы, компенсирующему параметрический инкремент.

4.3.4 Хаотические колебания. Система Лоренца

Наиболее известной автономной системой с 1.5 – а степенями свободы, описывающей, хаотические колебания, является модель Лоренца.

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y; \dot{y} = rx - y - xz; \dot{z} = xy - bz \quad (4.3.4)$$

где $r > 0$. Относительное изменение фазового объема системы отрицательно:

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{dx dy dz} \left(\frac{dx}{dt} dy dz + \frac{dy}{dt} dx dz + \frac{dz}{dt} dx dy \right) = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = -\sigma - 1 - b < 0, \text{ то есть система}$$

(4.3.4) диссипативна. Особые точки системы (4.3.4) определяются уравнениями

$$\begin{cases} -\sigma x_{i0} + \sigma y_{i0}, \\ rx_{i0} - y_{i0} - x_{i0}z_{i0} = 0, \\ x_{i0}y_{i0} - bz_{i0} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i0} = y_{i0}, \\ rx_{i0} - y_{i0} - x_{i0}z_{i0} = 0, \\ x_{i0}y_{i0} - bz_{i0} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i0} = y_{i0}, \\ rx_{i0} - x_{i0} - x_{i0}z_{i0} = 0, \\ x_{i0}^2 - bz_{i0} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i0} = y_{i0}, \\ rx_{i0} - x_{i0} - x_{i0}z_{i0} = 0, \\ z_{i0} = x_{i0}^2/b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i0} = y_{i0}, \\ rx_{i0} - x_{i0} - x_{i0}^2/b = 0, \\ z_{i0} = x_{i0}^2/b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{i0} = y_{i0}, \\ x_{i0}(r-1-x_{i0}^2/b) = 0, \\ z_{i0} = x_{i0}^2/b. \end{cases}$$

Их три: $(0,0,0)$, $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$, $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, причем две последние возникают только при $r > 1$. Характеристическое уравнение для

первой точки имеет вид: $(\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0$, а его корни равны:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_2 = \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 + 4\sigma(r - 1)}}{2}.$$

Видно, что в области $0 < r < 1$ все три корня действительны и отрицательны – точка $(0,0,0)$ является *устойчивым узлом*. При $r > 1$ все корни действительны, но один становится положительным $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ – точка $(0,0,0)$ является *седлом* с размерностью неустойчивого многообразия равной 1. Характеристическое уравнение для второй и третьей точек имеет вид:

$$\lambda^3 + (\sigma + b - 1)\lambda^2 + (\sigma - r)b\lambda + 2\sigma r(r - 1) = 0. \quad (4.3.5)$$

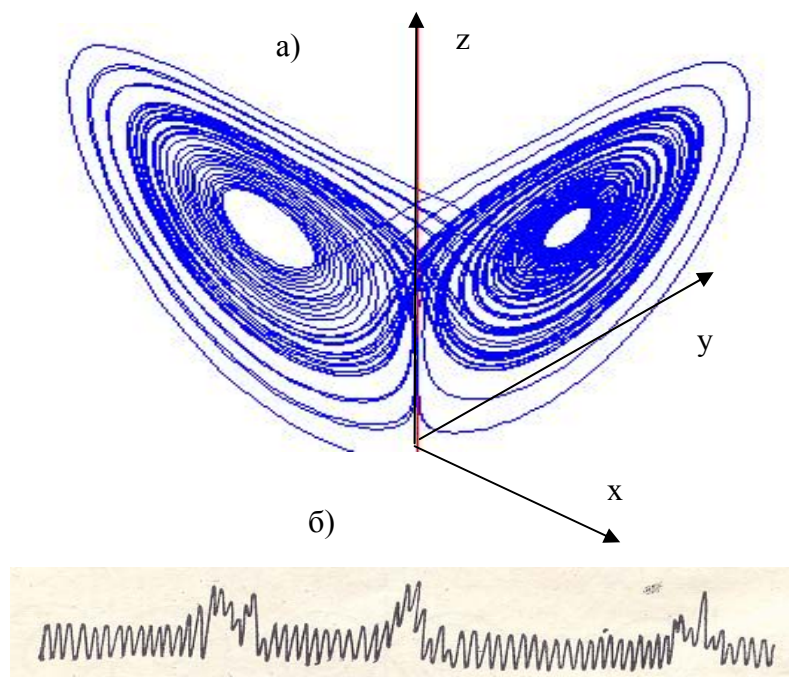


Рис.4.3.4. Странный аттрактор и соответствующий ему режим случайных автоколебаний

Из корней уравнения (4.3.5) один действительный и отрицательный при любых значениях r и σ , а оставшиеся два – комплексно сопряженные, причем в области $1 < r < r_c$ действительные части этих корней отрицательны (*устойчивый фокус*), при $r < r_c$ равны нулю, а при $r > r_c$ положительны (*седло – фокус*). Здесь $r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$. Аналитически получить решение системы (4.3.4)

невозможно. Численный анализ показывает, что при $r > r_c$ фазовые траектории системы (4.3.4) лежат на многообразии, называемым *странным аттрактором*, рис.4.3.4, а, которому соответствует режим *динамического хаоса*, рис.4.3.4, б.

5 Динамические системы с 2-мя степенями свободы

5.1 Линейные колебания в системах с 2-мя степенями свободы

Модели данного типа встречаются часто, поскольку описывают систему из пары связанных линейных или нелинейных осцилляторов.

• Силовая (емкостная) связь. Консервативные системы

Рассмотрим пару математических маятников, связанных пружиной жесткостью k , пренебрегая потерями энергии. Положим

$x_{1,2} = \varphi_{1,2}$, тогда имеем

$$\ddot{x}_1 + (\omega_{01}^2 + k/m_1)x_1 = kx_2/m_1, \quad \ddot{x}_2 + (\omega_{02}^2 + k/m_2)x_2 = kx_1/m_2. \quad (5.1.1)$$

Соответствующая электрическая схема приведена ниже.

Частоты, при которых один осциллятор не влияет на другой, называют *парциальными*. Здесь они равны $\Omega_{1,2}^2 = \omega_{01,2}^2 + k/m_{1,2}$. С их использованием (5.1.1) можно переписать в виде $\ddot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = kx_2/m_1$, $\ddot{x}_2 + \Omega_2^2 x_2 = kx_1/m_2$.

Однако реальные движения происходят с *нормальными* или *собственными* частотами, являющимися решениями характеристического уравнения, которое найдем, полагая $x_{1,2} = X_{1,2} \exp(i\omega t)$. Тогда

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \Omega_1^2)X_1 - \frac{k}{m_1}X_2 &= 0, \\ -\frac{k}{m_2}X_1 + (-\omega^2 + \Omega_2^2)X_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\omega^2 + \Omega_1^2 & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & -\omega^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\omega^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2 - \frac{k^2}{m_1m_2} = 0,$$

откуда $\omega_{1,2}^2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \mp \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + \frac{4k^2}{m_1m_2}}}{2}$. Относительные вклады одного из

осцилляторов в нормальные моды другого или *коэффициенты распределения* можно получить, находя их из каждого уравнения по отдельности:

$$r_{1,2} = \frac{X_{2,1}}{X_{1,2}} = \frac{\Omega_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2}{k/m_{1,2}} = \sqrt{\frac{m_{1,2}}{m_{2,1}}} \Gamma = \sqrt{\frac{m_{1,2}}{m_{2,1}}} \left(\sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + \frac{4k^2}{m_1m_2}} - (\Omega_1^2 - \Omega_2^2) \right) \frac{\sqrt{m_1m_2}}{2k}. \quad (5.1.2)$$

Эти коэффициенты имеют разные знаки. Общее решение (5.1.1) имеет вид

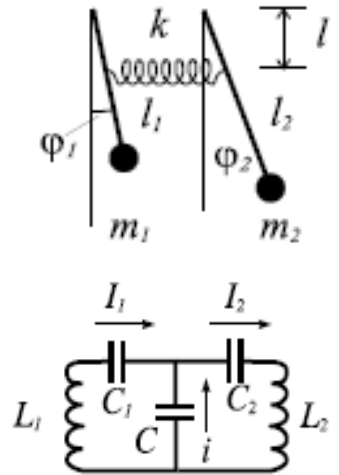


Рис. 5.1.1

суперпозиции колебаний на нормальных модах: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} A_1 e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} A_2 e^{i\omega_2 t}$, где константы A_i комплексны. Нормальные моды получаются стандартным способом путем замен $a_1 = (x_1 - r_2 x_2) / \sqrt{1 - r_1 r_2}$, $a_2 = (-r_1 x_1 + x_2) / \sqrt{1 - r_1 r_2}$. В этих переменных (5.1.1) сводится к виду $\ddot{a}_1 + \omega_1^2 a_1 = 0$, $\ddot{a}_2 + \omega_2^2 a_2 = 0$.

• Инерционная (индуктивная) связь

а. Консервативные системы. Рассмотрим пару LC - контуров, с катушками, имеющими коэффициент взаимной индукции M , отличный от нуля.

Применяя к каждому контуру второе правило Кирхгофа $\varepsilon_{САМ1;2} + U_{C1;2} + \varepsilon_{ВЗ1;2} = 0$ с учетом определения силы тока к каждому из контуров, получим [1.1,2,10]

$$L_1 \ddot{q}_1 + q_1 / C_1 + M \ddot{q}_2 = 0, \quad L_2 \ddot{q}_2 + q_2 / C_2 + M \ddot{q}_1 = 0 \quad (5.1.3)$$

Соответствующая механическая схема приведена ниже. Парциальные частоты здесь равны $\Omega_{1;2}^2 = \omega_{01;2}^2 = 1 / L_{1;2} C_{1;2}$. С их использованием (5.1.3)

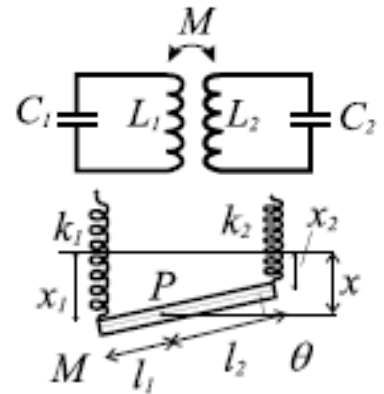


Рис. 5.1.2

можно переписать в виде $\ddot{q}_1 + \Omega_{01}^2 q_1 = -M L_1^{-1} \ddot{q}_2$, $\ddot{q}_2 + \Omega_{02}^2 q_2 = -M L_2^{-1} \ddot{q}_1$. Нормальные частоты здесь определяются соотношениями $(-\omega^2 + \Omega_1^2) Q_1 - M L_1^{-1} \omega^2 Q_2 = 0$, $-M L_2^{-1} \omega^2 Q_1 + (-\omega^2 + \Omega_2^2) Q_2 = 0$, которые найдены в предположении $q_{1;2} = Q_{1;2} \exp(i\omega t)$,

$$\text{откуда} \quad \begin{vmatrix} -\omega^2 + \Omega_1^2 & -M L_1^{-1} \omega^2 \\ -M L_2^{-1} \omega^2 & -\omega^2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) \omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \omega^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega_{1;2}^2 = \left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \mp \sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4 \Omega_1^2 \Omega_2^2 \frac{M^2}{L_1 L_2}} \right) \left(2 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) \right)^{-1}.$$

Коэффициенты распределения снова можно получить, находя их из каждого из алгебраических уравнений по отдельности: $r_{1;2} = \frac{X_{2;1}}{X_{1;2}} = \frac{\omega_{1;2}^2 - \Omega_{1;2}^2}{M / L_{1;2}}$, а общее решение (5.1.3) снова имеет вид суперпозиции колебаний на нормальных модах:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} A_1 e^{i\omega_1 t} + \begin{pmatrix} r_1 \\ 1 \end{pmatrix} A_2 e^{i\omega_2 t}.$$

б. *Диссипативные системы.* Система, описывающая колебания в индуктивно связанных контурах, рис. 5.1.2, следует из закона Кирхгофа для первой и второй цепи:

$$q_1/C_1 + \dot{I}_1 = -\dot{\Phi}_1, \quad q_1/C_2 + \dot{I}_2 = -\dot{\Phi}_2 \quad (5.1.4)$$

С учётом того, что $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$, $\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$, $I_1 = \dot{q}_1$, $I_2 = \dot{q}_2$, получаем систему в виде:

$$L_1 \ddot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + C_1^{-1} I_1 + M \ddot{I}_2 = 0, \quad M \ddot{I}_1 + R_2 \dot{I}_2 + C_2^{-1} I_2 + L_2 \ddot{I}_2 = 0 \quad (5.1.5)$$

Ищем её решение в виде: $I_1 = A e^{\omega t}$, $I_2 = B e^{\omega t}$. Подставляя это соотношение в (5.1.5), получаем систему, определитель которой должен быть равен нулю:

$$(\omega^2 L_1 + \omega R_1 + C_1^{-1})A + \omega^2 M B = 0, \quad \omega^2 M A + (\omega^2 L_2 + \omega R_2 + C_2^{-1})B = 0.$$

После преобразований, приходим к следующему уравнению 4 –й степени

$$(L_1 L_2 - M^2) \omega^4 + (L_1 R_2 + L_2 R_1) \omega^3 + \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} + R_1 R_2 \right) \omega^2 + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1} \right) \omega + \frac{1}{C_1 C_2} = 0 \quad (5.1.6)$$

с вещественными коэффициентами. По основной теореме алгебры оно имеет 4 комплексных корня, и их можно разбить на две пары комплексно сопряжённых. Вещественные части будут определять коэффициенты затухания, а мнимые - нормальные частоты: т.е. по два коэффициента затухания и нормальных частот.

Определить эти частоты довольно трудно. Нужно в это уравнение подставить решение в виде $\omega = -\gamma + i\omega_n$ и отделить мнимую часть от действительной. Получается очень громоздкая система из двух уравнений, которую решить в общем виде очень трудно. Зато парциальные частоты определяются очень легко. Для этого достаточно в уравнениях (5.1.6) поочерёдно положить $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$. Получаем уравнения:

$$L_1 \ddot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 + C_1^{-1} I_1 = 0, \quad L_2 \ddot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + C_2^{-1} I_2 = 0.$$

Колебания, соответствующие парциальным частотам, будут обычными затухающими колебаниями (из за индуктивной связи). Получаем

$$\omega_{p1}^2 = \left(\frac{1}{L_1 C_1} \right) - \left(\frac{R_1}{2L_1} \right)^2, \quad \omega_{p2}^2 = \left(\frac{1}{L_2 C_2} \right) - \left(\frac{R_2}{2L_2} \right)^2, \quad \gamma_{p1} = -\frac{R_1}{2L_1}, \quad \gamma_{p2} = -\frac{R_2}{2L_2}.$$

5.2 Нелинейные колебания в системах с 2-мя степенями свободы.

Двухконтурный автогенератор

Колебательный процесс в этой системе описывается следующей парой уравнений, которые записываются по аналогии с разделом 1.1 [I.2]:

$$L_1 C_1 \ddot{U}_1 + [R_1 C_1 - M_1 S_0 + M_1 S_2 U_1^2] \dot{U}_1 + U_1 + M_2 C_2 \ddot{U}_2 = 0, \quad L_2 C_2 \ddot{U}_2 + R_2 C_2 \dot{U}_1 + U_2 + M_2 C_1 \ddot{U}_1 = 0. \quad (5.2.1)$$

Парциальные частоты контуров

равны $\Omega_{1,2}^2 = L_{1,2}^{-1} C_{1,2}^{-1}$, их отношение

обозначим как $\zeta = n_2^2 / n_1^2$,

коэффициент связи (индуктивной)

контуров $\alpha = M_2^2 / L_1 L_2 < 1$, степень

возбуждения генератора

$\mu = \Omega_1 (M_1 S_0 - R_1 C_1)$, отношение

декремента затухания во втором

контуре к инкременту нарастания в первом равно $\delta = (R_2 L_1 C_1 / L_2) (M_1 S_0 - R_1 C_1)^{-1}$.

Введем также безразмерные переменные $t = t \Omega_1$, $x_1 = U_1 \sqrt{M_1 S_2 / (M_1 S_0 - R_1 C_1)}$,

$x_2 = U_2 (L_2 C_2 / M_1 C_1) \sqrt{M_1 S_2 / (M_1 S_0 - R_1 C_1)}$. Тогда система (5.2.1) примет вид

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \alpha \ddot{x}_2 = \mu [1 - x_1^2] \dot{x}_1, \quad \ddot{x}_2 + \zeta x_2 + \ddot{x}_1 = \mu \delta \dot{x}_2. \quad (5.2.2)$$

При $\mu = 0$ в этой системе наблюдаются колебания с нормальными частотами $\omega_{1,2}$, получающихся подстановкой при $\mu = 0$ в систему (5.2.2)

решений вида $x_{1,2} \sim \exp(i\omega t)$, что приводит к уравнению $(1 - \alpha) \frac{\omega^4}{\Omega_1^4} - (1 + \zeta) \frac{\omega^2}{\Omega_1^2} + \zeta = 0$,

имеющему корни $\frac{\omega_{1,2}^2}{\Omega_1^2} = \frac{1 + \zeta \pm \sqrt{(1 + \zeta)^2 - 4(1 - \alpha)\zeta}}{2(1 - \alpha)} = \frac{1 + \zeta \pm \sqrt{(1 - \zeta)^2 + 4\alpha\zeta}}{2(1 - \alpha)}$. Решение

(5.2.2) при $\mu = 0$ имеет вид $x_1 = a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} + \text{с.с.}$, $x_2 = a_1 \Psi_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 \Psi_2 e^{i\omega_2 t} + \text{с.с.}$

Подстановка их в (5.2.2) приводит к алгебраическим уравнениям

$$\begin{cases} (1 - \omega_1^2 - \alpha \Psi_1 \omega_1^2) a_1 + (1 - \omega_2^2 - \alpha \Psi_2 \omega_2^2) a_2 = 0, \\ (\zeta - \omega_1^2 - \Psi_1 \omega_1^2) a_1 + (\zeta - \omega_2^2 - \Psi_2 \omega_2^2) a_2 = 0 \end{cases} \quad \text{из условия существования нетривиального}$$

решения этой системы $\begin{vmatrix} 1 - \omega_1^2 - \alpha \Psi_1 \omega_1^2 & 1 - \omega_2^2 - \alpha \Psi_2 \omega_2^2 \\ \zeta - \omega_1^2 - \Psi_1 \omega_1^2 & \zeta - \omega_2^2 - \Psi_2 \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0$

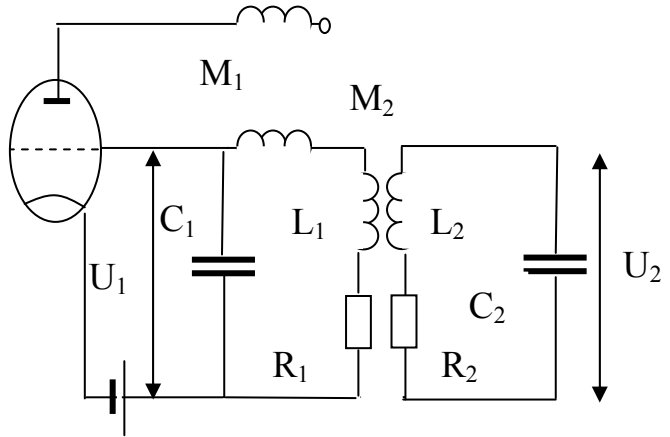


Рис. 5.2.1

приводит нас к выражениям для $\Psi_{1;2}$: $\Psi_{1;2} = \left(1 - \frac{\omega_{1;2}^2}{\Omega_1^2}\right) \left(\alpha \frac{\omega_{1;2}^2}{\Omega_1^2}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega_{1;2}^2}{\Omega_1^2}\right) \left(\zeta - \frac{\omega_{1;2}^2}{\Omega_1^2}\right)^{-1}$.

Если $\mu \ll 1$, $\delta < 1$ для решения системы (5.2.2) можно воспользоваться методом ван дер Поля и разыскивать решения в виде $x_1 = a_1(t)e^{i\omega_1 t} + a_2(t)e^{i\omega_2 t} + \text{с.с.}$,

$x_2 = a_1(t)\Psi_1 e^{i\omega_1 t} + a_2(t)\Psi_2 e^{i\omega_2 t} + \text{с.с.}$. Подставляя эти соотношения в (5.2.2) получим

$$\begin{aligned} & \left(\ddot{a}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \omega_1^2 a_1\right) e^{i\omega_1 t} + \underline{a_1} e^{i\omega_1 t} + \alpha \Psi_1 \left(\ddot{a}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \omega_1^2 a_1\right) e^{i\omega_1 t} + \text{с.с.} + \\ & + \left(\ddot{a}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \omega_2^2 a_2\right) e^{i\omega_2 t} + \underline{a_2} e^{i\omega_2 t} + \alpha \Psi_2 \left(\ddot{a}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \omega_2^2 a_2\right) e^{i\omega_2 t} + \text{с.с.} = \\ & = \mu \left[1 - \left(a_1^2 e^{2i\omega_1 t} + 2a_1 a_2 e^{i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} + a_2^2 e^{2i\omega_2 t} + \text{с.с.}\right) - 2 \left(|a_1|^2 + a_1 a_2^* e^{i\omega_1 t} e^{-i\omega_2 t} + a_2 a_1^* e^{-i\omega_1 t} e^{i\omega_2 t} + |a_2|^2\right) \right] \cdot \\ & \cdot \left(\left(\dot{a}_1 + i\omega_1 a_1\right) e^{i\omega_1 t} + \left(\dot{a}_2 + i\omega_2 a_2\right) e^{i\omega_2 t} + \left(\dot{a}_1^* - i\omega_1 a_1^*\right) e^{-i\omega_1 t} + \left(\dot{a}_2^* - i\omega_2 a_2^*\right) e^{-i\omega_2 t} \right), \\ & \left(\ddot{a}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \omega_1^2 a_1\right) e^{i\omega_1 t} + \underline{\zeta a_1} e^{i\omega_1 t} + \Psi_1 \left(\ddot{a}_1 + 2i\omega_1 \dot{a}_1 - \omega_1^2 a_1\right) e^{i\omega_1 t} + \text{с.с.} + \\ & + \left(\ddot{a}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \omega_2^2 a_2\right) e^{i\omega_2 t} + \underline{\zeta a_2} e^{i\omega_2 t} + \Psi_2 \left(\ddot{a}_2 + 2i\omega_2 \dot{a}_2 - \omega_2^2 a_2\right) e^{i\omega_2 t} + \text{с.с.} = \\ & = \mu \delta \left(\Psi_1 \left(\dot{a}_1 + i\omega_1 a_1\right) e^{i\omega_1 t} + \Psi_2 \left(\dot{a}_2 + i\omega_2 a_2\right) e^{i\omega_2 t} \right) + \text{с.с.} \end{aligned}$$

Для получения уравнения для a_1 умножим уравнения на $e^{-i\omega_1 t}$, а для a_2 - на $e^{-i\omega_2 t}$ и оставим в уравнениях только слагаемые, перед которыми не стоит экспоненциальный множитель того или иного вида - все эти слагаемые осциллируют и при усреднении по времени исчезают. В результате получим

$$\begin{aligned} (1 + \alpha \Psi_1) 2i\omega_1 \dot{a}_1 &= \mu \left[i\omega_1 a_1 - 2i\omega_1 \left(|a_1|^2 + |a_2|^2\right) a_1 - 2i\omega_2 a_2 a_1 a_2^* \right], \quad (1 + \Psi_1) 2i\omega_1 \dot{a}_1 = \mu \delta \Psi_1 i\omega_1 a_1; \\ (1 + \alpha \Psi_2) 2i\omega_2 \dot{a}_2 &= \mu \left[i\omega_2 a_2 - 2i\omega_2 \left(|a_1|^2 + |a_2|^2\right) a_2 - 2i\omega_1 a_1 a_2 a_1^* \right], \quad (1 + \Psi_2) 2i\omega_2 \dot{a}_2 = \mu \delta \Psi_2 i\omega_2 a_2, \end{aligned}$$

откуда после приведения

$$\begin{cases} (1 - \alpha) \Psi_1 \dot{a}_1 = \mu \left[\frac{a_1}{2} - \left(|a_1|^2 + |a_2|^2\right) a_1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} a_2 a_1 a_2^* \right] - \frac{\mu \delta \Psi_1}{2} a_1, \\ (1 - \alpha) \Psi_2 \dot{a}_2 = \mu \left[\frac{a_2}{2} - \left(|a_1|^2 + |a_2|^2\right) a_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} a_1 a_2 a_1^* \right] - \frac{\mu \delta \Psi_2}{2} a_2. \end{cases}$$

Перейдем далее к действительным амплитудам и фазам по формулам $a_{1;2} = A_{1;2} \exp(i\varphi_{1;2})$. Тогда, после сокращения на $\exp(i\varphi_{1;2})$

$$\begin{cases} (1 - \alpha) \Psi_1 (\dot{A}_1 + iA_1 \dot{\varphi}_1) = \mu \left[\frac{A_1}{2} - \left(A_1^2 + A_2^2\right) A_1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} A_2^2 A_1 \right] - \frac{\mu \delta \Psi_1}{2} A_1, \\ (1 - \alpha) \Psi_2 (\dot{A}_2 + iA_2 \dot{\varphi}_2) = \mu \left[\frac{A_2}{2} - \left(A_1^2 + A_2^2\right) A_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2} A_1^2 A_2 \right] - \frac{\mu \delta \Psi_2}{2} A_2. \end{cases}$$

После простых преобразований окончательно имеем

$$\dot{A}_1 = \mu \eta_1 [1 - (A_1^2 + \alpha_{12} A_2^2)] A_1 / 2; \quad \dot{A}_2 = \mu \eta_2 [1 - (A_2^2 + \alpha_{21} A_1^2)] A_2 / 2; \quad \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0.$$

$$\text{где} \quad \eta_{1;2} = \sigma_{1;2} \lambda_{1;2}, \quad \sigma_{1;2} = \pm \frac{\omega_{1;2}^4}{4} \frac{\omega_{2;1}^2 - 1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}, \quad \lambda_{1;2} = 1 \left(1 - \frac{\delta}{\zeta} \frac{\Psi_{1;2}}{\Psi_{2;1}} \right), \quad \alpha_{12;21} = \frac{2\lambda_{2;1}}{\lambda_{1;2}} -$$

коэффициенты нелинейной связи мод. Т.о. колебания в генераторе происходят на тех же частотах, что и в линейной системе – фазы постоянны. Это дает возможность исследовать амплитудные уравнения отдельно. Вводя время $\tau = \mu t$ и величину $m_{1;2} = A_{1;2}^2$, имеем весьма распространенную систему [1.2]

$$\dot{m}_1 = \mu \eta_1 [1 - (m_1 + \alpha_{21} m_2)] m_1, \quad \dot{m}_2 = \mu \eta_2 [1 - (m_2 + \alpha_{12} m_1)] m_2.$$

6 Колебания в динамических системах с 2.5 степенями свободы.

• Осцилляторы с индуктивной связью

Колебательный процесс в показанной на рис. 5.1.3 системе связанных контуров под действием гармонической силы описывается парой уравнений, приведенных ранее с учетом обобщенных внешних сил, действующих в контурах. Обезразмерим эти уравнения для упрощения описания колебаний в системе и сокращения количества управляющих параметров:

$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + 2\gamma_1 \frac{dI_1}{dt} + \Omega_1^2 I_1 + \frac{M}{L_1} \frac{d^2 I_2}{dt^2} = F_1(t)$ $\Downarrow$ $\Omega_1^2 \frac{d^2 I_1}{d(\Omega_1 t)^2} + 2\gamma_1 \Omega_1 \frac{dI_1}{d\Omega_1 t} + \Omega_1^2 I_1 + \Omega_1^2 \frac{M}{L_1} \frac{d^2 I_2}{d(\Omega_1 t)^2} = F_1(t)$ $\Downarrow$ $\frac{d^2 I_1}{dt^2} + I_1 + \frac{M}{L_1} \frac{d^2 I_2}{dt^2} = -\frac{2\gamma_1}{\Omega_1} \frac{dI_1}{dt} + \frac{F_1(t)}{\Omega_1^2}$ $\Downarrow$ $\frac{d^2 I_1}{dt^2} + I_1 + \frac{M}{L_1} \frac{M}{L_2} \frac{d^2 \left(\frac{L_2}{M} I_2 \right)}{dt^2} = -\frac{2\gamma_1}{\Omega_1} \frac{dI_1}{dt} + \frac{F_1(t)}{\Omega_1^2}$ $\Downarrow$	$\frac{d^2 J_1}{dt^2} + J_1 + \frac{M^2}{L_1 L_2} \frac{d^2 J_2}{dt^2} = -\frac{2\gamma_1}{\Omega_1} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{F_1(t)}{\Omega_1^2}$ $\Downarrow$ $\frac{d^2 J_1}{dt^2} + J_1 + \alpha \frac{d^2 J_2}{dt^2} = -\mu \frac{dJ_1}{dt} + f_1(t) \quad (6.1.1)$ $\frac{d^2 I_2}{dt^2} + 2\gamma_2 \frac{dI_2}{dt} + \Omega_2^2 I_2 + \frac{M}{L_2} \frac{d^2 I_1}{dt^2} = F_2(t),$ $\Downarrow$ $\Omega_2^2 \frac{d^2 I_2}{d(\Omega_2 t)^2} + 2\gamma_2 \Omega_2 \frac{dI_2}{d\Omega_2 t} + \Omega_2^2 I_2 + \Omega_2^2 \frac{M}{L_2} \frac{d^2 I_1}{d(\Omega_2 t)^2} = F_2(t)$ $\Downarrow$ $\frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} I_2 + \frac{M}{L_2} \frac{d^2 I_1}{dt^2} = -\frac{2\gamma_2}{\Omega_1} \frac{dI_2}{dt} + \frac{F_2(t)}{\Omega_1^2}$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ \frac{M}{L_2} \frac{d^2 \left(\frac{L_2}{M} I_2 \right)}{dt^2} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} \frac{M L_2}{L_2 M} I_2 + \frac{M}{L_2} \frac{d^2 I_1}{dt^2} = - \frac{2\gamma_2}{\Omega_1} \frac{M}{L_2} \frac{d \left(\frac{L_2}{M} I_2 \right)}{dt} + \frac{F_2(t)}{\Omega_1^2} \end{array} \left| \begin{array}{c} \frac{d^2 J_2}{dt^2} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} J_2 + \frac{d^2 J_1}{dt^2} = - \frac{2\gamma_2}{\Omega_1} \frac{d J_2}{dt} + \frac{L_2}{M} \frac{F_2(t)}{\Omega_1^2} \\ \Downarrow \\ \frac{d^2 J_2}{dt^2} + \zeta J_2 + \frac{d^2 J_1}{dt^2} = - \mu \delta \frac{d J_2}{dt} + f_2(t) \end{array} \right. \quad (6.1.2)$$

Здесь $\Omega_{1,2}^2 = L_{1,2}^{-1} C_{1,2}^{-1}$, $\zeta = \Omega_2^2 / \Omega_1^2$ - парциальные частоты контуров и их отношение, $2\gamma_{1,2} = R_{1,2} / L_{1,2}$ - коэффициенты диссипации, $J_1 = I_1$, $J_2 = L_2 I_2 / M$, $\alpha = M^2 / L_1 L_2 < 1$ - коэффициент индуктивной связи контуров, $\mu = 2\gamma_1 / \Omega_1$, $\delta = \gamma_2 / \gamma_1$ - отношение декрементов затухания в контурах, $f_1(t) = F_1(t) / \Omega_1^2$, $f_2(t) = L_2 F_2(t) / M \Omega_1^2$.

Будем полагать, что внешние силы $f_{1,2}(t)$ являются гармоническими и представим их в комплексном виде: $f_{1,2}(t) = \Phi_{1,2} e^{i\Omega t}$. Будем интересоваться вынужденным решением системы (6.1.1), (6.1.2), разыскивая его в виде $J_{1,2} = X_{1,2} \exp(i\Omega t)$. В результате получим

$$\begin{aligned} -\Omega^2 X_1 e^{i\Omega t} + X_1 e^{i\Omega t} - \alpha \Omega^2 X_2 e^{i\Omega t} &= -i\mu \Omega X_1 e^{i\Omega t} + \Phi_1 e^{i\Omega t} \Rightarrow (1 - \Omega^2 + i\mu \Omega) X_1 - \alpha \Omega^2 X_2 = \Phi_1 \\ -\Omega^2 X_2 e^{i\Omega t} + \zeta X_2 e^{i\Omega t} - \Omega^2 X_1 e^{i\Omega t} &= -i\mu \delta \Omega X_2 e^{i\Omega t} + \Phi_2 e^{i\Omega t} \Rightarrow -\Omega^2 X_1 + (\zeta - \Omega^2 + i\mu \delta \Omega) X_2 = \Phi_2 \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

Используя для решения системы (6.1.3), например, *правило Крамера* [Ш.19-21], приходим к выражениям для амплитуд колебаний осцилляторов:

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} \Phi_1 & -\alpha \Omega^2 \\ \Phi_2 & \zeta - \Omega^2 + i\mu \delta \Omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \Omega^2 + i\mu \Omega & -\alpha \Omega^2 \\ -\Omega^2 & \zeta - \Omega^2 + i\mu \delta \Omega \end{vmatrix}} \Rightarrow X_1 = \frac{(\zeta - \Omega^2 + i\mu \delta \Omega) \Phi_1 + \alpha \Omega^2 \Phi_2}{(1 - \Omega^2 + i\mu \Omega)(\zeta - \Omega^2 + i\mu \delta \Omega) - \alpha \Omega^4}, \quad (6.1.4)$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \Omega^2 + i\mu \Omega & \Phi_1 \\ -\Omega^2 & \Phi_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \Omega^2 + i\mu \Omega & -\alpha \Omega^2 \\ -\Omega^2 & \zeta - \Omega^2 + i\mu \delta \Omega \end{vmatrix}} \Rightarrow X_2 = \frac{\Omega^2 \Phi_1 + (1 - \Omega^2 + i\mu \Omega) \Phi_2}{(1 - \Omega^2 + i\mu \Omega)(\zeta - \Omega^2 + i\mu \delta \Omega) - \alpha \Omega^4}. \quad (6.1.5)$$

На рис.6.1.1 приведены резонансные кривые $\text{Re}[X_{1,2}]$ при различных силах, действующих на контуры и коэффициентах связи осцилляторов. На рис.6.1.2 приведены резонансные кривые $\text{Re}[X_{1,2}]$ при различных отношениях парциальных частот осцилляторов.

Резонансные кривые демонстрируют следующие эффекты:

1. Если частота внешней силы Ω близка к одной из *нормальных* частот осцилляторов, то наступает резонанс.
2. Если частота внешней силы Ω , действующая на 1-й осциллятор, совпадает с *парциальной* частотой 2-го осциллятора Ω_2 , то 1-й осциллятор не колеблется $\text{Re}[X_1] = 0$. Это явление называется *динамическим демпфированием*.

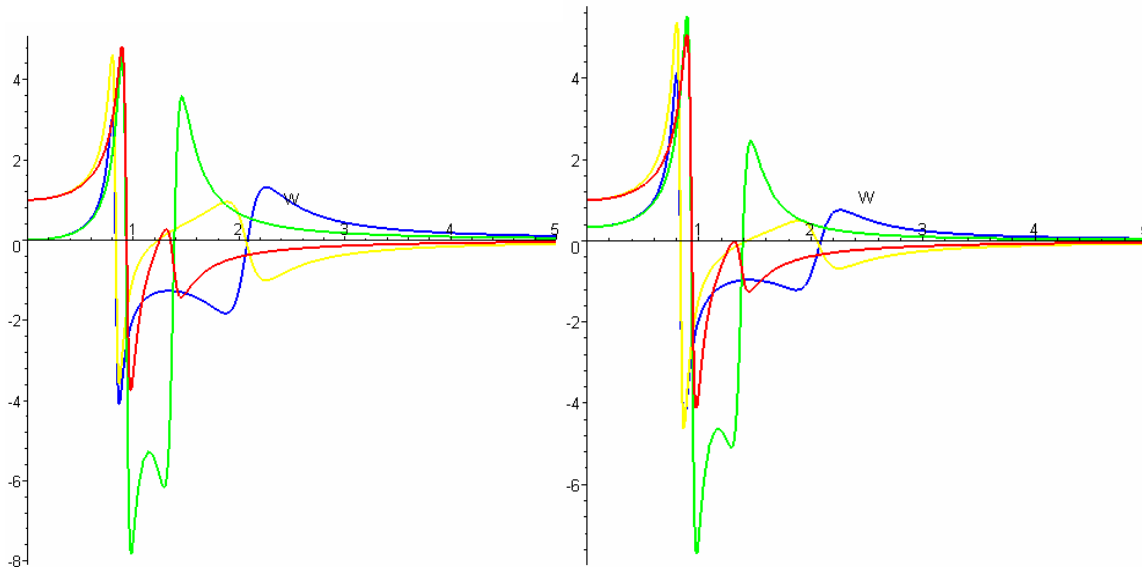


Рис.6.1.1 Резонансные кривые $\text{Re}[X_1]$ (зеленые – при $\alpha_1=0.1$, синие - $\alpha_2=0.5$) и $\text{Re}[X_2]$ (красные – при $\alpha_1=0.1$, желтые - при $\alpha_2=0.5$) при значениях параметров: $\mu=0.1$, $\delta=1.2$, $\zeta=1.5$ и значениях обобщенных сил: $\Phi_1=1$; $\Phi_{21}=0$, $\Phi_{22}=0.5$.

3. При воздействии на один осциллятор внешней силы, 2-й будет колебаться так же, как 1-й при воздействии внешней силы на 2-й, рис.3. Это – *теорема взаимности*.
4. Для возникновения резонанса в связанной системе *необходимо, но не достаточно*, чтобы частота внешней силы совпадала с одной из собственных частот, рис.6.1.1.

Кроме того, как показано в [1,2], если в системе присутствует и индуктивная и емкостная связи, то при некотором значении частоты внешней силы один из осцилляторов не колеблется – происходит *компенсация связей* и колебания от одного осциллятора не передаются другому.

• **Осцилляторы с емкостной связью под действием гармонической силы**

Рассмотрим поведение осцилляторов с емкостной (инерционной) связью под действием гармонической внешней силы. В этом случае колебания с использованием метода комплексификации описываются системой

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\gamma_1 \frac{dx_1}{dt} + \Omega_1^2 x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = \frac{F_1 e^{i\Omega t}}{m_1}, \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} + 2\gamma_2 \frac{dx_2}{dt} + \Omega_2^2 x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 = \frac{F_2 e^{i\Omega t}}{m_2}. \quad (6.2.1)$$

Будем интересоваться вынужденным решением системы (6.2.1), разыскивая его в виде $x_{1;2} = X_{1;2} \exp(i\Omega t)$. В результате получим

$$\left(-\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2\right)X_1 - \frac{k}{m_1}X_2 = \frac{F_1}{m_1}; \quad -\frac{k}{m_2}X_1 + \left(-\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2\right)X_2 = \frac{F_2}{m_2}.$$

Используя, например, *правило Крамера* [Ш.19-21], приходим к выражениям для амплитуд колебаний каждого из осцилляторов, приведенные на при рис. 6.1.3 $F_2 = 0$ (пунктир – второй осциллятор, первый график - $\gamma_{1;2} = 0$).

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{F_1}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ \frac{F_2}{m_2} & -\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2 & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & -\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}} \Rightarrow X_1 = \frac{\left(-\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2\right)\frac{F_1}{m_1} + k\frac{F_2}{m_1 m_2}}{\left(\Omega^2 + 2i\gamma_1 - \Omega_1^2\right)\left(\Omega^2 + 2i\gamma_2 - \Omega_2^2\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2}},$$

$$X_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2 & \frac{F_1}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{F_2}{m_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\Omega^2 + 2i\gamma_1 + \Omega_1^2 & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & -\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2 \end{vmatrix}} \Rightarrow X_2 = \frac{\left(-\Omega^2 + 2i\gamma_2 + \Omega_2^2\right)\frac{F_2}{m_2} + k\frac{F_1}{m_1 m_2}}{\left(\Omega^2 + 2i\gamma_1 - \Omega_1^2\right)\left(\Omega^2 + 2i\gamma_2 - \Omega_2^2\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2}}$$

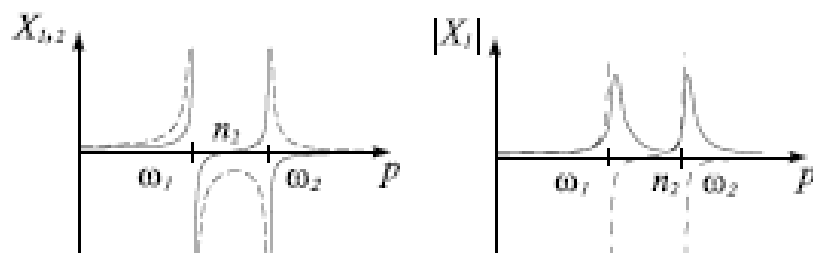


Рис. 6.1.3

7 Волновые процессы

Определений волны существует великое множество. Здесь будет использоваться следующее определение, связывающее волновые процессы с колебательными.

Волновой процесс – это колебательный процесс в системе, состоящей из большого числа элементов [1.1-3].

В самом деле, в теории колебаний мы имели дело с конечным числом элементов системы, включающих один или несколько осцилляторов. Естественным является вопрос: а как будет выглядеть модель, характеризующая колебательный процесс в дискретной среде с конечным, но большим количеством элементов $N \gg 1$ и в непрерывной среде с бесконечным количеством элементов $N \rightarrow \infty$?

7.1 Колебания в цепочках

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим несколько примеров из различных разделов физики, где мы опишем колебательный процесс в дискретных средах с конечным, но большим количеством элементов $N \gg 1$ (цепочках), а затем совершим предельный переход $N \rightarrow \infty$.

Пример 1. Маятники, связанные пружинами. Рассмотрим цепочку шариков массой m , связанных пружинами жесткостью k , пренебрегая трением шариков о подложку [1.2]. Тогда, для n – го шарика с координатой $na + \Xi_n$ из 2-го закона Ньютона, в пределе упругих деформаций пружин, описывающихся законом Гука, получаем:

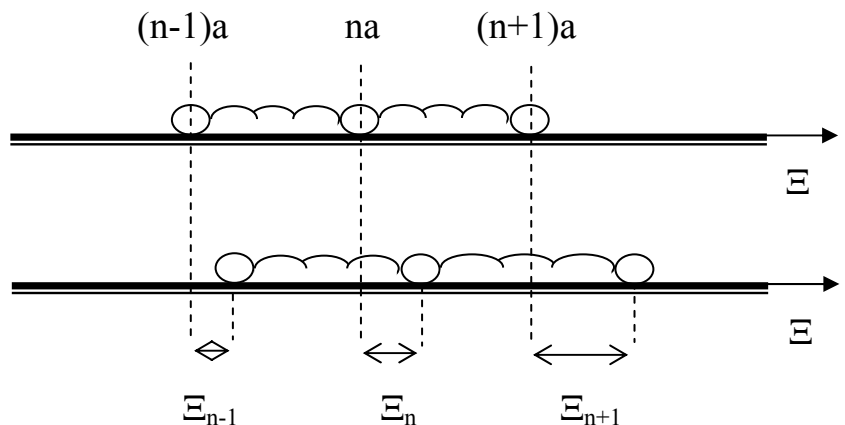


Рис. 7.1.1

$$m \frac{d^2 \Xi_n}{dt^2} = -k(\Xi_n - \Xi_{n+1}) - k(\Xi_{n-1} - \Xi_n) = k(\Xi_{n+1} - 2\Xi_n + \Xi_{n-1}). \quad (7.1.1)$$

Частное решение уравнения (7.1.1) будем искать в виде $\Xi_n = C \exp(i\omega t - iqn a)$. Подставив это соотношение в уравнение (7.1.1), получим, сокращая на константу C $-m\omega^2 e^{i\omega t - iqn a} = k(e^{i\omega t - iq(n+1)a} - 2e^{i\omega t - iqn a} + e^{i\omega t - iq(n-1)a})$. Тогда, окончательно имеем соотношение, связывающее частоту колебаний шарика с параметрами среды – расстоянием между шариками a и количеством Λ элементов среды, вовлеченных в процесс связанных колебаний $\Lambda \sim q^{-1}$:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} (2 - (\exp(iqa) + \exp(-iqa))) = 2 \frac{k}{m} \left(1 - \frac{\exp(iqa) + \exp(-iqa)}{2} \right) = 2 \frac{k}{m} (1 - \cos(qa)) = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{qa}{2}.$$

В пределе отсутствия связей $qa \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\Lambda} \rightarrow 0$ отсюда получается собственная частота колебаний шарика на пружине.

Пример 2 Цепочки связанных RLC – контуров. Емкостная связь

Рассмотрим
линию, состоящую
из большого числа
связанных через
конденсаторы RLC –
контуров [1.2, II.46].

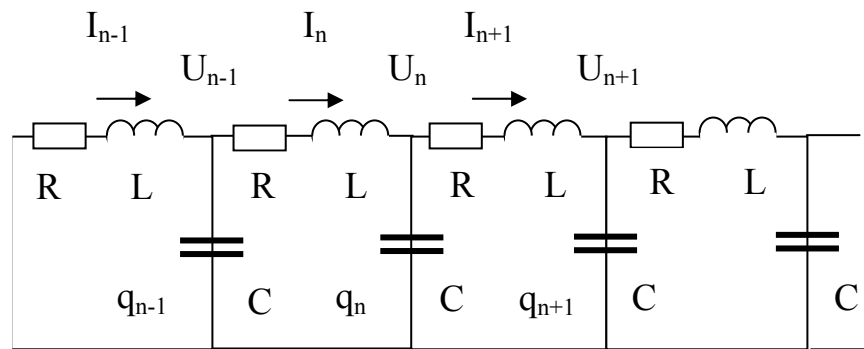


Рис. 7.1.2

Применив к n – му
контуру 2 – е

правило Кирхгофа и первые правила к $n - 1$ – му и n – му узлам, получим

$$I_n R + L \frac{dI_n}{dt} - \frac{q_n}{C} + \frac{q_{n-1}}{C} = 0, \quad I_{n-1} = \frac{dq_{n-1}}{dt} + I_n, \quad I_n = \frac{dq_n}{dt} + I_{n+1}.$$

Дифференцируем первое уравнение, используя законы сохранения заряда в узлах. В результате приходим к уравнению

$$R \frac{dI_n}{dt} + L \frac{d^2 I_n}{dt^2} - \frac{1}{C} \frac{dq_n}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq_{n-1}}{dt} = 0 \Rightarrow L \frac{d^2 I_n}{dt^2} + R \frac{dI_n}{dt} - \frac{I_n - I_{n+1}}{C} + \frac{I_{n-1} - I_n}{C} = 0.$$

Окончательно, деля на L , имеем

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI_n}{dt} + \frac{I_{n-1} - 2I_n + I_{n+1}}{LC} = 0. \quad (7.1.2)$$

Уравнение (7.1.2) отличается от (7.1.1) только вторым слагаемым, которое

учитывает потери энергии на джоулев нагрев, не принимаемые во внимание при выводе уравнения (7.1.1).

1.2 Предельный переход к волновому процессу

Уравнения (7.1.1), (7.1.2) допускают весьма прозрачный переход к непрерывному пределу. Характерный размер отдельной ячейки равен a . Будем считать количество Λ элементов среды, вовлеченных в процесс связанных колебаний (пространственный масштаб движений) в цепочке много большим a . Тогда можно записать следующие соотношения

$$I_{n-1}(t) \leftrightarrow I(x-a, t) \approx I(x, t) - \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots, \quad I_n(t) \leftrightarrow I(x, t),$$

$$I_{n+1}(t) \leftrightarrow I(x+a, t) \approx I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} a^2 + \dots$$

Подставляя эти соотношения в (7.1.2), получим уравнение, приведенное к одной произвольной точке пространства x :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{I - \frac{\partial I}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} a^2 - 2I + I + \frac{\partial I}{\partial x} a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} a^2}{LC} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{a^2}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (7.2.1)$$

Это уравнение при $R \rightarrow 0$ называют уравнением Клейна-Гордона, а при $R \rightarrow 0$, $a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \gg 1$ - волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{a^2}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0. \quad (7.2.2))$$

Число параметров системы, позволяющих определить ее состояние, бесконечно, поскольку, чтобы рассчитать изменения параметров приведенных задач, в начальный момент надо задать не две константы, как для простейшей колебательной системы, а две функции - $I(x, 0)$ и $\left. \frac{\partial I}{\partial t} \right|_{t=0}$, определенные для бесконечно большого числа значений x . Таким образом, волновые процессы описываются распределенными системами, то есть дифференциальными уравнениями в частных производных.

7.3 Классификация волновых процессов

Классификация волновых процессов несколько отличается от классификации колебательных процессов. Единым, пожалуй, является деление волн на линейные и нелинейные. Волны называют линейными, если они описываются линейными уравнениями, и нелинейными, если они описываются нелинейными уравнениями.

Часть отличий в классификации является, формальными, появляющимися в силу переноса центра тяжести при описании волнового процесса с отдельного элемента на саму среду (при предельном переходе, описанном в параграфе 7.2, свойства отдельного элемента нивелируются).

В самом деле, волновой процесс может происходить в отсутствие внешних воздействий, а может и в их присутствии. При этом, однако, не принято говорить о волнах свободных и вынужденных. Это, как мы увидим ниже, прежде всего, связано с методами решения

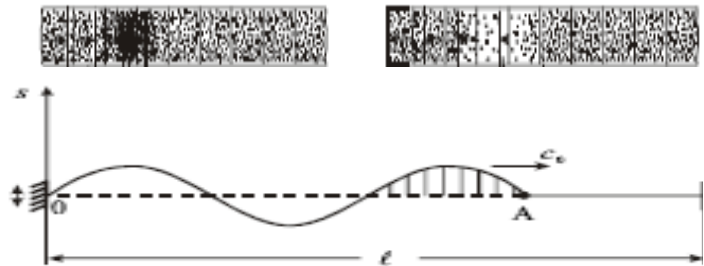


Рис. 7.3.1

уравнений, описывающих соответствующие волновые процессы. Также не говорят о волнах консервативных и диссипативных, а говорят о волнах в консервативных и диссипативных средах.

Следующий критерий, по которому принято классифицировать волновые процессы, также связан со свойствами среды, точнее, с наличием у среды границ (более точно, с характером взаимодействия волны с границей), но не имеет аналога в колебательных системах. Волны в безграничных средах или в ограниченных средах с полностью поглощающими границами называют бегущими, в а ограниченных – стоячими.

Последние два критерия уже специфичны именно для волн.

Если изменения параметров, характеризующих волновой процесс, происходят в направлении движения волны, то такие волны называют

продольными, а если в направлении, перпендикулярном направлению движения волны, то поперечными, рис.7.3.1.

Наконец, последний критерий связан с формой поверхности, на которых фаза волны постоянна – фронта волны. Говорят, что волна плоская, если фронт – плоскость, сферическая, если сфера и т.д., рис. 7.3.2.

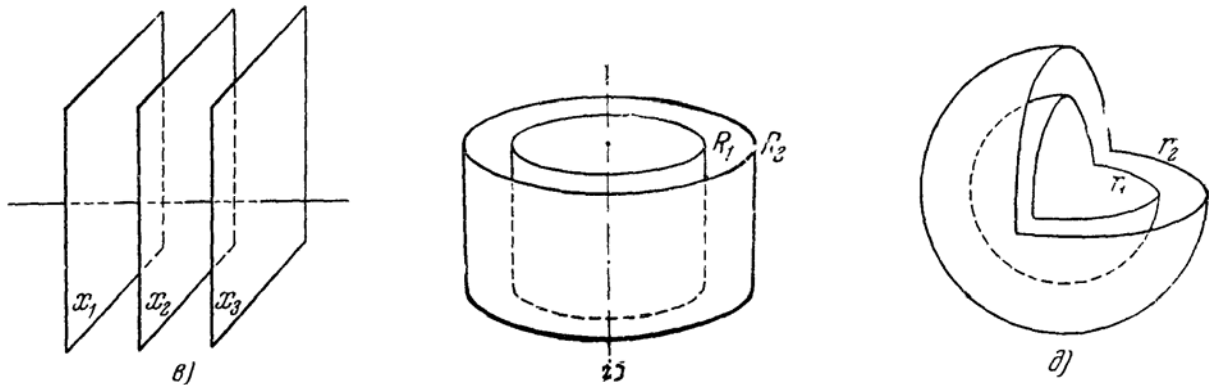


Рис. 7.3.2

Кроме того, у нелинейных волн существует своя специфическая классификация, связанная с характером взаимодействия волн, но она будет рассмотрена ниже, в соответствующем разделе.

7.4. Примеры волновых процессов.

Пример 1.

Продольные волны в стержнях. Такие волны могут быть возбуждены ударом молотка по одному из торцов упругого стержня [1.1, III.26,27]. Возмущение, распространяющееся вдоль стержня, визуально незаметно, однако основные закономерности

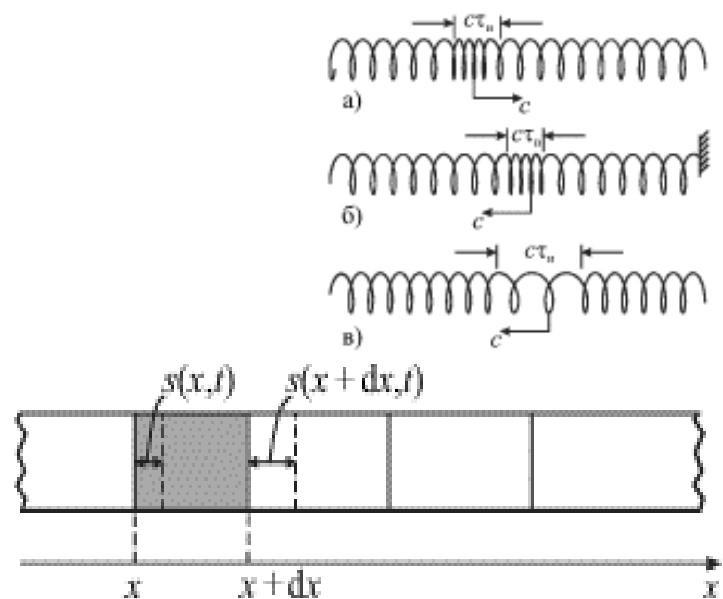


Рис. 7.4.1

такого волнового процесса можно смоделировать, если вместо стержня

использовать

длинную

пружину

большим

диаметром

витков. Если эту

пружину

подвесить

горизонтально на

нескольких нитях

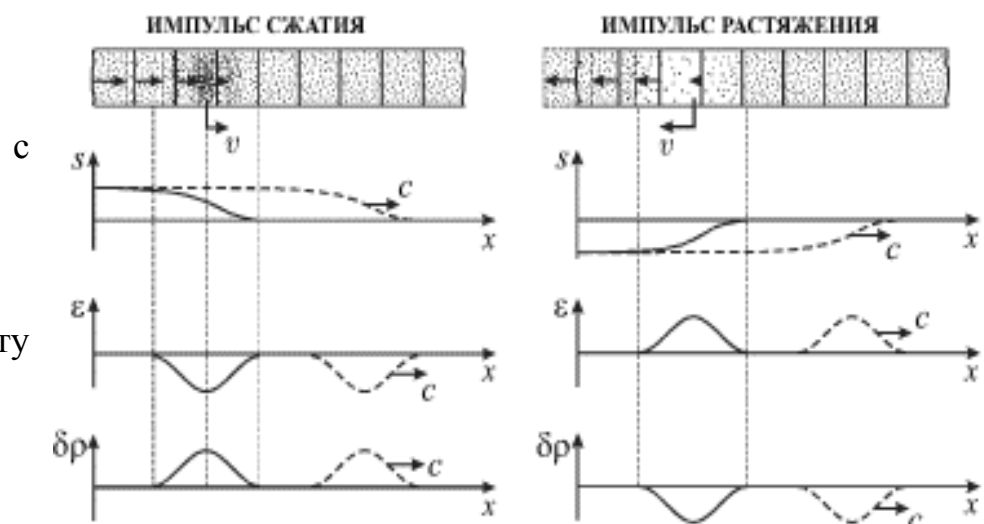


Рис. 7.4.2

и резко ударить ладонью по левому торцу, то по ней побежит импульс сжатия с некоторой скоростью. Добежав до правого конца пружины, он отразится, при этом, если конец закреплен, то отраженный импульс будет также импульсом сжатия. Если правый конец свободен, то отраженный импульс будет импульсом растяжения. Он возникает в момент смещения вправо свободного конца пружины, когда до него добежит импульс сжатия.

Рассмотрим теперь распространение импульсов сжатия и растяжения в стержне. Мысленно разобьем стержень на ряд элементов длиной dx каждый. При распространении продольной волны концы каждого элемента, отмеченные на рисунке сплошными линиями, будут смещены в новые положения, отмеченные пунктиром. Эти смещения s будем считать положительными, если они происходят в положительном направлении оси Ox , и отрицательными - в противоположном случае. Пусть левый конец некоторого элемента, имеющий координату x , сместился в данный момент времени на расстояние $s(x,t)$, а правый конец - на $s(x+dx,t)$. Деформация растяжения (сжатия) определяется относительным удлинением элемента dx : $\varepsilon(x,t) = \frac{s(x+dx,t) - s(x,t)}{dx} = \frac{\partial s}{\partial x}$. В отличие от поперечной волны, при растяжении (сжатии) уменьшается (увеличивается) плотность среды ρ . Ее можно представить в виде $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $\delta\rho \ll \rho_0$. С учетом постоянства массы деформируемого элемента dx можем

записать $\rho_0 dx = (\rho_0 + \delta\rho)[dx + s(x + dx, t) - s(x, t)] = (\rho_0 + \delta\rho)(1 + \varepsilon)$. Раскрывая скобки и пренебрегая малой величиной второго порядка $\delta\rho \cdot \varepsilon$, находим: $\delta\rho / \rho_0 = -\varepsilon$. Спустя некоторое время после удара по торцу стержня (или после резкого оттягивания этого торца) распределение смещений деформаций и возмущений плотности $\delta\rho$ в бегущих импульсах сжатия и растяжения будут иметь вид, показанный на рисунке. Пунктиром показаны распределения всех величин в один из последующих моментов времени. Уравнение волны, бегущей вдоль оси Ox , в обоих случаях имеет вид $\varepsilon = \partial s / \partial x$ и колебательная скорость $v = \partial s / \partial t$ элемента связаны соотношением $\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial s}{\partial t}$.

Рассчитаем скорость распространения продольных волн. На рисунке изображен фрагмент стержня и показан его элемент dx к концам которого приложены нормальные напряжения σ_n . Уравнение движения элемента с поперечным сечением равным S имеет вид:

$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = (\sigma_n(x - dx, t) - \sigma_n(x, t))S. \quad (7.4.1)$$

Чтобы (7.4.1) преобразовать к волновому уравнению, необходимо связать напряжения σ_n с деформациями элементов стержня. Наиболее просто это можно сделать для тонкого стержня. Если стержень тонкий, то деформации и напряжения вдоль координаты x связаны законом Гука:

$$\sigma_n(x, t) = E \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_x; \sigma_n(x + dx, t) = E \frac{\partial s}{\partial x} \Big|_{x+dx} \quad (7.4.2)$$

где E - модуль Юнга. Подставляя (7.4.2) в (7.4.1) и производя деление на $\rho_0 S dx$, получаем волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0.$$

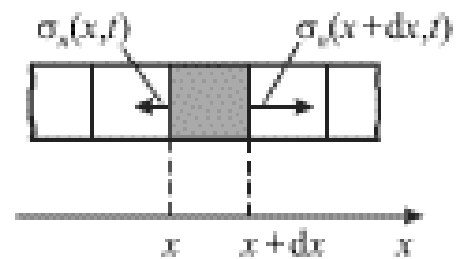


Рис. 7.4.3

Пример 2. Электромагнитные волны. Электромагнитные волны описываются системой уравнений Максвелла [I.15]

$$\begin{cases} \nabla \vec{D} = 4\pi \rho, \\ \nabla \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Будем рассматривать систему (7.4.3) в среде, где отсутствуют свободные

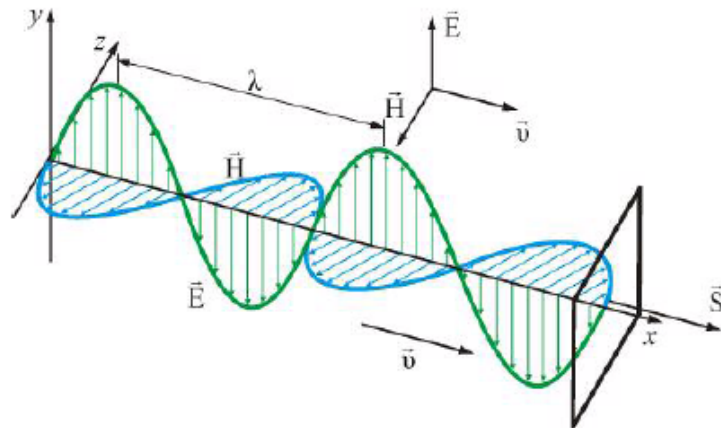


Рис. 7.4.4

заряды $\rho = 0$ и токи $\vec{j} = 0$. Продифференцируем, например, четвертое уравнение системы (1.4.3) по времени и учтем третье уравнение этой системы:

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla \times (c \nabla \times \vec{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Воспользовавшись вторым уравнением системы (7.4.3), имеем окончательно для напряженности магнитного поля

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon \mu} \nabla^2 \vec{H} = 0. \quad (7.4.4)$$

Аналогично получаем уравнение для напряженности электрического поля

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon \mu} \nabla^2 \vec{E} = 0. \quad (7.4.5)$$

Пример 3. Акустические волны. Исходными уравнениями для описания звуковых волн являются уравнения Навье-Стокса [I.16,17; II.44,56]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) = 0, \quad (7.4.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \nabla \operatorname{div} \vec{v}, \quad (7.4.7)$$

$$P = \rho T / M, \quad (7.4.8)$$

$$C_{v\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla T \right) - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho \right) = \chi \Delta T + \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (7.4.9)$$

Будем полагать коэффициенты вязкости и теплопроводности величинами

первого порядка малости и разыскивать решение (7.4.6) – (7.4.9) в виде $\rho = \rho_0 + \rho'$, $T = T_0 + T'$, $P = P_0 + P'$, $\vec{v} = \vec{v}'$, где $\forall A: A' \sim \varepsilon^1 \ll 1$. Оставляя только слагаемые первого порядка малости, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P', \quad P' = \frac{\rho_0 T' + T_0 \rho'}{M}, \quad C_{v\infty} \frac{\partial T'}{\partial t} - \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0.$$

Из последнего уравнения этой системы следует связь

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{1}{C_{v\infty}} \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{C_{p\infty} - C_{v\infty}}{C_{v\infty}} \frac{\rho'}{\rho_0} = (\gamma_\infty - 1) \frac{\rho'}{\rho_0}.$$

Подставляя это соотношение в третье уравнение, получим

$$P' = \frac{\rho_0 (\gamma_\infty - 1) \frac{\rho'}{\rho_0} T_0 + T_0 \rho'}{M} = \frac{\gamma_\infty T_0}{M \rho_0} \rho' = u_{s\infty}^2 \frac{\rho'}{\rho_0},$$

где $u_{s\infty}$ – скорость звука. После подстановки последнего соотношения во второе уравнение, имеем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{u_{s\infty}^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

Применим к первому уравнению оператор $u_{s\infty}^2 \rho_0^{-1} \nabla$, а второе продифференцируем по времени, а затем вычтем первое уравнение из второго.

В результате получаем

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - u_{s\infty}^2 \nabla^2 \vec{v} = 0. \quad (7.4.10)$$

Пример 4. Гравитационно-капиллярные волны.

Многие из нас наблюдали за поверхностью моря или реки, по которой перекачиваются волны. Порождаемые ветром, они распространяются затем за счет сил тяжести и поверхностного натяжения. Такие волны называются *гравитационно-капиллярными* [II.44,58]. С учетом лапласовского давления и добавки к гидростатическому давлению $\rho g z$, обусловленной волновым движением поверхности имеем

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla \left(P - \sigma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right), \quad \nabla \vec{v} = 0. \quad (7.4.11)$$

Полагая движение потенциальным, положим

$$\bar{v} = \nabla \varphi. \quad (7.4.12)$$

Подставим (1.4.12) в (1.4.11),:

$$\rho \left(\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + (\nabla \varphi \nabla) \nabla \varphi \right) = -\nabla \left(P - \sigma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right),$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости, Здесь z - координату точек поверхности жидкости мы обозначили буквой ζ . Система координат выбрана так, чтобы ось z была направлена вертикально вверх, а плоскость xy совпадала с невозмущенной поверхностью жидкости.

Отсюда, после однократного интегрирования имеем

$$\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right) + \nabla \left(P_0 - \sigma \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \rho g \zeta \right) = 0. \quad (7.4.13)$$

Продифференцируем уравнение поверхности по времени, используя правило дифференцирования сложной функции и соотношения между φ и x, y, z , следующие из (7.4.12)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \stackrel{\text{из (13)}}{\Rightarrow} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Применяя соотношение (7.4.13) к точкам поверхности, получим окончательно самосогласованную систему уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (7.4.14)$$

где P_0 - давление на ее поверхности, которую следует дополнить граничным условием у дна

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0. \quad (7.4.15)$$

Если амплитуда возмущения мала, систему (7.4.14) можно линеаризовать. В результате получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (7.4.16)$$

Продифференцировав первое уравнение системы по z , второе по t и сложим

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \quad (7.4.17)$$

Уравнение (7.4.17) описывает волновой процесс, модель которого не сводится ни к волновому уравнению, ни к уравнению Клейна-Гордона.

Частицы воды совершают в них движение по круговым и эллиптическим траекториям ("вверх - вниз" и "вперед - назад" одновременно), поэтому такие волны нельзя отнести ни к продольным, ни к поперечным.

8 Бегущие волны. Стоячие волны

Как следует из приведенных выше примеров, большое количество волновых процессов описывается волновым уравнением или близкими к нему уравнениями, например уравнением Клейна-Гордона.

Вначале рассмотрим простейший и наиболее распространенный случай, когда волновой процесс малой амплитуды описывается волновым уравнением. Волновое уравнение относится к классу гиперболических уравнений в частных производных [III.26-31]. Рассмотрим вначале волновое уравнение с источником

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \vec{v} = f(\vec{r}, t). \quad (8.1.1)$$

С этим уравнением связывают два возможных типа задач¹.

8.1. Неограниченные среды. Задача Коши. Параметры волны.

Первым классом возможных задач является начальная задача, или задача Коши. Задача Коши, очевидно, ставится для систем, определенных в *неограниченной области*. При этом уравнение (8.1.1) должно быть дополнено двумя условиями

$$v|_{t=0} = v_0(\vec{r}), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(\vec{r}) \quad (8.1.2)$$

Задачи этого типа решаются *методом интегральных преобразований*

¹ Для целого ряда задач, например поиска дисперсионного соотношения, вообще не нужно решать одну из стандартных задач для уравнений в частных производных (начальную, смешанную или граничную), а достаточно найти общее решение уравнения (2) в виде $v = C \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$.

(Фурье или Лапласа для задач, не обладающих симметрией, Фурье-Бесселя для цилиндрически симметричных задач и т. д.). Решение задачи (8.1.1)-(8.1.2) имеет различный вид для пространств разной размерности [III.26-31].

В одномерной среде решение дается *формулой д'Аламбера*

$$v(x, t) = \frac{v_0(x + ct) + v_0(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (8.1.3)$$

Способ получения соотношения (8.1.3) при $f = 0$ будет продемонстрирован ниже, при решении уравнения Клейна-Гордона, частным случаем которого является уравнение (8.1.1).

В двумерной среде решение дается *формулой Пуассона*

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{|\vec{\xi}-\vec{r}| < ct} \frac{v_0(\vec{\xi}) d\vec{\xi}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{\xi} - \vec{r}|^2}} \right] + \frac{1}{2\pi c} \int_{|\vec{\xi}-\vec{r}| < ct} \frac{v_1(\vec{\xi}) d\vec{\xi}}{\sqrt{c^2 t^2 - |\vec{\xi} - \vec{r}|^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{|\vec{\xi}-\vec{r}| < c(t-\tau)} \frac{f(\vec{\xi}, \tau) d\vec{\xi} d\tau}{\sqrt{c^2 (t-\tau)^2 - |\vec{\xi} - \vec{r}|^2}}. \quad (8.1.4)$$

В трехмерной среде решение дается *формулой Кирхгофа*

$$v(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{t} \int_{|\vec{\xi}-\vec{r}|=ct} v_0(\vec{\xi}) dS \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{\xi}-\vec{r}|=ct} v_1(\vec{\xi}) dS + \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^t \int_{|\vec{\xi}-\vec{r}| < c(t-\tau)} \frac{f\left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{\xi} - \vec{r}|}{c}\right) d\vec{\xi}}{|\vec{\xi} - \vec{r}|}. \quad (8.1.5)$$

Эти решения ассоциируют с *бегущими волнами* [I.1-3,17].

Если волновой процесс представляет собой суперпозицию отдельных гармонических сигналов, для характеристики такого процесса удобно использовать такую его характеристику, как *спектр волны*.

Спектр волн, в безграничных средах может быть как *дискретным*, так и *непрерывным*. Какой из видов спектра реализуется в линейной задаче, полностью определяется спектральным составом начальных условий и внешнего источника. Если их спектр дискретен, то и спектр волны дискретен, рис.8.1.1а, а если непрерывен, то непрерывен и спектр волны. При графическом отображении спектра волны в случае дискретного спектра по

оси абсцисс указывают частоты колебаний ω_n или волновые числа или их номера n , а по оси ординат указывают квадраты их Фурье-амплитуд a_n^2 , в

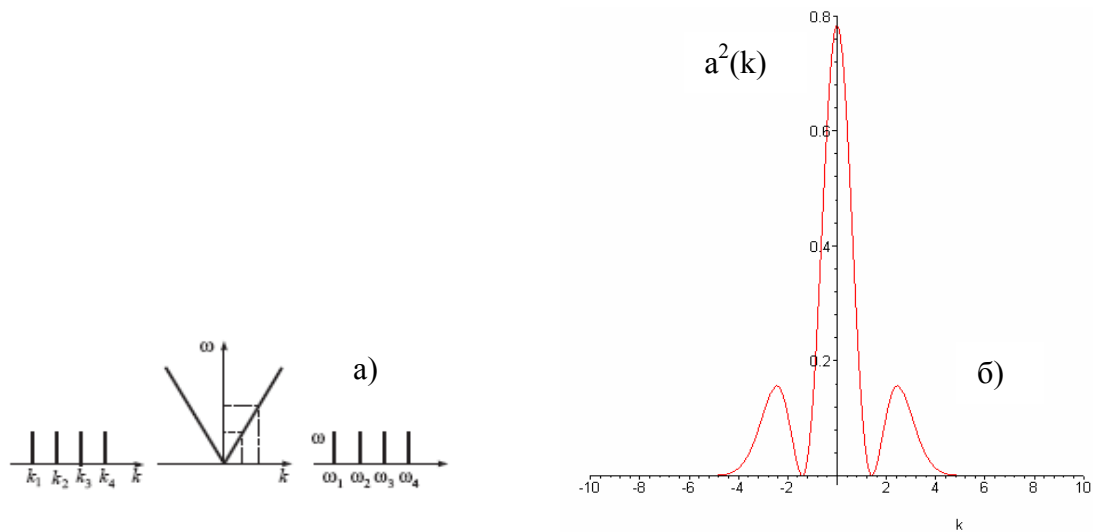


Рис.8.1.1. Спектр волнового пакета, представляющего собой суперпозицию четырех первых гармоник, а) и волнового пакета $v(x) = x^2 \exp(-x^2)$, б).

случае непрерывного спектра по оси абсцисс указывают частоты колебаний ω или волновые числа k , а по оси ординат указывают квадраты Фурье-образов их амплитуд $a^2(k)$ или $a^2(\omega)$,

8.1.1. Волновое уравнение. Гармоническое начальное возмущение.

Большинство параметров волны удобно определить для так называемых монохроматических волн, формирующихся при гармонических начальных возмущениях. Пусть, например, в одномерном случае $v_0(x) = A \cdot \sin kx$, $v_1(x) = B \cdot \sin kx$. Тогда

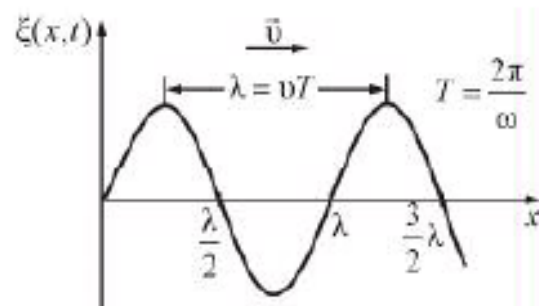


Рис. 8.1.2

$$v(x, t) = \frac{A}{2} (\sin k(x + ct) + \sin k(x - ct)) + \frac{B}{2c} (\cos k(x + ct) + \cos k(x - ct)) =$$

$$= a \sin k(x + ct + \varphi) + ba \sin k(x - ct + \varphi). \quad (8.1.6)$$

Это решение, очевидно, описывает пару волн, бегущих в противоположных направлениях оси x . Для того чтобы выделить волну, бегущую в одном направлении, например, вправо следует положить $a = 0$. Тогда

$$v = b \sin k(x - ct + \varphi).$$

Поверхность постоянной *фазы* волны, здесь $x + ct + \varphi = \text{const}$, называют *фронтом* волны, см. рис. 7.3.2. Продифференцируем это соотношение

$$\frac{d}{dt}(x - ct + \varphi = \text{const}) \Rightarrow \frac{dx}{dt} - c = 0 \Rightarrow c = \frac{dx}{dt}. \quad (8.1.7)$$

Скорость движения фронта волны c называют *фазовой скоростью* волны. Минимальное расстояние $\lambda = 2\pi/k$ между точками, колеблющимися в одинаковой фазе, называют *длиной* волны, рис. 8.1.2. *Частота* волны равна $\omega = kc$. Частота связана с *периодом* волны стандартным соотношением $T = 2\pi/\omega$. Величину k называют *волновым числом*. В соответствии с этими определениями уравнение бегущей волны переписывается в стандартной форме $v = b \sin(kx - \omega t + \varphi)$, а фазовая скорость волны равна

$$v_{\text{PH}} = \frac{\omega}{k}. \quad (8.1.8)$$

Отметим также, что из соотношения (8.1.6) следует, что связь между частотой и волновым вектором можно получить непосредственно из уравнения (8.1.1), разыскивая его решение при $f = 0$ в виде $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_0 \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$, откуда следует соотношение

$$-\omega^2 + \vec{c}^2 \vec{k}^2 = 0. \quad (8.1.9)$$

Соотношение между ω и $\vec{k}$ для волн малой амплитуды называют *дисперсионным соотношением* [I.1-3,17].

Для волн, описываемых волновым уравнением, это соотношение имеет вид линейной связи $\omega = \pm \vec{c}\vec{k}$, т.е. фазовая скорость таких волн постоянна и равна $+c$ для волн бегущих вправо и $-c$ для волн, бегущих влево.

8.1.2. Уравнение Клейна-Гордона. Группы волн. Дисперсия

Снова рассмотрим волновой процесс в одномерной среде. Будем рассматривать волны, описываемые уравнением Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \omega_0^2 U = 0. \quad (8.1.10)$$

Дисперсионное соотношение для этого уравнения уже не является линейным, а их фазовая скорость не постоянна, а является функцией волнового

числа k : $\omega^2 = \omega^2(k) = \omega_0^2 + c^2 k^2 \Rightarrow v_{PH} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}}{k} \neq \text{const}$, рис 8.1.3. Задачу Коши для этого

уравнения снова будем решать с начальными условиями

$$U|_{t=0} = U_0(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = U_1(x). \quad (8.1.11)$$

Решать задачу (8.1.10)-(8.1.11) будем методом интегральных преобразований, здесь – используя преобразование Фурье [III.21,27,28]. Решение ищем в виде

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U(\xi, t) e^{ik(x-\xi)} d\xi. \quad (8.1.12)$$

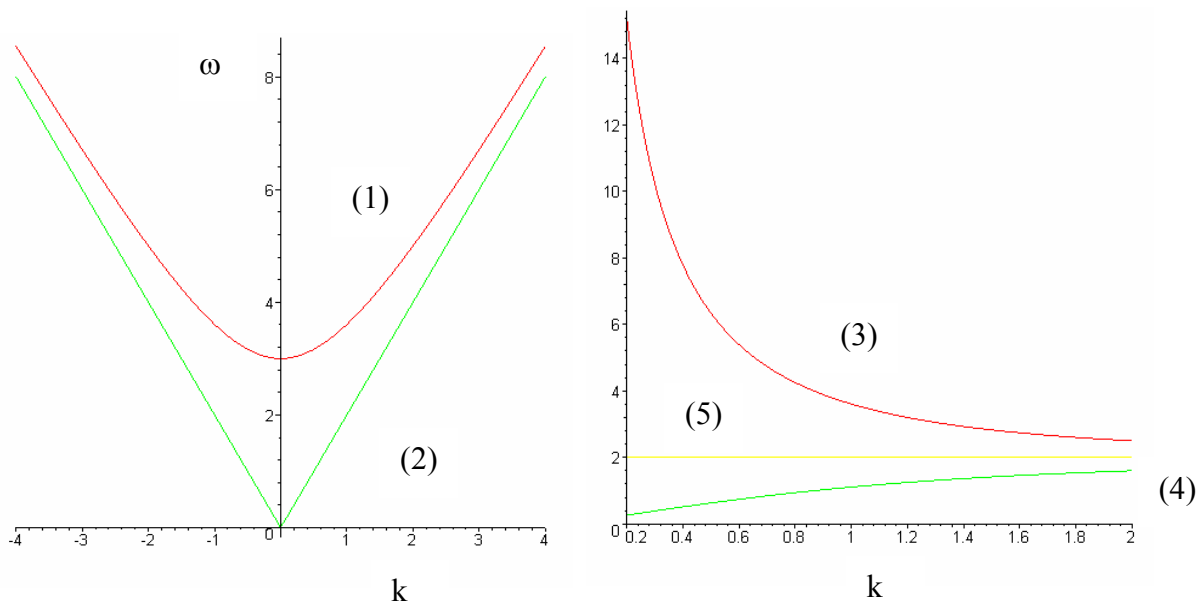


Рис.8.1.3. Дисперсионное соотношение для волн а), описываемых уравнением Клейна-Гордона, (1) и волновым уравнением, (2). Скорости волн, б): фазовая, (3) и групповая, (4) для уравнения Клейна-Гордона и фазовая и групповая, (5) волнового уравнения

Подставляя (8.1.12) в (8.1.10) и (8.1.11), получим ОДУ

$$\frac{d^2 U(\xi, t)}{dt^2} + (c^2 k^2 - \omega_0^2) U(\xi, t) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 U(\xi, t)}{dt^2} + \Omega^2 U(\xi, t) \quad \text{с начальными условиями}$$

$U(\xi, t)|_{t=0} = U_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial U(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = U_1(\xi)$. Это решение, удовлетворяющее этим

условиям, получается в результате следующей цепочки действий:

$$\begin{aligned} U(\xi, t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t &\Rightarrow B = U_0(\xi) \Rightarrow A \Omega \cos \Omega t - \Omega I_0(\xi) \sin \Omega t|_{t=0} = U_1(\xi) \Rightarrow \\ \Rightarrow A \Omega = U_1(\xi) \Rightarrow A = \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \Rightarrow U(\xi, t) &= \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t + U_0(\xi) \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Подставим это решение в (8.1.12), тогда получим

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[\frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t + U_0(\xi) \cos \Omega t \right] e^{ik(x-\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U_0(\xi) \cos \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{U_1(\xi)}{\Omega} \sin \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi = U_1(x, t) + U_2(x, t). \end{aligned}$$

Для дальнейшего преобразования полученного соотношения воспользуемся известным соотношением для цилиндрических функций [III.24,25,31]

$$\begin{aligned} \frac{\sin r}{r} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} J_0(r \sin \varphi \cos \theta) e^{ir \cos \varphi \cos \theta} \sin \theta d\theta \xrightarrow[r^2 = \Omega^2 t^2; ct \cos \theta = \zeta]{r \cos \varphi = -ckt; r \sin \varphi = i\omega_0 t} \\ &\xrightarrow[r^2 = \Omega^2 t^2; ct \cos \theta = \zeta]{r \cos \varphi = -ckt; r \sin \varphi = i\omega_0 t} \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} J_0(i\omega_0 t \sin \theta) e^{-ickt \cos \theta} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} J_0(i\omega_0 t \sqrt{1 - \cos^2 \theta}) e^{-ickt \cos \theta} d \cos \theta = \\ &\stackrel{\theta=0 \leftrightarrow \zeta=ct}{=} -\frac{1}{2} \int_{ct}^{-ct} J_0 \left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{c^2 t^2 \cos^2 \theta}{c^2 t^2}} \right) e^{-iket \cos \theta} \frac{dct \cos \theta}{ct} \\ &\stackrel{\text{переворачивая}}{=} \frac{1}{2} \int_{-ct}^{ct} J_0 \left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{\zeta^2}{c^2 t^2}} \right) \frac{e^{-ik\zeta}}{ct} d\zeta = \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}} \right) \frac{e^{-ik\zeta}}{t} d\zeta. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом } U_2(x, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) \int_{-ct}^{ct} I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}} \right) e^{ik(x-\xi-\zeta)} d\zeta \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{\zeta^2}{c^2}} \right) (\Theta(\zeta - ct) - \Theta(\zeta + ct)) e^{ik(x-\xi-\zeta)} d\zeta \right\} =$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik(\zeta-z)) d\zeta = \delta(z)}{=} \frac{1}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) (\Theta(x-\xi-ct) - \Theta(x-\xi+ct)) \delta(x-\xi) \right\} = \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left\{ U_1(\xi) I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) (\Theta(x-\xi-ct) - \Theta(x-\xi+ct)) \right\} = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \left\{ U_1(\xi) I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Заметим, что } U_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\xi U_0(\xi) \cos \Omega t e^{ik(x-\xi)} d\xi = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi U_0(\xi) \frac{\sin \Omega t}{\Omega} e^{ik(x-\xi)} \right).$$

Сопоставляя это равенство с выражением для $U_2(x, t)$, получим соотношение

$$\begin{aligned}
U_1(x, t) &\stackrel{\text{дифф-ие}}{\underset{\text{интегр-ам}}{=}} \frac{U_0(x-ct) + U_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi U_0(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) \right\} = \\
&= \frac{U_0(x-ct) + U_0(x+ct)}{2} + \frac{\omega_0 t}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \frac{U_0(\xi)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}}} I_1 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right).
\end{aligned}$$

Соединяя результаты, получаем

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \frac{U_0(x-ct) + U_0(x+ct)}{2} + \\
&+ \frac{\omega_0 t}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \frac{U_0(\xi)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}}} I_1 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} d\xi \left\{ U_1(\xi) I_0 \left(\omega_0 \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{c^2}} \right) \right\}. \quad (8.1.13)
\end{aligned}$$

В частности, при $\omega_0 \rightarrow 0$ отсюда следует формула д'Аламбера т.к. $I_0(0) = 1$, $I_1(0) = 0$. Последнее соотношение можно представить в виде

$$\begin{aligned}
U(x, t) &= \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k \exp[i(kx - \omega(k)t)] = \sum_{k=k_1}^{k_2} a_k e^{i \left[kx - \left(\omega(k_0) + (k-k_0) \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} + \frac{(k-k_0)^2}{2!} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} + \dots \right) t \right]} = \\
&= e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \sum_{q=q_1}^{q_2} a_{k_0+q} e^{i \left[q \left(x - \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t \right) - i \frac{q^2}{2!} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} t + \dots \right]} = e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} \sum_{q=q_1}^{q_2} a_{k_0+q} e^{i \left[q(x - v_{GR}t) - i \frac{q^2}{2!} \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{k=k_0} t + \dots \right]},
\end{aligned}$$

где $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$. Из этого выражения следует, что оно может быть представлено

в виде $U(x, t) = e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]} F(x - v_{GR}t)$ при условии

$$t \ll \frac{2\pi}{q^2 \left| \frac{dv_{GR}}{dk} \right|_{k=k_0}} = \frac{2\pi}{(\Delta k)^2 \left| \frac{dv_{GR}}{dk} \right|_{k=k_0}}, \quad \text{где} \quad \text{величину} \quad v_{GR} = \frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} \quad \text{называют}$$

выражением для *групповой скорости* волны [I.1-3,17]. Таким образом, понятие групповой скорости имеет ограниченную область применимости. Легко видеть, что в области применимости этой характеристики между групповой и фазовой скоростью волны существует соотношение $v_{GR} = v_{PH} + \frac{dv_{PH}}{dk} = v_{PH} - \frac{dv_{PH}}{d\lambda}$. Фазовая и групповая скорости совпадают только в средах с линейным законом дисперсии – *недиспергирующих средах*, рис.8.1.3,б.

8.1.3. Энергия и импульс волн

Рассмотрим снова уравнение Клейна-Гордона и умножим его на $\frac{\partial U}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \omega_0^2 U &= 0 \left| \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) - c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Rightarrow \right. \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) &- c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U^2}{\partial x} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial t} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\omega_0^2 U^2}{2} \right) &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(-c^2 \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим далее волновой пакет (узкополосная группа волн), медленно меняющийся в пространстве и времени $U = a \cos(\Psi + \varphi)$. Тогда получаем [I.1,2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(a \cos(\Psi + \varphi) \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \Psi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \\ + c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(a \cos(\Psi + \varphi) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \sin(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \frac{\omega_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \cos^2(\Psi + \varphi)) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left((-c^2) \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) a \sin(\Psi + \varphi) \right) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \omega, \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -k$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(a \cos(\Psi + \varphi) \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} a \sin(\Psi + \varphi) - \omega a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \\ + c^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(a \cos(\Psi + \varphi) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} a \sin(\Psi + \varphi) + k a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) + \frac{\omega_0^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \cos^2(\Psi + \varphi)) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left((-c^2) \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega \right) a \sin(\Psi + \varphi) \right) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos(\Psi + \varphi) - a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \right) a \sin(\Psi + \varphi) \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln a}{\partial \ln t} \sim \varepsilon^1 \ll 1, \frac{\partial \ln a}{\partial \ln x} \sim \varepsilon^1 \ll 1, \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \ln t} \sim \varepsilon^1 \ll 1, \frac{\partial \ln \varphi}{\partial \ln x} \sim \varepsilon^1 \ll 1; \text{отбрасывая слагаемые } \sim \varepsilon^2 \text{ и выше}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\omega^2 + c^2 k^2) a^2 \sin^2(\Psi + \varphi) + \omega_0^2 a^2 \cos^2(\Psi + \varphi)}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} [-c^2 \omega k a^2 \sin^2(\Psi + \varphi)] = 0.$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{(\omega^2 + c^2 k^2) a^2 + \omega_0^2 a^2}{4} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^2 \omega k a^2}{2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c^2 k^2 + \omega_0^2}{2} a^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c^2 \omega k}{2} a^2 \right] = 0.$$

Первое слагаемое в приведенном уравнении представляет собой

производную по времени от *плотности энергии* волны, а второе – производную по координате от *плотности потока энергии* волны.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (8.1.14)$$

Это соотношение можно переписать в несколько другом виде. Так как

$$v_{GR} = \frac{d\omega}{dk} \stackrel{\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2}{=} \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + c^2 k^2} \cdot \frac{c^2 k \omega}{2} a^2}{\frac{\omega^2 + c^2 k^2}{2} a^2} = \frac{1 \cdot \frac{c^2 k \omega}{2} a^2}{\frac{\omega_0^2 + c^2 k^2}{2} a^2} = \frac{S}{E} \Rightarrow S = v_{GR} E,$$

то (8.1.15) принимает вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (v_{GR} E)}{\partial x} = 0. \quad (8.1.15)$$

Это уравнение и его трехмерное обобщение справедливы не только для одномерного уравнения Клейна-Гордона, но и в общем случае [1.2].

8.2. Конечный отрезок. Одномерный случай. Стоячие волны.

Основным методом решения задач с постоянными коэффициентами на конечном отрезке является *метод Фурье (метод разделения переменных)* (не путать с методом преобразований Фурье!!!) [П.26-31]. Здесь будет проиллюстрировано его применение для решения некоторых задач.

Напомним суть метода. Сначала ищутся решения вида $v(x, t) = X(x)T(t)$, например, уравнения (8.2.1) при граничных условиях (8.2.2). После этого решение задачи (8.2.1) – (8.2.2), (8.2.3), ищется в виде суперпозиций полученных решений вида $v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$. Оказывается, что суперпозиция всегда может быть подобрана так, чтобы удовлетворялись начальные условия (8.2.3). Граничные условия и само волновое уравнение удовлетворяются автоматически, поскольку каждое слагаемое суперпозиции им удовлетворяет.

В рамках данного курса мы будем интересоваться уравнениями, допускающими волновые решения. Простейшим из них является волновое уравнение. Задача для волнового уравнения для одномерной среды

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad (8.2.1)$$

или уравнения Клейна-Гордона в общем случае ставится при следующих начальных и граничных условиях:

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = v_1(x); \quad \alpha_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\bigg|_{x=0} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{x=0} + \alpha_3 \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \alpha_4 v|_{x=0} = \Phi(t); \quad (8.2.2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\bigg|_{x=L} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{x=L} + \beta_3 \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{x=L} + \beta_4 v|_{x=L} = \Psi(t).$$

1. Вначале рассмотрим задачу (8.1.1) – (8.1.2) в отсутствие источника $f(x,t) = 0$ и при тривиальных условиях $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, $\Phi = \Psi = 0$:

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = v_1(x); \quad v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=L} = 0. \quad (8.2.3)$$

Для решения этой задачи и задач данного типа используется *метод Фурье (метод разделения переменных)* [III.26-31]. Решение задачи (8.2.1)-(8.2.3) ищем в виде $v(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляя это соотношение в (8.2.1), получаем

$$X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - c^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow X \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Две функции разных переменных могут быть равны друг другу тогда и только тогда, когда они одновременно равны одной и той же константе:

$$\frac{1}{Tc^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0; \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 \lambda T = 0. \quad (8.2.4)$$

Граничные условия, очевидно, преобразуются к виду

$$T(t)X(x)|_{x=0} = 0, \quad T(t)X(x)|_{x=L} = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (8.2.5)$$

Т.о., для пространственной части задачи мы приходим к задаче *Штурма-Лиувилля* [III.29]. Общее решение пространственного уравнения системы (8.2.4) имеет вид:

$$X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda}x + \varphi) \xRightarrow{X(0)=0} a \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi n.$$

$$X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda}x + \pi n) \xRightarrow{X(L)=0} a \sin(\sqrt{\lambda}L + \pi n) = 0 \Rightarrow a(-1)^n \sin \sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow b \sin \sqrt{\lambda}L = 0.$$

$$\text{Отсюда } \sqrt{\lambda}L = \pi k \Rightarrow \lambda = \frac{\pi^2 k^2}{L^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Удобно при решении данной задачи искать нормированное пространственное решение, пользуясь условием

$$\frac{1}{L} \int_0^L X^2(x) dx = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{L} \int_0^L \sin^2 \frac{\pi k x}{L} dx = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{L} \frac{L}{\pi k} \int_0^{\pi k} \sin^2 \frac{\pi k x}{L} d \frac{\pi k x}{L} = 1 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Решение временной части системы (2.2.3) при этом принимает вид:

$$T_k(t) = a_k \sin \sqrt{\lambda_k} ct + b_k \cos \sqrt{\lambda_k} ct = a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t. \text{ Тогда функция}$$

$$v_k(x, t) = \left(a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t \right) \sin \frac{\pi k x}{L} \quad (8.2.5)$$

является решением системы (8.2.1), (8.2.3) при любых a_k, b_k (отметим, что в силу произвольности этих констант, нормировочный множитель пространственного решения здесь снят). Очевидно, что общее решение системы (8.2.1), (8.2.3) представляет собой суперпозицию решений (8.2.5):

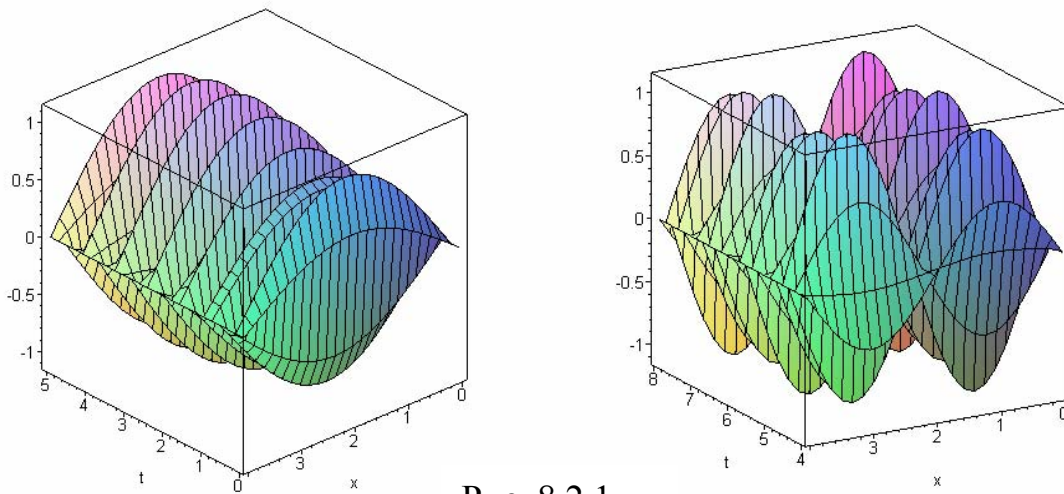


Рис. 8.2.1

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{\pi k c}{L} t + b_k \cos \frac{\pi k c}{L} t \right) \sin \frac{\pi k x}{L}. \quad (2.2.6)$$

Решение (8.2.6) следует еще удовлетворить начальным условиям. Тогда получаем $v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{L}$, $v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\pi k c}{L} \sin \frac{\pi k x}{L}$. Умножим последние соотношения на $\sin \frac{\pi n x}{L}$ и проинтегрируем полученные соотношения от 0 до L.

Отсюда получаем выражения для констант a_n, b_n :

$$\int_0^L v_0(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{L \sum_{k=1}^{\infty} b_k \delta_{kn}}{2} = \frac{L b_n}{2} \Rightarrow b_n = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx,$$

$$\int_0^L v_1(x, t) \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\pi k c}{L} \sin \frac{\pi k x}{L} \sin \frac{\pi n x}{L} dx = \frac{\pi k c \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{kn}}{2} = \frac{\pi n c a_n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi n c} \int_0^L v_1(x, t) \sin \frac{\pi n x}{L} dx.$$

Решение (8.2.6) ассоциируют с так называемыми *стоячими волнами*, а отдельные слагаемые в (8.2.6), соответствующие значениям $k = 1, 2, 3, \dots$ называют *модами*. На рис.8.2.1 показаны первая $k = 1$ и вторая моды колебаний при $k = 2$. Пусть, например, $v_0(x) = v_0 \sin \frac{\pi m x}{L}$, $v_1(x) = 0$ (эта задача соответствует возбуждению m – й акустической моды слева между двумя бесконечно высокими плоскими стенками). Тогда

$$a_n \equiv 0, \forall n, b_n = b_m = \frac{v_0}{\pi m}, n = m; b_n \equiv 0, n \neq m \Rightarrow v(x, t) = \frac{v_0}{\pi m} \cos \frac{\pi m c t}{L} \sin \frac{\pi m x}{L},$$

2. Рассмотрим ту же задачу при граничных условиях [III.27]

$$v|_{t=0} = v_0(x), \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = v_1(x); \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L} + \beta_4 v(L, t) = 0. \quad (8.2.7)$$

Применение метода разделения переменных снова приводит нас к системе (8.2.4), но с граничными условиями вида

$$\begin{aligned} T(t) \left. \frac{dX(x)}{dx} \right|_{x=0} &= 0, \quad T(t) \left(\left. \frac{dX(x)}{dx} + \beta_4 X(x) \right|_{x=L} \right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \frac{dX(x)}{dx} \right|_{x=0} &= 0, \quad \left(\left. \frac{dX(x)}{dx} + \beta_4 X(x) \right|_{x=L} \right) = 0 \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

Снова для пространственной части задачи мы приходим к задаче Штурма-Лиувилля. Применение условий (8.2.8) дает

$$\begin{aligned} X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x + \varphi) \Big|_{x=0}^{\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0}=0} &\Rightarrow a \sqrt{\lambda} \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n. \\ X(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x + \pi n) \Big|_{x=L}^{\left(\frac{dX}{dx} + \beta_4 X \right)|_{x=L}=0} &\Rightarrow a \sqrt{\lambda} \cos \left(\sqrt{\lambda} L + \frac{\pi}{2} + \pi n \right) + \beta_4 a \sin \left(\sqrt{\lambda} L + \frac{\pi}{2} + \pi n \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем трансцендентное уравнение для определения собственных значений задачи λ_k : $\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} L - \beta_4 \cos \sqrt{\lambda} L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} L = \beta_4$.

Отсюда $X_k(x) = a \sin\left(\sqrt{\lambda_k} x + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = a \cos(\sqrt{\lambda_k} x)$, а функция

$$v_k(x, t) = (a_k \sin(\sqrt{\lambda_k} ct) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} ct)) \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \quad (8.2.9)$$

является решением системы (8.2.7), (8.2.8) при любых a_k, b_k . Очевидно, что общее решение системы (8.2.7), (8.2.8) представляет собой суперпозицию решений (8.2.9):

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(\sqrt{\lambda_k} ct) + b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} ct)) \cos(\sqrt{\lambda_k} x). \quad (8.2.10)$$

Решение (2.2.10) следует удовлетворить начальным условиям. Тогда получаем

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x), \quad v_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} x).$$

Умножим последние соотношения на $\cos(\sqrt{\lambda_n} x)$ и проинтегрируем полученные соотношения от 0 до L. Отсюда получаем выражения для a_n, b_n :

$$\begin{aligned} \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx &= \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx = \frac{L}{2} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \sum_{k=1}^{\infty} b_k \delta_{kn} \Rightarrow \\ \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx &= \frac{L}{2} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \sum_{k=1}^{\infty} b_k \delta_{kn} \Rightarrow \frac{L b_n}{2} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow b_n &= \frac{2}{L} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx. \\ \int_0^L v_1(x, t) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx &= \int_0^L \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda_k} x) dx \Rightarrow a_n = \frac{2}{L c \sqrt{\lambda_n}} \left[1 + \frac{\beta_4}{L(\lambda_n^2 + \beta_4^2)} \right] \int_0^L v_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx. \end{aligned}$$

Определение вида стоячих волн при более сложных граничных условиях производится аналогичными методами.

3. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях струны с закрепленными концами в среде без сопротивления, к которой с момента $t = 0$ приложена непрерывно распределенная сила с линейной плотностью $\Phi(x, t) = \Phi(x) \sin \omega t$ [III.27].

В соответствии с вышесказанным, имеется смешанная задача

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\Phi(x)}{\rho} \sin \omega t \quad (8.2.11)$$

$$s(0, t) = 0, \quad s(l, t) = 0, \quad s(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{t=0} = 0. \quad (8.2.12)$$

Известно [III.27,31], что решение неоднородной задачи вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} - 2\gamma \frac{\partial u}{\partial t} + au + \Phi(x)\Psi(t)$$

следует проводить таким образом:

- функция Ψ разлагается в ряд Фурье $\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \exp(i\omega_n t)$ и ищется частное

решение уравнения (8.2.11) в виде $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \exp(i\omega_n t)$, удовлетворяющее

граничным условиям (8.2.12);

- путем подстановки этих рядов в (8.2.11) получается ОДУ вида

$$-\omega_n^2 u_n = c^2 \frac{d^2 u_n}{dx^2} + b \frac{du_n}{dx} + 2i\gamma \omega_n u_n + au_n + \Phi(x)\Psi_n,$$

для которого решается задача Штурма-Лиувилля и находятся функции u_n .

При решении задачи (8.1.1) – (8.1.2) будем рассматривать два случая:

а. Частота внешней силы не совпадает не с одной из собственных частот однородной задачи $\omega \neq \pi nc/L$.

Будем искать частное решение (8.2.11) – (8.2.12) в виде $s(x, t) = S(x) \sin \omega t$.

Подставим это выражение в (8.2.11) и (9.2.12), тогда получим

$$\frac{d^2 S}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} S(x) = -\frac{\Phi(x)}{T_0}, \quad S(0) = S(L) = 0, \quad (8.2.13)$$

где T_0 – натяжение струны. Решение задачи (8.2.13) имеет вид [III.27]

$$S(x) = \frac{c}{\omega T_0} \frac{\sin \frac{\omega}{c} x}{\sin \frac{\omega}{c} L} \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (L - \zeta) d\zeta - \frac{c}{\omega T_0} \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (x - \zeta) d\zeta, \text{ откуда}$$

$$s(x, t) = \frac{c}{\omega T_0} \left[\frac{\sin \frac{\omega}{c} x}{\sin \frac{\omega}{c} L} \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (L - \zeta) d\zeta - \int_0^L \Phi(\zeta) \sin \frac{\omega}{c} (x - \zeta) d\zeta \right] \sin \omega t. \quad (8.2.14)$$

б. $\omega = \frac{\pi mc}{L}$. Введем функцию $\varphi(x) = -\frac{\Phi(x)}{T_0} + A_m \sin \frac{\pi mx}{L}$, где

$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\Phi(\zeta)}{T_0} \sin \frac{\pi m \zeta}{L} d\zeta$, ортогональную $\sin \frac{\pi mx}{L}$ на отрезке $0 < x < L$ и перепишем

$$(8.2.11) \text{ в виде } \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{T_0}{\rho} \varphi(x) \sin \omega t + \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \frac{\pi mx}{L} \sin \omega t. \quad (8.2.15)$$

В силу линейности задачи можно представить функцию s в виде $s(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ и разделить уравнение (8.2.15) на два

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \omega t, \quad (8.2.16)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{T_0}{\rho} \varphi(x) \sin \omega t. \quad (8.2.17)$$

Общее решение уравнения (8.2.17) имеет вид [III.12]

$$w(x, t) = \frac{c}{\omega} \sin \omega t \int_0^x \varphi(z) \sin \frac{\omega}{c} (x - z) dz. \text{ Частное решение уравнения (8.2.16) будем}$$

искать в виде $v(x, t) = T(t) \sin \frac{\pi m x}{L}$, удовлетворяющем условиям (8.2.12) при

любых $T(t)$. Подставляя это выражение в (8.2.15) и имея в виду, что $\omega = \pi n c / L$, получаем

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = \frac{T_0}{\rho} A_m \sin \omega t. \quad (8.2.18)$$

Частное решение уравнения (8.2.18) можно искать в виде $T(t) = t[A \cos \omega t + B \sin \omega t]$,

откуда после подстановки имеем: $A = -T_0 A_m / 2\omega\rho$, $B = 0$. В результате

$$T(t) = -\frac{T_0 A_m}{2\omega\rho} t \cos \omega t \Rightarrow w(x, t) = -\frac{T_0 A_m}{2\omega\rho} t \cos \omega t \sin \frac{\pi m x}{L}. \quad (8.2.19)$$

Окончательно получаем

$$s(x, t) = \frac{c}{\omega} \sin \omega t \int_0^x \varphi(z) \sin \frac{\omega}{c} (x - z) dz - \frac{T_0 A_m}{2\omega\rho} t \cos \omega t \sin \frac{\pi m x}{L}. \quad (8.2.20)$$

8.3. Многомерные задачи. Волноводы и резонаторы.

Задачи о распространении волн в волноводах (прежде всего, электромагнитных и акустических) представляют собой примеры волновых процессов в многомерных ограниченных и частично ограниченных системах.

1. Распространение электромагнитных волн E – типа в круглом волноводе с идеально проводящими стенками. [I.15, 17].

Волновод представляет собой полость (трубу) неограниченной длины. Вдоль одной из осей (для определенности – z) возможно распространение бегущих волн, в поперечном направлении волна является стоячей, причем в

общем случае волны в волноводе не являются поперечными. Волны, у которых $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ называют волнами *электрического типа* (E – волнами), а волны с $H_z \neq 0$, $E_z = 0$ – волнами *магнитного типа* (H – волнами). Типы волн, которые могут распространяться в волноводе, определяются путем решения уравнений

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon\mu} \nabla^2 \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon\mu} \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (8.3.1)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями.

Будем решать задачу (8.3.1), методом Фурье, положив $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)]$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)]$. В результате система (8.3.1) сводится к граничной задаче

$$\Delta \vec{E} + \left(\epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \vec{E} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0, \quad (8.3.2)$$

$$\Delta \vec{H} + \left(\epsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \vec{H} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} = 0. \quad (8.3.3)$$

Положив $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, из (2.3.2), (2.3.3) получим

$$\Delta E_x + \kappa^2 E_x = 0 \quad \Delta E_y + \kappa^2 E_y = 0 \quad \Delta E_z + \kappa^2 E_z = 0, \quad \Delta H_x + \kappa^2 H_x = 0 \quad \Delta H_y + \kappa^2 H_y = 0. \quad (8.3.4)$$

Система (8.3.4) должна быть дополнена граничным условием для тангенциальной составляющей электрического поля на стенке волновода

$$E_z(S) = 0, \quad (8.3.5)$$

где S – уравнение поверхности стенки. Нетрудно видеть, что для определения компонент электрического и магнитного поля достаточно одного из уравнений системы (8.3.4)

$$\Delta E_z + \kappa^2 E_z = 0 \quad (8.3.6)$$

Остальные компоненты могут быть выражены через E_z с использованием уравнений Максвелла. В цилиндрической системе координат уравнение (8.3.5) имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 E_z = 0. \quad (8.3.7)$$

Полагая $E_z(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, получим

$$\begin{aligned} \Phi \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \Phi \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 R \Phi = 0 &\Rightarrow \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \kappa^2 = 0 \Rightarrow \\ \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \kappa^2 r^2 &= -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \Rightarrow \frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \kappa^2 r^2 = m^2, -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = m^2 \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

Общее решение уравнения (8.3.8) имеет вид $\Phi(\varphi) = \Phi_0 \sin(m\varphi + \psi_m)$. Это решение в силу условия однозначности должно быть периодическим по φ с периодом 2π , откуда m – целое.

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\kappa^2 r^2 - m^2) R = 0. \quad (8.3.9)$$

Общее решение уравнения (8.3.9) имеет вид

$$R(r) = A J_m(\kappa r) + B K_m(\kappa r). \quad (8.3.10)$$

Из условия конечности функции в (8.3.10) $R(r)$ следует $B = 0$. Тогда частные решения уравнения (8.3.7), соответствующие числу m имеют вид

$$E_z(r, \varphi) = J_m(\kappa r) \sin(m\varphi + \psi_m). \quad (8.3.11)$$

Из полной системы уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \nabla \vec{E} &= 4\pi\rho \xRightarrow{\rho=0} \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \xRightarrow{\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)]} \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + ik_z E_z = 0, \\ \nabla \vec{B} &= 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \xRightarrow[\vec{H}_z=0]{\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(x, y) \exp[i(k_z z - \omega t)]} \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} &= \frac{4\pi\vec{j}}{c} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \xRightarrow{\vec{j}=0} \vec{i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) + \vec{k} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right) = -\frac{i\omega\varepsilon}{c} (\vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z), \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xRightarrow{} \vec{i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \vec{k} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} \right) = \frac{i\omega}{c} (\vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z). \end{aligned}$$

Из второго уравнения этой системы, равенства коэффициентов при $\vec{k}$ в третьем и выражения (8.3.11) следуют выражения для H_r и H_φ :

$$H_r(r, \varphi) = -\frac{i\omega}{\kappa^2 c r} J_m(\kappa r) \cos(m\varphi + \psi_m), \quad H_\varphi(r, \varphi) = -\frac{i\omega}{\kappa c} \frac{dJ_m(\kappa r)}{dr} \sin(m\varphi + \psi_m). \quad (8.3.12)$$

Из первого уравнения этой системы, равенства коэффициентов при $\vec{k}$ во втором и выражения (8.3.11) следуют выражения для E_r и E_φ :

$$E_r(r, \varphi) = \frac{ik_z}{\kappa} \frac{dJ_m(\kappa r)}{dr} \sin(m\varphi + \psi_m), \quad E_\varphi(r, \varphi) = \frac{imk_z}{\kappa^2 r} J_m(\kappa r) \cos(m\varphi + \psi_m). \quad (8.3.13)$$

Значения параметра κ определяются из граничных условий

$$E_r(a, \varphi) = 0, \quad E_\varphi(a, \varphi) = 0. \quad (8.3.14)$$

Отсюда имеем $\kappa_{mn}a = j_{mn}$, где j_{mn} – n – й корень m – й функции Бесселя. Фазы ψ_m определяются условиями возбуждения волн. Видно, что распространение волн возможно, если $k_z = \sqrt{\omega^2 c^{-2} - \kappa^2} \in \text{Re} \Rightarrow \omega^2 > c^2 j_{mn}^2 / a^2$.

Отсюда, в частности следует, что у волноводов существует граничная частота $\omega_0 > \frac{c j_{mn}}{a}$, ниже которой распространение волн в волноводе невозможно.

2. Применение обобщенного метода Фурье в задаче полого волновода треугольного сечения.

Наглядным примером реализации преимуществ обобщенного метода Фурье (ОМФ) перед классическим при решении прикладных задач электродинамики является задача полого волновода треугольного сечения (рис.8.3.1), оболочка которого принимается за

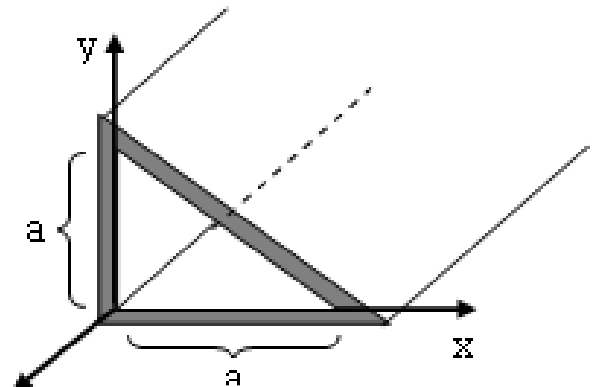


Рис. 8.3.1

идеально проводящую, а внутренняя среда является однородной. Такая модель в большинстве случаев оказывается удовлетворительной для практических расчетов. При необходимости она уточняется путем учета потерь в металле. Поиск векторов электромагнитного поля обычно замыкается на рассмотрение уравнения Гельмгольца, которому должны удовлетворять компоненты этих векторов:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + kF = 0. \quad (8.3.16)$$

Пространственная задача о распространении волн в подобной продольно-однородной структуре сводима к решению двумерного уравнения Гельмгольца путем классического отделения переменной z , т.е. представления искомой функции в виде

$$F(x, y, z) = f(x, y)Z(z). \quad (8.3.17)$$

Уравнение для $f(x, y)$ при этом принимает вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \lambda f = 0. \quad (8.3.18)$$

Здесь неизвестна не только функция $f(x, y)$ но и параметр λ , имеющий смысл поперечного волнового числа. Само по себе уравнение (8.3.18) не имеет определенных решений с физической точки зрения. Необходимо поставить краевую (граничную) задачу. Известно, например из [1.2], что для определения семейства Е-волн той или иной направляющей структуры с однородной средой и при идеализации проводящих границ надо найти решения краевой задачи, содержащей, помимо уравнения (8.3.18), условие:

$$f(x, y) = 0 \text{ на } L, \quad (8.3.19)$$

где под L понимается идеально проводящий контур поперечного сечения полого волновода или совокупность контуров в более сложных случаях. В нашем примере, как видно из рисунка, в качестве L выступает прямоугольный равнобедренный треугольник. Применяя для решения этой задачи классический метод Фурье, представляя искомую функцию в виде:

$$f(x, y) = X(x)Y(y) \quad (8.3.20)$$

можем получить следующее общее решение для рассматриваемого уравнения:

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \sin \lambda_x x + C_2 \cos \lambda_x x \\ Y(y) = C_3 \sin \lambda_y y + C_4 \cos \lambda_y y \end{cases} \quad (8.3.21)$$

Неопределенные константы, содержащиеся в данном решении, должны быть определены из граничных условий, но получаемая при этом система уравнений не имеет нетривиальных решений. Следовательно, решение (8.3.21) не удовлетворяет поставленной краевой задаче. Можно пойти по пути расчленения замкнутого контура на отрезки, что, безусловно, вызовет

увеличение количества краевых задач, требующих решения. Этого можно избежать, используя ОМФ. Представляя искомую функцию в виде:

$$f(x, y) = X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y) \quad (8.3.22)$$

уравнение (2.3.18) приводится к билинейному виду:

$$\left(\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x)\right)Y_1(y) + \left(\frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x)\right)Y_2(y) + X_1(x)\frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + X_2(x)\frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (8.3.23)$$

На следующем этапе применения ОМФ необходимо построить матрицу функций билинейного уравнения, которая в нашем случае выглядит так

$$[i, f_i, g_i] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) & Y_1(y) \\ 2 & \frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) & Y_2(y) \\ 3 & X_1(x) & \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} \\ 4 & X_2(x) & \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (8.3.24)$$

Следуя теории реализации ОМФ, используя эту матрицу, можно построить следующие системы разделенных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) - a_{21} \left(\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) = 0 \\ X_1(x) - a_{31} \left(\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) = 0 \\ X_2(x) - a_{41} \left(\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) = 0 \\ Y_1(y) + a_{21} Y_2(y) + a_{31} \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + a_{41} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (8.3.25)$$

$$\begin{cases} X_1(x) - a_{31} \left(\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) - a_{32} \left(\frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) \right) = 0 \\ X_2(x) - a_{41} \left(\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) - a_{42} \left(\frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) \right) = 0 \\ Y_1(y) + a_{31} \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + a_{41} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0 \\ Y_2(y) + a_{32} \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + a_{42} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (8.3.26)$$

$$\begin{cases} X_2(x) - a_{41} \left(\frac{\partial^2 X_1(x)}{\partial x^2} + \lambda X_1(x) \right) - a_{42} \left(\frac{\partial^2 X_2(x)}{\partial x^2} + \lambda X_2(x) \right) - a_{43} X_1(x) = 0 \\ Y_1(y) + a_{41} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0 \\ Y_2(y) + a_{42} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} + a_{43} \frac{\partial^2 Y_2(y)}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (8.3.27)$$

Приведенные системы отличаются функциями, входящими в их базис, и их количеством. Анализ этих систем указывает, что только система (8.3.23) может иметь решения, удовлетворяющие требованию линейной независимости искомых функций по каждой переменной. Решение системы (8.3.23) при условии $a_{32} = 0$, $a_{41} = 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X_1(x) = C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}} x \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}} x \right) \\ X_2(x) = C_3 \sin \left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}} x \right) + C_4 \cos \left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}} x \right) \\ Y_1(y) = C_5 \sin \left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}} \right) + C_6 \cos \left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}} \right) \\ Y_2(y) = C_7 \sin \left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}} \right) + C_8 \cos \left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}} \right) \end{cases} \quad (8.3.28)$$

Это решение содержит восемь неопределенных коэффициентов и постоянные деления a_{31} , a_{42} , которые определяются из граничных условий.

Условие по оси x , имеющее вид $f(x,0) = 0$ приводит к уравнению:

$$C_1 C_6 \sin \left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}} x \right) + C_2 C_6 \cos \left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}} x \right) + C_3 C_8 \sin \left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}} x \right) + C_4 C_8 \cos \left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}} x \right) = 0 \quad (8.3.29)$$

из которого: $C_6 = 0$, $C_8 = 0$. Условие по оси y , $f(0,y) = 0$ приводит к уравнению:

$$C_2 C_5 \sin \left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}} \right) + C_3 C_7 \cos \left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}} \right) = 0 \quad (8.3.30)$$

из которого полагаем: $C_2 = 0$, $C_3 = 0$. Условие по гипотенузе рассматриваемого треугольника, имеющее вид $f(y-a)=0$ приводит к уравнению:

$$C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda - 1}{a_{31}}} (y-a) \right) C_5 \sin \left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}} \right) + C_4 \sin \left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda - 1}{a_{42}}} (y-a) \right) C_7 \sin \left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}} \right) = 0,$$

которое может быть преобразовано к виду:

$$C_1 C_5 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}y\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}a\right) - C_1 C_5 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}y\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{31}}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{a_{31}\lambda-1}{a_{31}}}a\right) + \\ + C_4 C_7 \sin\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}y\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}a\right) - C_4 C_7 \cos\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}y\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{a_{42}}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{a_{42}\lambda-1}{a_{42}}}a\right) = 0 \quad (8.3.31)$$

Решая данное тригонометрическое уравнение можно обратить его в тождество при следующих ограничениях на неопределенные постоянные:

$$a_{42} = \frac{a^2}{\lambda a^2 - \pi^2 m^2}, \quad a_{31} = \frac{a^2}{\lambda a^2 - \pi^2 n^2}, \quad \lambda = \frac{\pi^2(m^2 + n^2)}{a^2}, \quad |m - n| = 2k, \quad (8.3.32)$$

где k, n, m - целые ненулевые числа. При этих ограничениях искомая функция принимает следующий вид:

$$f(x, y) = C \left[\sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{a} - \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{a} \right] \quad (8.3.33)$$

где C - неопределенная амплитудная константа, появившаяся вследствие следующих обозначений: $C_1 C_5 = C$, $C_4 C_7 = -C$.

Возвращаясь к первоначально поставленной задаче об определении семейства E - волн рассматриваемой направляющей структуры, согласно [1.2], в качестве $f(x, y)$ выступают собственные функции E_Z^{mn} , имеющие смысл продольной компоненты напряженности электрического поля для волны, определяемой выбором чисел m и n . Этим собственным функциям соответствуют собственные значения λ_{mn} из выражения (8.3.32). Полное поле в этом волноводе может быть определено из зависимостей поперечных компонент от E_Z^{mn} и λ_{mn} , вытекающих из уравнений Максвелла:

$$E_x = \frac{iC\Gamma}{\lambda a} \left[m \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{a} - n \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{a} \right], \\ E_y = \frac{iC\Gamma}{\lambda a} \left[m \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{a} - n \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{a} \right], \\ H_x = \frac{iC\omega\epsilon_0}{\lambda a} \left[m \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{a} - n \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{a} \right], \\ H_y = \frac{iC\omega\epsilon_0}{\lambda a} \left[m \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{a} - n \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{a} \right],$$

где $\Gamma = \sqrt{k - \lambda}$ - продольное волновое число, а ω - круговая частота волнового процесса.

3. Стоячие акустические волны в прямоугольном резонаторе.

Часть пространства, ограниченная со всех сторон стенками, называется *резонатором*. Распространение акустических волн в прямоугольном резонаторе описывается уравнением [II.56,60]

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - u_{s\infty}^2 \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (8.3.34)$$

с непроницаемыми стенками. Будем снова решать задачу, методом Фурье, положив

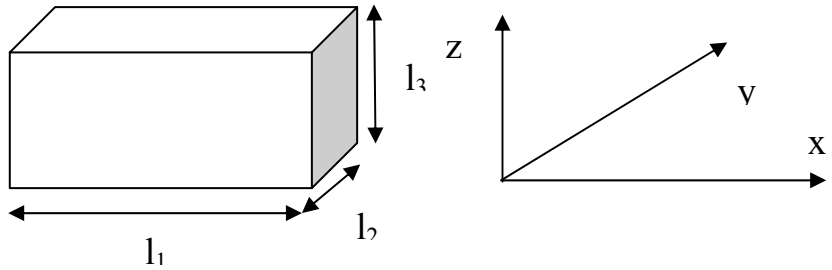


Рис. 8.3.2

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}) \exp[-i\omega t].$$

В результате уравнение (8.3.34) сводится граничной задаче (скорость частиц на стенке равна нулю)

$$\Delta \vec{v} + \frac{\omega^2}{u_{s\infty}^2} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \Delta v_x + \frac{\omega^2}{u_{s\infty}^2} v_x = 0, \Delta v_y + \frac{\omega^2}{u_{s\infty}^2} v_y = 0, \Delta v_z + \frac{\omega^2}{u_{s\infty}^2} v_z = 0, \quad (8.3.35)$$

$$v_x(0) = v_x(l_1) = 0, \quad v_y(0) = v_y(l_2) = 0, \quad v_z(0) = v_z(l_3) = 0. \quad (8.3.36)$$

Решение задачи (8.3.35)-(8.3.36) имеет вид

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= A \sin \frac{\pi n_1}{l_1} x \cos \frac{\pi n_2}{l_2} y \cos \frac{\pi n_3}{l_3} z, \quad v_y(x, y, z) = B \cos \frac{\pi n_1}{l_1} x \sin \frac{\pi n_2}{l_2} y \cos \frac{\pi n_3}{l_3} z, \\ v_z(x, y, z) &= C \cos \frac{\pi n_1}{l_1} x \cos \frac{\pi n_2}{l_2} y \sin \frac{\pi n_3}{l_3} z. \end{aligned} \quad (8.3.37)$$

9. Волны в неоднородных средах

Анализ распространения волн в неоднородных средах можно провести аналитически для значительно более узкого класса задач, чем в однородных.

9.1. Пример решаемой задачи

Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны в плазме, концентрация которой меняется линейно $n = n_0 z$ при отсутствии поглощения. Процесс описывается системой волна – электрон атома

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = 0, \quad m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \eta \frac{d\vec{r}}{dt} = e \vec{E} \quad (9.1.1)$$

В соответствии со сказанным будем искать решение системы (9.1.1) в виде $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$. При этом задачу можно решать последовательно, вначале находя вынужденное решение второго уравнения этой системы (амплитуда собственных колебаний при условии $\eta \ll \omega$ практически несущественна). Оно

имеет вид $\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}$. Дипольный момент единицы объема равен

$\vec{P} = \sum e\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_0 n}{m(\omega^2 + i\gamma\omega)}$, а электрическая индукция $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. Тогда проницаемости

имеют вид $\epsilon = 1 - \frac{1}{\omega^2 + i\gamma\omega} \frac{4\pi e^2 n}{m} \approx 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}$, $\mu = 1$. В результате первое

уравнение системы (9.1.1) перепишется в виде

$$\frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\right) \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{E}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{4\pi e^2 n_0 z}{m\omega^2}\right) \vec{E} = 0.$$

Будем считать волну плоской и введем обозначение $z_1 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m\omega^2}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) E = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 E}{d(z_1 - z)^2} + \frac{\omega^2}{c^2 z_1} (z_1 - z) E = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2 E}{d(z_1 - z)^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{2/3}} + \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{1/3} (z_1 - z) E = 0 \xRightarrow{\xi = \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{1/3} (z_1 - z)} \frac{d^2 E}{d\xi^2} + \xi E = 0. \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Будем решать уравнение (9.1.2), используя преобразование Фурье, представляя напряженность электрического поля в виде

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk, \quad E(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Подставляя первое соотношение в (9.1.2), используя правила дифференцирования преобразования Фурье [III.28] получим

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk + \xi \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{ik\xi} dk = 0 \xRightarrow{\substack{E(k)=u \\ \xi e^{ik\xi} dk = dv}} \int_{-\infty}^{\infty} E(k) (ik)^2 e^{ik\xi} dk + E(k) \frac{\xi}{i\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i} e^{ik\xi} \frac{dE(k)}{dk} dk = 0.$$

Окончательно имеем

$$\frac{dE(k)}{dk} + ik^2 E(k) = 0. \quad (9.1.3)$$

Решение этого уравнения имеет вид $E(k) = C \exp(-ik^3/3)$. Возвращаясь к исходным переменным, получаем с учетом нечетности синуса

$$E(\xi) = A' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right)} dk = A \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk \right] =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{k^3}{3} - k\xi\right) dk = A \cdot \text{Ai}(-\xi).$$

Асимптотики функции $\text{Ai}(z)$ (функции Эйри) имеют вид [III.18,24]

$$E(\xi) = \begin{cases} \frac{A}{\xi^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & \xi \rightarrow \infty \\ \frac{A}{2|\xi|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|\xi|^{3/4}\right) & \xi \rightarrow -\infty \end{cases}.$$

Поле экспоненциально затухает внутрь среды.

9.2. Приближенные методы анализа волновых процессов

Решение даже линейных уравнений, описывающих тот или иной волновой процесс далеко не всегда может быть получено точно, что связано со свойствами сред. В таких случаях для описания волновых процессов надо применять приближенные методы, часть из которых приведена ниже.

9.2.1. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений для распределенных систем аналогичен методу итераций для систем с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим этот метод в применении к задаче о формировании стоячих волн в консервативных системах с коэффициентами, зависящими от пространственных координат.

Уравнения, описывающие волны данного типа (их часто называют колебаниями в распределенных системах (более того, и последнее словосочетание часто опускают)) можно представить в форме

$$A(x) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \hat{L} \vec{u} = 0, \quad (9.2.1)$$

где $A(x)$ — квадратная матрица с коэффициентами $a_{ik}(x)$, $\hat{L}$ операторная матрица, элементы которой являются линейными дифференциальными

операторами вида $L_{ik} = \frac{\partial^{m_{ik}}}{\partial x^{m_{ik}}} + b_{ik}^{m_{ik}-1}(x) \frac{\partial^{m_{ik}-1}}{\partial x^{m_{ik}-1}} + \dots + b_{ik}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + b_{ik}^{(0)}(x)$. Полагая

$\vec{u}(x, t) = \vec{y}(x) \exp(i\omega t)$, где ω - действительное число, для n -й собственной формы $y_n(x)$ получим уравнение

$$\hat{L} \vec{y}_n - A(x) \omega_n^2 y_n = 0 \quad (9.2.2)$$

с граничными условиями

$$U(\vec{y}_n; \omega_n) = \sum_{j=0}^{m_{ik}} \left(A_j \frac{\partial^{(j)} \vec{y}_n}{\partial x^j} \Big|_{x=0} + B_j \frac{\partial^{(j)} \vec{y}_n}{\partial x^j} \Big|_{x=1} \right) = 0. \quad (9.2.3)$$

Наименьшую по величине собственную частоту ω_1 и соответствующую ей собственную форму $\vec{y}_1(x)$ можно найти следующим образом.

Выберем произвольно некоторую вектор-функцию $\vec{f}(x)$. Чтобы метод быстрее сходил, желательно, чтобы вектор-функция $\vec{f}(x)$ удовлетворяла граничным условиям (9.2.3) и была близка к искомой функции $\vec{y}_1(x)$. Вектор-функция следующего приближения $\vec{f}_1(x)$ находится как решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\hat{L} \vec{f}_1 = A(x) \vec{f}. \quad (9.2.4)$$

Решение этого уравнения с граничными условиями (9.2.3) можно выразить через матричную функцию Грина $G(x, \xi)$:

$$\vec{f}_1(x) = \int_0^1 G(x, \xi) A(\xi) \vec{f}(\xi) d\xi. \quad (9.2.5)$$

В ряде задач функцию $G(x, \xi)$ удается найти аналитически. Повторяя ту же операцию над вектор-функцией $\vec{f}_1(x)$ и т.д. получим вектор-функцию m -го приближения

$$\vec{f}_2(x) = \int_0^1 G(x, \xi) A(\xi) \vec{f}_1(\xi) d\xi \xrightarrow{\text{и т.д.}} \vec{f}_m(x) = \int_0^1 G(x, \xi) A(\xi) \vec{f}_{m-1}(\xi) d\xi. \quad (9.2.6)$$

Покажем, что для достаточно больших m

$$\vec{f}_m(x) = C_m \vec{y}_1(x), C_m = \text{const}; \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_{m-1}}{C_m} = \omega_1^2. \quad (9.2.7)$$

Пронумеруем все собственные частоты системы в порядке возрастания их

величины и разложим функцию $\vec{f}(x)$ в ряд по собственным функциям $\vec{y}_n(x)$:

$$\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \vec{y}_j(x). \quad (9.2.8)$$

Подставляя (9.2.8) в выражение (9.2.5) для $\vec{f}_1(x)$ и учитывая, что

$$\int_0^1 G(x, \xi) A(\xi) \vec{y}_j(\xi) d\xi = \frac{\vec{y}_j(x)}{\omega_j^2}, \text{ получаем}$$

$$\vec{f}_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^2} \vec{y}_j(x) \Rightarrow \vec{f}_2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^4} \vec{y}_j(x) \xRightarrow{\text{и т. д.}} \vec{f}_m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{\omega_j^{2m}} \vec{y}_j(x). \quad (9.2.9)$$

Выражение (9.2.9) можно переписать иначе:

$$\vec{f}_m(x) = \frac{1}{\omega_1^{2m}} \left[\alpha_1 \vec{y}_1(x) + \sum_{j=2}^{\infty} \alpha_j \left(\frac{\omega_1}{\omega_j} \right)^{2m} \vec{y}_j(x) \right]. \quad (9.2.10)$$

Из этого выражения следует, что при достаточно большом m и α_1 второй член в квадратных скобках будет мал по сравнению с первым членом, т. е. утверждение (9.2.7) справедливо.

Для определения второй собственной частоты ω_2 и соответствующей ей собственной формы $\vec{y}_2(x)$ необходимо вектор-функцию нулевого приближения $\vec{f}(x)$ и всех последующих, приближений ортогонализировать к вектор-функции $\vec{z}_1(x)$, представляющей собой первую собственную форму сопряженной краевой задачи. В каждом конкретном случае функция $\vec{z}_1(x)$ может быть легко выражена через функцию $\vec{y}_1(x)$.

Вследствие ортогональности вектор-функций $\vec{f}_0(x)$ и $\vec{z}_1(x)$ постоянная α_1 , в выражении (9.2.10) будет равна нулю и вектор-функция $\vec{f}_m(x)$ будет стремиться к $C_m \vec{y}_2(x)$. Операцию ортогонализации можно проделать следующим образом. Добавим к некоторой выбранной функции $\vec{f}(x)$ функцию $\vec{y}_1(x)$, умноженную на такой скалярный множитель β , чтобы

$$\int_0^1 (\vec{z}_1(x) [\vec{f}(x) + \beta \vec{y}_1(x)]) dx = 0. \quad \text{Вектор-функция первого приближения } \vec{f}_1(x)$$

определяется как решение неоднородного уравнения (9.2.4), в правую часть

которого вместо функции $\vec{f}(x)$ ставится функция $\vec{f}_0(x) = \vec{f}(x) + \beta \vec{y}_1(x)$. Хотя можно убедиться, что вектор-функция $\vec{f}_1(x)$ должна быть ортогональна к вектор-функции $\vec{z}_1(x)$, при практических расчетах вследствие различного рода погрешностей ее следует снова ортогонализировать к функции $\vec{z}_1(x)$. Продолжая процесс итераций дальше,

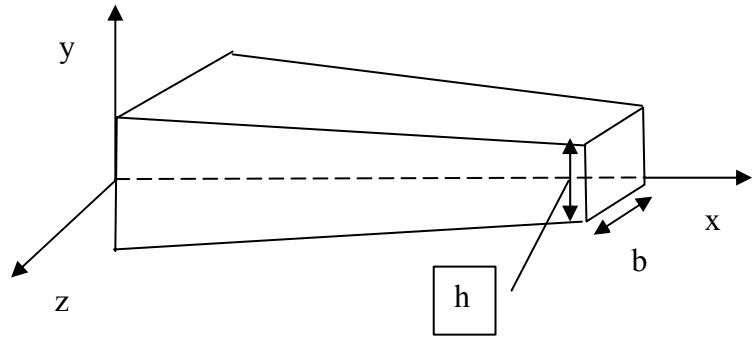


Рис. 9.2.1

можно приближенно найти собственную функцию и частоту $\vec{y}_2(x)$ и ω_2 .

Аналогичным путем в принципе можно искать и более высокие собственные частоты и соответствующие им собственные функции. Однако приемлемая точность вычисления обеспечивается лишь для низших частот. Основная трудность при использовании метода последовательных приближений заключается в вычислении функции Грина.

Найдем, например, функцию Грина для поперечных изгибных колебаний неоднородной балки прямоугольного сечения, см. рис. 9.2.1. Такие колебания описываются уравнением

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (9.2.11)$$

где $u(x,t)$ – смещение каждой точки поперечного сечения с координатой x от положения равновесия, $\rho(x)$ – погонная масса балки (масса балки на единицу

длины), E – модуль Юнга материала балки, $I(x) = b(x) \int_{-h(x)/2}^{h(x)/2} \eta^2 d\eta$ – момент инерции

поперечного сечения с координатой x относительно оси проходящей через центр масс и параллельной оси z . Граничными условиями для консольной балки длины l будут

$$u(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x=l} = 0. \quad (9.2.12)$$

Подставляя в (9.2.11) выражение $u(x,t) = y(x) \exp(i\omega t)$, получим

следующее уравнение для $y(x)$: $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{EI(x)}{EI(0)} \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{\rho(x)}{EI(0)} \omega^2 y$. Функция Грина должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{EI(x)}{EI(0)} \frac{d^2 G}{dx^2} \right) = \delta(x - \xi) \quad (9.2.13)$$

с граничными условиями $G(0, \xi) = 0$, $\left. \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0$, $\left. \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=1} = 0$, $\left. \frac{\partial^3 G}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=1} = 0$. Обозначив

$EI(x)/EI(0) = \varepsilon(x)$ и интегрируя уравнение (9.2.13) с учетом этих условий, последовательно находим

$$\frac{d}{dx} \left(\varepsilon(x) \frac{d^2 G}{dx^2} \right) = \theta(x - \xi) \Rightarrow \varepsilon(x) \frac{d^2 G}{dx^2} = \begin{cases} x - \xi, & x < \xi \\ 0, & x > \xi \end{cases} \Rightarrow \frac{dG}{dx} = \begin{cases} \int_0^x \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta, & x < \xi \\ \int_0^\xi \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta, & x > \xi \end{cases} \Rightarrow$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \int_0^x \int_0^\xi \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta d\xi, & x < \xi \\ \int_0^\xi \int_0^\xi \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta d\xi + (x - \xi) \int_0^\xi \frac{\eta - \xi}{\varepsilon(\eta)} d\eta d\xi, & x > \xi \end{cases}.$$

9.2.2. Асимптотический метод.

Этот метод используется для получения оценки больших по модулю собственных значений той или иной краевой или смешанной задачи. Этот метод идейно близок методу ВКБ. Рассмотрим линейную автономную задачу

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \hat{L} \vec{u}, \quad (9.2.14)$$

с граничными условиями

$$U(\vec{u}) = \sum_{j=0}^m \left(A_j \left. \frac{\partial^{(j)} \vec{u}}{\partial x^j} \right|_{x=0} + B_j \left. \frac{\partial^{(j)} \vec{u}}{\partial x^j} \right|_{x=1} \right) = 0, \quad (9.2.15)$$

где $L_{ik} = a_{ik}^{(m)} \frac{\partial^m}{\partial x^m} + a_{ik}^{(m-1)} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} + \dots + a_{ik}^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} + a_{ik}^{(0)}(x)$.

Применим к системе (9.2.14) – (9.2.15) преобразование Лапласа по времени, умножим получившееся уравнение на $(\hat{A}^{(m)})^{-1}$, и получим систему

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \hat{L} \vec{u} \Rightarrow \vec{u}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{st} \vec{y}(x, s) ds \Rightarrow s \vec{y}(x, s) = \hat{L} \vec{y} \Rightarrow \frac{d^m \vec{y}}{dx^m} + \hat{A}_1(x) \frac{d^{m-1} \vec{y}}{dx^{m-1}} + \dots + \hat{A}_m(x) \vec{y} = s \hat{B}(x) \vec{y} \quad (9.2.16)$$

с граничными условиями

$$U(\bar{y}, s) = \sum_{j=0}^m \left(A_j \frac{d^{(j)} \bar{u}}{dx^j} \Big|_{x=0} + B_j \frac{d^{(j)} \bar{u}}{dx^j} \Big|_{x=1} \right) = 0. \quad (9.2.17)$$

Решение системы (9.2.16), (9.2.17) следует искать в виде суперпозиции частных решений уравнения (9.2.17): $\bar{y}_{ij}(x) = \exp \left[\int_0^x \rho_{ij}(\xi) d\xi \right] \sum_{r=0}^{\infty} s^{-r/m} \bar{u}_{ij}^{(r)}(x)$, где $\rho_{ij}(x)$ - j -ое значение функции $(sb_i(x))^{1/m}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Подставим эти соотношения в уравнения (9.2.16) и приравняем друг другу слагаемые при одинаковых степенях s :

$$\begin{aligned} \circ s^1 : b_i(x) \bar{u}_{ij}^{(0)} &= \hat{B}(x) \bar{u}_{ij}^{(0)} \Rightarrow \bar{u}_{ij}^{(0)} \neq 0, \bar{u}_{ijk}^{(0)} = 0, k \neq i, \\ \circ s^{1-1/m} : b_i(x) \bar{u}_{ij}^{(1)} + (b_i(x))^{(m-1)/m} &\left[m \frac{d\bar{u}_{ij}^{(0)}}{dx} + \frac{m-1}{2} \frac{d \ln b_i(x)}{dx} \bar{u}_{ij}^{(0)} + \hat{A}_1(x) \bar{u}_{ij}^{(0)} \right] = \hat{B}(x) \bar{u}_{ij}^{(1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\bar{u}_{ij}^{(0)}}{dx} + \left[\frac{m-1}{2m} \frac{d \ln b_i(x)}{dx} + \frac{a_{ii}(x)}{m} \right] \bar{u}_{ij}^{(0)} &= 0 \Rightarrow \bar{u}_{ij}^{(0)} = C(b_i(x))^{-\frac{m-1}{2m}} \exp \left(- \frac{\int_0^x a_{ii}(\xi) d\xi}{m} \right), \\ \Rightarrow \bar{u}_{ijk}^{(1)} &= -C \frac{a_{ki}(x) (b_i(x))^{(m-1)/2m}}{b_i(x) - b_k(x)} \exp \left(- \frac{1}{m} \int_0^x a_{ii}(\xi) d\xi \right) \end{aligned} \quad (9.2.18)$$

Здесь $a_{ij}(x)$ - компоненты матрицы $\hat{A}_1(x)$. Чтобы получить $\bar{u}_{ij}^{(1)}$, надо приравнять слагаемые при s^{1-2m} . При этом также находятся функции $\bar{u}_{ijk}^{(2)}$. Продолжая рассуждения, можно получить решение с любой степенью точности.

Общее решение уравнения (9.2.16) имеет вид

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m C_{ij} \bar{y}_{ij}(x). \quad (9.2.19)$$

Зная $\bar{y}_{ij}(x)$, можно в соответствии с граничными условиями (9.2.15) составить характеристическое уравнение и вычислить собственные значения. Далее определяются константы C_{ij} и соответствующие собственные функции.

• **Случай $m = 2$.** Система (9.2.14) – (9.2.15) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 = sb_1(x)y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 = sb_2(x)y_2, \end{cases} \quad (9.2.20)$$

$\alpha_1 y_1(0) + \alpha_2 y_2(0) = 0$, $\beta_1 y_1(l) + \beta_2 y_2(l) = 0$. k – е частное решение системы (9.2.20)

имеет вид $y_{ij}(x) = \exp\left[s \int_0^x b_k(\xi) d\xi\right] \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} u_{ik}^{(m)}(x)$, $i=1;2$. Подставим это решение в

(3.2.20) и сократим получившиеся уравнения на $\exp\left[s \int_0^x b_k(\xi) d\xi\right]$:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \left[\frac{du_{1k}^{(m)}}{dx} + (s(b_k(x) - b_1(x)) + a_{11}(x))u_{1k}^{(m)} + a_{12}(x)u_{2k}^{(m)} \right] = 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} \left[\frac{du_{2k}^{(m)}}{dx} + (s(b_k(x) - b_2(x)) + a_{22}(x))u_{2k}^{(m)} + a_{21}(x)u_{1k}^{(m)} \right] = 0. \end{cases} \quad (9.2.21)$$

Приравнявая друг другу слагаемые при одинаковых степенях s , получим цепочку уравнений, из которых последовательно определяются функции

$$u_{ik}^{(m)}(x): \quad u_{ik}^{(0)} = \delta_{ik} \exp\left(-\int_0^x a_{ii}(\xi) d\xi\right), \quad u_{kk}^{(1)} = \Xi_k(x) \exp\left(-\int_0^x a_{kk}(\xi) d\xi\right),$$

$$u_{ik}^{(1)} = \frac{a_{ik}(x)}{b_i(x) - b_k(x)} \exp\left(-\int_0^x a_{kk}(\xi) d\xi\right), \text{ где } \Xi_1(x) = \int_0^x \frac{a_{12}(\xi)a_{21}(\xi)}{b_1(\xi) - b_2(\xi)} d\xi, \quad \Xi_2(x) = -\Xi_1(x).$$

С точностью до слагаемых первого приближения получаем

$$y_i(x) = C_i \left(1 + \frac{\Xi_i(x)}{s}\right) \exp\left[\int_0^x (sb_i(\xi) - a_{ii}(\xi)) d\xi\right] + \frac{C_j}{s} \frac{a_{ij}(x)}{b_i(x) - b_j(x)} \exp\left[\int_0^x (sb_j(\xi) - a_{jj}(\xi)) d\xi\right]. \quad (9.2.22)$$

Здесь $i, j = 1;2$. Решения нулевого приближения y_{11} и y_{22} имеют смысл двух невзаимодействующих волн, распространяющихся друг напротив друга. В первом приближении возникают встречные отраженные волны y_{12} и y_{21} .

Подставляя (9.2.22) в граничные условия к уравнению (9.2.20), получаем линейную однородную систему для коэффициентов C_1 и C_2

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \left(C_1 + \frac{C_2}{s} \frac{a_{12}(0)}{b_1(0) - b_2(0)} \right) + \alpha_2 \left(C_2 + \frac{C_1}{s} \frac{a_{21}(0)}{b_2(0) - b_1(0)} \right) = 0, \\ & \beta_1 \left\{ C_1 \left(1 + \frac{\Xi_1(l)}{s}\right) \exp\left[\int_0^l (sb_1(\xi) - a_{11}(\xi)) d\xi\right] + \frac{C_2}{s} \frac{a_{12}(l)}{b_1(l) - b_2(l)} \exp\left[\int_0^l (sb_2(\xi) - a_{22}(\xi)) d\xi\right] \right\} + \\ & + \beta_2 \left\{ C_2 \left(1 + \frac{\Xi_2(l)}{s}\right) \exp\left[\int_0^l (sb_2(\xi) - a_{22}(\xi)) d\xi\right] + \frac{C_1}{s} \frac{a_{21}(l)}{b_2(l) - b_1(l)} \exp\left[\int_0^l (sb_1(\xi) - a_{11}(\xi)) d\xi\right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Условие наличия нетривиального решения этой системы принимает вид:

$$\left\{ \alpha_1 \beta_2 + \frac{\alpha_1}{s} \left[\frac{\beta_1 a_{12}(l)}{b_1(l) - b_2(l)} + \beta_2 \Xi_2(l) \right] + \frac{\alpha_2}{s} \frac{\beta_2 a_{21}(0)}{b_2(0) - b_1(0)} \right\} \exp\left(s \int_0^l b_2(\xi) d\xi - \int_0^l a_{22}(\xi) d\xi\right) -$$

$$-\left\{\alpha_2\beta_1 + \frac{\alpha_2}{s}\left[\frac{\beta_2 a_{21}(l)}{b_2(l)-b_1(l)} + \beta_1 \Xi_1(l)\right] + \frac{\alpha_1}{s}\frac{\beta_1 a_{12}(0)}{b_1(0)-b_2(0)}\right\} \exp\left(s\int_0^l b_1(\xi)d\xi - \int_0^l a_{11}(\xi)d\xi\right) = 0.$$

Это условие позволяет в принципе вычислить собственные значения s , а решение (9.2.22) при этих значениях s и $C_2 = \frac{s\alpha_1[b_2(0)-b_1(0)] + \alpha_2 a_{21}(0)}{s\alpha_2[b_1(0)-b_2(0)] + \alpha_1 a_{12}(0)}$ определяет собственные функции системы.

Пример 1. Собственные колебания неоднородной балки. Продольные колебания неоднородной балки описываются уравнением

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad (9.2.23)$$

где $u(x,t)$ – смещение частиц балки от положения равновесия, $\rho(x)$ и $g(x) = b(x) \int_0^{s(x)} E ds$ – погонные масса и упругость балки, E – модуль Юнга.

Граничными условиями для балки длины l , где один конец свободный, другой – закреплён будут $u(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0$. Пусть $u(x,t) = y(x)\exp(i\omega t)$, тогда

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d \ln g}{dx} \frac{dy}{dx} + k^2(x) = 0, \quad (9.2.24)$$

где $k(x) = \omega\sqrt{\rho(x)/g(x)}$. Частные решения уравнения (9.2.24) ищутся в виде

$$y_{1,2}(x) = \exp\left[\pm i \int_0^x k(\xi)d\xi\right] \sum_{m=0}^{\infty} (i\omega)^{-m} u_{1,2}^{(m)}(x),$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d \ln g}{dx} \frac{dy}{dx} + k^2(x) = 0 \quad \xRightarrow{\substack{y_{1,2}(x) = \exp\left[\pm i \int_0^x k(\xi)d\xi\right] \sum_{m=0}^{\infty} (i\omega)^{-m} u_{1,2}^{(m)}(x) \\ \text{собирая члены при одинаковых степенях } i\omega}} \begin{cases} u_{1,2}^{(0)}(x) = [\rho(x)g(x)]^{1/4} \\ u_{1,2}^{(1)}(x) = \pm \Xi(x)u_{1,2}^{(0)}(x) \end{cases},$$

Где $\Xi(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \omega \left[\frac{1}{k(\xi)} \frac{d^2 k}{d\xi^2} + \frac{1}{g(\xi)} \frac{d^2 g}{d\xi^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g(\xi)} \frac{dg}{d\xi} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{k(\xi)} \frac{dk}{d\xi} \right)^2 \right] d\xi$ и т.д. Положим

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ и подставим $y(x)$ в граничные условия, тогда получим

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\left[i \int_0^x k(\xi)d\xi \right]} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{u_1^{(m)}(l)}{(i\omega)^m} + \frac{1}{k(l)(i\omega)^m} \frac{du_1^{(m)}}{dx} \right]_{x=l} - C_2 e^{\left[-i \int_0^x k(\xi)d\xi \right]} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{u_2^{(m)}(l)}{(i\omega)^m} - \frac{1}{k(l)(i\omega)^m} \frac{du_2^{(m)}}{dx} \right]_{x=l} = 0. \end{cases}$$

Ограничиваясь здесь слагаемыми первого приближения, получаем характеристическое уравнение вида

$$\exp\left[2i\int_0^1 k(x)dx\right] = -1 - \frac{1}{k(l)} \frac{d \ln(kg)}{dx} \Big|_{x=l} - 2\Xi(l) \xrightarrow[\text{до } 1/i\omega]{\text{с точностью}} \omega = \omega_m = \frac{\frac{(2m+1)\pi}{2}}{\int_0^1 \sqrt{\frac{\rho(x)}{g(x)}} dx} - \frac{1}{k(l)} \frac{d \ln(kg)}{dx} \Big|_{x=l} - 2\Xi(l),$$

где $m = 1, 2, \dots$. Первое слагаемое в выражении для собственной частоты совпадает с соответствующей собственной частотой однородного стержня, в котором фазовая скорость распространения волны равна $v = \left[\int_0^1 \sqrt{\rho(x)/g(x)} dx \right]^{-1}$, а

второе слагаемое определяет поправку к ней за счет неоднородности сечения. Собственные функции в данном приближении принимают вид

$$y_m(x) = \left(\frac{\rho(x)}{g(x)} \right)^{1/4} \left[\sin\left(\int_0^1 k_m(\xi) d\xi \right) - \frac{\Xi(x)}{2\omega_m} \cos\left(\int_0^1 k_m(\xi) d\xi \right) \right], \text{ где } k_m(x) = \omega_m \sqrt{\rho(x)/g(x)}.$$

Пример 2. Электромагнитная волна в среде с плавно меняющейся диэлектрической проницаемостью. Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью, плавно меняющейся вдоль оси x и магнитной проницаемостью, равной единице. В результате получим уравнение [1.2]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon(x)}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (9.2.25)$$

с условием $\partial \ln \varepsilon / \partial \ln x \ll 1$. Будем полагать волну монохроматической и интересоваться ее стационарным распространением: $E(x, t) = E(x)e^{i\omega t} + \text{к.с.}$:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) E(x) = 0. \quad (9.2.26)$$

Сделаем замену $E(x) = \exp\left(\int_0^x u dx\right)$. В результате из (9.2.26) получим уравнение

$$\begin{aligned} \text{Риккати } \frac{d}{dx} \left(u \exp\left(\int_0^x u dx\right) \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \exp\left(\int_0^x u dx\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{du}{dx} \exp\left(\int_0^x u dx\right) + u^2 \exp\left(\int_0^x u dx\right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) \exp\left(\int_0^x u dx\right) &= 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} + u^2 + k^2 \varepsilon(x) = 0. \end{aligned} \quad (9.2.27)$$

В плавно неоднородной среде имеет место условие

$$\frac{\lambda}{\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{k\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\varepsilon(x)} \frac{d\varepsilon(x)}{dx} \ll k,$$

то есть волновое число k является большим параметром. В соответствии с этим будем искать решение уравнения (4) в виде ряда по k [I.2] (аналог *ВКБ – приближения* в квантовой механике [II.42]):

$$u(x) = ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} + \dots \quad (9.2.28)$$

Подставляя (9.2.28) в (9.2.27), получим

$$\frac{d}{dx} \left(ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} \right) + \left(ku_0(x) + u_1(x) + \frac{u_2(x)}{k} \right)^2 + k^2 \varepsilon(x) = 0. \text{ Тогда имеем}$$

- в порядке k^2 : $k^2 u_0^2(x) + k^2 \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow u_0(x) = \pm i \sqrt{\varepsilon(x)}$
- в порядке k^1 : $\frac{k du_0(x)}{dx} + 2ku_0(x)u_1(x) = 0 \Rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{2u_0(x)} \frac{du_0(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln \sqrt{\varepsilon(x)})$.

Знаки в решении u_0 соответствуют прямой и встречной волнам. Возвращаясь к исходным переменным, имеем окончательно

$$E(x) = \frac{A}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}} \exp \left(-ik \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x)} dx \right) + \frac{B}{\sqrt[4]{\varepsilon(x)}} \exp \left(ik \int_0^x \sqrt{\varepsilon(x)} dx \right). \quad (9.2.29)$$

Отметим, что т.к. в этом приближении $A, B = \text{const}$, то рассеяния волн на неоднородностях и преобразования энергии волн друг в друга не происходит.

9.3. Периодически неоднородные среды

Снова рассмотрим цепочку RLC – контуров с емкостной связью. Применим *первое правило Кирхгофа* к n – му узлу, а 2 – е – к n – му контуру.

Вновь положим характерный размер отдельной ячейки равным l и будем считать пространственный масштаб движений в цепочке много большим l .

Считая емкость меняющейся вдоль цепочки, мы можем записать

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{dq_n}{dt} + I_{n+1} \quad \begin{matrix} I_{n+1}(t) \leftrightarrow I(x+l, t) \approx I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} l \\ I_n(t) \leftrightarrow I(x, t); q_n(t) \leftrightarrow q(x, t) \end{matrix} \Rightarrow I(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} + I(x, t) + \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} l \Rightarrow \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} &= -\frac{1}{l} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \quad \begin{matrix} q(x, t) = C(x) U(x, t) \\ I_n(t) \leftrightarrow I(x, t); q_n(t) \leftrightarrow q(x, t) \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -\frac{C(x)}{l} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}. \\ I_n R - L \frac{dI_n}{dt} - \frac{q_n}{C_n} + \frac{q_{n-1}}{C_{n-1}} &= 0 \quad \begin{matrix} q_{n-1}(t) \leftrightarrow q(x-l, t) \approx q(x, t) - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} l \\ I_n(t) \leftrightarrow I(x, t); q_n(t) \leftrightarrow q(x, t) \end{matrix} \Rightarrow I(x, t) R - L \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} - \frac{q(x, t)}{C(x, t)} + \frac{q(x, t)}{C(x, t)} - \frac{\partial \left(\frac{q(x, t)}{C(x, t)} \right)}{\partial x} l = 0 \\ U(x, t) = \frac{q(x, t)}{C(x)} &\Rightarrow \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = I(x, t) \frac{R}{l} - \frac{L}{l} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Вводя емкость, индуктивность и сопротивление единицы длины

$c(x) = \frac{C(x)}{l}, \ell = \frac{L}{l}, r = \frac{R}{l}$, приходим окончательно к *телеграфным уравнениям*

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -c(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = I(x, t)r - \ell \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad (9.3.1)$$

Дифференцируем

второе уравнение

системы (9.3.1) по

координате и

воспользуемся первым,

тогда получим волновое

уравнение с переменными

коэффициентами

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - \ell c(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + rc(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (9.3.2)$$

Пренебрежем потерями в линии и введем обозначение $v_0^2 = 1/\ell c_0$. Разложим

выражение для емкости в $\cos$ – ряд Фурье $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nKx)$.

Будем искать решение уравнения (9.3.2) в виде $U(x, t) = u(x, t)e^{i\omega t}$. В результате приходим к *уравнению Хилла*

$$\frac{d^2 U(x, t)}{dx^2} + \frac{\omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nKx)}{v_0^2} U(x, t) = 0. \quad (9.3.3)$$

Если в разложении для $c(x)$ отличны от нуля только коэффициенты c_0 и c_1 , причем $c_1 \ll c_0$, приходим к *уравнению Матье*, решения которого анализировались ранее. Однако в этом случае зонам параметрической неустойчивости соответствуют так называемые *зоны непропускания* – волн с такими параметрами *не существует* [I.2,8; II.49,57].

10. Нелинейные волны. Типы нелинейных волн

Нелинейные волны удобнее всего классифицировать по характеру взаимодействия друг с другом. Можно выделить три класса: *простые волны* (интерферируют), *солитоны* (взаимодействие сводится к асимптотическому сдвигу фаз волн), *автоволны* (полностью или частично аннигилируют).

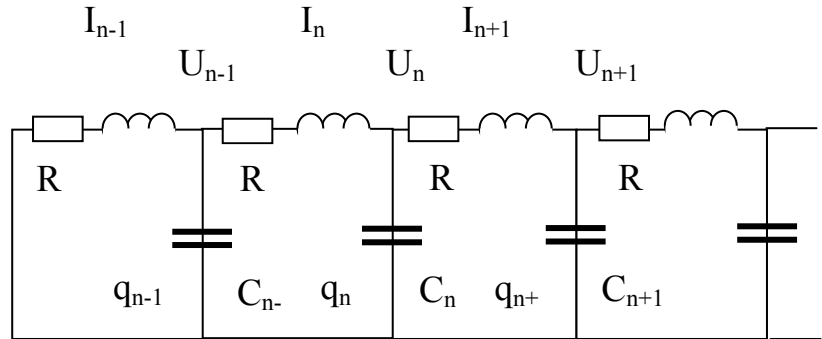


Рис. 9.2.2

10.1. Простые волны. Уравнение Римана. Уравнение Бюргерса

10.1.1. Уравнение Римана

Будем полагать, что в линии передачи, рассмотренной в разделе 9.3, емкость конденсаторов является нелинейной функцией напряжения $c = c(U)$, а потери отсутствуют ($r \rightarrow 0$):

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = -c(U) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = -\ell \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \quad (10.1.1)$$

Будем искать решение системы (10.1.1) в виде так называемой *простой волны* [I.1,2,16,17; II.56,58] в которой различные переменные изменяются пропорционально друг другу $I = I(U)$. Тогда имеем

$$\frac{\partial I}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + c(U) \frac{\partial U}{\partial t} = 0; \quad \ell \frac{\partial I}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} \pm u(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (10.1.2)$$

где $u(U) = 1/\sqrt{\ell c(U)}$. Это *квазилинейное* уравнение (не содержащее нелинейных функций [III.30] относительно производных) называют *уравнением Римана* [I.2]. Знак «+» соответствует волнам, бегущим вправо, знак «-» - бегущим влево.

Аналогично, уравнения, описывающие одномерные нелинейные волны на несжимаемой мелкой воде без учета трения, также могут быть сведены к уравнению Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \xRightarrow{h=h(v)} \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{dh}{dv} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{dh}{dv} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \xRightarrow{v+g \frac{dh}{dv} = v+h \frac{(dh/dv)}{(dv/dv)}} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Переходя здесь к переменной $\xi = x \mp \sqrt{gh}t$, имеем окончательно $\frac{\partial v}{\partial t} + u(v) \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0$,

где $u(v) = v$.

В качестве третьего примера опишем однородное движение автомобильного потока в отсутствие светофоров [I.16]. Пусть число автомобилей, проходящих через данную точку шоссе в единицу времени (поток) равно q , а линейную концентрацию автомобилей (число автомобилей на единицу длины) как n . Если нет источников и стоков (число автомобилей на трассе сохраняется), то концентрация потока должна удовлетворять уравнению

непрерывности, в приближении простых волн вновь сводящееся к уравнению Римана

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \xRightarrow[u(n)=dq/dn]{q=q(n)} \frac{\partial n}{\partial t} + u(n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (10.1.3)$$

То же уравнение будет получено в следующем разделе при описании слабых ударных волн в газе без учета процессов вязкости и теплопроводности.

Уравнение (10.1.3) удобнее всего решать *методом характеристик* [I.2, III.30]. Введем понятие *характеристики дифференциального уравнения* [III.30]. Для этого рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\sum_{i=1}^N a_i(\vec{x}, n) \frac{\partial n}{\partial x_i} = b(\vec{x}, n) \quad (10.1.4)$$

и пусть функции $a_i(\vec{x}, n)$, $b(\vec{x}, n)$ принадлежат к классу C^1 на некотором открытом множестве G пространства переменных $\vec{x}, n$, причем на этом множестве

$\sum_{i=1}^N a_i^2(\vec{x}, n) \neq 0$. Пусть $n = n(\vec{x})$ - решение уравнения (4), определенное в некоторой

области D пространства переменных $\vec{x}$, $\vec{x} = \vec{x}(\tau)$ - кривая, лежащая в D . Тогда, рассматривая решение $n = n(\vec{x})$ на этой кривой, получим функцию $\Xi(\tau) = n(\vec{x}(\tau))$.

Подберем кривую $\vec{x} = \vec{x}(\tau)$ так, чтобы ее касательный вектор $\frac{d\vec{x}}{d\tau}$ в каждой точке

был равен $\vec{a}(\vec{x}(\tau), \Xi(\tau))$. Для этого должны выполняться уравнения

$\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\vec{x}(\tau), \Xi(\tau))$, $i = \overline{1 \dots N}$. Дифференцируя функцию $\Xi(\tau)$, получим:

$$\frac{d\Xi}{d\tau} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial n}{\partial x_i}(\vec{x}(\tau)) \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial n}{\partial x_i}(\vec{x}(\tau)) \frac{dx_i}{d\tau} a_i(\vec{x}(\tau), \Xi(\tau)) \stackrel{n(\vec{x})-\text{решение (4)}}{=} b(\vec{x}(\tau), \Xi(\tau)).$$

Следовательно, искомая кривая $\vec{x} = \vec{x}(\tau)$ в пространстве $\vec{x}$ должна быть такой, чтобы уравнения $\vec{x} = \vec{x}(\tau)$, $n = \Xi(\tau)$ определяли траекторию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\vec{x}, n), i = \overline{1 \dots N}; \quad \frac{dn}{d\tau} = b(\vec{x}, n) \quad (10.1.5)$$

Система уравнений (10.1.5) называется *характеристической системой* уравнения (10.1.4), а ее траектории в пространстве переменных $\vec{x}$, n - *характеристиками* уравнения (10.1.4). Подчеркнем, что параметр τ на

характеристике уравнения (10.1.4) определен лишь с точностью до постоянного слагаемого. Кроме того, согласно нашим предположениям, функции $a_i(\bar{x}, n)$, $b(\bar{x}, n)$ принадлежат классу C^1 на множестве G , поэтому для системы уравнений (10.1.5) выполнены условия *теорем существования и единственности*. Обоснованием корректности метода характеристик служат две теоремы [III.30]:

Теорема 1. Если поверхность $S: n = n(\bar{x})$ класса C^1 в пространстве переменных $\bar{x}$, n такова, что, какова бы ни была точка $(\bar{x}_0, n_0) \in S$, характеристика уравнения (10.1.4), проходящая через $(\bar{x}_0, n_0)$, касается S в этой точке, то S является интегральной поверхностью уравнения (10.1.4).

Теорема 2. Пусть $n = n(\bar{x})$ - решение уравнения (10.1.4), определенное в некоторой области D , $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$, $n = \Xi(\tau)$ ($\alpha < \tau < \beta$) - решение системы (10.1.5). Если при этом кривая $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ ($\alpha < \tau < \beta$) лежит в D и $\Xi(\tau_0) = n(\bar{x}(\tau_0))$, то $n(\bar{x}(\tau)) \equiv \Xi(\tau)$. Теорема 2, таким образом, утверждает, что *любая интегральная поверхность уравнения (10.1.4) образована некоторым семейством характеристик*.

Рассмотрим далее уравнение (10.1.4) и пусть $S: \bar{x} = \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ - регулярная $N-1$ мерная поверхность класса C^1 без самопересечений, параметры $(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ изменяются в некоторой области T , $n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ - функция класса C^1 на T . Будем решать задачу Коши для уравнения (10.1.4) с начальным условием

$$n(\bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})) = n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}). \quad (4.1.6)$$

Геометрический смысл задачи Коши (10.1.4), (10.1.6) состоит в том, чтобы в пространстве переменных $\bar{x}$, n через $N - 1$ -мерную поверхность $\Omega: \bar{x} = \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$, $n = n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})$ провести интегральную поверхность $n = n(\bar{x})$ уравнения (10.1.4). В силу теоремы 2, всякая характеристика уравнения (10.1.4), проходящая через любую точку поверхности Ω , лежит на искомой интегральной поверхности $n = n(\bar{x})$. Проведем через каждую точку поверхности

Ω характеристику уравнения (10.1.4). Параметр τ на ней выберем так, чтобы при $\tau = 0$ она проходила через точку поверхности Ω . Уравнения этих характеристик можно записать в виде

$$x_i = \varphi_i(\tau, \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}), n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})), n = \Xi(\tau, \bar{\xi}(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}), n_0(\tau_1, \dots, \tau_{N-1})). \quad (10.1.7)$$

Здесь $x_i = \varphi_i(\tau, \bar{x}_0, n_0)$, $i = \overline{1..N}$; $n = \Xi(\tau, \bar{x}_0, n_0)$ - непродолжаемые решения характеристической системы $\frac{dx_i}{d\tau} = a_i(\bar{x}, n)$, $i = \overline{1..N}$, $\frac{dn}{d\tau} = b(\bar{x}, n)$. Завершением формальной части является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть при $\alpha < \tau < \beta$ ($\alpha < 0$, $\beta > 0$) и при всех $(\tau_1, \dots, \tau_{N-1}) \in T$ первые из уравнений системы (10.1.7) однозначно разрешимы относительно $\tau, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$, причем полученные функции $\tau = \tau(\bar{x})$, $\tau_i = \tau_i(\bar{x})$, $i = \overline{1..N-1}$ принадлежат классу C^1 . Тогда функция $n = n(\bar{x}) \equiv \Xi(\tau(\bar{x}), \bar{\xi}(\tau_1(\bar{x}), \dots, \tau_{N-1}(\bar{x})), n_0(\tau_1(\bar{x}), \dots, \tau_{N-1}(\bar{x})))$ является решением задачи Коши для уравнения (10.1.4) с начальным условием (10.1.6).

В приложениях часто встречается задача Коши для уравнения вида

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^N a_i(t, \bar{x}, n) \frac{\partial n}{\partial x_i} = b(t, \bar{x}, n) \quad (10.1.8)$$

со следующим начальным условием: $n(0, \bar{x}) = n_0(\bar{x})$ (т.е. начальная функция задается на гиперплоскости $t = 0$ пространства переменных $t, \bar{x}, n$). Нам известно, что интегральная поверхность $n = n(\bar{x}, t)$, дающая решение задачи Коши (10.1.8), образована характеристиками, проходящими при $\tau = 0$ через поверхность $t = 0$, $x_i = \tau_i$, $n = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N)$, $i = \overline{1..N}$ в пространстве переменных $t, \bar{x}, n$ (в качестве параметров на поверхности выбраны сами x_i).

Уравнению (10.1.8) в соответствии с вышесказанным соответствует характеристическая система

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \frac{dx_i}{d\tau} = a_i(t, \bar{x}, n), \frac{dn}{d\tau} = b(t, \bar{x}, n), i = \overline{1..N}, \quad (10.1.9)$$

которую нужно дополнить начальными условиями

$$t|_{\tau=0} = 0, x_i|_{\tau=0} = \tau_i, n|_{\tau=0} = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N), i = \overline{1..N}. \quad (10.1.10)$$

Из первого уравнения системы (10.1.9) и первого начального условия (10.1.10) находим $t = \tau$. Оставшиеся уравнения системы (10.1.9) и начальные условия (10.1.10) можно теперь записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(t, \vec{x}, n), \frac{dn}{dt} = b(t, \vec{x}, n), i = \overline{1 \dots N}, x_i|_{t=0} = \tau_i, n|_{t=0} = n_0(\tau_1, \dots, \tau_N), i = \overline{1 \dots N} \quad (10.1.11)$$

Решив задачу Коши (4.1.11), получим

$$x_i = x_i(t, \tau_1, \dots, \tau_N), n = \Xi(t, \tau_1, \dots, \tau_N), i = \overline{1 \dots N}. \quad (10.1.12)$$

Если первые N уравнений (10.1.12) однозначно разрешимы относительно $\tau_1, \dots, \tau_N$, то, в силу теоремы 3, формулы (10.1.12) определяют решение задачи Коши (10.1.8). Возвращаясь к решаемой задаче, рассмотрим для уравнения

$$(10.1.3): \frac{\partial n}{\partial t} + u(n) \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \text{ задачу Коши со следующим начальным условием:}$$

$n(x, 0) = n_0(x), -\infty < x < \infty$. Здесь $N = 1$, $a_1 = u(n)$, $b = 0$. Тогда соотношения (10.1.11) имеют в данном случае вид

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(t, \vec{x}, n) = u(n), \frac{dn}{dt} = b(t, \vec{x}, n) = 0, x_1|_{t=0} = \xi, n|_{t=0} = n_0(\xi). \quad (10.1.13)$$

Решая задачу Коши (4.1.13), получим

$$\frac{dn}{dt} = 0 \Rightarrow n = c_1 \xrightarrow{n|_{t=0}=n_0(\xi)} c_1 = n_0(\xi); \frac{dx_1}{dt} = u(n) \Rightarrow x_1 = \int u(n) dt \xrightarrow{n=n_0(\xi)} = u(n_0(\xi))t + c_2 \xrightarrow{x_1|_{t=0}=\xi} c_2 = \xi.$$

Соотношения $n = n_0(\xi); x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi$ определяют решение рассматриваемой задачи не для всех значений переменного t . В самом деле, если при некотором $t = t_1$, выражение для x_1 разрешимо относительно ξ не единственным образом, т.е. найдутся такие $\xi_1 \neq \xi_2$, что $u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1 = u(n_0(\xi_2))t_2 + \xi_2$ то эти соотношения не определяют при $t = t_1$ никакой однозначной функции $n = n(x, t)$ и при $t = t_1$ решение задачи Коши не определено. Геометрический смысл равенства $u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1 = u(n_0(\xi_2))t_2 + \xi_2$: при $t = t_1$ проекции на плоскость t, x характеристик, соответствующих значениям ξ_1 и ξ_2 пересекаются в точке $t = t_1$, $x = u(n_0(\xi_1))t_1 + \xi_1$.

1. Пусть $u(n) = n$, $n_0(x) = \alpha x$ ($\alpha > 0$).

Тогда имеем $n = n_0(\xi); x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi \Rightarrow n = \alpha \xi; x = \alpha t \xi + \xi \Rightarrow n = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t}$.

Видно, что возможно такое условие, при которых $\frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty$, т.е. решение становится разрывным: $n = \frac{\alpha x}{1 + \alpha t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\alpha}{1 + \alpha t} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty$ при $t = -\frac{1}{\alpha}$, причем разрыв образуется на переднем фронте волны.

2. Пусть $u(n) = b - \alpha n$, $n_0(x) = \alpha x$ ($\alpha > 0$).

Тогда имеем $n = n_0(\xi)$; $x_1 = u(n_0(\xi))t + \xi \Rightarrow n = \alpha \xi$; $x = t(b - \alpha \alpha \xi) + \xi \Rightarrow n = \frac{\alpha(x - bt)}{1 - \alpha at}$.

Видно, что возможно такое условие, при которых $\frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty$, т.е. решение становится разрывным:

$n = \frac{\alpha(x - bt)}{1 - \alpha at} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\alpha}{1 - \alpha at} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty$ при $t = \frac{1}{\alpha a}$, причем

разрыв образуется на заднем фронте волны.

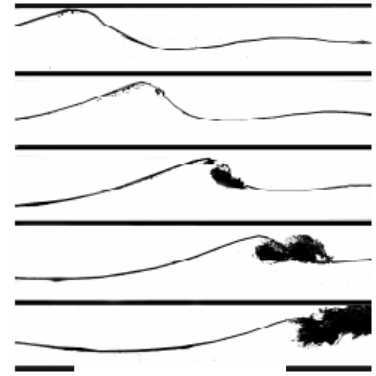


Рис. 10.1.1

Решение уравнения (10.1.3) по аналогии с линейными задачами можно также искать в виде [I.2] $n(x, t) = n[x - u(n)t]$, или, обращая решение, в виде $x - u(n)t = \Psi(n)$.

(10.1.14)

Т.к. функция Ψ от времени не зависит, то очевидно $\Psi(n) = n^{-1}(x, 0)$. Будем считать, что нам задано начальное условие для уравнения (10.1.3) в виде $n(x, 0) = \rho(x)$. Продифференцируем уравнение (10.1.14) по координате, тогда

$$1 - \frac{du}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} t = \frac{d\Psi}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} \stackrel{t=0}{\Rightarrow} \frac{d\Psi}{dn} = \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{t=0}, \text{ откуда}$$

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \left(\frac{d\Psi}{dn} + \frac{du}{dn} t \right)^{-1} = \left(\left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^{-1} \Bigg|_{t=0} + \frac{du}{dn} t \right)^{-1} = \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) \Bigg|_{t=0} \left(1 + \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) \Bigg|_{t=0} \frac{du}{dn} t \right)^{-1}. \quad (10.1.15)$$

Из соотношения (10.1.15) видно, что возможны такие условия, при которых $\frac{\partial n}{\partial x} \rightarrow \infty$, т.е. решение становится разрывным (при этом, очевидно еще и $\frac{\partial n}{\partial t} \rightarrow \infty$, $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \rightarrow \infty$, $\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} \rightarrow \infty$ - образуется и перегиб).

Рассмотрим два возможных случая. Пусть $t > 0$, $(\frac{\partial n}{\partial x})|_{t=0} > 0$, тогда, т.к. на разрыве, образующемся в момент времени $t = t_0$ при концентрации $n = n_0$ имеют место соотношения $\frac{\partial x}{\partial n} = 0$, $\frac{\partial^2 x}{\partial n^2} = 0$, то дифференцируя соотношение (10.1.14) по x при $t = t_0$, получим, рис. 10.1.1

$$1 - \frac{du}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} t = \frac{d\Psi}{dn} \frac{\partial n}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{du}{dn} t = \frac{d\Psi}{dn} \Big|_{\frac{\partial x}{\partial n} \Big|_{t=t_0} = 0} \Rightarrow - \frac{du}{dn} \Big|_{n=n_0} t_0 = \frac{d\Psi}{dn} \Big|_{n=n_0}. \quad (10.1.16)$$

Дифференцируя это соотношение по n при тех же условиях, получим

$$- \frac{d^2 u}{dn^2} \Big|_{n=n_0} t_0 = \frac{d^2 \Psi}{dn^2} \Big|_{n=n_0}. \quad (10.1.17)$$

Наконец, добавив сюда соотношение (10.1.14) в точке разрыва

$$x_0 - u(n_0)t_0 = \Psi(n_0), \quad (10.1.18)$$

получаем три уравнения с тремя неизвестными для определения t_0 , x_0 и n_0 . Такая ситуация имеет место, например, для волн на мелкой воде [II.8,23], когда (в сопровождающей системе координат) $u(n) = n$. Будем полагать, для , что $n(x,0) = \sin \omega x$. Тогда из (10.1.16)-(10.1.18) получим

$$- \frac{du}{dn} \Big|_{n=n_0} t_0 = \frac{d\Psi}{dn} \Big|_{n=n_0} \xrightarrow[\Psi = \omega^{-1} \arcsin n]{du/dn=1} -1 \cdot t_0 = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{1-n_0^2}}, \quad \frac{d^2 \Psi}{dn^2} \Big|_{n=n_0} = 0, \quad x_0 - u(n_0)t_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin n_0.$$

Легко видеть, что в этом случае разрыв образуется на переднем фронте волны. Пусть $t > 0$, $(\partial n / \partial t) \Big|_{t=0} < 0$, (такой случай имеет место для автомобильных потоков [I.16]), тогда разрыв образуется на заднем фронте.

В случае задачи с граничными условиями, параметры разрыва надо находить из условий $\partial t / \partial n = 0$, $\partial^2 t / \partial n^2 = 0$.

10.1.2. Слабые ударные волны. Уравнение Бюргерса

Будем вновь исходить из системы уравнений Навье-Стокса, которые рассмотрим в одномерном приближении

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (10.1.21)$$

$$C_{v\infty} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad P = \rho T / M, \quad (10.1.22)$$

Будем полагать коэффициенты вязкости и теплопроводности величинами первого порядка малости и разыскивать решение этой системы в виде ряда теории возмущений $\rho = \rho_0 + \rho^{(1)} + \rho^{(2)}$, $T = T_0 + T^{(1)} + T^{(2)}$, $P = P_0 + P^{(1)} + P^{(2)}$, $\vec{v} = \vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}$, где $\forall A$: $A^{(1)} \sim \varepsilon^1 \ll 1$, $A^{(2)} \sim \varepsilon^2$. Оставляя слагаемые первого порядка малости, получим уравнения [II.56]

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = -\frac{\partial P^{(1)}}{\partial x}, \quad P^{(1)} = \frac{\rho_0 T^{(1)} + T_0 \rho^{(1)}}{M}, \quad C_{v\infty} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} - \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим связь между $T^{(1)}$ и $\rho^{(1)}$:

$$\frac{T^{(1)}}{T_0} = \frac{1}{C_{v\infty}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = \frac{C_{p\infty} - C_{v\infty}}{C_{v\infty}} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = (\gamma_\infty - 1) \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0}. \quad \text{Подставляя это соотношение в}$$

$$\text{третье уравнение, получим связь } P^{(1)} \text{ с } \rho^{(1)}: P^{(1)} = \frac{T_0(\gamma_\infty - 1)\rho^{(1)} + T_0\rho^{(1)}}{M} = u_{s\infty}^2 \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0}.$$

Подставляя это соотношение во второе уравнение, получим уравнение

$$\rho_0 \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} = -u_{s\infty}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \right). \quad \text{Продифференцируем это уравнение по времени, а}$$

первое уравнение по координате и вычитая одно из другого, получим

$$\frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial t^2} + u_{s\infty}^2 \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial t^2} + u_{s\infty}^2 \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial x^2} = 0. \quad (10.1.23)$$

Таким образом, для возмущений первого порядка справедливы связи

$$\frac{P^{(1)}}{\rho_0} = \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} = \frac{T^{(1)}}{T_0} = \frac{v^{(1)}}{u_{s\infty}}. \quad \text{Будем искать решение системы (10.1.23) с}$$

использованием метода медленно меняющихся амплитуд, полагая, что в системе отсчета, движущейся со скоростью звуковой волны бесконечно малой амплитуды зависимость амплитуды от времени является медленной:

$$\rho^{(1);(2)} = \rho^{(1);(2)}(\tau, \xi) = \rho^{(1);(2)}(\varepsilon t, x - u_{s\infty} t) \quad \text{и т. д. Производные при этом}$$

преобразуются в соответствии с соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = 0,$$

$$\rho_0 \left(\varepsilon \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} \right) - u_{s\infty} \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial P^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2},$$

$$C_{v\infty} \left(\varepsilon \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{T_0}{\rho_0} \left(\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + v^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ (\gamma_\infty - 2) u_{s\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = \chi \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta}{3} \frac{\partial^2 v^{(1)}}{\partial \xi^2}, \quad P^{(2)} = \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + T^{(1)} \rho^{(1)}}{M}.$$

В слагаемых второго порядка малости можно воспользоваться линейными связями. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
 \rho^{(2)} &= \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + (\gamma_\infty - 1) T_0 \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0}}{M} = \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)} + T^{(1)} \rho^{(1)}}{M} = \frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} u_{s\infty}^2 \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0}, \\
 \varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + 2u_{s\infty} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} &= 0, \quad \rho_0 \left(\varepsilon \frac{u_{s\infty}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{u_{s\infty}^2}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{u_{s\infty}^2}{\rho_0} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} u_{s\infty}^2 \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0} \right] + \frac{u_{s\infty}}{\rho_0} \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}, \\
 C_{V\infty} \left(\varepsilon (\gamma_\infty - 1) \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial \xi} + (\gamma_\infty - 1) \frac{T_0 u_{s\infty}}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{T_0}{\rho_0} \left(\varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{u_{s\infty}}{\rho_0^2} \rho^{(1)} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right) + \\
 + (\gamma_\infty - 2) u_{s\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} &= \chi (\gamma_\infty - 1) \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta u_{s\infty}}{3 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}.
 \end{aligned}$$

Упрощая полученную систему (подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются), имеем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - u_{s\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + 2u_{s\infty} \frac{\rho^{(1)}}{\rho_0} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} &= 0, \\
 \varepsilon \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \tau} - \rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} + u_{s\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{T_0 \rho^{(2)} + \rho_0 T^{(2)}}{M u_{s\infty}} + \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty} u_{s\infty} \frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0} \right] &= \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}, \\
 C_{V\infty} \left(-u_{s\infty} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{T_0}{\rho_0} \left(-u_{s\infty} \frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial \xi} \right) + (\gamma_\infty - 2) u_{s\infty} \frac{T_0 \rho^{(1)}}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} &= \chi (\gamma_\infty - 1) \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\eta u_{s\infty}}{3 \rho_0} \frac{\partial^2 \rho^{(1)}}{\partial \xi^2}.
 \end{aligned}$$

Последнее уравнение может быть один раз проинтегрировано и дает связь $T^{(2)}$ с

$$\rho^{(2)}: \quad T^{(2)} \stackrel{c_{V\infty}^{-1} = (c_{P\infty} - c_{V\infty}) c_{V\infty}^{-1} = \gamma_\infty - 1}{=} (\gamma_\infty - 1) \left[\frac{T_0 \rho^{(2)}}{\rho_0} - (\gamma_\infty - 2) \frac{T_0 \rho^{(1)2}}{2 \rho_0^2} + \left(\chi + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial \xi} \right].$$

Подставим это соотношение во второе уравнение, сложим его с первым, чтобы

уничтожились слагаемые $\rho_0 \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi}$, тогда для безразмерного возмущения

плотности $\rho' = (\rho^{(1)} + \rho^{(2)}) / \rho_0$ получим уравнение Бюргерса [II.44,56]:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \Psi_\infty \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} = \mu_\infty \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \xi^2}, \quad (10.1.24)$$

где $\Psi_\infty = \frac{\gamma_\infty + 1}{2}$ - коэффициент квадратичной нелинейности,

$\mu_\infty = \frac{1}{2} \left[\zeta + \frac{4\eta}{3} + \left(\frac{1}{c_{v\infty}} - \frac{1}{c_{p\infty}} \right) \right]$. Добавим к уравнению (10.1.24) начальное условие

$\rho'(x,0) = \rho_0(x)$ и решим для него задачу Коши. Для этого вначале умножим уравнение (10.1.24) на Ψ_∞ и сделаем замену $\tilde{\rho} = \Psi_\infty \rho'$, тогда получим уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tau} + \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \xi} = \mu_\infty \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial \xi^2}. \quad (10.1.25)$$

Сделаем далее замену Коула-Хопфа [II.56] $\tilde{\rho} = -2\mu_\infty \frac{\partial \ln \mathfrak{R}}{\partial \xi} = -\frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi}$

и преобразуем уравнение (10.1.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(-\frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) - \frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) &= \mu_\infty \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(-\frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) - \frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) &= \mu_\infty \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right) \Rightarrow \\ \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} - \frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right)^3 \right) &= \mu_\infty \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right)^2 \right) \\ - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} \right) - \frac{2\mu_\infty}{\mathfrak{R}} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right)^3 \right) &= \mu_\infty \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^3 \mathfrak{R}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\mathfrak{R}^3} \left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \right)^3 - \frac{2}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} \right). \end{aligned}$$

Подчеркнутые одинаковым образом слагаемые взаимно сокращаются, в

результате имеем $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} \right) = \mu_\infty \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^3 \mathfrak{R}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} \right) = \mu_\infty \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2} \right)$.

Интегрируя последнее уравнение по ξ и умножая на $\mathfrak{R}$, имеем линейное

параболическое уравнение теплопроводности [III.26-31] $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \tau} = \mu_\infty \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \xi^2}$. При этом

начальное условие преобразуется к виду $\mathfrak{R}(x,0) = \exp \left[-\frac{1}{2\mu_\infty} \int_0^\xi \tilde{\rho}_0(\zeta) d\zeta \right]$. Решение

задачи Коши имеет вид, определяемый формулой Пуассона:

$$\mathfrak{R}(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\mu_\infty \pi \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{R}(\zeta, 0) \exp \left[-\frac{|\xi - \zeta|^2}{4\mu_\infty \tau} \right] d\zeta. \quad (10.1.25)$$

Другие типы решения уравнения Бюргера приведены в [II.56].

10.2. Автоволны

10.2.1 Волна эпидемии. Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова. Фазовая автоволна переключения

Рассмотрим динамику эпидемии, которая распространяется по принципу диффузии и передается при контактах с учетом, того, что скорость выздоровления пропорциональна числу больных.

Пусть n - плотность больных, $N = \text{const}$ - плотность населения. Тогда для изменения числа больных в одномерном случае при условии того, что радиус индивидуальной активности субъекта R много меньше характерного размера системы L имеем уравнение [II.45,55]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + pn(N - n) - \frac{n}{\tau}, \quad (10.2.1)$$

где p - константа скорости передачи инфекции при контакте больной - здоровый, τ - время выздоровления, $D \sim R^2/\tau$ - коэффициент подвижности субъектов при случайном перемещении. Здесь τ - продолжительность шага при случайном перемещении. Введем безразмерную переменную $\eta = n/N$

$$\frac{N \partial \frac{n}{N}}{\partial t} = D \frac{N \partial^2 \frac{n}{N}}{\partial x^2} + pN \frac{n}{N} \left(N - N \frac{n}{N} \right) - \frac{N \frac{n}{N}}{\tau}, \quad \text{отсюда} \quad \text{имеем}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + pN\eta(1 - \eta) - \frac{\eta}{\tau}. \text{ Окончательно получаем}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \eta(\eta_0 - \eta), \quad (10.2.2)$$

где $\eta_0 = pN - \tau^{-1}$. Довольно часто нелинейные волновые процессы являются автомодельными. Условия существования автомодельных решений обсуждаются, например, в [III.8]. Частным случаем автомодельного решения является решение вида бегущей волны $f = f(x-ut)$. Будем разыскивать решение (10.2.2) в виде $\eta = \eta(\xi) = \eta(x-ut)$. При этом производные преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Тогда получаем в переменной ξ обыкновенное! дифференциальное уравнение

$$D \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + u \frac{d\eta}{d\xi} + \eta(\eta_0 - \eta) = 0. \text{ Это уравнение легко может быть проанализировано}$$

на фазовой плоскости. Для этого представим его в виде пары уравнений первого порядка:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{d\xi} = -\frac{u}{D} \vartheta - \frac{\eta(\eta_0 - \eta)}{D} \quad (10.2.3)$$

Затем находим стационарные решения системы (10.2.3): $\vartheta_{10} = 0$, $\eta_{10} = 0$ и $\vartheta_{20} = 0$, $\eta_{20} = \eta_0$. Линеаризуем эту систему относительно найденных стационарных решений, разыскивая ее решение в виде $\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta'$, $\eta = \eta_0 + \eta'$ и оставляя в уравнениях слагаемые только первой степени по ϑ' , η' .

Линеаризация системы (10.2.3) относительно первого стационарного состояния дает:

$$\begin{cases} \frac{d(\eta_{10} + \eta')}{d\xi} = \vartheta_{10} + \vartheta' \Rightarrow \frac{d\eta'}{d\xi} = \vartheta' \\ \frac{d(\vartheta_{10} + \vartheta')}{d\xi} = -\frac{u}{D}(\vartheta_{10} + \vartheta') - \frac{(\eta_{10} + \eta')(\eta_0 - (\eta_{10} + \eta'))}{D} \Rightarrow \frac{d\vartheta'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\vartheta' - \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases}$$

Далее найдем характеристическое уравнение полученной системы. Для этого его решение будем искать в виде $\vartheta' = Ae^{\lambda\xi}$, $\eta' = Be^{\lambda\xi}$.

$$\begin{cases} \frac{d\eta'}{d\xi} = \vartheta' \\ \frac{d\vartheta'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\vartheta' - \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Ae^{\lambda\xi} + \lambda Be^{\lambda\xi} = 0 \\ \lambda Ae^{\lambda\xi} + \frac{u}{D}Ae^{\lambda\xi} + \frac{\eta_0 B}{D}e^{\lambda\xi} = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{усл. разрешимости}} \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda + \frac{u}{D} & \frac{\eta_0}{D} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\lambda^2 + 2\frac{u}{D}\lambda + \frac{\eta_0}{D} = 0. \text{ Корни этого уравнения } \lambda_{1,2} = \frac{u}{D} \pm \sqrt{\frac{u^2}{D^2} - \frac{\eta_0}{D}} \text{ при условии } u^2 \geq \eta_0 D$$

всегда действительны и положительны — особая точка $(0,0)$ является *неустойчивым узлом*. Обратное условие приводит к бессмысленным решениям, соответствующим отрицательному числу больных.

Линеаризация системы (10.2.3) относительно второго стационарного состояния дает:

$$\begin{cases} \frac{d(\eta_{20} + \eta')}{d\xi} = \vartheta_{20} + \vartheta' \Rightarrow \frac{d\eta'}{d\xi} = \vartheta' \\ \frac{d(\vartheta_{20} + \vartheta')}{d\xi} = -\frac{u}{D}(\vartheta_{20} + \vartheta') - \frac{(\eta_{20} + \eta')(\eta_0 - (\eta_{20} + \eta'))}{D} \Rightarrow \frac{d\vartheta'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\vartheta' + \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases}$$

Снова найдем характеристическое уравнение полученной системы.

Решение будем искать в виде $\vartheta' = Ae^{\lambda\xi}$, $\eta' = Be^{\lambda\xi}$. Тогда получим

$$\begin{cases} \frac{d\eta'}{d\xi} = \vartheta' \\ \frac{d\vartheta'}{d\xi} = -\frac{u}{D}\vartheta' + \frac{\eta_0\eta'}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Ae^{\lambda\xi} + \lambda Be^{\lambda\xi} = 0 \\ \lambda Ae^{\lambda\xi} + \frac{u}{D}Ae^{\lambda\xi} - \frac{\eta_0 B}{D}e^{\lambda\xi} = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{усл. разрешимости}} \begin{vmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda + \frac{u}{D} & -\frac{\eta_0}{D} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем $\lambda^2 + 2\frac{u}{D}\lambda - \frac{\eta_0}{D} = 0$.

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{u}{D} \pm \sqrt{\frac{u^2}{D^2} + \frac{\eta_0}{D}}$$

всегда действительны и имеют разные знаки — особая точка $(0, \eta_0)$ является *седлом*. Фазовый портрет системы приведен на рисунке.

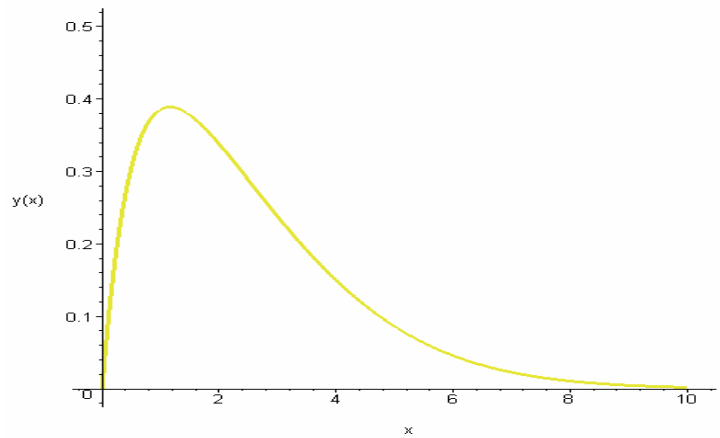


Рис. 10.2.1

10.2.2. Триггерная автоволна переключения.

Покажем, что в неравновесной (температура электронов T_e много больше температуры ионов T_i) полностью ионизованной плазме, находящейся во внешнем ВЧ-электрическом поле с учетом джоулева тепловыделения, потерь энергии электронами при соударениях с ионами и электронной теплопроводности существует автоволна перехода из одного стационарного состояния в другое. Уравнение движения электрона во внешнем поле имеет вид

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} - m\nu_{ei}(\vec{v}_e - \vec{v}_i) \underset{\Rightarrow v_e \gg v_i}{\approx} -e\vec{E} - m\nu_{ei}\vec{v}_e$$

Его решение в поле $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$ после выделения вещественной части дается

выражением $\vec{v}_e = -\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}(\nu_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$. Баланс энергии в плазме с

учетом джоулева тепловыделения, потерь энергии электронами при соударениях с ионами с коэффициентом δ и электронной теплопроводности можно записать в виде

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3}e\vec{v}_e\vec{E} - \delta v_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e. \quad (10.2.4)$$

Подставим в (10.2.4) выражение для скорости

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3}e \left[-\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + v_{ei}^2)} (v_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] \vec{E}_0 \cos \omega t - \delta v_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e.$$

и усредним полученное уравнение по периоду колебаний

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ \frac{dT_e}{dt} = -\frac{2}{3}e \left[-\frac{e\vec{E}_0}{m(\omega^2 + v_{ei}^2)} (v_{ei} \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \right] \vec{E}_0 \cos \omega t - \delta v_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e \right\} dt$$

Т.к. $2\omega > \delta v_{ei}$ то температура за это время не может существенно измениться, тогда получаем окончательно

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{e^2 \vec{E}_0^2}{3m(\omega^2 + v_{ei}^2)} - \delta v_{ei}(T_e - T_i) + \kappa_e \Delta T_e \quad (10.2.5)$$

Введем безразмерные переменные $\theta = T_e/T_i$, $b = \omega/v_{ei}$, $E = E_0/E_p$, $r = (\delta v_{ei}/\chi_e)x$, $\tau = \delta v_{ei}t$, где $E_p^2 = (3T_i m/e^2) \delta(\omega^2 + v_{ei}^2)$ - плазменное поле, тогда получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \theta^{-3/2} \frac{E_0^2 \theta^3}{b^2 \theta^3 + 1} - (\theta - 1) + \Delta \theta \quad (10.2.6)$$

Будем разыскивать решение этого уравнения в виде бегущей волны: $\theta = \theta(r-ct)$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-c \frac{d\theta}{d\tau} = \theta^{-3/2} \frac{E_0^2 \theta^3}{b^2 \theta^3 + 1} - (\theta - 1) + \frac{d^2 \theta}{dx^2} = f(\theta) + \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (10.2.7)$$

у которого на фазовой плоскости есть три особых точки: $(\theta_1, 0)$ и $(\theta_3, 0)$ - седла, а $(\theta_2, 0)$ - неустойчивый узел или фокус: $p^2 - c p + f(\theta_i) = 0$, $i = 1; 2; 3$. $f(\theta_1) < 0$, $f(\theta_2) > 0$, $f(\theta_3) < 0$. Ясно, что при определенных условиях существует фазовая траектория, идущая из седла в седло, которой соответствует волна перехода из одного стационарного состояния в другое. Пренебрегая в зоне интенсивного

тепловыделения нестационарными слагаемыми, получим: $\frac{d^2 \theta}{dx^2} + f(\theta) = 0$,

откуда после интегрирования имеем:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_d + \left(2 \int f(\theta) d\theta \right)^{1/2} = \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_u, \text{ где } (\theta) = (\theta_d, \theta_u) \text{ индексы } u \text{ и } d \text{ обозначают нижнюю и}$$

верхнюю границы зоны интенсивного тепловыделения. Основной поток тепла идет на нагрев плазмы перед этой зоной, поэтому $(\theta_r)_d > (\theta_r)_u$. В области перед

фронтом $f(\theta)$ мало и $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dx^2}$, откуда в СО, движущейся со скоростью c

$$\text{получаем } \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_d = c(\theta_d - \theta_1). \text{ Таким образом } c = \left(2 \int f(\theta) d\theta \right)^{1/2} / (\theta_d - \theta_1). \text{ Нетрудно}$$

видеть, что структура фазовой плоскости зависит от величины электрического

поля: при $E = E^*$, где E^* следует из условия $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta = 0$, скорость автоволны

равна нулю (в силу того, что вне зоны тепловыделения $f(\theta) \sim 0$, θ_d и θ_u аменены

на θ_1 и θ_3 . При меньших полях автоволна является волной гашения, при

больших – зажигания. Состояние θ_1 при $E > E^*$ очевидно метастабильно и

неустойчиво по отношению к достаточно большим возмущениям: если внутри

нее возник достаточно крупный зародыш фазы θ_3 , то он начнет расти и в

результате вся плазма перейдет в наиболее устойчивое состояние благодаря

распространению *триггерной автоволны перехода* [I.19]. Заметим, что

уравнение, описывающее тепловую динамику плазмы, может быть переписано

$$\text{в виде } \frac{d\theta}{dt} = - \frac{\delta F[\Phi(\theta_1)]}{\delta \theta(r, t)}, \text{ где } F[\Phi(\theta)] = \int_V \left(\Phi(\theta(r)) + \frac{(\nabla \theta)^2}{2} \right) dr, \quad \Phi(\theta) = - \int_1^\theta f(z) dz.$$

Поэтому критический зародыш - абсолютно неустойчивое образование, сколь

угодно малое возмущение формы которого приводит к его росту или гибели,

описывается уравнением $d\Phi[\theta]/d\theta(r, t) = 0$ или в явном виде: $f(\theta(r)) + \Delta\theta = 0$.

Полагая, с учетом симметрии задачи, его сферическим, получаем

$$\text{уравнение } \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dr} + f(\theta) = 0, \text{ с граничными условиями } \left. \frac{d\theta}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad \theta(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \theta_1.$$

В большом критическом зародыше падение температуры происходит в узком

слое, ширина которого много меньше критического радиуса, поэтому он

удовлетворяет уравнению $\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r_c} \frac{d\theta}{dr} + f(\theta) = 0$, $\theta(0) = \theta_3$, $\theta(r) \rightarrow \theta_1$ при $r \rightarrow \infty$.

Из сравнения этой системы с уравнением автоволны перехода получаем: $r_c =$

2/с. Оценка интеграла $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta$ с учетом определения E^* и явного вида функции

f дает $\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) d\theta = (E^2 + E^{*2}) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\theta^{3/2} d\theta}{b^2 \theta^3 + 1}$, откуда скорость s и радиус критического

зародыша равны $s \sim \frac{(E^2 - E^{*2})^{1/2}}{b^{1/6}}$, $r_c \sim 2b^{1/6} (E^2 - E^{*2})^{1/2}$.

10.3. Солитоны.

• Уравнение Кортевега – де Вриза

Рассмотрим уравнения, описывающие так называемую ионно-звуковую волну, бегущую в плазме по тяжелой (ионной) компоненте, полагая, что концентрация ионов равна концентрации электронов $n_e = n_i$. Они включают в себя уравнения непрерывности и движения для ионов и уравнение Пуассона для потенциала электрического поля [II.58].

Мы полагаем, что электроны движутся настолько быстро, что успевают отслеживать движение ионов, находясь с ними в равновесии, так что концентрацию электронов можно описать распределением Больцмана в электрическом поле с потенциальной энергией $U = -e\varphi$. Тогда получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = eE - \frac{\partial P_i}{\partial x} \stackrel{E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{=} - \frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k_B T_i \frac{\partial n_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi(-e)(n_e - n_i) \stackrel{E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \left[n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right) - n_i \right] \end{array} \right. \quad (10.3.1)$$

Стационарные решения системы (10.3.1) имеют вид: $\varphi = \varphi_0 = 0$, $n_i = n_0$, $v_i = 0$. Линеаризуем систему (10.3.1) относительно этих значений, разыскивая

решения в виде $n_i = n_0 + n_i'$, $v_i = v_i'$, $\phi = \phi'$, где штрихованные величины первого порядка малости. Тогда получим дисперсионное соотношение

$$\frac{\partial v_i'}{\partial t} = -\frac{e}{M} \frac{\partial \phi'}{\partial x} - k_B T_i \frac{\partial n_i'}{\partial x}, \frac{\partial n_i'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_i'}{\partial x} = 0, \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} = 4\pi e \left[n_0 \frac{e\phi'}{k_B T_e} - n_i' \right] \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{k_B(T_e + T_i)}{M}}.$$

Т.к. обычно температура ионов много меньше температуры электронов $T_e \ll$

T_i , то последним слагаемым в первом уравнении системы (10.3.1) можно пренебречь. Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{x}{r_D} = x \sqrt{\frac{4\pi e n_0}{k_B T_e}}, \quad t = \omega_p t = t \sqrt{\frac{4\pi e n_0}{M}}, \quad \phi = \frac{e\phi}{k_B T_e}, \quad n_i = \frac{n_i}{n_0}, \quad v_i = \frac{v_i}{v_{Si}} = v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}},$$

тогда получим

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} \partial v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}}}{\sqrt{\frac{M}{4\pi e n_0}} \partial \left(\sqrt{\frac{4\pi e n_0}{M}} t \right)} + \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}} \frac{\sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} \partial v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}}}{\sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi e n_0}} \partial \left(\sqrt{\frac{4\pi e n_0}{k_B T_e}} x \right)} = -\frac{e}{M} \frac{\frac{k_B T_e}{e} \partial \frac{e\phi}{k_B T_e}}{\sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi e n_0}} \partial \left(\sqrt{\frac{4\pi e n_0}{k_B T_e}} x \right)}, \\ & \frac{n_0 \partial \frac{n_i}{n_0}}{\sqrt{\frac{M}{4\pi e n_0}} \partial \left(\sqrt{\frac{4\pi e n_0}{M}} t \right)} + \frac{n_0 \sqrt{\frac{k_B T_e}{M}} \partial \left(\frac{n_i}{n_0} v_i \sqrt{\frac{M}{k_B T_e}} \right)}{\sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi e n_0}} \partial \left(\sqrt{\frac{4\pi e n_0}{k_B T_e}} x \right)} = 0, \\ & \frac{\frac{k_B T_e}{e} \partial^2 \frac{e\phi}{k_B T_e}}{\frac{k_B T_e}{4\pi e n_0} \partial \left(\sqrt{\frac{4\pi e n_0}{k_B T_e}} x \right)^2} = 4\pi e \left[n_0 \exp \left(\frac{e\phi}{k_B T_e} \right) - n_0 \frac{n_i}{n_0} \right] \end{aligned} \right.$$

откуда после приведения имеем

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v_i)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^\phi - n \quad (10.3.2)$$

Будем искать решение системы (10.3.2), разыскивая его в виде разложения по малому параметру:

$$v_i = \varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)} + \dots, \quad n_i = 1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)} + \dots, \quad \phi = \varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)} + \dots$$

и вводя новые переменные

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad \text{Подставляя эти}$$

разложения в (10.3.2) получаем

$$\begin{cases} \left(\varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)}) + (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)}) \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)}) = -\varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)}), \\ \left(\varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)}) + \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} ((1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)}) (\varepsilon v_i^{(1)} + \varepsilon^2 v_i^{(2)})) = 0, \\ \varepsilon^1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)}) = 1 + (\varepsilon \phi^{(1)} + \varepsilon^2 \phi^{(2)}) + \varepsilon^2 \frac{\phi^{(1)2}}{2} - (1 + \varepsilon n_i^{(1)} + \varepsilon^2 n_i^{(2)}). \end{cases}$$

Собирая слагаемые разных порядков, имеем

$$\begin{cases} \varepsilon^{3/2} \left[-\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \varepsilon^{5/2} \left[\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{e}{M} \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} \right] = 0, \\ \varepsilon^{3/2} \left[-\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \varepsilon^{5/2} \left[\frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial (v_i^{(2)} + n_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi} - \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} \right] = 0, \\ \varepsilon^1 (n_i^{(1)} - \phi^{(1)}) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} + n_i^{(2)} - \phi^{(2)} \right) = 0. \end{cases} \quad (10.3.3)$$

Выражения в каждой из этих скобок по отдельности должны обращаться в ноль, поскольку представляют собой различные функции переменных ξ и τ .

Поэтому получаем: $\varepsilon^1 : n_i^{(1)} = \phi^{(1)}$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{3/2} : \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi}; \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \xi} \xrightarrow[n_i^{(1)}; v_i^{(1)}; \phi_i^{(1)}]_{\xi \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\infty} d\xi \quad v_i^{(1)} = n_i^{(1)} = \phi_i^{(1)}. \\ \varepsilon^{5/2} : \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial (v_i^{(2)} + n_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi} - \frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad \xRightarrow[n_i^{(2)} = \phi^{(2)} - \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2}}{\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi}} \\ \xRightarrow[n_i^{(2)} = \phi^{(2)} - \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2}}{\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi} = \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi}} \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi^{(1)2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (n_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow \\ \xRightarrow[v_i^{(1)} = n_i^{(1)} = \phi_i^{(1)}]{\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 v^{(1)}}{\partial \xi^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial v^{(1)2}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial (v_i^{(1)} v_i^{(1)})}{\partial \xi}} = 0. \end{aligned}$$

Собирая слагаемые, приходим к уравнению Кортевега – де Вриза:

$$\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} + v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 v_i^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0, \quad (10.3.4)$$

где $\beta = 1/2$. Уравнение (10.3.4) имеет решения различного типа, стационарные и нестационарные.

• **Решение вида бегущей волны $z = x - wt$.** Обоснование предположения о том, что уравнение (10.3.2) имеет решение подобного вида достаточно прозрачно. С одной стороны, нелинейное слагаемое в (10.3.4) отвечает за опрокидывание волны. Однако этот процесс сопровождается накоплением на фронте высоких гармоник. С другой стороны, дисперсионное соотношение для уравнения (10.3.2) (в исходной СК) имеет вид $\omega = u_{si}k - \beta k^3$. Из этого соотношения видно, что и фазовая и групповая скорости высших гармоник, начиная с некоторых критических значений, уменьшаются с ростом k . В силу этого нелинейное укручение фронта может компенсироваться дисперсионным расплыванием волны. В результате имеем уравнение, которое может быть один раз проинтегрировано [I.2, II.23,25]:

$$\beta \frac{d^3 v_i'}{dz^3} + v_i' \frac{dv_i'}{dz} - w \frac{dv_i'}{dz} = 0 \Rightarrow \beta \frac{d^2 v_i'}{dz^2} + \frac{v_i'^2}{2} - w v_i' = C_1.$$

Умножим это уравнение на $\frac{dv_i'}{dz}$ и проинтегрируем это уравнение еще раз:

$$\beta \frac{dv_i'}{dz} \frac{d^2 v_i'}{dz^2} + \frac{dv_i'}{dz} \frac{v_i'^2}{2} - w \frac{dv_i'}{dz} v_i' = C_1 \frac{dv_i'}{dz} \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 + \frac{1}{6} \frac{dv_i'^3}{dz} - \frac{w}{2} \frac{dv_i'^2}{dz} - C_1 \frac{dv_i'}{dz} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 + \frac{v_i'^3}{6} - \frac{w v_i'^2}{2} - C_1 v_i' = C_2 \Rightarrow 3\beta \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 = -v_i'^3 + 3w v_i'^2 + 6C_1 v_i' + 3C_2 \quad [1], \text{стр.138}$$

$$\xRightarrow[\text{1 способ}]{[1], \text{стр.138}} 3\beta \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 = (m_1 - v_i')(m_2 - v_i')(m_3 - v_i') = \varphi(v_i').$$

Правая часть
последнего уравнения
очевидно
положительна, а,
следовательно, и
левая. Таким образом,
из условия
ограниченности
решения при $\beta > 0$ для

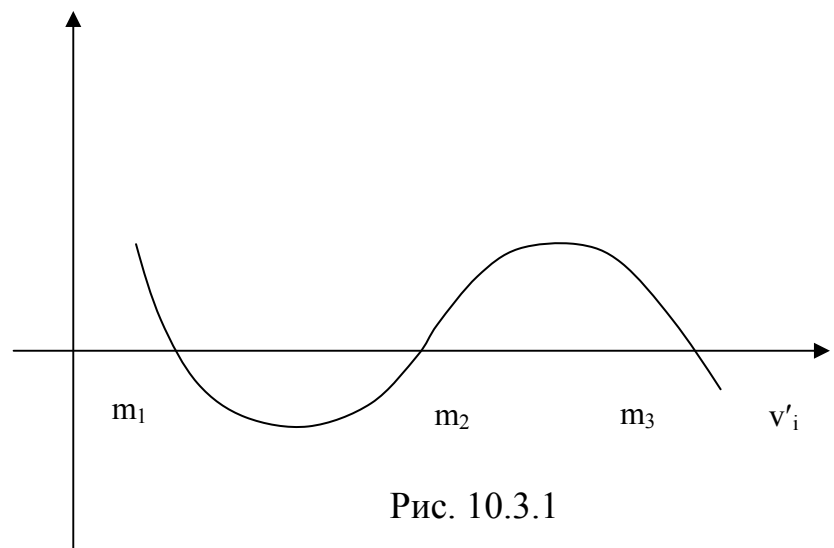


Рис. 10.3.1

колебаний конечной амплитуды v_i' должна быть ограничена областью $m_2 \leq v_i' \leq m_3$, т.е. должно быть по крайней мере два действительных корня, и, значит, три, так как все коэффициенты функции $\varphi(v_i')$ действительны ([III.19] (график $\varphi(v_i')$ приведен на рис. 10.3.1). Связь w и констант m_i имеет вид ([III.19], стр. 139): $w = (m_1 + m_2 + m_3)/3$. Пусть $m_1 > m_2 \geq m_3$, причем $m_1 \geq w \geq m_2$.

1. Если $m_2 = m_3$, тогда получаем

$$\begin{aligned} 3\beta \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 &= (m_1 - v_i')(m_2 - v_i')^2 \stackrel{v_i' = v_i' - m_2}{\Rightarrow} \frac{dv_i'}{v_i' \sqrt{m_1 - m_2 - v_i'}} = \frac{dz}{\sqrt{3\beta}} \stackrel{[2], 192.11}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{[2], 192.11}{\Rightarrow} -\frac{2}{\sqrt{m_1 - m_2}} \operatorname{arth} \frac{\sqrt{m_1 - m_2 - v_i'}}{\sqrt{m_1 - m_2}} = \frac{z}{\sqrt{3\beta}} \Rightarrow v_i' = \frac{m_1 - m_2}{\operatorname{ch}^2 \left(\sqrt{\frac{m_1 - m_2}{12\beta}} z \right)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_i' = m_2 + (m_1 - m_2) \operatorname{ch}^{-2} \left(\sqrt{\frac{m_1 - m_2}{12\beta}} z \right). \end{aligned} \quad (10.3.5)$$

Скорость этого возмущения, называемого *солитоном* [I.1,2;II.19,23] (solitary – уединенный) равна $w = \frac{m_1 - m_2}{3} + m_2$.

2. Если $m_2 > m_3$, тогда получаем решение в виде так называемых *кноидальных волн*. Процедура его получения выглядит так:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv_i'}{dz} \right)^2 &= -\frac{1}{3\beta} (v_i' - m_1)(v_i' - m_2)(v_i' - m_3) \stackrel{-w_i' = v_i' - m_3}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{-w_i' = v_i' - m_3}{\Rightarrow} \left(\frac{dw_i'}{d\zeta} \right)^2 = w_i'(m_3 - m_2 - w_i')(m_3 - m_1 - w_i') \stackrel{w_i' = (m_3 - m_2)/v^2}{\Rightarrow} \frac{w_i' = (m_3 - m_2)/v^2}{k^2 = \frac{m_3 - m_2}{m_3 - m_1}} \left(\frac{dv}{d\zeta} \right)^2 = (m_3 - m_1)(1 - v^2)(1 - k^2 v^2). \end{aligned}$$

Последнее уравнение – это уравнение для эллиптических функций Якоби [III.18,24]. Поэтому

$$v = \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{m_3 - m_1} \zeta, \sqrt{\frac{m_3 - m_2}{m_3 - m_1}} \right] \Rightarrow v_i' = m_3 - (m_3 - m_2) \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{m_3 - m_1} \frac{z}{\sqrt{3\beta}}, \sqrt{\frac{m_3 - m_2}{m_3 - m_1}} \right]. \quad (10.3.6)$$

Период и скорость этой волны определяются соотношениями [II.23]

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{12\beta}{m_1 - m_2}} \sigma K(\sigma), \quad w = m_3 + \frac{2(m_1 - m_2)}{3} \frac{2 - \sigma^2}{\sigma^2},$$

а $K(\sigma)$ – полный эллиптический интеграл первого рода [III.18,24].

• Уравнение *sin-Гордон*

Атом твердого тела для большого числа эффектов можно считать классическим объектом, находящемся в периодическом потенциале. Набор атомов при этом можно моделировать цепочкой частиц массы m , соединенных друг с другом пружинами жесткости k , причем частицы скользят по синусоидально гофрированной поверхности [II.3,25].

Пусть промежуток между частицами цепочки при недеформированном состоянии соединяющих пружин равен b , период суброта a , положение n – й частицы X_n , положение n – й впадины $\tilde{x}_n = a\left(n + \frac{3}{4}\right)$, $x_n = X_n - \tilde{x}_n$ – смещение n – й частицы относительно n – й впадины. Потенциальная энергия частиц в поле тяжести равна $U_g = mgh \sum \left(1 + \sin \frac{2\pi X_n}{a}\right) = mgh \sum \left(1 + \cos \frac{2\pi x_n}{a}\right)$, а потенциальная энергия деформации пружины равна

$U_k = \frac{k}{2} \sum [X_n + 1 - (X_n + b)]^2 = \frac{k}{2} \sum [X_n + 1 - X_n - a + b]^2$. Введем обозначения $\zeta_n = \frac{x_n}{a}$,

$P_0 = \frac{a}{b-a}$, $W = 2mgh$, $I_0^2 = ka^2 2W$, тогда полная потенциальная энергия системы

$U = U_k + U_g = W I_0^2 \sum \left(\zeta_{n+1} - \zeta_n - \frac{1}{P_0} \right)^2 + \frac{W}{2} \sum (1 - \cos 2\pi \zeta_n)$, а полная кинетическая

энергия системы равна $T = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{dx_n}{dt} \right)^2 = \frac{ma^2}{2} \sum \left(\frac{d\zeta_n}{dt} \right)^2$.

Для получения уравнения движения p – й массы воспользуемся Лагранжевым подходом. Используя выражение для функции Лагранжа $L = T -$

U и уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \zeta_p}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \zeta_p} = 0$, получаем уравнение

$$ma^2 \frac{\partial^2 \zeta_p}{\partial t^2} + 2I_0^2 (-\zeta_{p+1} + 2\zeta_p - \zeta_{p-1}) + \pi W \sin 2\pi \zeta_p = 0. \quad (10.3.7)$$

Перейдем в уравнении (10.3.7) к непрерывному пределу

$\zeta_{n+1}(t) - \zeta_n(t) \approx \zeta(x, t) + \frac{\partial \zeta(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \zeta(x, t)}{\partial x^2} + \dots$, и, вводя обозначение $c^2 = \frac{ka^2}{m}$,

получим уравнение $\frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\pi}{2l_0^2} \sin 2\pi\zeta = 0$. Вводя новые переменные $\sigma = 2\pi\zeta$,

$u = \frac{\pi x}{l_0}$, $v = \frac{\pi ct}{l_0 a}$, получаем уравнение sin-Гордон

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial v^2} + \sin \sigma = 0, \quad (10.3.8)$$

встречающееся также в теории излучения, квантовой теории поля, других задачах и имеющее солитонные решения. Например, односолитонное решение уравнения (10.3.8) имеет вид [III.5, раздел 3.3.3]:

$$\sigma = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \exp \left[\pm \frac{kv + \mu u + \theta}{\sqrt{\mu^2 - k^2}} \right] \right\}, \quad (10.3.9)$$

где k , μ , θ - произвольные константы.

Кроме уравнения КдВ и sin-Гордон, солитонные решения имеют и некоторые другие уравнения [III.19,25;III.8], среди которых можно выделить нелинейное уравнение Шредингера (НУШ):

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u |u|^2 = 0, \quad (10.3.10)$$

и другие.

11. Взаимодействие волн

Пусть в среде с дисперсией и нелинейностью распространяются волны с $\omega = \omega_j$ и $k_j = k(\omega_j)$. В результате взаимодействия из-за нелинейности в среде возникает волна с частотой $\omega_1 = \sum_{j=1} n_j \omega_j$ и волновым вектором $\vec{k}_1 = \sum_{j=1} n_j \vec{k}_j$.

Амплитуда этой волны останется малой, если ω_1 и $\vec{k}_1$ не удовлетворяют дисперсионному соотношению $\omega_1 \neq \omega(k_1)$ и нарастает, если $\omega_1 = \omega(k_1)$ (взаимодействие –

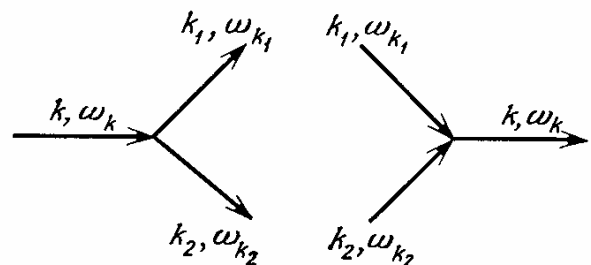


Рис. 11.3.1

резонансное). Для наиболее важного случая трех волн условие резонансного взаимодействия (*условия синхронизма*) [I.2], рис. 11.3.1 приобретают вид

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 \quad (11.1.1)$$

Рассмотрим общую схему анализа взаимодействия волн, считая волны одномерными. Пусть некоторое поле в слабонелинейной среде описывается системой уравнений вида

$$\hat{A} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \hat{B} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \hat{C} \vec{u} = \varepsilon f\left(\vec{u}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\right), \quad (11.1.2)$$

где $\vec{u}$ - мерный вектор, $\varepsilon \ll 1$. При $\varepsilon = 0$ поле в среде является суперпозицией гармонических волн

$$\vec{u} = a \vec{\psi} e^{i\omega t - ik(\omega)x} + \text{к.с.} \quad (11.1.3)$$

где a - комплексная амплитуда, зависящая от начальных и граничных условий, $\vec{\psi}$ - поляризационный вектор, определяемый системой

$$(i\omega \hat{A} - ik\hat{B} + \hat{C})\vec{\psi} = 0, \quad (11.1.4)$$

а ω и k связаны дисперсионным уравнением

$$D(\omega, k) = \det[\omega \hat{A} - k\hat{B} - i\hat{C}] = 0. \quad (11.1.5)$$

Одну из компонент вектора $\vec{\psi}$ всегда можно положить равной единице, тогда остальные находятся из системы (11.1.5). Будем рассматривать взаимодействие конечного числа волн вида (11.1.3), для которых выполнены условия синхронизма. (То, что условия синхронизма выполнены лишь для конечного числа волн, означает, что система обладает дисперсией.)

При $\varepsilon \neq 0$ решение (11.1.2) будем искать в виде

$$\vec{u}(x, t) = \sum_j a_j(\varepsilon x, \varepsilon t) \vec{\psi}(\omega_j, k_j) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \text{к.с.} + \varepsilon \vec{w}(x, t) \quad (11.1.6)$$

заранее предполагая, что амплитуда медленно меняется в пространстве и во времени. Для того чтобы решение (11.1.6) было справедливым, надо, чтобы поправка $\vec{w}(x, t)$ не нарастала со временем. Подставляя решение в (11.1.2), получим уравнение для w в виде

$$\hat{A} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \hat{B} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \hat{C} \vec{w} = \vec{g}(x, t), \quad (11.1.7)$$

$$\text{где } \vec{g}(x, t) = \sum_j e^{i\omega_j t - ik_j x} \left[\hat{A} \vec{\psi}(\omega_j, k_j) \frac{\partial a_j}{\partial t} + \hat{B} \vec{\psi}(\omega_j, k_j) \frac{\partial a_j}{\partial x} \right] + \text{к.с.} + f\left(\sum_j a_j \vec{\psi}(\omega_j, k_j) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \text{к.с.}\right).$$

Чтобы функция $\vec{w}(x, t)$ при любых x, t оставалась ограниченной, необходимо

и достаточно, чтобы в правой части системы (11.1.7) отсутствовали резонансные члены, т. е. правая часть должна быть ортогональна собственным функциям линейной задачи. Так как нелинейность полиномиальна, правые части (11.1.7) являются периодическими функциями по x и t и их можно представить в виде ряда Фурье

$$\vec{g}(x, t) = \sum_{r=1}^N \vec{F}_r e^{i\omega_r t - ik_r x} + \text{к.с.}, \quad \vec{F}_r = \frac{\omega k}{4\pi^2} \int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \vec{g}(x, t) e^{-i\omega_r t + ik_r x} dx dt. \quad (11.1.8)$$

Функции $\vec{w}(x, t)$ также представляются в виде

$$\vec{w}(x, t) = \sum_{r=1}^N \vec{W}_r e^{i\omega_r t - ik_r x} + \text{к.с.}. \quad (11.1.9)$$

После подстановки (11.1.8) и (11.1.9) в (11.1.7) получим, приравнявая коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, неоднородную систему алгебраических уравнений для определения $\vec{W}$: $(i\omega_r \hat{A} - ik_r \hat{B} + \hat{C}) \vec{W}_r = \vec{F}_r$, откуда 1 - компонента вектора $\vec{W}$ записывается в виде

$$W_1(\omega_r, k_r) = -\frac{i}{D(\omega_r, k_r)} \sum_{j=1}^N D_{jl} F_j(\omega_r, k_r), \text{ где } D_{jl} - \text{алгебраические дополнения матрицы}$$

D . Если конец вектора (ω_r, k_r) не лежит на дисперсионной кривой, т. е. это не собственная волна системы, то $\hat{D}(\omega_r, k_r) \neq 0$ и добавок ограничен. В противном случае $\vec{W}$ будет секулярно нарастать. Чтобы этого не было, надо изъять из уравнения для добавка резонансный член. Математически это сводится к выполнению равенства $\sum_{j=1}^N D_{jl} F_j(\omega_r, k_r) = 0$. Так как $D_{jl} = \gamma \vec{\zeta}_j^* \vec{\psi}_l D_{jl}$ где $\vec{\zeta}_j^*$ -

собственные функции сопряженной с (5.1.4) системы, последнее условие можно записать в виде $\sum_{j=1}^N \vec{\zeta}_j^* F_j(\omega_r, k_r) = 0$. Это и есть условие ортогональности.

Отсюда с учетом (5.1.8) и (5.1.7) для комплексных амплитуд a_j получим

$$\text{уравнения} \quad \left(\vec{\zeta}, \hat{A} \vec{\psi} \right) \frac{\partial a_j}{\partial t} + \left(\vec{\zeta}, \hat{B} \vec{\psi} \right) \frac{\partial a_j}{\partial x} = \left(\vec{\zeta}, \langle \vec{f}(\omega_j, k_j) \rangle \right), \quad \text{где}$$

$$\langle \vec{f}(\omega_j, k_j) \rangle = \frac{\omega k}{4\pi^2} \int_x^{x+\frac{2\pi}{k}} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \vec{f}(\omega_j, k_j) e^{-i\omega_j t + ik_j x} dx dt.$$

Используя соотношения $\frac{(\vec{\zeta}, \hat{B}\vec{\psi})}{(\vec{\zeta}, \hat{A}\vec{\psi})} = -\frac{\frac{\partial D}{\partial \vec{k}}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}} = \frac{d\omega}{dk} = v_G; \frac{(\vec{\zeta}_1, \hat{A}\vec{\psi})}{(\vec{\zeta}, \hat{A}\vec{\psi})} = \frac{D_{lk}}{\psi_k \frac{\partial D}{\partial \omega}}$ запишем

последнее выражение в виде

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_G(\omega_r, k_r) \frac{\partial a_j}{\partial x} = \frac{1}{\psi_j \frac{\partial D}{\partial \omega}} \sum_l D_{lj} \langle f_l \rangle \quad (11.1.10)$$

Это и есть искомые уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих квазигармонических волн.

1. Взаимодействие электромагнитных волн в среде с нелинейной намагнитченностью.

Уравнения Максвелла с учетом связи $D = E + 4\pi P$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial H}{\partial x} &= -\mu j(E), \quad \frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} = -\mu \frac{\partial B(H)}{\partial t}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} - R = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial t} + \omega_0^2 P - \omega_0^2 \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E &= 0 \Leftrightarrow \frac{\partial R}{\partial t} + \omega_0^2 P - \omega_0^2 \chi E = 0. \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

Дисперсионное соотношение для (11.1.11), получаемое путем отбрасывания нелинейных слагаемых и поиска решения в виде $\sim e^{i\omega_r t - ik_r x}$, имеет вид:

$$D(\omega, k) = \begin{vmatrix} \omega & -ck & 4\pi\omega & 0 \\ -ck & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega & i \\ i\omega_0^2 \chi & 0 & -i\omega_0^2 & \omega \end{vmatrix} = \omega^2 (\omega^2 - \varepsilon \omega_0^2) - c^2 k^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = 0.$$

Положим, в соответствии с приведенной выше теорией, $\psi_E = 1$. Тогда

$$\psi_H = \frac{1}{D_{11}} \begin{vmatrix} ck & 0 & \omega \\ 0 & \omega & i \\ i\omega_0^2 \chi & -i\omega_0^2 & \omega \end{vmatrix} \stackrel{D_{11} = \omega(\omega^2 - \omega_0^2)}{=} \frac{ck}{\omega}, \quad \psi_P = \frac{\omega_0^2 \chi}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \psi_R = \frac{i\omega\omega_0^2 \chi}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Будем искать решение в виде суммы трех волн

$$E, H, P, R = \sum_j a_j(\varepsilon x, \varepsilon t) \psi_{E;H;P;R}(\omega_j, k_k) e^{i\omega_j t - ik_j x} + \text{к.с} + \varepsilon \vec{w}(x, t),$$

где частоты взаимодействующих волн и волновые числа удовлетворяют условию (11.1.1), рис. 11.3.1. Уравнения для комплексных амплитуд имеют вид

$$\frac{\partial a_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial a_j}{\partial x} = \left(\Psi_E \frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \sum_l D_{lj} \langle f_l \rangle = f_j, \quad (11.1.12)$$

$$\text{где } f_j = -D_{1j} \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \bigg|_{\omega_j, k_j} \left\langle \left(\sum_{j=1}^3 a_j e^{i\omega_j t - ik_j x} + \kappa c \right) e^{-i\omega_j t + ik_j x} \right\rangle - D_{2j} \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} \bigg|_{\omega_j, k_j} \left\langle \frac{\partial B \partial H}{\partial H \partial a} \left(\sum_{k=1}^3 \psi(\omega_k, k_k) a_k e^{i\omega_k t - ik_k x} + \kappa c \right) e^{-i\omega_j t + ik_j x} \right\rangle,$$

$$D_{21} = -ck(\omega^2 - \omega_0^2), \quad \frac{\partial D}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\pi\chi\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Отметим, что

если условие

(11.1.1) не

выполняется,

то правая часть

уравнения

(11.1.12)

является

быстроосцил-

лирующей и в

среднем за

достаточно

большой

промежуток

времени дает

вклад в уравнение следующего порядка малости.

С учетом конкретного вида нелинейных зависимостей $j(E) = -(gE + GE^3)$ и

$B(H) = \kappa H^2$ и наличия расстройк частоты и волнового числа $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega$,

$k_1 + k_2 = k_3 + \Delta k$ из (5.1.12) следуют уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = g_1 a_1 + \sigma_1 a_3 a_2^* e^{i\Delta\omega t} + i\zeta_1 a_3 a_2^* e^{i\Delta\omega t}, \\ \frac{\partial a_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = g_2 a_2 + \sigma_2 a_3 a_1^* e^{i\Delta\omega t} + i\zeta_2 a_3 a_1^* e^{i\Delta\omega t}, \\ \frac{\partial a_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} = g_3 a_3 + \sigma_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t} + i\zeta_3 a_1 a_2 e^{-i\Delta\omega t} \end{cases},$$

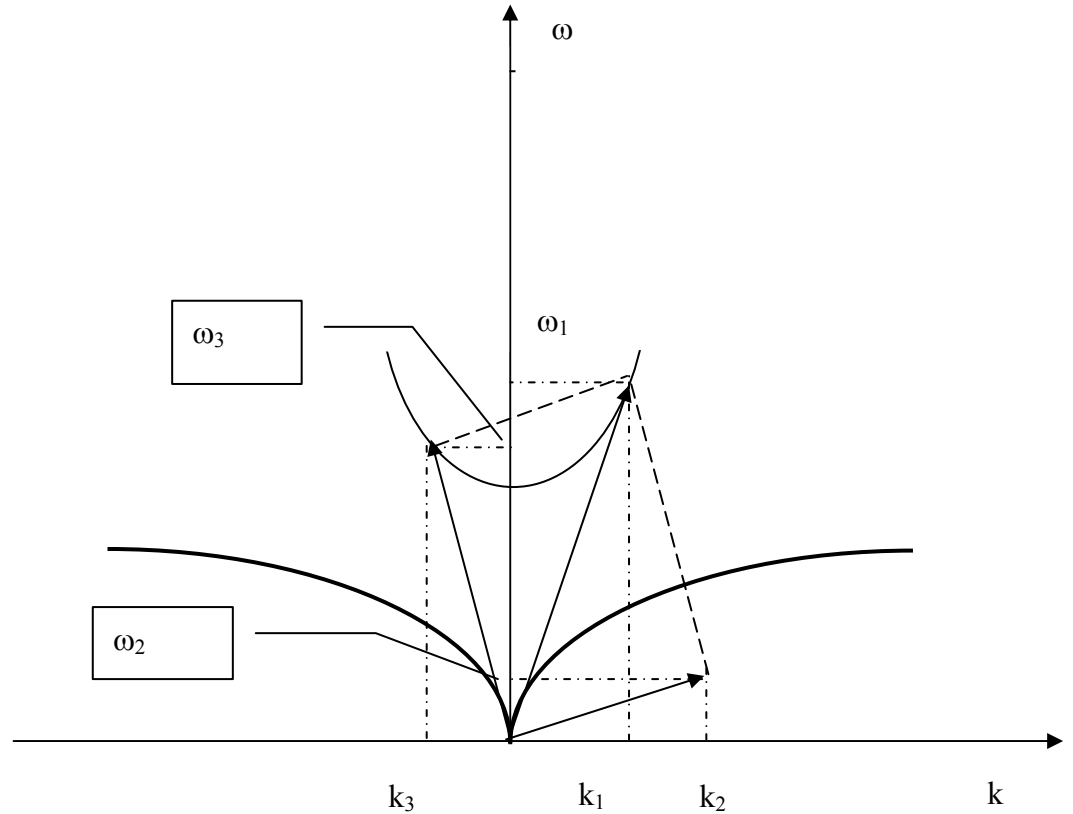


Рис. 11.3.2

$$\text{где } g_j = \left. \frac{D_{11}}{\partial D} \right|_{\omega_j; k_j} \quad g, \quad \sigma_j = \left. \frac{D_{11}}{\partial D} \right|_{\omega_j; k_j} \quad G, \quad \zeta_j = \left. \frac{D_{21}}{\partial D} \right|_{\omega_j; k_j} \quad \kappa.$$

12. Автомодельные и бегущие волны

Решения типа бегущей волны и автомодельные решения часто встречаются в различных приложениях. Существование этих решений обычно связано с инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований сдвига и растяжения сжатия.

• Бегущие волны.

Решениями типа бегущей волны называются решения вида [III.8]

$$u(x, t) = u(z) = u(kx - \omega t). \quad (12.1.1)$$

Поиск решения типа (12.1.1) проводится прямой подстановкой выражения (12.1.1) в исходное уравнение:

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots\right) = 0 \xrightarrow[u = u(kx - \omega t)]{\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega \frac{du}{dz}; \frac{\partial u}{\partial x} = k \frac{du}{dz}; \dots} F\left(u, -\omega \frac{du}{dz}, k \frac{du}{dz}, \omega^2 \frac{d^2 u}{dz^2}, k^2 \frac{d^2 u}{dz^2}, -k\omega \frac{d^2 u}{dz^2}, \dots\right) = 0.$$

Мы, в частности, видели, что к рассмотренному здесь типу относятся уравнения, анализировавшиеся выше.

• Автомодельные волны.

1. *Автомодельные решения.* Автомодельными называют решения вида

$$u(x, t) = t^\alpha U(\zeta) = t^\alpha U(xt^\beta) \quad (12.1.2)$$

Существование этих решений связано с инвариантностью рассматриваемых уравнений относительно преобразований растяжения сжатия (подобия) [III.8]. Автомодельные решения существуют, если растяжение переменных по правилу $t = C\tau$, $x = C^k \xi$, $u = C^m w$, где $C > 0$ – произвольная константа при соответствующем выборе k и m эквивалентно тождественному преобразованию, т.е. исходное уравнение в результате совершения над ним преобразований (12.1.1) переходит в такое же уравнение:

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots\right) = 0 \Leftrightarrow F\left(\xi, \tau, w, \frac{\partial w}{\partial \tau}, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial \xi}, \dots\right) = 0. \quad (12.1.3)$$

В этом случае, если функция $u = \Phi(x, t)$ является решением первого из уравнений (12.1.3), то функция $w = \Psi(\xi, \tau)$ является решением второго из уравнений (12.1.3). Свяжем α и β с k и m

$$w = \Psi(\xi, \tau) \stackrel{u(x,t)=t^\alpha U(xt^\beta)}{=} \tau^\alpha U(\xi \tau^\beta) \stackrel{t=C\tau, x=C^k \xi, u=C^m w}{\Rightarrow} u(x, t) = C^{m-\alpha} t^\alpha U(C^{-k-\beta} x t^\beta). \quad (6.1.4)$$

Последнее выражение удовлетворяет первому из уравнений (6.1.2). Требуя, чтобы (12.1.4) совпадало с (12.1.1) $\forall C$, получаем $\alpha = m, \beta = -k$. После этого подстановка автомодельного решения (12.1.1) в первое из уравнений (12.1.3) приводит нас к обыкновенному дифференциальному уравнению для $U(\xi)$.

В качестве примера рассмотрим уравнение теплопроводности с нелинейным источником и нелинейным коэффициентом теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu u^\sigma \quad (12.1.5)$$

Преобразование (12.1.2) приводит нас к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu u^\sigma \stackrel{t=C\tau, x=C^k \xi, u=C^m w}{\Rightarrow} C^{m-1} \frac{\partial (C^{-m} u)}{\partial (t C^{-1})} = \kappa C^{m-2k+m\gamma} \frac{\partial}{\partial (x C^{-k})} \left((C^{-m} u)^\gamma \frac{\partial (C^{-m} u)}{\partial (x C^{-k})} \right) + \mu C^{m\sigma} (C^{-m} u).$$

Приравнивание степеней C (чтобы получившееся уравнение совпало с исходным, дает уравнения $m-1 = m(\gamma+1) - 2k = m\sigma$, имеющие единственное решение $k = \frac{1}{1-\sigma}$; $m = \frac{\sigma-\gamma-1}{2(1-\sigma)}$. Далее находим вид автомодельного решения

$u = t^{\frac{\sigma-\gamma-1}{2(1-\sigma)}} U \left(x t^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)$. Подставляя его в уравнение для u , получаем

$$\kappa \frac{d}{d\zeta} \left(w^\gamma \frac{dw}{d\zeta} \right) + \mu w \frac{dw}{d\zeta} + \frac{\zeta}{2} \frac{dw}{d\zeta} + \frac{w}{2} = 0. \quad (12.1.6)$$

Литература

1. Основная литература

1. Карлов, Н. В. Колебания, волны, структуры / Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. – М.: Физматлит, 2001. – 496 с.
2. Рабинович, М. И. Введение в теорию колебаний и волн / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. - М.: Наука, 1984. - 432 с. 3. Трубецков, Д. И. Линейные колебания и волны / Д. И. Трубецков, А. Г. Рожнёв. - М.: Физматлит, 2001. - 416 с.
4. Кузнецов, А. П. Линейные колебания и волны. Сборник задач. / А. П. Кузнецов, Д. И. Трубецков, А. Г. Рожнёв. - М.: Физматлит, 2001. - 128 с.
5. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. - М.: Наука, 1981. - 586 с.
6. Алешкевич, В. А. Колебания и волны. Лекции. (Университетский курс общей физики) / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. - М.: Физический факультет МГУ. 2001. - 144 с.
7. Бутенин, Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. - М.: Наука, 1987. - 384 с.
8. Ланда, П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы / П. С. Ланда. - М.: Наука, 1980. - 245 с.
9. Ланда, П. С. Нелинейные колебания и волны / П. С. Ланда. - М.: Физматлит, 1997. - 496 с.
10. Люисселл, У. Связанные и параметрические колебания в электронике / У. Люисселл. - М.: ИЛ, 1963. - 352 с.
11. Неймарк, Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний / Ю. И. Неймарк. - М.: Наука, 1972. - 472 с.
12. Неймарк, Ю. И. Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. - М.: Наука, 1987. - 424 с.
13. Ланда, П. С. Автоколебания в распределенных системах / П. С. Ланда. - М.: Наука, 1983. – 413 с.

14. Кузнецов А. П. Нелинейные колебания. Учебное пособие для вузов / А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. – М.: Физматлит, 2005. – 346 с.
15. Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. - М.: Радиоисвязь, 1988. - 675 с.
16. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. - М.: Мир, 1977. - 378 с.
17. Виноградова, М. Б. Теория волн / М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков. - М.: Наука, 1979. – 378 с.
18. Васильев, В. А. Автоволновые процессы / В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. - М.: Наука, 1987 – 287 с.
19. Исаакович, М. А. Общая акустика / М. А. Исакович. - М.: Наука, 1973. - 496 с.

II. Дополнительная литература

1. Стрелков, С. П. Введение в теорию колебаний / С. П. Стрелков. - М.: Наука, 1964. - 437с.
2. Ден-Гартог, А. Теория колебаний / А. Ден-Гартог. - М.: Гостехиздат, 1942. - 429 с.
3. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, - М.: Наука, 1974. - 504 с.
4. Заславский, Г. М. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. - М.: Наука, 1988. - 368 с.
5. Горелик, Г. С. Колебания и волны / Г. С. Горелик. - Физматгиз, 1959. 549 с.
6. Конторович, М. И. Нелинейные колебания в радиотехнике / М. И. Конторович. - М.: Советское радио, 1973. - 320с.
7. Мандельштам, Л. И. Лекции по колебаниям / Л. И. Мандельштам. - М.: Изд. АН СССР, 1955. – 124 с.
8. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е.А. Леонтович. - М.: Наука, 1976. – 496 с.

9. Блэкьер, О. Анализ нелинейных систем / О. Блэкьер. - М.: Мир, 1969. – 400 с.
10. Блехман, И. И. Синхронизация в природе и технике / И. И. Блехман. - М.: Наука, 1981. – 351 с.
11. Заславский, Г. М. Стохастичность динамических систем / Г. М. Заславский. - М.: Наука, 1984. - 271 с.
12. Каплан, А. Е. Параметрические генераторы и делители частоты / А. Е. Каплан, Ю. А. Кравцов, В. А. Рылов. - М.: Сов. Радио, 1966. - 334 с.
13. Лихтенберг, А. Либерман. Регулярная и хаотическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. - М: Мир, 1984 – 324 с.
14. Найфэ, А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ. - М.: Мир, 1984. - 535 с.
15. Журавлев, В. Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов. - М.: Наука, 1988. - 328 с.
16. Анищенко, В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. - М.: Наука, 1990. - 315 с.
17. Капранов, М. В. Теория колебаний в радиотехнике / М. В. Капранов, В. Н. Кулешев, Г. М. Уткин. - М.: Наука, 1984. – 319 с
18. Владимиров, С. Н. Нелинейные колебания многочастотных автоколебательных систем / С. Н. Владимиров, А. С. Майдановский, С. С. Новиков. - Томск: изд-во Томск. ун-та, 1993. - 203 с.
19. Мун, Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров / Ф. Мун. - М.: Мир, 1990. - 312 с.
20. Кузнецов, С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. - М.: Физматлит, 2001. - 296 с.
21. Бетчов, Р. Вопросы гидродинамической устойчивости / Р. Бетчов, В. Криминале. - М.: Мир, 1971. - 547 с.
22. Неймарк, Ю. И. Динамические модели теории управления / Ю. И. Неймарк, Н. Я. Коган, В. П. Савельев. - М.: Наука, 1985. - 378 с.
23. Вайнштейн, Л. А. Разделение частот в теории колебаний и волн / Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман. - М.: Наука, 1983. – 288 с.

24. Арнольд, В. И. Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. - М.: Наука, 1979. – 278 с.
25. Петровский, И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. - М.: Наука, 1970. – 376 с.
26. Хединг, Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ) / Дж. Хединг. - М.: Мир, 1965. - 291 с.
27. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В. И. Арнольд. - М.: Наука, 1975. - 301с.
28. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. - М.: Наука, 1980. - 347 с.
29. Сборник задач по теории колебаний: учеб. пособие; под ред. Л.В. Постникова и В.И. Королева. - М.: Наука, 1978. – 198 с.
30. Пиппард, А. Физика колебаний / А. Пиппард.- М. Высшая школа, 1985. – 367 с.
31. Эроусмит, Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Д.Эроусмит, К. Плейс.- М.: Мир, 1986. 234 с.
32. Арнольд, В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд. - М.: Наука, 1990. – 102 с.
33. Андронов, А. А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. - М.: Наука, 1966. – 734 с.
34. Хаяси, Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси. - М.: Мир, 1968. – 213 с.
35. Смит, Дж. М. Модели в экологии / Дж. М. Смит. - М.: Мир, 1976. – 336 с.
36. Бломберген, Н. Нелинейная оптика / Н. Бломберген. - М.: Мир, 1966. – 501 с.
37. Кляцкин, В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах / В. И. Кляцкин. - М.: Наука, 2000. - 437 с.
38. Гаузе, Г. Ф. Борьба за существование / Г. Ф. Гаузе. - Москва-Ижевск: Изд. РХД, 2000. – 240 с.
39. Тода, М. Теория нелинейных решеток / М. Тода. - М.: Мир, 1986. – 247 с.

40. Вольтера, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтера. - М.: Мир. 1976. – 277 с.
41. Пригожин, И. От существующего к возникающему / И. Пригожин. - М.:Наука, 1985. -278 с.
42. Ландау Л. Д. Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 2001. - 649 с.
43. Ландау Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 2001. - 243 с.
44. Ландау Л. Д. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 2001. - 732 с.
45. Скотт, Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Э. Скотт. - М.: Советское радио, 1977. – 324 с.
46. Крауфорд, Ф. Волны. / Ф. Крауфорд. - М.: Наука, 1974. – 411 с.
47. Бхатнагар, П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах / П. Бхатнагар. - М.: Мир, 1983. 136 с.
48. Лайтхилл, Дж. Волны в жидкостях / Дж. Лайтхилл - М.: Мир, 1981. 403 с.
49. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. - М.: Наука, 1973. 279 с.
50. Блохинцев, Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды / Д. И. Блохинцев. - М. Наука, 1981. 197 с.
51. Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. - М.: Мир, 1984. 335 с.
52. Гинзбург, В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме / В. Л. Гинзбург. - М.: Наука. 1967. 375 с.
53. Кринский, В. И. Автоволны / В. И. Кринский, А. С. Михайлов.- М.: Знание, 1984. – 256 с.
54. Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сигур. - М.: Мир, 1987. 347 с.
55. Свирежев, Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю. М. Свирежев. - М.: Наука, 1987. – 359 с.

56. Руденко, О. В. Теоретические основы нелинейной акустики / О. В. Руденко, С. И. Солуян. - М.: Наука, 1975. – 234 с.
57. Бриллюэн, Л. Распространение волн в периодических структурах / Л. Бриллюэн, М. Пароди. - М.: ИЛ, 1959. – 409 с.
58. Карпман, В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В. И. Карпман. - М.: Наука, 1973. – 241 с.
59. Лэм, Дж. Л. Введение в теорию солитонов / Дж. Л. Лэм. - М.: Мир, 1984. - 295 с.

III. Справочная литература

1. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
2. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. - М.: Наука, 1966. 278 с.
3. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2001. - 478 с.
4. Полянин, А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2001. 505 с.
5. Зайцев, В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2002. - 457 с.
6. Полянин, А. Д. Справочник по интегральным уравнениям / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. - М.: Физматлит, 2003. 376 с.
7. Зайцев, В. Ф. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. - М.: Физматлит, 2001. - 416 с.
8. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, В. Ф. Журов. - М.: Физматлит, 2005. - 256 с.
9. <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-ode.htm>.
10. Бабич, В. М. Линейные уравнения математической физики / В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин. - М.: Наука, 1964. - 368 с.

11. Седов, Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. - М.: Наука, 1977. 254 с.
12. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1967. - 567 с.
13. Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. - Минск: Вышэйшая школа, 1970. - 360 с.
14. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. - М.: Наука, 1970. - 512 с.
15. Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
16. Олвер, Ф. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / Ф. Олвер. - М.: Наука, 1989. - 639 с.
17. Федорюк, М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М. В. Федорюк. - М.: Наука, 1983. - 352 с.
18. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. - М.: Наука, 1979. - 832 с.
19. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. - М.: Наука, 1984. - 546 с.
20. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. С. Рыжик. - М.: Наука, 1975. - 1108 с.
21. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров и учащихся втузов / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, 1984. - 832 с.
22. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. - М.: Наука, 1981. - 799 с.
23. Прудников, А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. - М.: Наука, 1981. - 767 с.
24. Янке, Е., Эмде Ф., Леш Ф Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш М.: Наука, 1968. - 344 с.

25. Двайт, Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г. Б. Двайт. - М.: Наука, 1973. - 228 с.
26. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. - М.: Наука. 1972. - 736 с.
27. Будак, Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. - М.: Наука, 1980. - 688 с.
28. Владимиров, В. М. Уравнения математической физики / В. М. Владимиров. - М.: Наука, 2003. - 432 с.
29. Владимиров, В. М. Сборник задач по уравнениям математической физики / В. М. Вдалимиров. - М.: Наука, 1982. - 256 с.
30. Карташев, А. П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. - М.: Наука. 1980. - 288 с.
31. Арсенин, В. Я. Методы математической физики и специальные функции / В. Я. Арсенин. - М.: Наука, 1974. - 299 с.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)**

***Механика. Молекулярная физика и термодинамика: Задания
по физике для самостоятельной работы***

С А М А Р А 2013

УДК 53(075)

М 55

Рецензент: канд. физ.-мат наук, доц. С м и р н о в а Н . П .

Механика. Молекулярная физика и термодинамика: задания по физике для самостоятельной работы/ В. Н. Кнестяпин, И. В. Овчинникова, С. И. Гусева, И. П. Заверишинский. 2-е изд. перераб. и доп. - Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 54 с.: ил.

Пособие содержит вопросы для самоконтроля, примеры решения задач. Методические указания составлены в соответствии с программой по физике для студентов дневного отделения. Подготовлено на кафедре физики.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

Занятие 1

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Вопросы

1. Способы задания движения точки.
2. Средняя и мгновенная скорости.
3. Скорость при различных способах задания движения.
4. Ускорение при различных способах задания движения.
5. Нормальная и тангенциальная составляющие ускорения, их физический смысл.
6. Угловая скорость, величина и направление. Связь угловой скорости с периодом и частотой вращения.
7. Связь между угловой и линейной скоростью.
8. Угловое ускорение, величина и направление. Связь линейного ускорения с угловыми величинами.
9. Кинематическое уравнение равномерного и равноускоренного прямолинейного движений.
10. Кинематическое уравнение равномерного и равноускоренного вращательного движений.

Принятые обозначения

$\vec{r}(t)$ - радиус-вектор,

$\left. \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix} \right\}$ - компоненты радиуса-вектора,

$\left. \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix} \right\}$ -единичные векторы (орты), направленные по соответствующим осям (OX,OY,OZ),

v - модуль линейной скорости,

$\left. \begin{matrix} a_\tau \\ a_n \end{matrix} \right\}$ - ускорения точки в проекциях на касательную и нормаль к траектории,

ω - модуль угловой скорости,

β - модуль углового ускорения,

n - частота оборотов,

R - радиус кривизны траектории в данной точке.

Примеры решения задач

Пример 1.

Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью V_0 . Определить:

- 1) траекторию движения тела; 2) время полета t_n ; 3) дальность полета l или x_{max} ; 4) максимальную высоту подъема H_{max} ; 5) a_n и a_τ в начальной точке траектории и в наивысшей точке подъема; 6) радиусы кривизны траектории в этих точках.

Решение

Движение происходит в плоскости xy (рис. 1). В начальный момент времени $t = 0$ тело находилось в начале координат, т.е. в точке 0 . Данное движение криволинейное. Воспользуемся законом независимости движений и разложим это движение на два прямолинейных: вдоль оси x и вдоль оси y . Движение вдоль оси x равномерное ($a_x = 0$) с начальной скоростью $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, которая остается постоянной:

$$v_x = v_{0x} = \text{const.}$$

Уравнение движения вдоль оси x имеет вид:

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos \alpha. \quad (1)$$

Движение по оси y равнопеременное с постоянным ускорением $a_y = -g$ и начальной скоростью $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$.

Скорость тела и уравнение движения вдоль оси y имеют вид:

$$v_y = v_{0y} - gt, \quad (2)$$

$$y = v_{0y}t - gt^2 / 2 = v_0 t \sin \alpha - gt^2 / 2. \quad (3)$$

1) Найти траекторию движения – это значит найти аналитическое уравнение кривой, по которой движется тело в пространстве.

Из (1) и (3) исключаем время t . Из (1) $t = x / v_0 \cos \alpha$, подставим в (3):

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (4)$$

Уравнение (4) описывает параболу, ветви которой направлены вниз, центр параболы смещен относительно начала координат.

2) Воспользуемся формулой (2) для определения времени полета тела. (Рассмотрение движения вдоль оси x не позволит определить время полета, так как вдоль оси x тело могло бы равномерно двигаться сколь угодно долго.) Приравняв $y = 0$, получим

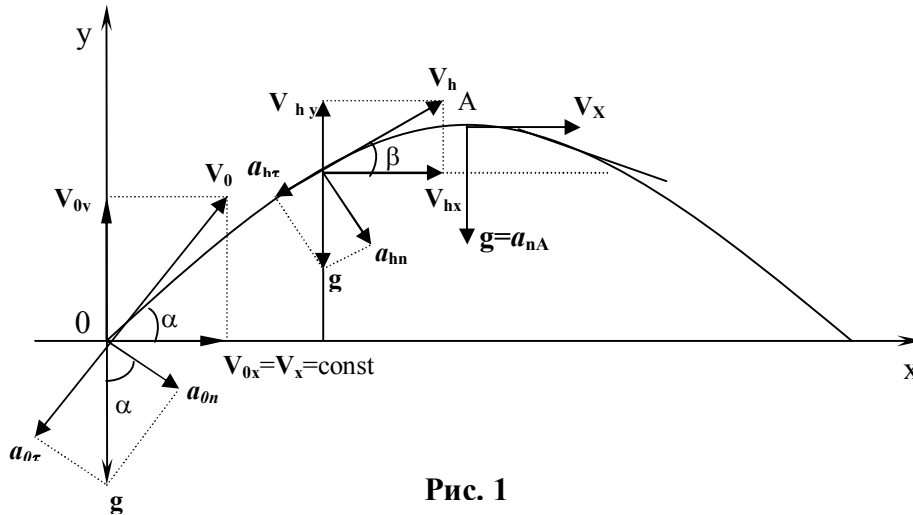


Рис. 1

Действительно, тело на земле оказывается дважды – в начале и в конце полета. Искомое время полета.

$$t_n = (2v_0 / g) \sin \alpha. \quad (5)$$

3) Так как вдоль оси x движение равномерное и известно время движения (5), то

$$x_{max} = l = v_{0x} t_n = v_0^2 \sin 2\alpha / g. \quad (6)$$

4) Максимальную высоту подъема тела можно определить из формулы (3), подставив в неё время подъема t_1 до точки A , которое можно определить по формуле (2), из условия что v_y в наивысшей точке подъема равно 0:

$$0 = v_{0y} - g t_1,$$

$$t_1 = (v_0 / g) \sin \alpha.$$

Таким образом:

$$y_{max} = H_{max} = v_{0y}^2 / 2g,$$

$$H_{max} = (v_0^2 \sin^2 \alpha) / 2g. \quad (7)$$

5) Чтобы найти нормальную и тангенциальную компоненты ускорения, воспользуемся тем, что тангенциальное ускорение направлено по касательной к

траектории движения, а нормальное по нормали к ней. Полное же ускорение, с которым движется тело во всех точках, одинаково и равняется ускорению свободного падения $\vec{g}$.

Разложим $\vec{g}$ на две составляющие в точках θ и A (рис. 1).

В точке θ

$$a_{\theta\tau} = g \sin \alpha, \quad a_{\theta n} = g \cos \alpha,$$

В точке A

$$a_{\tau A} = 0, \quad a_{nA} = g.$$

б) Нормальное ускорение определяется по формуле

$$a_n = v^2 / R,$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке, т.е. радиус окружности, часть дуги которой совпадает с траекторией в данной точке. Отсюда $R = v^2 / a_n$.

В точке θ

$$v = v_0, \quad |a_n| = g \cos \alpha,$$

$$R_0 = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}.$$

В точке A $V_y = 0$, скорость имеет только x -компоненту:

$$v_A = v_{0x} = v_0 \cos \alpha,$$

а нормальное ускорение в точке A ($a_n = g$). Отсюда

$$R_A = (v_0^2 \cos^2 \alpha) / g.$$

Большинство задач на криволинейное движение является частным случаем или вариацией этой общей задачи.

Пример 2.

Определить модуль скорости и ускорения точки в момент времени $t = 2c$, если точка движется по закону

$$\vec{r}(t) = (b_1 + c_1 t) \vec{i} + (c_2 t + d_2 t^2) \vec{j},$$

где $b_1 = -9 \text{ м}$, $c_1 = 3 \text{ м/с}$, $c_2 = 4 \text{ м/с}$, $d_2 = -1 \text{ м/с}^2$.

Решение.

В данной задаче рассматривается движение материальной точки, закон движения радиуса-вектора которой задан. Радиус-вектор в прямоугольной системе координат можно представить в таком виде:

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}. \quad (1)$$

Движение происходит в плоскости ХУ. После сравнения с законом движения, данным в условии, можно записать закон изменения координат (компонентов) радиуса-вектора:

$$\begin{cases} x(t) = b_1 + c_1 t, \\ y(t) = c_2 t + d_2 t^2, \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Проекции вектора скорости $\vec{v}$ на координатные оси ОХ и ОУ определяются посредством соотношений

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt.$$

После дифференцирования уравнений (2) найдем эти проекции:

$$v_x = c_1, \quad v_y = c_2 + 2d_2 t. \quad (3)$$

Модуль вектора скорости равен

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Или после подстановки значений (3)

$$V = \sqrt{c_1^2 + (c_2 + 2d_2 t)^2}. \quad (4)$$

Проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на координатные оси

$$a_x = d^2 x / dt^2 = dv_x / dt, \quad a_y = d^2 y / dt^2 = dV_y / dt \quad (5)$$

Следовательно,

$$a_x = 0, \quad a_y = 2d_2. \quad (6)$$

Модуль вектора ускорения равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2d_2. \quad (7)$$

Ответ: $v = 9 \text{ м/с}$, $a = -2 \text{ м/с}^2$.

Пример 3.

Ракета установлена на поверхности Земли, причем центр ее тяжести находится на высоте $h_0 = 5 \text{ м}$. Ускорение ракеты от времени меняется по закону $a = At^2$, где $A = 0,3 \text{ м/с}^4$. Найти законы изменения от времени скорости, пути.

Решение.

Ракету можно принять за материальную точку, расположенную на расстоянии h_0 от Земли. Движение ракеты происходит в одном направлении (вдоль оси ОУ, направленной вертикально). Таким образом, она имеет одну составляющую ускорения $a = a_y$. По определению ускорения и скорости

$$a = d^2 y / dt^2, \quad v = dy / dt \quad (1)$$

или

$$a = dv / dt \quad (2)$$

Подставим в последнее выражение закон изменения ускорения, данный в задаче, и проинтегрируем полученное выражение. Получим

$$V = A t^3 / 3 + C_1, \quad (3)$$

где C_1 – постоянная. При $t=0$ $V=0$, следовательно, $C_1=0$. Еще раз проинтегрируем полученное выражение (3) для скорости:

$$y = A t^4 / 12 + C_2 \quad (4)$$

В этом случае при $t=0$ $x=h_0$, поэтому постоянная $C_2=h_0$.

Окончательно закон изменения пути примет вид

$$y = A t^4 / 12 + h_0. \quad (5)$$

Пример 4.

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, где ω_0 и α – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимости от времени: а) угла поворота; б) угловой скорости.

Решение.

Согласно определению угловая скорость $\omega = d\varphi / dt$. Тогда $d\varphi / dt = \omega_0 - \alpha\varphi$.

Разделим в данном уравнении переменные $d\omega / (\omega_0 - \alpha\varphi) = dt$ и проинтегрируем полученное выражение

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = \int_0^t dt.$$

Пределы интегрирования берем из условия задачи:

$$-\frac{1}{\alpha} \int_0^\varphi \frac{d(\omega_0 - \alpha\varphi)}{\omega_0 - \alpha\varphi} = \int_0^t dt,$$

$$\ln[(\omega_0 - \alpha\varphi) / \omega_0] = -\alpha t,$$

$$e^{-\alpha t} = (\omega_0 - \alpha\varphi) / \omega_0.$$

Отсюда получаем

$$\text{а) } \varphi = \frac{\omega_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}),$$

$$\text{б) } \omega = \omega_0 e^{-\alpha t}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Материальная точка движется по закону:

$$\vec{r}(t) = \alpha \sin(5t) \vec{i} + \beta \cos^2(5t) \vec{j},$$

где $\alpha = 2 \text{ м}$, $\beta = 3 \text{ м}$. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения материальной точки.

1.2. Материальная точка движется в плоскости (xy) с ускорением $a_x = -R \omega^2 \sin \omega t$, $a_y = -R \omega^2 \cos \omega t$, где R и ω - постоянные величины. Найти скорость точки, уравнение траектории и закон движения. Константы интегрирования положить равными нулю.

1.3. Камень, брошенный с высоты $h = 2,1 \text{ м}$ под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, падает на расстояние $S = 42 \text{ м}$ (по горизонтали) от места бросания. Найти начальную скорость V_0 камня, время полета τ , максимальную высоту H полета над уровнем земли, радиусы кривизны траектории в верхней точке R_A и в точке падения камня на Землю R_B . Сопротивление воздуха не учитывать (Рис. 2).

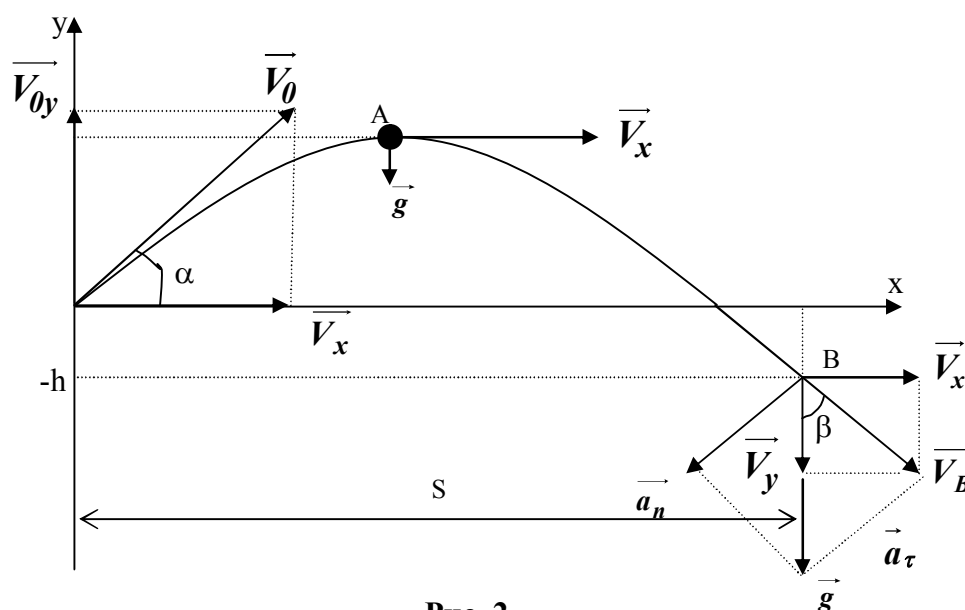


Рис. 2

1.4. Колесо вращается по закону $\varphi = bt^4$, где $b = 1 \text{ рад/с}^4$. В момент $t = 1 \text{ с}$ скорость точек на ободе колеса равна $v = 2 \text{ м/с}$. Найти для этого момента времени полное ускорение точек на ободе колеса и угол между скоростью и ускорением.

1.5. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = at - bt^3$, где $a = 6 \text{ рад/с}$; $b = 2 \text{ рад/с}^3$. Найти: а) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от $t=0$ до остановки; б) угловое ускорение в момент остановки тела.

1.6. Точка движется по окружности радиусом $R=10$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_t . Найти нормальное ускорение a_n точки через $t=20$ сек после начала движения, если известно, что к концу пятого оборота после начала движения линейная скорость точки равна $V=10$ см/сек.

1.7. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta = at$, где $a = 2 \cdot 10^{-2}$ рад/с³. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi = 60^\circ$ с ее вектором скорости?

1.8. Некоторое тело начинает вращаться с постоянным угловым ускорением $\beta = 0,04$ рад/с². Через сколько времени после начала движения полное ускорение какой-либо точки тела будет направлено под углом $\varphi = 76^\circ$ к направлению скорости этого тела? Какой угол пройдет тело за это время?

1.9. Маховое колесо, спустя $t=1$ мин после начала вращения, приобретает скорость, соответствующую $n=720$ об/мин. Найти угловое ускорение колеса и число оборотов колеса за эту минуту. Движение считать равноускоренным.

1.10. Ускорение материальной точки изменяется по закону $\vec{a} = \alpha t^2 \vec{i} - \beta \vec{j}$, где $\alpha = 3$ м/с⁴, $\beta = 3$ м/с². Найти на каком расстоянии от начала координат она будет находиться в момент времени $t=1$ с, если $\vec{v}_0 = 0$ и $\vec{r}_0 = 0$ при $t=0$.

1.11. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где $C=0,14$ м/сек² и $D=0,01$ м/сек³. 1) Через сколько времени после начала движения ускорение тела будет равно 1 м/сек²? 2) Чему равно среднее ускорение тела за этот промежуток времени?

1.12. Мяч бросили со скоростью $v_0=10$ м/сек под углом $\alpha=40^\circ$ к горизонту. Найти: 1) на какую высоту s_y поднимется мяч, 2) на каком расстоянии s_x от места бросания мяч упадет на землю, 3) сколько времени он будет в движении? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.13. Камень брошен горизонтально со скоростью $v_x=15$ м/сек. Найти нормальное и тангенциальное ускорение камня через 1 сек после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.14. Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы радиус кривизны начала его траектории был в $\eta=8,0$ раз больше, чем в вершине?

1.15. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10 \text{ рад}$, $B = 20 \text{ рад/с}$, $C = -2 \text{ рад/с}^2$. Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $R = 0,1 \text{ м}$ от оси вращения для момента времени $t = 2 \text{ с}$.

1.16. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно – вертикально вверх, другое под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25 \text{ м/с}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти расстояние между телами через $t = 1,70 \text{ с}$.

1.17. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \alpha t(1 - \beta t)$, где α и β – положительные постоянные.

Найти: а) уравнение траектории точки $y(x)$; изобразить ее график;

б) скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ точки в зависимости от t ;

в) момент t_0 , когда угол между скоростью и ускорением равен $\pi/4$.

1.18. Ракета стартует с Земли вертикально вверх с ускорением $a = \alpha t^2$, где $\alpha = 1 \text{ м/с}^4$. На высоте $h_0 = 100 \text{ км}$ от Земли двигатели ракеты выходят из строя. Через сколько времени (считая с момента выхода двигателей из строя) ракета упадет на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Начальная скорость ракеты $v_0 = 0$.

Занятие 2

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Вопросы

1. Свойства пространства и времени.
2. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета.
3. Принцип относительности Галилея.
4. Преобразования Галилея.
5. Сила. Виды сил.
6. Закон Ньютона в инерциальной системе отсчета (ИСО).
7. Закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета (НИСО).

Принятые обозначения

m – масса тела

$m\vec{g}$ - сила тяжести, сила взаимодействия тела с Землей,

$\vec{p}$ - вес тела,

$\vec{N}$ - упругая сила взаимодействия тела с опорой, сила реакции опоры,

$\vec{T}$ - упругая сила взаимодействия тела и нити, сила натяжения,

$\vec{F}_{тр}$ - сила трения,

$\vec{F}_c$ - сила сопротивления,

$\vec{F}_u$ - сила инерции,

k – коэффициент трения,

χ - жесткость пружины,

r – коэффициент сопротивления.

Примеры решения задач

Пример 1.

Ракета удаляется от поверхности Земли вертикально вверх с ускорением $9,8 \text{ м/с}^2$. В ракете находится тело массой 50 кг. Как будет изменяться вес тела с удалением от поверхности Земли? Чему он равен на расстоянии двух радиусов Земли от ее поверхности?

Решение.

Движение ракеты рассматриваем в инерциальной системы отсчета (ИСО), связанной с Землей. За начало координат ИСО удобно выбрать место старта ракеты на Земле. На рис 3 показаны силы, действующие на тело, находящееся в ракете. Запишем второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$$

В проекции на координатную ось ОУ данное уравнение можно представить в виде скалярного равенства

$$ma = N - mg . \quad (2)$$

Откуда получаем

$$N = m(a + g) . \quad (3)$$

По третьему закону Ньютона вес тела

$$P = N = m(a + g) \quad (4)$$

Однако g – ускорение свободного падения – зависит от высоты H и определяется, согласно закону всемирного тяготения, по формуле

$$g = g_0(R_3 / H)^2 , \quad (5)$$

где g_0 – ускорение у поверхности Земли, R_3 – радиус Земли.

Окончательно

$$P = m(a + g_0(R_3 / H)^2) . \quad (6)$$

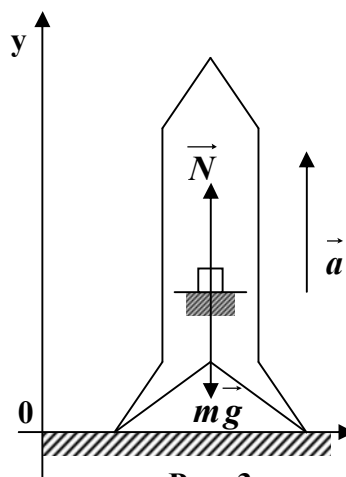


Рис. 3

Преобразуем формулу (6) с учетом того, что по условию $a = g_0$, следовательно:

$$P = m(g_0 + g_0(R_3 / H)^2) = P_0(1 + (R_3 / H)^2) , \quad (7)$$

P_0 – вес тела на земле, он равен 490 Н (в момент старта). При подъеме вес тела изменяется по параболическому закону. На расстоянии $H = 2R_3$ вес тела равен

$$P = P_0(1 + (R_3 / 2R_3)^2) = 5/4 P_0, \quad (8)$$

т.е. увеличивается в 5/4 раза.

Пример 2.

В установке (рис. 4) известны угол α наклона плоскости с горизонтом и коэффициент трения k между телом и наклонной плоскостью. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Считая, что в начальный момент оба тела неподвижны, найти отношение масс m_2/m_1 , при котором тело m_2 :

- а) начинает опускаться;
- б) начинает подниматься;
- в) будет оставаться в покое.

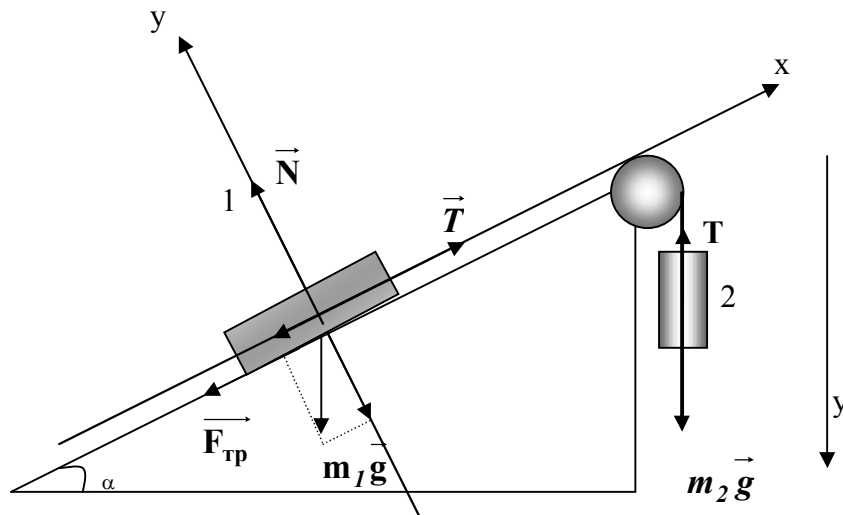


Рис. 4

Решение.

Выберем наклонную плоскость в качестве тела отсчета ИСО, а оси координат OX и OY для тел направим, как показано на рис. 4. Рассмотрим силы, действующие на тела m_1 и m_2 . Спроектируем их на выбранные координатные оси и запишем второй закон Ньютона в виде системы скалярных уравнений. Задачу решаем для случая, когда тело m_2 опускается. Тогда для тела m_1

$$OX: T - F_{mp} - m_1 g \sin \alpha = m_1 a_{1x}, \quad (1)$$

$$OY: N - m_1 g \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Для тела m_2 :

$$OY: m_2 g - T = m_2 a_{2y}. \quad (3)$$

При этом необходимо учесть, что $a_{1x} = a_{2y} = a$,

$$F_{mp} = kN = km_1 g \cos \alpha,$$

с учетом последнего, решая систему уравнений (1)-(3), находим

$$a = (m_2 - km_1 \cos \alpha - m_1 \sin \alpha)g / (m_1 + m_2), \quad (4)$$

$$T = m_1 m_2 g (1 + k \cos \alpha + \sin \alpha) / (m_1 + m_2). \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) показывают, что ускорение и сила натяжения нити зависят от параметров физической системы: масс m_1 и m_2 , угла α и коэффициента трения k . Для решения задачи разделим в формуле (4) числитель и знаменатель на m_1 . Тогда

$$a = (m_2 / m_1 - k \cos \alpha - \sin \alpha)g / (1 + m_2 / m_1). \quad (6)$$

Очевидно, чтобы тело m_2 опускалось, ускорение должно быть положительным. Это будет выполняться, когда в формуле (6)

$$m_2 / m_1 > (\sin \alpha + k \cos \alpha). \quad (7)$$

Остальные два случая рассмотреть самостоятельно.

Пример 3.

Гиря массой $m=0,5$ кг привязанная к резиновому шнуру длиной L_0 , описывает в горизонтальной плоскости окружность. Частота вращения гири $n = 2$ об/с. Угол отклонения резинового шнура от вертикали $\alpha = 30^\circ$. Жесткость шнура $\chi = 0,6$ кН/м. Найти длину L_0 , нерастянутого резинового шнура (рис. 5).

Решение

Выберем оси координат так, как показано на рисунке. Гиря движется под действием силы тяжести $m \cdot \vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$. Равнодействующая этих сил сообщает гире центростремительное ускорение, модуль которого равен: $a = \omega^2 \cdot R$, где $R = L \cdot \sin \alpha$ - радиус окружности по которой движется гиря, L - длина растянутого резинового шнура. Угловая скорость гирьки связана с ее частотой соотношением: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$, следовательно $a = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R$.

Согласно второму закону Ньютона: $m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \vec{T}$

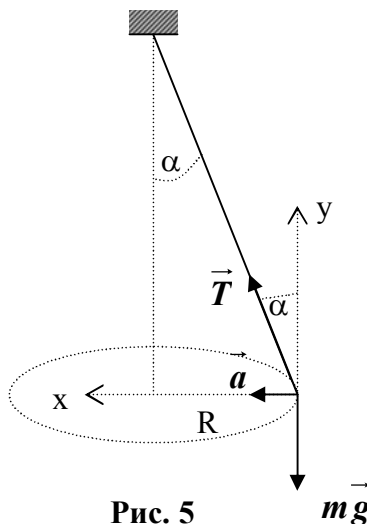


Рис. 5

В проекции на оси координат это векторное равенство дает:

$$\begin{cases} T \cdot \sin \alpha = m \cdot a \\ T \cdot \cos \alpha = m \cdot g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = g \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ T = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha} \end{cases}$$

$$4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R = g \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$R = \frac{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2}$$

Тогда длина растянутого шнура:

$$L = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot \cos \alpha}.$$

С другой стороны:

$$L = L_0 + \Delta L$$

Согласно закону Гука, сила, растягивающая резиновый шнур, равная по модулю силе натяжения шнура (по третьему закону Ньютона):

$$F = T = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha} = \chi \cdot \Delta L \Rightarrow$$

$$\Delta L = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha \cdot \chi}.$$

Тогда длина нерастянутого резинового шнура:

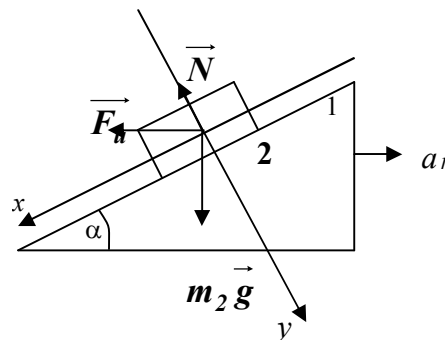
$$L_0 = L - \Delta L = \frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot \cos \alpha} - \frac{m \cdot g}{\chi \cdot \cos \alpha} = \frac{g}{\cos \alpha} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot n^2} - \frac{m}{\chi} \right)$$

$$L = 6,23 \text{ см.}$$

Пример 4.

На горизонтальной поверхности находится призма 1 массы m_1 с углом α (рис.6) и на ней брусок 2 массы m_2 . Пренебрегая трением, найти ускорение призмы.

а)



б)

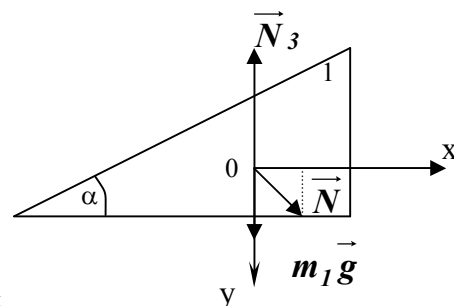


Рис. 6

Решение.

В данной системе рассматривается движение двух тел: брусок скользит без трения относительно призмы, а призма движется относительно Земли.

а) Рассмотрим движение бруска 2 как материальной точки (в приближении) относительно призмы 1. Так как призма движется ускоренно, то связанная с ней система отсчета неинерциальная. Второй закон Ньютона имеет вид

$$m \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_u \quad (1)$$

где $\vec{F}$ - геометрическая сумма внешних сил, $\vec{F}_u$ - сила инерции.

На рис. 6 показаны силы, действующие на брусок 2, и направление осей OX и OY. Воспользуемся законом Ньютона в формуле (1) и запишем это уравнение для тела m_2 в виде двух скалярных уравнений:

$$\text{OX: } m_2 g \sin \alpha + m_2 a_1 \cos \alpha = m_2 a_{2x}, \quad (2)$$

$$\text{OY: } -N - m_2 a_1 \sin \alpha + m_2 g \cos \alpha = m_2 a_{2y}, \quad (3)$$

где a_{2x} и a_{2y} – компоненты вектора ускорения $\vec{a}_2$. Так как $a_{2y} = 0$ и, следовательно, $a_{2x} = a_2$, то

$$m_2 g \sin \alpha + m_2 a_1 \cos \alpha = m_2 a_2, \quad (4)$$

$$m_2 g \cos \alpha - m_2 a_1 \sin \alpha - N = 0. \quad (5)$$

б) Исследуем теперь движение призмы относительно ИСО, которую можно связать с Землей. Выберем направление координатных осей и укажем силы, действующие на призму (рис. 6, б). Здесь $\vec{N}_3$ - результат упругого взаимодействия призмы с Землей, а $\vec{N}$ - результат упругого взаимодействия призмы и бруска. Призму нельзя считать материальной точкой, но в условиях данной задачи (призма движется поступательно) можно приближенно считать, что все силы, действующие на призму, приложены в ее центре масс который движется, как материальная точка. Запишем второй закон Ньютона для центра масс тела m_1 :

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{N}_3 + \vec{N}. \quad (6)$$

Перейдем к скалярным уравнениям:

$$\text{OX: } m_1 a_{1x} = N \sin \alpha, \quad (7)$$

$$\text{OY: } m_1 a_{1y} = m_1 g + N \cos \alpha - N_3, \quad (8)$$

где a_{1y} и a_{1x} – компоненты вектора ускорения $\vec{a}_1$. Так как $a_{1y} = 0$ и, следовательно, $a_{1x} = a_1$, то

$$m_1 a_1 = N \sin \alpha, \quad (9)$$

$$0 = m_1 g + N \cos \alpha - N_3. \quad (10)$$

Для нахождения ускорения призмы a_1 достаточно решить систему из двух уравнений (5) и (9). В результате получаем

$$a_1 = g \sin \alpha \cos \alpha / (m_1 / m_2 + \sin^2 \alpha). \quad (11)$$

Пример 5.

Парашютист массой $m = 100 \text{ кг}$ делает затяжной прыжок с начальной скоростью $V_0=0$. Найти закон изменения его скорости до раскрытия парашюта, если сила сопротивления воздуха пропорциональна: $\vec{F}_C = -r\vec{V}$, где $r = 20 \text{ кг/с}$.

Решение.

Движение происходит в ИСО, связанной с Землей. Начало координат переместим в точку 0 , из которой начинается движение парашютиста (рис. 7). Ось OY направим вертикально вниз. Так как высота h мала по сравнению с радиусом Земли, то ускорение свободного падения можно считать постоянным, т.е. $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

На парашютиста действуют силы, указанные на рисунке. Из второго закона Ньютона получаем дифференциальное уравнение для неизвестной функции $V(t)$:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - rV. \quad (1)$$

Для решения этого уравнения разделим переменные

$$dV / (g - (r/m)V). \quad (2)$$

Проинтегрируем уравнение (2), используя пределы интегрирования из условия задачи ($t = 0, V_0 = 0$):

$$(-m/r) \int_0^V d(g - (r/m)V) / [g - (r/m)V] = \int_0^t dt,$$

$$\ln[(g - (r/m)V) / g] = -(r/m)t.$$

Отсюда

$$V = (m/r)g(1 - e^{-(r/m)t}). \quad (3)$$

Получен закон изменения скорости парашютиста от времени. Из уравнения (3) видно, что при $t \rightarrow \infty$ скорость стремится к своему максимальному значению $V_{max} = mg/r$, что составляет примерно 50 м/с.

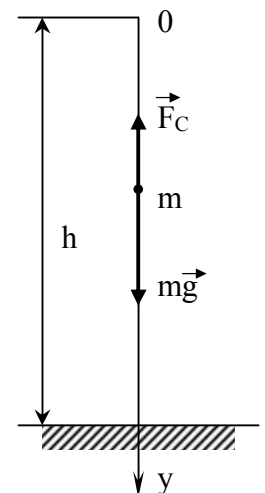


Рис. 7

Задачи для самостоятельного решения

2.1. С какой силой давит космонавт массой 60 кг на опору при вертикальном взлете ракеты с ускорением $3g$? Какова эта сила давления в полете при выключенных двигателях?

2.2. Наклонная плоскость (рис.8) составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Отношение масс тел $m_2 / m_1 = \eta = 2 / 3$. Коэффициент трения между телом m_1 и наклонной плоскостью $k = 0,10$. Массы блока и нитей пренебрежимо малы. Найти модуль и направление ускорения тела m_2 , если система пришла в движение из состояния покоя.

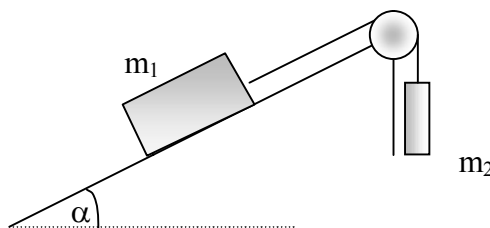


Рис. 8

2.3. Катер массы m движется по озеру со скоростью V_0 . В момент $t = 0$ выключили его двигатель. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости катера, $\vec{F}_C = -r\vec{V}$, найти:

- а) время движения катера с выключенным двигателем,
- б) скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем, а также полный путь до остановки.

2.4. Самолет делает «мертвую петлю» радиусом $R = 500$ м с постоянной скоростью $V = 360$ км/ч. Найти вес летчика массой 70 кг в нижней и верхней точках петли.

2.5. Частица движется вдоль оси X по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β - положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти значение F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

2.6. Через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта, перекинута нить, к концам которой привязаны грузы с массами m_1 и m_2 . Кабина начинает подниматься с ускорением a_0 . Пренебрегая массами блока и нити, а также трением, найти ускорение груза m_1 относительно кабины.

2.7. Небольшое тело A начинает скользить с вершины гладкой сферы радиусом R . Найти угол α между вертикалью и радиусом-вектором, характеризующим положение тела A относительно центра сферы в момент отрыва от нее, а также скорость тела в этот момент.

2.8. На тело массой m , лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени как $F = At$, где A - постоянная.

Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом. Найти: скорость тела в момент отрыва от плоскости; путь, пройденный телом к этому моменту.

2.9. Нить перекинута через легкий вращающийся без трения блок. На одном конце нити прикреплены груз массой M , а по другой свисающей части нити скользит муфточка массой m с постоянным ускорением a_0 относительно нити. Найти силу трения, с которой нить действует на муфточку.

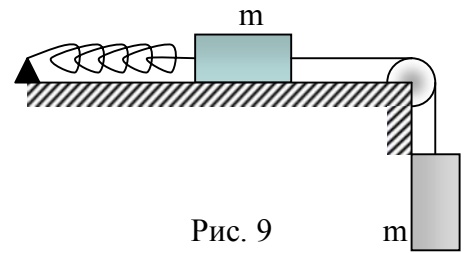


Рис. 9

2.10. В системе, показанной на рис. 9, масса каждого бруска $m = 0,50$ кг. Жесткость пружины $\chi = 40$ Н/м, коэффициент трения между бруском и плоскостью $k = 0,20$. Массы блока и пружины пренебрежимо малы. Система пришла в движение с нулевой начальной скоростью при недеформированной пружине. Найти максимальную скорость брусков.

2.11. Пуля, пробив доску толщиной h , изменила свою скорость от V_0 до V . Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

2.12. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости составляющей угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом. Найти коэффициент трения, если время подъема тела оказалось в $\eta = 2,0$ раза меньше времени спуска.

2.13. Небольшой брусок начинает скользить по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Коэффициент трения зависит от пройденного пути x по закону $k = ax$, где a – постоянная. Найти:

- путь, пройденный бруском до остановки;
- максимальную скорость его на этом пути.

2.14. К бруску массы m , лежащему на гладкой горизонтальной плоскости, приложили постоянную по модулю силу $F = mg / 3$. В процессе его прямолинейного движения угол α между направлением этой силы и горизонтом меняют по закону $\alpha = as$, где a – постоянная, s – пройденный бруском путь (из начального положения). Найти скорость бруска в момент, когда угол $\alpha = \pi / 2$.

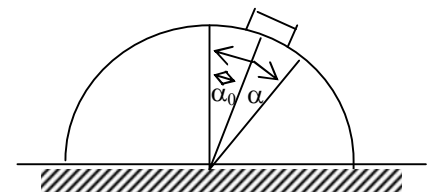


Рис. 10

2.15. На гладкий купол (рис. 10) кладут тело ($\alpha_0 = 30^\circ$), которое соскальзывает с купола. Найти, в каком месте (α) тело покинет купол.

2.16. Муфточка A может свободно скользить вдоль гладкого стержня, изогнутого в форме полукольца радиусом R (рис. 11). Систему привели во вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO' . Найти угол ν , соответствующий устойчивому положению муфточки.

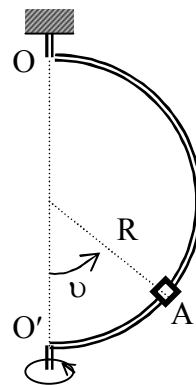


Рис. 11

Занятие 3

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Вопросы

1. Работа и кинетическая энергия.
2. Консервативные и диссипативные силы.
3. Потенциальная энергия.
4. Связь между силой и потенциальной энергией.
5. Закон сохранения энергии для консервативных сил.
6. Закон сохранения энергии для неконсервативных сил.
7. Импульс. Закон сохранения импульса.
8. Абсолютно упругий удар.
9. Абсолютно неупругий удар.
10. Движение тела с переменной массой.

Принятые обозначения

E – полная механическая энергия;

T – кинетическая энергия;

U – потенциальная энергия;

A – механическая работа;

N – мощность;

P – импульс;

μ – расход топлива;

γ – гравитационная постоянная.

Примеры решения задач

Пример 1.

Тело массой m поднимается без начальной скорости с поверхности Земли под действием двух сил (рис. 12): силы, меняющейся с высотой подъема y по закону $\vec{F} = -2m\vec{g}(1 - ay)$, где a – положительная постоянная, и силы тяжести $m\vec{g}$. Найти работу силы $\vec{F}$ на первой половине пути подъема и соответствующее приращение потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли. Поле тяжести считать однородным.

Решение.

Найдем сначала весь путь подъема. Скорость тела в начале и конце пути равна нулю, поэтому равно нулю и приращение кинетической энергии тела. С другой стороны, приращение кинетической энергии ΔT на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ A всех сил, действующих на тело на том же перемещении. Значит, $A = 0$. Учитывая, что положительное направление оси y взято вверх, запишем:

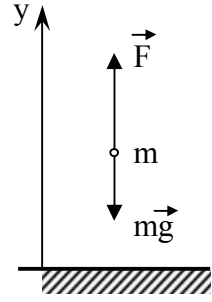


Рис. 12

$$A = \int_0^h (\vec{F} + m\vec{g}) d\vec{r} = \int_0^h (F_y - mg) dy = mg \int_0^h (1 - 2ay) dy = mgh(1 - ah) = 0. \quad (1)$$

Отсюда

$$h = 1/a. \quad (2)$$

Работа силы $\vec{F}_{n/2}$ на первой половине пути подъема

$$A_F = \int_0^{h/2} F_y dy = 2mg \int_0^{h/2} (1 - ay) dy \quad (3)$$

или с учетом формулы (2)

$$A_F = 3mg/4a. \quad (4)$$

Соответствующее приращение потенциальной энергии

$$\Delta U = mgh/2 = mg/2a. \quad (5)$$

Пример 2.

Определить, какую скорость имеет метеорит массой m на расстоянии $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ м от Солнца, если он двигался без начальной скорости из бесконечности к Солнцу массой $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг. Влиянием других тел пренебречь.

Решение.

Метеорит можно принять за материальную точку, Солнце будем считать шаром радиусом $R = 7 \cdot 10^5$ км. По условию данная система тел замкнута. В системе действуют только консервативные силы тяготения. Инерциальную систему отсчета свяжем с Солнцем, принимая его за неподвижное тело. По закону сохранения энергии, полная механическая энергия этой системы E , включающая кинетическую энергию метеорита T и его потенциальную энергию U , остается постоянной. Вычислим значение полной энергии E_1 , соответствующей нахождению метеорита на бесконечности, и E_2 , когда метеорит находится от Солнца на расстоянии r . На бесконечности скорость метеорита равна нулю по условию задачи, поэтому его кинетическая энергия равна нулю. Кроме того, его потенциальная энергия на бесконечности принимается также равной нулю.

Следовательно, $E_1 = 0$. В положении метеорита на расстоянии r от Солнца его кинетическая энергия равна $mv^2/2$, а потенциальную определим на основании зависимости между потенциальной энергией и работой. Известно, что работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии, т.е.

$$A = -(U_2 - U_1).$$

Или, учитывая, что $U_1 = 0$, получаем $A = -U_2$. Вычислим эту работу. Сила тяготения и работа изменяются непрерывно от расстояния r . Следовательно, для расчета работы необходимо применить интегрирование. Для этого разделим путь метеорита на столь малые участки, чтобы на каждом таком участке изменением силы тяготения можно было пренебречь. Тогда элементарная работа на таком участке равна

$$dA = -(\gamma mM / r^2) dr$$

Суммируя элементарные работы на всем пути, получаем полную работу

$$A = -\int_{\infty}^r (\gamma mM / r^2) dr = (\gamma mM) / r$$

и потенциальную энергию метеорита на расстоянии r от Солнца

$$U_2 = -\gamma mM / r$$

По закону сохранения полной энергии ($E_2 = 0$)

$$mV^2 / 2 - \gamma mM / r = 0.$$

Из последнего уравнения можно определить искомую скорость

$$V = \sqrt{2\gamma M / r}.$$

Ответ: 42,2 км/с.

Пример 3.

Снаряд, летевший на высоте $H = 40$ м горизонтально со скоростью $V = 100$ м/с, разрывается на две равные части. Одна часть снаряда спустя время $t = 1$ с падает на Землю точно под местом взрыва. Определить скорость другой части снаряда сразу после взрыва.

Решение.

Силы, возникающие при взрыве очень велики, поэтому другими силами по сравнению с ними (силой тяжести, сопротивлением воздуха) можно пренебречь. В этом случае систему тел, состоящую из снаряда и его частей, можно считать замкнутой в течение времени взрыва. На основании закона сохранения импульса

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2. \quad (1)$$

Здесь $\vec{P}_1$ - импульс системы до взрыва; $\vec{P}_2$ - импульс системы после взрыва. Обозначив скорости первой и второй частей снаряда через $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, распишем эти импульсы:

$$\vec{P}_1 = 2m\vec{V}. \quad (2)$$

$$\vec{P}_2 = m\vec{V}_1 + m\vec{V}_2. \quad (3)$$

где m – масса каждой из частей снаряда; $\vec{V}$ - скорость снаряда. Найдем проекции импульсов $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ на выбранные оси координат ОХ и ОУ. При этом вектор $\vec{V}$ направим по оси ОХ, вектор $\vec{V}_1$ - вертикально вниз, как это следует из условия задачи, а направление вектора $\vec{V}_2$ выберем произвольно (рис.13). Тогда

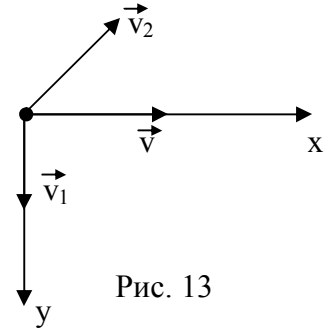


Рис. 13

$$\text{ОХ: } F_{1x} = 2mV, P_{2x} = mV_2 \cos \alpha, \quad (4)$$

$$\text{ОУ: } P_{1y} = 0, P_{2y} = -mV_2 \sin \alpha + mV_1. \quad (5)$$

Заменим векторное равенство (1) двумя скалярными:

$$P_{1x} = P_{2x}, P_{1y} = P_{2y}. \quad (6)$$

Подставим в эти соотношения проекции импульсов (4) и (5). Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2mV = mV_2 \cos \alpha, \\ 0 = mV_1 - mV_2 \sin \alpha, \end{cases} \quad (7)$$

решением которой являются выражения

$$V_2 = \sqrt{4V^2 + V_1^2}, \alpha = \arctg(V_1 / 2V). \quad (8)$$

Движение первой части снаряда после взрыва – падение с начальной скоростью V_1 .

Соппротивлением воздуха пренебрегаем, поэтому высота, которую пролетает эта часть снаряда, равна

$$H = V_1 t + gt^2 / 2. \quad (9)$$

Из последнего соотношения можно найти начальную скорость

$$V_1 = H / t + gt / 2, \quad (10)$$

а затем вычислить V_2 и α .

Ответ: $V_1 = 35 \text{ м / с}, \quad V_2 = 203 \text{ м/с} \quad \alpha = \arctg 0,17 = 10^\circ$

Пример 4.

Модель ракеты движется при отсутствии внешних сил, выбрасывая непрерывную струю газа с постоянной относительно нее скоростью $V_1 = 800$ м/с. Расход газа $\mu = 0,4$ кг/с, начальная масса ракеты $m_0 = 1,2$ кг. Какую скорость относительно земли приобретет ракета через $t = 1$ с после начала движения, если ее начальная скорость равна нулю?

Решение.

По условию задачи система тел – ракета, газ - замкнутая система. На основании закона сохранения импульса

$$d\vec{p} = 0. \quad (1)$$

Распишем уравнение (1):

$$d\vec{p} = d\vec{p}_1 + d\vec{p}_2 = 0. \quad (2)$$

Здесь $d\vec{p}_1$ - изменение импульса ракеты за промежуток времени dt ; $d\vec{p}_2$ - изменение импульса той порции газа, которая за промежуток времени dt выбрасывается из ракеты. Движение ракеты выберем вдоль оси OY , направленной вертикально вверх. В проекции на эту ось уравнение (2) примет вид:

$$dp_{1y} - dp_{2y} = 0. \quad (3)$$

Если в момент времени t ракета имела массу $m = m_0 - \mu t$, то за время dt скорость ракеты за счет реактивного действия выбрасываемой струи газа изменяется на dV , а импульс ракеты - на

$$dp_{1y} = (m_0 - \mu t) dV. \quad (4)$$

Порция газа μdt , двигаясь вместе с ракетой, обладает скоростью $\vec{V}$. Покинув ракету за промежуток времени dt эта же масса газа приобретает относительно Земли скорость $\vec{V} + \vec{V}_1$. Следовательно, импульс порции газа, выброшенного из ракеты, изменяется на

$$dp_{2y} = \mu V_1 dt. \quad (5)$$

Подставим выражения (4) и (5) в уравнение (3):

$$(m_0 - \mu t) dV - \mu V_1 dt = 0$$

или

$$dV = \mu V_1 dt / (m_0 - \mu t).$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до t , получим

$$V = V_1 \ln[m_0 / (m_0 - \mu t)] \quad (6)$$

Ответ: $v = 320$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Шар массой $m_1 = 200$ г, движущийся со скоростью $V_1 = 10$ м/с, сталкивается с неподвижным шаром массой $m_2 = 800$ г. Удар прямой, центральный, абсолютно упругий. Определить скорость шаров после столкновения.

3.2. Камень брошен со скоростью $V = 15$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найти кинетическую и потенциальную энергии камня в высшей точке траектории. Масса камня $m = 0,2$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.3. Груз массой $m = 1$ кг, подвешенный на нити, отклоняют на угол $\alpha = 30^\circ$. Найти натяжение нити в момент прохождения грузом положения равновесия.

3.4. Частица 1 столкнулась с частицей 2, в результате чего возникла составная частица. Найти ее скорость $\vec{V}$ и модуль V , если масса у частицы 2 в $\eta = 2,0$ раза больше, чем у частицы 1, а их скорости перед столкновением равны $\vec{V}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{V}_2 = 4\vec{i} - 5\vec{j}$, где компоненты скорости даны в СИ.

3.5. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется навстречу второму телу массой $m_2 = 1,5$ кг и неупруго соударяется с ним. Скорости тел непосредственно перед ударом были $V_1 = 1$ м/с и $V_2 = 2$ м/с. Найти коэффициент трения, если эти тела после удара двигались $0,58$ с.

3.6. Два груза массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 15$ кг подвешены на нитях длиной $l = 2$ м так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\alpha = 60^\circ$ и выпущен. Определить высоту, на которую поднимутся грузы после удара. Удар грузов считать неупругим.

3.7. Снаряд, выпущенный со скоростью $V_0 = 100$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, разорвался в верхней точке θ траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на Землю под точкой θ со скоростью $V_1 = 97$ м/с. С какой скоростью упал на землю второй осколок? Сопротивления воздуха нет.

3.8. Навстречу друг другу летят два шара массами m_1 и m_2 . Кинетическая энергия второго шара в 20 раз больше кинетической энергии первого. Между шарами происходит абсолютно неупругий удар. Найти при каком соотношении m_1/m_2 шары после удара будут двигаться в сторону движения первого шара.

3.9. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Масса первого шара $m_1 = 0,2$ кг, второго – $m_2 = 0,1$ кг. Первый шар отклоняют так, что его центр масс поднимается на высоту $h = 4,5$ см, и отпускают. На какую высоту поднимется каждый из шаров после соударения, если удар абсолютно упругий?

3.10. Частица 1 массой m , летящая со скоростью V , столкнувшись с неподвижной частицей 2 массой M , отскакивает от нее и летит в противоположном направлении со скоростью $u_1 = V/2$. Найти: а) скорость частицы 2 после столкновения; б) энергию, которая пошла на нагревание и деформацию.

3.11. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на невесомом жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули $m_1=5$ г, масса шара $m_2=50$ г. Скорость пули $V_2=50$ м/с. При каком расстоянии от точки подвеса до центра шара шар от удара пули поднимется до верхней точки?

3.12. Небольшая шайба соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H , имеющей горизонтальный трамплин (рис. 14). При какой высоте h трамплина шайба пролетит наибольшее расстояние L ? Чему оно равно?

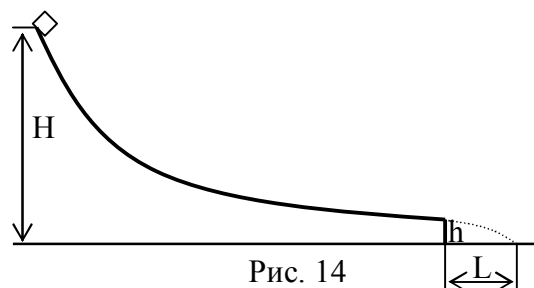


Рис. 14

3.13. Небольшое тело массой $m = 2$ г соскальзывает без трения по искривленной поверхности из точки A (рис. 15). Точка A находится на высоте $h_1 = 50$ см, а точка C – на высоте $h_2 = 30$ см от горизонтальной плоскости MN . Радиусы кривизны поверхности в точках B и C одинаковы: $R = 40$ см. Найти модули сил давления на поверхность в точках B и C .

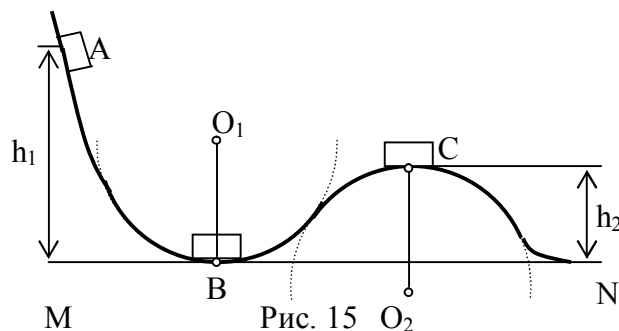


Рис. 15

3.14. Груз массой $m = 300$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м, закрепленной в точке O (рис.16). Нить отвели в сторону так, что она заняла горизонтальное положение, и отпустили. Найти силу натяжения нити в моменты прохождения грузом точек B и A , если угол $\alpha = 45^\circ$.

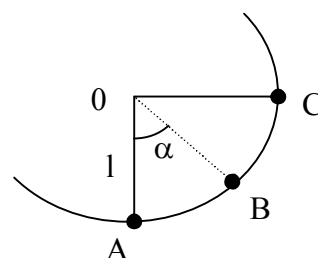


Рис. 16

3.15. На покоящуюся частицу массы m_2 налетает частица массы m_1 , столкновение лобовое и идеально упругое. При каком соотношении масс доля кинетической энергии второй частицы будет максимальной?

3.16. На гладкой горизонтальной плоскости лежат две одинаковые соприкасающиеся шайбы (рис. 17). Третья такая же шайба налетает на покоящиеся со скоростью V_0 перпендикулярно их линии центров. Удар абсолютно упругий. Чему равна скорость покоящихся шайб после удара?

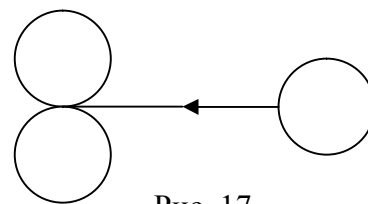


Рис. 17

Занятие 4

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вопросы

1. Момент силы относительно точки и оси.
2. Момент инерции материальной точки и тела.
3. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
4. Момент инерции стержня, шара, обруча, цилиндра.
5. Основное уравнение динамики вращающегося тела.
6. Работа внешних сил при вращательном движении.
7. Кинетическая энергия вращающегося тела.
8. Момент импульса вращающегося тела.
9. Теорема об изменении момента импульса.
10. Закон сохранения момента импульса.

Принятые обозначения

a_c – ускорение центра масс,

L – момент импульса,

M – момент силы,

J – момент инерции.

Примеры решения задач

Пример 1. Сплошной маховик массой 20 кг и радиусом 120 мм вращается, совершая 600 об/мин. С какой силой нужно прижать к нему тормозную колодку, чтобы он остановился за 3 с, если коэффициент трения равен 0,1?

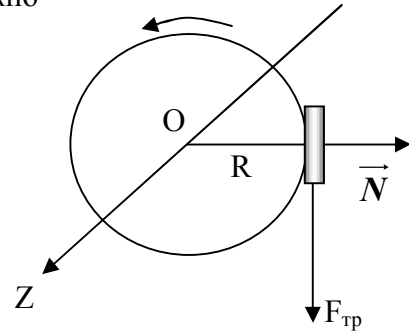
Решение.

Покажем силы, действующие на маховик (рис. 18). Маховик нельзя принять за материальную точку. Будем считать его твердым телом. Его центр масс неподвижен, а сам блок вращается вокруг одной неподвижной оси OZ , проходящей через центр масс. Запишем для блока основное уравнение динамики относительно этой оси

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z, \quad (1)$$

где $L_Z = JZ\omega$ и $M_Z = F_{mp}R$.

По определению, твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек с неизменными расстояниями между ними. Для такой системы момент инерции J_Z относительно фиксированной оси OZ есть величина постоянная. Следовательно, уравнение (1) можно переписать в виде



$$\frac{J_Z d\omega}{dt} = J_Z \beta = F_{mp} R, \quad (2)$$

Решая последнее уравнение, находим

$$F_{mp} = \frac{J_Z \beta}{R} = \frac{m R n \pi}{t} \quad (3)$$

А так как сила трения по определению равна $F_{тр} = kN$, то искомая сила давления (по третьему закону Ньютона) будет

$$F_g = N = \frac{m R n \pi}{tk} \quad (4)$$

Ответ: 250 Н.

Пример 2.

К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, прикреплены грузы $m_1=300$ г и $m_2=200$ г. Блок, укрепленный на горизонтальной оси, считать однородным диском массой $m_0=300$ г. Найти линейное ускорение грузов.

Решение.

Заданная система состоит из трех тел, каждое из которых следует рассматривать отдельно. На рис.19 показаны силы, действующие на грузы m_1 и m_2 . Тогда II закон Ньютона для каждого из грузов может быть записан следующим образом:

$$m_1 \vec{a} = \vec{T}_1 + m_1 \vec{g}, \quad (1)$$

$$m_2 \vec{a} = \vec{T}_2 + m_2 \vec{g}. \quad (2)$$

Ускорения грузов считаем равными, на направленными в противоположные стороны на основании нерастяжимости нити. В проекциях на координатную ось OY (рис.19) уравнения (1) и (2) примут вид

$$m_1 a = m_1 g - T_1, \quad (3)$$

$$-m_2 a = m_2 g - T_2. \quad (4)$$

Так как масса блока соизмерима с массой грузов, нельзя предположить, что силы, с

которыми нить действует на грузы m_1 и m_2 , равны между собой. Соотношение между силами T_1 и T_2 может быть получено только после рассмотрения движения блока. Блок вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через его центр, следовательно, моменты сил тяжести и реакции оси равны нулю. Предполагая, что нить не скользит относительно блока, можно утверждать, что вращение блока вызывается действием сил натяжения. Запишем основное уравнение динамики вращательного движения в применении к блоку:

$$J\vec{\beta} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \quad (5)$$

Считая направление вращения блока по часовой стрелке положительным, т.е. принимая направление по оси вращения «к нам» за положительное, получим

$$J\beta = T_1' r - T_2' r, \quad (6)$$

где $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$.

В силу того, что нить нерастяжима и, следовательно, линейное ускорение грузов и всех точек нити одинаково и равно вследствие отсутствия проскальзывания нити касательному ускорению крайних точек обода, справедливо равенство

$$\beta = \frac{a}{r}. \quad (7)$$

Перепишем уравнение (6):

$$\frac{Ja}{r} = T_1 r - T_2 r, \quad (8)$$

где момент инерции диска $J = m_0 r^2 / 2$.

Решая совместно уравнения (3), (4) и (8), находим

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}}. \quad (9)$$

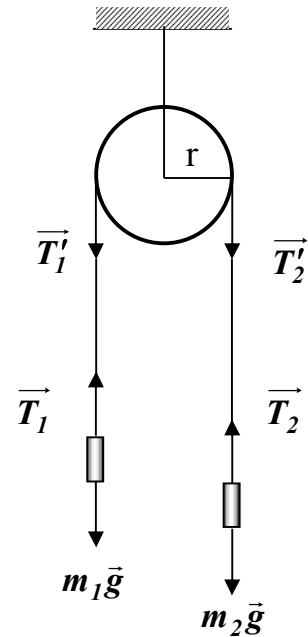


Рис. 19

Ответ: $1,5 \text{ м/с}^2$

Пример 3.

Однородный шар массой m скатывается по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Определить ускорение a_c центра масс.

Решение.

Пусть скатывающееся тело обладает симметрией вращения относительно точки С (рис. 20). Будем предполагать, что при движении не возникает скольжения. Это означает,

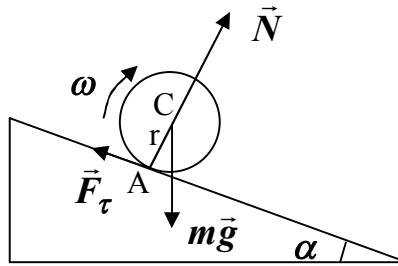


Рис. 20

что скорость тела в точке А равна нулю. Отсутствие скольжения обеспечивается действием сил со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело: N – сила нормального давления и $\vec{F}_\tau$ – касательная сила трения.

При отсутствии скольжения (чистое качение) сила $\vec{F}_\tau$ есть сила трения покоя или сила трения сцепления. Она может принимать любое значение от 0 до kN . Если

$\vec{F}_\tau > kN$, то чистое качение невозможно – оно будет

сопровождаться скольжением. Решим задачу двумя способами.

Способ 1. Применим основное уравнение динамики для вращательного движения относительно мгновенной оси вращения. При отсутствии скольжения мгновенная ось и ось, проходящая через центр масс С, движутся параллельно друг другу, то основное уравнение динамики имеет форму

$$\frac{J_A d\omega}{dt} = M_A. \quad (1)$$

Или, в соответствии с рис. 20:

$$\frac{J_A d\omega}{dt} = mgr \sin \alpha. \quad (2)$$

Сила N выпадает из уравнения, так как она проходит через ось А, и ее момент относительно этой оси равен нулю. Линейная скорость точки С связана со скоростью точки А тела соотношением $V_C = V_A + \omega r$.

При отсутствии скольжения $V_A = 0$, а поэтому $V_C = \omega r$. Ускорение центра масс

$$a_c = dV / dt = r d\omega / dt. \quad (3)$$

Поэтому из уравнения (2) получаем:

$$a_c = m g r^2 \sin \alpha / J_A. \quad (4)$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера

$$J_A = J_C + mr^2, \quad (5)$$

где J_C – собственный момент инерции шара.

Окончательно получаем в ответе

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_C}{mr^2}} \quad (6)$$

Способ 2. Применим закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} J_A \omega^2 = mgh, \quad (1)$$

где h – высота, с которой опустилось тело при скатывании из состояния покоя.

Так как скольжения отсутствует, то кинетическая энергия поступательного движения тела равна нулю. Пусть тело прошло вдоль наклонной плоскости путь x , тогда $h = mg \sin \alpha$ и, следовательно,

$$\frac{J_A \omega^2}{2} = \frac{J_A V^2}{2r^2} = mgx \sin \alpha. \quad (2)$$

Найдем из данного уравнения V :

$$V = \sqrt{\frac{2r^2 mgx \sin \alpha}{J_A}}. \quad (3)$$

Учитывая, что $V = dx/dt$, интегрируем последнее соотношение по времени:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \sqrt{\frac{2r^2 mg \sin \alpha}{J_A}} \int_0^t dt, \\ 2\sqrt{x} &= \sqrt{\frac{2r^2 mg \sin \alpha}{J_A}} \cdot t. \end{aligned} \quad (4)$$

Возведем обе части уравнения (4) в квадрат и найдем x :

$$x = \frac{r^2 mg \sin \alpha t^2}{2J_A}. \quad (5)$$

Сравнивая формулу (5) с уравнением равноускоренного движения $x = at^2/2$, получаем в ответе

$$a = \frac{r^2 mg \sin \alpha}{J_A} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{J_C}{mr^2}} \quad (6)$$

Пример 4.

На однородный сплошной цилиндр массой M и радиусом R плотно намотана легкая

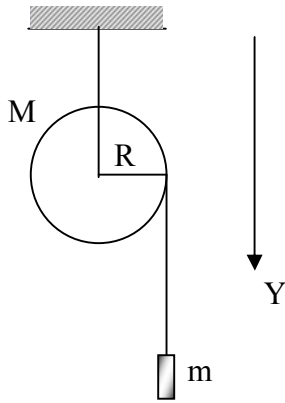


Рис. 21

нить, к концу которой прикреплен груз массой m (рис. 21). В момент $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра, найти зависимость от времени: модуля угловой скорости цилиндра; кинетической энергии всей системы.

Решение.

Запишем систему уравнений для падающего груза m и вращающегося сплошного цилиндра M :

$$\begin{cases} \vec{T}R = J\vec{\beta}, \\ m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \end{cases} \quad (1)$$

Распишем эти уравнения, проектируя их на вертикально направленную вниз ось OY :

$$\begin{cases} TR = J\beta, \\ mg - T = ma, \end{cases} \quad (2)$$

где $J = MR^2/2$, а $\beta = a/R$.

Совместное решение системы уравнений (2) дает

$$\beta = \frac{2mg}{R(2m + M)}, \quad (3)$$

где $\beta = d\omega/dt$. Перепишем уравнение (3):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2mg}{R(2m + M)}. \quad (4)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, находим модуль угловой скорости:

$$\begin{aligned} \int_0^\omega d\omega &= \frac{2mg}{R(2m + M)} \int_0^t dt, \\ \omega &= \frac{2mgt}{R(2m + M)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Кинетическая энергия системы представляет собой сумму кинетической энергии вращающегося цилиндра и кинетической энергии поступательного движения падающего груза:

$$T = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2}. \quad (6)$$

Произведем в уравнении (6) замену переменных: ω по формуле (5) и $v=\omega R$. Окончательное выражение для кинетической энергии всей системы будет

$$T = \left(\frac{MR^2}{2} \right) \frac{4m^2 g^2 t^2}{2R^2 (2m + M)^2} + \left(\frac{mR^2}{2} \right) \frac{4m^2 g^2 t^2}{R^2 (2m + M)^2} = \frac{m^2 g^2 t^2}{(2m + M)}. \quad (7)$$

Пример 5.

На скамье Жуковского сидит человек и держит на вытянутых руках гири по 10 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи $l_1=75$ см. Скамья вращается, делая $n_1=1$ об/с. Как изменится скорость вращения скамьи и какую работу произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси уменьшится до $l_2=20$ см? Момент инерции человека и скамьи (вместе) относительно оси вращения $J_0=2,5$ кг м².

Решение.

При перемещении гирь относительно оси вращения на систему человек-скамья-гири будут действовать внешние силы – силы реакции оси, линия действия которых проходит через ось. Момент этих сил равен нулю. Следовательно, для системы данных тел будет выполняться закон сохранения моментов импульса. Момент силы тяжести относительно оси скамьи (ось вертикальна) равен нулю. Работы сила тяжести не совершает (гири не смещаются по высоте).

Поскольку момент инерции гирь, а следовательно всей системы будет уменьшаться, скорость вращения скамьи будет возрастать, возрастет и кинетическая энергия системы.

Увеличение кинетической энергии происходит за счет работы человека. До перемещения гирь момент импульса системы

$$L_1 = (J_0 + 2ml_1^2) \omega_1,$$

после перемещения $L_2 = (J_0 + 2ml_2^2) \omega_2$.

По закону сохранения момент импульса $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$, следовательно,

$$(J_0 + 2ml_1^2) 2\pi n_1 = (J_0 + 2ml_2^2) 2\pi n_2,$$

откуда

$$n_2 = n_1 \frac{J_0 + 2ml_1^2}{J_0 + 2ml_2^2}.$$

Работа человека равна приросту кинетической энергии системы:

$$A = T_2 - T_1.$$

Так как начальная кинетическая энергия системы

$$T_1 = \frac{(J_0 + 2ml_1^2)\omega_1^2}{2},$$

конечная кинетическая энергия системы

$$T_2 = \frac{(J_0 + 2ml_2^2)\omega_2^2}{2},$$

$$\text{то } A = 2\pi^2 [(J_0 + 2ml_2^2)n_2^2 - (J_0 + 2ml_1^2)n_1^2].$$

Ответ: $A=870 \text{ Дж}$, $n_2=4,2 \text{ об/с}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Однородный диск радиусом $0,2 \text{ м}$ и массой 5 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости от времени задана уравнением $\omega = A + Bt$, где $B = 8 \text{ рад/с}^2$. Найти касательную силу, приложенную к ободу колеса-диска.

4.2. На барабан радиусом $0,5 \text{ м}$ намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 10 кг . Найти момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением $2,04 \text{ м/с}^2$.

4.3. Однородный шар массой $5,0 \text{ кг}$ скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через $1,6 \text{ с}$ после начала движения.

4.4. На какой угол надо отклонить однородный стержень, подвешенный на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, чтобы нижний конец стержня при прохождении им положения равновесия имел скорость 5 м/с ? Длина стержня 1 м .

4.5. В установке, показанной на рис. 22, известны масса однородного сплошного цилиндра m , его радиус R и массы тел m_1 и m_2 . Скольжения нити и трения в оси цилиндра нет. Найти угловое ускорение цилиндра и отношение натяжений T_1/T_2 вертикальных участков нити в процессе движения.

4.6. На однородный сплошной цилиндр массой M и радиусом R плотно намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой m (рис. 23). В момент $t=0$ система

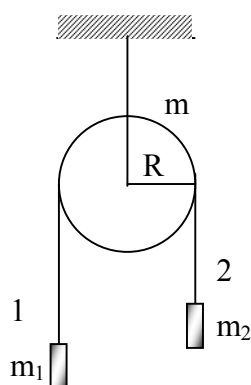


Рис. 22

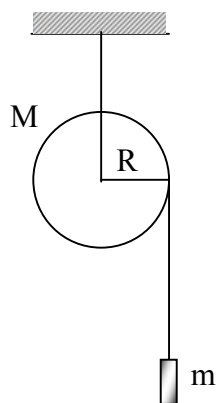


Рис. 23

пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра, найти зависимость от времени: модуля угловой скорости цилиндра; кинетической энергии всей системы.

4.7. Однородный стержень длиной **85** см подвешен на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Какую наименьшую скорость надо сообщить нижнему концу стержня, чтобы он сделал полный оборот вокруг оси?

4.8. Маховое колесо, имеющее момент инерции $J=245 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, вращается, делая **20** об/с. После того, как на колесо перестал действовать вращающий момент, оно остановилось, сделав **1000** оборотов. Найти время, прошедшее от момента прекращения действия вращающегося момента до полной остановки колеса.

4.9. Обруч радиусом r свободно скатывается с вершины неподвижной цилиндрической поверхности радиусом $R>r$. В какой точке поверхности начнется скольжение обруча? Коэффициент трения между обручем и поверхностью $k=0,5$.

4.10. Сплошной маховик массой **20** кг и радиусом **120** мм вращается, совершая **600** об/мин. С какой силой нужно прижать к нему тормозную колодку, чтобы он остановился за **3** с, если коэффициент трения равен **0,1**?

4.11. Человек массой $m_1=60$ кг находится на неподвижной платформе массой $m_2=100$ кг. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r=5$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $U=4$ км/ч. Радиус платформы $R=10$ м. Считать платформу однородным диском, а человека – точечной массой.

4.12. Вывести формулу для момента инерции прямого кругового конуса относительно его высоты, M – масса конуса, R – радиус его основания.

4.13. Однородный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол (рис. 24). Коэффициент трения между стенками угла и цилиндром равен k . Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки?

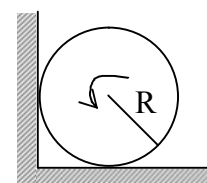


Рис. 24

4.14. Однородные сплошные шар и цилиндр, имеющие одинаковый радиус, двигаясь с одинаковой скоростью по горизонтальной плоскости, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Найти отношение высот подъема этих тел.

4.15. Однородный диск массой $m_1=0,2$ кг и радиусом $R=20$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси z , перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку C (рис. 25). В точку A на образующей диска попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально (перпендикулярно оси z) со скоростью $V=10$ м/с, и прилипает к его поверхности. Масса m_2 шарика равна 10 г. Определить угловую скорость ω диска и линейную скорость u точки O на диске в начальный момент времени. Вычисления выполнить для следующих значений a и b : 1) $a=b=R$; 2) $a=R/2$, $b=R$.

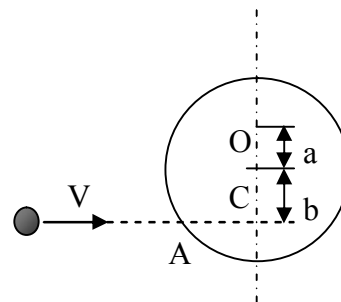


Рис. 25

4.16. Однородный шар массы m и радиуса R скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти: а) значение коэффициента трения, при которых скольжения не будет; б) кинетическую энергию шара через t секунд после начала движения.

4.17. Сплошной однородный цилиндр радиусом $R=15$ см катится без скольжения по горизонтальной плоскости, которая переходит в наклонную, составляющую угол $\alpha=30^\circ$ с горизонтом (рис. 26). Найти максимальную скорость V_0 , при которой цилиндр перейдет на наклонную плоскость еще без скачка.

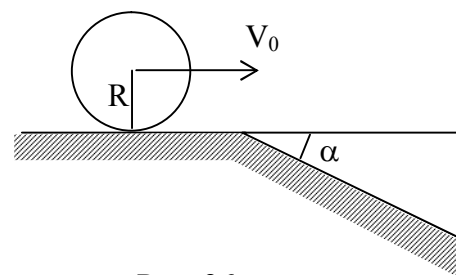


Рис. 26

Занятие 5

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Темы, включенные в работу:

1. Кинематика.
2. Динамика материальной точки.
3. Закон сохранения момента импульса. Вращение твердого тела.

Занятие 6

ЭЛЕМЕНТЫ МОЛЕКУЛЯРНО – КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ. I-Й ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

Вопросы

1. Работа при изменении объема. Особенности работы.
2. Теплота. Удельная и молярная теплоемкости. Зависимость теплоемкости от процесса. Графики. Особенности теплоты.
3. Внутренняя энергия. Ее изменение. Эквивалентность теплоты и работы. I-й закон термодинамики.
4. Изотермический, изохорический и изобарический процессы.
5. Основное уравнение молекулярно – кинетической теории газов. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул.
6. Степени свободы молекул. Распределение энергии по степеням свободы для молекулы и моля.
7. Внутренняя энергия идеального газа.
8. Теплоемкость идеального газа при постоянном объеме.
9. Адиабатный процесс.
10. Политропический процесс. Теплоемкость в политропическом процессе.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

P	Давление
V	Объем
T	Температура (термодинамическая)
M	Молярная масса
m	Масса
R	Универсальная газовая постоянная
ν	Количество вещества
N	Число структурных элементов системы (молекул, атомов, ионов и т.п.)
N_A	Постоянная Авогадро
n	Концентрация частиц (молекул, атомов) однородной системы
ρ	Плотность вещества
$\langle \epsilon \rangle$	Средняя кинетическая энергия молекулы

k	Постоянная Больцмана
c	Удельная теплоемкость газа
C	Мольная теплоемкость газа
i	Число степеней свободы
γ	Показатель адиабаты
U	Внутренняя энергия идеального газа
Q	Количество теплоты

Примеры решения задач

Пример 1.

В узкой, закрытой с одного конца трубке находится газ, запертый столбиком ртути длиной H . Если трубку наклонить под углом α к вертикали, то длина столбика воздуха будет равна L . Каково внешнее давление, если при переворачивании трубки открытым концом вниз верхний край столбика ртути переместился на ΔL и при этом за счет выливания ртути столбик ртути укоротился на ΔH ? Считать, что температура газа во время переворачивания не изменилась, капиллярными явлениями и трением пренебречь.

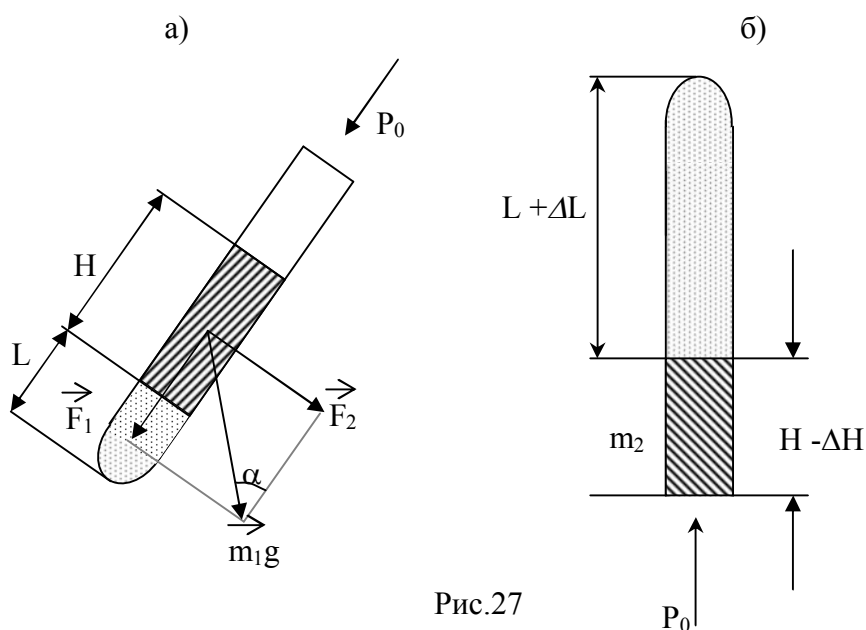


Рис.27

Решение.

На рис.27 показаны два положения трубки: а) под углом α к вертикали, б) вертикальное, отверстием вниз. Температура воздуха не меняется, масса газа постоянная. Таким образом, имеем дело с изотермическим процессом ($T = \text{const}$). По закону Бойля – Мариотта:

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \quad (1)$$

Где $p_1 V_1$ - начальное состояние газа (а), $p_2 V_2$ - конечное состояние газа (б).

Распишем эти состояния. Давления p_1 и p_2 найдем из условия равновесия столбиков ртути. Для этого спроектируем все силы на ось трубки, получим

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } p_0 S + m_1 g \cos \alpha - F_1 = 0 \\ \text{б) } - p_0 S + m_2 g + F_2 = 0 \end{array} \right\}, \quad (2)$$

где $p_0 S$ - модуль силы, действующей на столбики ртути со стороны внешней среды (атмосферы), m_1 и m_2 - массы столбиков ртути, F_1 и F_2 - модули сил давления газа на ртуть изнутри. Массы столбиков ртути в случаях а и б:

$$m_1 = \rho H S, \quad m_2 = \rho (H - \Delta H) S,$$

где ρ - плотность ртути.

Поскольку, $F_1 = p_1 S$ и $F_2 = p_2 S$ то система уравнений (2) примет вид:

$$\left. \begin{array}{l} p_0 S + \rho S H g \cos \alpha = p_1 S \\ - p_0 S + \rho S (H - \Delta H) g = - p_2 S \end{array} \right\} \quad (3)$$

Выражая из этих равенств давления p_1 и p_2 (с учетом, что $V_1 = SL$; $V_2 = S(L + \Delta L)$) перепишем уравнение (1)

$$(p_0 + \rho g H \cos \alpha) L = [p_0 - \rho g (H - \Delta H)] (L + \Delta L), \quad (4)$$

Из него находится внешнее давление p_0 :

$$p_0 = \frac{\rho g}{\Delta L} [H L \cos \alpha + (H - \Delta H)(L + \Delta L)], \quad (5)$$

При этом полагаем, что плотность ртути мало отличается от табличного значения, даваемого при $T \approx 300 K$.

Пример 2.

Водород H_2 объемом 1 м^3 , находившийся при нормальных условиях, сначала изохорно перевели в состояние с давлением, в n раз большим первоначального, а затем изобарно в состояние с объемом, в k раз большим первоначального. Определить изменение внутренней энергии газа, работу, совершенную им, и полученное количество теплоты.

Дано:

$$V_0 = 1 \text{ м}^3$$

$$p_0 = 10^5 \text{ Па}$$

$$T_0 = 273 \text{ К}$$

$$M = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$p_2 = n p_0$$

$$V_3 = k V_0$$

Найти: ΔU – ?

A – ?

ΔQ – ?

Решение.

Физическая система состоит из некоторой массы газа m (ее можно определить), молярная масса M которого известна. Начальное состояние макросистемы известно (нормальное давление $p_0 \approx 10^5 \text{ Па}$, нормальная температура $T_0 = 273 \text{ К}$ и объем $V_0 = 1 \text{ м}^3$ известны по условию). Состояния и процессы, в которых участвовала система, изобразим графически в системе координат $(p - V)$ (рис. 28). Найдём параметры второго 2 и третьего 3 макросостояний системы. Для этого используем уравнение Менделеева-Клапейрона:

$$p_2 V_0 = \frac{m}{M} R T_2 \quad \text{и} \quad p_2 V_3 = \frac{m}{M} R T_3. \quad (1)$$

Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} T_2 &= \frac{M p_2 V_0}{m R} = \frac{M n p_0 V_0}{m R} \\ T_3 &= \frac{M p_2 V_3}{m R} = \frac{M n p_0 k V_0}{m R} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

На участке 1-2 изохорный процесс, то $\Delta V = 0$, $A_{1-2} = 0$.

Следовательно, по I закону термодинамики 1

$$\Delta Q_{1-2} = \Delta U_{1-2}, \quad (3)$$

Полное изменение внутренней энергии ΔU_{1-3} определим по формуле:

$$\Delta U_{1-3} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_3 - T_0), \quad (4)$$

т.к. изменение внутренней энергии не зависит от формы пути, а зависит от начального и конечного состояния системы:

$$\Delta U_{1-3} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R \left[\frac{Mnk p_0 V_0}{mR} - \frac{M p_0 V_0}{mR} \right] = \frac{i p_0 V_0}{2} (nk - 1). \quad (5)$$

На участке 2-3 процесс изобарный, работа равна:

$$A_{2-3} = p_2 (V_3 - V_0) = n p_0 (k V_0 - V_0) = n p_0 V_0 (k - 1), \quad (6)$$

Количество теплоты можно рассчитать по первому началу термодинамики:

$$Q = \Delta U + A = \frac{i}{2} p_0 V_0 (nk - 1) + p_0 V_0 n (k - 1) = \frac{p_0 V_0}{2} [i(nk - 1) + 2n(k - 1)],$$

где i – число степеней свободы, для H_2 ($i=5$).

Пример 3.

Найти для идеального газа уравнение такого процесса, при котором теплоемкость газа изменяется с температурой по закону $C = \alpha/T$, где $\alpha = \text{const}$.

Решение.

Процесс не политропный. Поэтому применим первое начало термодинамики в форме

$$\Gamma Q = dU + \Delta A, \quad (1)$$

где $\Delta Q = \frac{m}{M} C dT$ – элементарное количество теплоты, полученной системой,

$dU = \frac{m}{M} C_v dT$ – изменение внутренней энергии физической системы,

$\Delta A = p dV$ – элементарная работа, совершенная системой.

Перепишем уравнение (1) для одного моля газа $\left(\frac{m}{M} = 1 \text{ моль} \right)$, выразив давление из уравнения Менделеева-Клапейрона.

$$C dT = C_v dT + RT \frac{dV}{V}$$

$$\frac{\alpha}{T} dT = C_v dT + RT \frac{dV}{V}$$

Разделим переменные:

$$\frac{\alpha}{R T^2} dT = C_v \frac{dT}{RT} + \frac{dV}{V}$$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\frac{\alpha}{R} \left(-\frac{1}{T} \right) = \frac{C_v}{R} \ln T + \ln V + \ln k, \text{ где } k - const.$$

$$-\frac{\alpha}{RT} = \ln(T^{C_v/R} V k)$$

Отсюда находим искомое уравнение процесса:

$$e^{\alpha/RT} \cdot V \cdot T^{1/C_v-1} = const, \text{ где } \gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

Пример 4.

В баллоне, объем которого $V = 12,5 \text{ л}$, находится $m = 2 \text{ мг}$ водорода при температуре $T = 5000 \text{ К}$. При этой температуре молекулы водорода оказываются упругими, причем часть молекул диссоциирует на атомы. Степень диссоциации $\alpha = 0,25$. Вычислить давление и удельную теплоемкость c_V водорода.

Дано:

$$V = 12,5 * 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$T = 5 * 10^3 \text{ К}$$

$$m = 2 * 10^{-6} \text{ кг}$$

$$\alpha = 0,25$$

Найти: p ?

c_V - ?

Решение.

Если степень диссоциации равна α , то в баллоне находится $2\alpha \frac{m}{M}$ - киломолей атомного водорода и $(1-\alpha) \frac{m}{M}$ - киломолей молекулярного водорода при постоянном объеме. Тогда давление смеси

$$p = p_{ат.} + p_{мол.}, \quad (1)$$

Учитывая, что $p = nKT$, где n - число частиц (атомов, молекул) в единице объема газа, перепишем уравнение (1):

$$p = 2\alpha kT \frac{N}{V} + KT(1-\alpha) \frac{N}{V} = KT \frac{N}{V} (1+\alpha) = \frac{RTm}{M_{H_2}} \cdot \frac{(1+\alpha)}{V}. \quad (2)$$

$$p = 4,2 \text{ кПа}.$$

Вычислим мольную теплоемкость:

$$c_V = c_{V_{ат.}} + c_{V_{мол.}} = 2\alpha \frac{i_\alpha}{2} R + (1-\alpha) \frac{i_m}{2} R. \quad (3)$$

Так как молекула водорода упругая, то число степеней

$$i_m = i_{пост.} + i_{вращ.} + i_{колеб.} = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$i_\alpha = 3$$

Подставляем все в уравнение (3):

$$c_V = 2\alpha \frac{3}{2} R + (1-\alpha) \frac{7}{2} R = \frac{7-\alpha}{2} R.$$

Тогда удельная теплоемкость

$$c_V = \frac{c_V}{M_{H_2}} = \frac{7-\alpha}{2 M_{H_2}} R = 14 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Открытую стеклянную трубку длиной 1 м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку закрывают пальцем и вынимают. Какой длины столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление равно 750 мм. рт. ст.

6.2. При изобарическом расширении двухатомного газа была совершена работа 160 Дж . Какое количество теплоты было сообщено газу?

6.3. В цилиндре, площадь основания которого равна 100 см^2 , находится воздух при температуре $t_1 = 12^\circ\text{ C}$. Атмосферное давление $p_1 = 76\text{ см. рт. ст.}$. На высоте $h_1 = 60\text{ см}$ от основания цилиндра расположен поршень. На сколько опустится поршень, если на него поставить гирю массой 100 кг , а воздух в цилиндре нагреть до температуры $t_2 = 27^\circ\text{ C}$? Трение поршня о стенки цилиндра и вес самого поршня не учитывать.

6.4. В трубке сечением $0,5\text{ см}^2$, ориентированной вертикально запаянным концом вверх, находится столбик воздуха длиной $l_1 = 40\text{ см}$, запертый снизу столбиком ртути длиной $h = 8\text{ см}$; температура $t_1 = 27^\circ\text{ C}$. Как изменится длина Δl воздушного столбика, если трубку отклонить от вертикали на угол $\alpha = 60^\circ$ и одновременно повысить температуру на $\Delta T = 30\text{ К}$? Атмосферное давление нормальное. Найти массу воздуха, заключенного внутри трубки.

6.5. 14 гр. азота адиабатически расширяют так, что объем увеличивается в $n = 5$ раз, а затем изометрически сжимают до первоначального объема. Начальная температура азота $T_1 = 1000\text{ К}$. Изобразить процесс на диаграмме $(p-V)$. Найти конечную

температуру газа; приращение внутренней энергии; количество тепла, отданного газом; совершенную газом работу. Молекулы азота считать жесткими.

6.6. Из начального состояния, характеризуемого давлением p_1 и объемом V_1 , газ расширяется в одном случае изотермически, в другом – адиабатно до одного и того же конечного объема V_2 . В каком из этих процессов окончательное давление больше и в каком совершена большая работа?

6.7. Сосуд объемом $V = 20$ л содержит смесь водорода и гелия при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 0,2$ МПа. Масса смеси $m = 5$ г. Найти отношение массы водорода к массе гелия в смеси.

6.8. Найти внутреннюю энергию газа NH_3 , находящегося в баллоне объемом $V = 100$ л при давлении $p = 4$ кПа. Какую долю этой энергии составляет энергия поступательного движения молекул? Молекулы считать жесткими.

6.9. В закрытом сосуде находится 20 г азота и 32 г кислорода. Найти изменение внутренней энергии этой смеси газов при охлаждении ее на 28° .

6.10. Газ, занимавший объем $V_1 = 1$ м³ при давлении $p_1 = 1,2$ кПа, изотермически расширяется до объема $V_2 = 2$ м³, а затем изохорически нагревается, при этом давление повышается до начального. В изохорическом процессе газ получает $Q = 3 \cdot 10^3$ кДж тепла. Изобразить процесс на диаграмме p, V и вычислить коэффициент Пуассона для этого газа.

6.11. 10 г кислорода, находящегося при нормальных условиях сжимается до объема в $1,4 \cdot 10^{-3}$ м³. Найти давление и температуру кислорода после сжатия, если: 1) кислород сжимается изотермически, 2) кислород сжимается адиабатически. Найти работу сжатия в каждом из этих случаев.

6.12. 6,5 г водорода, находящегося при температуре 27° С, расширяется вдвое при $p = \text{const}$ за счет притока тепла извне. Найти: 1) работу расширения, 2) изменение внутренней энергии газа, 3) количество тепла, сообщенного газу.

6.13. Воздух в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания сжимается адиабатически и его давление при этом изменяется от $p_1 = 1$ ат до $p_2 = 35$ ат. Начальная температура воздуха 40° С. Найти температуру воздуха в конце сжатия.

6.14. Газ расширяется адиабатически и при этом объем его увеличивается вдвое, а температура (абсолютная) падает в 1,32 раза. Какое число степеней свободы имеют молекулы этого газа?

6.15. $V_1 = 1 \text{ м}^3$ воздуха сжимают так, что его объем уменьшается в $n_1 = 5$ раз, а давление увеличивается в $n_2 = 30$ раз. Первоначальное давление $p_1 = 110 \text{ кПа}$. Считая процесс политропическим, вычислить показатель политропы и работу, затраченную на сжатие.

6.16. Давление одноатомного идеального газа зависит от температуры по закону $p = \alpha T^2$, где α - постоянная. Вычислить мольную теплоемкость газа в этом процессе.

Занятие 7

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Вопросы

1. При каких условиях выполняется закон распределения молекул газа по скоростям? Напишите аналитическое выражение этого закона и изобразите его графически.
2. Получите соотношения для следующих скоростей молекул: а) наиболее вероятной; б) средней арифметической; в) средней квадратичной.
3. Зависимость атмосферного давления от высоты (барометрическая формула).
4. Закон распределения Больцмана.
5. Что называется эффективным диаметром молекулы? Объясните выражение: среднее число соударений молекул газа; средняя длина свободного пробега.
6. Каковы закономерности явлений переноса в газах?
7. Получите: а) выражение для динамической вязкости; б) выражение для теплопроводности; в) выражение для коэффициента диффузии.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

n – концентрация частиц,

m_0 – масса одной молекулы,

V_v – наиболее вероятная скорость,

$\langle V_{kv} \rangle$ - средняя квадратичная скорость,

$\langle V \rangle$ - средняя арифметическая скорость,

$f(x)$ – плотность вероятности распределения молекул по скоростям,

u – относительная скорость,

$\langle Z \rangle$ - среднее число соударений,

$\langle \lambda \rangle$ - средняя длина свободного пробега,

η - динамическая вязкость,

K - коэффициент теплопроводности,

D - коэффициент диффузии,

d - эффективный диаметр молекулы.

Примеры решения задач

Пример 1.

Температура окиси азота NO равна $T = 300 \text{ K}$. Определить долю молекул $\Delta N_1/N$; $\Delta N_2/N$ скорости которых 1) лежат в интервале скоростей от $V_1 = 820 \text{ м/с}$ до $V_2 = 830 \text{ м/с}$, 2) превышают $V_1 = 820 \text{ м/с}$.

Решение.

Рассматриваемый газ находится в состоянии равновесия и, следовательно, подчиняется распределению Максвелла, согласно которому

$$\frac{dN}{N} = f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2 e^{-u^2} du \quad (1)$$

Относительное число молекул, скорости которых 1) лежат в интервале от V_1 до V_2 или 2) превышает скорость V_2 в соответствии с определением плотности вероятности f равно

$$\frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{u_2} u^2 e^{-u^2} du, \quad (2)$$

$$\frac{\Delta N_2}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{u_1}^{\infty} u^2 e^{-u^2} du, \quad (3)$$

Для нахождения ΔN_1 , ΔN_2 следует использовать численное интегрирование или таблицы функций $f(u)$ и ее интегралов. В случае малых значений Δu ($\Delta u/u \leq 1\%$) равенство (2) можно заменить приближенным соотношением

$$\frac{\Delta N_1}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u_{cp}^2 e^{-u_{cp}^2} \Delta u, \quad (4)$$

где $u = \frac{V}{V_e}$ - относительная скорость, равная отношению скорости V к наиболее

вероятной скорости $V_e = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,3 \cdot 300}{30 \cdot 10^{-3}}} = 407,7 \text{ (м/с)}$.

$$u_1 = \frac{V_1}{V_e} = 2,011 \text{ и } u_2 = \frac{V_2}{V_e} = 2,036, \text{ тогда } u_{cp} = 2,024; \Delta u = 0,025.$$

Подставляя в формулу (4), получаем $\frac{\Delta N_1}{N} = 0,36\%$. Во втором случае для вычисления

$\Delta N_2/N$ использована таблица функции f и ее интегралов: $\frac{\Delta N_2}{N} = 4,6\%$

Пример 2.

Пространство между двумя концентрическими сферами заполнено однородным изотропным веществом. Радиусы сфер равны r_1 и r_2 ($r_2 > r_1$). Поверхность внутренней сферы поддерживается при температуре T_1 , а внешней – при температуре T_2 . Поток тепла через поверхность сферы любого радиуса известен и равен q . Найти коэффициент теплопроводности K вещества, находящегося между сферами, и градиент температуры dT/dr в зазоре между сферами как функцию радиуса. Считать: K не зависит от температуры.

Решение.

Поток тепла через единичную площадку в единицу времени определяется с помощью закона Фурье

$$j = -K \frac{dT}{dr}. \quad (1)$$

Так как между сферами отсутствуют источники и потребители энергии, то общее количество теплоты в единицу времени через поверхность сферы произвольного радиуса r постоянно и равно q .

$$q = -K \frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2. \quad (2)$$

Выразим из этого соотношения градиент температуры

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{q}{4\pi r^2 K}. \quad (3)$$

Проинтегрируем уравнение (3)

$$T = q/4\pi K r + C,$$

здесь C – постоянная интегрирования, которая находится из условия равенства температуры T температуре внутренней сферы T_1 при $r = r_1$.

Окончательно имеем

$$(T_1 - T) = \frac{q}{4\pi K} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right]. \quad (4)$$

Это уравнение справедливо при любых значениях радиуса. Воспользуемся вторым граничным условием: при $r = r_2$, $T = T_2$.

Тогда

$$(T_1 - T_2) = \frac{q}{4\pi K} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (5)$$

Из последнего уравнения определяется неизвестное значение коэффициента теплопроводности:

$$K = \frac{q}{4\pi(T_1 - T_2)} \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}. \quad (6)$$

Градиент температуры находится из уравнения (3) после подстановки значения K :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{(T_2 - T_1)r_1 r_2}{(r_2 - r_1)r^2}. \quad (7)$$

Пример 3.

Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул азота, коэффициент диффузии и вязкость при давлении $P=10^5$ Па и температуре $T=290$ К. Как изменятся найденные значения в результате двухкратного увеличения объема газа: а) при постоянном давлении, б) при постоянной температуре? Эффективный диаметр молекулы азота $d=3,7 \cdot 10^{-8}$ см.

Решение.

Средняя длина свободного пробега, коэффициент диффузии и вязкость газа могут быть рассчитаны по следующим формулам:

$$\langle \lambda \rangle = 1 / (\sqrt{2} \pi d^2 n); \quad (1)$$

$$D = (\langle \lambda \rangle \langle V \rangle) / 3; \quad (2)$$

$$\eta = (\rho \langle \lambda \rangle \langle V \rangle) / 3. \quad (3)$$

Концентрацию молекул по заданным значениям давления и температуры можно определить из уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов

$$p = nkT \quad (4)$$

При этом длина свободного пробега будет равна

$$\langle \lambda \rangle = kT / (\sqrt{2} \pi d^2 p) = 6,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}. \quad (5)$$

Для расчета коэффициента диффузии по формуле (2) следует воспользоваться полученным результатом, определив предварительно среднюю скорость по формуле:

$$\langle V \rangle = \sqrt{8kT / \pi m_0} = 468 \text{ (м / с)}, \text{ тогда получим } D = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с}.$$

При вычислении η следует учесть, что $n = \frac{N}{V}$, тогда

$$\eta = \rho \cdot \langle V \rangle \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot V}{\sqrt{2} \pi d^2 \cdot N}, \text{ а так как } \rho = \frac{m}{V}$$

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{\langle V \rangle M}{\sqrt{2} \pi d^2 N_A} \quad \eta = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$$

1. а) При увеличении объема в 2 раза, при постоянном давлении, $\lambda_2 / \lambda_1 = 2$. Так

как из уравнения Менделеева-Клапейрона $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$, а $\lambda \sim T$ согласно формуле (5)

- б) При постоянной $T = \text{const}$ по закону Бойля – Мариотта $\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$, т.е.

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2 \text{ (изменением эффективного диаметра от температуры и давления}$$

пренебречь).

2. а) Коэффициент диффузии при увеличении объема в 2 раза, при постоянном

давлении, изменится $\frac{D_2}{D_1} = 2\sqrt{2}$, т.к. $D \sim \frac{T}{p} \sqrt{T}$ - по формуле (2)

- б) При постоянной $T = \text{const}$, $D_2 / D_1 = 2$.

3. а) Вязкость газа при увеличении объема в 2 раза, при постоянном давлении:

$$\eta_2 / \eta_1 = \sqrt{2}$$

- б) При постоянной $T = \text{const}$: $\eta_2 / \eta_1 = 1$.

Пример 4.

Барометр в кабине летящего вертолета показывает давление $P = 90 \text{ кПа}$. На какой высоте h летит вертолет, если на взлетной площадке барометр показывал давление $P_0 = 100 \text{ кПа}$? Считать, что температура T воздуха равна $T = 290 \text{ К}$ и не изменяется с высотой.

Решение:

Для решения задачи воспользуемся барометрической формулой:

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h}{R \cdot T}},$$

где $M = 29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ - молярная масса воздуха, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$ - универсальная

газовая постоянная.

Поэтому:

$$e^{\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}} = \frac{P_0}{P};$$

$$\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T} = \ln\left(\frac{P_0}{P}\right).$$

Таким образом, высота полета $h = \frac{R \cdot T}{M \cdot g} \cdot \ln\left(\frac{P_0}{P}\right) = 893 \text{ м.}$

Пример 5.

Во сколько раз уменьшится число столкновений $\langle Z \rangle$ в единицу времени молекул двухатомного газа, если объем газа адиабатически увеличить в два раза?

Решение:

Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени определяется формулой: $\langle Z \rangle = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n \cdot \langle V \rangle$,

где $\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}}$ - средняя арифметическая скорость молекул, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$ -

универсальная газовая постоянная, M - молярная масса газа, $n = \frac{N}{V}$ - концентрация газа,

N – число молекул газа.

Поэтому: $\langle Z \rangle = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n \cdot \langle V \rangle = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \frac{N}{V} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}}$

В начальном состоянии: $\langle z_1 \rangle = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \frac{N}{V_1} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T_1}{\pi \cdot M}}$

В конечном состоянии: $\langle z_2 \rangle = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \frac{N}{V_2} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T_2}{\pi \cdot M}}$

Следовательно: $\frac{\langle z_1 \rangle}{\langle z_2 \rangle} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

Связь между начальным и конечным значениями параметров состояний газа при

адиабатном процессе: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$,

где $\gamma=1,4$ – показатель адиабаты для двухатомного газа, поэтому:

$$\frac{\langle z_1 \rangle}{\langle z_2 \rangle} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} = 2,3.$$

Пример 6.

Найти динамическую вязкость η гелия при нормальных условиях, если диффузия при тех же условиях равна $D = 1,06 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Решение:

Коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость) определяется выражением: $\eta = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle V \rangle \cdot \lambda$,

где: $\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot M}}$ - средняя арифметическая скорость молекул, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$ -

универсальная газовая постоянная, $\langle \lambda \rangle$ - средняя длина свободного пробега молекул. С

другой стороны диффузия: $D = \frac{1}{3} \cdot \langle V \rangle \cdot \lambda$, поэтому: $\eta = \rho \cdot D$.

Из уравнения состояния идеального газа следует:

$$P \cdot V = \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T \Rightarrow n = \frac{N}{V} = \frac{P \cdot N_A}{R \cdot T}, N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} - \text{число Авогадро.}$$

Плотность газа ρ найдем из уравнения состояния идеального газа:

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{M \cdot P}{R \cdot T}$$

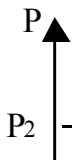
Поэтому: $\eta = \rho \cdot D = \frac{M \cdot P}{R \cdot T} \cdot D = 19 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с} = 19 \text{ мкПа} \cdot \text{с}.$

Задачи для самостоятельного решения

7.1. В сосуде объемом $V = 0,5 \text{ л}$ находится кислород при нормальных условиях. Найти общее число столкновений Z между молекулами кислорода в этом объеме за единицу времени.

7.2. В ультраразреженном азоте, находящемся под давлением $P = 1 \text{ мПа}$ и при температуре $T = 300 \text{ К}$, движутся друг относительно друга две параллельные пластины со скоростью $u = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Расстояние между пластинами не изменяется и много меньше средней длины свободного пробега молекул. Определить силу F внутреннего трения, действующую на поверхность пластин площадью $S = 1 \text{ м}^2$.

7.3. Определить относительное число ω молекул идеального газа, скорости которых заключены в пределах от нуля до одной сотой наиболее вероятной скорости V_B .



7.4. В газоразрядной трубке находится неон при температуре $T=300\text{ К}$ и давлении $P=1\text{ Па}$. Найти число N атомов неона, ударяющихся за время $\Delta t=1\text{ с}$ о катод, имеющий форму диска площадью $S=1\text{ см}^2$.

7.5. Масса m каждой из пылинок, взвешенных в воздухе, равна 10^{-21} кг . Отношение концентрации n_1 пылинок на высоте $h_1=1\text{ м}$ к концентрации n_0 на высоте $h_0=0$ равно $0,787$. Температура воздуха $T=300\text{ К}$. Найти по этим данным значение постоянной Авогадро N_A .

7.6. Найти вязкость η азота при нормальных условиях, если коэффициент диффузии для него $D = 1,42 \cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$.

7.7. Два горизонтальных диска радиусами $R=20\text{ см}$ расположены друг над другом так, что оси их совпадают. Расстояние d между плоскостями дисков равно $0,5\text{ см}$. Верхний диск неподвижен, нижний вращается относительно геометрической оси с частотой $n = 10\text{ с}^{-1}$. Найти вращающийся момент M , действующий на верхний диск. Динамическая вязкость η воздуха, в котором находятся диски, равна $17,2\text{ мкПа} \cdot \text{с}$.

7.8. Найти теплопроводность K водорода, вязкость которого $\eta = 8,6\text{ мкПа} \cdot \text{с}$.

7.9. Определить среднюю длину свободного пробега молекул углекислого газа при температуре 1000 С и давлении $0,1\text{ мм рт. ст.}$. Диаметр молекулы углекислого газа принять равным $3,2 \cdot 10^{-8}\text{ см}$.

7.10. При помощи ионизационного манометра, установленного на третьем советском искусственном спутнике Земли, было обнаружено, что на высоте 300 км от поверхности Земли в 1 см^3 атмосферы находится около миллиарда частиц газа. Найти среднюю длину свободного пробега частиц газа на этой высоте. Диаметр частиц принять равным $2 \cdot 10^{-10}\text{ м}$.

7.11. В сосуде находится углекислый газ, плотность которого $\rho=1,7\text{ кг}/\text{м}^3$; средняя длина свободного пробега его молекул при этих условиях равна $\lambda = 7,9 \cdot 10^{-6}\text{ см}$. Найти диаметр d молекул углекислого газа.

7.12. Сосуд с воздухом откачан до давления $10^{-6}\text{ мм рт. ст.}$. Чему равны при этом плотность воздуха в сосуде, число молекул в 1 см^3 сосуда и средняя длина свободного пробега молекул? Диаметр молекул воздуха считать равным $3 \cdot 10^{-8}\text{ см}$ и массу одного киломоля $M = 29\text{ кг}/\text{кмоль}$. Температура воздуха равна 17°С .

7.13. Какое предельное число молекул газа должно находиться в 1 см^3 сферического сосуда, диаметр которого равен 15 см , чтобы молекулы не сталкивались друг с другом? Диаметр молекулы газа принять равным $3 \cdot 10^{-8}\text{ см}$.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)**

***Задания по физике для самостоятельной работы
по ОПТИКЕ и атомной физике***

САМАРА 2013

УДК 53(075)

3-15

Рецензент: канд. физ.-мат наук, доц. С м и р н о в а Н . П .

Задания по физике для самостоятельной работы по Оптике и атомной физике/: В. Н. Кнестяпин, И. В. Овчинникова, С. И. Гусева, И. П. Заверишинский. 2-е изд. перераб. и доп. - Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 57 с.: ил.

Пособие содержит вопросы для самоконтроля, примеры решения задач. Методические указания составлены в соответствии с программой по физике для студентов дневного отделения. Подготовлено на кафедре физики.

Занятие 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

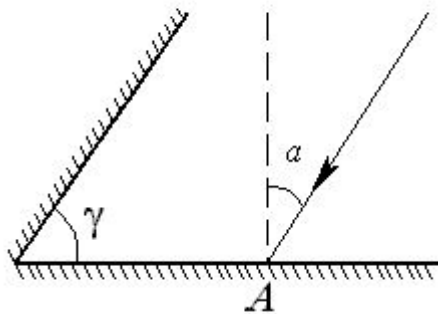
Вопросы

1. Перечислите абстрактные понятия, на которых основана геометрическая оптика.
2. Сформулируйте основные законы геометрической оптики.
3. Принцип Ферма.
4. Как строится изображение в плоском зеркале и каким оно является?
5. При каких условиях наступают явления предельного преломления и полного внутреннего отражения и в чем они заключаются?
6. Как пойдет луч после прохождения плоскопараллельной пластинки? От чего зависит смещение луча?
7. Как пойдет монохроматический луч в стеклянной призме?
8. Какие лучи используются при построении изображений в сферических зеркалах?
9. Какие лучи используются для построения изображений в линзах?
10. Объясните понятия:
 - гомоцентрический пучок,
 - стигматическое изображение,
 - свойство таутохронизма,
 - центрированная оптическая система.
11. Оптическая сила системы линз и зеркал.
12. Выведите формулу тонкой линзы.
13. Что называется фокусом и фокальной плоскостью линзы?
14. Дефекты линз и способы их устранения.
15. Оптические приборы: глаз, лупа, микроскоп.
16. Объясните физическую причину близорукости. Какие очки нужны для исправления этого недостатка зрения?

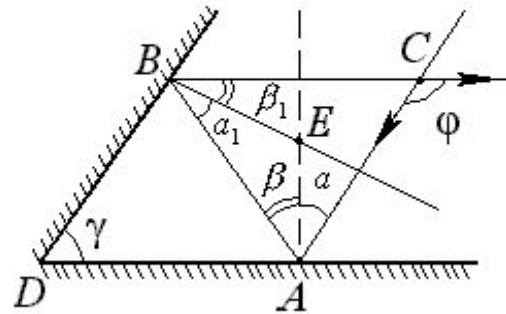
Примеры решения задач

Пример 1

Два плоских зеркала поставили одно к другому под углом γ (рис. 1.1,а). Луч падает на горизонтальное зеркало под произвольным углом α . Найти угол смещения луча после отражения от второго зеркала.



а)



б)

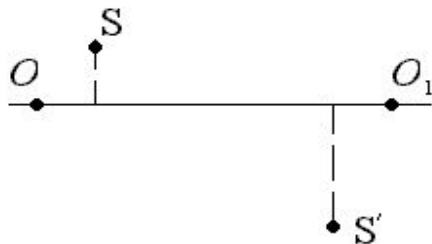
Рис. 1.1.

Решение

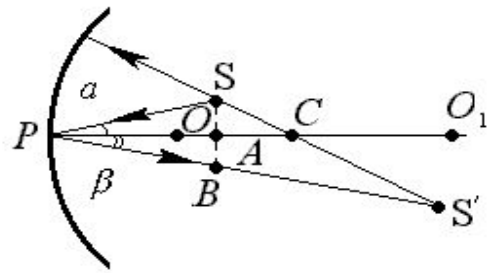
Построим ход луча (рис. 1.1, б). Искомым является угол ϕ . По закону отражения, $\alpha = \beta$; $\alpha_1 = \beta_1$. Из четырехугольника $AEBD$ найдем, что $\gamma = \alpha_1 + \alpha$. Угол ϕ является смежным к $\triangle ABC$ и потому $\phi = 2\alpha + 2\alpha_1 = 2(\alpha + \alpha_1)$. Тогда $\phi = 2\gamma$.

Пример 2

Заданы положения главной оптической оси сферического зеркала OO_1 , точечного источника света S и его изображения S' (рис. 1.2,а). Какое зеркало (выпуклое или вогнутое) дает такое изображение?



а)



б)

Рис. 1.2.

Решение

Соединив точки S и S' (рис. 1.2, б), найдем направление луча, идущего вдоль оптической оси. Точка его пересечения с главной оптической осью будет центр кривизны C зеркала. Опустим из S перпендикуляр SA на ось и отложим $AB = SA$. Соединим S' с B и продолжим до пересечения с главной оптической осью (в точке P). Соединим P с S . Так как лучи PS и PS' соединяют источник света и его изображение, то ясно, что они проходят через полюс зеркала (а по построению $\triangle PSB$ – равнобедренный, т. е. $a = \beta$).

Итак, изображение действительное, обратное, увеличенное, а зеркало вогнутое (у выпуклого зеркала изображение всегда прямое).

Пример 3

Радиус PC вогнутого сферического зеркала 40 см. На главной оптической оси этого зеркала помещен точечный источник света S на расстоянии 30 см от зеркала. На каком расстоянии от вогнутого зеркала надо поставить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные сначала вогнутым, а затем плоским зеркалом, вернулись в точку S ?

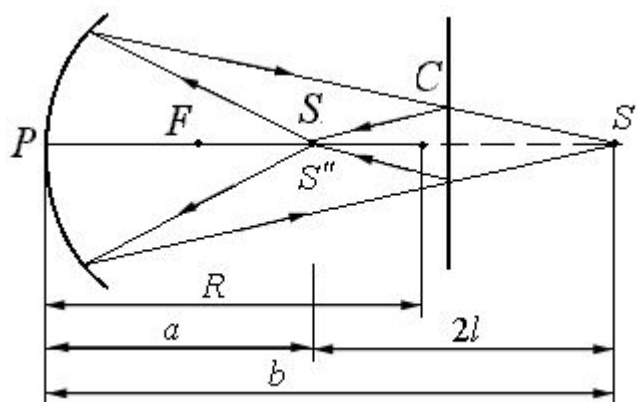


Рис. 1.3.

Дано:

$$R = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м};$$

$$a = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}.$$

Найти:

$$(a + l) - ?$$

Решение

Отметим на рис. 1.3 положение точки S ($a = 30 \text{ см}$), $SF = SC$. Строим изображение S' . Чтобы лучи вернулись после отражения от плоского зеркала в точку S , необходимо поместить плоское зеркало посередине расстояния SS' (плоское зеркало дает равное изображение на равном расстоянии).

Применив формулу сферического зеркала

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = (d = b, f = a),$$

получим $b = aR/(2a - R)$, где $b = a + 2l$. Тогда $l = a(R - a)/(2a - R)$. Следовательно, плоское зеркало удалено от сферического на расстояние $a + l$.

Вычисления

$$l = \frac{a(R - a)}{2a - R}.$$

$$l = \frac{0,3\text{м}(0,4 - 0,3)\text{м}}{0,6\text{м} - 0,4\text{м}} = 0,15\text{м}$$

$$a + l = 0,45\text{м}$$

Пример 4

На какую глубину опустился водолаз, если он хорошо видит предметы, находящиеся на дне водоема на расстоянии 35 м и далее? Показатель преломления воды 1,3. Рост водолаза не учитывать*.

Дано:

$$L = 35\text{ м}$$

$$n = 1,3.$$

Найти:

$$h - ?$$

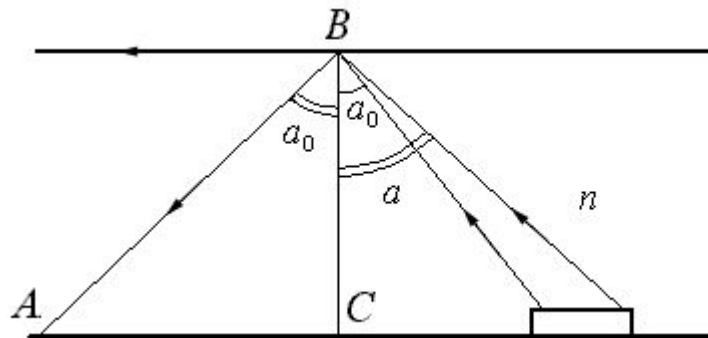


Рис. 1.4.

Решение

Водолаз видит предмет, если луч попадает в глаз, отразившись от поверхности воды. Это возможно, если угол падения луча превышает предельный угол полного внутреннего отражения. Найдем предельный угол a_0 (рис.1.4): $\sin a_0 = 1/n$. Из ΔABC

$$\sin a_0 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}}.$$

Решая совместно эти уравнения, находим h .

Вычисления

$$\sin a_0 = \frac{1}{n} = \frac{L/2}{\left[(L/2)^2 + h^2\right]^{1/2}};$$

$$h = \frac{L}{2} \sqrt{n^2 - 1}.$$

$$h = \frac{35\text{м}}{2} \sqrt{0,69} = 14\text{м}.$$

* Решите задачу самостоятельно при дополнительном условии – дан рост водолаза ($H = 1,8 \text{ м}$).

Ответ: $h = \frac{H}{2} + \frac{L}{2} \sqrt{n^2 - 1}$.

Пример 5

Точечный источник света расположен на расстоянии $d_1 = 30 \text{ см}$ от собирающей тонкой линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 5 \text{ см}$. За первой линзой поместили рассеивающую линзу, но так, что система дает действительное, обратное изображение источника с линейным увеличением $k = -1$ * на расстоянии $a = 18 \text{ см}$ от первой линзы. Найди положение рассеивающей линзы и ее фокусное расстояние.

Дано:

$$d_1 = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м};$$

$$F_1 = 5 \text{ см} = 0,05 \text{ м};$$

$$k = -1;$$

$$a = 18 \text{ см} = 0,18 \text{ м}.$$

Найти:

$$x - ? \quad F_2 - ?$$

Решение

Изображение в системе линз будет действительным, если пересекутся сами лучи, а не их воображаемые продолжения. Но для этого необходимо, чтобы рассеивающая линза перехватила лучи до получения промежуточного изображения. Так как источник света помещен на главной оптической оси на расстоянии $d_1 > 2F_1 (30 \text{ см} > 10 \text{ см})$, то изображение будет между F и $2F$, т.е. между пятым и десятым сантиметром. Более точное расстояние f_1 можно определить по формуле линзы. Используем формулу увеличения. Казалось бы, это невозможно. Точка есть точка. Но точка также имеет размеры.

*Знак минус означает, что изображение обратное.

Из формулы $k_1 = f_1 / d_1$ найдем k_1 . Затем выразим увеличение второй линзы k_2 , а так как увеличение системы $k = k_1 k_2$, то, подставив выражение для k_2 , найдем расстояние x между линзами.

Используя формулу для рассеивающей линзы, находим F_2 .

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}; \quad f_1 = \frac{F_1 d_1}{d_1 - F_1};$$

$$\begin{aligned}
k &= k_1 k_2; & k_1 &= \frac{f_1}{d_1}; & k_2 &= \frac{k}{k_1}; \\
k_2 &= \frac{f_2}{d_2} = \frac{a-x}{f_1-x}; \\
\frac{k}{k_1} &= \frac{a-x}{f_1-x}; & x &= \frac{k_2 f_1 - a}{k_2 - 1}; \\
-\frac{1}{F_2} &= -\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}; \\
F_2 &= \frac{f_2 d_2}{f_2 - d_2} = \frac{(a-x)(f_1-x)}{(a-x-f_1+x)} = \frac{(a-x)(f_{1-x})}{a-f_1}.
\end{aligned}$$

Вычисления

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{0,05м \cdot 0,3м}{0,25м} = 0,06м; & k_1 &= \frac{0,06м}{0,3м} = \frac{1}{5}; & k_2 &= \frac{1}{1/5} = 5; \\
x &= \frac{5 \cdot 0,06м - 0,18м}{4} = 0,03м; \\
F_2 &= \frac{(0,18м - 0,03м)(0,06м - 0,03м)}{0,18м - 0,06м} = 0,0375м.
\end{aligned}$$

Пример 6

Пациент при проверке зрения в кабинете врача-окулиста хорошо различает буквы на расстоянии 16 см * от глаза. Определите недостаток зрения. Какой оптической силы очки ему надо выписать?

Дано:

$$d_1 = 16см = 0,16м;$$

$$d_0 = 25см = 0,25м.$$

Найти:

$$D_2 - ?$$

Решение

Пациент близорук, так как расстояние наилучшего зрения у него меньше 25 см. Для ликвидации недостатка зрения ему нужно выписать очки с рассеивающими стеклами ($D < 0$).

Для вооруженного очками глаза $D = D_1 + D_2$, где D_1 и D_2 - оптическая сила глаза и очков соответственно.

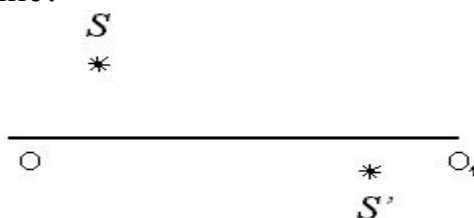
Считая глаз линзой, запишем $D_1 = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f}$ (f - расстояние от оптического центра глаза до изображения; $d_1 = 16см$).

Считая глаз с очками как ЦОС, запишем $D = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{f}$ ($d_0 = 25см$). Решая систему этих уравнений, найдем D_2 :

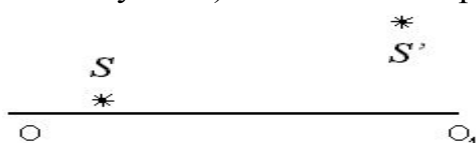
$$D_2 = -2 \text{ Дптр.}$$

Задачи для самостоятельного решения

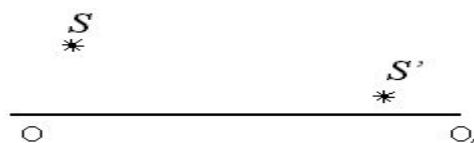
- 1.1. Плоское зеркало повернули на угол α . На какой угол сместится при этом отраженный луч, если источник света остался на месте?
- 1.2. Солнечный луч, проходящий через отверстие в ставне, составляет с поверхностью стола угол 48° . Как надо расположить плоское зеркало, чтобы изменить направления луча на горизонтальное?
- 1.3. Назначение лобного зеркала врача-окулиста – сконцентрировать световой пучок на малой площади. Для этого зеркало должно быть вогнутым, а для наблюдения объекта, например, глазного дна пациента в полюсе зеркала должно быть отверстие. Источник света (лампа) расположен за оптическим центром зеркала (в стороне, за головой пациента). Объект находится на расстоянии 17 см от полюса зеркала, фокусное расстояние которого 10 см. Построить изображение объекта. Найти расстояние от изображения до полюса зеркала.
- 1.4. Даны положения главной оптической оси сферического зеркала, предмета S и его изображения S' . Какое зеркало (вогнутое или выпуклое) дает это изображение?



- 1.5. Дана главная оптическая ось сферического зеркала. По одну сторону от нее находятся предмет и его изображение. Какие зеркала (вогнутые или выпуклые) дают эти изображения?

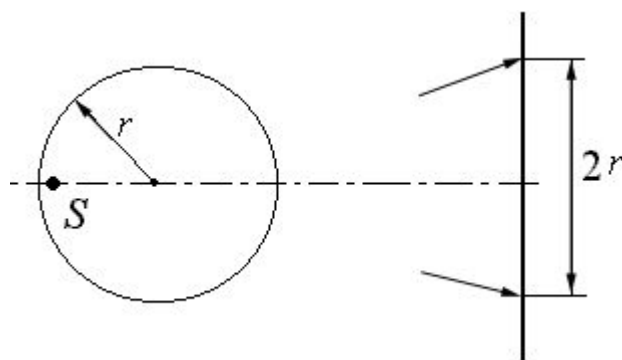


а)

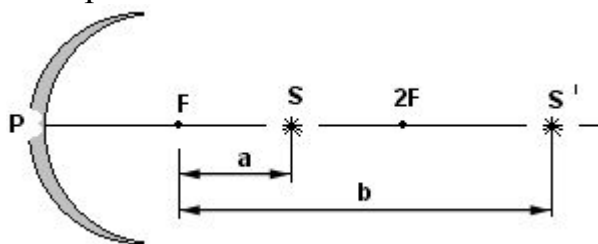


б)

- 1.6. Внутри стеклянного шара радиус $r = 0,1$ м слева от его центра вблизи поверхности находится точечный источник света S . На каком расстоянии справа от центра шара радиус светового пучка, вышедший из шара, будет равен r ? Показатель преломления стекла $n = 2$.



- 1.7. На вогнутое зеркало, главное фокусное расстояние которого 24 см, падает сходящийся пучок, пересекающийся за зеркалом на расстоянии 12 см. На каком расстоянии от зеркала соберутся лучи после отражения?
- 1.8. При определенном расположении предмета его изображение в вогнутом сферическом зеркале в 3 раза меньше предмета. Если же предмет передвинуть ближе к зеркалу на 15 см, то изображение станет в 1,5 раза меньше предмета. Определить фокусное расстояние зеркала.
- 1.9. Предмет S помещен между фокусом и центром кривизны вогнутого сферического зеркала на расстоянии a от фокуса. Изображение S' расположено также на главной оптической оси, на расстоянии b от фокуса. Доказать, что фокусное расстояние $F = \sqrt{ab}$ *.



*Используйте эту формулу при решении других задач.

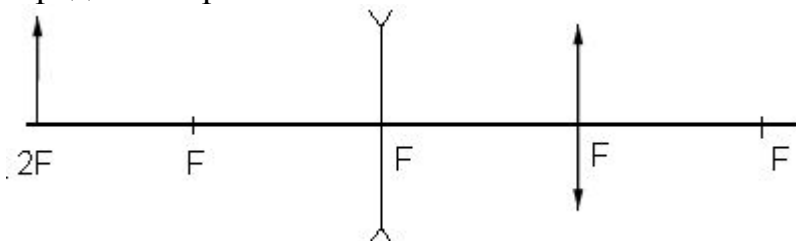
- 1.10. Два одинаковых сферических вогнутых зеркала поставлены одно против другого на расстоянии $4F$. В фокусе одного из зеркал помещен точечный источник света. Найти изображение источника.
- 1.11. В стекле с показателем преломления $n_1 = 1,52$ имеется сферическая полость радиусом $R = 3\text{ см}$, заполненная водой ($n_2 = 1,33$). На полость падают параллельные лучи света. Определить радиус светового пучка, который проникает в полость.
- 1.12. На тонкостенную пустую сферическую колбу, помещенную в жидкость, падает узкий параллельный пучок света так, что ось пучка проходит через центр колбы. На противоположной стороне колбы пучок света имеет диаметр, вдвое отличающийся от диаметра пучка, падающего на колбу. Каков показатель преломления жидкости, в которую погружена колба?
- 1.13. Дана стеклянная пластинка толщиной $d = 5\text{ см}$ с показателем преломления $n = 1,5$. При каком угле падения α (из воздуха) отраженный и преломленный пластинкой лучи будут взаимно перпендикулярны?

Вычислить для этого угла падения смещение x луча в результате прохождения сквозь указанную пластинку.

1.14. На оптической скамье расположены две собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 12$ и $F_2 = 15 \text{ см}$. Расстояние между линзами $l = 36 \text{ см}$. Предмет находится на расстоянии $d_1 = 48 \text{ см}$ от первой линзы. На каком расстоянии f_2 от второй линзы получится изображение предмета?

1.15. На призму с преломляющим углом 36° , сделанную из стекла с показателем преломления $1,6$, падает луч под углом 15° . Определить, на сколько изменится угол смещения луча, если его угол падения увеличится до 30° .

1.16. Оптическая система состоит из рассеивающей и собирающей линз. Фокусное расстояние каждой линзы $|F| = 40 \text{ см}$. Предмет находится на двойном фокусном расстоянии перед рассеивающей линзой. Постройте изображение предмета и рассчитайте его положение.



1.17. Мы смотрим по вертикали сверху на предмет, накрытый стеклянной пластинкой, поверх которой налита вода. Толщина пластинки $d_1 = 5 \text{ см}$, слоя воды $d_2 = 10 \text{ см}$. Показатель преломления стекла $n_1 = 1,6$, воды $n_2 = 1,33$. На каком расстоянии h от поверхности воды мы увидим изображение предмета?

1.18. На расстоянии d от тонкой собирающей линзы на главной оптической оси помещен источник света. За линзой на расстоянии $0,75d$ расположено плоское зеркало. Изображение находится посередине отрезка, соединяющего источник с центром линзы. Найти фокусное расстояние линзы.

1.19. Две одинаковые рассеивающие линзы ($F_1 = F_2 = -F$) расположены на расстоянии $2F$ одна от другой. Светящаяся точка находится на главной оптической оси перед первой линзой. Третью линзу поместили посередине между ними, причем при любых положениях предмета его изображение в системе из трех линз было действительным. Построить изображение предмета и найти фокусное расстояние третьей линзы.

1.20. Точечный источник света находится на главной оптической оси линзы на расстоянии $2F$. На каком расстоянии за линзой надо перпендикулярно главной оптической оси поместить плоское зеркало, чтобы лучи, отразившись от него и вторично пройдя линзу, были параллельны главной оптической оси?

Занятие 2

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Вопросы

1. Запишите уравнение монохроматической волны и сделайте пояснения.
2. Фаза волны.
3. Длина волны в среде с показателем преломления n .
4. Оптическая длина волны.
5. В каких пределах лежит частота видимого света?
6. В каких пределах лежит длина волны видимого света?
7. Интенсивность света. Как интенсивность связана с амплитудой?
8. При сложении двух волн надо различать два случая. Какие?
9. Какие волны называются когерентными?
10. В чем заключается явление интерференции?
11. Запишите разность фаз для двух волн.
12. При каких условиях две волны когерентны?
13. Связь разности фаз ($\Delta\gamma$) и оптической разности хода (δ).
14. Условие максимума и минимума интерференции.
15. Произвести расчет для разности хода (δ) лучей от 2-х точечных источников света в произвольной точке пространства.
16. Расстояние между соседними максимумами и минимумами.
17. Перечислите методы получения интерференционной картины, в чем состоит идея?
18. Как изменится интерференционная картина при:
 - увеличении расстояния между источниками,
 - увеличении расстояния от источников до экрана,
 - уменьшении длины волны?
19. В чем заключается «просветление оптики»?

Примеры решения задач

Пример 1

От двух когерентных источников S_1 и S_2 ($\lambda = 0,8 \text{ мкм}$) лучи попадают на экран. На экране наблюдается интерференционная картина. Когда на пути одного из лучей перпендикулярно ему поместили мыльную пленку ($n = 1,33$), интерференционная картина изменилась на противоположную. При какой наименьшей толщине $d_{\min}$ пленки это возможно?

Решение

Изменение интерференционной картины на противоположную означает, что на тех участках экрана, где наблюдались интерференционные

максимумы, стали наблюдаться интерференционные минимумы. Такой сдвиг интерференционной картины возможен при изменении оптической разности хода пучков световых волн на нечетное число половин длин волн, т.е

$$\Delta_2 - \Delta_1 = (2k + 1)\lambda / 2, \quad (1)$$

где Δ_1 - оптическая разность хода пучков световых волн до внесения пленки;

Δ_2 - оптическая разность хода тех же пучков после внесения пленки;

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Наименьшей толщине $d_{\min}$ пленки соответствует $k = 0$. При этом формула (1) примет вид:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \lambda / 2. \quad (2)$$

Выразим оптические разности хода Δ_1 и Δ_2 . Из рис.2.1 следует:

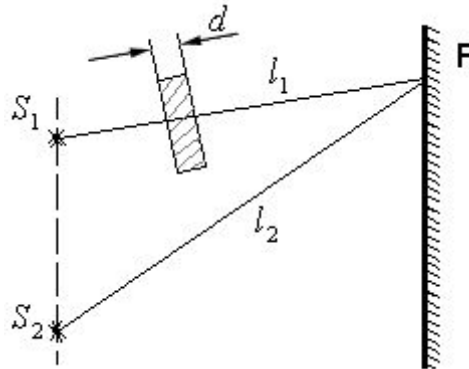


Рис. 2.1

$$\Delta_1 = l_1 - l_2, \Delta_2 = [(l_1 - d_{\min}) + nd_{\min}] - l_2 = (l_1 - l_2) + d_{\min}(n - 1).$$

Представим выражения Δ_1 и Δ_2 в формулу (2):

$$(l_1 - l_2) + d_{\min}(n - 1) - (l_1 - l_2) = \frac{\lambda}{2}, \text{ или } d_{\min}(n - 1) = \lambda / 2.$$

Отсюда:

$$d_{\min} = \lambda / [2(n - 1)].$$

Произведем вычисления:

$$d_{\min} = \frac{0,8}{2(1,33 - 1)} \text{ мкм} = 1,21 \text{ мкм}.$$

Пример 2

Лучи от источника света (накаленная нить) проходят сквозь разрезанную на две половины собирающую линзу. При этом на экране получают интерференционные полосы.

- 1) Объясните их происхождение.
- 2) Определите расстояние между темными полосами интерференции при таких данных: нить находится на расстоянии 20 см от разрезанной линзы; фокусное расстояние линзы 10 см; половинки линзы развернуты на расстоянии 450 см от линзы; длина волны 500 нм.

Дано: $a = 2 \text{ см}$; $F = 10 \text{ см}$; $d' = 1 \text{ мм}$; $b = 450 \text{ см}$; $\lambda = 500 \text{ нм}$.

Найти: Δy - ?

Решение

Обычную собирающую линзу разрезают пополам по диаметру, удаляя слой небольшой толщины, и обе половинки ее сдвигают (или немного раздвигают). Такую систему называют **билинзой** (билинзой Бийе). Схема такой линзы показана на рис.2.2.

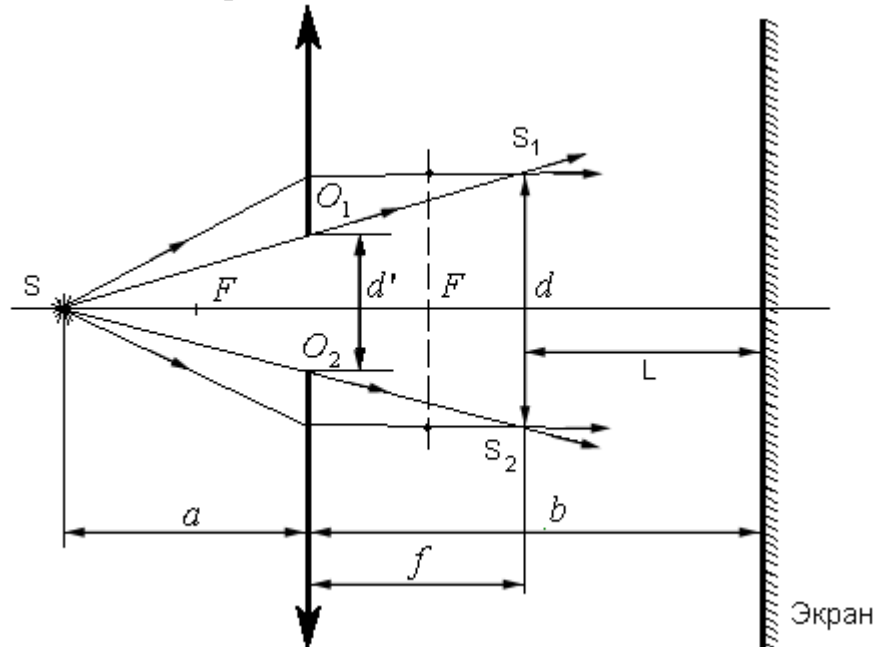


Рис. 2.2.

В этом случае оптический центр O_1 верхней половинки линзы и оптический центр O_2 нижней половинки находятся на расстоянии d' равном толщине удаленного слоя. Изобразив пунктиром побочные оптические оси, можно построить и ход лучей через эти половинки. Таким образом, билинза расщепляет падающую на нее световую волну на две части, которые затем частично перекрываются (зона интерференции). На экране в области перекрывания волн должна возникнуть интерференционная картина.

Ширина Δy интерференционной полосы можно найти как расстояние между соседними минимума (между соседними темными полосами) по формуле:

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d},$$

где $L = b - f$, f – расстояние от билинзы до изображения источников $S_1 S_2$.

По формуле для тонкой собирающей линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$$

найдем f :

$$f = \frac{F \cdot a}{a - F} = 20(\text{см})$$

Тогда $L = 430(\text{см})$.

Из подобия треугольников SS_1S_2 и SO_1O_2 : $\frac{d}{d'} = \frac{a+f}{a}$.

Отсюда: $d = d' \frac{(a+f)}{a} = 2,10^{-3} \text{ (м)}$.

Окончательно, находим: $\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = 1,075 \text{ (мм)}$.

Пример 3

В установке для получения колец Ньютона пространство между линзой (показатель преломления $n_1=1,55$) и плоской прозрачной пластинкой (показатель преломления $n_3=1,50$) заполнено жидкостью показатель преломления $n_2=1,60$ (рис.2.3). Установка облучается монохроматическим светом ($\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$), падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Найти радиус кривизны линзы R , если радиус четвертого ($k=4$) светового кольца в проходящем свете $r=1 \text{ мм}$.

Дано: $n_1=1,55$; $n_2=1,60$; $n_3=1,50$; $\lambda_0=6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$; $k=4$; $r_4=1 \text{ мм}$.

Найти: $R = ?$

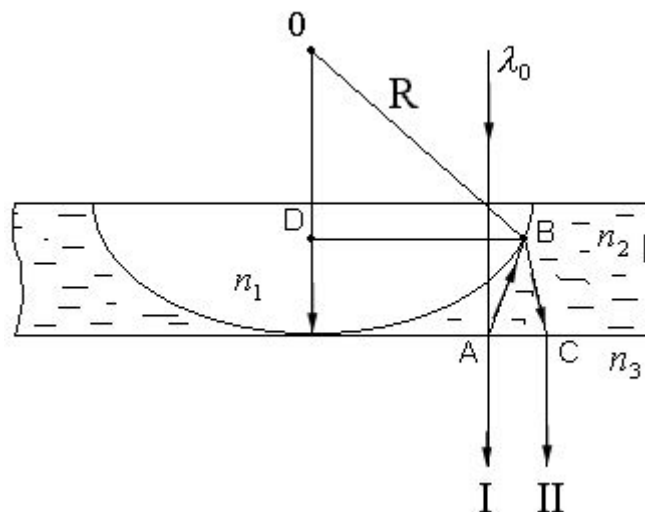


Рис. 2.3.

Решение

Интерференция лучей осуществляется в тонком жидком клине (показатель преломления жидкости n_2 больше как n_1 , так и n_3). Именно в этой тонкой жидкой пленке неодинаковой толщины каждый луч разделяется на две когерентные части. В проходящем свете, который максимум образуется вследствие интерференции луча I, прошедшего через точку A в пластину, и части II этого же луча ABC, отразившейся в точках A и B и прошедшей в пластину через точку C (рис.3). Так как $n_2 > n_3$ и $n_2 > n_1$, то при отражении в точках A и B потери полуволны не происходит. Следовательно, приобретаемая лучами I и II оптическая разность хода

$$\delta = 2dn_2, \quad (1)$$

где d - толщина жидкого клина в точке A.

Из треугольника OBD найдем $BD = r_k$:

$$r_k^2 = 2Rd \quad (2)$$

По условиям максимума

$$\delta = 2k \frac{\lambda_0}{2} \quad (3)$$

Решая совместно систему уравнений (1) - (3), находим

$$R = \frac{r_4^2 n_2}{k \lambda_0}, \quad R \approx 66 \text{ см}.$$

Пример 4

Найти минимальную толщину мыльной пленки, при которой свет с длиной волны 0,64 мкм максимально отражается, а свет с длиной волны 0,4 мкм не отражается вовсе. Угол падения света равен 30° .

Дано: $\lambda_1 = 0,64 \text{ мкм}$

$\lambda_2 = 0,40 \text{ мкм}$

$\alpha = 30^\circ$

$n = 1,33$

Найти: $d_{\min}$ - ?

Решение

Запишем для тонких пленок условия максимумов и минимумов в отраженном свете

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2k_1 + 1) \frac{\lambda_1}{2} \quad (1) - \text{max}$$

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = 2k_2 \frac{\lambda_2}{2} \quad (2) - \text{min}$$

Левые части этих уравнений равны, приравняем правые части уравнений.

$$\begin{aligned} (2k_1 + 1) \frac{\lambda_1}{2} &= 2k_2 \frac{\lambda_2}{2} \\ \frac{2k_2}{2k_1 + 1} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{8}{5} \end{aligned} \quad (3)$$

Путем подборки, находим:

$$k_2 = 4$$

$$k_1 = 2$$

Наименьшую толщину пленки можно вычислить по любой из формул (1) - (2).

$$\begin{aligned} 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} &= 2k_2 \frac{\lambda_2}{2} (k_2 = 4) \\ d_{\min} &= \frac{k_2 \lambda_2}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = 0,65 (\text{мкм}) \end{aligned}$$

Пример 5

В интерферометре Майкельсона используют желтую линию натрия, состоящую из двух компонентов с длинами волн $\lambda_1 = 589,0 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$. При поступательном перемещении одного из зеркал интерферометра интерференционная картина периодически исчезала (почему?). Найти перемещение зеркала, при котором последовательно появляются наиболее четкие интерференционные картины.

Дано: $\lambda_1 = 589,0 \text{ нм}$

$\lambda_2 = 589,6 \text{ нм}$

Найти: $\Delta b = ?$

Решение

Условия перехода от одной четкой картины к следующей: $(m+1)\lambda_1 = m\lambda_2$, где m - некоторое целое число. При этом условия максимумы от λ_1 и λ_2 будут накладываться друг на друга. Соответствующее перемещение Δb зеркала определяется уравнением: $2\Delta b = m\lambda$, где под λ можно понимать как λ_1 , так и λ_2 (их различие здесь не существенно: оно слишком мало). Из этих двух уравнений получим: $\Delta b \approx \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$, где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

Окончательно, имеем

$\Delta b = 289 \text{ мкм}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Когда на пути одного из интерферирующих лучей поместили стеклянную пластинку, интерференционная картина сместилась на 100 полос. Луч падает на пластинку перпендикулярно, длина волны света 0,5 мкм. Определить толщину пластинки.

2.2. Кольца равной толщины наблюдаются следующим образом. На вогнутую линзу с радиусом кривизны R_1 положили плосковыпуклую с меньшим радиусом кривизны R_2 . Вывести формулу для радиусов светлых и темных интерференционных колец, наблюдаемых в отраженном свете с длиной волны λ .

2.3. Плосковыпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны 40 см соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отраженном свете радиус некоторого темного кольца 2,5 мм. Наблюдая за этим кольцом, линзу осторожно отодвинули от пластинки на 5 мкм. Каким стал радиус этого кольца?

2.4. Два когерентных источника излучают свет в интервале от 0,55 мкм до 0,66 мкм. С какого порядка начинается перекрытие спектров?

2.5. Плоская монохроматическая волна длиной λ падает на поверхность стеклянного клина, угол между гранями которого $\theta \ll 1$. Плоскость падения перпендикулярна ребру клина, угол падения α . Найти расстояние между соседними максимумами интерференционных полос на экране, расположенном перпендикулярно отраженному свету.

2.6. Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плечей интерферометра Майкельсона поместили откаченную трубку длиной 14 см. Концы трубки закрыты плоскопараллельными стеклами. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны 0,59 мкм сместилась на 180 полос. Найти показатель преломления аммиака.

2.7. На вершине сферической поверхности плосковыпуклой стеклянной линзы имеется сошлифованный плоский участок радиусом 3 мм, которым она соприкасается со стеклянной пластинкой. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы 150 см. Найти радиус шестого светлого кольца при наблюдении в отраженном свете с длиной волны 655 нм.

2.8. Пучок света падает нормально на мыльную пленку толщиной 4 мкм. Какие длины волн из интервала от 450 до 500 нм усиливаются в отраженном свете?

2.9. На поверхность стеклянного объектива ($n_1 = 1,5$) нанесена тонкая пленка, показатель преломления которой $n_2 = 1,2$ (просветляющая пленка). При какой наименьшей толщине этой пленки произойдет максимальное ослабление отраженного света в средней части видимого спектра?

2.10. На стеклянный клин падает нормальный пучок света с длиной волны 0,582 мкм. Угол клина равен 20° . Какое число темных интерференционных полос приходится на единицу длины клина? Показатель преломления стекла равен 1,5.

2.11. Найти расстояние между третьим и шестнадцатым темными кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и двенадцатым темными кольцами равно 4,8 мм. Наблюдение проводится в отраженном свете.

2.12. При наблюдении в воздухе интерференции света от двух когерентных источников на экране видны чередующиеся темные и светлые полосы. Что произойдет с шириной полос, если наблюдение производить в воде, сохраняя все остальные условия неизменными?

2.13. Какой вид будут иметь кольца Ньютона, если пластина сделана из двух частей (крон $n_1 = 1,5$ и флинт $n_2 = 1,75$), линза – из крона, а пространство между ними заполнено сероуглеродом ($n = 1,62$).

2.14. Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой стеклянной линзой налита жидкость, показатель преломления которой меньше чем у стекла. Радиус восьмого темного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ($\lambda = 700\text{ нм}$) $r_8 = 2\text{ мм}$. Радиус линзы $R = 1\text{ м}$. Найти показатель преломления жидкости.

2.15. На мыльную пленку ($n = 1,3$) падает нормальный пучок лучей белого света. Какова наименьшая толщина пленки, если в отраженном свете она кажется зеленой ($\lambda_3 = 550\text{ нм}$)?

2.16. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны соответственно $r_k = 4\text{ мм}$ и $r_{k+1} = 4,38\text{ мм}$. Радиус кривизны линзы равен $R = 6,4\text{ м}$. Найти порядковые номера колец и длину волны λ падающего света.

2.17. На тонкую пленку ($n = 1,33$) падает параллельный пучок белого света. Угол падения $i = 52^\circ$. При какой толщине пленки отраженный свет наиболее сильно окрашен в желтый цвет ($\lambda_{\text{ж}} = 0,6\text{ мкм}$)?

2.18. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определить толщину слоя воздуха там, где в отраженном свете ($\lambda = 600\text{ нм}$) видно первое светлое кольцо Ньютона.

2.19. На тонкий стеклянный клин падает нормально монохроматический свет. Угол клина $\varphi = 2'$. Показатель преломления $n = 1,5$. Определить длину волны, если расстояние между смежными интерференционными максимумами в отраженном свете $b = 0,3\text{ мм}$

2.20. Плосковыпуклая линза с оптической силой 2 Дптр выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус четвертого темного кольца Ньютона в проходящем свете $0,7\text{ мм}$. Определить длину световой волны.

Занятие 3

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Вопросы

1. Какое явление в оптике называется дифракцией света?
2. Принцип Гюйгенса-Френеля? Какое дополнение и с какой целью ввел Френель в принцип Гюйгенса?
3. Опишите суть метода зон Френеля (без вывода): назначение, результат.
4. Дифракция Френеля на круглом отверстии, амплитуда при четном и нечетном числе зон.
5. Дифракция Френеля на диске, амплитуда. Чем отличается дифракционная картина на диске от картины на круглом отверстии?
6. Как определить радиус внешней границы m -ой зоны Френеля:
 - для сферической волны,
 - для плоской волны?
7. Чем отличается дифракционная картина при дифракции Фраунгофера на решетке от дифракционной картины на одной щели?
8. Напишите условия: главных максимумов, главных минимумов и дополнительных минимумов при дифракции на решетке.
9. Сформулируйте критерий Рэлея.
10. Угловая и линейная дисперсии, связь между ними.
11. Разрешающая способность дифракционной решетки.
12. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света I за экраном в точке, для которой отверстие:
 - равно первой зоне Френеля,
 - внутренней половине первой зоны,
 - сделали равным первой зоне Френеля, а затем закрыли его половину (по диаметру) ?

Используйте графический метод сложения амплитуд!!!

Примеры решения задач

Пример 1

Плоская световая волна с $\lambda = 0,64 \text{ мкм}$ и интенсивностью I_0 падает нормально на круглое отверстие радиуса $r = 1,2 \text{ мм}$. Найти интенсивность в центре дифракционной картины на экране, отстоящем от отверстия на расстояние $b = 1,5 \text{ м}$.

Решение

Вычислим число m зоны Френеля, укладывающихся в данном отверстии. Согласно формуле для плоской волны:

$$r = \sqrt{m\lambda b}.$$

$$\text{Откуда } m = r^2 / \lambda b = 1,5.$$

Это значение m соответствует вектору $\mathbf{A}$ на рис.3.1, где приведена “действующая” часть первого витка спирали Френеля. Из этого рисунка сразу видно, что $\mathbf{A} \approx \sqrt{2}A_0$, а значит интенсивность $I = 2I_0$.

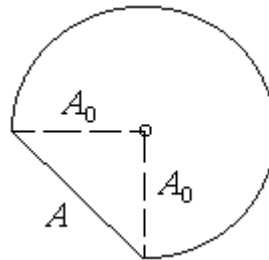


Рис. 3.1.

Пример 2

Плоская световая волна с $\lambda = 0,60 \text{ мкм}$ падает нормально на достаточно большую стеклянную пластинку, на обратной стороне которой сделана круглая выемка (рис. 3.2). Для точки наблюдения P она представляет собой первые полторы зоны Френеля. Найти глубину h выемки, при которой интенсивность света в точке P будет

- максимальной;
- минимальной.

Решение

Прежде всего, изобразим на первом витке спирали Френеля интересующие нас векторы в отсутствие выемки (рис.3.3), где изображенные векторы соответствуют амплитудам колебаний: от всей волновой поверхности ($\mathbf{A}_\infty$), от первых полутора зон Френеля ($\mathbf{A}_{1,5}$) и от всех остальных ($\mathbf{A}_{ост}$). Видно, что $\mathbf{A}_\infty = \mathbf{A}_{1,5} + \mathbf{A}_{ост}$.

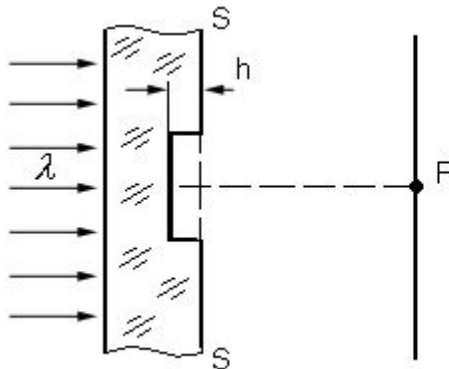


Рис. 3.2.

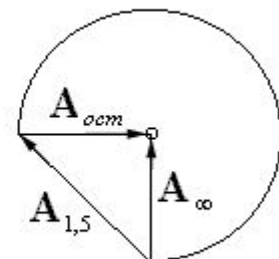


Рис. 3.3.

Теперь представим себе, что мы начали постепенно делать выемку – увеличивать h . Это приведет к тому, что колебания, проходящие через

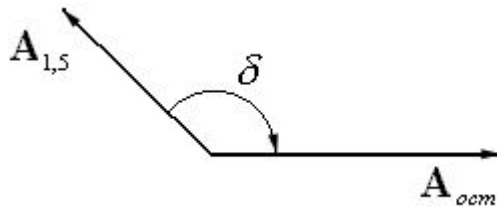
выемку, начнут опережать по фазе, поскольку их оптический путь уменьшится на $\Delta = h(n-1)$, что соответствует сдвигу по фазе на $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$ и повороту вектора на $\mathbf{A}_{1,5}$ на этот угол по часовой стрелке. Напомним, что *отставание* по фазе мы условились характеризовать поворотом *против* часовой стрелки, значит *опережение* – по часовой стрелке.

- а) Для получения максимума интенсивности, а значит и амплитуды, надо, чтобы вектор $\mathbf{A}_{1,5}$ оказался сонаправленным с вектором $\mathbf{A}_{осм}$. Для этого его следует повернуть, как показано на рис. 3.4(а), на угол $\delta = (3/4)\pi + 2\pi m$, где $m=0, 1, \dots$ Итак, из условия $\delta = 2\pi\Delta/\lambda$ получим

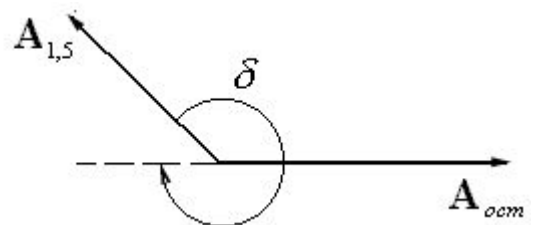
$$\frac{3}{4}\pi + 2\pi m = 2\pi \frac{h(n-1)}{\lambda},$$

откуда следует, что

$$h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{3}{8} \right).$$



а)



б)

Рис. 3.4.

- б) Для получения минимума нужно, чтобы вектор $\mathbf{A}_{1,5}$ оказался противоположно направленным вектору $\mathbf{A}_{осм}$. Из рис. 3.4(б) видно, что для этого его надо повернуть на угол $\delta = (7/4)\pi + 2\pi m$, где $m=0, 1, 2, \dots$ Следовательно,

$$\frac{7}{4}\pi + 2\pi m = 2\pi \frac{h(n-1)}{\lambda},$$

откуда искомая глубина выемки

$$h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{7}{8} \right).$$

Пример 3

Свет с длиной волны $\lambda = 535$ нм падает нормально на прозрачную дифракционную решетку. Найти ее период, если один из фраунгоферовых максимумов возникает под углом дифракции $\vartheta_m = 35^\circ$ и наибольший порядок максимума равен пяти.

Решение

Запишем условия главных максимумов:

$$d \sin \vartheta_m = m\lambda, \quad (1)$$

$$d \sin \vartheta_{\text{макс}} = 5\lambda. \quad (2)$$

Из этих формул получим

$$m = 5 \frac{\sin \vartheta_m}{\sin \vartheta_{\text{макс}}}. \quad (3)$$

Для вычисления m надо, чтобы значение $\sin \vartheta_{\text{макс}}$ было равным как можно ближе к единице, но таким, чтобы m было при этом целым. Это будет, как нетрудно установить, при $\sin \vartheta_{\text{макс}} = 0,955$. Тогда $m = 3$, и из формулы (1) найдем искомый период:

$$d = \frac{m\lambda}{\sin \vartheta_m} = \frac{3 \cdot 0,535}{0,573} \text{ мкм} = 2,8 \text{ мкм}.$$

Пример 4

Свет с длиной волны $\lambda = 0,53$ мкм падает на прозрачную дифракционную решетку с периодом $d = 1,50$ мкм. Найти угол с нормалью к решетке, под которым образуется максимум наибольшего порядка, если свет падает на решетку под углом $\vartheta_0 = 60^\circ$ к нормали.

Решение

Максимуму наибольшего порядка должна отвечать максимальная разность хода Δ между соответствующими лучами 1 и 2 от соседних щелей, как показано на рис. 3.5.

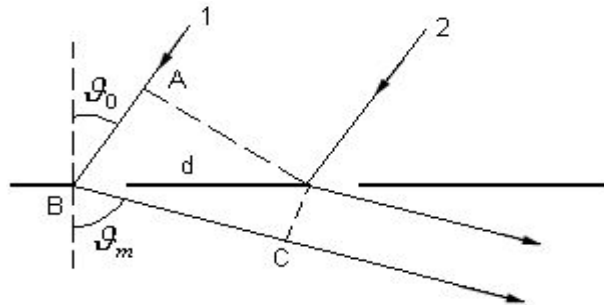


Рис. 3.5.

Для этого надо, чтобы

$$\Delta = AB + BC = d(\sin \vartheta_0 + \sin \vartheta_m) = m\lambda. \quad (1)$$

Сначала найдем максимальное значение m . Учитывая, что ϑ_m не может превосходить $\pi/2$, положим $\sin \vartheta_m = 1$. Тогда

$$m_{\text{макс}} = \left[\frac{d}{\lambda} (\sin \vartheta_0 + 1) \right] = [5,3] = 5, \quad (2)$$

где квадратные скобки означают, что от полученного числового значения надо взять только целую часть.

Остается подставить $m_{\text{макс}}$ в (1), и мы получим:

$$\sin \vartheta_m = m\lambda / d - \sin \vartheta_0 = 0,9.$$

Откуда $\vartheta_m = 64^\circ$.

Пример 5

Свет падает нормально на дифракционную решетку, ширина которой $h = 20$ мм. При достаточно малых углах дифракции, когда $\cos \vartheta \approx 1$, угловая дисперсия решетки $D = 5,0$ угл. мин/нм. Найти (согласно критерию Рэлея) максимально возможную разрешающую способность решетки в этих условиях.

Решение

В соответствии с критерием Рэлея разрешающая способность $\lambda / \delta \lambda = mN$. Угловая же дисперсия $D = m/d$, поскольку в нашем случае $\cos \vartheta \approx 1$. Из этих двух формул находим

$$\frac{\lambda}{\delta \lambda} = \frac{m}{d} Nd = Dh = \frac{5 \cdot 10^9}{60 \cdot 57,3} 20 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^4.$$

Пример 6

Узкий пучок рентгеновских лучей с длиной волны λ падает под углом скольжения $\alpha = 60^\circ$ а естественную грань монокристалла NaCl, плотность которого $\rho = 2,16$ г/см³. При зеркальном отражении от этой грани образуется максимум второго порядка ($m = 2$). Определить λ .

Решение

Согласно формуле Брэгга-Вульфа

$$\lambda = 2 \sin \alpha / m.$$

Как видно, решение задачи сводится к нахождению межплоскостного расстояния d . Последнее равно ребру элементарной кубической ячейки, в узлах которой попеременно находится атом Na и Cl (рис. 3.6).

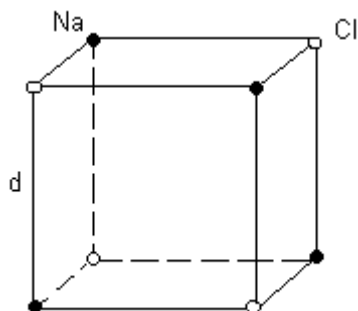


Рис. 3.6.

На такую ячейку от каждого атома приходится $1/8$ часть. Значит, на всю ячейку приходится $4 \cdot (1/8) = 1/2$ атома Na и $1/2$ атома Cl, т.е. масса M , приходящаяся на объем d^3 , равна половине массы M_M молекулы NaCl:

$$M = M_M / 2.$$

Плотность — это отношение массы, приходящейся на каждую ячейку, к ее объему: $\rho = M / d^3$. Отсюда $d = \sqrt[3]{M / \rho} = \sqrt[3]{M_M / 2\rho}$.

$$\text{В результате получим: } \lambda = \frac{2}{m} \left(\frac{M_M}{2\rho} \right)^{1/3} \sin \alpha = \frac{2}{2} \left(\frac{58,45}{6,025 \cdot 10^{23} \cdot 2 \cdot 2,16} \right)^{1/3} 0,866 = 244 \text{ нм}$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на поверхности непрозрачных экранов, показанных на рис.3.7. Найти интенсивность света в точке, для которой: на экране 1 в отверстии укладывается $1/3$ первой зоны Френеля, на экране 2 дуга окружности – граница первой зоны, на экране 3 в отверстии укладывается половина первой зоны и половина второй.

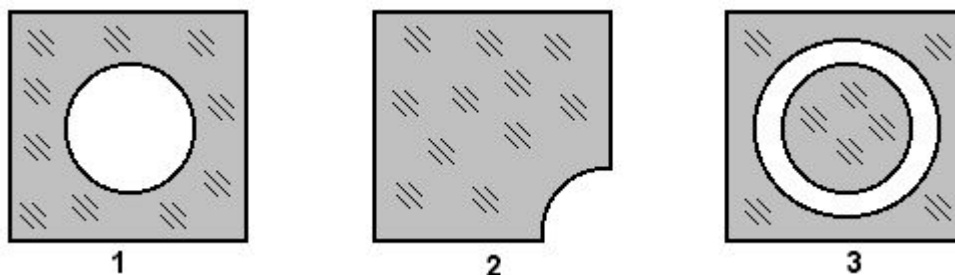


Рис. 3.7.

3.2. На диафрагму с круглым отверстием падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($0,6 \text{ мкм}$). При каком наибольшем расстоянии между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно? Радиус отверстия равен $0,98 \text{ мм}$.

3.3. Свет с длиной волны 535 нм падает нормально на дифракционную решетку. Наибольший порядок максимумов равен 5 , а один максимум расположен под углом 35 градусов. Найти период решетки.

3.4. На щель шириной $0,002 \text{ см}$ падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $0,5 \text{ мкм}$. Найти ширину изображения щели на экране, удаленном от нее на 1 м . Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от нулевого максимума.

3.5. Плоская монохроматическая волна падает нормально на круглое отверстие, находящееся на расстоянии $b=9 \text{ м}$ от экрана. Диаметр отверстия уменьшается в $k=3$ раза. Найти новое расстояние, на котором нужно поместить экран, чтобы получить прежнюю дифракционную картину.

3.6. Свет с длиной волны 530 нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $1,6 \text{ мкм}$. Найти угол дифракции для максимума наибольшего порядка.

3.7. Ширина щелей дифракционной решетки равна 12 мкм, ширина непрозрачных промежутков 6 мкм. Какие главные максимумы исчезнут?

3.8. На каком расстоянии друг от друга будут находиться на экране две линии ртутной дуги ($\lambda_1=577$ нм и $\lambda_2=579,1$ нм) в спектре первого порядка, полученном при помощи дифракционной решетки? Фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экране, $F=0,6$ м. Постоянная решетки $d=2$ мкм.

3.9. На щель шириной $a=6\lambda$ нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ . Под каким углом будет наблюдаться третий дифракционный минимум света?

3.10. На дифракционную решетку, содержащую 500 штрихов на 1 мм, падает в направлении нормали к ее поверхности белый свет. Спектр проецируется на экран, помещенный вблизи решетки линзой. Определить длину спектра первого порядка на экране, если расстояние от линзы до экрана 3 м.

3.11. Период дифракционной решетки $d=0,01$ мм, а ширина прозрачной части $b=0,0025$ мм. Сколько максимумов не будет наблюдаться в спектре по одну сторону от нулевого максимума до угла 30° из-за влияния главных минимумов?

3.12. Свет, содержащий две спектральные линии одинаковой интенсивности и с длинами волн $\lambda_1=600,00$ нм и $\lambda_2=600,05$ нм падает нормально на дифракционную решетку шириной $h=10,0$ мм. Найти угол ϑ , под которым эти линии окажутся на пределе разрешения (в соответствии с критерием Рэлея).

3.13. Плоская световая волна с $\lambda=0,60$ мкм падает нормально на грань стеклянного клина с углом раствора $\theta=15^\circ$ и показателем преломления $n=1,5$. На противоположной непрозрачной грани клина имеется прозрачная щель шириной $b=10$ мкм, параллельная ребру клина. Пренебрегая отражениями, найти:

- а) угол ϑ_0 между направлением на центральный френгофоров максимум и направлением падающего света;
- б) угловую ширину центрального максимума.

3.14. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно менять в процессе опыта. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны $a=100$ см и $b=125$ см. Определить длину волны света, если максимум освещенности в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $r_1=1$ мм и следующий максимум при $r_2=1,29$ мм.

3.15. В точке A на рис. 3.8 находится источник монохроматического света ($\lambda=500$ нм). Дифракция D с отверстием радиусом $r=1$ мм перемещается из точки, отстоящей от точки A на $a_1=1$ м в точку, отстоящую от A на $a_2=1,75$ м. Сколько раз N будет наблюдаться затемнение в точке B , если $AB=2$ м?

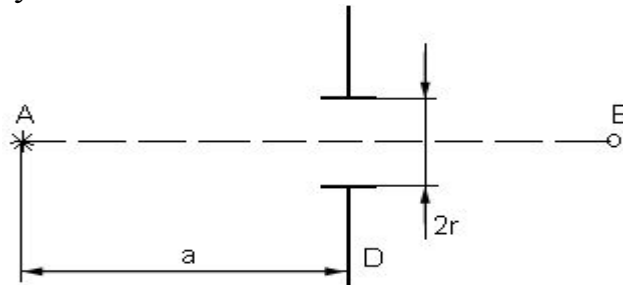


Рис. 3.8.

3.16. Какую ширину Δx будет иметь спектральная линия водорода длиной волны $\lambda=656,3$ нм на негативе спектрографа, если в нем использована решетка шириной $l=3$ см и объектив с фокусным расстоянием $F=15$ см?

3.17. Найти угловую дисперсию D (в угл. мин/нм) дифракционной решетки для длины волны $\lambda=550$ нм в спектре третьего порядка. Ширина решетки $l=2$ см, общее число штрихов решетки $N=4000$. Свет падает на решетку нормально.

3.18. Свет падает нормально на прозрачную дифракционную решетку шириной $l=6,5$ см, имеющую 200 штрихов на 1 мм. Исследуемый спектр содержит спектральную линию длиной волны $\lambda=670,8$ нм, которая состоит из двух – компонент, отличающихся на $\Delta\lambda=0,015$ нм. Найти:

- в каком порядке m спектра эти компоненты будут разрешены;
- наименьшую разность длин волн $\Delta\lambda_{\min}$, которую может разрешить эта решетка в области $\lambda \approx 670$ нм.

3.19. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda=600$ нм нормально падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром $d=1,2$ мм. На расстоянии $b=18$ см за экраном на оси отверстия наблюдается темное пятно. На какое минимальное расстояние Δb нужно сместить от этой точки вдоль оси отверстия, удаляя от него, чтобы в центре дифракционной картины вновь наблюдалось темное пятно?

3.20. Плоская монохроматическая ($\lambda=490$ нм) световая волна нормально падает на узкую щель. Дифракционная картина наблюдается на экране с помощью линзы, фокусное расстояние которой $F=40$ см. Найти расстояние между серединами линий в спектре первого и второго порядков на экране Δx , если ширина щели $a=0,03$ мм.

Занятие 4

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Вопросы

1. В чем заключается явление поляризации? Какой свет называется:
а) естественным; б) частично поляризованным; в) полностью поляризованным?
2. Что называется плоскостью падения света, плоскостью колебания вектора $\vec{E}$, плоскостью поляризации? Изобразите графически линейно поляризованную световую волну.
3. Укажите способы получения поляризованного света. Запишите и проанализируйте формулы Френеля для интенсивности света, отраженного от границы раздела двух диэлектриков.
4. Введите понятие степени поляризации $\vec{P}$. Как зависит этот параметр от угла падения световой волны? Сравните (качественно) степени поляризации отраженного и преломленного лучей.
5. Сформулируйте закон Брюстера. Как связан угол Брюстера с показателем преломления среды, от которой происходит отражение света?
6. Какова интенсивность отраженного от поверхности диэлектрика луча, падающего под углом Брюстера, если он поляризован: а) в плоскости падения; б) в плоскости колебаний вектора $\vec{E}$?
7. В чем заключается двойное лучепреломление? Опишите различия в поведении обыкновенного и необыкновенного лучей. В каких средах наблюдается явление двойного лучепреломления?
8. Сформулируйте закон Малюса и проиллюстрируйте его графически. Можно ли использовать анализатор в качестве поляризатора и наоборот?
9. Поясните сущность явления вращения плоскости поляризации. От чего зависит угол вращения плоскости поляризации?

Примеры решения задач

Пример 1

Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между плоскостями колебаний составляет 60° . При прохождении света через каждый из николей потери на отражение и поглощение составляет 5%. Найти, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один и через оба николя.

Дано: $\alpha = 60^\circ$

$\kappa = 5\%$

Найти: $\frac{I_0}{I_1} - ?$; $\frac{I_0}{I_2} - ?$

Решение

Естественный свет, падая, на грань призмы николя (рис. 4.1), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два луча: обыкновенный (o) и необыкновенный (e). Оба луча полностью поляризованы, и интенсивность их одинакова. Плоскости колебаний этих лучей указаны на рисунке.

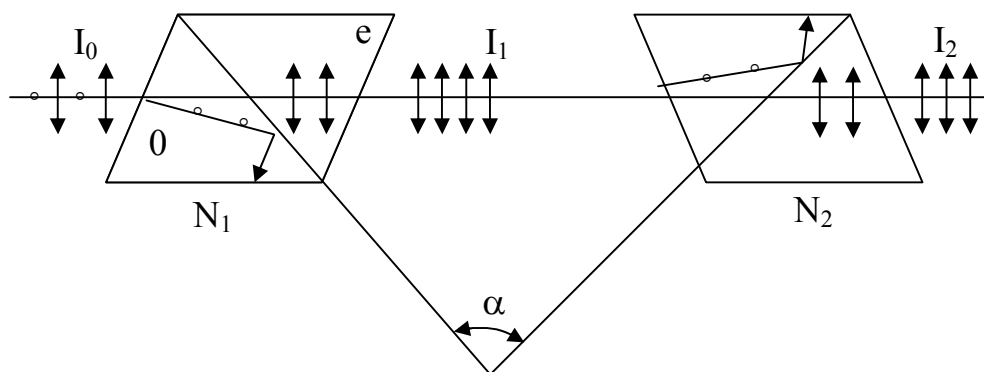


Рис. 4.1.

Необыкновенный луч проходит через призму, уменьшая свою интенсивность на величину потери интенсивности в николе N_1 , т.е. $I_1 = I_0 (1 - \kappa)$, где $\kappa = 0,05$ (5%) – относительная потеря интенсивности света в призме; I_0 – интенсивность естественного света, падающего на первый николю.

Относительное уменьшение интенсивности после прохождения николя

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{\frac{1}{2} I_0 (1 - \kappa)} = \frac{2}{1 - \kappa} = 2,1 \text{ раза.}$$

Для определения интенсивности I_2 , которая будет после прохождения николя N_2 , воспользуемся законом Малюса (без учета потерь)

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

где α – угол между плоскостью колебаний в поляризованном луче и плоскостью колебаний, пропускаемых николю N_2 .

Учитывая выражение для интенсивности I_1 и потери интенсивности во втором николе, находим

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 (1 - \kappa)^2 \cos^2 \alpha,$$

относительное уменьшение интенсивности после прохождения света через оба николя

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{[(1 - \kappa)^2 \cos^2 \alpha]}.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$\frac{I_0}{I_2} = 8,86,$$

т.е. при прохождении света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

Пример 2

На пути частично-поляризованного света поместили поляризатор. При повороте плоскости пропускания поляризатора из положения соответствующего максимуму пропускания, на угол φ интенсивность прошедшего света уменьшилась в η раз. Найти степень поляризации падающего света.

Решение

Представим частично-поляризованный свет как сумму естественного и поляризованного. Тогда степень поляризации этого света

$$P = \frac{I_n}{I_n + I_e} = \frac{1}{1 + \frac{I_e}{I_n}}, \quad (1)$$

где I_e и I_n – интенсивности естественной и поляризованной составляющих.

Найдем отношение $\frac{I_e}{I_n}$. Согласно условию задачи и закону Малюса

$$\eta = \frac{I_n + \frac{I_e}{2}}{I_n \cos^2 \varphi + \frac{I_e}{2}}. \quad (2)$$

Отсюда

$$\frac{I_e}{I_n} = 2(1 - \eta \cos^2 \varphi) / (\eta - 1).$$

После подстановки последнего выражения в (1) получим:

$$P = \frac{(\eta - 1)}{1 + \eta(1 - 2 \cos^2 \varphi)} = \frac{\eta - 1}{1 - \eta \cos^2 \varphi}.$$

Пример 3

Найти с помощью формул Френеля коэффициент отражения ρ естественного света, падающего под углом Брюстера на прозрачный диэлектрик с показателем преломления n .

Решение

Пусть i и r – углы падения и преломления. Здесь $i = i_{\text{Бр}}$, значит $i + r = \frac{\pi}{2}$.

Запишем формулы Френеля:

$$\rho_1 = \frac{I'_1}{I_1} = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}, \quad \rho_{11} = \frac{I'_{11}}{I_{11}} = \frac{\text{tg}^2(i - r)}{\text{tg}^2(i + r)}.$$

Из формул видно, что при падении под углом Брюстера, когда $i + r = \frac{\pi}{2}$, и

значит, $\text{tg}(\frac{\pi}{2}) \rightarrow \infty$, коэффициент отражения $\rho_{11} = 0$, т.е. отраженный свет будет полностью линейно-поляризованным в плоскости, перпендикулярной

плоскости падения.

Отлично от нуля будет только ρ_1 . Падающий свет естественный, это значит,

что у него $I_1 = I_{11}$ и $I_1 = \frac{I_0}{2}$, где I_0 – интенсивность падающего света.

Искомый коэффициент

$$\rho_1 = \frac{I'_1}{I_0} = \frac{I'_1}{2I_1} = \frac{\rho_1}{2}. \quad (1)$$

В нашем случае $\sin(i + r) = 1$, поэтому

$$\rho_1 = \sin^2(i - r). \quad (2)$$

Преобразуем (2) так, чтобы представить его через $\text{tg } i$, который по закону Брюстера равен n .

Разность углов в скобках с учетом того, что $i + r = \frac{\pi}{2}$, запишем так

$$i - r = i - (\frac{\pi}{2} - i) = 2i - \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

Тогда выражение (2) можно преобразовать следующим образом:

$$\sin^2(i - r) = \sin^2(2i - \frac{\pi}{2}) = \cos^2(2i) = (\cos^2 i - \sin^2 i)^2 = (1 - 2\sin^2 i)^2 =$$

$$[1 - 2\frac{1}{1 + \text{tg}^2 i}]^2. \quad (4)$$

Заменив в (4) $\text{tg } i = n$, и учитывая (2), представим искомое ρ , т.е. (1) в окончательном виде:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2. \quad (5)$$

Напомним, что ρ - это та доля падающего света, которая при отражении под углом Брюстера превращается в полностью плоскополяризованный свет.

Пример 4

Свет проходит через систему из двух скрещенных поляризаторов, между которыми расположена кварцевая пластинка. Ее оптическая ось составляет угол 45° с плоскостями пропускания поляризаторов. При какой минимальной толщине пластинки свет с длиной волны $\lambda_1 = 643$ нм будет проходить сквозь эту систему с максимальной интенсивностью, а свет с $\lambda_2 = 564$ нм будет практически задержан, если для обеих длин волн $n_e - n_o = 0,0090$?

Решение

При прохождении света через кварцевую пластинку возникает оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенными лучами

$$h|n_o - n_e| = m \frac{\lambda}{2},$$

$$h = \frac{m\lambda}{2(n_o - n_e)}. \quad (1)$$

Для максимума пропускания эта пластинка должна быть пластинкой в полволны ($\frac{\lambda}{2}$), т.е. m_1 должно быть нечетным, а для минимума – пластинкой в целую длину волны (λ), т.е. m_2 должно быть четным. Из приведенной формулы (1) следует, что

$$m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2. \quad (2)$$

Отсюда

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1,14.$$

Полученное значение 1,14 надо представить как отношение наименьших значений четного числа m_2 к нечетному m_1 . Легко убедиться (например, подбором), что это будут 8 и 7, т.е. $m_2 = 8$ и $m_1 = 7$.

Возвращаясь к первой формуле, находим

$$h_{\min} = \frac{m_1\lambda_1}{2(n_e - n_o)} = 0,25 \text{ мм.}$$

Пример 5

Ячейку Керра поместим между двумя скрещенными поляризаторами так, что направление напряженности $\vec{E}$ электрического поля образовало угол 45° с плоскостями пропускания поляризаторов. Конденсатор имеет длину

$l = 10,0$ см и заполнен нитробензолом. На систему падает свет с длиной волны $\lambda = 0,50$ мкм. Имея в виду, что в этих условиях постоянная Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-10}$ см/ V^2 , определить минимальную напряженность $\vec{E}$ электрического поля в конденсаторе, при которой интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота заднего поляризатора.

Решение

Интенсивность прошедшего света не будет зависеть от поворота заднего поляризатора только в том случае, если свет поляризован по кругу, т.е. нитробензол ведет себя в этом случае как пластинка $\frac{\lambda}{4}$. Это значит с

одной стороны
$$h|n_o - n_e| = m \frac{\lambda}{4}.$$

С другой
$$n_e - n_o = B \lambda E^2.$$

Тогда при $h = 1$:
$$\ell B \lambda E^2 = m \frac{\lambda}{4},$$

где m – нечетное, и по условию (E должно быть минимальным) $m = 1$.
Отсюда

$$E_{\text{мин.}} = \frac{1}{2\sqrt{\ell B}} = 10,6 \text{ кВ / см.}$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. На пути частично поляризованного света поместили никель. При повороте никеля на угол 60° из положения, соответствующего максимуму пропускания света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в 3 раза. Найти степень поляризации падающего света.

4.2. Кварцевую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, поместили между двумя николями. Угол между главными сечениями поляризатора и пластинки равен 45° . Толщина пластинки 0,5 мм. При каких длинах волн в интервале (0,5 - 0,6) мкм интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота анализатора? Разность показателей преломления необыкновенных и обыкновенных лучей в этом интервале длин волн равна 0,009.

4.3. Найти показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления 30° .

4.4. Найти угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, проходящего через них,

уменьшается в 4 раза.

4.5. В частично поляризованном свете амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 2 раза больше амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности. Определить степень поляризации света.

4.6. Пластина кварца толщиной 1 мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол 20° . Определить:

а) какова толщина кварцевой пластинки, помещенной между двумя параллельными николями, чтобы свет был полностью погашен?

б) какой длины в трубку с раствором сахара массовой концентрации $C = 0,4$ кг/л надо поместить между николями для получения того же эффекта?

Удельное вращение раствора сахара равно $0,665 \text{ град} \cdot \text{м}^3 / \text{кг} \cdot \text{м}$.

4.7. Степень поляризации частично поляризованного света $P = 0,25$. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

4.8. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд ($n = 1,5$), и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом $i = 42^\circ 37'$. Найти: а) под каким углом должен падать на дно сосуда луч света, чтобы наступило полное внутреннее отражение; б) показатель преломления жидкости n .

4.9. Из кварца нужно вырезать пластину, параллельную оптической оси кристалла, толщиной $d = 0,6$ мм так, чтобы плоскополяризованный луч желтого света ($\lambda = 0,589$ мкм), пройдя пластину, стал поляризованным по кругу. Рассчитать толщину пластины d , если для желтых лучей в кварце показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно равны: $n_o = 1,544$, $n_e = 1,553$.

4.10. Пучок плоскополяризованного света, длина волны которого в пустоте $\lambda = 5890 \text{ \AA}$, падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно к его оптической оси. Найти длины волн обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны соответственно $n_o = 1,66$ и $n_e = 1,49$.

4.11. Призма Волластона сделана из исландского шпата, угол $\alpha = 15^\circ$ (рис. 4.2). Показатели обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно

равны: $n_0 = 1,658$, $n_e = 1,486$. Рассчитать, на какой угол φ будут разведены эти лучи.

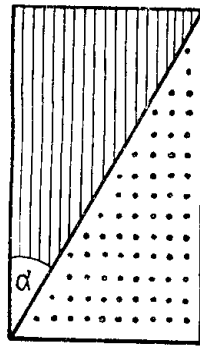


Рис. 4.2.

4.12. Узкий пучок естественного света падает под углом Брюстера на поверхность толстой плоскопараллельной прозрачной пластины (рис. 4.3). При этом от верхней поверхности отражается $\rho = 0,08$ светового потока. Найти степень поляризации пучков 1 - 4.

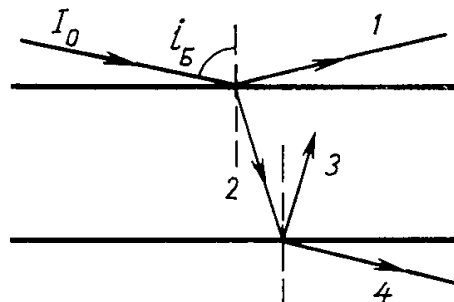


Рис. 4.3.

4.13. Определить с помощью формул Френеля коэффициент отражения ρ естественного света при нормальном падении на поверхность стекла, показатель преломления которого $n = 1,50$.

4.14. Естественный свет падает на стекло, показатель преломления которого $n = 1,5$, под углом $i = 45^\circ$. Определить коэффициент отражения и степень поляризации P_1 отраженных и P_2 преломленных лучей.

4.15. Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла, показатель преломления которого $n = 1,6$. Определить коэффициент отражения ρ .

4.16. Угол Брюстера ε_B при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57° . Определить скорость света в этом кристалле.

4.17. Плоский пучок естественного света с интенсивностью I_0 падает под углом Брюстера на поверхность воды. При этом $\rho = 0,039$ светового потока отражается. Найти интенсивность преломленного пучка.

4.18. На поверхность воды под углом Брюстера падает пучок плоскополяризованного света. Плоскость колебаний светового вектора составляет угол 45° с плоскостью падения. Найти коэффициент отражения.

4.19. Естественный свет падает на систему из трех последовательно расположенных одинаковых поляроидов, причем главное направление среднего поляроида составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с главными направлениями двух других поляроидов. Каждый поляроид обладает таким поглощением, что при падении на него линейно поляризованного света максимальный коэффициент пропускания составляет $\tau = 0,81$. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы?

4.20. Определить разность $n_o - n_e$ (n_o и n_e — показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей) при наблюдении эффекта Керра в нитробензоле в поле напряженностью $E = 3 \cdot 10^3$ В/см. Постоянная Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-2}$ с²/кг ($t = 20^\circ\text{C}$, $\lambda_0 = 5890$ Å).

Занятие 5

ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Вопросы

1. Интегральная энергетическая светимость.
2. Излучательная способность (спектральная плотность энергетической светимости) тела.
3. Коэффициент отражения и пропускания, поглощательная способность тела. Связь между ними. Идеальные тела.
4. Закон Кирхгофа (2-ая формулировка). Следствие из него.
5. Модель идеально черного тела. Распределение энергии в спектре черного тела.
6. Равновесие излучения и излучающего тела в классической физике.
7. Формула Рэля-Джинса. «Фиолетовая катастрофа».
8. Гипотеза Планка. Средняя энергия осциллятора. Формула Планка.
9. Закон Стефана-Больцмана.
10. Закон смещения Вина (вывод).

Примеры решения задач

Пример 1

В энергетическом распределении излучения абсолютно черного тела выделены два участка, площади которых одинаковы (рис. 5.1). одинаковы ли мощности излучения, приходящиеся на соответствующие интервалы длин волн, и одинаково ли число излучаемых квантов?

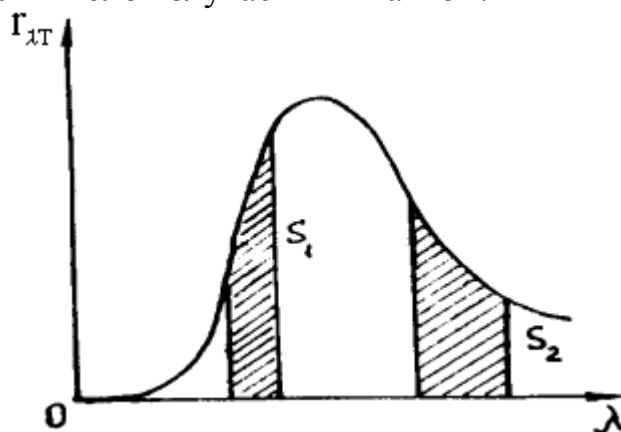


Рис. 5.1.

Решение

На определенный интервал длин волн приходится мощность излучения

$$P = \int_0^{\infty} r_{\lambda T} \cdot d\lambda.$$

Так как интеграл определяет площадь под кривой распределения, то на оба интервала длин волн приходится одинаковая мощность (по условию $S_1 = S_2$).

Энергия кванта в первом интервале длин волн

$$\varepsilon_1 = h\nu_1 = h \frac{c}{\lambda_1},$$

во втором

$$\varepsilon_2 = h\nu_2 = h \frac{c}{\lambda_2}.$$

Поскольку,

$$\lambda_2 > \lambda_1, \text{ то } \varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$

Энергия излучения в первом интервале длин волн

$$E_1 = n_1 \varepsilon_1,$$

во втором

$$E_2 = n_2 \varepsilon_2,$$

где n_1 и n_2 – соответствующее число излучаемых квантов.

По условию $E_1 = E_2$, следовательно, $n_2 > n_1$.

Пример 2

Предположим, что Земля и Солнце полностью поглощают падающее на них электромагнитное излучение и что Земля находится в равновесном состоянии при температуре T . Температура поверхности Солнца 5500 К, радиус его $7 \cdot 10^{10}$ см, радиус Земли $6,4 \cdot 10^8$ см, а расстояние между Солнцем и Землей $1,5 \cdot 10^{13}$ см. На основании этих данных вычислите температуру Земли.

Дано: $T_c = 5500 \text{ К}$
 $R_c = 7 \cdot 10^{10} \text{ см}$
 $R_3 = 6,4 \cdot 10^8 \text{ см}$
 $\ell = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$

Найти: $T_3 - ?$

Решение

При динамическом равновесии энергия, расходуемая каждым из тел системы на тепловое излучение. Компенсируется вследствие поглощения этим телом такого же количества энергии падающего на него излучения:

$$W_{\text{погл.}} = W_{\text{изл.}} \quad (1)$$

Считаем, что поглощательная способность Солнца и Земли равна единице. Энергия теплового излучения Солнца, по закону Стефана-Больцмана равна

$$W_c = \sigma T_c^4 4\pi R_c^2,$$

где T_c – температура Солнца,

R_c – радиус Солнца.

Солнце излучает энергию по всем направлениям, в пределах телесного угла 4π стерадиан. Энергия поглощенная Землей, находящейся на расстоянии ℓ от Солнца.

$$W_{\text{полгл.З}} = \sigma T_c^4 \frac{4\pi R_c^2}{4\pi \ell^2} \cdot \pi R_3^2, \quad (2)$$

а энергия теплового излучения Земли

$$W_{\text{изл.З}} = \sigma T_3^4 4\pi R_3^2. \quad (3)$$

Тогда, согласно, уравнению (1)

$$T_3 = T_c \sqrt{\frac{R_c}{2\ell}}. \quad (4)$$

$$T_3 = 266 \text{ (K)}.$$

Пример 3

Определить с помощью формулы Планка энергетическую светимость ΔR_λ абсолютно черного тела, приходящуюся на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 10 \text{ \AA}^\circ$, соответствующий максимуму энергетической светимости при температуре тела $T = 3 \cdot 10^3 \text{ K}$.

Дано: $\Delta\lambda = 10 \text{ \AA}^\circ = 10^{-9} \text{ м}$
 $T = 3 \cdot 10^3 \text{ K}$

Найти: ΔR_λ - ?

Решение

Физическую систему составляет черное тело. Энергетическая светимость dR_λ , приходящаяся на интервал длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$, связана с распределением энергии излучения по длинам волн $r_{\lambda,T}$ соотношением

$$dR_\lambda = r_{\lambda,T} \cdot d\lambda. \quad (1)$$

Для нахождения r воспользуемся формулой Планка для спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела:

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (2)$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ – постоянная Планка; $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ – скорость света в вакууме; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{K}$ – постоянная Больцмана.

Поскольку речь идет о конечном и достаточно узком интервале длин волн, то

$$\Delta R_\lambda = r_{\lambda_0} \cdot \Delta\lambda, \quad (3)$$

где r_{λ_0} – максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре.

Для определения длины волны λ_0 , на которую приходится максимум r_{λ_0} , воспользуемся законом смещения Вина

$$\lambda_0 = \frac{b}{T}, \quad (4)$$

где $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – Постоянная Вина;

Подставляя выражения (2) и (4) в формулу (3), получаем, что энергетическая светимость ΔR_λ абсолютно черного тела, приходящаяся на интервал длин волн, соответствующий максимуму энергетической светимости при данной температуре,

$$\Delta R_\lambda = \frac{2\pi h c^2 T^5}{b^5} \cdot \frac{\Delta \lambda}{\left(\frac{hc}{\lambda T}\right) - 1}. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (5) значения величин, получаем $\Delta R_\lambda = 3,2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$.

Пример 4

Металлический шар радиусом $R = 1 \text{ см}$ и теплоемкостью 14 Дж/К при температуре $T_0 = 1200 \text{ К}$ выброшен в межпланетное пространство. Найти закон убывания температуры со временем, если коэффициент поглощения $a = 0,4$. Через какое время температура шара уменьшится вдвое?

Дано: $R = 1 \text{ см} = 0,01 \text{ м}$

$C = 14 \text{ Дж/К}$

$T_0 = 1200 \text{ К}$

$a = 0,4$

$n = 2$

Найти: τ - ?

Решение

Металлический шар остывает за счет теплового излучения. При этом $dQ = -C dT = -CdT$,

где C – теплоемкость шара,

dQ – теряемое тепло.

С другой стороны, по закону Стефана-Больцмана энергия теплового излучения шара

$$dW_{\text{изл.}} = a\sigma T^4 4\pi R^2 dt.$$

А по закону сохранения энергии:

$$dW_{\text{изл.}} = -dQ.$$

Таким образом,

$$-CdT = a\sigma T^4 4\pi R^2 dt.$$

Разделяем переменные

$$-\frac{dT}{T^4} = \frac{a\sigma 4\pi R^2}{C} dt$$

и интегрируем полученное выражение.

$$-\int_{T_0}^T \frac{dT}{T^4} = \frac{a\sigma 4\pi R^2}{C} \int_0^{\tau} dt,$$

$$\frac{1}{3T^3} - \frac{1}{3T_0^3} = \frac{a\sigma 4\pi R^2}{C} \cdot \tau$$

Закон убывания температуры со временем будет иметь вид:

$$T = T_0 \left(\frac{3a\sigma 4\pi R^2 \tau T_0^3}{C} + 1 \right)^{-\frac{1}{3}}.$$

А время, по истечении которого температура шара уменьшится вдвое,

$$\tau = \frac{c(n^3 - 1)}{3a\sigma 4\pi R^2 T_0^3} = \frac{c(n^3 - 1)}{12a\sigma R^2 T_0^3},$$
$$\tau = 11 \text{ мин.}$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Найти температуру T печи, если известно, что из отверстия в ней площадью $S = 6,1 \text{ см}^2$ излучается в 1 с энергия $W = 34,7 \text{ Дж}$. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

5.2. Мощность излучения абсолютно черного тела $P = 34 \text{ кВт}$. Найти температуру этого тела, если известно, что площадь поверхности его $S = 0,6 \text{ м}^2$.

5.3. Какое количество энергии излучает затвердевающий свинец, свободная поверхность которого $S = 1 \text{ см}^2$, за время $t = 1 \text{ с}$? Отношение энергетических светимостей поверхности свинца и абсолютно черного тела для этой температуры считать равным 0,6.

5.4. Какова мощность электрической лампочки, температура вольфрамовой нити которой $T = 2650 \text{ К}$? Отношение энергетической светимости нити к энергетической светимости абсолютно черного тела при данной температуре $\kappa = 0,31$. Площадь излучающей поверхности $S = 47 \text{ мм}^2$.

5.5. Раскаленная металлическая поверхность площадью $S = 10 \text{ см}^2$ излучает в 1 мин энергию $W = 4 \cdot 10^4 \text{ Дж}$. Температура поверхности $T = 2500 \text{ К}$. Найти отношение энергетических светимостей этой поверхности и абсолютно черного тела при данной температуре.

5.6. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_m , на которую приходится максимум спектральной плотности испускательной способности $(r_{\lambda,T})_{\max}$, уменьшилась на $\Delta\lambda = 400 \text{ нм}$. Определить начальную и конечную температуры.

5.7. При переходе от температуры T_1 к температуре T_2 площадь, ограниченная графиком функции распределения плотности энергии равновесного излучения по длинам волн, увеличивается в 16 раз. Как изменится при этом длина волны λ_m , на которую приходится максимум испускательной способности абсолютно черного тела?

5.8. Какое количество энергии излучает Солнце за $\tau = 60$ с? Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно черного тела. Температуру поверхности Солнца принять $T = 5800$ К.

5.9. По пластинке длиной $l = 3$ см и шириной $b = 1$ см проходит электрический ток напряжением $U = 2$ В. После установления теплового равновесия температура пластинки составила 1050 К. Определить силу тока I , если коэффициент поглощения пластинки $a = 0,8$. Температуру пластинки считать постоянной по всей площади.

5.10. Найти с помощью формулы Планка мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела, приходящегося на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ мм вблизи максимума спектральной плотности излучения, при температуре тела $T = 3000$ К.

5.11. Поверхность Солнца близка по своим свойствам к черному телу. Максимум испускательной способности приходится на длину волны $\lambda_m = 0,50$ мкм (в излучении Солнца, прошедшем через атмосферу и достигшем поверхности Земли, максимум приходится на $\lambda_m = 0,55$ мкм). Определить температуру солнечной поверхности и энергию W , излучаемую Солнцем за $\tau = 1$ с в виде электромагнитных волн.

5.12. В каких областях спектра лежат длины волн, соответствующие максимуму спектральной плотности энергетической светимости, если источником света служит: а) спираль электрической лампочки ($T = 3000$ К); б) поверхность Солнца ($T = 6000$ К); в) атомная бомба, в которой в момент взрыва развивается температура около $T = 10^9$ К? Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

5.13. Черное тело находится при температуре $T_1 = 2900$ К. В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 9$ мкм. До какой температуры T_2 охладилось тело?

5.14. Полагая, что Солнце обладает свойствами абсолютно черного тела, определить интенсивность солнечного излучения вблизи Земли за пределами ее атмосферы (эта интенсивность называется солнечной постоянной). Температуру поверхности Солнца принять равной 5800 К.

5.15. Принимая солнечную постоянную для Земли $I_3 = 1,37$ кВт/м², найти солнечную постоянную I_M для Марса.

5.16. Определить температуру Солнца, принимая его за абсолютно черное тело, если известно, что максимум интенсивности спектра Солнца лежит в

зеленой области $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м.

5.17. Радиус вольфрамовой нити в электрической лампочке равен 0,2 мм, длина равна 5 см. При включении лампочки в цепь с напряжением 220В через лампочку течет ток силой 0,27А. Найти температуру нити лампочки. Считать, что по установлении равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется в результате лучеиспускания. Коэффициент черноты для вольфрама при этой температуре равен 0,31.

5.18. Излучение солнца по спектральному составу близко к излучению абсолютно черного тела, для которого длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, равна 0,48 мкм. Найти массу, теряемую солнцем каждую секунду за счет излучения. Оценить время, за которое масса солнца уменьшится на 1%.

5.19. Два абсолютно черных тела имеют одинаковую температуру 1000 К. Площадь поверхности одного тела в два раза меньше площади поверхности второго тела. Первое тело охлаждают на 500К. На сколько нужно нагреть второе тело, чтобы общая энергетическая светимость тел не изменилась?

5.20. Медный шарик радиусом 0,6 см поместили в откачанный сосуд, температура стенок которого поддерживается близкой к абсолютному нулю. Начальная температура шарика 300К. Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти, через какое время его температура уменьшится в 2 раза. Что быстрее остынет медный шарик или медный кубик, имеющий тот же объем? Почему и во сколько раз?

5.21. В черный тонкостенный металлический сосуд, имеющий форму куба, налита вода массой 1 кг, нагретая до $T_1 = 323$ К. Определить время остывания сосуда до $T_2 = 283$ К, если он помещен в черную полость, температура стенок которой поддерживается около $T = 0^\circ$ К, а вода заполняет весь объем сосуда.

Занятие 6

КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

Вопросы

1. В чем состоит фотоэлектрический эффект? Сформулируйте законы фотоэффекта. Какие противоречия были обнаружены при классическом описании фотоэффекта?
2. Запишите формулу Эйнштейна для фотоэффекта. Что называется работой выхода $A_{\text{вых}}$ и от чего она зависит? Чем определяется максимальная кинетическая энергия электрона, покинувшего вещество?
3. При каком условии возникает фотоэффект? Определите красную границу λ_0 фотоэффекта в случае меди, если для нее работа выхода равна 4,4 эВ?
4. Какие процессы называются: однофотонными; многофотонными? Запишите выражения для массы, импульса и энергии фотона через величины h , λ и c , где c – скорость света в вакууме.
5. Какова природа давления света с точки зрения квантовых представлений? Как объясняется возникновение светового давления волновой теорией?
6. Покажите, что в эффекте Комптона проявляются корпускулярные свойства света. Каковы особенности этого эффекта? Что называется комптоновской длиной волны? Почему эффект Комптона не наблюдается при рассеянии видимого света?

Примеры решения задач

Пример 1

При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длинами волн $\lambda_1 = 0,35$ мкм и $\lambda_2 = 0,54$ мкм обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в 2 раза. Найти работу выхода электронов с поверхности этого металла.

Дано: $\lambda_1 = 0,35$ мкм
 $\lambda_2 = 0,54$ мкм
 $\eta = \frac{U_1}{U_2} = 2$

Найти: A - ?

Решение

Запишем уравнение Эйнштейна для обеих длин волн (частот):

$$\hbar\omega_1 = A + mU_1^2 / 2, \quad (1)$$

$$\hbar\omega_2 = A + mU_2^2 / 2, \quad (2)$$

где U_1 и U_2 – максимальные скорости фотоэлектронов, причем $U_1 > U_2$,

поскольку в данном случае $\omega_1 > \omega_2$.

Из уравнений (1) и (2) составим соотношение

$$\frac{\hbar\omega_1 - A}{\hbar\omega_2 - A} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = \eta^2, \quad (3)$$

где $\eta = \frac{U_1}{U_2} = 2$ по условию.

Из этого соотношения (3), учитывая, что $\omega = 2\pi c/\lambda$, находим:

$$A = \frac{2\pi\hbar c\eta^2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2(\eta^2 - 1)}. \quad (4)$$

$$A = 1,9 \text{ эВ.}$$

Пример 2

При некоторой задерживающей разности потенциалов фототок с поверхности лития, освещаемого электромагнитным излучением с длиной волны λ_0 , прекращается. Изменив длину волны излучения в $n = 1,5$ раза, установим, что для прекращения фототока необходимо увеличить задерживающую разность потенциалов в $\eta = 2,0$ раза. Работа выхода электрона с поверхности лития $A = 2,39$ эВ. Вычислить λ_0 .

Дано: $A = 2,39$ эВ

$\eta = 2,0$

$n = 1,5$

Найти: λ_0 - ?

Решение

Запишем уравнение Эйнштейна

$$\hbar\omega = A + K_{\text{макс.}}, \quad (1)$$

где $K_{\text{макс.}}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

Учитывая, что

$$K_{\text{макс.}} = eV_3, \quad (2)$$

где V_3 – задерживающая разность потенциалов, перепишем уравнение (1) в виде системы:

$$eV_3 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_0} - A, \quad (3)$$

$$\eta eV_3 = \frac{2\pi\hbar c}{\frac{\lambda_0}{n}} - A. \quad (4)$$

Обозначим через

$$\alpha = 2\pi\hbar c$$

и перепишем систему (3) – (4):

$$\ell V_3 = \frac{\alpha}{\lambda_0} - A,$$

$$\eta \ell V_3 = \frac{\frac{\alpha}{\lambda_0} - A}{n}$$

Разделим второе уравнение на первое, получим

$$\eta = \frac{\alpha n - A \lambda_0}{\alpha - A \lambda_0},$$

откуда

$$\lambda_0 = \frac{\alpha(\eta - n)}{A(\eta - 1)} = \frac{2\pi\hbar c(\eta - n)}{A(\eta - 1)}.$$

$$\lambda_0 = 0,26 \text{ мкм.}$$

Пример 3

При последовательном освещении катода светом с частотой $\nu = 1,0 \cdot 10^{15}$ Гц и $\nu' = 1,4 \cdot 10^{15}$ Гц показания вольтметра, при которых фототок прекращался, оказались $U_1 = -0,40$ В и $U'_1 = -2,0$ В. Найти постоянную Планка.

Дано: $\nu = 1,0 \cdot 10^{15}$ Гц
 $\nu' = 1,4 \cdot 10^{15}$ Гц
 $U_1 = -0,40$ В
 $U'_1 = -2,0$ В

Найти: $\hbar$ - ?

Решение

Если катод и анод изготовлены из разных материалов, то при определении задерживающей разности потенциалов начинает играть заметную роль контактная разность потенциалов. Если она есть и тормозит вылетающие из катода фотоэлектроны, то приходится прикладывать внешнее напряжение U (измеряемое вольтметром). И если это напряжение таково, что компенсирует тормозящую контактную разность потенциалов, то начало горизонтального участка (тока насыщения) – точка 2 на рис. 6.1. – сдвинется вправо, в сторону положительных значений показаний вольтметра U .

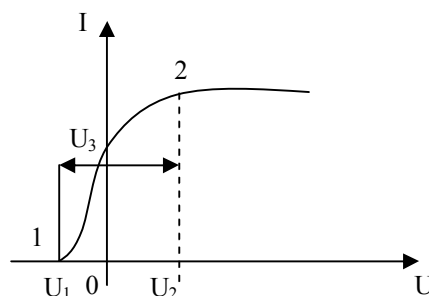


Рис. 6.1.

Таким образом, задерживающая разность потенциалов U_3 ,будет равна (по

модулю) сумме $U_3 = U_2 + |U_1| = U_2 - U_1$, (1)

где $U_1 < 0$.

Итак, определив U_3 , находим максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов – $K_{\max}$:

$$K_{\max} = eU_3 = e(U_2 - U_1). \quad (2)$$

Воспользовавшись уравнением Эйнштейна и формулой (2), запишем

$$2\pi\hbar\nu' = A + e(U_2 - U'_1), \quad (3)$$

$$2\pi\hbar\nu = A + e(U_2 - U_1), \quad (4)$$

где U'_1 и $U_1 < 0$. Чтобы избавиться от неизвестных A и U_2 , вычтем (4) из (3):

$$2\pi\hbar(\nu' - \nu) = e(U_1 - U'_1).$$

Отсюда

$$\hbar = \frac{e}{2\pi} \cdot \frac{(U_1 - U'_1)}{(\nu' - \nu)} = 1,019 \cdot 10^{-34} \text{ (Дж} \cdot \text{с)}.$$

Пример 4

В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном были рассеян ан угол $\theta = 90^\circ$. Энергия рассеянного фотона $\varepsilon_2 = 0,4 \text{ МэВ}$.

Определить энергию фотона ε_1 до рассеяния.

Дано: $\varepsilon_2 = 0,4 \text{ МэВ}$
 $\theta = 90^\circ$

Найти: $\varepsilon_1 - ?$

Решение

Для определения энергии первичного фотона воспользуемся формулой Комптона:

$$\Delta\lambda = 2 \frac{h}{m_0 c} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (1)$$

где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_0$ -- изменение длины волны фотона в результате рассеяния на свободном электроне; h – постоянная Планка; m_0 – масса покоя электрона; c – скорость света в вакууме; θ - угол рассеяния фотона.

Преобразуем формулу (1), выразив длины волн λ_1 и λ_2 через энергии ε_1 и ε_2 соответствующих фотонов, воспользовавшись формулой

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

$$\frac{hc}{\varepsilon_2} - \frac{hc}{\varepsilon_1} = \frac{hc}{m_0 c^2} 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \quad (2)$$

Сократив на hc , выразим из этой формулы искомую энергию:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 m_0 c^2}{m_0 c^2 - \varepsilon_2 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \frac{\varepsilon_2 E_0}{E_0 - 2\varepsilon_2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}, \quad (3)$$

где $E_0 = m_0 c^2$ – энергия покоя электрона.

Вычисления по формуле (3) удобнее вести во внесистемных единицах. Так как для электрона $E_0 = 0,511 \text{ МэВ}$, то
 $E_1 = 1,85 \text{ МэВ}$.

Пример 5

Пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 663 \text{ нм}$ падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток излучения $\Phi_e = 0,6 \text{ Вт}$. Определить:

- 1) силу давления F , испытываемую этой поверхностью;
- 2) число фотонов n_1 , ежесекундно подающих на поверхность.

Дано: $\lambda = 663 \text{ нм}$
 $\Phi_e = 0,6 \text{ Вт}$

Найти: 1) F - ?
 2) n_1 - ?

Решение

1) Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления ρ на площадь S поверхности:

$$F = \rho S. \quad (1)$$

Световое давление может быть найдено по формуле

$$\rho = E_e (\rho + 1) / c, \quad (2)$$

где E_e – энергетическая освещенность (облученность); c – скорость света в вакууме; ρ - коэффициент отражения.

Подставляя правую часть выражения (2) в формулу (1), получаем

$$F = E_e S (\rho + 1) / c. \quad (3)$$

Поскольку $E_e S$ представляет собой поток излучения Φ_e , то

$$F = \Phi_e (\rho + 1) / c. \quad (4)$$

Произведем вычисления, учитывая, что для зеркальной поверхности $\rho = 1$:

$$F = \frac{0,6}{3 \cdot 10^8} (1 + 1) \text{ Н} = 4 \text{ нН}.$$

2) Произведение энергии ε одного фотона на число фотонов n_1 , ежесекундно падающих на поверхность, равно мощности излучения, т.е. потоку излучения:

$$\Phi_e = \varepsilon n_1,$$

а так как энергия фотона $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$

то $\Phi_e = \frac{hc n_1}{\lambda},$

откуда

$$n_1 = \frac{\Phi_e \lambda}{(hc)}. \quad (5)$$

$$n_1 = 2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. При этом длина волны излучения, рассеянного под углами 60° и 120° градусов отличаются друг от друга в два раза. Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, найти длину волны падающего излучения.

6.2. Фотон с энергией 1 МэВ рассеялся на свободном покоившемся электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на 25%.

6.3. Стенка колбы у электролампы накаливания представляет собой посеребренную сферу радиусом 4 см. Лампа потребляет мощность 50 Вт, 90% которых затрачивается на излучение. Во сколько раз давление газа в колбе (1,5 мкПа) меньше светового давления?

6.4. Небольшое идеально отражающее зеркальце массы 10 мг подвешено на невесомой нити длины 10 см. Найти угол, на который отклонится нить, если по нормали к зеркальцу в горизонтальном направлении произвести выстрел коротким импульсом лазерного излучения с энергией 13 Дж?

6.5. Найти массу фотона, импульс которого равен импульсу молекулы водорода при температуре $t = 20^\circ\text{C}$. Скорость молекулы считать равной средней квадратичной скорости.

6.6. На поверхность площадью $S = 100 \text{ см}^2$ ежеминутно падает $W = 63$ Дж световой энергии. Найти световое давление в случаях, когда поверхность: а) полностью отражает лучи; б) полностью поглощает падающие на нее лучи.

6.7. Лазер излучил в импульсе длительностью $\tau = 0,13$ мс пучок света энергией $W = 10$ Дж. Найти среднее давление такого светового импульса, если его сфокусировать в пятнышко диаметром $d = 10$ мкм на поверхность, перпендикулярную к пучку, с коэффициентом отражения $\rho = 0,5$.

6.8. Короткий импульс света энергией $W = 7,5$ Дж в виде узкого почти параллельного пучка падает на зеркальную пластинку с коэффициентом отражения $\rho = 0,6$. Угол падения $\theta = 30^\circ$. Определить с помощью корпускулярных представлений импульс, переданный пластинке.

6.9. Плоская световая волна интенсивностью $I = 0,20 \text{ Вт/см}^2$ падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0,8$. Угол

падения $\theta = 45^\circ$. Определить с помощью корпускулярных представлений нормальное давление, которое оказывает свет на эту поверхность.

6.10. Шарику радиусом R сообщили малый заряд q . Как изменится красная граница ν_0 фотоэффекта?

6.11. Найти задерживающий потенциал для фотоэлектронов, испускаемых при освещении калия светом с длиной волны $\lambda = 330$ нм.

6.12. При фотоэффекте с платиновой поверхности задерживающий потенциал оказался равным $U_3 = 0,8$ В. Найти длину волны применяемого облучения.

6.13. Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda = 307$ нм, максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона $W_{\max}^k = 1$ эВ?

6.14. Для прекращения фотоэффекта, вызванного облучением ультрафиолетовым светом платиновой пластинки, нужно приложить задерживающую разность потенциалов $U_3 = 3,7$ В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающую разность потенциалов придется увеличить до 6 В. Определить работу выхода электронов с поверхности этой пластинки.

6.15. Красной границе фотоэффекта для алюминия соответствует длина волны $\lambda_0 = 332$ нм. Найти:

а) работу выхода электрона для этого металла;

б) длину световой волны λ , при которой задерживающий потенциал $U_3 = 1$ В.

6.16. До какого максимального потенциала зарядится удаленный от других тел медный шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 140$ нм?

6.17. Фототок, возникающий в цепи фотоэлемента при освещении поверхности вольфрама (работа захода 4,5 эВ) светом длиной волны $\lambda = 253,7$ нм прекращается при включении задерживающей разности потенциалов $U_3 = 1$ В. Определить величину и направление внешней контактной разности потенциалов.

6.18. Вакуумный фотоэлемент состоит из двух пластин - медной (работа выхода 4,47 эВ) и платиновой (работа выхода 6,3 эВ), замкнутых снаружи накоротко. При освещении одной из них (какой?) вылетающие фотоэлектроны попадают в тормозящее электрическое поле, обусловленное

внешней контактной разностью потенциалов. Определить предельную длину волны света, при которой фотоэлектроны начинают достигать противоположной пластины.

6.19. Квант длиной волны $\lambda = 34,2$ нм вырывает с чистой поверхности металлического лития (работа выхода $2,39$ эВ) фотоэлектрон, который описывает в магнитном поле с индукцией $B = 1,5$ мТл окружность радиусом $R = 1,2$ см. Определить энергию E , затраченную на освобождение данного электрона из атома лития.

6.20. Какая доля энергии фотона при эффекте Комптона приходится на электрон отдачи, если фотон претерпел рассеяние на угол $\theta = 180^\circ$? Энергия ϵ фотона до рассеяния равна $0,255$ МэВ.

6.21. Вольфрамовый шарик радиусом 10 см, находящийся в вакууме облучают светом с длиной волны $\lambda = 2000 \text{ \AA}$. Определить установившейся заряд шарика, если работа выхода для вольфрама $A = 4,5$ эВ.

Ответы

Занятие 1

1. 2α .
2. На 66° и 24° к поверхности стола.
3. 25 см.
4. Зеркало вогнутое. Изображение действительное, обратное, уменьшенное.
5. Зеркало вогнутое. Изображение мнимое, прямое, увеличенное.
6. $0,373$ м.
7. 8 см.
8. 10 см.
- 9.
10. Изображение получается на расстояниях $(2n-1)F/n$ от каждого из зеркал (где n - любое целое положительное число).
11. $2,6$ см.
12. $1,5$.
13. $\alpha = 56^\circ$; $x = 2,3$ см.
14. 60 см.
15. $1,7^\circ$.
16. 100 см.
17. $10,8$ см.
18. $(1/3)d = F$.
19. $F_3 = 2/3 F$.
20. $x = 3/2 F$.

Занятие 2

2.1 0,1 мм.

$$2.2 \quad r_{\text{свет}} = \sqrt{\frac{(2k-1)R_1 R_2}{2n(R_1 - R_2)}}; \quad r_{\text{темн.}} = \sqrt{\frac{k\lambda R_1 R_2}{n(R_1 - R_2)}}.$$

2.3 $r = 1,5 \text{ мм.}$

2.4 5.

$$2.5 \quad l = \frac{\lambda}{2n\alpha}.$$

2.6 $n - 1 = k\lambda / (2l)$, откуда $n = 1,00038$.

2.7 3,8 мм.

2.8 4,26 мкм.

2.9 115 нм.

2.10 500 м^{-1} .

2.11 3,56 мм.

2.12 Ширина полос уменьшится в 1,33 раза.

2.13 Светлые полукольца над флинтром сойдутся с темными полукольцами над кроном и наоборот.

2.14 1,56.

2.15 106 нм.

2.16 $k = 5$, $k + 1 = 6$, $\lambda = 500 \text{ нм.}$

2.17 $d = 0,14(1 + 2k) \text{ мкм}$, где $k = 0, 1, 2 \dots$

2.18 150 нм.

2.19 524 нм.

2.20 490 нм.

Занятие 3

3.1 $I_1 = I_0$.

3.2 0,8 м.

3.3 $m = 3$; $d = 2,8 \text{ мм.}$

3.4 5 см.

3.5 1 см.

3.6 $k_{\text{max}} = 3$; $\gamma_{\text{max}} = 92^{\circ} 87'$.

3.7 $k = 3, 6, 9 \dots$

3.8 0,63 мм.

3.9 30° .

3.10 0,51 м.

3.11 Два максимума (4-ый и 8-ой).

3.12 46° .

3.13 $\alpha = 8^{\circ}$; $\Delta\gamma = 7,3^{\circ}$.

$$3.14 \quad \lambda = \frac{(r_2^2 - r_1^2)(a + b)}{2ab} = 600 \text{ нм}.$$

$$3.15 \quad N = 3.$$

$$3.16 \quad \Delta x = 3,3 \text{ мкм}.$$

$$3.17 \quad D_4 = 2,2 \text{ усл. мин/нм}.$$

$$3.18 \quad m = 4; \Delta \lambda_{\min} = 7 \text{ нм}.$$

$$3.19 \quad \Delta b = 18 \text{ см}.$$

$$3.20 \quad \Delta x = 6,5 \text{ мм}.$$

Занятие 4

$$4.1. \quad \rho = 0,8.$$

$$4.2. \quad \lambda = 4d\Delta n/(2k + 1); 0,58; 0,55 \text{ и } 0,57 \text{ мкм соответственно при } k = 15, 16, 17.$$

$$4.3. \quad n = 1,73.$$

$$4.4. \quad \alpha = 45^\circ.$$

$$4.5. \quad \rho = 0,6.$$

$$4.6. \quad 1) d = 4,5 \text{ мм}; 2) \ell = 0,338 \text{ м}.$$

$$4.7. \quad 0,33.$$

$$4.8. \quad \text{а) } i = 66^\circ 56'; \text{ б) } n = 1,63.$$

$$4.9. \quad d = \frac{m + \frac{1}{4}\lambda}{n_e - n_0} = 0,605 \text{ мм, где } m = 0, 1, 2, \dots$$

$$4.10. \quad \lambda_0 = 3,55 \cdot 10^{-7} \text{ м}; \lambda_e = 3,95 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

$$4.11. \quad \varphi = 5^\circ 17'.$$

$$4.12. \quad P_1 = P_3 = 1; P_2 = 0,087; P_4 = 0,17.$$

$$4.13. \quad \rho = 4 \cdot 10^{-2}.$$

$$4.14. \quad \rho = 5,06\%; P_1 = 83\%; P_2 = 4,42\%.$$

$$4.15. \quad \rho = 0,5 \sin^2 26^\circ = 0,1.$$

$$4.16. \quad U = 194 \text{ Мм/с}.$$

$$4.17. \quad I = 0,72 I_0.$$

$$4.18. \quad \rho = 0,038.$$

$$4.19. \quad n = 60 \text{ раз}.$$

$$4.20. \quad n_0 - n_e = 1,3 \cdot 10^{-7}.$$

Занятие 5

- 5.1. $T = 1000 \text{ К}$.
- 5.2. $T = 1000 \text{ К}$.
- 5.3. $W = 0,46 \text{ Дж}$.
- 5.4. $P = 40 \text{ Вт}$.
- 5.5. $n = 0,3$.
- 5.6. $T_1 = 3,62 \text{ кК}$; $T_2 = 7,24 \text{ кК}$.
- 5.7. Уменьшится в 2 раза.
- 5.8. $W = 23,4 \cdot 10^{27} \text{ Дж}$.
- 5.9. $I = 8,27 \text{ А}$.
- 5.10. $P/S = 3,1 \text{ кВт/м}^2$.
- 5.11. $T = 5,8 \cdot 10^3 \text{ К}$; $W = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Дж}$.
- 5.12. а) $\lambda_m = 1 \text{ мкм}$; б) $\lambda_m = 500 \text{ нм}$; в) $\lambda_m \approx 300 \text{ нм}$.
- 5.13. $T_2 = 290 \text{ К}$.
- 5.14. $I = 1,37 \text{ кВт/м}^2$.
- 5.15. $I_m = 595 \text{ Вт/м}^2$.
- 5.16. $T \approx 6000 \text{ К}$.
- 5.17. $T = 2700 \text{ К}$.
- 5.18. $\Delta m/\Delta t = 5 \cdot 10^9 \text{ кг/с}$; $\tau = 10^{11} \text{ лет}$.
- 5.19. $\Delta T_2 = 100 \text{ К}$.
- 5.20. $\tau \approx 2,9 \text{ часа}$; в 1,4 раза.
- 5.21. $\tau \approx 1,64 \text{ часа}$.

Занятие 6

- 6.1. $\lambda = 1,2 \text{ нм}$.
- 6.2. $T = 0,2 \cdot 10^6 \text{ эВ}$.
- 6.3. В 10 раз.
- 6.4. $\alpha \approx 0,5^\circ$.
- 6.5. $m = 2,1 \cdot 10^{-32} \text{ кг}$.

6.6. а) $p = 0,7 \text{ мкПа}$;

б) $p = 0,35 \text{ мкПа}$.

6.7. $\langle p \rangle = 5,07 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

6.8. $\Delta p = 35 \text{ нН} \cdot \text{с}$.

6.9. $p = 0,6 \text{ нН/см}^2$.

6.10. $\Delta v = eq/4\pi\epsilon\epsilon_0 Rh$.

6.11. $V_3 = 1,75 \text{ В}$.

6.12. $\lambda = 204 \text{ нм}$.

6.13. $A/(h\nu) = 0,8$.

6.14. $A = 4 \text{ эВ}$.

6.15. а) $A = 3,7 \text{ эВ}$;

б) $\lambda = 260 \text{ нм}$.

6.16. $\varphi_{\max} = 4,4 \text{ В}$.

6.17. $U_K = hc/(\lambda \ell) - A/\ell - V_3 = -0,6 \text{ В}$.

6.18. $\lambda = 197 \text{ нм}$.

6.19. $E = hc/\lambda - A - \frac{(\ell RB)^2}{2m} = 5,4 \text{ эВ}$.

6.20. $0,5$.

6.21. $q = 0,056 \text{ ед. СГСЕ}$.

Учебное издание

ОПТИКА. Задания по физике для самостоятельной работы

Методические указания

Составители: Куликова Зинаида Ахатовна,
Гусева Светлана Ивановна, Китаева Елена Алексеевна

Самарский государственный аэрокосмический
университет им. Академика С.П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)**

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ
(задания для самостоятельной работы)

САМАРА 2013

УДК 53(075)
Э 455

Рецензент: канд. физ.-мат наук, доц. С м и р н о в а Н . П .

Электричество и магнетизм: Задания для самостоятельной работы / В. Н. Кнестяпин, И. В. Овчинникова, С. И. Гусева, И. П. Завершинский. 2-е изд. перераб. и доп. - Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2013. – 50 с.: ил.

Работа содержит индивидуальные задания для самостоятельной работы студентов на практических занятиях по разделу «Электричество и магнетизм». Предлагаемые задания апробированы на кафедре физики СГАУ и, по мнению авторов, способствуют рациональной организации самостоятельной работы студентов и активизации их индивидуальной учебной деятельности при изучении курса общей физики.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

Введение

Нередко встречается ситуация, когда студент хорошо знает обычную теорию курса физики, но не умеет решать физические задачи. Прочитав условия некоторых задач, они даже не знают, с чего надо начинать решение. Оказывается для того, чтобы успешно решать задачи, знание теории необходимо, но не достаточно. Необходимо (кроме конкретных знаний) овладеть так называемыми общими и частными методами решения, лежащие в основе многих задач.

Назначение данного методического пособия научить студентов решать задачи.

И. Ньютон писал, что примеры при обучении полезнее правил. Поэтому самый эффективный способ научить решать задачи - это просто показывать, как они решаются. Рассматривая решения предложенных задач, студента знакомят с общими способами (методами) решения произвольной задачи по физике, как способами самостоятельной деятельности того, кто эту задачу решает. При этом система общих методов должна обладать следующими свойствами:

а) она должна быть универсальной, т.е. применяться к решению любой задачи из курса общей физики,

б) она должна охватывать все этапы решения произвольной задачи.

Система общих методов - это система разумных советов, а не инструкция.

В качестве примера показан расчет электрических полей в случаях, когда поле создано системой точечных и неточечных зарядов на телах правильной геометрической формы, полей, созданных произвольным распределением зарядов.

С помощью теоремы Гаусса рассчитывают поля неточечных зарядов, где, используя принцип суперпозиции, определяют суммарное поле.

При произвольном распределении зарядов используют метод дифференцирования и интегрирования (метод ДИ).

Поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью. На этом свойстве проводников основан метод зеркальных изображений. Этот метод, предложенный студентам, позволяет по другому рассчитывать электрические поля, определять емкость системы проводников.

Для расчета характеристик магнитного поля произвольной системы токов и движущихся электрических зарядов показано применение закона Био-Савара-Лапласа в дифференциальной форме, принципа суперпозиции и метода ДИ. В некоторых задачах использована теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$.

После изучения готовых решений студенту предлагается попробовать свои силы. Чтобы научиться решать задачи по физике, необходимо решать задачи самостоятельно. Поэтому во второй части пособия предложены задачи для самостоятельной работы.

Задачи различаются по степени сложности, содержанию, способу выражения условия, способу решения и т.д., чтобы в наибольшей мере обеспечить дифференцированное обучение в соответствии с уровнем подготовленности студентов.

Примеры решения задач

Пример 1. На расстоянии $a = 0,2$ м от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд $q = 4,8 \cdot 10^{-7}$ Кл (рис.1). Определить напряженность поля $\vec{E}$ в точке, отстоящей от заряда на расстоянии $r_1 = a$.

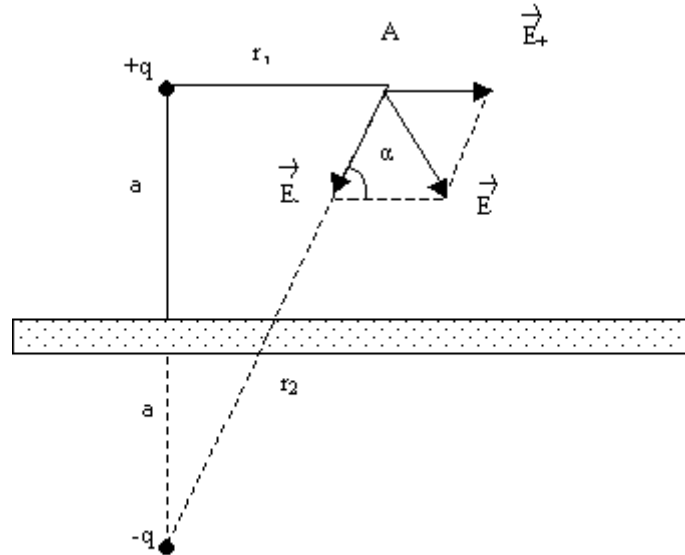


Рис. 1.

Решение

Поле точечного заряда вызывает перераспределение свободных зарядов в проводнике, в результате чего с другой стороны проводящей плоскости образуется симметричное поле с обратным направлением силовых линий (зеркальное отражение). Можно считать, что точечный заряд q и проводящая пластинка образуют поле двух симметричных, равных и противоположных по знаку зарядов. Для определения напряженности поля двух точечных зарядов используем принцип суперпозиции: $\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$,

где

$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} \cdot \vec{r}_1, \quad (1)$$

$$\vec{E}_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} \cdot \vec{r}_2. \quad (2)$$

$$|\vec{E}_A| = \sqrt{E_+^2 + E_-^2 - 2E_+ E_- \cos \alpha}, \quad (3)$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (4)$$

Индуцированный заряд q_- от точки А расположен на расстоянии

$$r_2 = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}. \quad (5)$$

Решив совместно уравнения (1) - (5), получим:

$$|\vec{E}_A| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{25} - \frac{2}{5\sqrt{5}}}};$$

$$|\vec{E}_A| = 10^5 \text{ В/м}.$$

Пример 2. Две концентрические разноименно заряженные сферы с радиусами $R_1 = 0,05 \text{ м}$ и $R_2 = 0,1 \text{ м}$ заряжены с поверхностной плотностью зарядов $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$ и $\sigma_2 = -8 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2$ (рис. 2).

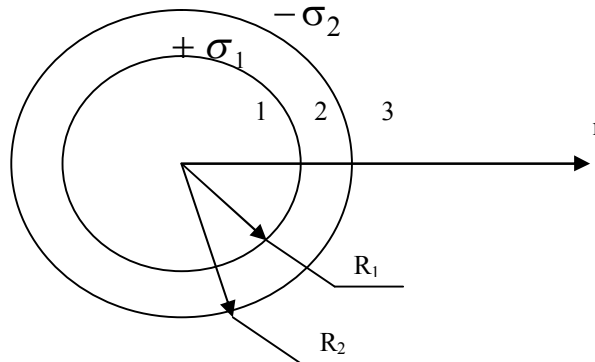


Рис. 2.

Определить напряженность E и потенциал φ в точках, расположенных на расстояниях $r_1 = 0,02 \text{ м}$, $r_2 = 0,08 \text{ м}$ и $r_3 = 0,15 \text{ м}$ от центра сфер.

Решение: Для определения напряженности E и потенциала φ рассмотрим три области электрического поля (рис. 2).

Область 1:

$$E_1 = 0, \quad (1)$$

так как внутри сфер заряд отсутствует.

Потенциал в этой области, используя принцип суперпозиции, равен:

$$\varphi_1 = \varphi_1^1 + \varphi_2^1,$$

где φ_1^1 - потенциал, создаваемый первой сферой,

φ_2^1 - потенциал, создаваемый второй сферой.

$$\varphi_1^1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \Rightarrow q_1 = \sigma_1 4\pi R_1^2, \quad (2)$$

$$\varphi_2^1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Rightarrow q_2 = \sigma_2 4\pi R_2^2 \quad (\varphi_2^1 < 0), \quad (3)$$

$$\varphi_1 = \varphi_1^1 - \varphi_2^1 = \frac{\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Область 2:

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon_0 r_2^2}. \quad (5)$$

Поле вне заряженной сферы неоднородно, обладает радиальной симметрией. Оно совпадает с полем точечного заряда ($q = \sigma 4\pi R^2$), как бы помещенного в центре сферы.

Потенциал:

$$\varphi_2 = \varphi_1^n + \varphi_2^n = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\varepsilon_o r_2} - \frac{\sigma_2 R_2}{\varepsilon_o} . \quad (6)$$

Область 3:

$$E_3 = \frac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_o r_3^2} = \frac{\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_o r_3^2} , \quad (7)$$

так как в этой области действуют обе сферы.

Потенциал:

$$\varphi_3 = \frac{q_1 - q_2}{4\pi\varepsilon_o r_3} = \frac{\sigma_1 R_1^2 - \sigma_2 R_2^2}{\varepsilon_o r_3} . \quad (8)$$

Ответы:

$$E_1 = 0; \quad E_2 = 5,6 \cdot 10^3 \text{ В/м}; \quad E_3 = -3,7 \cdot 10^2 \text{ В/м};$$

$$\varphi_1 = -79 \text{ В}; \quad \varphi_2 = -83 \text{ В}; \quad \varphi_3 = -57 \text{ В}.$$

Пример 3. Заряд $q = 6,28 \cdot 10^{-8}$ Кл равномерно распределен по кольцу радиусом $R = 12$ см. Найти напряженность и потенциал электрического поля кольца в точке М, лежащей на перпендикуляре к плоскости кольца (рис 3).

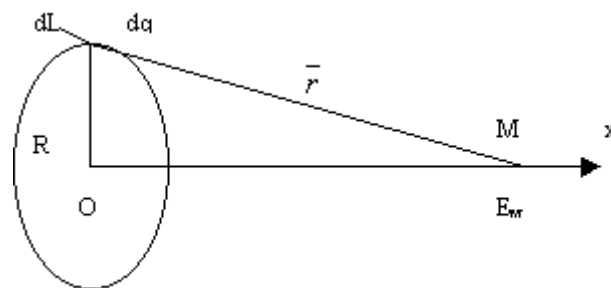


рис.3

Расстояние ОМ от центра кольца равно 16 см. Определить максимальный потенциал и работу сил поля по перемещению заряда $q_1 = 8 \cdot 10^{-19}$ Кл из точки М в центр кольца (рис. 3).

Решение: Для решения этой задачи используем принцип суперпозиции. Разделим кольцо на бесконечное количество участков dL , содержащих элементарный точечный заряд dq :

$$dq = \tau dL; \quad q = \int dq = \int \frac{q}{2\pi R} dL . \quad (1)$$

Потенциал точечного заряда в воздухе ($\varepsilon = 1$):

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o r} . \quad (2)$$

Согласно принципа суперпозиции получаем:

$$\varphi_M = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^{2\pi R} \frac{dq}{r} = \frac{q \cdot 2\pi R}{2\pi R \cdot 4\pi\varepsilon_o \sqrt{R^2 + OM^2}} . \quad (3)$$

$$\varphi_M = 2825 \text{ В}.$$

Проекцию вектора напряженности на ось ОХ найдем из соотношения:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} ,$$

а составляющие E_y и E_z равны нулю, исходя из условий симметрии.

$$\text{Тогда } E_M = E_x = -\frac{d}{dx} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}} \right) = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (4)$$

$$E_M = 1012 \text{ В/м}.$$

Из условия $d\varphi/dx = 0$ найдем координату точки, где потенциал имеет максимальное значение:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} = 0.$$

Потенциал имеет максимальное значение в центре кольца ($x=0$):

$$\varphi_{\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (5)$$

$$\varphi_{\max} = 4,71 \cdot 10^3 \text{ В}.$$

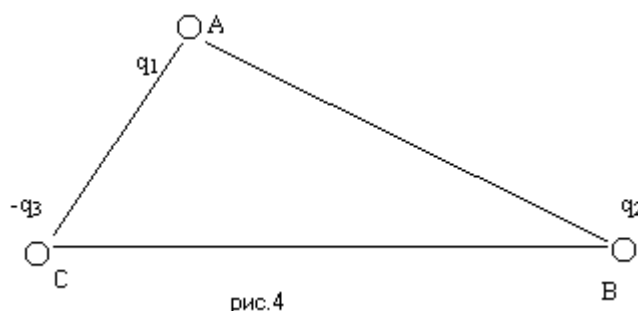
Работу по перемещению заряда q_1 из точки М в точку О найдем по формуле:

$$A = q_1(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + OM^2}} - \frac{1}{R} \right) \quad (6)$$

$$A = -15,23 \text{ Дж}.$$

Минус означает, что работу совершают внешние силы.

Пример 4. Определить работу, которую нужно совершить, чтобы развести заряды, создающие поле, на такое расстояние, когда силы взаимодействия между зарядами можно будет признать равными нулю. Заряды $q_1=1,5 \cdot 10^{-6}$ Кл, $q_2=2,5 \cdot 10^{-6}$ Кл, $q_3=-3 \cdot 10^{-6}$ Кл, находятся в вершинах треугольника со сторонами АВ= 30 см, ВС = 50 см, АС=60см (рис.4).



Решение. Заряд, находящийся в поле нескольких зарядов, обладает потенциальной энергией, определяемой соотношением $W_i = 1/2 q_i \sum \varphi_{ni}$.

Чтобы развести эти заряды, т.е. удалить на расстояние, где их потенциальная энергия взаимодействия обратится в нуль, надо совершить работу по преодолению сил взаимодействия, которая должна быть равна изменению энергии зарядов от начального значения до нуля.

Найдем энергию каждого из взаимодействующих зарядов. Потенциал поля точечных зарядов согласно принципу суперпозиции равен алгебраической сумме потенциалов, созданных двумя другими зарядами.

Определим энергию зарядов:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_2}{AB} + \frac{q_3}{AC} \right),$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{AB} + \frac{q_3}{BC} \right), \quad W_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{AC} + \frac{q_2}{BC} \right).$$

Энергию заданной системы зарядов, которую надо преодолеть, найдем из соотношения:

$$W_{\text{сист}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(2 \cdot \frac{q_1 q_2}{AB} + 2 \cdot \frac{q_1 q_3}{AC} + 2 \cdot \frac{q_2 q_3}{BC} \right).$$

$$A = W_{\text{нелд}} - W_0, \quad A = -0,09 \text{ Дж}.$$

Пример 5. Дан металлический шар радиуса R_1 , несущий заряд q . Этот шар окружен диэлектрической оболочкой радиуса R_2 , диэлектрическая проницаемость оболочки ϵ . Найти $D(r)$, $E(r)$, $\phi(r)$ и построить графики этих зависимостей. Найти энергию электрического поля, локализованную в поле диэлектрика.

Решение. Для расчета напряженности электростатического поля в диэлектрике следует пользоваться обобщенной теоремой Гаусса:

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i,$$

где вектор $\vec{D}$ называют вектором электрического смещения (вектор электрической индукции).

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E},$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды.

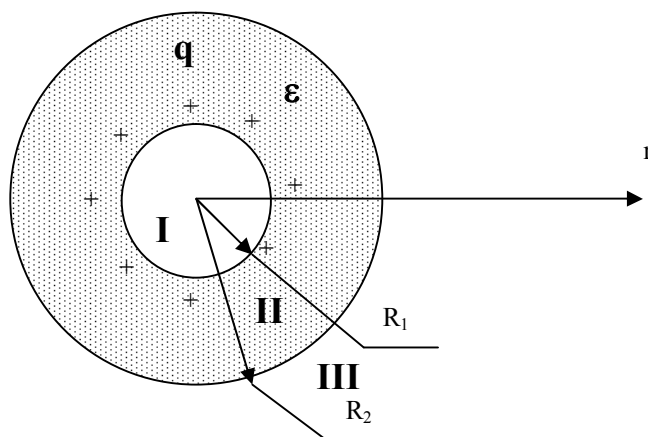


Рис. 5

Рассмотрим три области электрического поля (рис. 5). Шар – проводник, поэтому зарядов внутри металлического проводника нет.

Область 1:

$$r < R_1 \left(\sum_{i=1}^n q_i = 0 \right),$$
$$\oint D_1 dS = 0, D_1 = 0. \quad (1)$$

Область 2:

$$R_1 \leq r \leq R_2,$$
$$\oint D_2 dS = q, D_2 = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

так как внутри диэлектрика есть заряд.

Область 3:

$$R_2 < r < \infty,$$
$$\oint D_3 dS = q, D_3 = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (3)$$

Учитывая связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$, имеем

Область 1: $r < R_1$,

$$E_1 = 0 \quad (4)$$

Область 2: $R_1 \leq r \leq R_2$,

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \quad (5)$$

Область 3: $R_2 < r < \infty$,

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (6)$$

Расчет потенциала начинаем с области 3:

Область 3:

$$\varphi_3 = -\int E_3 dr = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_3.$$

Пусть $r = \infty$, тогда $\varphi_\infty = \varphi_3 = 0$ и $C_3 = 0$.

Поэтому в этой области

$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (7)$$

На границе, когда $r = R_2$, $\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}. \quad (8)$

Область 2:

$$\varphi_2 = -\int E_2 dr = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + C_2$$

Потенциал меняется непрерывно, поэтому при $r = R_2$, $\varphi_2 = \varphi_3$:

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + C_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Найдем постоянную интегрирования C_2 :

$$C_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2}.$$

Окончательно имеем:
$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_o r} + \frac{q}{4\pi\epsilon_o R_2} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_o R_2} . \quad (9)$$

Область 1:

$$\varphi_1 = -\int E_1 dr = 0 + C_1 .$$

При $r=R_1$:

$$\varphi_1 = C_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\epsilon R_1} - \frac{1}{\epsilon R_2} \right) . \quad (10)$$

Графики зависимости $D(r)$, $E(r)$, $\varphi(r)$ приведены на рис. 6.

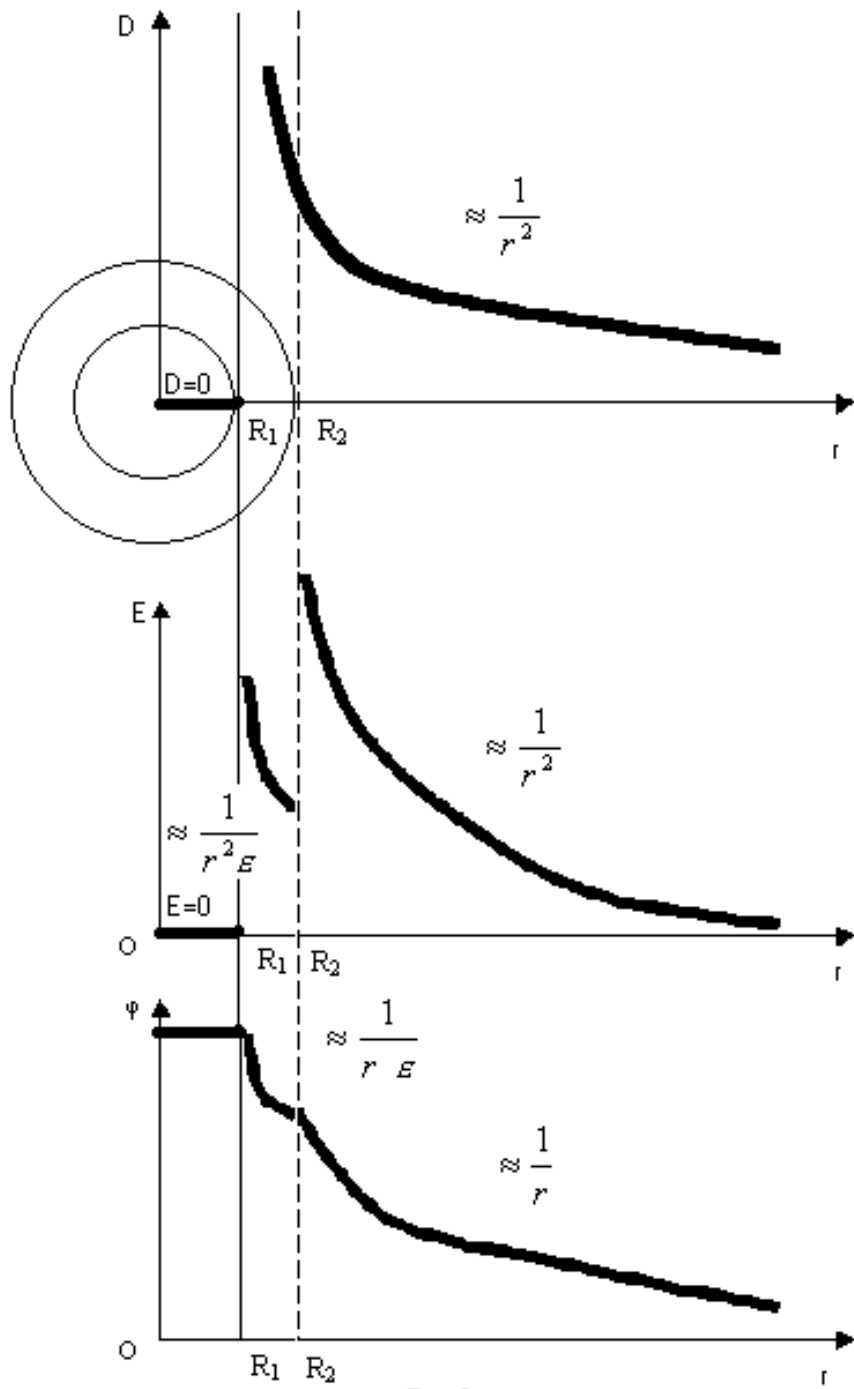


Рис.6

Энергию, локализованную в слое диэлектрика, определим по формуле: $\omega = 1/2 \vec{E} \vec{D}$ или

$$W = \int \omega dV, \quad (11)$$

где $\omega = \frac{1}{2} \cdot E_2 D_2$, $V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$, $dV = 4\pi r^2 dr$.

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_{R_1}^{R_2} E_2 D_2 dV = \frac{1}{2} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} \cdot 4\pi r^2 dr,$$

$$W = \frac{q^2}{8\pi \epsilon \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (12)$$

Пример 6. Проводник бесконечной длины образует петлю радиусом $R=0,2$ м (рис.7). Определить величину и направление вектора индукции магнитного поля в центре петли (в точке O), если по проводнику течет ток $I=15$ А.

Решение. Индукция поля в точке O создается двумя полубесконечными проводниками (1А и 3В) и $\frac{3}{4}$ круга (участок А2В). Определим направление векторов $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ в точке O. Исходя из принципа суперпозиции, имеем:

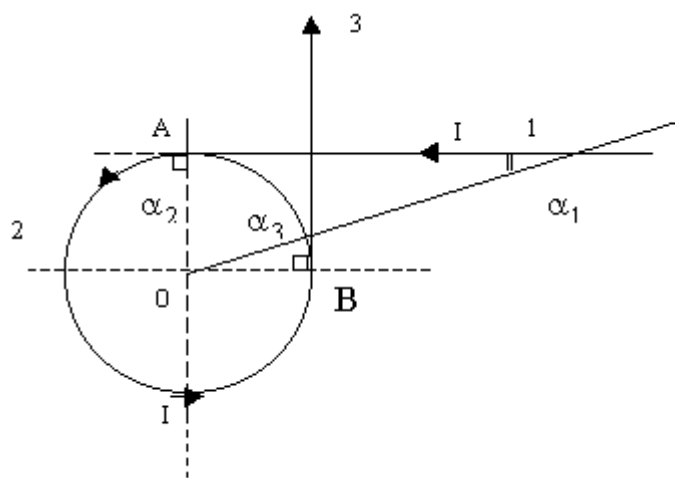


Рис. 7

$$\vec{B}_o = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

По закону Био-Савара-Лапласа

$$B_1 = B_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi R} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \text{ где } \alpha_1 = 0; \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления B_2 используют формулу

$$B_2 = \frac{3}{4} B_{\text{круга}} = \frac{3}{4} \frac{\mu_o I}{2R}.$$

Окончательно

$$B_o = 2B_1 + B_2 = \frac{\mu_o I}{R} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{3}{8} \right).$$

Подставляя данные, имеем:

$$B_o = 5,04 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}.$$

Пример 7. Покоящийся в начальный момент электрон ускоряется электрическим полем $E=\text{const}$. Через 0,01 с электрон влетает в магнитное поле, перпендикулярное

электрическому. Магнитная индукция $B=10^{-5}$ Тл. Во сколько раз нормальное ускорение электрона в этот момент больше его тангенциального ускорения?

Решение. Тангенциальное ускорение a_τ создается силой электрического поля:

$$ma_\tau = eE; \quad a_\tau = \frac{eE}{m}.$$

Нормальное ускорение создается силой Лоренца:

$$ma_n = evB; \quad a_n = \frac{evB}{m}$$

$$\text{Отношение } \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{evBm}{meE} = \frac{vB}{E}$$

$$\text{Учитывая, что } v = a_\tau t = \frac{eE}{m}t, \text{ получаем } \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{eB}{m}t; \quad \frac{a_n}{a_\tau} = 17600$$

Пример 8. Квадратная рамка со стороной $a = 0,2$ м движется с постоянной скоростью вдоль оси ОХ в магнитном поле, индукция которого $\vec{B}\{0, 0, \alpha x\}$, где $\alpha = 10^2$ Тл/м, так, что одна из сторон рамки параллельна ОХ. При какой скорости движения рамки индукционный ток I , возникший в рамке, будет равен 1А, сопротивление рамки $R=10$ Ом (рис. 8).

Решение. Рамка движется равномерно, поэтому $x = vt$. Согласно закону Фарадея,

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ где}$$

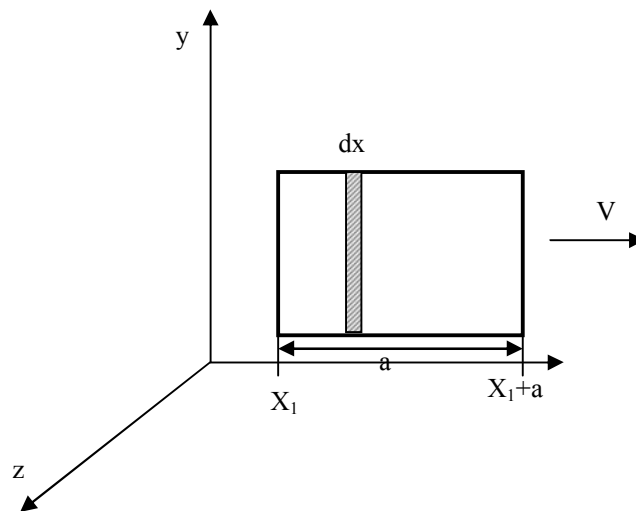


Рис. 8

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_1+a} B(x) dS = \int_{x_1}^{x_1+a} \alpha x a dx = \frac{a\alpha}{2} [(x_1 + a)^2 - x_1^2] = \frac{a^2\alpha}{2} (2vt + a);$$

$$\text{Тогда } |\varepsilon_{\text{эи}}| = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \alpha V a^2; \quad I = \frac{\varepsilon_{\text{эи}}}{R} = \frac{\alpha a^2 V}{R}.$$

Скорость движения рамки $V = \frac{IR}{\alpha a^2}$. После подстановки $V = 0,5$ м/с.

Пример 9. Найти максимальную плотность энергии магнитного поля внутри катушки (без сердечника) идеального контура, если дифференциальное уравнение электромагнитных колебаний в контуре имеет вид:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 10^8 q = 0.$$

Конденсатор емкостью $c = 10^{-6}$ ф был заряжен до разности потенциалов $\Delta\varphi = 100$ В, а начальный ток в контуре был равен нулю. Число витков катушки контура на единицу ее длины $n = \frac{N}{l} = 10^3$ 1/м.

Решение. Плотность энергии магнитного поля $\omega = \frac{1}{2} \mu \mu_o H^2$. Поскольку сердечник отсутствует, то $\mu = 1$. Для длинной катушки $H = In$.

Максимальная плотность энергии определяется максимальным значением напряженности, которая в свою очередь определяется максимальным током ($I_{\max}$). Для идеального контура ток меняется по закону

$$I = q_o \omega_o \cos(\omega_o t + \alpha),$$

где $(q_o \omega_o)$ - амплитуда тока I_o

Максимальный ток $I_{\max} = q_o \omega_o$.

Из уравнения $\frac{d^2 q}{dt^2} + 10^8 q = 0$ следует, что $\omega_o^2 = 10^8 \frac{1}{c^2}$. Учитывая, что $q_o = c \Delta\varphi$ найдем максимальный ток $I_{\max} = c \Delta\varphi \cdot \omega_o$.

Тогда плотность энергии максимального поля: $\omega = \frac{1}{2} \mu_o H^2 = \frac{1}{2} \mu_o n^2 c^2 \Delta\varphi^2 \omega_o^2$

Подставляя данные из условия задачи

$$\omega_{\max} = 0,628 \text{ Дж/м}^3.$$

Пример 10. Вычислить поток средней энергии электромагнитного поля в распространяющейся электромагнитной волне в вакууме:

$$E = E_o \sin(\omega t - kx), \quad H = H_o \sin(\omega t - kx).$$

Решение. Вектор Умова-Пойтинга показывает количество энергии, проходящей за единицу времени через единичную поверхность

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}]$$

$$P = EH = E_o H_o \sin^2(\omega t - kx)$$

Среднее значение вектора $\langle p \rangle$ есть среднее значение энергии электромагнитного поля распространяющейся волны. Известно, что среднее значение $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$,

следовательно,

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} E_o H_o$$

В вакууме $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, используя связь

$$E_o \sqrt{\varepsilon \varepsilon_o} = H_o \sqrt{\mu \mu_o}.$$

Получим $H_o = \sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}} E_o$.

Таким образом, поток средней энергии:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_o^2.$$

Занятие 1

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Вопросы

1. Дайте определение электрического заряда.
2. В каких единицах измеряется электрический заряд в системах СИ и СГС? Связь между этими единицами.
3. Чему равен элементарный электрический заряд? Его масса?
4. В переводе с греческого языка на русский "электрон" -это...
5. Сформулируйте закон сохранения заряда.
6. Электрический заряд - величина инвариантная. Что это означает? Электрический заряд - аддитивен. Объясните.
7. Какое свойство электрического заряда называется квантованностью? Какое ещё оно имеет название?
8. Сформулируйте и запишите закон Кулона,
9. Что является источником электрического поля?
10. Дайте определение напряженности электрического поля. Единица измерения напряженности, понятие силовых линий.
11. Напишите формулу для напряженности E точечного заряда q . Изобразите график зависимости $E(r)$, где r – расстояние от точечного заряда до данной точки поля [для заряда(+) и (-)].
12. Каково содержание принципа суперпозиции электрических полей?
13. Найти суммарный заряд q атомных ядер молекул воды (H_2O) содержащихся в 1 см^3 .
14. Во сколько раз сила электрического отталкивания двух электронов, расположенных на расстоянии r друг от друга, больше силы их гравитационного притяжения? Чему должна быть равна масса электрона m , чтобы уравновесить эти силы?

Задачи для самостоятельного решения.

- 1.1 Два одинаковых маленьких шарика, имеющих заряды $6,7$ и $-4,7$ нКл приведены в соприкосновение и вновь раздвинуты на 2 см. Найти силу взаимодействия между ними.
- 1.2 В вершинах квадрата со стороной 5 см находятся положительные одинаковые заряды по 2 нКл. Определить напряженность электростатического поля: а) в центре квадрата; б) в середине одной из сторон квадрата.
- 1.3 Найти напряженность E электростатического поля в центре окружности радиусом R , по которой распределен заряд с линейной плотностью $\tau = \tau_0 \sin \alpha$, где τ_0 – константа.

- 1.4 Одинаковые металлические шарики, заряженные одноименными зарядами q и $4q$, находятся на расстоянии r друг от друга. Шарики привели в соприкосновение. На какое расстояние x надо их развести, чтобы сила взаимодействия осталась прежней.
- 1.5 Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно разноименными зарядами с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 1 \text{ нКл/м}^2$ и $\sigma_2 = -2 \text{ нКл/м}^2$. Определить напряженность поля: а) между плоскостями; б) за пределами плоскостей. Построить график изменения напряженности поля вдоль линии перпендикулярной плоскостям.
- 1.6 Два неподвижных одноименных заряда $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ каждый находятся на расстоянии $L = 3,9 \cdot 10^{-11} \text{ м}$. Вдоль перпендикуляра, проходящего через середину отрезка, соединяющего эти заряды, движется электрон. Найти максимальную силу взаимодействия F_{max} электрона и этих зарядов.
- 1.7 Вокруг точечного заряда $1,7 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$ равномерно движется по окружности под действием электростатического притяжения маленький отрицательно заряженный шарик. Чему равно отношение заряда шарика к его массе, если радиус окружности равен 2 см , а угловая скорость вращения 5 рад/с ?
- 1.8 Электрон влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Найти напряженность поля конденсатора, если электрон вылетает из него под углом 30° к пластинам. Длина пластин 20 см . Масса и заряд электрона известны.
- 1.9 Тонкое кольцо радиусом 5 см равномерно заряжено с линейной плотностью зарядов $\tau = 75 \text{ мКл/м}$. Найти силу F , действующую на точечный заряд $q = 4 \text{ нКл}$, находящийся в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 7 \text{ см}$.
- 1.10 Заряды 40 и -10 нКл расположены на расстоянии 10 см друг от друга. Какой надо взять третий заряд и где его следует поместить, чтобы система находилась в равновесии.
- 1.11 Кольцо радиусом 5 см из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью $\tau = 14 \text{ нКл/м}$. Определить напряженность поля на оси, проходящей через центр кольца, в точке A , удаленной на расстояние $a = 10 \text{ см}$ от центра кольца.
- 1.12 Два одинаковых шарика радиусом $r = 1,5 \text{ см}$ и массой $m = 16 \text{ г}$ каждый, подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины $l = 19 \text{ см}$, шарикам сообщены одинаковые заряды. Найти заряд q каждого из шариков, если они разошлись так, что нити образуют угол $\alpha = 60^\circ$.
- 1.13 В точках A и B , расстояние между которыми 8 см , находятся два заряда по 30 нКл . Найти силу, действующую на заряд 1 нКл , находящийся на оси симметрии на расстоянии 3 см от середины отрезка AB . Какая сила будет действовать на этот заряд, если его поместить на середину отрезка AB ?
- 1.14 Между двумя точечными зарядами 4 нКл и -5 нКл расстояние равно 60 см . Найти напряженность поля в средней точке между зарядами.
- 1.15 По четверти кольца радиусом $R = 6,1 \text{ см}$ равномерно распределен положительный заряд с линейной плотностью зарядов $\tau = 64 \text{ нКл/м}$. Найти силу F , действующую на заряд $q = 12 \text{ нКл}$, расположенный в центре.
- 1.16 Шарик массой m с зарядом q может вращаться в вертикальной плоскости на нити длиной L . В центре вращения находится второй шарик с зарядом, равным по величине и по знаку заряду вращающегося шарика. Какую минимальную

горизонтальную скорость надо сообщить шарiku в нижнем положении, чтобы он мог сделать полный оборот?

- 1.17 Два заряда, один из которых по модулю в 4 раза больше другого, расположены на расстоянии a друг от друга. В какой точке поля напряженность поля равна нулю, если заряды одноименные?
- 1.18 Полусфера равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = 67 \text{ нКл/м}^2$. Найти напряженность поля E в центре полусферы.
- 1.19 В трех вершинах квадрата со стороной 40 см находятся положительные одинаковые заряды по 5 нКл каждый. Найти силу, действующую на заряд -3 нКл , находящийся в четвертой вершине.
- 1.20 В однородном электростатическом поле с напряженностью E , силовые линии которого направлены вертикально вверх, может вращаться в вертикальной плоскости шарик массой m с зарядом q на нити длиной L . Какую горизонтальную скорость надо сообщить шарiku в верхнем положении, чтобы натяжение нити в нижнем положении в 10 раз превосходило вес шарика.
- 1.21 По окружности радиусом R распределен заряд с линейной плотностью $\tau = \tau_0 \cos \alpha$, где τ_0 – константа. Найти напряженность E электрического поля в центре этой окружности.
- 1.22 Два шарика одинакового радиуса и веса подвешены на нитях так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд нужно сообщить шарикам, чтобы натяжение нитей стало равным 0,098 Н? Расстояние от точки подвеса до центра шарика равно 10 см. Сила тяжести каждого шарика равна 0,05Н.
- 1.23 Какой должна быть напряженность электрического поля в вакууме, чтобы находящийся в нем электрон получил ускорение $2 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2$? Через сколько времени электрон приобретает скорость $5 \cdot 10^{12} \text{ м/с}$? Начальная скорость электрона равна нулю.
- 1.24 По тонкому диску радиусом R равномерно распределен заряд с поверхностно плотностью σ . Найти напряженность поля E на оси диска как функцию расстояния x до плоскости диска. Используйте формулу для напряженности E на оси кольца.
- 1.25 Шарик массой 3г, имеющий заряд 20нКл, подвешен в воздухе на тонкой изолирующей нити. Определить натяжение нити, если внизу на расстоянии 10см расположен заряд -150 нКл .
- 1.26 В однородном поле между двумя пластинами конденсатора находится капелька массой 6 нг. Заряд капельки $4,6 \cdot 10^{-16} \text{ Кл}$. Напряженность электрического поля 30000Н/Кл.
Расстояние между пластинами 2см. Найти время, в течение которого капелька достигнет одной из пластин, если в начале она находилась на равном расстоянии от них.
- 1.27 Расстояние между двумя длинными тонкими проводами, расположенными параллельно друг другу, $L = 16 \text{ см}$. Провода равномерно заряжены разноименными зарядами с одинаковой по величине линейной плотностью заряда $\tau = 150 \text{ мкКл/м}$. Найти силу F , действующую на заряд $q = 4,5 \text{ нКл}$, расположенный в точке, удаленной на расстояние $r = 10 \text{ см}$ как от первого, так и от второго провода.

- 1.28 Два шарика массой $m=0,1\text{г}$ каждый, подвешены на нитях длиной $L=20\text{см}$ каждая. Получив одинаковые заряды, шарики разошлись так, что образовали между собой угол $\alpha=60^\circ$. Найти заряд каждого шарика.
- 1.29 Между зарядами $+6,4 \cdot 10^{-6}$ и $-6,4 \cdot 10^{-6}\text{Кл}$ расстояние равно 12см . Найти напряженность поля в точке, удаленной на 8см от обоих зарядов.
- 1.30 Напряженность электрического поля на оси заряженного кольца имеет максимальное значение на расстоянии L_{max} от центра кольца. Во сколько раз n напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии $L=0,5L_{\text{max}}$ от центра кольца, будет меньше максимальной напряженности?

Занятие 2

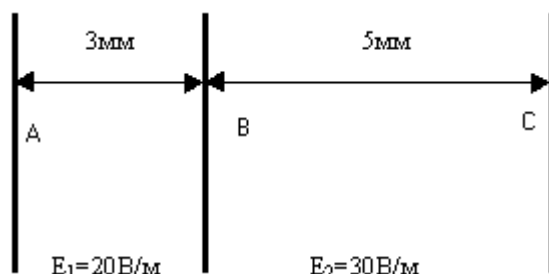
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ.

Вопросы.

1. Поток электрического вектора $\vec{E}$.
2. Теорема Гаусса для электрических полей в вакууме.
3. Поле равномерно заряженной плоскости.
4. Поле равномерно заряженной сферы.
5. Поле равномерно заряженного цилиндра.
6. Поле равномерно заряженного шара.
7. Работа по перемещению заряда в электрическом поле.
8. Потенциал поля точечного заряда.
9. Связь между напряженностью и потенциалом.
10. Что называется эквипотенциальной поверхностью? Покажите, что линии напряженности ортогональны эквипотенциальным поверхностям.
11. Докажите, что в заряженном проводнике, некомпенсированные заряды располагаются только на его поверхности.
12. Докажите, что в электростатическом поле циркуляция вектора напряженности по произвольному замкнутому контуру равна нулю.
13. Напишите условие потенциальности электростатического поля в дифференциальной форме.
14. Запишите теорему Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме. Сформулируйте теорему.
15. Потенциал некоторого поля имеет вид $\varphi = a(x^2+y^2)-bz^2$, где a и b положительные константы. Найти вектор напряженности поля $\vec{E}$ и его модуль.
16. Чему равен поток вектора напряженности через замкнутую поверхность, если алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности равна нулю, но есть поле, созданное внешними зарядами?

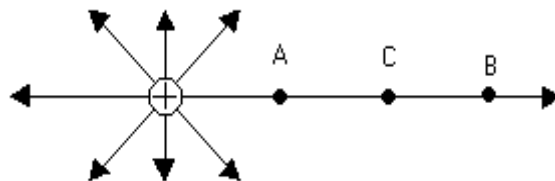
Задачи для самостоятельного решения.

- 2.1 По тонкому кольцу радиуса 8 см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 6 \text{ нКл/м}$. Найти потенциал ϕ в точке, лежащей на оси кольца на расстоянии 6 см от плоскости кольца.
- 2.2 Какая совершается работа при перенесении точечного заряда в 20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 1 см от поверхности шара радиусом 1 см с поверхностной плотностью заряда 1 нКл/см^2 ?



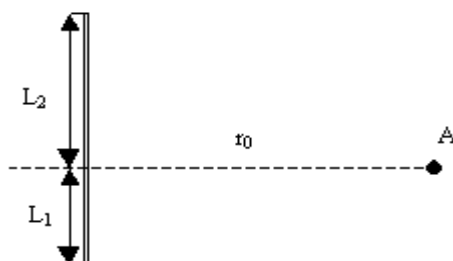
- 2.3 Расстояние между плоскостями А, В и С, а также напряженности указаны на рисунке. Потенциал плоскости А равен 0. Найти потенциалы плоскостей В и С.
- 2.4 Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора равна 90 В. Площадь каждой пластины 60 см^2 и заряд $q = 1 \text{ нКл}$. На каком расстоянии друг от друга находятся пластины?
- 2.5 Шарик массой 1 г и зарядом 10^{-8} Кл перемещается из точки А, потенциал которой равен 600 В, в точку В, потенциал которой равен 0. Чему была равна его скорость в точке А, если в точке В она стала равной 20 см/с?
- 2.6 Заряд $q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$ равномерно распределен по объему шара радиусом $R = 40 \text{ мм}$. Найти потенциал ϕ_0 в центре шара.
- 2.7 Материальная точка с зарядом $q = 0,67 \text{ нКл}$ двигаясь в ускоряющем поле, приобретает кинетическую энергию $W = 10^7 \text{ эВ}$. Найти разность потенциалов между начальной и конечной точками траектории частицы в электрическом поле, если начальная кинетическая энергия равна нулю.
- 2.8 Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии $x_1 = 1 \text{ см}$ от нити до точки $x_2 = 4 \text{ см}$, α -частица изменила свою скорость от $2 \cdot 10^5$ до $3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Найти линейную плотность заряда на нити.
- 2.9 Расстояние между пластинами плоского конденсатора равна 1 см. От одной из пластин одновременно начинают двигаться протон и α -частица. ($m_\alpha = 4m_p$ и $q_\alpha = 2q_p$). Какое расстояние пройдет α -частица за то время, в течение которого протон пройдет путь от одной пластины до другой?
- 2.10 На каких расстояниях от точечного заряда нужно взять точки А, В и С, чтобы потенциалы поля в этих точках относились как 1:2:3?
- 2.11 Прямой бесконечно длинный цилиндр радиуса $R_0 = 10 \text{ см}$ равномерно заряжен электричеством с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-12} \text{ Кл/м}^2$. Цилиндр является источником электронов. Вектор скорости вылетающего электрона

- перпендикулярен поверхности цилиндра. Какова должна быть скорость электронов, чтобы они могли удалиться от оси на расстояние, большее $r=10^3\text{м}$?
- 2.12 Найти силу отталкивания (на единицу длины) F_1 двух одноименно заряженных бесконечно длинных параллельных нитей с одинаковой линейной плотностью заряда $\tau=3\text{мкКл/м}$, находящихся в вакууме на расстоянии $b=2\text{см}$ друг от друга. Найти также работу (на единицу длины) A_1 , которую нужно совершить, чтобы сблизить эти нити до расстояния $a=1\text{см}$.
- 2.13 Электрон влетает со скоростью V_0 в пространство между пластинами плоского конденсатора под углом α к поверхности пластин через отверстие в нижней пластине. Расстояние между пластинами d , разность потенциалов U . На сколько приблизится электрон к верхней пластине? Силой тяжести пренебречь.
- 2.14 Две концентрические проводящие сферы радиусами 12см и 18см заряжены одноименно: заряд внутренней $q_1=1\text{мкКл}$, внешней $q_2=2\text{мкКл}$. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между сферами.
- 2.15 Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечной нитью с линейной плотностью заряда в 2нКл/см . Какую скорость получит электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния в 1см до расстояния $0,5\text{см}$ от нити?
- 2.16 Две удаленные от остальных тел одинаковые металлические пластины площадью $S=50\text{см}^2$ каждая, находящиеся на расстоянии $d=1\text{мм}$ друг от друга, заряжены: одна зарядом $q_1=20\text{мкКл}$, другая – $q_2=-40\text{мкКл}$. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между ними.
- 2.17 Два точечных заряда по $6,6\text{нКл}$ и $1,32\cdot 10^{-7}\text{Кл}$ находятся в керосине на расстоянии 40см . Какую работу надо совершить, чтобы сблизить их до расстояния 25см .
- 2.18 Шар радиусом R заряжен однородно с объемной плотностью ρ . Найти потенциал φ для точек внутри шара как функцию расстояния r от центра шара.
- 2.19 Потенциалы точек A и B равны 30В и 20В соответственно. Найти потенциал точки C , лежащей посередине между точками A и B .

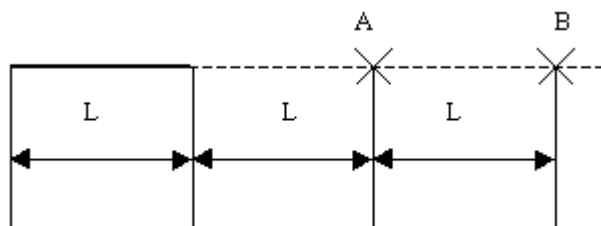


- 2.20 Поле создано равномерно заряженным проводящим шаром радиусом $R=10\text{см}$. Определить работу сил поля по перемещению заряда $q_0=1\text{мкКл}$ из точки, расположенной на расстоянии $2R$ от центра шара, в точку, расположенную на расстоянии $2R$ от поверхности шара. Потенциал шара 1кВ .
- 2.21 Заряды распределены равномерно на поверхности двух концентрических сфер 10 и 15см , поверхностная плотность зарядов на обеих сферах одинакова и равна $2,5\text{нКл/м}^2$. Найти: разность потенциалов $\Delta\varphi$; потенциал наружной сферы φ_2 .

- 2.22 По находящейся в вакууме круглой очень тонкой пластинке радиуса $R=120\text{мм}$ равномерно распределен заряд $q=1,8\text{мкКл}$. Приняв ось пластины за ось X вычислить φ в точке $x=80\text{мм}$.
- 2.23 В поле точечного заряда точка A находится вдвое дальше от заряда, чем точка B . Как соотносятся между собой напряженности и потенциалы поля в этих точках?
- 2.24 Положительные заряды $3,7 \cdot 10^{-5}\text{ Кл}$ и $6,2 \cdot 10^{-5}\text{ Кл}$ находятся в вакууме на расстоянии $2,7\text{м}$ друг от друга. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния 45см .
- 2.25 Неподвижно закрепленный шарик заряжен положительно и находится над шариком, заряженным отрицательно. Заряды шариков по модулю одинаковы, масса каждого шарика равна $0,01\text{г}$. Радиус шарика 1мм . Расстояние между центрами шариков равно 20мм . Какой должна быть разность потенциалов, чтобы верхний шарик мог поднять нижний?
- 2.26 Найти потенциал в точке A , удаленной на расстояние r_0 от заряженной нити длиной (L_1+L_2) . Линейная плотность зарядов τ .



- 2.27 Найти работу, которую нужно совершить, чтобы перенести точечный заряд 42нКл из точки, находящейся на расстоянии $a=1\text{м}$, в точку, находящуюся на расстоянии $b=1,5\text{см}$ от поверхности шара радиусом $2,3\text{см}$ с поверхностной плотностью заряда $\sigma=4,3 \cdot 10^{-11}\text{ Кл/м}^2$
- 2.28 Бесконечно длинная нить заряжена равномерно с линейной плотностью заряда $\tau=6,3 \cdot 10^{-7}\text{ Кл/м}$. Найти работу сил поля по перемещению точечного заряда $q_0=2,1\text{нКл}$ с расстояния $a=2,4\text{см}$ до расстояния $b=4,8\text{см}$ от нити.
- 2.29 На поверхности шара радиусом 2см равномерно распределен положительный заряд 10^{-10} Кл . Электрон, находящийся очень далеко от шара, имеет скорость $V_0=0$. С какой скоростью V подойдет он к шару?
- 2.30 На отрезке тонкого прямого проводника равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau=2,5\text{нКл/м}$. Найти разность потенциалов точек A и B .



Занятие 3

ПРОВОДНИКИ И ДИЭЛЕКТРИКИ

Вопросы

1. Поляризация диэлектриков. Поляризованность. Поверхностная и объемная плотность связанных зарядов.
2. В чем состоит различие в поляризации диэлектриков с полярными и неполярными молекулами.
3. Что называется электрическим диполем, его плечом L , его моментом $\vec{P}$? Напишите формулу для напряженности поля диполя в общем виде.
4. Электрическое смещение. Теорема Гаусса для диэлектриков.
5. Зачем вводится вектор электрического смещения $\vec{D}$? Каков физический смысл диэлектрической проницаемости?
6. Граничное условие для касательной составляющей напряженности.
7. Граничное условие для нормальной составляющей электрического смещения.
8. Получите закон преломления линий электрического смещения.
9. Емкость проводника. Единицы.
10. Каким должен быть радиус шара, чтобы его емкость (в вакууме) равнялась 1Ф? Сравните этот радиус с радиусом Земли.
11. Конденсаторы. Соединение конденсаторов.
12. Энергия системы зарядов, конденсатора, проводника.
13. Плотность энергии электрического поля.

Задачи для самостоятельного решения.

- 3.1 Емкость плоского конденсатора $C=1,5\text{мкФ}$. Расстояние между пластинами $d=5\text{мм}$. Какова будет емкость конденсатора, если на нижнюю пластину положить лист эбонита $d_1=3\text{мм}$?
- 3.2 Сплошной парафиновый шар радиусом $R=10\text{см}$ заряжен равномерно по объему с объемной плотностью заряда $\rho=10\text{нКл/м}^3$. Определить энергию W_1 электрического поля, сосредоточенную в самом шаре и энергию W_2 вне его.
- 3.3 Заряженный шар А радиусом $R_1=2\text{см}$ приводится в соприкосновение с незаряженным шаром В, радиус которого $R_2=3\text{см}$. После того как шары разъединили, энергия шара В оказалась равной $W_B=0,4\text{Дж}$. Какой заряд q_1 был на шаре А до их соприкосновения?
- 3.4 Два шарика радиусы которых отличается в $n=5$ раз, заряжены одинаковыми зарядами. Во сколько раз изменится сила взаимодействия между ними если их соединить проволокой?

- 3.5 Плоскому воздушному конденсатору сообщили заряд $q=10^{-7}$ Кл. Площадь обкладок $62,2\text{см}^2$. Расстояние между обкладками 1мм. Как изменится напряжение между обкладками если:
- 1) раздвинуть обкладки на 3мм;
 - 2) заполнить пространство между обкладками слюдой ($\epsilon=7$)?
- 3.6 Эбонитовый толстостенный полый шар несет равномерно распределенный по объему заряд с плотностью $\rho=2\text{мкКл/м}^3$. Внутренний радиус шара равен $R_1=3\text{см}$, наружный $R_2=6\text{см}$. Определить потенциал ϕ шара на наружной поверхности, на внутренней и в центре шара ($\epsilon=3$)?
- 3.7 Плоский воздушный конденсатор имеет емкость C . Определить емкость того же конденсатора, когда он наполовину погружен в трансформаторное масло ($\epsilon=5$) так, что его пластины перпендикулярны к поверхности масла.
- 3.8 Шар, погруженный в керосин, имеет потенциал $\phi=4500\text{В}$ и поверхностную плотность заряда $\sigma=1,13\text{нКл/см}^2$. Найти радиус R , заряд q , емкость C и энергию шара W .
- 3.9 Сплошной парафиновый шар радиусом $R=10\text{см}$ равномерно заряжен с объемной плотностью заряда $\rho=1\text{мкКл/м}^3$. Определить потенциал ϕ электрического поля в центре шара, на его поверхности. Построить график зависимости $\phi(r)$.
- 3.10 Наэлектризованный мыльный пузырь раздувается настолько, что его радиус R делается вдвое больше, заряд на пузыре при этом не меняется. Как изменится энергия шара (во сколько раз)? Помогает или препятствует присутствию заряда раздуванию пузыря?
- 3.11 Конденсатор емкостью $C_1=100$ пф заряжен до разности потенциалов $U_0=100$ В. После отключения батареи конденсатор параллельно соединяют с другим. Найти емкость второго конденсатора C_2 , если конечное напряжение $U_k=30$ В. Какое количество энергии потеряно и что с ней произошло?
- 3.12 Положительный заряд q равномерно распределен по объему шара радиуса R . Найти E , D и ϕ в точках, расположенных внутри шара. Диэлектрическая проницаемость шара и окружающей среды ϵ .
- 3.13 Плоский конденсатор имеет в качестве изолирующего слоя стеклянную пластинку толщиной 2мм и площадью 300см^2 . Конденсатор заряжается до разности потенциалов $U=300\text{В}$, после чего отключается от источника напряжения. Определить механическую работу A , которую нужно произвести, чтобы вынуть стеклянную пластину из конденсатора.
- 3.14 Шарики, заряженные одинаковым количеством электричества, имеют потенциалы 40В и 60В. Каким будет потенциал шаров, если их соединят проволокой?
- 3.15 Стеклянный ($\epsilon=7$) толстостенный полый шар равномерно заряжен по объему с плотностью $\rho=1,5\text{мкКл/м}^3$. Внутренний радиус шара $R_1=2\text{см}$, наружный $R_2=6\text{см}$. Найти распределение потенциала в стекле, а также вычислить потенциалы ϕ наружной, внутренней поверхностей и центра шара.
- 3.16 Конденсатор неизвестной емкости с напряжением на обкладках 1кВ соединили параллельно с другим конденсатором емкостью 2мкФ, напряжение на обкладках которого равно 0,4кВ. Какова емкость первого конденсатора, если после соединения напряжение стало равным 570В? Определить общий заряд.

- 3.17 Воздушный конденсатор заряжается до некоторого потенциала и в заряженном состоянии заливается керосином. Отчего энергия конденсатора изменяется (уменьшается или увеличивается) в несколько раз? Во сколько раз? Куда «исчезает» энергия?
- 3.18 Эбонитовый шар равномерно заряжен по объему. Во сколько раз энергия поля вне шара превосходит энергию поля, сосредоточенную в шаре?
- 3.19 Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора на 0,4мм. Площадь каждой пластины равна $2\pi \cdot 10^4 \text{ мм}^2$, заряд составляет 200нКл.
- 3.20 Конденсатор емкостью 6мкФ и напряжением на обкладках 0,4кВ соединили параллельно с незаряженным конденсатором емкостью 10мкФ. Какая разность потенциалов $\Delta\varphi$ установилась на обкладках обоих конденсаторов? Как разделится заряд?
- 3.21 Имеются две концентрические металлические сферы радиусами 3см и 6см. Пространство между сферами заполнено парафином. Заряд внутренней сферы $q_1 = -1\text{нКл}$, внешней $q_2 = 2\text{нКл}$. Найти потенциал φ электрического поля на расстояниях: $r_1 = 1\text{см}$, $r_2 = 5\text{см}$, $r_3 = 9\text{см}$ от центра сфер.
- 3.22 Металлический шар радиусом 5см несет заряд 1нКл. Шар окружен слоем эбонита толщиной 2см. Вычислить потенциал φ электрического поля на расстояниях: $r_1 = 3\text{см}$, $r_2 = 6\text{см}$, $r_3 = 9\text{см}$ от центра шара. Построить график зависимости $\varphi(r)$.
- 3.23 Два металлических шара радиусами 2см и 6см соединены проводником, емкостью которого можно пренебречь. Шарам сообщен заряд $q = 1\text{нКл}$. Найти поверхностную плотность σ зарядов на шарах.
- 3.24 Конденсаторы электроемкостями $C_1 = 1\text{мкФ}$, $C_2 = 2\text{мкФ}$, $C_3 = 3\text{мкФ}$ включены в сеть с напряжением $U = 1,1\text{кВ}$. Определить энергию каждого конденсатора, если:
- 1) они включены последовательно,
 - 2) они включены параллельно.
- 3.25 Конденсатор емкостью $C_1 = 0,2\text{мкФ}$ был заряжен до напряжения $U_1 = 320\text{В}$. После того как его соединили параллельно со вторым конденсатором, заряженным до напряжения $U_2 = 450\text{В}$, напряжение на нем изменилось до 400В. Вычислить емкость C_2 второго конденсатора.
- 3.26 Два бесконечных тонкостенных коаксиальных цилиндра радиусов $R_1 = 5\text{см}$ и $R_2 = 10\text{см}$ равномерно заряжены электричеством с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 10\text{нКл/м}^2$ и $\sigma_2 = -3\text{нКл/м}^2$. Пространство между цилиндрами заполнено парафином ($\epsilon = 2$). Определить напряженность E поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 2\text{см}$, $r_2 = 6\text{см}$, $r_3 = 15\text{см}$ от оси цилиндров.
- 3.27 Определить потенциальную энергию системы четырех точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со сторонами 10см. Заряды одинаковы по модулю $q = 10\text{нКл}$, но два из них отрицательны.
- 3.28 Три одинаковых плоских конденсатора соединили последовательно. Емкость такой батареи конденсаторов $C = 89\text{нФ}$. Площадь каждой пластины 100см^2 , а диэлектрик стекло. Какова толщина стекла?

- 3.29 Пучок электронов, движущихся со скоростью V , попадает на незаряженный металлический шар радиусом R . Какое максимальное число электронов накопится на шаре?
- 3.30 Две концентрические металлические сферы радиусов 4см и 10см имеют соответственно заряды $q_1 = -2\text{нКл}$ и $q_2 = 3\text{нКл}$. Пространство между сферами заполнено эбонитом. Определить потенциал φ поля на расстояниях: $r_1 = 2\text{см}$, $r_2 = 6\text{см}$, $r_3 = 20\text{см}$ от центра сфер ($\epsilon = 3$).

Занятие 4

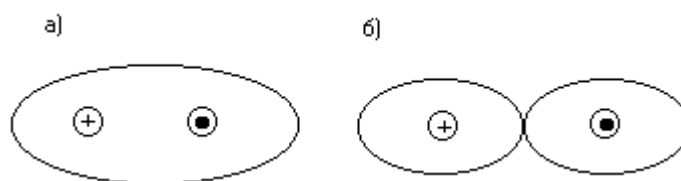
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУМЕ

Вопросы

1. Дайте определение силовой характеристики магнитного поля – магнитной индукции $\vec{B}$.
2. Магнитное поле движущегося точечного заряда q со скоростью $\vec{V}$.
3. Назовите свойства магнитной составляющей полной электромагнитной сила Лоренца.
4. Магнитное поле элемента проводника с током (элементарный закон Био-Савара-Лапласа).
5. Магнитное поле прямолинейного проводника с током.
6. Магнитное поле кругового тока.
7. Магнитное поле соленоида.
8. Закон полного тока. (теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$).
9. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$. Граничное условие для нормальной составляющей индукции магнитного поля.
10. Закон Ампера. Сила Ампера.
11. Магнитный поток.
12. Единицы электромагнитных величин:
силы тока, магнитного потока, индукции.
13. Определите числовое значение магнитной постоянной μ_0 . В каких единицах она измеряется?
14. Используя теорему о циркуляции вектора магнитной индукции для постоянных токов проводимости, рассчитайте магнитные поля:
а) бесконечно длинного соленоида;
б) тороида.
15. Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле.

Задачи для самостоятельного решения.

- 4.1 По двум длинным проводам, расположенным параллельно друг другу на расстоянии $a=5\text{см}$, идут в одном направлении токи $I_1=5\text{А}$ и $I_2=10\text{А}$. Определить напряженность поля в точке отстоящей на $r_1=2\text{см}$ от первого из проводов и на $r_2=2\text{см}$ от второго.
- 4.2 По длинному проводу, согнутому под прямым углом, идет ток $I=20\text{А}$. Определить напряженность магнитного поля в точке, лежащей на продолжении одной из сторон угла на расстоянии $a=2\text{см}$ от вершины.
- 4.3 По прямому проводу радиусом R течет ток, равномерно распределенный по сечению провода с плотностью j . Найти вектор напряженности внутри и вне провода.
- 4.4 Найти циркуляцию вектора магнитной индукции $\vec{B}$ для контуров, изображенных на рисунке, если сила тока в обоих проводниках равна 8А .



- 4.5 Рядом с длинным прямым проводом, по которому течет ток $I_1=30\text{А}$, расположена квадратная рамка с током $I_2=2\text{А}$. Рамка и провод лежат в одной плоскости. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии $b=30\text{мм}$. Сторона рамки $a=20\text{мм}$. Найти работу, которую нужно совершить, чтобы повернуть рамку вокруг ее оси на 180° .
- 4.6 Замкнутый ток течет по проволочному равностороннему треугольнику со стороной $a=1\text{м}$. Сила тока $I=2\text{А}$. Найти напряженность магнитного поля в центре треугольника.
- 4.7 В центре кругового проволочного витка создается магнитное поле H при разности потенциалов $U_{\text{на концах витка}}$. Как нужно изменить приложенную разность потенциалов, чтобы получить такую же напряженность магнитного поля в центре сделанного из той же проволоки витка, радиус которого вдвое больше?
- 4.8 Магнитное поле создается двумя коаксиальными цилиндрическими проводниками радиусами $R_1=0,5\text{ см}$ и $R_2=1\text{ см}$. По внутреннему сплошному цилиндру течет ток, плотность которого $j=2\text{ А/см}^2$, по наружному цилиндру течет ток $I_2=5\text{А}$. Токи текут в одинаковом направлении. Найти индукцию магнитного поля в точках $r_1=0,25\text{см}$, $r_2=0,75\text{см}$, $r_3=1,50\text{см}$. Построить график зависимости $B=B(r)$.
- 4.9 Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии $r_1=10\text{см}$ друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи $I_1=20\text{А}$ и $I_2=30\text{А}$. Какую работу надо совершить (на единицу длины проводника), чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния $r_2=20\text{см}$?
- 4.10 Круговой контур помещен в однородное магнитное поле так, что плоскость контура перпендикулярна силовым линиям поля. Напряженность магнитного поля $H=2000\text{А/м}$. По контуру течет ток $I=0,2\text{А}$. Радиус контура $R=2\text{см}$. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть контур на 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром контура.

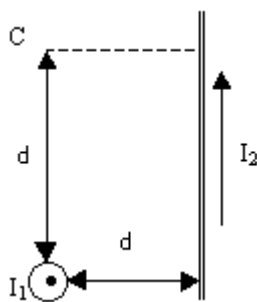
4.11 Два круговых витка радиусом $R=4\text{см}$ каждый расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $d=10\text{см}$ друг от друга. По виткам текут токи $I_1=I_2=2\text{А}$. Найти напряженность магнитного поля на оси витков в точке, находящейся на равном расстоянии от них. Задачу решить, когда:

- 1) токи в витках текут в одном направлении,
- 2) токи в витках текут в противоположных направлениях.

4.12 Прямой провод длиной $l=10\text{см}$, по которому течет ток силой $I=20\text{А}$ находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=0,01\text{Т}$. Каков угол α между направлением поля и направлением тока, если на провод действует сила $F=10\text{мН}$?

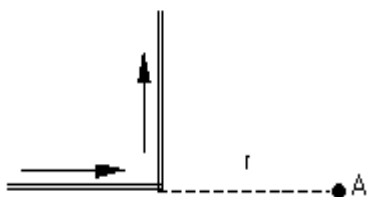
4.13 По двум бесконечно длинным прямым проводникам, скрещенным под прямым углом, текут токи $I_1=30\text{А}$ и $I_2=40\text{А}$. Расстояние между проводниками $d=20\text{см}$.

Определить магнитную индукцию $\vec{B}_C$ в точке C , одинаково удаленной от обоих проводников на расстояние, равное d .



4.14 Проводник в виде тонкого полукольца радиусом $R=10\text{см}$ находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=50\text{мТ}$. По проводнику течет ток $I=10\text{А}$. Найти силу F , действующую на проводник, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции, а проводящие провода находятся вне поля.

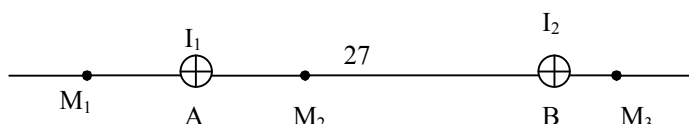
4.15 Бесконечно длинный прямой проводник согнут под прямым углом. По проводнику течет ток $I=20\text{А}$. Какова магнитная индукция в точке A , если $r=5\text{см}$?



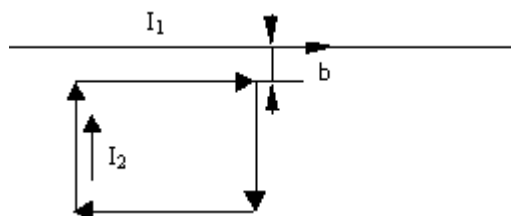
4.16 В одной плоскости с бесконечно длинным прямым

проводом с $I=5\text{А}$ расположена прямоугольная рамка, обтекаемая током $i=1\text{А}$. Найти силы действующие на каждую сторону рамки со стороны поля, создаваемого прямым током, если длинная сторона $b=20\text{см}$ параллельна прямому току и находится от него на расстоянии $x_0=5\text{см}$, меньшая сторона $a=10\text{см}$.

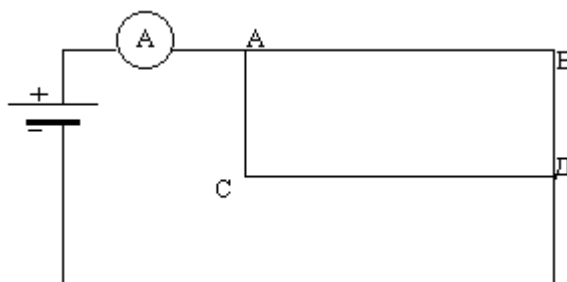
4.17 На рисунке изображены сечения двух прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояние между проводниками $AB=10\text{см}$, токи $I_1=20\text{А}$ и $I_2=30\text{А}$. Найти напряженность H магнитного поля, вызванного токами I_1 и I_2 в точках M_1 , M_2 и M_3 . Расстояния $M_1A=2\text{см}$, $AM_2=4\text{см}$ и $BM_3=3\text{см}$. Токи в проводниках текут в одном направлении.



- 4.18 Прямой длинный проводник с током $I_1 = 5 \cdot 10^4 \text{ А}$ расположен горизонтально в плоскости квадратной рамки со стороной $a = 1,2 \text{ м}$ и массой $0,6 \text{ кг}$. При каком токе I_2 рамка будет висеть неподвижно в воздухе на расстоянии $b = 0,6 \text{ м}$ от прямого проводника.

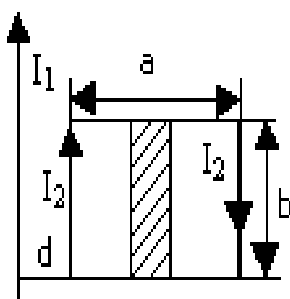


- 4.19 Бесконечно длинный провод образует круговой виток, касательный к проводу. По проводу идет ток $I = 5 \text{ А}$. Найти радиус витка R , если напряженность магнитного поля в центре витка $H_0 = 41 \text{ А/м}$.
- 4.20 К вершинам проволочного прямоугольника $ABCD$ подведены провода от источника тока. Амперметр показывает ток 100 А . Ветвь ABD сделана из проволоки диаметр которой вдвое больше диаметра провода ACD . Сторона $AB = b = 40 \text{ см}$, $AC = a = 30 \text{ см}$. Найти напряженность поля в центре прямоугольника.



- 4.21 По прямому бесконечно длинному проводу проходит ток $I_1 = 3,14 \text{ А}$. Круговой виток радиусом $R = 80 \text{ см}$ расположен так, что его плоскость параллельна прямому проводу, а перпендикуляр, проведенный к нему из центра витка, является нормалью и к плоскости витка. По витку проходит ток $I_2 = 3 \text{ А}$. Расстояние от центра витка до прямого провода $r = 30 \text{ см}$. Найти магнитную индукцию $\vec{B}$ поля в средней точке O перпендикуляра ($r_1 = 15 \text{ см}$).
- 4.22 Из проволоки диаметром $d = 1 \text{ мм}$ надо намотать соленоид, внутри которого должна быть напряженность магнитного поля $H = 24 \text{ кА/м}$. По проволоке можно пропускать предельный ток $I = 6 \text{ А}$. Из какого числа слоев будет состоять обмотка соленоида, если витки наматывать плотно друг к другу? Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

- 4.23 По контуру в виде равностороннего треугольника идет ток $I=40$ А. Сторона треугольника $a=30$ см. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ в точке пересечения высот.
- 4.24 По тонкому проводу, согнутому в виде квадратной рамки со стороной a проходит ток I . Определить магнитную индукцию $\vec{B}_0$ поля в точке, равноудаленной от вершин квадрата на расстояние, равное его стороне.
- 4.23 Определить максимальную индукцию магнитного поля, создаваемого электроном, движущимся прямолинейно со скоростью $v=10$ Мм/с, в точке, отстоящей от траектории на расстоянии $a=1$ нм.
- 4.26 По тонкому проводящему кольцу радиусом $R=100$ мм проходит ток $I=80$ А. Найти магнитную индукцию поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r=200$ мм.
- 4.27 По бесконечному длинному прямому проводу, согнутому под углом $\alpha=120^\circ$, проходит ток $I=50$ А. Найти магнитную индукцию $\vec{B}$ поля в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от его вершины на расстояние $r=50$ мм.
- 4.28 По двум бесконечно длинным проводникам, которые параллельны между собой, проходят токи $I=50$ А и $I=100$ А в противоположных направлениях. Расстояние между проводами $a=20$ см. Найти магнитную индукцию $\vec{B}$ поля в точке, удаленной от первого провода на $r_1=25$ см, а от второго на $r_2=40$ см.
- 4.29 По двум бесконечно длинным параллельным проводам проходят токи в одном направлении, причем $I_1=2I_2$. Расстояние ними равно a . Определить положение точек, в которых индукция магнитного поля равна нулю.
- 4.30 По тонкому проволочному кольцу проходит ток. Не изменяя величины тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция поля в центре контура?
- 4.31 Покоящийся в начальный момент времени электрон ускоряется электрическим полем $E=\text{const}$. Через 0.01 с электрон влетает в магнитное поле, перпендикулярное электрическому. Магнитная индукция $B=10^{-5}$ Тл. Во сколько раз нормальное ускорение электрона в этот момент больше его тангенциального ускорения?
- 4.32 Электрон влетает в однородное магнитное поле, индукция которого $B=10^{-3}$ Тл, со скоростью $v_0=6\cdot 10^6$ м/с. Направление скорости составляет угол $\alpha=30^\circ$ с направлением вектора индукции $\vec{B}$. Определить траекторию движения электрона в магнитном поле.
- 4.33 В одной плоскости с бесконечным прямым током $I_1=3$ А расположена прямоугольная рамка, обтекаемая током $I_2=2$ А. Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть рамку вокруг стороны a на угол 90° . Стороны рамки: $a=20$ см; расстояние $d=5$ см, $b=30$ см.



- 4.34 Виток, по которому течет ток силой $I=20$ А, свободно установится в однородном магнитном поле с индукцией $B=0.016$ Тл. Диаметр витка равен $d=10$ см. Определить работу A , которую нужно совершить, чтобы повернуть виток на угол $\alpha\pi/2$ относительно оси, совпадающей с диаметром. То же, если угол $\alpha=2\pi$.

Занятие 5

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ.

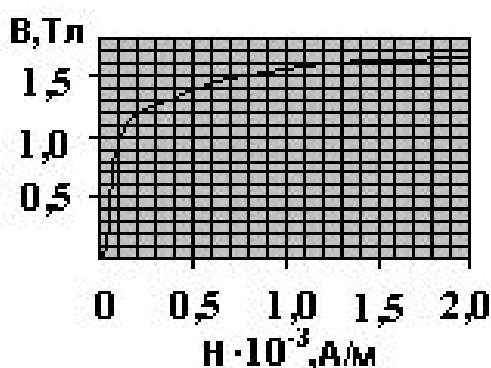
Вопросы.

1. Напишите и объясните выражение для магнитного момента элементарного контура с током.
2. Магнитный момент во внешнем:
 - а) однородном,
 - в) неоднородном магнитном поле.
3. Что называется: макротоком; микротоком?
Понятие вектора намагниченности. Какая существует связь между намагниченностью и линейной плотностью микротоков?
4. Опишите процесс намагничивания вещества (магнетика).
5. Как вводится вспомогательная векторная характеристика магнитного поля— напряженность магнитного поля $\vec{H}$?
6. Теорема Гаусса для индукции результирующего магнитного поля при наличии магнетиков.
7. Закон полного тока для магнитного поля в веществе.
8. В каких единицах СИ измеряются намагниченность и напряженность магнитного поля?
9. Что называется: магнитной восприимчивостью; магнитной проницаемостью? Какая связь между ними?
10. Граничное условие для касательной составляющей напряженности магнитного поля.
11. Каковы гиромагнитные отношения для орбитальных и собственных моментов электрона? Магнетон Бора. Спин электрона.
12. Какие вещества называются диамагнетиками? Как ведут себя диамагнетики во внешнем магнитном поле.
13. Какие вещества называются парамагнетиками? Их поведение в магнитном поле.

14. Какие вещества называются ферромагнетиками? Перечислите характерные особенности ферромагнетиков.
15. Энергия магнитного поля.
16. Плотность энергии магнитного поля.

Задачи для самостоятельного решения.

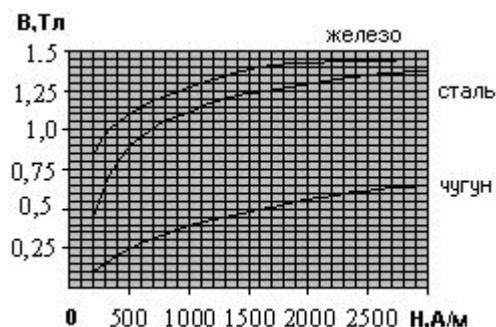
- 5.1 Определите намагниченность пластины при внесении в магнитное поле напряженностью 10000 А/м. Магнитная восприимчивость пластины равна $3 \cdot 10^{-4}$.
- 5.2 Круговой контур с током лежит на плоской границе раздела вакуума и магнетита, проницаемость которого равна μ . Определить индукцию B магнитного поля в произвольной точке на оси контура, если магнитная индукция поля в этой точке при отсутствии магнетита равна B_0 .
- 5.3 Используя кривую, представленную на рисунке 1, определить намагниченность J и магнитную восприимчивость χ железа при напряженности магнитного поля в нем $H = 1700$ А/м.
- 5.4 В соленоид длиной 100 мм, имеющий 300 витков провода, введен железный сердечник. По виткам течет ток $I = 1$ А. Используя кривую, изображенную на рисунке, найти намагниченность J и магнитную проницаемость μ железа внутри соленоида.



- 5.5 Ферромагнитный сердечник введен в соленоид длиной 500 мм, имеющий 200 витков. При токе $I = 0,25$ А в витках магнитная индукция B в сердечнике оказалась равной 1,0 Тл. Найти магнитную проницаемость μ ферромагнетика.
- 5.6 Алюминиевый шарик радиусом 1 мм находится в неоднородном магнитном поле, изменяющемся в направлении оси x , в той точке, где магнитная индукция и градиент поля соответственно равны 5 Тл и 3 Тл/м. Найти силу, действующую на шарик со стороны магнитного поля. Намагничивание шарика считать одинаковым во всех его точках.
- 5.7 В соленоид длиной 500 мм, имеющий 100 витков, введен ферромагнитный сердечник. Площадь поперечного сечения соленоида 8 см^2 . При прохождении по

- виткам соленоида тока $I=0.25\text{ А}$ магнитная проницаемость ферромагнетика $\mu=8000$. Определить магнитный поток Φ через сечение соленоида.
- 5.8 Определить магнитную проницаемость материала замкнутого железного сердечника тороида длиной $l=2\text{ м}$, если число ампер-витков обмотки тороида $NI=960\text{ А-вит}$.
- 5.9 Определите энергию магнитного поля в железном сердечнике объемом 400 см^3 , если индукция равна $B=1.2\text{ Тл}$
- 5.10 Средний диаметр железного кольца 15 см . Площадь сечения кольца 7 см^2 . На кольцо навито 500 витков провода. Определите: а) магнитный поток в сердечнике при токе 0.6 А ; б) величину тока, при которой магнитный поток в кольце равен $8.4 \cdot 10^{-4}\text{ Вб}$.
- 5.11 Какова энергия магнитного поля в катушке длиной $l=50\text{ см}$, и имеющей 10000 витков диаметром $d=25\text{ см}$, без железного сердечника, если по ней идет ток $I=2\text{ мА}$?
- 5.12 На железное кольцо намотана катушка с числом витков $N=50$ и сопротивлением $R=10\text{ Ом}$. Средний диаметр кольца $d=16\text{ см}$, площадь его сечения $S=10\text{ см}^2$. На катушку подано напряжение $U=64\text{ В}$. Определите: а) поток магнитной индукции в кольце; б) магнитную проницаемость железа.
- 5.13 Общая длина линий напряженности в подковообразном электромагните с железным сердечником 100 см . Площадь сечения магнитного потока 6 см^2 . Определите число витков обмотки электромагнита, если при токе в 5 А электромагнит удерживает груз массой 700 г .
- 5.14 Два одинаковых железных кольца ($d=10\text{ см}$) имеют обмотки по 100 витков каждое. В одном из колец имеется поперечный прорез длиной $l=1\text{ мм}$. По обмотке сплошного кольца идет ток $I_1 = 2\text{ А}$. Какой ток надо пустить по обмотке второго кольца, чтобы создать в нем ту же индукцию? Считайте площади сечения потока индукции в воздухе и в железе одинаковыми.
- 5.15 Ферромагнитный сердечник введен в соленоид длиной 500 мм и площадью поперечного сечения 10^2 . Обмотка соленоида имеет 100 витков. При прохождении по виткам тока 0.25 А магнитный поток Φ через поперечное сечение соленоида оказался равным 0.5 мВб . Определить магнитную проницаемость μ материала сердечника.
- 5.16 Определить энергию W магнитного поля соленоида имеющего 500 витков, которые равномерно намотаны на картонный каркас радиусом 20 мм и длиной 50 см , если по нему проходит ток 5 А .
- 5.17 При индукции поля $B=1\text{ Тл}$ плотность энергии магнитного поля в железе $\omega=200\text{ Дж/м}^3$. Какова магнитная проницаемость μ железа при этих условиях?
- 5.18 Обмотка соленоида с железным сердечником содержит 500 витков. Длина сердечника 50 см . Как и во сколько раз измениться индуктивность соленоида, если сила тока, протекающего по обмотке, возрастает от $I_1=0.1\text{ А}$ до $I_2=1\text{ А}$?
- 5.19 Соленоид с железным сердечником имеет площадь поперечного сечения 20 см^2 и число витков $N=500$. Индуктивность соленоида с сердечником при токе в обмотке 5 А равна 0.28 Гн . Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника в этих условиях.

- 5.20 В железном сердечнике соленоида индукция $B=1.3\text{Тл}$. Железный сердечник заменили стальным. Во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция в сердечнике осталась неизменной?



- 5.21 Соленоид намотан на чугунное кольцо сечением 5 см^2 . При силе тока $I=1\text{А}$ магнитный поток $\Phi=250\text{ мкВб}$. Определить число n витков соленоида, приходящихся на отрезок длиной 1 см средней линии кольца.
- 5.22 Найти плотность энергии w магнитного поля в железном сердечнике соленоида, если напряженность H намагничивающего поля равна 1.6 кА/м .
- 5.23 Замкнутый железный сердечник длиной 50 см имеет обмотку в 1000 витков. По обмотке течет ток силой 1А. Какой ток надо пустить через обмотку, чтобы при удалении сердечника индукция оставалась прежней.
- 5.24 Длина l чугунного тороида по средней линии равна 1.2 м, сечение $S=20\text{ см}^2$. По обмотке тороида течет ток, создающий в узком вакуумном зазоре магнитный поток $\Phi=0.5\text{ мВб}$. Длина зазора l_0 равна 8 мм. Какова должна быть длина зазора, чтобы магнитный поток в нем при той же силе тока увеличился в 2 раза?
- 5.25 Обмотка тороида, имеющего стальной сердечник с узким вакуумным зазором, содержит $N=1000$ витков. По обмотке течет ток $I=1\text{А}$. При какой длине l_0 вакуумного зазора индукция B магнитного поля в нем будет равна 0.5 Тл ? Длина тороида l по средней линии равна 1 м.
- 5.26 При некоторой силе тока плотность энергии магнитного поля соленоида (без сердечника) равна 0.2 Дж/м^3 . Во сколько раз увеличится плотность энергии поля при той же силе тока, если в соленоид вставить железный сердечник?
- 5.27 Определить плотность энергии магнитного поля в железном сердечнике соленоида, если соленоид длиной 60 см и диаметром 50 см имеет 1000 витков. Ток в обмотке 1А.

Занятие 6

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ.

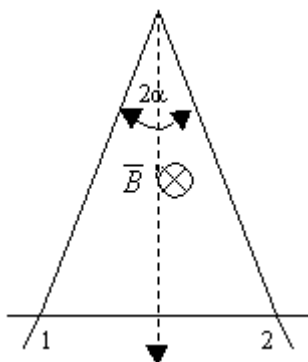
Вопросы.

1. В чем заключается явление электромагнитной индукции? Сформулируйте закон электромагнитной индукции и напишите его математическое выражение.
2. Дайте вывод формулы для э.д.с. индукции из закона сохранения энергии (формула Г. Гельмгольца).

3. Закон Ленца.
4. Каковы физические причины, приводящие к возникновению ЭДС индукции?
5. Что называется явлением самоиндукции? ЭДС самоиндукции.
6. Дайте определение индуктивности и ее единицы измерения.
7. Индуктивность соленоида.
8. Исчезновение тока при размыкании цепи.
9. Установление тока при замыкании цепи.
10. В чем состоит явление взаимной индукции? Что называется взаимной индуктивностью контуров?
11. Покажите, что магнитное поле токов обладает энергией. Запишите выражение для плотности энергии магнитного поля.
12. Почему сердечники трансформаторов собирают из тонких изолированных друг от друга листов стали?
13. Всегда ли стараются уменьшить вихревые токи Фуко? Приведите примеры использования токов Фуко.
14. В чем состоит обобщение явления электромагнитной индукции, сделанное Максвеллом?
15. Рассмотрите принцип действия индукционного ускорителя электронов – бетатрон.
16. Что называется: током смещения; плотностью тока смещения; плотностью полного тока.
17. В чем состоит обобщение теоремы и циркуляции вектора $\vec{H}$ для стационарных токов проводимости, сделанное Максвеллом?
18. Напишите (в интегральной, дифференциальной формах) полную систему фундаментальных уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Объясните физический смысл этих уравнений.

Задачи для самостоятельного решения.

- 6.1 Прямой провод сопротивлением R_1 на единицу длины согнут под углом 2α . Перемычка такого же провода, расположенная перпендикулярно к биссектрисе

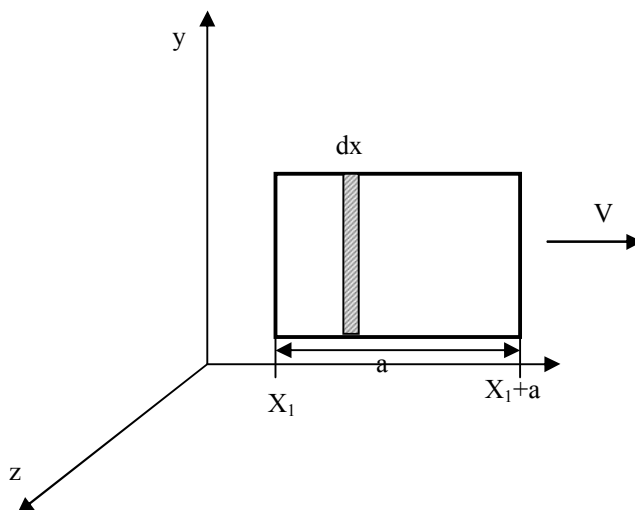


угла 2α , образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Этот контур помещен в однородное магнитное поле

$\vec{B}$, перпендикулярное к его плоскости. Найти направление и силу тока I , текущего в контуре, когда переключатель движется со скоростью v . Сопротивлением в местах контакта 1 и 2 пренебречь.

- 6.2 На деревянный цилиндр, длина которого $l=20\text{см}$ значительно больше его диаметра, навиты две медные обмотки из провода сечением $S_{\text{пр}}=2\text{мм}^2$. Одна из обмоток замкнута накоротко. Какое количество электричества пройдет по ней, если другую обмотку присоединить к аккумулятору с э.д.с. $E=2\text{В}$ и очень малым внутренним сопротивлением?
- 6.3 Из провода радиусом $a=1\text{мм}$ сделана прямоугольная рамка, длина которой $l=10\text{м}$, а ширина, измеренная между осями сторон рамки, $b=100\text{мм}$. Найти индуктивность рамки. Магнитную проницаемость среды считать равной единице. Полем внутри провода пренебречь.
- 6.4 Коаксиальный кабель состоит из двух коаксиальных цилиндрических проводников, разделенных слоем диэлектрика. Определить индуктивность единицы длины кабеля, у которого радиус внутреннего проводника $a=1,5\text{мм}$, а радиус внешнего проводника (имеющего форму трубки) $b=5,4\text{мм}$.
- 6.5 Медное кольцо радиусом $r = 20\text{см}$ и сопротивлением $R= 20\text{Ом}$, расположенное в магнитном поле перпендикулярно вектору индукции $B = 4\text{Тл}$, вытягивают в сложенную вдвое прямую. Какой при этом индукционный заряд проходит по материалу кольца?
- 6.6 Проволочный виток радиусом 4см , имеющий сопротивление $0,01\text{Ом}$, находится в однородном магнитном поле с индукцией $0,04\text{Тл}$. Плоскость рамки составляет $\alpha=30^\circ$ с линиями индукции поля. Какое количество электричества q протечет по витку, если магнитное поле исчезнет?
- 6.7 Катушка длиной $l=20\text{см}$ имеет $N=400$ витков. Площадь поперечного сечения катушки $S=9\text{см}^2$. Найти индуктивность L_1 катушки. Какова будет индуктивность L_2 катушки, если внутрь катушки введен железный сердечник? Магнитная проницаемость материала сердечника $\mu=400$.
- 6.8 На соленоид длиной 20см и площадью поперечного сечения 30см^2 надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет 320 витков, и по нему идет ток 3А . Какая средняя э.д.с. индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени $t=1\text{мс}$?

- 6.9 Виток радиусом $r = 20\text{ см}$ расположен так, что магнитное поле перпендикулярно плоскости витка. Магнитное поле возрастает прямо пропорционально времени $B = kt$, где $k = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Тл/с}$. Определить при этих условиях работу, которую совершают силы индуцированного поля при обходе по рассматриваемому контуру одного электрона. Выразить работу в электрон – вольтах.
- 6.10 однородном магнитном поле с индукцией $0,1\text{ Тл}$ равномерно с частотой 10 об/с вращается рамка, содержащая 1000 витков провода. Ось рамки перпендикулярна к направлению магнитного поля. Площадь рамки 150 см^2 . Найти мгновенное значение э.д.с. индукции, соответствующее углу поворота рамки $\alpha = 30^\circ$.
- 6.11 Квадратная рамка со стороной $a = 0,2 \text{ м}$ движется с постоянной скоростью вдоль оси OX в магнитном поле, индукция которого $B\{0,0,\alpha x\}$, где $\alpha = 10^2 \text{ Тл/м}$, так что одна из сторон рамки параллельна OX . При какой скорости движения рамки индукционный ток I , возникающий в рамке, будет равен 1 А , сопротивление рамки $R = 10 \text{ Ом}$.

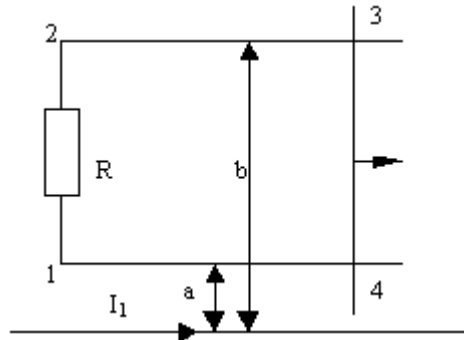


- 6.12 Соленоид длиной $l = 50 \text{ см}$ и диаметром $d = 0,8\text{ см}$ имеет 20000 витков медного провода и находится под постоянным напряжением. Определить время, в течении которого в обмотке соленоида выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в соленоиде. ($\rho_{\text{меди}} = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$)
- 6.13 Рамка, по которой проходит ток, равномерно вращается с частотой $f = 20\text{ с}^{-1}$ в однородном поле, индукция которого $B = 4\text{ мТл}$. Площадь рамки 20 см^2 . Ось вращения рамки лежит в ее плоскости и перпендикулярна вектору индукции. Найти максимальный магнитный поток сквозь плоскость рамки и ЭДС индукции, возникающую в рамке при ее вращении.
- 6.14 В однородном магнитном поле с индукцией $0,4\text{ Тл}$ в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной 10 см . Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов на концах стержня при частоте вращения 16 с^{-1} .
- 6.15 Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет 750 витков. Индуктивность катушки $L_1 = 25\text{ мГн}$. Чтобы увеличить индуктивность катушки до $L_2 = 36\text{ мГн}$, обмотку с катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой

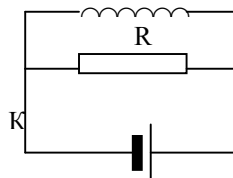
провода с таким расчетом, что длина катушки осталась прежней. Сколько витков оказалось в катушке после перемотки?

6.16 Соленоид содержит 1000 витков. Сечение сердечника 10см^2 . По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией $B=1,5\text{Тл}$. Найти среднее значение э.д.с., которая возникнет в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за $\Delta t=500\text{мкс}$.

6.17 Имеется бесконечно прямой ток силой I_1 . На расстоянии a и b от него расположены два параллельных ему голых провода, закороченных на одном конце сопротивлением R . По проводам со скоростью v скользит закорачивающий их стержень 3-4. Определить силу и направление тока i в контуре 1-2-3-4.



6.18 Катушка индуктивностью $L=2\text{мкГ}$ и сопротивлением $R_1=1\text{Ом}$ подключена к источнику постоянного тока с э.д.с. $E=3\text{В}$. Параллельно катушке включено сопротивление $R_2=2\text{Ом}$. После того, как ток в катушке принимает установившееся значение, источник тока отключается выключателем. Найти количество тепла, выделившееся в сопротивлении R_2 после разрыва цепи. Сопротивлением источника тока и соединительных проводов пренебречь.



6.19 Соленоид длиной $l=50\text{см}$ и площадью поперечного сечения $S=2\text{см}^2$ имеет индуктивность $L=2\cdot 10^{-7}\text{Гн}$. При какой силе тока объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида $\omega=10^{-3}\text{Дж/м}^3$?

6.20 Обмотка на железном сердечнике, имеющем форму тора с квадратным сечением, состоит из $N=1000$ витков. Внутренний радиус тора $a=200\text{мм}$, внешний $b=250\text{мм}$. Определить энергию, запасенную в сердечнике в том случае, когда по обмотке течет ток $I=0,14\text{А}$. Определение произвести приближенно, полагая напряженность поля по всему сечению тороида одинаковой и равной значению в центре сечения.

6.21 Соленоид, состоящий из 80 витков и имеющий диаметр $d=8\text{см}$, находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B=60,3\text{мТл}$. Соленоид поворачивается на угол 180° за время $t=0,2\text{с}$. Найти среднее значение ЭДС, возникающее в соленоиде, если его ось до и после поворота направлена вдоль поля

- 6.22 Аллюминиевое кольцо расположено в магнитном поле так, что его плоскость перпендикулярна вектору магнитной индукции. Диаметр кольца $D=25\text{см}$, толщина провода кольца $d=2\text{мм}$. Определить скорость изменения магнитной индукции поля со временем, если при этом в кольце возникает индукционный ток силой 12 А .
- 6.23 Круглая рамка площадью $S=1\text{см}^2$ с током закреплена параллельно магнитному полю и на нее действует вращающий момент $M=10^{-5}\text{Н}\cdot\text{м}$ при индукции $B=0.05\text{Тл}$. Рамку освободили и когда она повернулась вокруг диаметра на $\alpha=90^\circ$, угловая скорость была $\omega=20\text{с}^{-1}$. Определить ток I , текущий по рамке, и момент инерции рамки относительно диаметра.
- 6.24 Катушка, индуктивность и сопротивление которой $L=300\text{МГн}$ и $R=140\text{Ом}$, подключили к источнику постоянного напряжения. Через какое время τ ток через катушку достигнет 50% установившегося значения?
- 6.25 Тонкое равномерно заряженное кольцо радиусом 10см вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega=100\text{рад/с}$. Найти отношение ω_m/ω_e объемных плотностей энергии магнитного и электрического полей на оси кольца в точке, отстоящей от его центра на расстоянии $r=10\text{см}$.
- 6.26 Проволочное кольцо радиусом $R=10\text{см}$ лежит на столе. Какой электрический заряд q проходит через кольцо, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца $R=1\text{Ом}$. Вертикальную составляющую магнитного поля Земли считать равной 50мкТл .
- 6.27 Скорость самолета $v=950\text{км/ч}$. Найти ЭДС, индуцируемую между концами крыльев самолета, если размах крыльев $l=12.5\text{м}$, а вертикальная составляющая напряженности магнитного поля Земли $H_B=40\text{А/м}$.
- 6.28 Горизонтальный стержень длиной l вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Ось вращения параллельна линиям поля, индукция которого
- 6.28 $B=50\text{мкТл}$. При каком числе оборотов в секунду разность потенциалов на концах стержня будет равна 1мВ ?
- 6.29 Круговой проволочный виток площадью 100см^2 находится в однородном магнитном поле, индукция которого 1Вб/м^2 . Плоскость витка перпендикулярна направлению магнитного поля. Чему будет равно среднее значение ЭДС индукции, возникающей в витке при выключении поля в течение 0.01 сек ?
- 6.30 В однородном магнитном поле, индукция которого равна 1000гс , равномерно вращается катушка, состоящая из 100 витков проволоки. Катушка делает 50об/сек . Площадь поперечного сечения катушки 100см^2 . Ось вращения перпендикулярна оси катушки и направлению магнитного поля. Найти максимальную ЭДС индукции во вращающейся катушке

Занятие 7

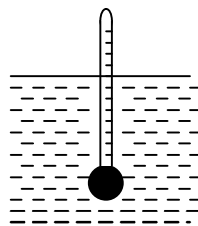
МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Вопросы

1. Колебательные процессы. Гармонические колебания. Параметры (x_0 , φ , φ_0 , T , ν , ω). Дифференциальное уравнение гармонического колебания. Его решение.
2. Механические колебания. Отклонение, скорость, ускорение, сила при гармоническом колебании.
3. Энергия механического гармонического колебания. Потенциальная яма.
4. Малые колебания около положения устойчивого равновесия.
5. Физический маятник.
6. Колебательный контур. Условия квазистационарности.
7. Уравнение затухающих колебаний и его решение. Три режима движения при наличии сопротивления. Колебательный режим. Декремент затухания.
8. Вынужденные механические и электрические колебания (вывод и решение уравнения колебаний).
9. Резонанс для смещения, заряда и напряжения. Отсутствие резонанса.
10. Резонанс для скорости и силы тока.

Задачи для самостоятельного решения.

- 7.1 Вычислить период малых вертикальных колебаний ареометра. Масса ареометра $m=50\text{г}$, радиус его трубки $r=3,2\text{мм}$, плотность жидкости $\rho=1\text{г/см}^3$. Жидкость считается идеальной.



- 7.2 Однородный диск радиусом $R=13\text{ см}$ может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через край диска. Найти период малых колебаний этого диска в поле тяжести Земли, если логарифмический декремент затухания равен единице.
- 7.3 Амплитуды смещений вынужденных гармонических колебаний при частотах $\omega_1=100\text{рад/с}$ и $\omega_2=700\text{рад/с}$ равны между собой. Найти частоту, при которой амплитуда смещения максимальна.
- 7.4 Начальная фаза гармонического колебания равна нулю. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости?
- 7.5 Уравнение колебаний материальной точки имеет вид $x=5\sin[(\pi/5)t+\pi/4]\text{см}$. Найти максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки.
- 7.6 Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?
- 7.7 В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее

колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз складываемых колебаний.

7.8 Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуда колебаний $A_1=3\text{см}$ и $A_2=4\text{см}$. Найти амплитуду результирующего колебания, если 1) колебания совершаются в одном направлении, 2) колебания взаимно перпендикулярны.

7.9 Чему равен логарифмический декремент затухания математического маятника, если за 1 мин. амплитуда колебаний уменьшилась в два раза? Длина маятника 1м.

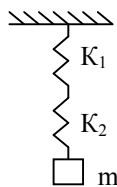
7.10 Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания 0,2. Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

7.11 Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия $x=0$. Частота колебаний $\omega=4,00\text{ 1/с}$. В некоторый момент координата частицы $x_0=25,0\text{см}$ и ее скорость $V_{x0}=100\text{см/с}$. Найти координату x и скорость V_x частицы через $t=2,4\text{с}$ после этого момента.

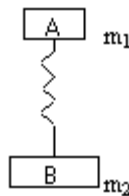
Представим себе шахту, пронизывающую Землю по ее оси вращения. Считая Землю за однородный шар и пренебрегая сопротивлением воздуха, найти а) уравнение движения

7.13 Доска с лежащей на ней бруском совершает горизонтальные гармонические колебания с амплитудой $A=10\text{см}$. Найти коэффициент трения между доской и бруском, если последний начинает скользить по доске, когда ее период колебания меньше $T=1\text{с}$.

7.14 Найти период малых вертикальных колебаний тела массы m в системе, показанной на рисунке. Жесткости пружинок k_1 и k_2 , а их массы пренебрежимо малы.



7.15 Тело А массы $m_1=1\text{кг}$ и тело В массы $m_2=4,1\text{кг}$ соединены между собой пружиной. Тело А совершает свободные вертикальные гармонические колебания с амплитудой $A=1,6\text{см}$ и частотой $\omega=2,5\text{ 1/с}$. Пренебрегая массой пружины, найти наибольшее и наименьшее значения силы давления этой системы на опорную плоскость.



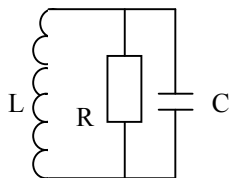
7.16 Найти добротность осциллятора, у которого: а) амплитуда смещения уменьшается в $\eta=2$ раза через каждые $n=110$ периодов колебаний, б) собственная частота $\omega_0=100\text{ 1/с}$ и время релаксации $\tau=60\text{с}$.

7.17 Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания $\lambda=0,2$. Во сколько раз уменьшится ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание.

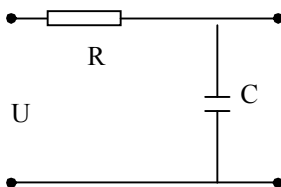
7.18 В контуре совершаются свободные затухающие колебания, при котором напряжение на конденсаторе меняется во времени по закону: $U=U_m e^{-bt} \cos \omega t$. Найти момент времени, когда модуль напряжения на конденсаторе достигает а) амплитудных значений, б) максимальных (экстремальных) значений.

7.19 Колебательный контур содержит конденсатор с утечкой. Емкость конденсатора C , его активное сопротивление R , индуктивность катушки L . Сопротивление катушки и проводов пренебрежимо малы. Найти: а) частоту затухающих колебаний такого контура, б) его добротность.

7.20 Найти частоту затухающих колебаний контура. Емкость C , индуктивность L , сопротивление R предполагаются известными. Выяснить при каком соотношении между C , R и L колебания возможны.



7.21 На рисунке показана простейшая схема сглаживающего фильтра. На вход подают напряжение $U=U_0(1+\cos\omega t)$. Найти: а) выходное напряжение $U(t)$, б) значение величины RC , при котором амплитуда переменной составляющей на выходе будет в 7 раз меньше постоянной составляющей, если $\omega=314(1/c)$.



7.22 Найти добротность колебательного контура, в который последовательно включен источник переменной ЭДС, если при резонансе напряжение на конденсаторе в n -раз превышает напряжение на источнике.

Занятие 8

ВОЛНЫ

Вопросы

1. Волновые процессы. Фронт волны. Уравнение плоской бегущей волны. Волновое уравнение.
2. Гармонические волны. Фазовая скорость. Длина волны. Волновое число. Волновой вектор. Различные формы уравнения волны.
3. Групповая скорость волн.
4. Волновое уравнение для упругих волн. Скорость упругих волн. Энергия упругих волн. Вектор Умова.
5. Скорость волн в газе.
6. Эффект Доплера.
7. Стоячая волна (условия отражения, вывод уравнения, анализ уравнения, энергия).
8. Ток смещения. Физический смысл гипотезы Максвелла.
9. Волновое уравнение для электромагнитных волн. Скорость электромагнитных волн.

10. Свойства электромагнитных волн.

11. Вектор Пойнтинга.

Задачи для самостоятельного решения.

- 8.1 Какую длину должна иметь стальная струна радиусом 0,05 см, чтобы при натяжении 50 кгс она издавала тон частотой 320 Гц?
- 8.2 Найти частоту основного тона струны, натянутой силой $F = 6 \cdot 10^3$ Н? Длина струны $l = 0,8$ м, ее масса $m = 0,03$ кг.
- 8.3 Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре дано в виде: $U = 50 \cos 10^4 \pi t$ (В). Емкость конденсатора 0,1 мкФ. Найти: период колебаний, индуктивность контура, закон изменения со временем силы тока в цепи, длину волны, соответствующую этому контуру.
- 8.4 Катушка, индуктивность которой $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластины $S = 100 \text{ см}^2$ и расстоянием между ними $d = 0,1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур резонирует на волну длиной 750 м?
- 8.5 Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 15$ м/с. Период колебания точек шнура равен 1,2 с, амплитуда $A = 2$ см. Определить: 1) длину волны, 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, отстоящей на расстоянии $x = 45$ м от источника волн в момент $t = 4$ с, 3) разность фаз двух точек, лежащих на луче на расстоянии $x_1 = 20$ м и $x_2 = 30$ м от источника волн.
- 8.6 На расстоянии $l = 4$ м от источника плоской волны частотой 440 Гц перпендикулярно ее лучу расположена стена. Определить расстояние от источника волн до точек, в которых будут первые три узла и три пучности стоячей волны. Скорость волны 400 м/с.
- 8.7 Источник звука с частотой 18 кГц приближается к неподвижно установленному резонатору, настроенному на акустическую волну длиной 1,7 см. С какой скоростью должен двигаться источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызывали колебания резонатора? Температура воздуха 290 К.
- 8.8 В незатухающей бегущей волне задана точка М, отстоящая от источника колебаний на расстоянии $y = \lambda/12$ в направлении распространения волны. Амплитуда колебаний $A = 0,05$ м. Считая в начальный момент времени смещение точки Р, находящейся в источнике, максимальным, определить смещение от положения равновесия точки М для момента $t = T/6$, а также разность фаз колеблющихся точек М и Р.
- 8.9 Медный стержень длиной $l = 0,5$ м закреплен в середине. Найти частоты возможных собственных продольных колебаний стержня.
- 8.10 Источник звука Т частотой 400 Гц движется со скоростью $U = 2$ м/с, удаляясь от неподвижного приемника М звука и приближаясь при этом к стене АВ. Определит частоту биений, регистрируемых приемником звука. Скорость звука 340 м/с.

- 8.11 Смещение от положения равновесия точки x на расстояние $l=4\text{см}$ от источника колебаний, в момент времени $t=T/6$ равно половине амплитуды. Найти максимальную длину бегущей волны.
- 8.12 Медный стержень длиной 50см закреплен на концах. Найти число продольных собственных колебаний стержня в диапазоне частот от 20кГц до 50кГц .
- 8.13 Плоская электромагнитная волна с частотой 10МГц распространяется в слабо проводящей среде с удельным сопротивлением 100 Ом/м и диэлектрической проницаемостью, равной 9 . Найти отношение амплитуд плотностей токов проводимости и смещения.
- 8.14 На оси находится неподвижный приемник и источник звуковых колебаний с частотой 2000Гц . Источник совершает гармонические колебания вдоль оси с амплитудой $A=50\text{см}$. При какой частоте колебаний источника приемник будет воспринимать колебания в диапазоне $\Delta\nu=200\text{Гц}$? Скорость звука 340м/с .
- 8.15 Звуковая волна имеет частоту 500Гц , амплитуду $0,25\text{мм}$ и волновое число $k=9\text{ 1/м}$. Найти скорость волны и максимальную скорость частиц среды.
- 8.16 Катушка с индуктивностью $L=30\text{мкГн}$ присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S=100\text{см}^2$. Расстояние между пластинами $h=0,1\text{мм}$. Чему равна диэлектрическая проницаемость диэлектрика конденсатора, если контур резонирует на волну с $k=0,008\text{ 1/м}$?
- 8.17 Уравнение колебаний источника имеет вид $S=4\sin(600\pi t)$. Найти смещение среды на расстояние $L=75\text{см}$ от источника через $t=0,01\text{с}$ после начала колебаний. Скорость волны 300 м/с .
- 8.18 От источника, расположенного у поверхности Земли, распространяются звуковые волны. Через какой промежуток времени они достигнут высоты $h=10\text{км}$, если температура воздуха у поверхности Земли $t_0=16^\circ\text{C}$, а градиент температуры в атмосфере $\Delta T/\Delta h=-7,0\cdot 10^{-3}\text{К/м}$.
- 8.19 Источник звука небольших размеров имеет мощность 1Вт при частоте 400Гц . Считая, что звук распространяется от источника одинаково по всем направлениям в воздухе, находящемся при нормальных условиях, и пренебрегая поглощением звука, определить амплитуду звукового давления, а также амплитуду скорости и смещения частиц воздуха на расстоянии $r=100\text{м}$ от источника звука.

ОТВЕТЫ

Занятие 1

1.1 $F=2,25\cdot 10^{-5}\text{ (Н)}$

- 1.2 $E_1=0; E_2=1.03 \cdot 10^4 (\text{В/м})$
- 1.3 $E=\tau_0/(4\epsilon_0 R)$
- 1.4 $x=1/25r$
- 1.5 а) $E=0.17 \cdot 10^3 (\text{В/м}); б) E=56 (\text{В/м})$
- 1.6 $F_{\max}=4.7 \cdot 10^{-7} (\text{Н})$
- 1.7 $13,07 (\text{мкКл/кг})$
- 1.8 $E=149 (\text{В/м})$
- 1.9 $F= \tau q R \sqrt{r^2 - R^2} / (2\epsilon_0 r^3) = 0.12 (\text{Н})$
- 1.10 $x=10 (\text{см}); q=40 (\text{нКл})$
- 1.11 $E_A=2.8 (\text{кВ/м})$
- 1.12 $q= 2r \sqrt{\pi \epsilon_0 m g t g(\alpha/2)} = \pm 6 \cdot 10^{-7} (\text{Кл})$
- 1.13 $1.44 \cdot 10^{-4} (\text{Н}); 0$
- 1.14 $E=900 (\text{В/м})$
- 1.15 $F= \tau q \sqrt{2} / (4\pi \epsilon_0 R) = 1.6 (\text{Н})$
- 1.16 $v_{\min} = \sqrt{5gl - q^2 / (4\pi \epsilon_0 ml)}$
- 1.17 $x_1=a/3; x_2=-a$
- 1.18 $E=\sigma/4\epsilon_0=1.9 (\text{кВ/м})$
- 1.19 $F=1.6 \cdot 10^{-6} (\text{Н})$
- 1.20 $v_r = \sqrt{(5mg + qE)l / m}$
- 1.21 $E=\tau_0/(4\epsilon_0 R)$
- 1.22 $q=1.1 \cdot 10^{-6} (\text{Кл})$
- 1.23 $11 (\text{Н/Кл}); 0.25 \cdot 10^{-5} (\text{с})$
- 1.24 $E= \sigma(1-x/(\sqrt{x^2 + R^2})) / 2\epsilon_0$
- 1.25 $3.21 \cdot 10^{-2} (\text{Н})$
- 1.26 $0.05 (\text{с})$
- 1.27 $F= \tau q L / (2\pi \epsilon_0 r^2) = 0.194 (\text{Н})$
- 1.28 $q=5.07 \cdot 10^{-8} (\text{Кл})$
- 1.29 $13.5 (\text{МВ/м})$
- 1.30 $n=1.3$

Занятие 2

- 2.1 $\varphi=R\tau/(2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + h^2}); 1 \quad \varphi=270 (\text{В})$
- 2.2 $A=1.13 \cdot 10^{-4} (\text{Дж})$
- 2.3 $\varphi_B=-0.06 (\text{В}); \varphi_C=0.09 (\text{В})$
- 2.4 $d=4.8 \cdot 10^{-3} (\text{м})$
- 2.5 $v_A=16.7 \cdot 10^{-2} (\text{м/с})$
- 2.6 $\varphi_0=3q/(8\pi \epsilon_0 R); \varphi_0=675 (\text{кВ})$
- 4.23 $\Delta \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2.4 (\text{МВ})$
- 4.24 $\tau=3.7 \cdot 10^{-6} (\text{Кл/м})$
- 4.25 $r=0.5 (\text{см})$
- 4.26 $1:1/2:1/3$
- 4.27 $v= \sqrt{4q\sigma R_0 \ln 10 / (m\epsilon_0)}; v=0.135 \cdot 10^6 (\text{м/с})$
- 4.28 $8.1 (\text{Н/м}); 0.112 (\text{Дж/м})$

- 4.29 $x = d(1 - m v_0^2 \sin^2 \alpha / (2eu))$
 4.30 $0.25 \cdot 10^5 (B)$
 4.31 $2.97 \cdot 10^7 (m/c)$
 4.32 $\Delta \varphi = 680 (kB)$
 4.33 $A = 5.9 (мкДж)$
 4.34 $\varphi = \rho R^2 (1 - r^2 / R^2) / 2 \varepsilon_0$
 4.35 $\varphi_c = 24 (B)$
 4.36 $A = 170 (мкДж)$
 4.37 $\Delta \varphi = 14 (B); \varphi_2 = 61.2 (B)$
 4.38 $\varphi = qx (\sqrt{1 + (R/x)^2} - 1) / (\pi R^2 \cdot 2 \varepsilon_0); \varphi = 14.4 \cdot 10^4 (B)$
 4.39 $E_B / E_A = 4; \varphi_B / \varphi_A = 2$
 4.40 $A = 38 (Дж)$
 4.41 $\Delta \varphi = 38000 (B)$
 4.42 $\varphi_A = k \tau \ln \left| \frac{\sqrt{r_0^2 + L_2^2} + L_2}{\sqrt{r_0^2 + L_1^2} - L_1} \right|$, где $k = 1 / (4 \pi \varepsilon_0)$
 2.7 $A = q \sigma R^2 (a - b) / (\varepsilon_0 (R + a)(R + b)); A = 17 (мкДж)$
 2.8 $A = \tau q \ln |b/a| / (2 \pi \varepsilon_0); A = 17 (мкДж)$
 2.9 $v = 4 \cdot 10^6 (m/c)$
 2.10 $\varphi_A - \varphi_B = 6.5 (B)$

Занятие 3

- 3.1 $2.5 (мкФ)$
 3.2 $W_1 = 2 \pi \rho^2 R^5 / (45 \varepsilon \varepsilon_0) = 7.88 (нДж)$
 $W_2 = 2 \pi \rho^2 R^5 / (9 \varepsilon_0) = 78.8 (нДж)$
 3.3 $2.7 \cdot 10^{-6} (Кл)$
 3.4 Уменьшится в 1.8 раза
 3.5 1) увеличится в 3 раза; 2) уменьшится в 7 раз
 3.6 $\varphi_1 = \varphi_0 = 116 (B); \varphi_2 = 238 (B)$
 3.7 $C_2 = 3C$
 3.8 $R = 7 (мм); q = 7.0 (нКл); C = 1.55 (нФ); W = 15.8 (мкДж)$
 3.9 $\varphi_1 = 472 (B); \varphi_2 = 377 (B)$
 3.10 Уменьшается в 2 раза
 3.11 $C_2 = 233 (нФ); W = 3.5 \cdot 10^{-7} (Дж)$
 3.12 $E = qr / (4 \pi \varepsilon \varepsilon_0 R^3); D = qr / (4 \pi R^3); \varphi = (3R^2 - r^2)q / (8 \pi \varepsilon \varepsilon_0 R^3)$
 3.13 $A = \varepsilon \varepsilon_0 S u^2 (\varepsilon - 1) / 2d = 0.18 (мДж)$
 3.14 $48 (B)$
 3.15 $\varphi_{нар} = \frac{\rho(R_2^3 - R_1^3)}{3 \varepsilon_0 R_2} = 196 (B); \varphi_{внутр} = \varphi_0 = 164 (B)$
 3.16 $C_1 = 0.8 (мкФ); q = 1.6 \cdot 10^{-3} (Кл)$
 3.17 Уменьшается в ε раз
 3.18 $W_1 / W_2 = 5 \varepsilon = 15$
 3.19 $A = q^2 \Delta d / (2 \varepsilon_0 S) = 14.4 (мкДж)$

- 3.20 $u=150(\text{В}); q_1=0.9(\text{мКл}); q_2=1.5(\text{мКл})$
 3.21 1) 75(В); 2) 135(В); 3) 100(В)
 3.22 1) 146(В); 2) 136(В); 3) 100(В)
 3.23 $\sigma_1=4.98 \cdot 10^{-8}(\text{Кл/м}^2); \sigma_2=1.66 \cdot 10^{-8}(\text{Кл/м}^2)$
 3.24 1) 0.18(Дж); 0.09(Дж); 0.06(Дж)
 2) 0.605(Дж); 1.21(Дж); 1.82(Дж)
 3.25 $C_2=0.32(\text{мкФ})$
 3.26 $E_1=0; E_2=470(\text{В}); E_3=150(\text{В})$
 3.27 $W_1=-12.7(\text{мкДж}); W_2=12.7(\text{мкДж})$
 3.28 2.32(мм)
 3.29 $n=10^8$
 3.30 $\varphi_1=-q_1/(4\pi\epsilon_0 R_1)+(q_2-q_1+q_1/\epsilon)/(4\pi\epsilon_0 R_2)=0(\text{В})$
 $\varphi_2=-q_1/(4\pi\epsilon_0 r)+(q_2-q_1+q_1/\epsilon)/(4\pi\epsilon_0 R_2)=50(\text{В})$
 $\varphi_3=(q_2-q_1)/(4\pi\epsilon_0 r)=45(\text{В})$

Занятие 4

- 4.1 60(А/м)
 4.2 80(А/м)
 4.3 При $r \leq R$ $\vec{H} = \frac{1}{2} [\vec{j}r]$; при $r \geq R$ $\vec{H} = \frac{R^2}{2r^2} [\vec{j}r]$
 4.4 1) $H_1=200(\text{А/м}); B_1=1.2(\text{Тл}); \Phi_1=0.84(\text{мВб})$
 2) $B_2=1.3(\text{Тл}); H_1=200(\text{А/м}); I_2=47(\text{мА})$
 4.5 $A = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} I_1 I_2 a \ln \frac{2b+a}{2b-a} = 0.33(\text{мкДж})$
 4.6 $H=9I/(2\pi a)(\text{А/м})$
 4.7 $u_2=4u_1$
 4.8 $\mu=2300$
 4.9 $A/l=\mu_0 \mu I_1 I_2 \ln(x_2/x_1)/(2\pi)=83(\text{мкДж})$
 4.10 $A=\pi\mu_0 R^2 I H=0.6(\text{мкДж})$
 4.11 1) $H=12.2(\text{А/м}); 2) H=0$
 4.12 $\varphi=\pi/6(\text{рад})$
 4.13 $B=50(\text{мкТл})$
 4.14 $F=2IBR=0.1(\text{Н})$
 4.15 $B=40(\text{мкТл})$
 4.16 $F_1=0.4 \cdot 10^{-5}(\text{Н}); F_2=0.13 \cdot 10^{-5}(\text{Н})$
 4.17 $H_1=199(\text{А/м}); H_2=0; H_3=183(\text{А/м})$
 4.18 $I_2=4.5 \cdot 10^3(\text{А})$
 4.19 $R=0.08(\text{м})$
 4.20 $H=106(\text{А/м})$
 4.21 $B=4.7 \cdot 10^{-6}(\text{Тл})$
 4.22 Из 4 слоев
 4.23 $B=9\mu_0 I/(2\pi a)=240(\text{мкТл})$
 4.24 $B=2\mu_0 I/(3\pi a)$
 4.25 $B_{\max}=16(\text{мТл})$

- 4.26 $B = \mu_0 I R^2 / (2r^3) = 62.8 \text{ (мкТл)}$
 4.27 $B_1 = 346 \text{ (мкТл)}$; $B_2 = 116 \text{ (мкТл)}$
 4.28 $B = 21.2 \text{ (мкТл)}$
 4.29 $x = 2a/3$
 4.30 $n = 8\sqrt{2}/\pi^2 = 1.15$

Занятие 5

- 5.1 $J = 3 \text{ (А/м)}$
 5.2 $B = 2B_0\mu(1+\mu)$
 5.3 $J = 1.25 \text{ (МА/м)}$; $\chi = 735$
 5.4 $J = 1.22 \text{ (МА/м)}$; $\mu = 1220$
 5.5 $\mu = 7960$
 5.6 $F = 1.15 \text{ (мкН)}$
 5.7 $\Phi = 0.4 \text{ (мВб)}$
 5.8 $\mu = 2240$
 5.9 $W = 1.2 \cdot 10^5 \text{ (Дж)}$
 5.10 а) $\Phi = 7.98 \cdot 10^{-4} \text{ (Вб)}$
 б) $I_2 = 0.75 \text{ (А)}$
 5.11 $W = 204.5\pi \cdot 10^{-8} \text{ (Дж)}$
 5.12 а) $\Phi = 1.13 \cdot 10^{-3} \text{ (Вб)}$
 б) $\mu = 1430$
 5.13 $N = 50$
 5.14 $I = 11 \text{ (А)}$
 5.15 $\mu = 796$
 5.16 $W = 0.01 \text{ (Дж)}$
 5.17 $\mu = 1990$
 5.18 $L_1/L_2 = 6.6$
 5.19 $\mu = 1860$
 5.20 $I_2/I_1 = 1.9$
 5.21 $n = 15$
 5.22 $\omega = 1.12 \text{ (кДж/м}^3\text{)}$
 5.23 $I_2 = 570 \text{ (А)}$
 5.24 $l_0 = 1.8 \text{ (мм)}$
 5.25 $l_0 = 2.25 \text{ (мм)}$
 5.26 увеличится в 1560 раз
 5.27 $\omega = 881.72 \text{ (кДж/м}^3\text{)}$

Занятие 6

- 6.1 $I = B \sin \alpha / R_1 (1 + \sin \alpha)$

$$6.2 \quad q = \mu_0 \mu E S_{np}^2 / (4\pi \rho^2 l) = 14 (\text{мКл})$$

$$6.3 \quad L = \mu_0 l \ln \left(\frac{b-a}{a} \right) / \pi = 18 (\text{мкГн})$$

$$6.4 \quad L_1 = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 0.26 (\text{мкГн})$$

$$6.5 \quad q = 0,256 \text{ Кл}$$

$$6.6 \quad q = \pi B r^2 \cos \alpha / R = 10 (\text{мКл})$$

$$6.7 \quad L_1 = 0.9 (\text{мГн}); L_2 = 360 (\text{мГн})$$

$$6.8 \quad \varepsilon_{cp} = 0.018 (\text{В})$$

$$6.9 \quad A = 9,4 \cdot 10^{-5} (\text{эВ})$$

$$6.10 \quad \varepsilon = 47 (\text{В})$$

$$6.11 \quad V = 2,5 \text{ м/с}$$

$$6.12 \quad t = 1,45 \text{ мкс}$$

$$6.13 \quad \Phi_M = 8 \text{ мк Вб}; \varepsilon = 1 \text{ мВ}$$

$$6.14 \quad 0.2 (\text{В})$$

$$6.15 \quad 90$$

$$6.16 \quad \varepsilon_{cp} = NBS/t = 3 (\text{кВ})$$

$$6.17 \quad i = \mu_0 v I \ln(b/a) / 2\pi R$$

$$6.18 \quad Q = 6 (\text{мкДж})$$

$$6.19 \quad I = (2\omega SI/L)^{1/2} = 1 (\text{А})$$

$$6.20 \quad W = 88 (\text{мДж})$$

$$6.21 \quad 0,242 \text{ В}$$

$$6.22 \quad 1,6 \text{ Тл/с}$$

$$6.23 \quad I = 2 \text{ А}; I = 5 \cdot 10^{-8} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$6.24 \quad t = 1,5 \text{ с}$$

$$6.25 \quad 1,1 \cdot 10^{-15}$$

$$6.26 \quad q = 3,14 \text{ мкКл}$$

$$6.27 \quad \varepsilon = 165 \text{ мВ}$$

$$6.28 \quad n = 6,4 (\text{об/с})$$

$$6.29 \quad \varepsilon = 1 (\text{В})$$

$$6.30 \quad \varepsilon_{\max} = 3.14 (\text{В})$$

Занятие 7

$$7.1 \quad T = 2 \sqrt{\pi m / \rho g} / \gamma = 2.5 (\text{с})$$

$$7.2 \quad T = \sqrt{3R(4\pi^2 + \Lambda^2) / 2g} = 0.9 (\text{с})$$

$$7.3 \quad \omega_{рез} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2}} = 500 (\text{рад/с})$$

$$7.4 \quad t = T/6$$

$$7.5 \quad F_m = 19.7 \cdot 10^{-5} (\text{Н}); W = 4.93 \cdot 10^{-6} (\text{Дж})$$

$$7.6 \quad \text{уменьшится в 2 раза}$$

$$7.7 \quad \Delta\varphi = 2\pi/3$$

$$7.8 \quad A_1 = 7 (\text{см}); A_2 = 5 (\text{см})$$

$$7.9 \quad 0.023$$

- 7.10 в 1.22 раза
- 7.11 $x=-29(\text{см})$; $v_x=-81(\text{см/с})$
- 7.12 а) $\ddot{x}+(g/R)x=0$, где x - смещение тела относительно центра Земли, R -ее радиус, g - нормальное ускорение свободного падения;
 б) $t=\pi\sqrt{R/g}=42(\text{мин})$; в) $v=\sqrt{gR}=7.9(\text{км/с})$
- 7.13 $k=4\pi^2 A/(gT^2)=0.4$
- 7.14 $T=2\pi\sqrt{m/k}$, где $k=\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$
- 7.15 $p=(m_1+m_2)g \pm m_1 A \omega^2$; $p_1=60(\text{Н})$; $p_2=40(\text{Н})$
- 7.16 $Q_1=498$; $Q_2=3 \cdot 10^3$
- 7.17 в 1.22 раза уменьшится
- 7.18 $t=\pi n/\omega$; $t=\frac{1}{\omega}[\text{arctg}(-\beta/\omega)+\pi n]$, $n=0,1,2,\dots$
- 7.19 а) $\omega=\sqrt{1/LC-1/4R^2C^2}$; б) $Q=(1/2)\sqrt{4R^2C/L-1}$
- 7.20 $\omega=\sqrt{1/LC-1/4R^2C^2}$; $R<(1/2)\sqrt{L/C}$
- 7.21 а) $u'=u_0+u_m \cos(\omega t-\alpha)$, где амплитуда $u_m=u_0/\sqrt{1+(\omega RC)^2}$, $\alpha=\text{arctg}(\omega RC)$;
 б) $RC=\sqrt{\eta^2-1}/\omega=22(\text{мс})$
- 7.22 $Q=\sqrt{n^2-1/4}$

Занятие 8

- 8.1 $l=\sqrt{F/(\rho\pi r^2)}/2v=0.63(\text{м})$
- 8.2 $v=250(\text{Гц})$
- 8.3 $T=2 \cdot 10^{-4}(\text{с})$; $L=10/14(\text{мГн})$; $I=-0.158\sin 10^4\pi t(\text{А})$; $\lambda=6 \cdot 10^4(\text{м})$
- 8.4 $\varepsilon=6$
- 8.5 1) $\lambda=18(\text{м})$;
 2) $\varphi=300^0$; $\xi=A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)=1(\text{см})$; $\dot{\xi}=-A\omega\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)=0.09(\text{м/с})$;
 $\ddot{\xi}=-A\frac{4\pi^2}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)=0.27(\text{м/с}^2)$;
 3) $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{vT}(x_2-x_1)=200^0$
- 8.6 $x_0=4(\text{м})$; $x_1=3.61(\text{м})$; $x_2=3.23(\text{м})$; $x'_0=3.81(\text{м})$; $x'_1=3.42(\text{м})$; $x'_2=3.04(\text{м})$
- 8.7 $u_{\text{ист}}=36(\text{м/с})$
- 8.8 $\xi=A\sin\frac{2\pi}{3}=0.044(\text{м})$; $\Delta\varphi=-\pi/6$
- 8.9 $v_1=3.8(\text{кГц})$; $v_2=11.4(\text{кГц})$; $v_3=19(\text{кГц})$; $v_4=26.6(\text{кГц})$
- 8.10 $v_\phi=4.7(\text{Гц})$
- 8.11 $\lambda_{\text{max}}=l=4(\text{см})$
- 8.12 $m=2lv/v$, где $v=\sqrt{E/\rho}$, $m=4$
- 8.13 $n=\frac{A_n}{A_{\text{см}}}=2$
- 8.14 $\omega=34(\text{с}^{-1})$

8.15 1) 350(м/с); 2) 0.79(м/с)

8.16 $\varepsilon=6$

8.17 $x=0.04(\text{м})$

8.18 $t=30(\text{с})$

8.19 $\Delta p = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{C \rho N}{2\pi}} = 8.3 \cdot 10^{-2}(\text{Па}); v_0 = \frac{\Delta p_0}{C \rho} = 1.9 \cdot 10^{-4}(\text{м/с}); A = v_0 / (2\pi \nu) = 7.6 \cdot 10^{-8}(\text{м})$

Для заметок