

*С.В. БУШКОВ, Л.В. КОЛОМИЕЦ,
О.М. КАРПИЛОВА*

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

2007



САМАРА

Учебное издание

*Бушков Станислав Владимирович
Коломиец Людмила Вадимовна
Карпилова Ольга Михайловна*

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

**ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Учебное пособие

Научный редактор В. С. П а в е л ь е в
Редакторская обработка А. В. Я р о с л а в ц е в а
Корректорская обработка В. С. Т е л е п о в а
Доверстка В. С. Т е л е п о в а

Подписано в печать 10.10.07. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Печ. л. 6,0.
Тираж 120 экз. Заказ . ИП-26/2007.

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

С.В. БУШКОВ, Л.В. КОЛОМИЕЦ, О.М. КАРПИЛОВА

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

УДК 517. 958(075)
ББК 22. 311



**Инновационная образовательная программа
"Развитие центра компетенции и подготовка
специалистов мирового уровня в области аэро-
космических и геоинформационных техноло-
гий"**

Авторы: **Глава 1. С.В. Бушков, Л.В. Коломиец**
Глава 2. О.М. Карпилова

Рецензенты:

Глава 1. д-р физ.-мат.наук, проф. А.И. Жданов;
канд. физ.-мат.наук, доц. Е.Я. Горелова

Глава 2. д-р техн. наук, проф. Б.А. Горлач;
канд. техн. наук, доц. Г.Н. Гутман

Бушков С.В. Специальные разделы высшей математики. Операционное исчисление. Тестовые задания по математике: учеб. пособие / С.В.Бушков, Л.В.Коломиец, О.М. Карпилова. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 96с. : ил.

ISBN 978-5-7883-0525-7

Учебное пособие составлено в соответствии с действующей программой по курсу математики для инженерно-технических специальностей вузов, обеспечивает полную теоретическую и методическую поддержку соответствующего раздела математики.

Пособие может быть рекомендовано студентам для самостоятельной работы и подготовки к экзаменам, а также преподавателям для подготовки и проведения практических занятий. Тесты предназначены для самопроверки и подготовки студентов к тестированию по указанным темам.

УДК 517. 958(075)
ББК 22. 311

ISBN 978-5-7883-0525-7

© Бушков С.В., Коломиец Л.В., Карпилова О.М., 2007
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....	5
1. Оригинал и изображение.....	5
2. Изображения некоторых оригиналов.....	10
3. Основные свойства оригиналов и изображений.....	12
3.1. Линейность преобразования Лапласа.....	12
3.2. Смещение в области изображения.....	14
3.3. Запаздывание оригинала.....	14
3.4. Теорема подобия.....	18
3.5. Изображение периодического оригинала.....	18
3.6. Изображение свертки оригиналов.....	19
3.7. Дифференцирование и интегрирование оригинала.....	21
3.8. Дифференцирование и интегрирование изображений.....	22
3.9. Интеграл Дюамеля.....	23
4. Нахождение оригинала по изображению.....	24
4.1. Связь преобразований Фурье и Лапласа. Формула Меллина.....	24
4.2. Разложение на простейшие дроби.....	31
4.3. Первая теорема разложения.....	34
5. Решение дифференциальных уравнений операционным методом	35
5.1. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.....	35
5.2. Дифференциальные уравнения с ненулевым начальным моментом.....	38
5.3. Применение формулы Дюамеля к решению дифференциальных уравнений.....	39
5.4. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	43
6. Решение интегральных уравнений типа свертки операционным методом.....	45
Рекомендуемый библиографический список	46
Приложение.....	47

ГЛАВА 2. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ.....	49
1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.....	50
2. Различные системы координат.....	54
3. Ряды.....	55
4. Кратные интегралы.....	57
5. Теория поля (векторный анализ).....	59
6. Теория вероятностей.....	60
7. Математическая статистика.....	64
8. Операционное исчисление.....	67
Подсказки.....	70
Решения.....	76
Ответы.....	93

ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление – один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев сводить исследование дифференциальных операторов и некоторых типов интегральных операторов к решению алгебраических уравнений. Операционное исчисление имеет особенно важное значение в механике, автоматике, электротехнике и др.

В основе метода операционного исчисления лежит идея замены изучаемых функций (оригиналов) некоторыми другими функциями (изображениями), получаемыми из первых по определенным правилам.

Развитие и систематическое применение операционного исчисления началось с работ английского инженера-электрика О. Хевисайда (1850-1925), который успешно использовал операционное исчисление в электротехнических расчётах и решил ряд важнейших задач электродинамики. Однако операционное исчисление не получило в трудах О. Хевисайда математического обоснования, многие его результаты оставались недоказанными. Строгое математическое обоснование операционного исчисления было дано с помощью интегрального преобразования Лапласа.

1. Оригинал и изображение

Пусть $f(t)$ – функция действительной переменной t , определённая при $t > 0$. Если существует несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad (1)$$

зависящий от комплексного параметра $p = \sigma + i\omega$, то этот интеграл называется **преобразованием Лапласа** функции $f(t)$ (П.С. Лаплас – французский математик, 1749-1827). Преобразование Лапласа ставит в соответствие каждой однозначной функции действительного переменного $f(t)$ единственную функцию $F(p)$ комплексного переменного $p = \sigma + i\omega$.

Функция $F(p)$ в (1) называется **изображением** функции $f(t)$ по Лапласу, а $f(t)$ – функцией-оригиналом или просто **оригиналом**. При этом применяют следующие обозначения.

Если $F(p)$ – изображение оригинала $f(t)$, то

$$F(p) = L\{f(t)\}, \text{ или } F(p) \rightleftharpoons f(t).$$

Если $f(t)$ – оригинал для $F(p)$, то

$$f(t) \rightleftharpoons F(p) \text{ или } f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

Условия на функцию-оригинал $f(t)$.

1) $f(t) \equiv 0, \forall t < 0$;

2) существуют постоянные M и σ такие, что

$$|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma t}, \forall t \geq 0.$$

Точная нижняя грань σ_0 всех чисел σ , для которых справедливо это неравенство, называется **показателем роста** функции $f(t)$;

3) на любом конечном отрезке $t \in [a, b], 0 \leq a < b$, функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле (П.Г. Дирихле – немецкий математик, 1805-1859):

а) $f(t)$ ограничена на этом отрезке;

б) $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ непрерывны на этом отрезке за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Выполнение условий Дирихле означает, что функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Различные разрывные функции, отличающиеся лишь значениями в точках разрыва, могут иметь одинаковые преобразования Лапласа, т.к. разрывы первого рода не влияют на значение определенного интеграла.

Теорема 1 (о существовании изображения).

Для всякого оригинала $f(t)$, удовлетворяющего условиям 1)-3), сходится интеграл Лапласа и существует единственное изображение $F(p)$, являющееся аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$, где σ_0 – показатель роста $f(t)$ (рис. 1).

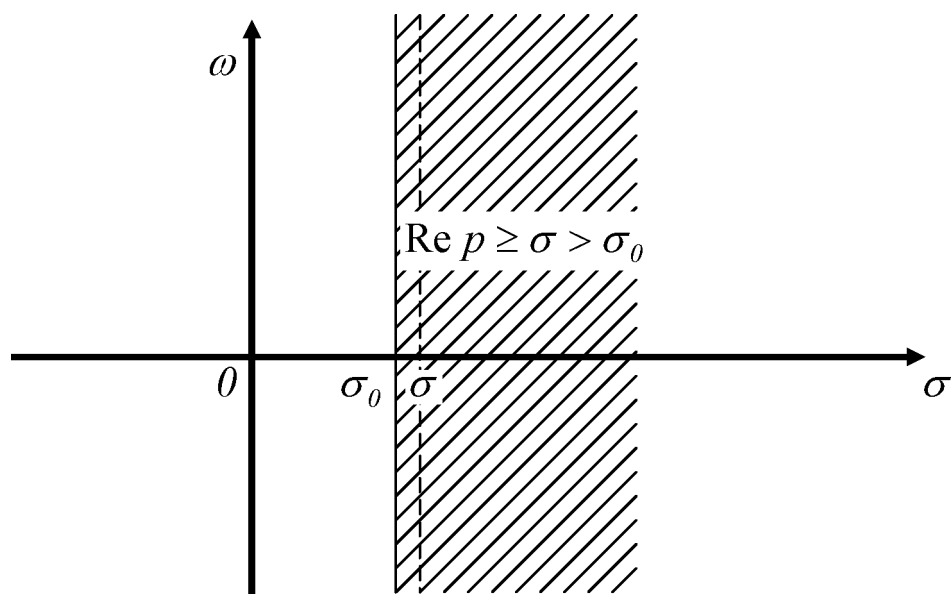


Рис. 1. Область существования изображения

Замечание. Изображения $F(p)$ могут существовать не только для функций, для которых выполняются условия 1) - 3). Нетрудно показать, что для функции $\frac{1}{\sqrt{t}}$ (или t^α , $-1 < \alpha < 0$) интеграл Лапласа сходится и

$\frac{1}{\sqrt{t}} \rightleftharpoons \sqrt{\frac{\pi}{p}}$. Следовательно, для функции $\frac{1}{\sqrt{t}}$ существует изображение, хотя не выполняется условие 3а).

Таким образом, условия 1)-3) на функцию-оригинал являются достаточными, но не являются необходимыми.

В данном пособии будем рассматривать только оригиналы, для которых выполняются условия 1) – 3).

Из теоремы 1 следуют условия на функцию-изображение:

1) для функции комплексного переменного $F(p)$, $p = \sigma + i\omega$ должна существовать «правая» область аналитичности вида $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, в которой нет особых точек (рис.1);

2) изображение «исчезает в бесконечности», т.е.

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0, \text{ где } p \text{ находится в области } \operatorname{Re} p > \sigma_0.$$

Пример 1. Предполагая, что $f(t) \equiv 0, \forall t < 0$, укажите, какие из следующих функций являются оригиналами:

а) $f(t) = \sin t$;

б) $f(t) = \frac{t}{t^2 - 4}$;

в) $f(t) = \frac{1}{t}$;

г) $f(t) = t^n, n = 0, 1, 2, \dots$

Решение. Для того чтобы указать, какие из перечисленных функций являются оригиналами, необходимо проверить выполнимость условий 1) - 3) на функцию-оригинал. Так как по условию задачи пункт 1) выполнен для всех функций, проверим пункты 2) и 3). Рассмотрим следующее:

а) так как $|\sin t| \leq 1 = e^{\sigma_0 t}$, то $\sigma_0 = 0$ – показатель роста функции $f(t) = \sin t$, т.е. условие 2) выполняется. Условие 3) для $f(t) = \sin t$ также выполняется, т.к. $f(t)$ ограничена ($|\sin t| \leq 1$) и является непрерывной на любом конечном отрезке $[a, b]$. Следовательно, функция $f(t) = \sin t$ является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$;

б) функция $f(t) = \frac{t}{t^2 - 4}$ не является оригиналом, т.к. при $t = 2$ она

имеет разрыв второго рода;

в) функция $f(t) = \frac{1}{t}$ также не является оригиналом, т.к. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} = +\infty$,

т.е. функция не является ограниченной и имеет при $t = 0$ точку разрыва второго рода;

г) с помощью правила Лопиталя можно доказать, что показательная функция растет быстрее степенной, т.е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t^n}{e^{\sigma t}} \right) = 0 \quad \forall \sigma > 0$. Поэтому

найдётся константа M такая, что $t^n \leq M \cdot e^{\sigma t}$, $\forall t \geq 0$. Следовательно, $f(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$.

Пример 2. Укажите, какие из следующих функций являются изображениями:

1) $F(p) = \operatorname{ctg} p$;

2) $F(p) = \frac{p}{p-1}$;

3) $F(p) = \frac{1}{p-1}$.

Решение. 1) функция $\operatorname{ctg} p$ не является изображением, так как имеет бесконечное множество полюсов $p_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому нет такой области $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$, в которой $\operatorname{ctg} p$ являлась бы аналитической функцией;

2) функция $\frac{p}{p-1}$ не является изображением, так как $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \frac{p}{p-1} = 1$;

3) функция $\frac{1}{p-1}$ удовлетворяет условию $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} \frac{p}{p-1} = 0$ и аналитична в области $\operatorname{Re} p > 1$. Следовательно, эта функция является изображением, причем показатель роста оригинала $\sigma_0 = 1$.

2. Изображения некоторых оригиналов

1. Единичная функция Хевисайда

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Для единичной функции выполняются все требования, предъявляемые к оригиналу. Из равенства $|1(t)| = 1 = e^{0 \cdot t}$ следует, что $1(t)$ – оригинал с показателем роста $\sigma_0 = 0$. Согласно теореме 1, изображение будет существовать и являться аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > 0$.

Найдём изображение для функции Хевисайда, используя определение преобразования Лапласа (1):

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}.$$

Подстановка верхнего предела $t \rightarrow +\infty$ в первообразную дает в пределе число ноль только при условии $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p} e^{-pt} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-\sigma t} (\cos \omega t - i \sin \omega t)}{\sigma + i \omega} \right) = 0 \quad \text{при } \sigma > 0.$$

Итак, $1(t) \stackrel{*}{=} \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$

Замечание. С помощью функции Хевисайда всякую функцию $f(t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ условиям 2)-3), можно представить в виде оригинала:

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} f(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Например, $\sin t$ – не оригинал, т.к. $\sin t \neq 0$ при $t < 0$. В то же время функция

$$\sin t \cdot 1(t) = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{уже является оригиналом.}$$

В дальнейшем будем рассматривать только функции-оригиналы, в которых множитель $1(t)$ подразумевается по умолчанию.

2. **Показательная функция** $f(t) = e^{\alpha t}$, где α – комплексное число.

Данная функция является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = \operatorname{Re} \alpha$.

По теореме 1 в области $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$ для $f(t) = e^{\alpha t}$ существует изображение, являющееся аналитической функцией. Найдём

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-p t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = -\frac{1}{p-\alpha} \cdot e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Здесь использовано, что при $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$ в верхнем пределе получается ноль:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{p-\alpha} \cdot e^{-(p-\alpha)t} \right) = 0.$$

Таким образом, $e^{\alpha t} \stackrel{=}{=} \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$

3. **Степенная функция** t^n .

Рассмотрим сначала функцию $f(t) = t$. Эта функция является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$ (пример 1). По теореме 1 изображение будет являться аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > 0$.

Найдём

$$F(p) = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-p t} dt = -\frac{1}{p} t \cdot e^{-p t} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-p t} dt = \frac{1}{p^2}.$$

Здесь использовано, что при $\operatorname{Re} p > 0$ в верхнем пределе получается ноль:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-p t}}{p} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t \cdot e^{-p t}}{p} \right) = 0.$$

Таким образом, $t \stackrel{=}{=} \frac{1}{p^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$t^n \stackrel{=}{=} \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3. Основные свойства оригиналов и изображений

3.1. Линейность преобразования Лапласа

Пусть $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы с показателями роста σ_1 и σ_2 соответственно. Тогда их линейная комбинация $k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$, где k_1, k_2 – постоянные числа, является оригиналом с показателем роста $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Отсюда, согласно свойству линейности интеграла, получим

$$L\{k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)\} = k_1 L\{f_1(t)\} + k_2 L\{f_2(t)\}. \quad (2)$$

Пример 3. По данному графику оригинала $f(t)$ (рис. 2) найдите изображение $F(p)$.

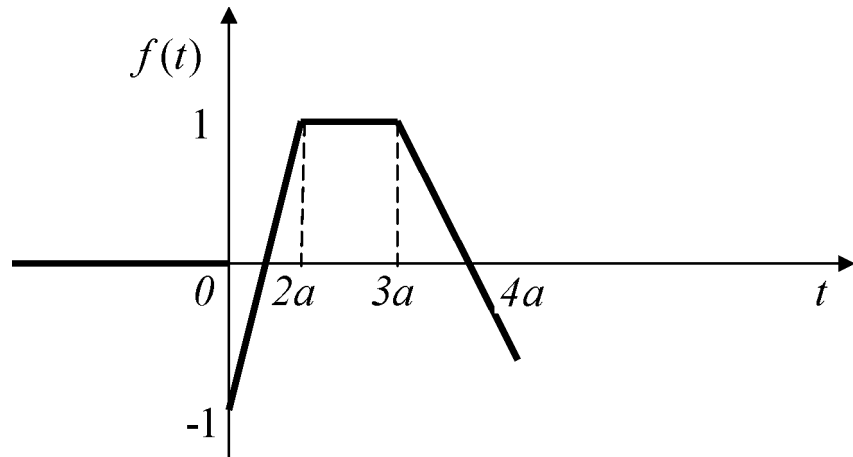


Рис. 2. График оригинала

Решение. Очевидно, что данная функция является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$. По теореме 1 изображение будет являться аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > 0$.

Запишем аналитическое выражение для оригинала:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a} - 1, & 0 \leq t < 2a; \\ 1, & 2a \leq t \leq 3a; \\ -\frac{t}{a} + 4, & t > 3a. \end{cases}$$

Значения оригинала в точке $t = 0$ определяем произвольно, так как разрывы первого рода не влияют на значение интеграла.

Найдём изображение данного оригинала по определению преобразования Лапласа (1). Применяя свойства аддитивности и линейности интеграла, получим:

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p t} dt = \\
 &= \int_0^{2a} \left(\frac{t}{a} - 1 \right) \cdot e^{-p t} dt + \int_{2a}^{3a} 1 \cdot e^{-p t} dt + \int_{3a}^{+\infty} \left(-\frac{t}{a} + 4 \right) \cdot e^{-p t} dt = \\
 &= -\frac{1}{p} \left(\frac{t}{a} - 1 \right) \cdot e^{-p t} \Big|_0^{2a} + \frac{1}{ap} \int_0^{2a} e^{-p t} dt - \frac{1}{p} \cdot e^{-p t} \Big|_{2a}^{3a} - \\
 &- \frac{1}{p} \left(-\frac{t}{a} + 4 \right) \cdot e^{-p t} \Big|_{3a}^{+\infty} - \frac{1}{ap} \int_{3a}^{+\infty} e^{-p t} dt = -\frac{1}{p} + \frac{1}{ap^2} (1 - e^{-2a p} - e^{-3a p}).
 \end{aligned}$$

Пример 4. Найдите изображение оригинала $f(t) = \sin \beta t$, $\beta \in R$.

Решение. Данная функция является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = 0$. По теореме 1 изображение будет являться аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > 0$. Так как $\sin \beta t = \frac{1}{2i} (e^{i \beta t} - e^{-i \beta t})$ и $e^{\alpha t} \stackrel{=}{=} \frac{1}{p - \alpha}$, то

по формуле (2) получим $\sin \beta t = \frac{1}{2i} (e^{i \beta t} - e^{-i \beta t}) \stackrel{=}{=}$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\beta} - \frac{1}{p + i\beta} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{2i\beta}{p^2 + \beta^2} = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}, \operatorname{Re} p > 0.$$

Аналогично можно найти следующие изображения:

$$\cos \beta t \stackrel{=}{=} \frac{p}{p^2 + \beta^2}, \operatorname{Re} p > 0;$$

$$\operatorname{sh} \beta t \stackrel{=}{=} \frac{\beta}{p^2 - \beta^2}, \operatorname{Re} p > |\beta|;$$

$$\operatorname{ch} \beta t \stackrel{*}{=} \frac{p}{p^2 - \beta^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\beta|.$$

3.2. Смещение в области изображения

Теорема 2 (смещения). Если $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, то для любого числа α

$$e^{\alpha t} f(t) \stackrel{*}{=} F(p - \alpha). \quad (3)$$

Пример 5. Найдите изображение оригинала $e^{\alpha t} \sin \beta t$, $\beta \in R$.

Решение. Данная функция является оригиналом с показателем роста $\sigma_0 = \operatorname{Re} \alpha$. По теореме 1 изображение будет являться аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$. Так как $\sin \beta t \stackrel{*}{=} \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$, то по формуле (3)

$$\sin \beta t \stackrel{*}{=} \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}, \quad \text{то по формуле (3)}$$

получим:
$$e^{\alpha t} \sin \beta t \stackrel{*}{=} \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

Аналогично можно получить следующие соответствия при $\beta \in R$:

$$1) \quad e^{\alpha t} \cos \beta t \stackrel{*}{=} \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}, \quad e^{\alpha t} t^n \stackrel{*}{=} \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha;$$

$$2) \quad e^{\alpha t} \operatorname{sh} \beta t \stackrel{*}{=} \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 - \beta^2}, \quad e^{\alpha t} \operatorname{ch} \beta t \stackrel{*}{=} \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \beta^2},$$

$$\operatorname{Re} p > \max \{ \operatorname{Re} \alpha; |\beta| \}.$$

3.3. Запоздывание оригинала

Пусть $f(t)$ – оригинал. Тогда $f(t - t_0)$, $t_0 > 0$ также является оригиналом с аргументом, запаздывающим на величину t_0 . График $f(t - t_0)$ получается путём сдвига графика $f(t)$ вправо на величину t_0 (рис. 3).

Таким образом, если функция $f(t)$ определяет течение во времени некоторого процесса, то функция $f(t - t_0)$ определяет тот же процесс, но на-

чавшийся с опозданием на t_o . Чтобы подчеркнуть факт запаздывания, оригинал принято всегда записывать с единичной функцией: $f(t - t_o) \cdot 1(t - t_o)$.

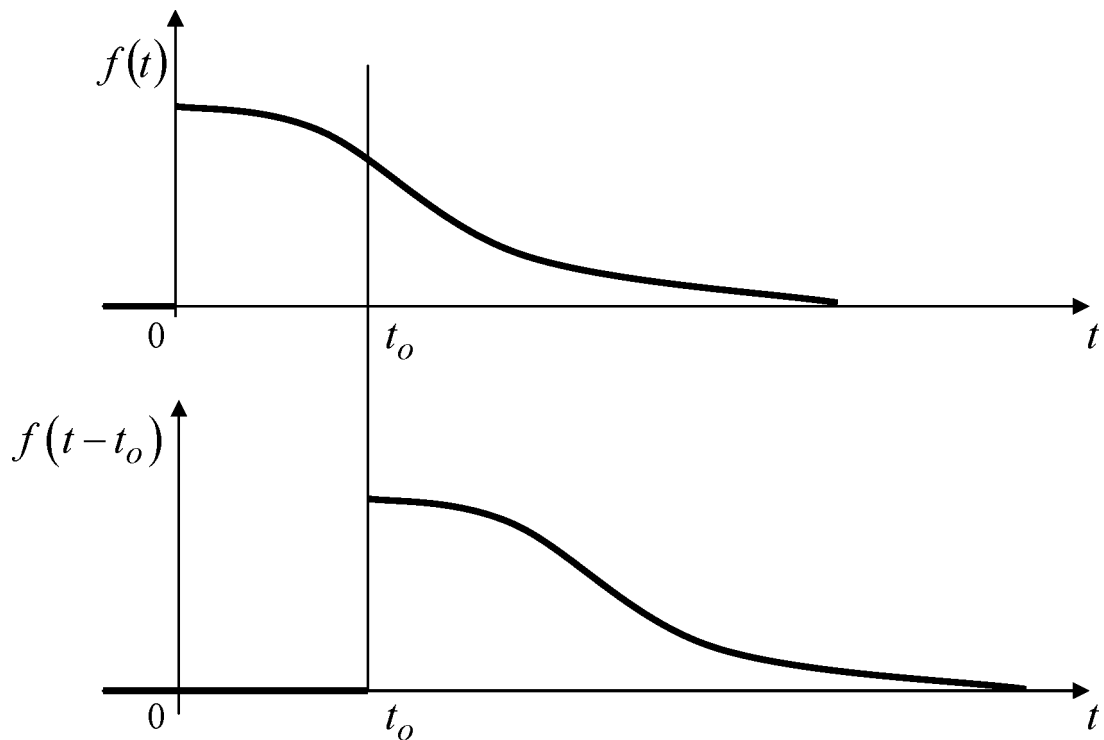


Рис. 3. Запаздывание оригинала

Теорема 3 (запаздывания).

Если $f(t) \cdot 1(t) \rightleftharpoons F(p)$ и $t_o > 0$, то

$$f(t - t_o) \cdot 1(t - t_o) \rightleftharpoons e^{-t_o p} \cdot F(p). \quad (4)$$

Замечание. Имеет место также формула опережения ($t_o > 0$):

$$f(t + t_o) \cdot 1(t + t_o) \rightleftharpoons e^{t_o p} \left(F(p) - \int_0^{t_o} f(t) e^{-pt} dt \right). \quad (5)$$

Пример 6. Найдите изображение оригинала

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right), & t > \frac{\pi}{2}; \\ 0, & t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Так как $\sin t \cdot 1(t) \stackrel{=}{=} \frac{1}{p^2 + 1}$, то по формуле (4) при $t_0 = \frac{\pi}{2}$

получаем
$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{=}{=} e^{-\frac{\pi}{2}p} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Заметим, что если просто использовать формулу $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t$, то можно получить $\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos t \stackrel{=}{=} -\frac{p}{p^2 + 1}$, что неверно, так как оригиналом будет являться $\cos t \cdot 1(t)$.

Теорему запаздывания, в частности, удобно применять при отыскании изображений функций, которые на различных участках задаются различными аналитическими выражениями. Приведем пример решения задачи из примера 3 с помощью функции Хевисайда и теоремы запаздывания.

Пример 7. По графику оригинала, представленному на рис. 2, найдите изображение.

Решение. Напомним аналитическое выражение для оригинала:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a} - 1, & 0 \leq t < 2a; \\ 1, & 2a \leq t \leq 3a; \\ -\frac{t}{a} + 4, & t > 3a. \end{cases} \quad (6)$$

Функцию $f(t)$ можно представить как сумму импульсов, первый из которых $f_1(t) = \frac{t}{a} - 1$ «включается» в момент времени $t = 0$ и «погашается» в

момент времени $t = 2a$, т.е. $f_1(t) = \left(\frac{t}{a} - 1\right) \cdot 1(t) - \left(\frac{t}{a} - 1\right) \cdot 1(t - 2a)$.

Затем в момент времени $t = 2a$ «включается» импульс $f_2(t) = 1$ и «гасится» в момент $t = 3a$, т.е. $f_2(t) = 1 \cdot 1(t - 2a) - 1 \cdot 1(t - 3a)$.

После этого в момент времени $t = 3a$ «включается» импульс $f_3(t) = -\frac{t}{a} + 4$, который не «погашается», т.е. длится во времени бесконечно долго. Импульс $f_3(t)$ запишется в виде $f_3(t) = \left(-\frac{t}{a} + 4\right) \cdot 1(t - 3a)$.

Таким образом,

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = \left(\frac{t}{a} - 1\right) \cdot 1(t) - \left(\frac{t}{a} - 1\right) \cdot 1(t - 2a) + 1(t - 2a) - 1(t - 3a) + \left(-\frac{t}{a} + 4\right) \cdot 1(t - 3a). \quad (7)$$

Проверьте самостоятельно, что функции (6) и (7) принимают одинаковые значения при заданных t .

Теперь для функции, записанной в виде суммы импульсов, найдём изображение, применяя свойства линейности и запаздывания. Обратим внимание, что по теореме запаздывания $f(t - t_o) \cdot 1(t - t_o) \rightleftharpoons e^{-t_o p} F(p)$, т.е. оригинал должен иметь тот же аргумент, что и функция Хевисайда, на которую он умножается. Поэтому в (7) сгруппируем слагаемые так, чтобы это условие выполнялось:

$$f(t) = \frac{t}{a} \cdot 1(t) - 1(t) - \frac{t - 2a}{a} \cdot 1(t - 2a) - \frac{t - 3a}{a} \cdot 1(t - 3a).$$

Используя формулы $1(t) \rightleftharpoons \frac{1}{p}$, $t \rightleftharpoons \frac{1}{p^2}$ и теорему запаздывания, найдём изображение:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{t}{a} \cdot 1(t) - 1(t) - \frac{t - 2a}{a} \cdot 1(t - 2a) - \frac{t - 3a}{a} \cdot 1(t - 3a) \rightleftharpoons \\ &\rightleftharpoons \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p^2} e^{-2ap} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p^2} e^{-3ap} = \\ &= -\frac{1}{p} + \frac{1}{a \cdot p^2} (1 - e^{-2ap} - e^{-3ap}). \end{aligned}$$

Получили тот же результат, что и в примере 3.

3.4. Теорема подобия

Теорема 4 (подобия). Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ и $\lambda > 0$, то

$$f(\lambda t) \rightleftharpoons \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (8)$$

3.5. Изображение периодического оригинала

Пусть $f(t)$ – периодический оригинал с периодом $T > 0$.

Так как $f(t) = f(t + T)$, то по формуле (5)

$$L\{f(t + T)\} = L\{f(t)\} = e^{pT} \left(L\{f(t)\} - \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt \right).$$

Решая это уравнение относительно $L\{f(t)\}$, получаем:

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt}{1 - e^{-pT}}. \quad (9)$$

Пример 8. Найдите изображение периодического оригинала, график которого представлен на рис. 4.

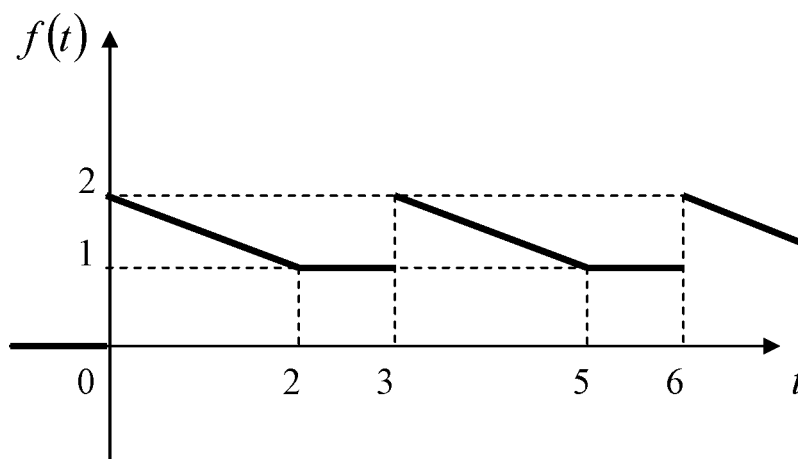


Рис. 4. График оригинала

Решение. Функция $f(t)$ является периодической с периодом $T = 3$. Запишем аналитическое выражение $f(t)$ на периоде:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} + 2, & 0 \leq t < 2; \\ 1, & 2 \leq t < 3. \end{cases}$$

Вычислим интеграл в числителе формулы (9):

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt &= \int_0^2 \left(-\frac{t}{2} + 2\right) \cdot e^{-p \cdot t} dt + \int_2^3 1 \cdot e^{-p \cdot t} dt = \\ &= -\frac{1}{p} \cdot \left(-\frac{t}{2} + 2\right) \cdot e^{-p \cdot t} \Big|_0^2 - \frac{1}{2p} \int_0^2 e^{-p \cdot t} dt - \frac{1}{p} e^{-p \cdot t} \Big|_2^3 = \\ &= \frac{1}{p} (2 - e^{-3p}) + \frac{1}{2p^2} (e^{-2p} - 1). \end{aligned}$$

По формуле (9) находим изображение периодического оригинала:

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-3p}} \left[\frac{1}{p} (2 - e^{-3p}) + \frac{1}{2p^2} (e^{-2p} - 1) \right], \operatorname{Re} p > 0.$$

3.6. Изображение свертки оригиналов

Свёрткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется интеграл

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau.$$

Если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ являются оригиналами, то $f_1(\tau) \equiv 0$ при $\tau < 0$ и $f_2(t - \tau) \equiv 0$ при $\tau > t$. Поэтому свёрткой оригиналов называется интеграл

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau. \quad (10)$$

Свёртка обладает следующими свойствами:

- 1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (коммутативность);
- 2) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (ассоциативность);
- 3) $(k_1 f_1 + k_2 f_2) * f_3 = k_1 (f_1 * f_3) + k_2 (f_2 * f_3)$ (линейность).

Теорема 5. Свёртка двух оригиналов сама является оригиналом. Проверим условия на функцию-оригинал:

- 1) если $t < 0$, то $t - \tau < 0$ и, значит, $f_2(t - \tau) \equiv 0$. Отсюда и из равенства (10) следует, что $f_1(t) * f_2(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- 2) как интеграл с переменным верхним пределом, свёртка является непрерывной и абсолютно интегрируемой функцией, т.е. условия Дирихле выполняются;
- 3) пусть σ_1 и σ_2 – показатели роста оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно, т.е. $|f_1(t)| \leq M_1 e^{\sigma_1 t}$, $|f_2(t)| \leq M_2 e^{\sigma_2 t}$. Оценим модуль и найдем показатель роста самой свертки:

$$\begin{aligned}
 |f_1 * f_2| &= \left| \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f_1(\tau)| \cdot |f_2(t - \tau)| d\tau \leq \\
 &\leq M_1 \cdot M_2 \int_0^t e^{\sigma_1 \tau} \cdot e^{\sigma_2(t - \tau)} d\tau = M_1 M_2 e^{\sigma_2 t} \int_0^t e^{(\sigma_1 - \sigma_2) \tau} d\tau = \\
 &= \begin{cases} M_1 M_2 e^{\sigma_2 t} t, & \sigma_1 = \sigma_2 \\ M_1 M_2 \frac{e^{\sigma_1 t} - e^{\sigma_2 t}}{\sigma_1 - \sigma_2}, & \sigma_1 \neq \sigma_2 \end{cases} \leq \begin{cases} M_1 M_2 e^{(\sigma_2 + 1)t}, & \sigma_1 = \sigma_2 \\ M \cdot e^{\sigma t}, & \sigma_1 \neq \sigma_2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

где $M - const$, $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Здесь также учтено, что $t < e^t$ при $t > 0$.

Таким образом, свертка оригиналов удовлетворяет всем свойствам оригинала и сама является оригиналом. Изображение свертки дает следующая теорема.

Теорема 6 (формула умножения изображений).

Если $f_1(t) \rightleftharpoons F_1(p)$, $f_2(t) \rightleftharpoons F_2(p)$, то

$$f_1(t) * f_2(t) \rightleftharpoons F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Пример 9. Найдите оригинал по изображению $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$.

Решение. Представим изображение в виде:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}. \text{ Так как } \frac{p}{p^2 + 1} \rightleftharpoons \cos t, \frac{1}{p^2 + 1} \rightleftharpoons \sin t,$$

то по теореме умножения изображений:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} &\rightleftharpoons \cos t * \sin t = \int_0^t \cos \tau \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t (-\sin t + \sin(t - 2\tau)) d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\tau \cdot \sin t + \frac{1}{2} \cdot \cos(t - 2\tau) \right) \Bigg|_0^t = \frac{t}{2} \cdot \sin t = f(t). \end{aligned}$$

3.7. Дифференцирование и интегрирование оригинала

Теорема 7 (дифференцирование оригинала).

Если $f(t)$ и $f'(t)$ – оригиналы, и $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то

$$f'(t) \rightleftharpoons p \cdot F(p) - f(+0), \quad \text{где } f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t).$$

В дальнейшем под $f(0)$ будем понимать $f(+0)$.

Следствие. Если функции $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ являются

оригиналами и $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то справедливы соотношения:

$$f''(t) \rightleftharpoons p^2 F(p) - p f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \rightleftharpoons p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0),$$

$$f^{(n)}(t) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Теорема 8 (интегрирование оригинала).

Пусть $f(t)$ – оригинал и $f(t) \rightleftharpoons F(p)$. Тогда функция $\int_0^t f(\tau) d\tau$ как свёртка $f(t) * 1(t)$ также является оригиналом. Тогда изображение интеграла

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \rightleftharpoons \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 10. Найдите оригинал по изображению $F(p) = \frac{1}{p^2 \cdot (p-1)}$.

Решение. Так как $\frac{1}{p-1} \rightleftharpoons e^t$, то

$$\frac{1}{p \cdot (p-1)} = \frac{\frac{1}{p-1}}{p} \rightleftharpoons \int_0^t e^\tau d\tau = e^t - 1.$$

$$\text{Тогда } \frac{1}{p^2 \cdot (p-1)} = \frac{\frac{1}{p \cdot (p-1)}}{p} \rightleftharpoons \int_0^t (e^\tau - 1) d\tau = e^t - t - 1 = f(t).$$

3.8. Дифференцирование и интегрирование изображений

Теорема 9 (дифференцирование изображений). Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то

$$t \cdot f(t) \rightleftharpoons -F'(p). \quad (11)$$

Следствие. Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, то $t^n f(t) \rightleftharpoons (-1)^n F^{(n)}(p)$. (12)

Пример 11. Найдите изображение для оригинала $f(t) = t^2 \cdot \sin t$.

Решение. Так как $\sin t \rightleftharpoons \frac{1}{p^2 + 1}$, то, применяя формулу (12) при $n = 2$,

получим:
$$t^2 \sin t \rightleftharpoons (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{p^2 + 1} \right)'' = \frac{6p^2 - 2}{(p^2 + 1)^3}.$$

Пример 12. Найдите изображения оригиналов $t \cdot \sin \beta t$, $t \cdot \cos \beta t$, $t \cdot \operatorname{sh} \beta t$, $t \cdot \operatorname{ch} \beta t$.

Решение. Известно, что $\sin \beta t \rightleftharpoons \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$. Тогда по формуле (11) по-

лучаем:
$$t \cdot \sin \beta t \rightleftharpoons - \left(\frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \right)' = \frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}. \quad (13)$$

Аналогично находим другие изображения:

$$t \cdot \cos \beta t \rightleftharpoons \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}, \quad (14)$$

$$t \cdot \operatorname{sh} \beta t \rightleftharpoons \frac{2\beta \cdot p}{(p^2 - \beta^2)^2}, \quad (15)$$

$$t \cdot \operatorname{ch} \beta t \rightleftharpoons \frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}. \quad (16)$$

Теорема 10 (интегрирование изображения). Если $f(t) \rightleftharpoons F(p)$ и

интеграл $\int_p^{+\infty} F(s) ds$ сходится, то
$$\frac{f(t)}{t} \rightleftharpoons \int_p^{+\infty} F(s) ds. \quad (17)$$

Пример 13. Найдите изображение оригинала $f(t) = \frac{\sin \beta t}{t}$.

Решение. Так как $\sin \beta t \rightleftharpoons \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$, то по формуле (17) получаем:

$$\frac{\sin \beta t}{t} \rightleftharpoons \int_p^{+\infty} \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} ds = \operatorname{arctg} \frac{s}{\beta} \Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\beta}.$$

3.9. Интеграл Дюамеля

Пусть $f_1(t)$ – непрерывный, а $f_2(t)$ – непрерывно дифференцируемый оригиналы, $F_1(p)$, $F_2(p)$ – их изображения соответственно. Тогда по теореме 6 умножения изображений $f_1(t) * f_2(t) \rightleftharpoons F_1(p) \cdot F_2(p)$.

По теореме 7 о дифференцировании оригинала с учетом соотношения $f_1(t) * f_2(t)|_{t=0} = 0$ получим:

$$pF_1(p) \cdot F_2(p) \rightleftharpoons \frac{d}{dt}(f_1 * f_2) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau.$$

Это равенство называется интегралом Дюамеля (Ж. Дюамель – французский математик, 1797-1872).

Выполняя в этом равенстве дифференцирование по переменной t , получаем: $pF_1(p) \cdot F_2(p) \rightleftharpoons f_1(t) \cdot f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2'(\tau) d\tau$. (18)

Это равенство называется **формулой Дюамеля**.

В силу коммутативности свертки формулу Дюамеля можно переписать в

другом виде: $pF_1(p) \cdot F_2(p) \rightleftharpoons f_1(0) \cdot f_2(t) + \int_0^t f_1'(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$.

Изложенные выше свойства приведены в таблице оригиналов и изображений в приложении.

4. Нахождение оригинала по изображению

4.1. Связь преобразований Фурье и Лапласа. Формула Меллина

Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста σ_0 , то эта функция удовлетворяет условиям Дирихле и $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$. В этом случае существует преобразование Фурье

$$F(i\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (19)$$

Применим это преобразование к функции $f(t)e^{-\sigma t}$, где $\sigma > \sigma_0$, σ_0 – показатель роста функции $f(t)$. Тогда

$$F(i\omega, \sigma) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} dt = F(p), \text{ где } p = \sigma + i\omega,$$

$F(p)$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$. Таким образом, преобразование Лапласа можно рассматривать как преобразование Фурье, построенное определённым образом.

Для преобразования (19) обратным преобразованием является функция

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega.$$

Чтобы получить обратное преобразование Лапласа, применим обратное преобразование Фурье к функции $f(t)e^{-\sigma t}$, где $\sigma \in R$ – фиксированное число:

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \right) d\omega.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $p = \sigma + i\omega$, тогда $i\omega = p - \sigma$, $d\omega = \frac{dp}{i}$. При изменении переменной ω от $-\infty$ до $+\infty$ значение p изменяется от $\sigma - i\infty$ до $\sigma + i\infty$. Получим:

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(p-\sigma)t} \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right) dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{(p-\sigma)t} F(p) dp.$$

Сократим это равенство на $e^{-\sigma t}$ и придём к формуле:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp. \quad (20)$$

Интегрирование ведётся по любой вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, лежащей в области аналитичности изображения $F(p)$, т.е. $\sigma > \sigma_0$.

Формула (20) называется **формулой Меллина или формулой обратного преобразования Лапласа** (Р.Х. Меллин – финский математик, 1854-1933).

Если функция $F(p)$ удовлетворяет условиям леммы Жордана, то интеграл Меллина (20) может быть вычислен с помощью вычетов, как показано в примере 14.

Лемма Жордана (К. Жордан – французский математик, 1838-1921).

Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $F(p)$ является аналитической в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} p \geq \sigma$);
- 2) $F(p)$ является аналитической в левой полуплоскости ($\operatorname{Re} p < \sigma$) за исключением конечного числа изолированных особых точек;

исключением конечного числа изолированных особых точек;

- 3) $M_R = \max_{p \in \Gamma_R^{лев}} |F(p)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, где $\Gamma_R^{лев}$ – левая полуок-

ружность $|p - \sigma| = R$ с центром $p = \sigma$ на действительной оси, лежащая в области $\operatorname{Re} p < \sigma$. Условие $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ кратко можно формулировать в ви-

де: «функция исчезает в бесконечности».

Тогда при $t > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^{лев}} F(p) e^{pt} dp = 0.$$

Пример 14. Найдите оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{3p - 2}{(p - 1)(p^2 - 6p + 10)}.$$

Решение. Проверим, что для функции $F(p)$ выполняются оба условия на функцию-изображение, и эта функция удовлетворяет условиям леммы Жордана:

1) функция $F(p)$ должна быть аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$. Особыми точками $F(p)$ являются нули знаменателя: $p_1 = 1$, $p_2 = 3 + i$, $p_3 = 3 - i$. Следовательно, существует область $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$, $\sigma_0 = \max \operatorname{Re} \{1; 3 \pm i\} = 3$, в которой функция $F(p)$ аналитична (рис. 5);

2) функция «исчезает» в бесконечности $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, где p находится в области $\operatorname{Re} p \geq \sigma > \sigma_0$. Это условие выполняется, т.к. степень числителя рациональной дроби меньше степени знаменателя.

Таким образом, данная функция $F(p)$ является изображением и удовлетворяет условиям леммы Жордана.

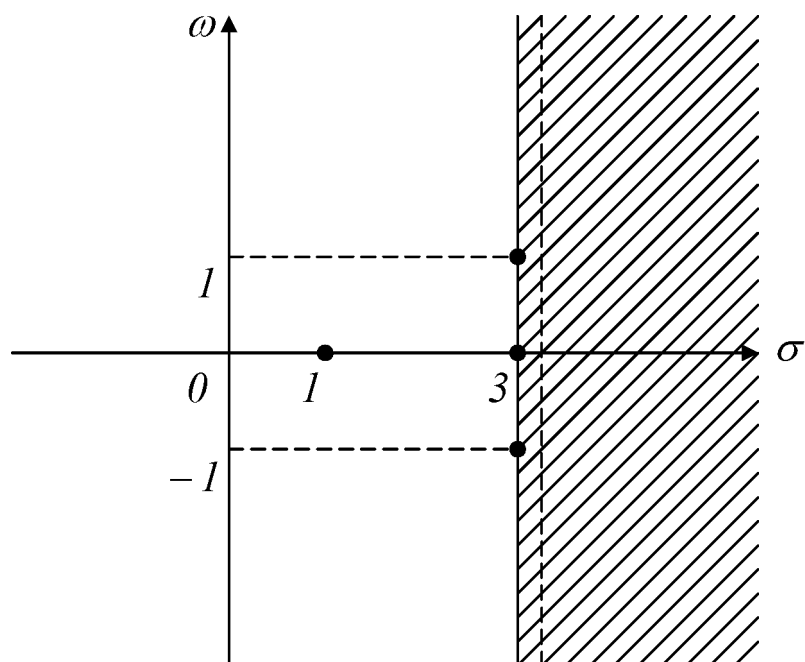


Рис. 5. Область аналитичности функции

Для нахождения оригинала применим формулу обратного преобразова-

ния Лапласа (формулу Меллина):
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp.$$

Интегрирование здесь ведётся по любой вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, лежащей в области аналитичности функции $F(p)$. Рассмотрим замкнутый контур Γ , состоящий из отрезка вертикальной прямой $[\sigma - iR, \sigma + iR]$ и левой полуокружности $\Gamma_R^{\text{лев}}$ ($|p - \sigma| = R$, $\operatorname{Re} p < \sigma$) такого большого радиуса, чтобы все особые точки функции $F(p)$ оказались внутри контура (рис. 6).

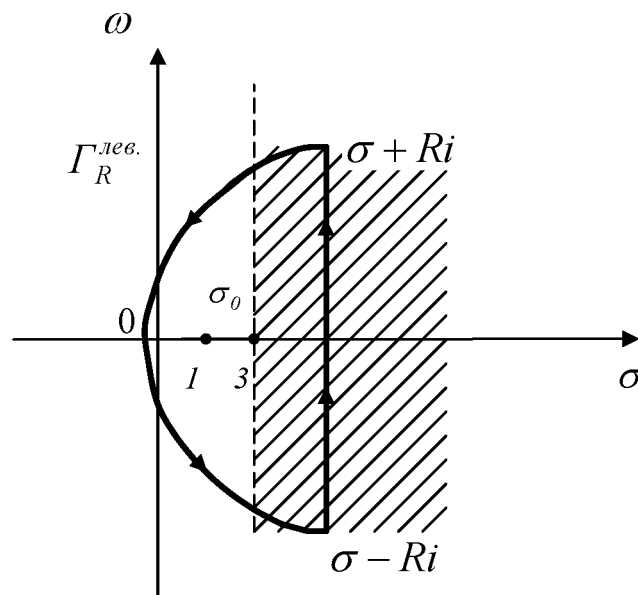


Рис.6. Контур интегрирования

Вычислим интеграл по этому замкнутому контуру, обход положительный.

Применим свойство аддитивности и перейдем к пределу при $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^{\text{лев.}}} F(p) e^{pt} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} F(p) e^{pt} dp.$$

Выполнение условий леммы Жордана означает, что при $R \rightarrow \infty$ первый

интеграл по полуокружности $\Gamma_R^{лев}$ стремится к нулю, а второй интеграл сходится:

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^{лев}} F(p) e^{pt} dp + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} F(p) e^{pt} dp = \\ &= 0 + \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp.\end{aligned}$$

С другой стороны, по основной теореме о вычетах интеграл по замкнутому контуру Γ с положительным обходом не зависит от радиуса окружности и равен сумме вычетов в особых точках:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = \oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p_k} (F(p) e^{pt}).$$

Окончательно получим формулу

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p_k} (F(p) e^{pt}),$$

где p_k , $k = 1, 2, 3$ – все особые точки $F(p)$.

Полученная формула называется **второй теоремой разложения**:

если изображение $F(p)$ является аналитической функцией и имеет конечное число особых точек p_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, то оригинал равен

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p_k} (F(p) e^{pt}). \quad (21)$$

Напомним правила вычисления вычетов в особых точках.

Правило 1. Если $p = p_k$, $k = \overline{1, n}$ – **простые полюсы** функции $F(p)$, то формула разложения (21) имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \lim_{p \rightarrow p_k} [(p - p_k) F(p)] \cdot e^{p_k t}. \quad (22)$$

Правило 2. Если p_k – *простые полюсы* дробно-рациональной функции

$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ и числитель дроби в этих точках отличен от нуля, то формула

разложения (21) имеет вид:
$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (23)$$

Правило 3. Если особые точки $p = p_k$ являются *полюсами порядка m_k* , то формула разложения (21) имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \cdot \lim_{p \rightarrow p_k} \left[(p - p_k)^{m_k} F(p) e^{pt} \right]^{(m_k - 1)}. \quad (24)$$

Правило 4. Если дробно-рациональная функция $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ имеет действительные коэффициенты и две комплексно-сопряженные особые точки

$p_k = \alpha \pm i\beta$, то вычеты в этих точках также будут комплексно-сопряженными. Сумма таких вычетов в этом случае будет равна

$$\sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}_{\alpha \pm i\beta} (F(p) e^{pt}) = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Res}_{\alpha + i\beta} (F(p) e^{pt}) \right]. \quad (25)$$

В конкретных задачах применяют комбинации правил 1-4.

Вернемся к примеру 14 и найдём вычеты функции $F(p) e^{pt}$ в каждой особой точке.

Точка $p = 1$ является простым полюсом, применим формулу (22):

$$\operatorname{Res}_1 (F(p) e^{pt}) = \lim_{p \rightarrow 1} (p - 1) \frac{(3p - 2) e^{pt}}{(p - 1)(p^2 - 6p + 10)} = \frac{e^t}{5}.$$

Точка $p = 3 + i$ является простым полюсом, применим формулу (23):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{3+i} \left(F(p) e^{pt} \right) &= \frac{\frac{3p-2}{p-1} e^{pt}}{(p^2-6p+10)'} \bigg|_{p=3+i} = \frac{\frac{3p-2}{p-1} e^{pt}}{2p-6} \bigg|_{p=3+i} = \\
&= \frac{3(3+i)-2}{(3+i-1)(2(3+i)-6)} e^{(3+i)t} = \frac{7+3i}{4i-2} e^{3t} e^{it} = \\
&= \frac{(7+3i)(-2-4i)}{20} e^{3t} e^{it} = \frac{e^{3t}}{20} (-2-34i) (\cos t + i \sin t) = \\
&= \frac{e^{3t}}{20} (-2 \cos t - 2i \sin t - 34i \cos t + 34 \sin t).
\end{aligned}$$

Суммируя найденные вычеты с учетом формулы (25), находим:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \operatorname{Res}_1 F(p) e^{pt} + 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{Res}_{3+i} \left(F(p) e^{pt} \right) \right] = \\
&= \frac{e^t}{5} + \frac{e^{3t}}{10} (-2 \cos t + 34 \sin t) = \frac{1}{5} e^t - \frac{1}{5} e^{3t} \cos t + \frac{17}{5} e^{3t} \sin t.
\end{aligned}$$

4.2. Разложение на простейшие дроби

В случае, когда изображение представляет собой рациональную дробь, можно использовать метод разложения на простейшие дроби. Выполнение условия $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$ означает, что степень числителя рациональной дроби меньше степени знаменателя, и дробь является правильной. Разлагая дробь на сумму простейших, по таблицам можно найти оригиналы для каждой простейшей дроби.

Пример 15. Найдите оригинал по заданному изображению:

$$F(p) = \frac{3p-2}{(p-1) \cdot (p^2-6p+10)}.$$

Решение. Представим $F(p)$ в виде суммы простейших дробей:

$$F(p) = \frac{3p-2}{(p-1) \cdot (p^2-6p+10)} = \frac{0,2}{p-1} + \frac{-0,2p+4}{p^2-6p+10} = F_1(p) + F_2(p).$$

Оригинал для $F_1(p) = \frac{0,2}{p-1}$ находим по таблице, применяя свойство

линейности: $\frac{0,2}{p-1} \rightleftharpoons 0,2e^t.$

Выделим в знаменателе дроби $F_2(p)$ полный квадрат:

$$F_2(p) = \frac{-0,2p+4}{(p-3)^2+1}. \text{ Так как в знаменателе в квадрат возводится выражение}$$

$p-3$, согласно таблице оригиналов и изображений надо, чтобы разность $p-3$ присутствовала и в числителе. Преобразуем:

$$\begin{aligned} F_2(p) &= -0,2 \cdot \frac{p-20}{(p-3)^2+1} = -0,2 \cdot \frac{(p-3)-17}{(p-3)^2+1} = \\ &= -0,2 \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{3,4}{(p-3)^2+1}. \end{aligned}$$

По таблице находим $\frac{p-3}{(p-3)^2+1} \rightleftharpoons e^{3t} \cos t$ и $\frac{1}{(p-3)^2+1} \rightleftharpoons e^{3t} \sin t.$

Применяя свойство линейности, запишем оригинал:

$$F_2(p) = -0,2 \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+1} + \frac{3,4}{(p-3)^2+1} \rightleftharpoons -0,2e^{3t} \cos t + 3,4e^{3t} \sin t.$$

Окончательно

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) \rightleftharpoons 0,2e^t - 0,2e^{3t} \cos t + 3,4e^{3t} \sin t = f(t).$$

Результат совпадает с ответом из примера 14.

В приведенном примере встретились простейшие дроби первого и третьего типа.

Рассмотрим в общем случае правило нахождения оригинала для дроби четвертого типа $F(p) = \frac{Ap+B}{(p^2+a^2)^2} = \frac{Ap}{(p^2+a^2)^2} + \frac{B}{(p^2+a^2)^2}$.

Первое слагаемое по формуле (13) имеет оригинал

$$\frac{Ap}{(p^2+a^2)^2} \stackrel{*}{=} \frac{A}{2a} t \cdot \sin at.$$

Рассмотрим второе слагаемое $F_2(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2}$ (коэффициент B опустим). Умножим и разделим эту дробь на число $2a^2$, а затем в числителе прибавим и отнимем слагаемое p^2 :

$$F_2(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{2a^2+p^2-p^2}{(p^2+a^2)^2}.$$

Число $2a^2$ запишем как a^2+a^2 и сгруппируем слагаемые в числителе:

$$F(p) = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{a^2+a^2+p^2-p^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{(a^2+p^2)-(p^2-a^2)}{(p^2+a^2)^2}.$$

Разделим почленно числитель на знаменатель и получим сумму двух дробей:

$$F_2(p) = \frac{1}{2a^2} \frac{1}{p^2+a^2} - \frac{1}{2a^2} \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \frac{a}{p^2+a^2} - \frac{1}{2a^2} \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}.$$

Применяя свойство линейности и таблицу оригиналов и изображений, находим оригинал: $f(t) = \frac{1}{2a^3} \sin at - \frac{1}{2a^2} t \cos at$.

Замечание. Если представить данное изображение в виде

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2+a^2} \cdot \frac{1}{p^2+a^2},$$

то оригинал для него можно также найти по теореме умножения изображений:

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2 + a^2} \cdot \frac{1}{p^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{p^2 + a^2} \cdot \frac{a}{p^2 + a^2} \stackrel{**}{=} \\ \stackrel{**}{=} \frac{1}{a^2} \sin at * \sin at = \frac{1}{a^2} \int_0^t \sin a\tau \cdot \sin a(t-\tau) d\tau = f(t).$$

4.3. Первая теорема разложения

В некоторых случаях можно найти оригинал $f(t)$, если его изображение

$F(p)$ разложимо в ряд по степеням $\frac{1}{p}$.

Теорема 11 (разложения). Если $F(p)$ – аналитическая функция в окрестности точки $p = \infty$, $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0$, и ряд Лорана имеет вид

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{p^n},$$

то оригиналом $f(t)$ является функция

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}, \quad (26)$$

причём последний ряд сходится при всех $t > 0$.

Пример 16. Найдите оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$.

Решение. Разложим $F(p)$ в биномиальный ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \left(-\frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 1 \right)}{n!} \cdot \frac{1}{p^{2n}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{1}{p^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \dots (2n-1) 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \cdot 2^n \cdot n!} \frac{1}{p^{2n+1}} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 2^{2n}} \cdot \frac{1}{p^{2n+1}}. \tag{27}
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n = 2^n \cdot n!$.

Так как $\frac{(2n)!}{p^{2n+1}} \rightleftharpoons t^{2n}$, по теореме 11 из ряда (27) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \rightleftharpoons \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 2^{2n}} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = J_0(t),$$

где $J_0(t)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

$$\text{Таким образом, } \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \rightleftharpoons J_0(t).$$

Функции Бесселя $J_n(t)$ порядка n относятся к специальным цилиндрическим функциям и являются решениями дифференциального уравнения $t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0$ с параметром n . При $t \geq 0$ функции Бесселя действительны, их график имеет вид затухающего колебания.

$$\begin{aligned}
&\text{Так как } J_1(t) = -J_0'(t) \text{ и } J_0(0) = 1, \text{ то } J_1(t) = -J_0'(t) \rightleftharpoons \\
&\rightleftharpoons -(pF(p) - J_0(0)) = -\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} + 1 = \frac{\sqrt{p^2 + 1} - 1}{\sqrt{p^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

Методом математической индукции можно получить формулу

$$J_n(t) \rightleftharpoons \frac{\left(\sqrt{p^2 + 1} - 1\right)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

5. Решение дифференциальных уравнений операционным методом

5.1. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$R[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \quad (28)$$

где $y = y(t)$, $t \geq 0$.

Требуется найти решение уравнения (28), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \quad (29)$$

где $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Если правая часть уравнения (28) (функция $f(t)$) является оригиналом, то и решение $y(t)$ этого уравнения является оригиналом. Пусть $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$.

Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (28). Согласно формуле $f^{(n)}(t) \rightleftharpoons$

$$\rightleftharpoons p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

с учётом начальных условий (29), будем иметь:

$$y^{(n)}(t) \rightleftharpoons p^n Y(p) - p^{n-1} y_0 - p^{n-2} y'_0 - \dots - y_0^{(n-1)},$$

$$a_1 y^{(n-1)}(t) \rightleftharpoons a_1 \left(p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y_0 - p^{n-3} y'_0 - \dots - y_0^{(n-2)} \right),$$

.....

$$a_{n-1} y'(t) \rightleftharpoons a_{n-1} (p Y(p) - y_0),$$

$$a_n y(t) \rightleftharpoons a_n Y(p).$$

Сложив эти равенства, получим

$$R[y] \doteq \left(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \right) Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_{k-1} p + a_k \right) \cdot y_0^{(n-1-k)}.$$

Полагая $f(t) \doteq F(p)$, уравнение преобразуем к виду:

$$\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n \right) \cdot Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k \right) \cdot y_0^{(n-1-k)} = F(p). \quad (30)$$

Это уравнение называется **операторным** уравнением.

Введем обозначение $R(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n$

и перепишем (30) в виде:

$$R(p) \cdot Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k \right) \cdot y_0^{(n-1-k)} = F(p). \quad (31)$$

Заметим, что $R(p)$ получено формально заменой $y^{(k)}$ на p^k , $k = \overline{0, n}$ в дифференциальном операторе левой части уравнения (28), т.е. $R(p)$ – характеристический многочлен соответствующего линейного однородного уравнения.

Из последнего уравнения находим изображение решения:

$$Y(p) = \frac{F(p)}{R(p)} + \frac{1}{R(p)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k \right) y_0^{(n-k-1)},$$

затем по изображению $Y(p)$ находим оригинал $y(t)$ – решение уравнения (28).

Пример 17. Решите задачу Коши:

$$y'' + 2y' + y = e^{-t} (\cos t + t), \quad y(0) = y'(0) = 2.$$

Решение. Пусть $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$. Применим преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. Учитывая начальные условия, имеем:

$$y'(t) \rightleftharpoons p \cdot Y(p) - y(0) = p \cdot Y(p) - 2;$$

$$y''(t) \rightleftharpoons p^2 Y(p) - p y(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 2p - 2.$$

Для правой части уравнения получаем:

$$e^{-t}(\cos t + t) = e^{-t} \cos t + e^{-t} t \rightleftharpoons \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Тогда операторное уравнение будет иметь вид:

$$p^2 Y(p) - 2p - 2 + 2pY(p) - 4 + Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

или
$$(p^2 + 2p + 1) \cdot Y(p) = \frac{p+1}{p^2 + 2p + 2} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2p + 6.$$

Отсюда находим изображение решения:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{p+1}{(p^2 + 2p + 2) \cdot (p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{2p+6}{(p+1)^2} = \\ &= \frac{1}{(p^2 + 2p + 2) \cdot (p+1)} + \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{2}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2}. \end{aligned}$$

Теперь найдём оригиналы для каждого слагаемого изображения $Y(p)$.

Первую дробь представим в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + 2p + 2) \cdot (p+1)} &= -\frac{p+1}{p^2 + 2p + 2} + \frac{1}{p+1} = \\ &= -\frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + \frac{1}{p+1} \rightleftharpoons e^{-t} - e^{-t} \cos t. \end{aligned}$$

Оригиналы остальных дробей найдем по таблице:

$$\frac{1}{(p+1)^4} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{3!}{(p+1)^4} \rightleftharpoons \frac{1}{3!} e^{-t} t^3;$$

$$\frac{2}{p+1} \rightleftharpoons 2e^{-t}; \quad \frac{4}{(p+1)^2} = 4 \frac{1}{(p+1)^2} \rightleftharpoons 4e^{-t} \cdot t.$$

Таким образом, решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(t) = e^{-t} - e^{-t} \cos t + \frac{t^3}{6} e^{-t} + 2e^{-t} + 4te^{-t} = e^{-t} \left(\frac{t^3}{6} + 4t - \cos t + 3 \right).$$

5.2. Дифференциальные уравнения с ненулевым начальным моментом

Если в задаче Коши за начальный момент выбрано значение $t_0 \neq 0$, то с помощью замены $\tau = t - t_0$ её можно свести к задаче Коши при $\tau = 0$.

Пример 18. Решите задачу Коши:

$$y'' + y = -\sin 2t, \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1.$$

Решение. Введём замену $\tau = t - \pi$, отсюда $t = \tau + \pi$. Тогда исходная задача Коши сводится к задаче:

$$y'' + y = -\sin 2(\tau + \pi) = -\sin 2\tau, \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad \text{где } y = y(\tau).$$

Пусть $y(\tau) \rightleftharpoons Y(p)$. Запишем соответствующее операторное уравнение:

$$(p^2 + 1) \cdot Y(p) - p - 1 = -\frac{2}{p^2 + 4}.$$

$$\text{Отсюда } Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{2}{(p^2 + 4) \cdot (p^2 + 1)} =$$

$$= \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{p^2 + 4} \rightleftharpoons \cos \tau + \frac{1}{3} \sin \tau + \frac{1}{3} \sin 2\tau =$$

$$= \cos(t - \pi) + \frac{1}{3} \sin(t - \pi) + \frac{1}{3} \sin(2t - 2\pi) =$$

$$= -\cos t - \frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{3} \sin 2t.$$

Итак, решение задачи Коши $y(t) = -\cos t - \frac{1}{3} \sin t + \frac{1}{3} \sin 2t$.

5.3. Применение формулы Дюамеля к решению дифференциальных уравнений

В случаях, когда правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сложную функцию, для которой затруднительно найти изображение, можно применить формулу Дюамеля.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases}, \quad (32)$$

где a_i – постоянные коэффициенты, $i = \overline{1, n}$.

Пусть $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$. Учитывая нулевые начальные условия, операторное уравнение (31) для задачи (32) будет иметь вид:

$$R(p) \cdot Y(p) = F(p), \quad (33)$$

где $R(p)$ – характеристический многочлен уравнения (32).

Наряду с задачей (32), рассмотрим вспомогательную задачу Коши для функции $z = z(t)$:

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = 1, \\ z(0) = z'(0) = \dots = z^{(n-1)}(0) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Пусть $z(t) \rightleftharpoons Z(p)$. Тогда операторное уравнение для (34) с учетом таблич-

ной формулы $1(t) \rightleftharpoons \frac{1}{p}$ будет иметь вид:

$$R(p) Z(p) = \frac{1}{p}. \quad (35)$$

Выразим из операторных уравнений (33) и (35) характеристический многочлен

$R(p)$ и приравняем $R(p) = \frac{F(p)}{Y(p)} = \frac{1}{pZ(p)}$. В результате получим урав-

$$\text{нение} \quad Y(p) = p F(p) Z(p). \quad (36)$$

Таким образом, решение задачи Коши (32) имеет вид

$$y(t) \stackrel{=}{=} p F(p) Z(p).$$

Найдем оригинал, используя формулу Дюамеля (18): $p F(p) Z(p) \stackrel{=}{=}$

$$\stackrel{=}{=} \frac{d}{dt}(f * z) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) \cdot z(t - \tau) d\tau = f(t) z(0) + \int_0^t f(\tau) z'_t(t - \tau) d\tau.$$

С учетом нулевых начальных условий $z(0) = 0$ получаем решение $y(t)$ исходной задачи Коши (32) в виде интеграла:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) z'_t(t - \tau) d\tau. \quad (37)$$

Учитывая коммутативность свертки, решение задачи Коши (32) также можно

$$\text{искать в виде} \quad y(t) = f(0) z(t) + \int_0^t z(\tau) f'_t(t - \tau) d\tau. \quad (38)$$

Итак, чтобы найти решение $y(t)$ задачи Коши для неоднородного уравнения (32) с правой частью $f(t)$, нужно предварительно найти решение $z(t)$ соответствующего уравнения (34), а затем вычислить интеграл (37). На практике выбирают тот из интегралов (37) или (38), который проще вычисляется.

Пример 19. Найдите решение задачи Коши:

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(1 + 2t)^2}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. Решим сначала вспомогательную задачу Коши:

$$z'' + 4z' + 4z = 1, \quad z(0) = z'(0) = 0.$$

Пусть $z(t) \rightleftharpoons Z(p)$, тогда $z'(t) \rightleftharpoons pZ(p)$, $z''(t) \rightleftharpoons p^2 Z(p)$, $1(t) \rightleftharpoons \frac{1}{p}$.

Получаем операторное уравнение: $p^2 Z(p) + 4pZ(p) + 4Z(p) = \frac{1}{p}$,

или $(p^2 + 4p + 4)Z(p) = \frac{1}{p}$,

откуда $Z(p) = \frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{1}{4p} - \frac{1}{2(p+2)^2} - \frac{1}{4(p+2)}$.

Найдем по полученному изображению оригинал и его производную:

$$z(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}, \quad z'(t) = t e^{-2t}.$$

Подставим в производную вместо аргумента $(t - \tau)$:

$$z'(t - \tau) = (t - \tau) e^{-2(t-\tau)}.$$

Для получения решения искомой задачи Коши применим формулу (37),

где $f(\tau) = \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2}$ – правая часть данного уравнения. Имеем:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t f(\tau) z'_t(t - \tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} (t - \tau) e^{-2(t-\tau)} d\tau = \\ &= e^{-2t} \cdot \int_0^t \frac{t - \tau}{(1+2\tau)^2} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2t} \cdot \int_0^t \frac{2\tau - 2t}{(1+2\tau)^2} d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2t} \cdot \int_0^t \frac{(2\tau + 1) - 1 - 2t}{(1+2\tau)^2} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2t} \cdot \int_0^t \frac{d\tau}{1+2\tau} + \\ &+ \frac{1}{2} e^{-2t} (1+2t) \cdot \int_0^t \frac{d\tau}{(1+2\tau)^2} = \frac{1}{4} e^{-2t} (2t - \ln(1+2t)). \end{aligned}$$

Итак, решение задачи Коши $y(t) = \frac{1}{4} e^{-2t} (2t - \ln(1+2t))$.

Замечание. Если начальные условия не являются нулевыми, то вводится новая

функция $x(t)$ по формуле $y(t) = x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \cdot y^{(k)}(0)$. Функция $x(t)$ удов-

летворяет нулевым начальным условиям, но при этом изменяется правая часть

уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$.

5.4. Системы линейных дифференциальных уравнений

с постоянными коэффициентами

Схема решения таких систем та же, что и для линейных дифференциальных уравнений. Для каждого из уравнений системы записывается соответствующее операторное уравнение, затем получившаяся система линейных алгебраических уравнений решается относительно изображения.

Пример 20. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} x' - 2x - 3y = 5t, \\ y' - 3x - 2y = 8e^t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \quad (39)$$

Решение. Пусть $x(t) \rightleftharpoons X(p)$, $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$. Тогда $x'(t) \rightleftharpoons pX(p)$, $y'(t) \rightleftharpoons pY(p) - 1$. Кроме того, $5t \rightleftharpoons \frac{5}{p^2}$, $8e^t \rightleftharpoons \frac{8}{p-1}$.

Соответствующая операторная система имеет вид:

$$\begin{cases} pX(p) - 2X(p) - 3Y(p) = \frac{5}{p^2}, \\ pY(p) - 1 - 3X(p) - 2Y(p) = \frac{8}{p-1}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p-2)X(p) - 3Y(p) = \frac{5}{p^2}, \\ -3X(p) + (p-2)Y(p) = \frac{8}{p-1} + 1. \end{cases}$$

Решим эту систему по формулам Крамера. Найдём определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-2 & -3 \\ -3 & p-2 \end{vmatrix} = (p-2)^2 - 9 = (p-5) \cdot (p+1).$$

Замечание. Главный определитель $\Delta = R(p) = (p-5) \cdot (p+1)$ является характеристическим многочленом системы (39), его корни есть собственные числа матрицы системы.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{5}{p^2} & -3 \\ \frac{7+p}{p-1} & p-2 \end{vmatrix} = \frac{5(p-2)}{p^2} + \frac{3(7+p)}{p-1} = \frac{3p^3 + 26p^2 - 15p + 10}{p^2(p-1)},$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} p-2 & \frac{5}{p^2} \\ -3 & \frac{7+p}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{(p-2) \cdot (7+p)}{p-1} + \frac{15}{p^2} = \\ &= \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{p^2(p-1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3p^3 + 26p^2 - 15p + 10}{p^2(p-5) \cdot (p-1)(p+1)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p^4 + 5p^3 - 14p^2 + 15p - 15}{p^2(p-5) \cdot (p-1)(p+1)}.$$

Разложим $X(p)$ и $Y(p)$ на простейшие дроби:

$$X(p) = -\frac{13}{5} \cdot \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{4}{p+1} + \frac{3}{p-1} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{p-5},$$

$$Y(p) = \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{p} - \frac{3}{p^2} + \frac{1}{p-1} - \frac{4}{p+1} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{p-5}.$$

По найденным изображениям с помощью таблицы запишем оригиналы и окончательно получим решение задачи Коши для системы:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{13}{5} + 2t + 4e^{-t} + 3e^t + \frac{8}{5}e^{5t}, \\ y(t) = \frac{12}{5} - 3t + e^t - 4e^{-t} + \frac{8}{5}e^{5t}. \end{cases}$$

По аналогичной схеме решаются линейные системы с постоянными коэффициентами и более высокого порядка.

6. Решение интегральных уравнений типа свертки

операционным методом

Интегральным называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Уравнение вида

$$y(t) + \int_0^t y(\tau) K(t-\tau) d\tau = f(t) \quad (40)$$

называется интегральным уравнением типа свертки. Здесь $y(t)$ – искомая неизвестная функция, $f(t)$ – свободный член (правая часть), $K(t-\tau)$ – ядро уравнения.

Предположим, что $y(t)$, $f(t)$, $K(t)$ – оригиналы. Перейдем в уравнении (40) к изображениям. Пусть $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$, $f(t) \rightleftharpoons F(p)$, $K(t) \rightleftharpoons Q(p)$. Так как интеграл в (40) представляет свертку оригиналов $y(t)$ и $K(t)$, то по теореме умножения изображений $Y(p) + Y(p) \cdot Q(p) = F(p)$, откуда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1+Q(p)}$$

– изображение искомого решения $y(t)$ интегрального урав-

нения (40). Само решение может быть получено с помощью методов, изложенных выше.

Пример 21. Решите интегральное уравнение

$$y(t) + 2 \int_0^t y(\tau) \cdot \cos(t - \tau) d\tau = e^t.$$

Решение. Пусть $y(t) \rightleftharpoons Y(p)$. Так как $e^t \rightleftharpoons \frac{1}{p-1}$, $\cos t \rightleftharpoons \frac{p}{p^2+1}$,

то, переходя в данном уравнении к изображениям, получаем

$$Y(p) + \frac{2p}{p^2+1} \cdot Y(p) = \frac{1}{p-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } Y(p) &= \frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{2(p+1)} \rightleftharpoons \\ &\rightleftharpoons \frac{1}{2}e^t - t \cdot e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \operatorname{sh} t - t \cdot e^t = y(t). \end{aligned}$$

Функция $y(t) = \operatorname{sh} t - t \cdot e^t$ является решением данного интегрального уравнения.

Рекомендуемый библиографический список

1. Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. – М.: Физматлит, 2001.
2. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. Ч. 2. – М.: Наука, 1986.
3. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты) / В.Ф. Чудесенко. – М.: Высшая школа, 1999.
4. Краснов, М.Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости. Задачи и примеры с подробными решениями / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Изд-во УРСС, 2003.

Приложение

Таблица П1

Таблица оригиналов и изображений

Оригинал $f(t) \cdot 1(t)$	Изображение $F(p)$		Оригинал $f(t) \cdot 1(t)$	Изображение $F(p)$
$1(t)$	$\frac{1}{p}$		$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$		$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$		$e^{\alpha t} \cdot \text{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 - \beta^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$		$e^{\alpha t} \cdot \text{ch} \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$		$t \cdot \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$		$t \cdot \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$		$t \cdot \text{sh} \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 - \beta^2)^2}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$		$t \cdot \text{ch} \beta t$	$\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
$\text{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$		$\sin \beta(t - a) \cdot$ $\cdot 1(t - a)$	$\frac{\beta \cdot e^{-ap}}{p^2 + \beta^2}$
$\text{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$		$\cos \beta(t - a) \cdot$ $\cdot 1(t - a)$	$\frac{p \cdot e^{-ap}}{p^2 + \beta^2}$

Теоремы операционного исчисления

Название теоремы	Оригинал $f(t) \cdot 1(t)$	Изображение $F(p)$
Линейность	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(p) + k_2 F_2(p)$
Теорема подобия	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
Теорема запаздывания	$f(t - t_o) \cdot 1(t - t_o)$	$e^{-t_o p} \cdot F(p)$
Теорема опережения	$f(t + t_o) \cdot 1(t + t_o)$	$e^{t_o p} \left(F(p) - \int_0^{t_o} f(t) e^{-t p} dt \right)$
Производная оригинала	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
	$f''(t)$	$p^2 F(p) - p \cdot f(0) - f'(0)$
	$f^{(n)}(t)$	$p^n \cdot F(p) - p^{n-1} f(0) -$ $- p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Производная изображения	$t \cdot f(t)$	$-F'(p)$
	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
Интегрирование оригинала	$\int_0^t f(s) ds$	$\frac{F(p)}{p}$
Интегрирование изображения	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(s) ds$
Формула умножения изображений	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
Производная свертки Формула Дюамеля	$(f_1(t) * f_2(t))' =$ $= f_1(t) \cdot f_2(0) +$ $+ \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2'(t - \tau) d\tau.$	$pF_1(p) \cdot F_2(p)$

ГЛАВА 2. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Процесс обучения включает в себя контроль достигнутых результатов, который направлен на оценку объема полученных знаний, широты и глубины усвоения изучаемого материала, уровня подготовки учащихся.

Современные технологии контроля во многом базируются на тестах, применение которых позволяет унифицировать процедуру оценки, так как все тестируемые находятся в одинаковых (стандартных) условиях и используют одинаковые (стандартные) измерительные материалы.

Данная глава содержит образцы тестовых заданий по следующим разделам математики: линейная алгебра и аналитическая геометрия, ряды, кратные интегралы, теория поля, теория вероятностей, математическая статистика, операционное исчисление. Уровень сложности заданий рассчитан на стандартную программу по высшей математике для технических специальностей. Все задания снабжены правильными ответами, к большинству даются подсказки, а также решения. Таким образом, пособие может использоваться студентами для подготовки к тестированию, а также для самопроверки.

Тестовые задания бывают нескольких видов: в закрытой форме, содержащие вопрос и несколько вариантов ответа, из которых нужно выбрать правильные (верных ответов может быть несколько!); в открытой форме, состоящие только из вопроса; в этом случае правильный ответ записывает сам тестируемый; на установление соответствия и на установление правильной последовательности. В данной работе представлены все эти виды заданий.

Поскольку при проведении тестирования задания предъявляются в случайном порядке, предлагаемые образцы тестовых заданий сгруппированы только по темам, внутри каждого раздела задания не ранжированы ни по степени трудности, ни по уровням усвоения учебного материала (знание основных теоретических положений, умение применять эти знания, умение проводить анализ и делать выводы). Выбор заданий при формировании тестов зависит от целей тестирования и видов контроля.

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1.1. Определитель матрицы A равен 3. Тогда определитель обратной матрицы A^{-1} равен

1.2. Определитель матрицы A равен 2. Тогда определитель транспонированной матрицы A^T равен

1.3. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ равен

1.4. Если $A=(4 \ 5)$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, A^T – транспонированная матрица, то размерность произведения BA^T равна

а) 2×1 ; б) 1×2 ; в) 2×2 ; г) 1; д) 9; е) 18.

1.5. Вычислите, если возможно $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2)$.

а) $(1 \ 1)$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

е) умножать нельзя; ж) другой ответ.

1.6. Укажите, если возможно, матрицу, обратную к матрице $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) нет такой матрицы.

1.7. Укажите, если возможно, матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) нет такой матрицы.

1.8. Укажите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + 2y + 2z = 11, \\ y + z = 5: \end{cases}$$

а) одно; б) два; в) три; г) бесчисленное множество;
д) ни одного.

1.9. Укажите количество решений системы уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + 2y + 2z = 11, \\ y + z = 7: \end{cases}$$

а) одно; б) два; в) три; г) бесчисленное множество; д) ни одного.

1.10. Укажите ВСЕ системы, которые нельзя решать по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 8y = 12, \\ 3x + 6y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3y = 12, \\ -4x + 6y = 20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

1.11. Укажите систему, которая имеет бесчисленное множество решений:

а) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + 8y = 12, \\ 3x + 6y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 3y = 12, \\ -4x + 6y = 20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$

1.12. Векторы $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ линейно зависимы.

Тогда определитель $\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ равен

а) 1; б) -1; в) 0; г) $a_1 b_2 c_3$; д) $-a_1 b_2 c_3$; е) невозможно вычислить.

1.13. Векторы $\vec{a}(x; 1; 2)$ и $\vec{b}(6; 2; 4)$ линейно зависимы, тогда x равен

1.14. Для векторов $\vec{a} = (x; 3; -1)$ и $\vec{b} = (4; 1; 3)$ их скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$ при x , равном

1.15. Известно, что векторы $\vec{a} = (2; p; -1)$ и $\vec{b} = (p; 1; 3)$ перпендикулярны. Тогда значение p равно

1.16. Угол между векторами $\vec{a} = (1; -2; 3)$ и $\vec{b} = (-6; 12; -18)$ равен
а) 0° ; б) 45° ; в) 90° ; г) 135° ; д) 180° ; е) другой ответ.

1.17. Найдите работу силы $\vec{F}(2; 3; -2)$ при перемещении материальной точки вдоль вектора $\vec{AB}$ из положения $A(1; 2; 5)$ в положение $B(3; 5; 7)$.

1.18. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{b}| = 2$; $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$.

1.19. Укажите ВСЕ случаи, когда векторное произведение векторов равно нулю:

а) векторы параллельны; б) векторы перпендикулярны;
в) один из векторов равен нулю; г) сумма векторов равна нулю;
д) угол между векторами равен 45° .

1.20. Найдите величину острого угла BAC (в градусах), если для векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ модуль векторного произведения равен скалярному произведению, то есть $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1.21. Модуль векторного произведения $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$ при $|\overrightarrow{b}| = 2$; $\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ равен

1.22. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$, если вектор $\overrightarrow{c}$ равен векторному произведению векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ ($\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$), причем $|\overrightarrow{a}| = 1$; $|\overrightarrow{b}| = 1$, а угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равен 60° .

а) 0; б) 0,5; в) 1; г) 2; д) другой ответ

1.23. Найдите смешанное произведение $\overrightarrow{a} \overrightarrow{b} \overrightarrow{c}$, если $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = 1$, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

1.24. Смешанное произведение $\overrightarrow{a} \overrightarrow{b} \overrightarrow{c} = 3$, тогда смешанное произведение $\overrightarrow{c} \overrightarrow{b} \overrightarrow{a}$ равно

1.25. Найдите смешанное произведение $\overrightarrow{p} \overrightarrow{b} \overrightarrow{c}$, зная, что смешанное произведение $\overrightarrow{a} \overrightarrow{b} \overrightarrow{c} = 6$, а $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

1.26. Прямые $2x + y - 4 = 0$ и $2x + y + 1 = 0$

а) пересекаются в точке (2; 8); б) пересекаются в точке (8; 2);
в) пересекаются в точке (3; -1); г) не пересекаются; д) совпадают.

1.27. Прямые $5x + 3y = 0$ и $2x + y - 1 = 0$

а) пересекаются в точке (5; -3); б) пересекаются в точке (3; -5);
в) пересекаются в точке (3; -1); г) не пересекаются; д) совпадают.

1.28. Угловой коэффициент прямой $3x - 2y - 8 = 0$ равен

а) $3/2$; б) $2/3$; в) 2; г) 3; д) 4; е) 8; ж) $8/3$.

1.29. Уравнение плоскости, проходящей через точку $B(3; -1; 1)$ параллельно оси Oy , имеет вид

а) $2x + y - 5z = 0$; б) $2x - 3z - 3 = 0$; в) $y + 1 = 0$;
г) $x - 1 = 0$; д) $y + z = 0$.

1.30. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $B(0; -2; 3)$ параллельно вектору с координатами (2; 0; 1), имеют вид

а) $\begin{cases} x = 4t, \\ y = t - 2, \\ z = 3 - 2t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 0, \\ y = t - 2, \\ z = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -2, \\ z = 3 + t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 4t + 1, \\ y = t + 2, \\ z = 2t + 3. \end{cases}$

1.31. Уравнение плоскости, проходящей через точку $B(3; -1; 1)$ перпендикулярно прямой $x = 2t, y = t, z = 0$, имеет вид

- а) $2x + y - 5 = 0$; б) $2x - 3y - 3 = 0$; в) $y + 1 = 0$;
г) $z - 1 = 0$; д) $y + z = 0$.

1.32. Плоскость α задана уравнением $2x - y + z - 2 = 0$. Тогда прямая

$$\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = -2t \\ z = 2t - 2 \end{cases}$$

- а) перпендикулярна плоскости α ; б) параллельна плоскости α ;
в) лежит в плоскости α .

1.33. Укажите уравнение, определяющее множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух заданных точек (фокусов) постоянна:

- а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; в) $y^2 = 4x$; г) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

1.34. Укажите уравнение, определяющее кривую на плоскости, для которой эксцентриситет больше 1:

- а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; в) $y^2 = 4x$; г) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

1.35. Укажите уравнение, определяющее на плоскости кривую, для которой точка с координатами $(5; 0)$ является фокусом:

- а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; в) $y^2 = 4x$; г) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

1.36. Чтобы привести к каноническому виду уравнение $x^2 + y^2 = 4x$, начало координат следует перенести в точку

- а) $(0; 2)$; б) $(2; 2)$; в) $(2; 0)$; г) $(-2; 0)$.

1.37. Поверхность $z^2 + y^2 - x^2 = 0$ — это

- а) конус; б) гиперболоид; в) параболоид;
д) цилиндр; е) сфера; ж) эллипсоид.

1.38. Укажите уравнение, которое задает гиперболический цилиндр:

- а) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; в) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$; д) $x^2 = 2y$; е) $y^2 - z^2 = 1$.

2. Различные системы координат

2.1. График функции $\rho = \cos \varphi$ изображен на рисунке (рис. 1)

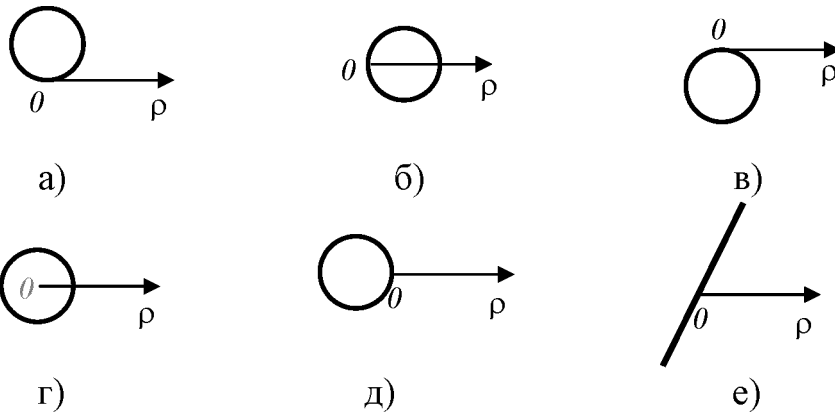


Рис. 1

2.2. График функции $\varphi = 1$ изображен на рисунке (рис. 2)

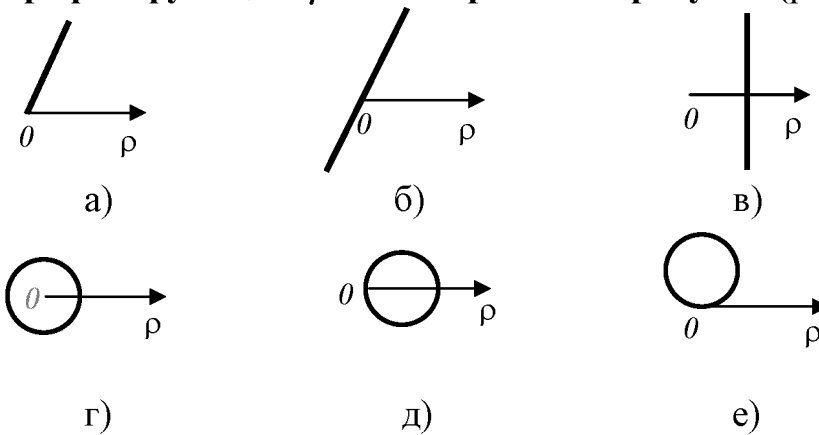


Рис. 2

2.3. Линия, изображенная на рисунке (рис. 3),

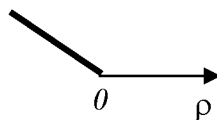


Рис. 3

в полярной системе координат имеет уравнение

- а) $\rho = \pi/2$; б) $\varphi = 1$; в) $\varphi = 2$; г) $\rho = \varphi$.

2.4. В обобщенной полярной системе координат $(\rho; \varphi)$, где $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$, укажите ВСЕ совпадающие точки:

- а) $M_1(2; \pi/4)$; б) $M_2(2; 5\pi/4)$; в) $M_3(-2; -\pi/4)$;
г) $M_4(2; 9\pi/4)$; д) $M_5(-2; 5\pi/4)$.

2.5. В полярной системе координат $(\rho; \varphi)$ укажите точку, симметричную точке $M(2; \pi/6)$ относительно полярной оси:

- а) $N(2; -\pi/6)$; б) $N(-2; \pi/6)$; в) $N(-2; -\pi/6)$;
г) $N(2; 7\pi/6)$; д) $N(-2; 7\pi/6)$.

2.6. Среди перечисленных точек $M(x, y)$ укажите ВСЕ, принадлежащие графику параметрически заданной функции $\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = t + 1 \end{cases}, t \in R$:

а) $M_1(0; 0)$; б) $M_2(0; 1)$; в) $M_3(-1; 0)$; г) $M_4(0; 3)$; д) $M_5(-6; 0)$.

3. Ряды

3.1. Известно, что ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ сходится. Тогда ряд $u_4 + u_5 + \dots + u_n + \dots$

а) сходится; б) расходится; в) может сходиться, а может расходиться.

3.2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

а) сходится; б) расходится; в) может сходиться, а может расходиться.

3.3. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

а) сходится; б) расходится; в) может сходиться, а может расходиться.

3.4. Укажите ВСЕ ряды, для исследования сходимости которых можно применять признак Даламбера:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin n\alpha}{2^n}$;
д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{2^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$.

3.5. Известно, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами выполняются условия $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{e}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$. Тогда ряд

а) сходится; б) расходится; в) может сходиться, а может расходиться.

3.6. Известно, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ выполняются условия $u_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$. Тогда

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$;

г) о пределе $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ничего утверждать нельзя.

3.7. Известно, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ выполняются условия $u_n > 0$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$. Тогда

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$;
 г) о пределе $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ничего утверждать нельзя.

3.8. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно, если

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;
 б) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится;
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится;
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

3.9. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

- а) сходится; б) расходится; в) может сходиться, а может расходиться.

3.10. Укажите ВСЕ ряды, для исследования сходимости которых можно применять признак Лейбница:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin n\alpha}{2^n}$;
 д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{2^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$.

3.11. Установите соответствие между видами сходимости и знакопеременными рядами.

- 1. абсолютно сходится; 2. условно сходится; 3. расходится.**

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+2)$

3.12. Установите соответствие между функциями и их разложениями в степенные ряды:

- 1) e^x ; 2) $\cos x$; 3) $\sin x$; 4) $\ln(1+x)$.**

- а) $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$; б) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$;
 в) $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$; г) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$.

3.13. Если $f(x) = x^4 - 1$, то коэффициент a_5 разложения данной функции в ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ равен

- а) 0,25 б) 3 в) 0 г) 1

3.14. Функция, имеющая период 2 и на $(-1; 1)$ совпадающая с функцией $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{при } x \in (-1; 0) \\ 5, & \text{при } x \in (0; 1) \end{cases}$, разложена в тригонометрический ряд Фурье.

Сумма этого ряда в точке $x = 1,5$ равна

- а) 3; б) -3; в) 5; г) -5; д) 4; е) 1.

3.15. Ряд Фурье для периодического продолжения функции $y = x^2$, заданной на $[-\pi; \pi]$, имеет вид

- а) $\frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots)$;
 б) $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$;
 в) $\frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots) + 4(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots)$;
 г) невозможно записать такой ряд.

3.16. Ряд Фурье для периодического продолжения функции $y = x/2$, заданной на $[-\pi; \pi]$, имеет вид

- а) $\frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots)$;
 б) $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$;
 в) $\frac{\pi^2}{3} - 4(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots) + 4(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots)$;
 г) невозможно записать такой ряд.

3.17. Укажите ВСЕ функции, которые являются ортогональными для функции $y = \sin x$ на $[0; \pi]$:

- а) $3x$; б) x^3 ; в) $\sin 3x$; г) $\cos x$; д) 5.

4. Кратные интегралы

4.1. Укажите ВСЕ формулы, которые применяют для вычисления площади плоской фигуры в различных системах координат:

- а) $\iint_D d\rho \, d\varphi$; б) $\iint_D \rho \, d\rho \, d\varphi$; в) $\iint_D \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi$;
 г) $\iint_D dx \, dy$; д) $\iint_D xy \, dx \, dy$.

4.2. На рисунке (рис.4) заштрихована область D, определяемая неравенствами: $x^2 + y^2 \leq 4$; $y \geq -x$; $y \geq 0$.

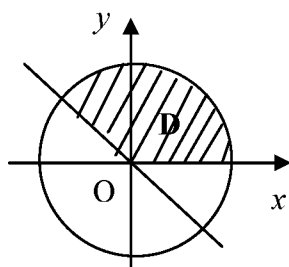


Рис. 4.

Площадь этой области (в полярной системе координат) равна

- а) $\int_0^{3\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho$; б) $\int_0^{3\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho^2 d\rho$; в) $\int_0^{3\pi/4} d\varphi \int_0^2 y d\rho$;
 г) $\int_0^{3\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho$; д) $\int_0^{3\pi/4} d\varphi \int_{-2}^2 \rho^2 d\rho$; е) $\int_{-1}^2 d\varphi \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho$.

4.3. Если $\gamma(x,y) = y$ – плотность материала пластинки D (заштрихованная на рисунке область (рис. 5)), то масса этой пластинки вычисляется по формуле

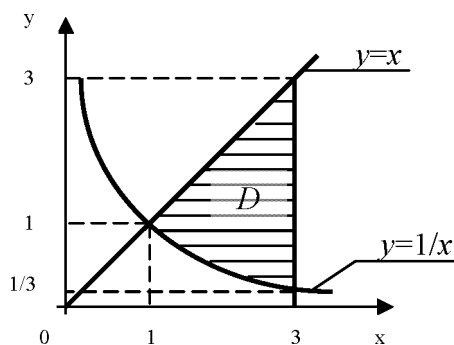


Рис. 5

- а) $\int_1^3 dx \int_{1/x}^x y dy$; б) $\int_1^3 dx \int_{1/3}^3 y dy$; в) $\int_1^3 y dx \int_{1/x}^x dy$;
 г) $\int_1^3 dx \int_{1/3}^3 dy$; д) $\int_1^3 dx \int_{1/x}^x dy$; е) $\int_1^3 dx \int_{1/3}^3 (x - 1/x) dy$.

4.4. Вычислите $\iint_D x e^{x^8+y^8} dx dy$, если область $D: y \geq x^2$; $y \leq 1$.

- а) 1 ; б) -1 ; в) 5 ; г) e ; д) 0.

4.5. Укажите ВСЕ формулы, которые применяют для вычисления объема тела V в различных системах координат:

- а) $\iiint_V \rho d\rho d\varphi dz$; б) $\iiint_V \rho d\rho d\varphi dz$;

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \iiint_V r \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi ; & \text{г)} \iiint_V r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi ; \\ \text{д)} \iiint_V dx \, dy \, dz ; & \text{е)} \iiint_V r^2 \sin \theta \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi . \end{array}$$

4.6. Укажите систему координат, в которой при вычислении тройного интеграла элемент объема $dv = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$:

а) декартова; б) цилиндрическая; в) сферическая; г) полярная.

4.7. Уравнение сферы радиуса a с центром в начале координат в сферической системе координат (r, φ, θ) имеет вид

а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; б) $r^2 + z^2 = a^2$; в) $r = a$; г) $r = a^2$; д) $r^2 \sin \theta = a$.

4.8. Если плотность $\gamma = x+y+z$, то масса пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=4$, вычисляется по формуле

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} (x+y+z) dz ; & \text{б)} \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} (x+y+z) dz ; \\ \text{в)} \int_0^4 x dx + \int_0^4 y dy + \int_0^4 z dz ; & \text{г)} \int_0^4 dx \int_0^4 dy \int_0^4 4 dz ; \quad \text{д)} \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} 4 dz . \end{array}$$

4.9. В цилиндрической системе координат объем параболоида, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 4$, равен

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^4 dz ; & \text{б)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^4 dz ; \\ \text{в)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \, d\rho \int_0^4 dz ; & \text{г)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-2}^2 \rho \, d\rho \int_0^{\rho^2} dz . \end{array}$$

5. Теория поля (векторный анализ)

5.1. Градиент функции $u = \sin(x+y+2z)$ в точке $M(0; \pi; \pi/2)$ имеет вид

а) $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$; б) $\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$; в) $-\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$; г) $2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$;
д) $3\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$; е) $\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$; ж) другой ответ.

5.2. Направление наибольшего возрастания поля $u = xy^2 + yz^3$ в точке $M(1;1;1)$ можно задать вектором

а) $3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$; б) $3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$; в) $\bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}$;
г) $2\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$; д) $3\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k}$; е) $\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$.

5.3. Поле $u = x^3 + y^2 + z$ убывает в направлении вектора $\bar{l} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ в точке

а) $M_1(0,0,1)$ б) $M_2(0,1,0)$ в) $M_3(1,0,0)$ г) $M_4(1,2,0)$ д) $M_5(1,3,0)$

5.4. Укажите ВСЕ точки, в которых находятся источники векторного поля $\vec{F} = 3\vec{i} + 2y\vec{j} + xz\vec{k}$:

а) $M_1(-1,0,1)$ б) $M_2(-2,0,2)$ в) $M_3(-3,0,3)$ г) $M_4(-5,0,5)$ д) $M_5(0,1,0)$

5.5. Векторное поле $\vec{F} = \sin(yz)\vec{i} - xy\vec{j} + xz\vec{k}$ является

а) соленоидальным, б) потенциальным, в) постоянным,
г) не имеет характерных особенностей.

5.6. Векторное поле $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$ является

а) соленоидальным, б) потенциальным, в) постоянным,
г) не имеет характерных особенностей.

5.7. Известно, что поле $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ потенциально. Вычислите $\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, где L – периметр ромба со стороной a .

5.8. Поток векторного поля $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через всю внешнюю поверхность куба $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ в направлении внешней нормали равен

5.9. Найдите модуль циркуляции векторного поля $\vec{F} = x^3\vec{i} + 7\vec{j} - z^2\vec{k}$ вдоль линии пересечения конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ плоскостью $z = 3$.

6. Теория вероятностей

6.1. В коробке 7 синих и 3 красных карандаша. Наугад взяли один карандаш. Найдите вероятность того, что он – синий.

а) $3/10$; б) $3/7$; в) $7/10$; г) $7/3$; д) 0; е) 1.

6.2. В проруби площадью 3 м^2 плавают две льдинки, площадь первой $0,6 \text{ м}^2$, площадь второй $0,3 \text{ м}^2$. Вероятность того, что падающая с неба снежинка попадет на воду, равна

а) 0,7; б) 0,3; в) 0,2; г) 0,1; д) 0,18; е) 0,94.

6.3. Известно, что $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,2$; $P(A + B) = 0,76$. Тогда можно сказать, что события A и B

а) несовместны и независимы; б) несовместны и зависимы;
в) совместны и независимы; г) совместны и зависимы.

6.4. Известно, что $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,2$; $P(\overline{A + B}) = 0,1$;

$P(AB) = 0,1$. Тогда можно сказать, что события A и B

- а) несовместны и независимы; б) несовместны и зависимы;
в) совместны и независимы; г) совместны и зависимы.

6.5. Известно, что $P(E) = 0,4$. Найдите $P(AE + \bar{A}E + \bar{E})$.

6.6. В формуле вычисления полной вероятности события A , которое может произойти только совместно с одной из гипотез $H_1, H_2, \dots, H_n$,

сумма вероятностей этих гипотез $\sum_{i=1}^n P(H_i)$ равна

- а) 1; б) 0; в) $\frac{1}{n}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $P(A)$.

6.7. Функция распределения дискретной случайной величины является

- а) непрерывной убывающей,
б) разрывной неубывающей,
в) непрерывной неубывающей,
г) разрывной убывающей,
д) постоянной.

6.8. Укажите график функции распределения непрерывной случайной величины (рис. 6):

6.9. Укажите график функции распределения случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону (рис. 6):

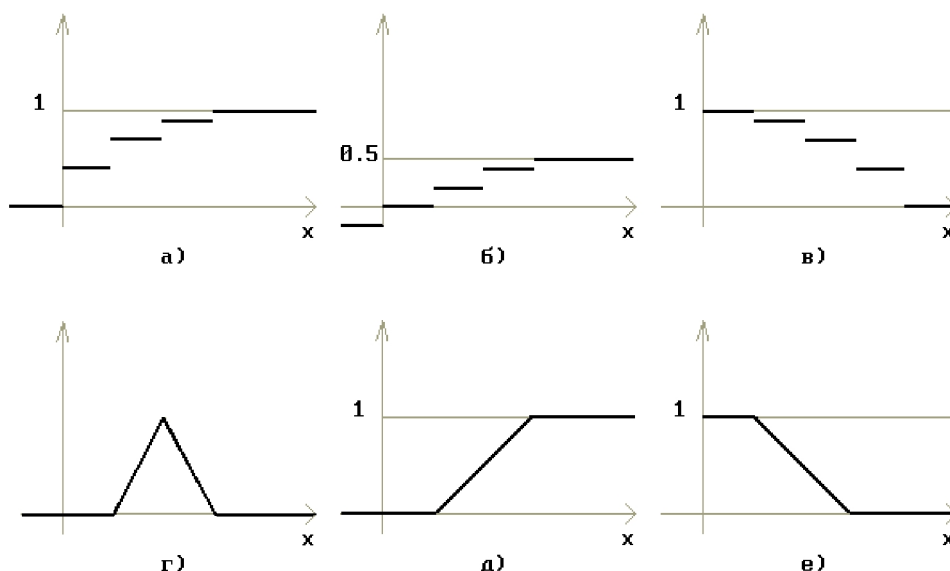


Рис. 6.

6.10. На рисунке (рис.7) изображен график плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины X . Найдите $P(0 < X < 1)$.

- а) 0; б) $1/4$; в) $1/3$; г) $1/2$; д) 1; е) другой ответ.

6.11. На рисунке (рис.7) изображен график плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины X . Найдите $P(1 < X < 3)$.

- а) 0 ; б) 1/4 ; в) 1/3 ; г) 1/2 ; д) 1 ; е) другой ответ.

6.12. На рисунке (рис.7) изображен график плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины X . Найдите дисперсию этой случайной величины X , если известно, что $M[X^2] = 1$.

- а) 0 ; б) 3/4 ; в) 1/3 ; г) 1/2 ; д) 1 ; е) другой ответ.

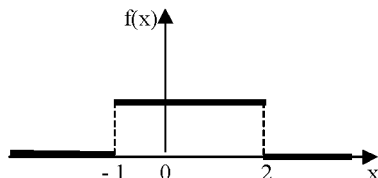


Рис. 7

6.13. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 25, причем $P(15 < X < 35) = 0,4$. Найдите $P(X < 15)$.

6.14. Мода показывает

- а) среднее значение случайной величины,
 б) наибольшее значение случайной величины,
 в) наименьшее значение случайной величины,
 г) разброс случайной величины относительно среднего значения,
 д) наиболее вероятное значение случайной величины,
 е) наименее вероятное значение случайной величины.

6.15. Укажите ВСЕ распределения, для которых математическое ожидание вычисляется по формуле $m_x = \sum_i x_i p_i$:

- а) геометрическое, б) нормальное, в) биномиальное,
 г) показательное, д) равномерное.

6.16. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $m_x = 0$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma_x = 2$. Укажите ВСЕ верные утверждения.

- а) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 1$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 1$; г) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$;
 д) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2$; е) $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 2$; ж) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 4$.

6.17. Математическое ожидание дискретной случайной величины X , распределенной по закону $P(X = k) = C_{10}^k (0,3)^k (0,7)^{10-k}$, равно

6.18. Дисперсия дискретной случайной величины X , распределенной по закону $P(X = m) = \frac{2^m}{m!} e^{-2}$, равна

6.19. Дисперсия непрерывной случайной величины X , имеющей плотность распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$, равна

- а) 6 б) 8 в) 2 г) $\sqrt{2}$ д) 4 е) другой ответ.

6.20. Случайная величина распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m_x и дисперсией σ^2 . Тогда примерный процент ее значений, попадающих внутрь диапазона $m_x \pm 3\sigma$, составляет
а) 50%, б) 68%, в) 90% г) 99%, д) 105% .

6.21. Случайные величины X и Y имеют нормальные распределения с математическими ожиданиями m_x, m_y ; дисперсиями D_x, D_y и средними квадратичными отклонениями σ_x, σ_y . Если $m_x < m_y$; $D_x > D_y$, то верно, что
а) $P(|X - m_x| < 3\sigma_x) > P(|Y - m_y| < 3\sigma_y)$;
б) $P(|X - m_x| < 3\sigma_x) < P(|Y - m_y| < 3\sigma_y)$;
в) $P(|X - m_x| < 3\sigma_x) = P(|Y - m_y| < 3\sigma_y)$;
г) выражения $P(|X - m_x| < 3\sigma_x)$ и $P(|Y - m_y| < 3\sigma_y)$ не имеют смысла.

6.22. Максимальное значение, которое может принимать функция распределения двумерной случайной величины (X, Y) , равно
а) 0; б) 0,5; в) 1; г) $+\infty$; д) нет такого значения.

6.23. Если $F(x, y)$ – функция распределения, а $f(x, y)$ – плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) , то справедливо соотношение

- а) $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$; б) $f(x, y) = \iint F(x, y) dx dy$;
в) $f(x, y) = F'_x(x, y) F'_y(x, y)$; г) $f(x, y) = \int_{-\infty}^x F(x, y) dy \int_{-\infty}^y F(x, y) dx$.

6.24. Центр рассеивания двумерного случайного вектора – это точка

- а) с координатами $(m_x; m_y)$; б) с координатами $(D_x; D_y)$;
в) с координатами $(\sigma_x; \sigma_y)$; г) в которой коэффициент корреляции $r_{xy} = 0$;

6.25. Даны две случайные величины X и Y . Пусть $F(x, y)$ – их совместная функция распределения; $F_1(x), F_2(y)$ – функции распределения величин X и Y соответственно; $F_1(x/y), F_2(y/x)$ – условные функции распределения. X и Y независимы тогда и только тогда, когда выполняется условие

- а) $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y/x)$; б) $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$;
 в) $F(x, y) = F_1(x/y) \cdot F_2(y/x)$; г) $F(x, y) = F_1(x/y) \cdot F_2(y)$.

6.26. Для независимых случайных величин X и Y коэффициент корреляции

- а) $r_{xy} = 1$; б) $0 < r_{xy} < 1$; в) $r_{xy} > 1$;
 г) $r_{xy} = 0$; д) $r_{xy} < 0$; е) $-1 < r_{xy} < 0$.

7. Математическая статистика

7.1. Упорядоченный вариационный ряд – это

- а) варианты, записанные в порядке возрастания (убывания),
 б) варианты, сгруппированные по отдельным значениям,
 в) варианты, записанные в порядке наблюдения (измерения),
 г) варианты, сгруппированные по интервалам значений,
 д) диапазон наблюдаемых значений случайной величины.

7.2. В выборке объема $n=50$ варианта $x=3$ встречается 20 раз. Тогда относительная частота этой варианты равна

7.3. Дан статистический ряд распределения выборки объема 10

x_i	6	7	8
m_i	3	2	m_3

где m_i - частота варианты x_i . Тогда значение m_3 равно

7.4. По выборке объема $n=15$ найдена эмпирическая функция распределения $F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3 \\ \frac{1}{3}, & \text{при } 3 < x \leq 5 \\ \frac{2}{3}, & \text{при } 5 < x \leq 7 \\ 1, & \text{при } x > 7 \end{cases}$. Тогда частота варианты $x=7$ равна

7.5. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=60$, полигон частот которой изображен на рисунке (рис.8).

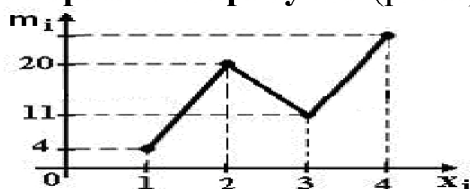


Рис. 8

Тогда число вариант $x_i=4$ в выборке равно

7.6. Установите соответствие между полигонами (рис. 9.1 – 9.3) и возможными теоретическими законами распределения:

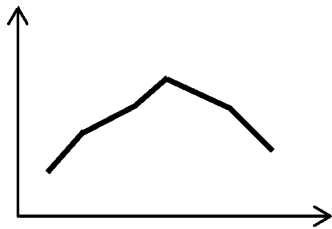


Рис. 9.1

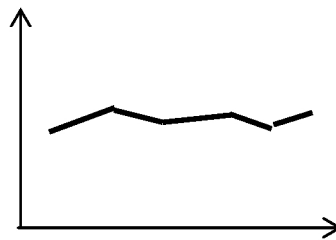


Рис. 9.2

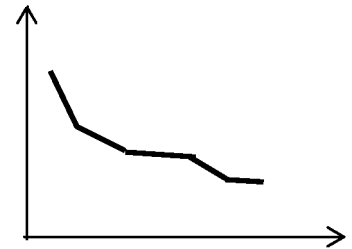


Рис. 9.3

- а) нормальное распределение;
- б) равномерное распределение;
- в) показательное распределение.

7.7. По выборке объема $n=80$ построена гистограмма частот (рис. 10), где m_i - частота варианты x_i , Δx - длина интервала.

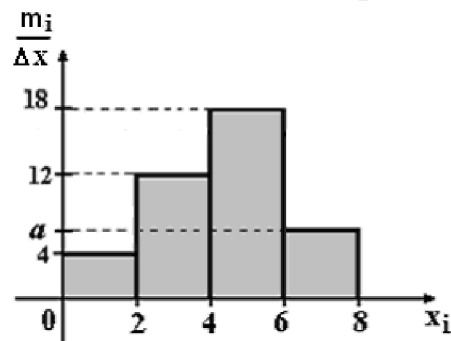


Рис. 10

Тогда значение a равно

7.8. Площадь гистограммы относительных частот

- а) является постоянной величиной;
- б) зависит от количества столбцов;
- в) зависит от объема генеральной совокупности;
- г) зависит от среднего отклонения выборки.

7.9. Установите соответствие между гистограммами (рис. 11.1 – 11.3) и возможными теоретическими законами распределения:

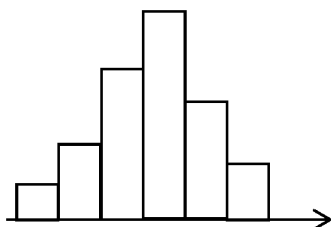


Рис. 11.1

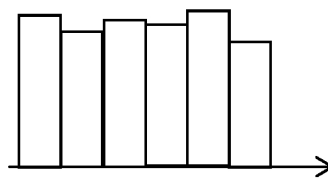


Рис. 11.2

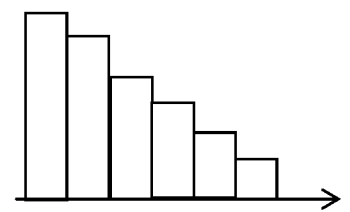


Рис. 11.3

- а) нормальное распределение;
- б) равномерное распределение;
- в) показательное распределение.

7.10. Выборочное среднее – это оценка

- а) теоретического распределения генеральной совокупности,
- б) математического ожидания генеральной совокупности,
- в) дисперсии генеральной совокупности,
- г) среднего квадратичного отклонения генеральной совокупности.

7.11. Стандартное отклонение является

- а) интервальной оценкой для математического ожидания,
- б) точечной оценкой для математического ожидания,
- в) точечной оценкой для дисперсии,
- г) интервальной оценкой для среднего квадратичного отклонения,
- д) точечной оценкой для среднего квадратичного отклонения.

7.12. Мода – это

- а) количество значений вариантов в выборке,
- б) значение варианты, которое встречается в выборке чаще всего,
- в) среднее арифметическое всех значений вариантов в выборке,
- г) длина диапазона значений вариантов в выборке,
- д) значение варианты, находящееся ровно посередине упорядоченного вариационного ряда.

7.13. Укажите ВСЕ свойства, которыми обладает оценка дисперсии

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \text{ где } \bar{x} - \text{выборочное среднее:}$$

- а) несмещенная, б) смещенная, в) состоятельная, г) несостоятельная.

7.14. Медиана для выборки 5, 6, 3, 1, 1, 4 равна

7.15. Выборочное среднее для выборки 9, 7, 3, 3, 1, 4, 8 равно

7.16. Доверительный интервал для параметра – это

- а) интервал, в который попадает значение параметра с заданной доверительной вероятностью,
- б) вероятность, с которой значение параметра попадает в некоторый интервал,
- в) заранее заданный интервал значений параметра,
- г) приближенное значение параметра, вычисленное с заданной точностью.

7.17. По выборке объема n для математического ожидания найдены доверительные интервалы $(a-\delta; a+\delta)$ при разных доверительных вероятностях γ . Установите соответствие между доверительными интервалами и доверительными вероятностями.

1) (16,63; 19,37); 2) (16,15; 19,85); 3) (15,76; 20,24)

- а) $\gamma = 0,9$; б) $\gamma = 0,95$; в) $\gamma = 0,99$

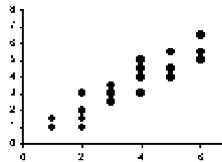
7.18. Укажите ВСЕ гипотезы, которые являются статистическими:

- а) на данную продукцию можно выдать сертификат качества,
- б) средняя долговечность изделия составляет 25 месяцев,
- в) стандартное отклонение размера детали равно 0,25 мм,
- г) продукция фирмы А лучше продукции фирмы В.

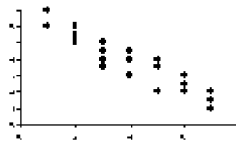
7.19. Уровень значимости критерия определяется как

- а) вероятность допустить ошибку первого рода,
- б) вероятность допустить ошибку второго рода,
- в) доверительная вероятность для исследуемого параметра,
- г) вероятность принять правильное решение,
- д) трудоемкость применения данного критерия.

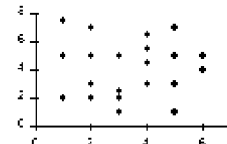
7.20. Укажите рисунок, на котором изображено поле корреляции параметров X и Y , если уравнение прямой регрессии имеет вид $\bar{y}_x = -2,1x + 5,4$ (рис. 12).



а)



б)



в)

Рис. 12

7.21. Укажите рисунок, на котором изображено поле корреляции параметров X и Y , если коэффициент корреляции $r_{xy} = 0,05$ (рис. 12).

8. Операционное исчисление¹

8.1. Установите соответствие между оригиналами, заданными при $t \geq 0$, и их изображениями

1) $t \cdot \sin \beta t$; 2) $t \cdot \operatorname{sh} \beta t$; 3) $t \cdot \cos \beta t$; 4) $t \cdot \operatorname{ch} \beta t$

а) $\frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}$; б) $\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$; в) $\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$; г) $\frac{2\beta p}{(p^2 - \beta^2)^2}$.

8.2. Показатель роста оригинала $f(t) = \begin{cases} \sin 4it & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$ равен

¹ Задания этого раздела составлены О.С. Ивановой.

8.3. Изображение функции $f(t) = \begin{cases} \cos \frac{t}{2}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ имеет вид

а) $\frac{p}{p^2+1}$; б) $\frac{1}{2(p^2+1)}$; в) $\frac{4p}{4p^2+1}$; г) $\frac{p}{4p^2+1}$; д) $\frac{2}{4p^2+1}$.

8.4. Изображение функции $f(t) = \begin{cases} (t+1)^2, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ имеет вид

а) $\frac{2e^{-p}}{p^3}$; б) $\frac{e^{-p}}{p^3}$; в) $\frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$;
г) $\frac{6}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}$; д) $\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}$.

8.5. Используя теорему запаздывания оригинала, найдите изображение

функции $f(t) = \begin{cases} \sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right), & t > \frac{\pi}{9}, \\ 0, & t < \frac{\pi}{9}. \end{cases}$

а) $\frac{3}{p^2+9} \cdot e^{-\frac{\pi}{9}p}$; б) $\frac{3}{p^2+9} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}p}$; в) $\frac{p}{p^2+9} \cdot e^{-\frac{\pi}{9}p}$;
г) $\frac{3}{p^2+9}$; д) $\frac{p}{p^2+9}$.

8.6. Оригинал при $t > 0$ изображения $F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+5}$ равен

а) $e^{-t} \cos 2t$; б) $e^{-t} \sin 2t$; в) $e^t \cos 2t$;
г) $e^t \sin 2t$; д) $te^{-t} \sin 2t$; е) $te^t \cos 2t$.

8.7. Используя теорему интегрирования оригинала или другие свойства преобразования Лапласа, найдите оригинал при $t > 0$, если изображение

$F(p) = \frac{1}{p(p^2+4)}$.

а) $\frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$; б) $\frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$; в) $\frac{1}{4}(\operatorname{ch} 2t - 1)$;
г) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2t - 1)$; д) $\frac{1}{4} \cos 2t$.

8.8. Изображение свертки $\int_0^t e^{5\tau} \cos(t-\tau) d\tau$ имеет вид

- а) $\frac{p}{(p^2+1)^2}$; б) $\frac{p}{(p-5)((p-5)^2+1)}$; в) $\frac{p^2}{(p-5)(p^2+25)}$;
 г) $\frac{5}{(p-5)(p^2+1)}$; д) $\frac{p}{(p-5)(p^2+1)}$.

8.9. Изображение функции $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1-t & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{при } t > 1 \end{cases}$ имеет вид

- а) $\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^2}$; б) $\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2}$; в) $\frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2}$;
 г) $\frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p^2}$; д) $-\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^2}$.

8.10. Применяя вторую теорему разложения или другие свойства преобразования Лапласа, восстановите оригинал, указав его выражение при $t > 0$, если изображение $F(p) = \frac{p}{(p^2+120)(p^2+121)}$.

- а) $\frac{1}{2} \sin 2\sqrt{30} \cdot t - \frac{1}{2} \sin 11t$; б) $\cos 2\sqrt{30} \cdot t - \cos 11t$;
 в) $\frac{1}{2} \cos 2\sqrt{30} \cdot t - \frac{1}{2} \cos 11t$; г) $\sin 2\sqrt{30} \cdot t - \sin 11t$;
 д) $\sin 2\sqrt{30} \cdot t - \cos 11t$.

8.11. Операторное уравнение, полученное после применения преобразования Лапласа к дифференциальному уравнению $x'' - x = \sin 2t$ с начальными условиями $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, имеет вид

- а) $(p^2-1) \cdot X(p) = \frac{2}{p^2+4} + p$; б) $(p^2-p) \cdot X(p) = \frac{2}{p^2+4} + 1$;
 в) $(p^2-p) \cdot X(p) = \frac{1}{p^2+4} + p$; г) $(p^2-1) \cdot X(p) = \frac{p}{p^2+4} + 1$.

8.12. Система операторных уравнений, которая получается после применения преобразования Лапласа к системе дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x + y \end{cases}$ при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, имеет вид

$$\text{a)} \begin{cases} \int (1+p) \cdot X(p) - 2Y(p) = 0, \\ 3X(p) + (1+p) \cdot Y(p) = 0; \end{cases}$$

$$\text{B)} \begin{cases} \int X(p) - (2-p) \cdot Y(p) = 0, \\ 3X(p) + (1-p) \cdot Y(p) = 0; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} \int (1-p) \cdot X(p) - 2Y(p) = 0, \\ (3-p) \cdot X(p) + Y(p) = 0; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \int (1-p) \cdot X(p) - 2Y(p) = 0, \\ 3X(p) + (1-p) \cdot Y(p) = 0. \end{cases}$$

Подсказки

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

- 1.1. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, где $\det A$ – определитель матрицы A .
- 1.2. При транспонировании величина определителя не меняется.
- 1.3. Воспользуйтесь пропорциональностью строк.
- 1.4. Если матрица A имеет размерность $m \times n$, а матрица B размерность $n \times p$, то произведение AB будет иметь размерность $m \times p$.
- 1.5. Проверьте размерности сомножителей.
- 1.6. Вычислите определитель матрицы B .
- 1.7. Воспользуйтесь формулой для вычисления обратной матрицы или для каждого ответа проверьте выполнение условия $A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 1.8. Примените метод исключения неизвестных (метод Гаусса).
- 1.9. Примените метод исключения неизвестных (метод Гаусса).
- 1.10. Вычислите главные определители каждой из систем.
- 1.11. Вычислите главные определители каждой из систем и проанализируйте те системы, у которых эти определители равны нулю. Можно сразу применить метод Гаусса.
- 1.12. Представьте определитель в виде суммы двух определителей и воспользуйтесь свойствами линейно зависимых векторов.
- 1.13. Если два вектора линейно зависимы, то их координаты пропорциональны.
- 1.14. Если $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.
- 1.15. Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.
- 1.16. Учтите, что $\vec{b} = -6\vec{a}$.
- 1.17. Работа вычисляется как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения.
- 1.18. Из условия следует, что $\vec{a} = -2\vec{b}$.
- 1.20. Убедитесь, что $\sin \varphi = \cos \varphi$, где $\varphi = \angle BAC$.
- 1.21. $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.
- 1.22. Векторное произведение перпендикулярно каждому из векторов-сомножителей, следовательно, $\vec{c} \perp \vec{a}$.
- 1.23. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.
- 1.24. Известно, что $\vec{c} \vec{b} \vec{a} = -\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.
- 1.25. $(\vec{a} + \vec{b}) \vec{b} \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} + \vec{b} \vec{b} \vec{c}$.
- 1.26. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 2x + y + 1 = 0. \end{cases}$$

1.27. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 5x + 3y = 0, \\ 2x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

1.29. Проанализируйте ответы, учитывая, что уравнение плоскости имеет вид $Ax + Cz + D = 0$ и координаты точки B должны обращать это уравнение в тождество.

1.30. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $B(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору с координатами $(m; n; p)$, имеют вид

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}.$$

1.31. Уравнение плоскости, проходящей через точку $B(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору нормали $\vec{n}(A, B, C)$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

1.32. Проанализируйте взаимное расположение нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой.

1.33. Используйте геометрические определения кривых второго порядка.

1.34. Обозначим ε – эксцентриситет, тогда для эллипса $\varepsilon < 1$, для гиперболы $\varepsilon > 1$, для параболы $\varepsilon = 1$, для окружности $\varepsilon = 0$.

1.35. Если $F(c; 0)$ – фокус, то

- для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: $c^2 = a^2 - b^2$;
- для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $c^2 = a^2 + b^2$;
- для параболы $y^2 = 2px$: $c = \frac{p}{2}$.

1.36. Преобразуйте уравнение к виду $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

2. Различные системы координат

2.1. Вычислите значение функции при $\varphi = 0$ и проанализируйте предложенные рисунки.

2.2. Уравнение задает луч.

2.3. Угол между лучом и полярной осью больше $\pi/2$.

2.4. Постройте точки в полярной системе координат.

2.5. Постройте точки в полярной системе координат.

2.6. Найдите возможные значения параметра для каждой точки.

3. Ряды

3.1. Используйте свойства сходящихся рядов.

3.3. Вспомните необходимый признак сходимости

3.5. Проверьте выполнение необходимого признака сходимости.

3.6. Используйте признак Даламбера и необходимый признак сходимости ряда.

3.8. Вспомните определение условно сходящегося ряда.

3.10. Найдите знакочередующиеся ряды.

3.12. Используйте стандартные разложения функций в ряд Маклорена.

3.13. Коэффициенты ряда Тейлора для функции $f(x)$ вычисляются по формуле $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

3.14. Постройте график периодической функции и воспользуйтесь теоремой о сходимости ряда Фурье.

3.15, 3.16. Учтите четность или нечетность функции.

4. Кратные интегралы

4.2. При переходе к полярной системе координат $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ область D определяется системой неравенств: $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{cases}$, $S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$.

4.3. Масса плоской пластинки D вычисляется по формуле $m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$, где $\gamma(x, y)$ – плотность материала.

4.4. Подынтегральная функция является нечетной по аргументу x .

4.5. Объем тела V вычисляется по формуле $V = \iiint_V dv$.

4.7. В сферической системе координат (φ, θ, r) координата r обозначает расстояние от точки до начала координат.

4.8. Масса тела V с плотностью $\gamma(x, y, z)$ вычисляется по формуле $m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz$.

4.9. Объем тела V в цилиндрической системе координат $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$ равен $V = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz$.

5. Теория поля

5.1. Градиент поля U в точке M вычисляется по формуле

$$\text{grad}U(M) = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_M \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_M \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_M \bar{k}.$$

5.2. Направление наибольшего возрастания поля U определяется вектором градиента, который вычисляется по формуле $\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$.

5.3. Поле U убывает в направлении вектора $\vec{l}$, если производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial l}$ отрицательна.

5.4. Источники находятся в точках, где $\operatorname{div} \vec{F} > 0$.

5.5. Поле соленоидально, если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, потенциально, если $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

5.6. Поле соленоидально, если $\operatorname{div} \vec{F} = 0$, потенциально, если $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

5.7. В потенциальном поле криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5.8. Примените формулу Гаусса-Остроградского.

5.9. Примените формулу Стокса.

6. Теория вероятностей

6.1. $P(A) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число всех равновозможных исходов}}$.

6.2. Воспользуйтесь понятием геометрической вероятности.

6.3, 6.4. $P(A+B) = \begin{cases} P(A)+P(B), & \text{если } A, B - \text{несовместны,} \\ P(A)+P(B)-P(AB), & \text{если } A, B - \text{совместны;} \end{cases}$
 $P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), & \text{если } A, B - \text{зависимы,} \\ P(A)P(B), & \text{если } A, B - \text{независимы.} \end{cases}$

6.5. $P(A\bar{E}+\bar{A}E+\bar{E}) = P(E(A+\bar{A})+\bar{E})$.

6.7. Вспомните определение и свойства функции распределения.

6.8. Функция распределения непрерывной случайной величины – это непрерывная неубывающая функция, принимающая значения от нуля до единицы.

6.9. Случайная величина, распределенная по биномиальному закону, является дискретной.

6.10. Воспользуйтесь геометрической интерпретацией вероятности попадания непрерывной случайной величины на заданный интервал.

6.11. $P(1 < X < 3) = P(1 < X < 2) + P(2 < X < 3)$.

6.12. $D_x = M[X^2] - m_x^2$; на рисунке график плотности распределения равнономерной случайной величины.

6.13. Воспользуйтесь симметрией графика плотности распределения вероятностей нормальной случайной величины.

6.14. Вспомните определение моды.

6.15. Приведена формула для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины.

6.16. Для непрерывной случайной величины $m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$;

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx; \quad \sigma_x = \sqrt{D_x}, \quad \text{а также} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

6.17. Для биномиального распределения $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ математическое ожидание $m_x = np$.

6.18. Для распределения Пуассона $P_\lambda(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ дисперсия $D_x = \lambda$.

6.19. Для нормального распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ дисперсия $D_x = \sigma^2$.

6.20. Для нормально распределенной случайной величины X $P(m_x - 3\sigma < X < m_x + 3\sigma) = 0,9973$.

6.21. Вспомните «правило трех сигм» для нормальной случайной величины.

6.22. Для функции распределения $F(x, y)$ область значений $[0; 1]$.

7. Математическая статистика

7.2. Относительная частота $w_i = \frac{\text{частота варианты}}{\text{объем выборки}}$.

7.3. Сумма всех частот равна объему выборки.

7.4. Таблица относительных частот имеет вид

x_i	3	5	7
w_i	1/3	1/3	1/3

7.5. Сумма всех частот равна объему выборки.

7.6. Полигон примерно соответствует графику плотности распределения вероятностей случайной величины.

7.7. Сумма площадей всех столбцов гистограммы равна объему выборки.

7.9. Верхний контур гистограммы приблизительно соответствует графику плотности распределения исследуемой случайной величины.

7.14. Для выборки объема n медиана вычисляется по формуле

$$\tilde{x} = \begin{cases} (x_k + x_{k+1})/2 & \text{при } n = 2k, \\ x_{k+1} & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases}$$

7.15. Для выборки объема n выборочное среднее вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

7.17. С ростом доверительной вероятности (надежности) γ длина доверительного интервала увеличивается.

7.18. Статистическими являются гипотезы о виде или параметрах распределения генеральной совокупности либо о равенстве (неравенстве) числовых характеристик двух генеральных совокупностей.

8. Операционное исчисление

8.1. Воспользуйтесь таблицей оригиналов и изображений.

8.2. Для оценки $f(t)$ используйте формулу $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

8.3. Используйте формулу $\cos \beta t \rightleftharpoons \frac{p}{p^2 + \beta^2}$.

8.4. Раскройте скобки и воспользуйтесь свойством линейности.

8.5. Преобразуйте $\sin(3t - \frac{\pi}{3}) = \sin 3(t - \frac{\pi}{9})$.

8.6. Выделите полный квадрат $p^2 + 2p + 5 = (p + 1)^2 + 4$ и примените свойство смещения в области изображения.

8.7. 1 способ. Для $F_1(p) = \frac{1}{p^2 + 4}$ оригинал имеет вид $f_1(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$ при $t \geq 0$. Далее примените теорему интегрирования оригинала.

2 способ. Разложите $F(p)$ на сумму простейших дробей и примените свойство линейности.

8.8. Используйте теорему умножения изображений, где оригиналы при $t \geq 0$ $f_1(t) = e^{5t}$ и $f_2(t) = \cos t$.

8.9. Используя единичную функцию Хевисайда $\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$, запишите оригинал в виде $f(t) = 1 - t + (t - 1) \cdot \eta(t - 1)$ и примените теорему запаздывания оригинала и свойство линейности.

8.10. Изображение $F(p)$ является аналитической функцией на комплексной плоскости за исключением особых точек $p_{1,2} = \pm 2\sqrt{30}i$ и $p_{3,4} = \pm 11i$.

8.11. Примените преобразование Лапласа к обеим частям уравнения.

8.12. Примените преобразование Лапласа к обоим уравнениям.

Решения²

1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1.3. Так как строки пропорциональны, то матрица может быть преобразована к виду $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, следовательно, ее ранг равен 1.

1.4. Матрица B имеет размерность 2×2 , матрица A размерность 1×2 , следовательно, у транспонированной матрицы A^T размерность 2×1 , тогда произведение BA^T будет иметь размерность 2×1 .

1.5. Так как количество столбцов левой матрицы не равно количеству строк правой матрицы, то выполнить умножение невозможно.

1.6. Так как определитель $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$, то обратной матрицы B^{-1} не существует.

1.7. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует. Вычислим алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$A_{11} = 2; A_{12} = 1; A_{21} = 2; A_{22} = 2$. Таким образом, $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Здесь можно не вычислять матрицу A^{-1} , а анализировать ответы, то есть проверять выполнение условия $A \cdot A^{-1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, причем сразу очевидно, что ответ г) не подходит.

1.8. Применив метод исключения неизвестных (метод Гаусса), получим, что данная система равносильна системе $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y + z = 5 \end{cases}$, которая имеет бесчисленное множество решений.

1.9. Применив метод исключения неизвестных (метод Гаусса), получим, что данная система равносильна системе $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y + z = 5, \\ 0 = 7. \end{cases}$ Так как последнее ра-

венство не имеет смысла, то система не имеет решений.

1.10. Вычислим главные определители каждой из систем:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$; б) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$; в) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$;

² Во многих случаях возможны и другие способы рассуждения и методы решения.

г) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$. В тех случаях, когда главный определитель системы равен нулю, правило Крамера применять нельзя.

1.11. Если главный определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение. В системах б) и в) главный определитель равен нулю, но в случае б) коэффициенты и свободные члены уравнений пропорциональны, поэтому система равносильна одному уравнению с двумя неизвестными и, следовательно, имеет бесчисленное множество решений, а в случае в) система вообще не имеет решений.

1.12. Преобразуем определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Второй из определителей равен нулю, так как в нем есть равные строки, а поскольку векторы $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ линейно зависимы, то первый определитель также равен нулю. Таким образом, искомый определитель равен нулю.

1.13. Векторы $\vec{a}(x; 1; 2)$ и $\vec{b}(6; 2; 4)$ линейно зависимы, следовательно, $\frac{x}{6} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Отсюда получаем $x = 3$.

1.14. Скалярное произведение равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4x + 3 - 3$. Так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$, то имеем $4x = 8$, откуда $x = 2$.

1.15. Векторы $\vec{a}(2; p; -1)$ и $\vec{b}(p; 1; 3)$ перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2p + p - 3 = 0$. Отсюда $p = 1$.

1.16. Заметим, что $\vec{b} = -6\vec{a}$, следовательно, векторы коллинеарны и направлены в противоположные стороны, то есть угол между ними 180° .

Можно вычислить $\cos \varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-6 - 24 - 54}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{36+144+324}} = -1$, откуда $\varphi = 180^\circ$.

1.17. Работа вычисляется как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения $\vec{F} \cdot \vec{AB}$. Так как $\vec{F}(2; 3; -2)$, $\vec{AB}(2; 3; 2)$, то работа $\vec{F} \cdot \vec{AB} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = 9$.

1.18. Так как $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{0}$, то $\vec{a} = -2\vec{b}$, то есть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\varphi = 180^\circ$, и $|\vec{a}| = |-2\vec{b}| = 4$. Скалярное произведение векторов можно вычислить по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$, следовательно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |-2\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cos 180^\circ = 4 \cdot 2 \cdot (-1) = -8.$$

1.20. Для векторного произведения $|\overline{AB} \times \overline{AC}| = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \sin \varphi$, для скалярного произведения $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cos \varphi$, где $\varphi = \angle BAC$. Из условия $|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$, поэтому $|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \sin \varphi = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cos \varphi$, тогда $\sin \varphi = \cos \varphi$, откуда $\varphi = 45^\circ$.

1.21. Так как $\overline{a} + 2\overline{b} = \overline{0}$, то $\overline{a} = -2\overline{b}$, следовательно, векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. Тогда их векторное произведение $\overline{a} \times 2\overline{b} = \overline{0}$, значит, и $|\overline{a} \times \overline{b}| = 0$.

1.22. Вектор $\overline{c}$ равен векторному произведению векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, следовательно, $\overline{c}$ перпендикулярен вектору $\overline{a}$, поэтому скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{c}$ равно нулю. Все остальные данные задачи избыточны.

1.23. Так как $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$, то векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны, поэтому их смешанное произведение равно нулю.

1.24. По свойству смешанного произведения $\overline{c} \overline{b} \overline{a} = -\overline{a} \overline{b} \overline{c} = -3$.

1.25. По свойствам смешанного произведения имеем $\overline{a} \overline{b} \overline{c} = (\overline{a} + \overline{b}) \overline{b} \overline{c} = \overline{a} \overline{b} \overline{c} + \overline{b} \overline{b} \overline{c} = 6 + 0 = 6$.

1.26. Для отыскания точки пересечения прямых надо решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$. Эта система решений не имеет, поэтому прямые не пересекаются.

1.27. Для отыскания точки пересечения прямых надо решить систему уравнений $\begin{cases} 5x + 3y = 0, \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$. После преобразований получим $x = 3$, $y = -5$, то есть прямые пересекаются в точке $(3; -5)$.

1.28. Преобразуем уравнение прямой $y = \frac{3}{2}x - 4$, откуда угловой коэффициент равен $k = \frac{3}{2}$.

1.29. Так как плоскость параллельна оси Oy , то ее уравнение имеет вид $Ax + Cz + D = 0$. Поэтому варианты ответа а), в) и д) не подходят. Подставляя координаты точки $B(3; -1; 1)$ в оставшиеся уравнения, получаем:

- в случае б) $2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 3 = 0$, то есть точка B принадлежит указанной плоскости,
- в случае г) $3 - 1 \neq 0$, то есть точка B не принадлежит указанной плоскости. Таким образом, выбираем ответ б).

1.30. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $B(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору с координатами $(m; n; p)$, имеют вид

$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0. \end{cases} \quad \text{Поэтому выбираем ответ} \quad \begin{cases} x = 2t, \\ y = -2, \\ z = t + 3. \end{cases}$$

1.31. Плоскость перпендикулярна прямой $x = 2t, y = t, z = 0$, следовательно, перпендикулярна направляющему вектору прямой $\vec{s} = (2; 1; 0)$, который таким образом можно рассматривать как вектор нормали. Итак, уравнение плоскости имеет вид $2(x - 3) + (y + 1) = 0$. Раскрыв скобки, получим $2x + y - 5 = 0$.

1.32. Точка $M(1; 0; -2)$ принадлежит прямой, но не лежит в плоскости, так как при подстановке ее координат в уравнение плоскости не получается тождество. Рассмотрим вектор нормали плоскости $\vec{n}(2, -1, 1)$ и направляющий вектор прямой $\vec{s}(4, -2, 2)$. Так как $\vec{s} = 2\vec{n}$, то векторы $\vec{s}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, поэтому прямая перпендикулярна плоскости.

1.33. Множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух заданных точек (фокусов) постоянна, называется эллипсом, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, поэтому выбираем ответ

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

1.34. Кривая на плоскости, для которой эксцентриситет больше 1, является гиперболой, ее каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, поэтому выби-

раем ответ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

1.35. Если $F(c; 0)$ – фокус кривой второго порядка, то справедливы следующие соотношения:

- для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: $c^2 = a^2 - b^2$;
- для гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $c^2 = a^2 + b^2$;
- для параболы $y^2 = 2px$: $c = \frac{p}{2}$.

Вычисляя значение c для каждого из предложенных ответов, получаем, что точка с координатами $(5; 0)$ является фокусом гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1.36. Преобразуем уравнение $x^2 + y^2 - 4x = 0$ к виду $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Переносом начала координат в точку $(2; 0)$ получаем каноническое уравнение окружности $x_1^2 + y_1^2 = 4$.

2. Различные системы координат

2.1. При $\varphi = 0$ имеем $\rho = \cos 0 = 1$. Этому условию удовлетворяют только рис. б) и г). Но уравнение окружности с центром в полюсе (рис. б) имеет вид $\rho = \text{const}$, следовательно, выбираем рис. г).

2.2. Графиком является луч, выходящий из полюса, образующий с полярной осью острый угол (равный 1 радиану), поэтому ответом служит рис. а).

2.3. Уравнение луча в полярной системе координат имеет вид $\varphi = \text{const}$, а так как у нас угол между лучом и полярной осью тупой, то выбираем ответ $\varphi = 2$ ($2 > \pi/2$).

2.4. Смотри рис. 13.

2.5. Смотри рис. 14.

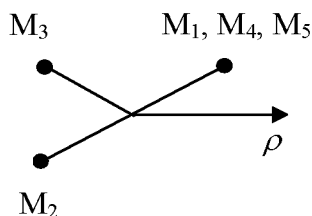


Рис. 13

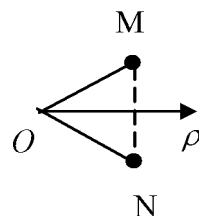


Рис. 14

2.6. Найдем возможные значения параметра, подставляя координаты каждой точки в параметрические уравнения функции.

$$M_1(0; 0): \begin{cases} 0 = 2t - 4, \\ 0 = t + 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} t = 2, \\ t = -1 \end{cases} - \text{противоречие};$$

$$M_2(0; 1): \begin{cases} 0 = 2t - 4, \\ 1 = t + 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} t = 2, \\ t = 0 \end{cases} - \text{противоречие};$$

$$M_3(-1; 0): \begin{cases} -1 = 2t - 4, \\ 0 = t + 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} t = 3/2, \\ t = -1 \end{cases} - \text{противоречие};$$

$$M_4(0; 3): \begin{cases} 0 = 2t - 4, \\ 3 = t + 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} t = 2, \\ t = 2 \end{cases} - \text{подходит};$$

$$M_5(-6; 0): \begin{cases} -6 = 2t - 4, \\ 0 = t + 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} t = -1, \\ t = -1 \end{cases} - \text{подходит}.$$

Таким образом, получили две точки, координаты которых удовлетворяют заданным уравнениям $M_4(0; 3)$ и $M_5(-6; 0)$.

3. Ряды

3.1. Отбрасывание конечного числа первых членов ряда не влияет на сходимость числового ряда, поэтому ряд $u_4 + u_5 + \dots + u_n + \dots$ сходится.

3.2. Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ не является достаточным для сходимости числового ряда, поэтому ряд может сходиться, а может расходиться.

3.3. Не выполнен необходимый признак сходимости, следовательно, ряд расходится.

3.4. Признак Даламбера применим к числовым рядам с положительными членами. В данном случае это ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{2^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{2^n}$. Все остальные ряды являются знакопеременными.

3.5. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{e} \neq 0$, то не выполняется необходимый признак сходимости, следовательно, ряд расходится.

3.6. По признаку Даламбера ряд сходится. А если ряд сходится, то по необходимому признаку $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

3.7. По признаку Даламбера ряд расходится. В этом случае предел общего члена ряда может принимать любые значения, а может и не существовать, то есть о величине $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ничего утверждать нельзя.

3.9. Для знакопеременного ряда указанное условие не дает ответа на вопрос о сходимости, поэтому ряд может сходиться, а может расходиться.

3.10. Признак Лейбница можно применять только к знакочередующимся рядам. В данном случае это ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{2^n}$ (так как $\cos n\pi = (-1)^n$).

3.11. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ сходится абсолютно, так как $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится как геометрический ряд, у которого $q = \frac{1}{2} < 1$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ сходится условно, так как для него выполняются все условия признака Лейбница, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ расходится, что можно доказать с помощью признака сравнения или интегрального признака сходимости.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+2)$ расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то есть не выполняется необходимый признак сходимости.

3.12. Используем стандартные разложения функций в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

3.13. При разложении функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 коэффициенты вычисляются по формуле $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. В нашем случае

$f(x) = x^4 - 1$, следовательно, $f^{(5)}(x) = 0$, откуда $a_5 = 0$.

3.14. Сумма тригонометрического ряда Фурье периодической функции $f(x)$ в точках непрерывности функции сходится к значению этой функции. В нашем случае функция $f(x)$ определена на промежутке $(-1; 1)$, а сумма ряда Фурье $s(x)$ равна периодическому продолжению этой функции (с периодом 2) на всю числовую прямую (рис. 15). Так как точка $x = 1,5$ является точкой непрерывности для этого периодического продолжения, то $s(1,5) = f(-0,5) = 3$.

3.15. Так как функция $y = x^2$ – четная, то разложение ее периодического продолжения в ряд Фурье содержит только косинусы.

3.16. Так как функция $y = x/2$ – нечетная, то разложение ее периодического продолжения в ряд Фурье содержит только синусы.

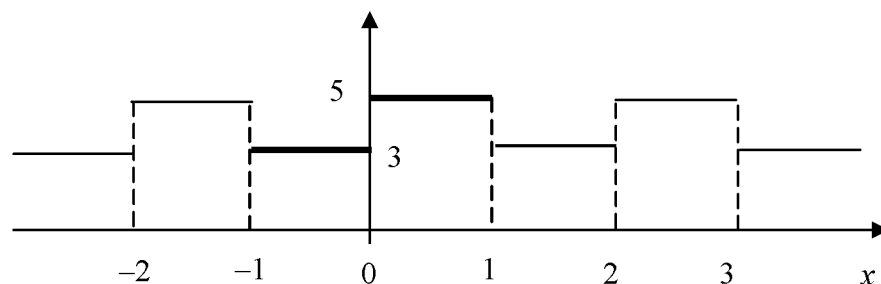


Рис. 15

3.17. Тригонометрические функции на $[0; \pi]$ образуют ортогональную систему функций, поэтому для функции $y = \sin x$ ортогональными являются $\sin 3x$ и $\cos x$.

4. Кратные интегралы

4.1. Площадь плоской фигуры в декартовой системе координат вычисляется по формуле $S = \iint_D dx dy$, в полярных координатах $S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$.

4.2. При переходе к полярной системе координат $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$ примет вид $\rho = 2$, луч $y = 0$ задается уравнением $\varphi = 0$, а луч $\begin{cases} y = -x \\ y \geq 0 \end{cases}$ уравнением $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Таким образом, область D в полярной системе координат определяется системой неравенств $\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{cases}$, поэтому площадь вычисляется как

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi = \int_0^{3\pi/4} d\varphi \int_0^2 \rho d\rho.$$

4.3. Если $\gamma(x, y)$ – плотность материала плоской пластинки D , то масса этой пластинки в декартовой системе координат вычисляется по формуле

$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy$. Так как область D определяется системой неравенств

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{x} \leq y \leq x \end{cases} \text{ (см. рис.5), то } m = \int_1^3 dx \int_{1/x}^x y dy.$$

4.4. Область D симметрична относительно оси Oy (см. рис. 16).

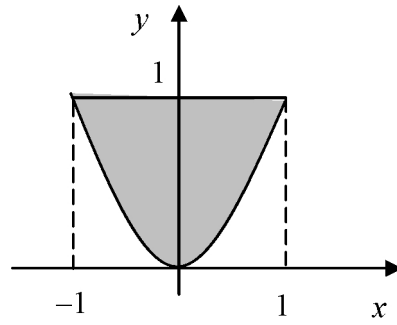


Рис. 16

Преобразуем интеграл $\iint_D x e^{x^8+y^8} dx dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x e^{x^8+y^8} dx$. Так как функция $f(x, y) = x e^{x^8+y^8}$ является нечетной по аргументу x , а область интегрирования симметрична относительно прямой $x = 0$, то $\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x e^{x^8+y^8} dx = 0$, следовательно, $\iint_D x e^{x^8+y^8} dx dy = 0$.

4.5. Объем тела V вычисляется по формуле $\iiint_V dv$. Учитывая выражение для элемента объема dv в различных системах координат, получаем:

- в декартовых координатах ($Oxyz$)		$V = \iiint_V dx dy dz$
- в цилиндрических координатах ($O\rho\varphi z$)	$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases}$	$V = \iiint_V \rho d\rho d\varphi dz$
- в сферических координатах ($O\varphi\theta r$)	$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$	$V = \iiint_V r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

4.7. В сферической системе координат (φ, θ, r) координата r – это расстояние от начала координат до данной точки, поэтому уравнение сферы радиуса a с центром в начале координат имеет вид $r = a$.

4.8. Масса тела V с плотностью $\gamma(x, y, z)$ вычисляется по формуле $m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz$. Так как в нашем случае V – это пирамида, изображенная на рис. 17, то, переходя к трехкратному интегралу, получим

$$m = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} (x + y + z) dz.$$

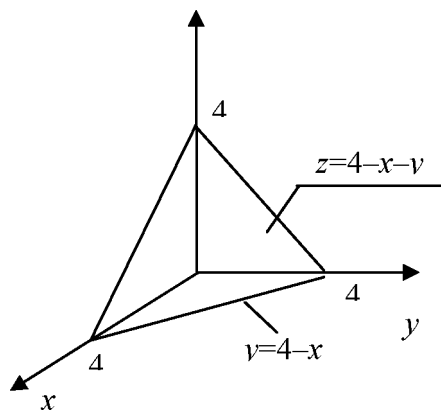


Рис. 17

4.9. Объем тела V вычисляется по формуле $V = \iiint_V dv$. Изобразим параболоид и его проекцию на плоскость Oxy (рис. 18).

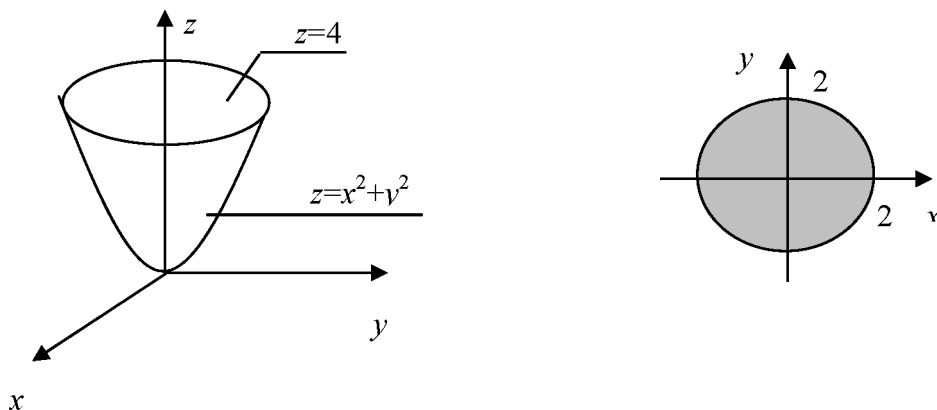


Рис. 18

В цилиндрической системе координат
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z \end{cases} \quad \text{уравнение параболоида}$$

имеет вид $z = \rho^2$, а так как проекция тела на плоскость Oxy определяется неравенством $x^2 + y^2 \leq 4$ и представляет собой круг радиуса 2 с центром в начале координат, то в выбранной цилиндрической системе координат уравнение граничной окружности имеет вид $\rho = 2$, а угол $\varphi \in [0, 2\pi]$. Итак, переходя к трех-

кратному интегралу, имеем
$$V = \iiint_V \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \, d\rho \int_{\rho^2}^4 dz.$$

5. Теория поля

5.1. Воспользуемся формулой $gradU(M) = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_M \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_M \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_M \bar{k}$.

Найдем частные производные $\frac{\partial U}{\partial x} = \cos(x + y + 2z)$; $\frac{\partial U}{\partial y} = \cos(x + y + 2z)$;

$\frac{\partial U}{\partial z} = 2\cos(x + y + 2z)$ и вычислим их значения в точке $M(0; \pi; \pi/2)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_M = \cos 2\pi = 1; \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_M = \cos 2\pi = 1; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_M = 2\cos 2\pi = 2.$$

Таким образом, $gradU(M) = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$.

5.2. Направление наибольшего возрастания поля U определяется вектором градиента $gradU = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$. Найдем частные производные

$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2$; $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + z^3$; $\frac{\partial U}{\partial z} = 3yz^2$ и вычислим их значения в точке $M(1; 1; 1)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_M = 1; \quad \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_M = 3; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_M = 3. \text{ Тогда } gradU(M) = \bar{i} + 3\bar{j} + 3\bar{k}.$$

5.3. Поле U убывает в направлении вектора $\bar{l}$, если производная по направлению $\frac{\partial U}{\partial l}$ отрицательна. $\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma$, где $\cos \alpha$; $\cos \beta$; $\cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{l}$. Так как $\bar{p} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, то $|\bar{p}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, откуда $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$; $\cos \beta = \frac{1}{3}$; $\cos \gamma = \frac{2}{3}$. Найдем частные про-

изводные $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2$; $\frac{\partial U}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial U}{\partial z} = 1$. Тогда $\frac{\partial U}{\partial l} = -2x^2 + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$.

Подставляя координаты точек в $\frac{\partial U}{\partial l}$, получим: $\frac{\partial U(M_1)}{\partial l} = \frac{2}{3} > 0$;

$\frac{\partial U(M_2)}{\partial l} = \frac{2}{3} > 0$; $\frac{\partial U(M_3)}{\partial l} = -2 < 0$; $\frac{\partial U(M_4)}{\partial l} = 0$; $\frac{\partial U(M_5)}{\partial l} = \frac{2}{3} > 0$. Таким образом, поле убывает в указанном направлении в точке M_3 .

5.4. Источники находятся в точках, где $div \bar{F} > 0$. Дивергенция векторного поля $\bar{F} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ вычисляется по формуле

$$div \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \text{ По условию } P = 3; Q = 2y; R = xz, \text{ следовательно, } \frac{\partial P}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = x, \text{ откуда } div \bar{F} = 2 + x.$$

Вычислим значения дивергенции в каждой точке: $\operatorname{div} \bar{F}(M_1) = 1$; $\operatorname{div} \bar{F}(M_2) = 0$; $\operatorname{div} \bar{F}(M_3) = -1$; $\operatorname{div} \bar{F}(M_4) = -3$; $\operatorname{div} \bar{F}(M_5) = 2$. Таким образом, источники находятся в точках M_1, M_5 .

5.5. Поле $\bar{F} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ соленоидально, если в любой точке $\operatorname{div} \bar{F} = 0$; потенциально, если в любой точке $\operatorname{rot} \bar{F} = 0$; постоянно, если координаты вектора $\bar{F}$ являются константами.

$$\text{При этом } \operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}; \quad \operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Вычислим дивергенцию и ротор векторного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{F} &= 0 - x + x = 0; \\ \operatorname{rot} \bar{F} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin yz & -xy & xz \end{vmatrix} = (y \cos yz - z)\bar{j} - (y + z \cos yz)\bar{k} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, поле является соленоидальным.

5.6. Вычислим дивергенцию и ротор векторного поля (см. решение 5.5):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{F} &= 2y - 2z \neq 0; \\ \operatorname{rot} \bar{F} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 - 2yz & -y^2 \end{vmatrix} = (-2y + 2y)\bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + (2x - 2x)\bar{k} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, поле является потенциальным.

5.7. L – периметр ромба, то есть замкнутая линия. Так как поле потенциально, то криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

5.8. По формуле Гаусса-Остроградского поток векторного поля $\bar{F}$ через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность σ в направлении внешней нормали равен $\iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dv$, где V – тело, ограниченное поверхностью σ . Вычислим дивергенцию поля $\operatorname{div} \bar{F} = 3$. Так как поверхность куба замкнутая, то поток равен $3 \iiint_V dv$, то есть утроенному объему куба. Учитывая, что по условию сторона куба равна 2, искомый поток равен $3 \cdot 2^3 = 24$.

5.9. По формуле Стокса циркуляция векторного поля $\bar{F}$ по замкнутому контуру L равна потоку ротора вектора $\bar{F}$ через любую поверхность σ , натянутую на контур (ориентация нормали к поверхности согласована с ориентацией контура).

Так как $\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 & 7 & -z^2 \end{vmatrix} = 0$, то циркуляция равна нулю.

6. Теория вероятностей

$$6.1. P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число всех равновозможных исходов}} = \frac{7}{10}.$$

$$6.2. P(A) = \frac{\omega_A}{\omega_U} = \frac{\text{мера области благоприятных исходов}}{\text{мера всей области}} = \\ = \frac{\text{площадь воды}}{\text{площадь проруби}} = \frac{3 - (0,6 + 0,3)}{3} = 0,7$$

6.3. По данным задачи видим, что $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$, следовательно, события A и B совместны и независимы.

6.4. По данным задачи имеем $P(A + B) = 1 - P(\overline{A + B}) = P(A) + P(B)$, поэтому события A и B несовместны. С другой стороны, $P(AB) \neq P(A)P(B)$, следовательно, события A и B зависимы.

6.5. $P(AE + \bar{A}E + \bar{E}) = P(E(A + \bar{A}) + \bar{E})$. Так как $A + \bar{A}$ – достоверное событие, то $E(A + \bar{A}) = E$; следовательно, $P(E(A + \bar{A}) + \bar{E}) = P(E + \bar{E}) = 1$.

6.6. Так как все гипотезы несовместны и образуют полную группу событий, т. е. $H_1 + H_2 + \dots + H_n$ – достоверное событие, то $\sum_{i=1}^n P(H_i) = P(\sum_{i=1}^n H_i) = 1$.

6.8. Функция распределения непрерывной случайной величины – непрерывная неубывающая функция, принимающая значения от нуля до единицы. Этим условиям удовлетворяет только рис. д).

6.9. Случайная величина, распределенная по биномиальному закону, является дискретной. График функции распределения дискретной случайной величины изображен на рис. а).

6.10. Вероятность попадания непрерывной случайной величины на $(a; b)$ численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a; b]$ оси Ox прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком плотности распределения вероятностей. Таким образом, вероятность $P(0 < X < 1)$ равна площади заштрихованного участка (см. рис. 19). Очевидно, что эта площадь составляет третью часть от площади большого прямоугольника, площадь которого в свою очередь равна 1 (так как для плотности распределения вероятностей $f(x)$ справедливо ра-

венство $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$).

Итак, искомая вероятность равна $1/3$.

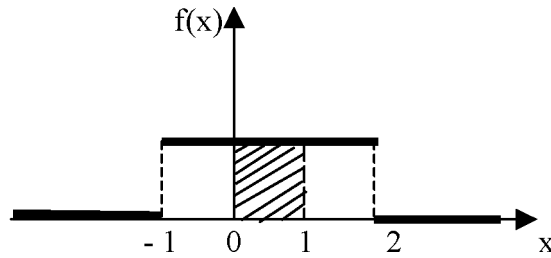


Рис. 19

6.11. $P(1 < X < 3) = P(1 < X < 2) + P(2 < X < 3) = 1/3 + 0 = 1/3$ (см. пояснения к 6.10)

6.12. Дисперсию можно вычислить по формуле $D_x = M[X^2] - m_x^2$. На рисунке изображен график плотности распределения равномерной случайной величины, математическое ожидание которой равно $m_x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$.

Тогда $D_x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Можно воспользоваться и известной формулой для дисперсии равномерно распределенной случайной величины

$$D_x = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2+1)^2}{12} = \frac{3}{4}.$$

6.13. Так как $P(15 < X < 35) = P(X \in (15; 35)) = 0,4$, то $P(X \notin (15; 35)) = 1 - 0,4 = 0,6$. В силу симметрии графика плотности распределения вероятностей нормальной случайной величины относительно линии $x = m_x = 25$ имеем $P(X < 15) = P(X > 35) = \frac{1}{2} P(X \notin (15; 35)) = 0,3$.

6.15. Приведена формула для вычисления математического ожидания дискретной случайной величины, поэтому выбираем геометрическое и биномиальное распределения.

6.16. Для непрерывной случайной величины $m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$;

$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx$; $\sigma_x = \sqrt{D_x}$. Так как по условию $m_x=0$ и $\sigma_x=2$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0; \int_{-\infty}^{+\infty} (x-0)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = D_x = 4.$$

Кроме того, для плотности распределения вероятностей $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Таким образом, из приведенных соотношений верными являются а) и ж).

6.17. Случайная величина X распределена по биномиальному закону $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, поэтому ее математическое ожидание можно вычислить по формуле $m_x = np$. В данном случае $p = 0,3$; $n = 10$, следовательно, $m_x = 10 \cdot 0,3 = 3$.

6.18. Случайная величина X распределена по закону Пуассона

$P_\lambda(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, дисперсия которой $D_x = \lambda$, поэтому в данном случае $D_x = 2$.

6.19. Случайная величина X имеет нормальное распределение

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, дисперсия которого $D_x = \sigma^2$, В данном случае $D_x = 4$.

6.20. По «правилу трех сигм» для нормального распределения

$P(m_x - 3\sigma < X < m_x + 3\sigma) = 0,9973$, то есть в интервал $(m_x - 3\sigma, m_x + 3\sigma)$ попадает примерно 99% значений нормально распределенной случайной величины X .

6.21. Если случайная величина Z имеет нормальное распределение с математическим ожиданием m_z и средним квадратичным отклонением σ_z , то

$P(|X - m_z| < 3\sigma_z) = 0,9973$.

Таким образом, $P(|X - m_x| < 3\sigma_x) = P(|Y - m_y| < 3\sigma_y) = 0,9973$.

6.22. Функция распределения принимает значения из промежутка $[0; 1]$.

6.23. Если случайные величины X и Y независимы, то они некоррелированы, и их коэффициент корреляции равен нулю.

7. Математическая статистика

7.2. Относительная частота $w_i = \frac{m_i}{n}$, где n – объем выборки, m_i – частота

варианты $x = x_i$ в выборке. Итак, $w = \frac{20}{50} = 0,4$.

7.3. Так как сумма всех частот равна объему выборки $\sum m_i = n$, то $3+2+m_3 = 10$, откуда $m_3 = 5$.

7.4. Зная эмпирическую функцию распределения, можно составить таблицу относительных частот:

x_i	3	5	7
w_i	1/3	1/3	1/3

То есть для варианты $x = 7$ относительная частота $w = \frac{1}{3}$. Так как $n = 15$,

$w = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, то частота $m = 5$.

7.5. На полигоне частот указаны точки $(x_i; m_i)$. Так как сумма всех частот равна объему выборки, то $4+20+11+m_4 = 60$, откуда $m_4 = 25$.

7.6. Полигон – это ломаная, соединяющая точки $(x_i; m_i)$; она примерно соответствует графику плотности распределения вероятностей случайной вели-

чины. Зная вид графиков (кривых распределения) стандартных законов распределения, устанавливаем требуемое соответствие.

7.7. На гистограмме частот площадь всей гистограммы (то есть сумма площадей столбцов) равна объему выборки. Из рисунка видно, что площадь гистограммы равна $2 \cdot 4 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot a$. Так как $n = 80$, имеем

$$2a = 80 - (8 + 24 + 36) = 12, \text{ откуда } a = 6.$$

7.8. Площадь гистограммы относительных частот равна единице.

7.14. Медиана – это середина упорядоченного вариационного ряда. Для выборки объема n медиана вычисляется по формуле

$$\tilde{x} = \begin{cases} (x_k + x_{k+1})/2 & \text{при } n = 2k, \\ x_{k+1} & \text{при } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Упорядочив варианты, получим 1, 1, 3, 4, 5, 6, поэтому $\tilde{x} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$.

7.15. Для выборки объема n выборочное среднее вычисляется по формуле $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, поэтому $\bar{x} = \frac{9+7+3+3+1+4+8}{7} = 5$.

7.17. При увеличении доверительной вероятности (надежности) γ уменьшается точность оценки параметра, то есть увеличивается величина предельной ошибки δ , что ведет к расширению доверительного интервала.

7.20. Так как уравнение прямой регрессии имеет вид $\bar{y}_x = -2,1x + 5,4$, то между параметрами (случайными величинами) X и Y можно предполагать отрицательную линейную зависимость. Поле корреляции (поле рассеяния) для такой зависимости изображено на рис. 12б. Поле корреляции на рис. 12а характерно для положительной линейной зависимости, а рис. 12в соответствует случаю, когда значения параметров X и Y практически не связаны друг с другом.

7.21. Если коэффициент корреляции $r_{xy} = 0,05$, то между параметрами X и Y практически нет связи, то есть поле корреляции имеет вид, изображенный на рис. 12в.

8. Операционное исчисление

8.1. Из таблиц имеем: $t \cdot \sin \beta t \rightleftharpoons \frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}$, $t \cdot \operatorname{sh} \beta t \rightleftharpoons \frac{2\beta p}{(p^2 - \beta^2)^2}$,

$$t \cdot \cos \beta t \rightleftharpoons \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}; \quad t \cdot \operatorname{ch} \beta t \rightleftharpoons \frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}.$$

8.2. Оценим оригинал:

$$|f(t)| = |\sin 4ti| = \left| \frac{1}{2i} (e^{i \cdot 4ti} - e^{-i \cdot 4ti}) \right| = \frac{1}{2} |e^{-4t} - e^{4t}| < e^{4t}.$$

Показатель роста оригинала равен 4.

8.3. Так как $\beta = \frac{1}{2}$, то изображение $F(p) = \frac{p}{p^2 + \frac{1}{4}} = \frac{4p}{4p^2 + 1}$.

8.4. При $t \geq 0$ $f(t) = t^2 + 2t + 1$. Воспользовавшись свойством линейности, получим $F(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}$.

8.5. Для $f_1(t) = \begin{cases} \sin 3t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ изображение имеет вид $F_1(p) = \frac{3}{p^2 + 9}$. Так как $\sin(3t - \frac{\pi}{3}) = \sin 3(t - \frac{\pi}{9})$, то по теореме запаздывания оригинала имеем:

$$F(p) = F_1(p)e^{-\frac{\pi}{9}p} = \frac{3}{p^2 + 9}e^{-\frac{\pi}{9}p}.$$

8.6. Для изображения $F_1(p) = \frac{p}{p^2 + 4}$ оригиналом при $t \geq 0$ является функция $f_1(t) = \cos 2t$. Так как $F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}$, то, применив свойство смещения в области изображения, получим $f(t) = e^{-t} \cos 2t$.

8.7. 1 способ. Чтобы использовать теорему об интегрировании оригинала, заметим, что оригинал для изображения $F_1(p) = \frac{1}{p^2 + 4}$ при $t \geq 0$ имеет вид $f_1(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$. Тогда при $t \geq 0$ $f(t) = \int_0^t \frac{1}{2} \sin 2\tau d\tau = -\frac{1}{4} \cos 2\tau \Big|_0^t = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$.

2 способ. Разложив изображение на сумму простейших дробей и воспользовавшись свойством линейности, получим

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4} \right) \stackrel{*}{=} \frac{1}{4}(1 - \cos 2t).$$

8.8. Из таблицы оригиналов и изображений $f_1(t) = e^{5t} \stackrel{*}{=} \frac{1}{p-5} = F_1(p)$;

$f_2(t) = \cos t \stackrel{*}{=} \frac{p}{p^2 + 1} = F_2(p)$. Тогда по теореме умножения изображений

$$\int_0^t e^{5\tau} \cos(t-\tau) d\tau \stackrel{*}{=} F(p) = F_1(p)F_2(p) = \frac{p}{(p-5)(p^2 + 1)}.$$

8.9. Оригинал можно представить в виде $f(t) = 1 - t + (t-1) \cdot \eta(t-1)$,

где $\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$ — единичная функция Хевисайда.

При $t \geq 0$ оригиналу $f_1(t) = t$ соответствует изображение $F_1(p) = \frac{1}{p^2}$.

При $t \geq 1$ оригиналу $f_2(t) = (t-1) \cdot \eta(t-1)$ соответствует изображение

$F_2(p) = e^{-p} F_1(p) = \frac{e^{-p}}{p^2}$. Тогда по свойству линейности имеем

$$f(t) = 1 - t + (t-1) \cdot \eta(t-1) \rightleftharpoons F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} e^{-p}.$$

8.10. Вычислим вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в точках $p_1 = 2\sqrt{30}i$ и $p_3 = 11i$, которые являются полюсами первого порядка:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{2\sqrt{30}i} F(p)e^{pt} &= \lim_{p \rightarrow 2\sqrt{30}i} \frac{(p - 2\sqrt{30}i) \cdot pe^{pt}}{(p - 2\sqrt{30}i)(p + 2\sqrt{30}i)(p^2 + 121)} = \\ &= \frac{2\sqrt{30}ie^{2\sqrt{30}it}}{2 \cdot 2\sqrt{30}i} = \frac{e^{2\sqrt{30}it}}{2}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{res}_{11i} F(p)e^{pt} = \lim_{p \rightarrow 11i} (p - 11i) \frac{pe^{pt}}{(p - 11i)(p + 11i)(p^2 + 120)} = \frac{e^{11it}}{-2}.$$

Оригинал равен

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \operatorname{Re} \left(\operatorname{res}_{2\sqrt{30}i} F(p)e^{pt} + \operatorname{res}_{11i} F(p)e^{pt} \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{2\sqrt{30}it} - e^{11it} \right) = \cos 2\sqrt{30}t - \cos 11t. \end{aligned}$$

8.11. Учитывая начальные условия, запишем

$$x(t) \rightleftharpoons X(p); \quad x''(t) \rightleftharpoons p^2 X(p) - p.$$

$$\text{Для правой части уравнения } \sin 2t \rightleftharpoons \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Применив преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получим

$$p^2 X(p) - p - X(p) = \frac{2}{p^2 + 4}.$$

8.12. Используя формулы дифференцирования оригинала с учетом нулевых начальных условий, получим

$$x(t) \rightleftharpoons X(p); \quad x'(t) \rightleftharpoons pX(p); \quad y(t) \rightleftharpoons Y(p); \quad y'(t) \rightleftharpoons pY(p).$$

Применяя преобразование Лапласа к обоим уравнениям, получим

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) - 2Y(p), \\ pY(p) = 3X(p) + Y(p). \end{cases}$$

Ответы

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

№	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10
Ответ	1/3	2	1	а	д	д	а	г	д	б, в
№	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20
Ответ	б	в	3	2	1	д	9	−8	а, в, г	45
№	1.21	1.22	1.23	1.24	1.25	1.26	1.27	1.28	1.29	1.30
Ответ	0	а	0	−3	б	г	б	а	б	в
№	1.31	1.32	1.33	1.34	1.35	1.36	1.37	1.38		
Ответ	а	а	а	б	б	в	а	е		

Различные системы координат

№	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
Ответ	б	а	в	а, г, д	а	г, д

Ряды

№	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10
Ответ	а	в	б	в, е	б	а	г	б	в	а, д
№	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15	3.16	3.17			
Ответ	а, б, в	а, б, в, г	в	а	а	б	в, г			

Кратные интегралы

№	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9
Ответ	б, г	б	а	д	б, г, д	б	в	б	а

Теория поля (векторный анализ)

№	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9
Ответ	е	в	в	а, д	а	б	0	24	0

Теория вероятностей

№	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	6.10
Ответ	в	а	в	б	1	а	б	д	а	в
№	6.11	6.12	6.13	6.14	6.15	6.16	6.17	6.18	6.19	6.20
Ответ	в	б	0,3	д	а, в	а, ж	3	2	д	г
№	6.21	6.22	6.23	6.24	6.25	6.26				
Ответ	в	в	а	а	б	г				

Математическая статистика

№	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	7.10
Ответ	а	0,4	5	5	25	по по- рядку	6	а	по по- рядку	б
№	7.11	7.12	7.13	7.14	7.15	7.16	7.17	7.18	7.19	7.20
Ответ	д	б	б, в	3,5	5	а	по по- рядку	б, в	а	б
№	7.21									
Ответ	в									

Операционное исчисление

№	8.1		8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9
Ответ	1-а, 2-в, 3-б, 4-г		4	в	д	а	а	а	д	а
№	8.10	8.11	8.12							
Ответ	б	а	г							