

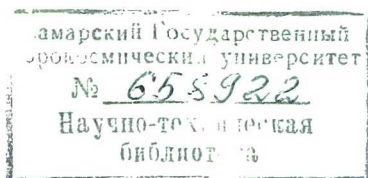
САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П.КОРОЛЕВА

Б. А. Горлач

МАТЕМАТИКА

Учебник
для экономических специальностей

Часть 1. Линейная алгебра.
Аналитическая геометрия



Самара, 2002

Содержание

Введение	7
Предисловие	9
1 Определители. Матрицы	15
1.1 Матрицы. Определение. Основные виды матриц	15
1.2 Определители	17
1.3 Свойства определителей	18
1.4 Разложение определителя	20
1.5 Линейные операции над матрицами	22
1.6 Произведение матриц	23
1.7 Обратная матрица	26
1.8 Матричный метод решения СЛАУ	29
1.9 Модель Леонтьева	32
1.10 Ранг матрицы	35
1.11 Резюме	37
1.12 Вопросы	39
1.13 Упражнения к разделам 1.2 – 1.4. Тема 1	44
1.14 Упражнения к разделам 1.5 – 1.7. Тема 2	47
1.15 Упражнения к разделам 1.8 – 1.10. Тема 3	52
2 Системы линейных уравнений	59
2.1 Основные положения	59
2.2 Метод Гаусса-Жордана решения СЛАУ	60
2.3 Теорема Кронекера-Капелли	62
2.4 Однородные системы уравнений	65
2.5 Резюме	67
2.6 Вопросы	69

2.7	Упражнения к разделам 2.2 – 2.4. Тема 4	71
2.8	Варианты контрольных работ	79
2.9	Задание на расчетную работу	81
3	Векторы	83
3.1	Вектор как геометрический объект	83
3.2	Скалярное произведение векторов	84
3.3	Проекция вектора на направленную ось	86
3.4	Линейная зависимость системы векторов	87
3.5	Разложение вектора по базису	90
3.6	Базис в пространстве $\mathbb{R}_n$	91
3.7	Ортонормированный базис	93
3.8	Операции над векторами	96
3.9	Деление отрезка в заданном отношении	100
3.10	Резюме	101
3.11	Вопросы	103
3.12	Упражнения к разделам 3.1–3.6. Тема 5	107
3.13	Упражнения к разделам 3.7 – 3.9. Тема 6	113
3.14	Варианты контрольных работ	119
4	Аналитическая геометрия	121
4.1	Прямая на плоскости	121
4.2	Уравнение плоскости	124
4.3	Взаимное расположение плоскостей	128
4.4	Расстояние от точки до плоскости	133
4.5	Уравнения прямой в $\mathbb{R}_3$	135
4.6	Взаимное расположение прямых и плоскостей	138
4.7	Преобразование координат	143
4.8	Уравнения второго порядка в $\mathbb{R}_2$	146
4.9	Свойства кривых второго порядка	153
4.10	Поверхности второго порядка	159
4.11	Резюме	163
4.12	Вопросы	165
4.13	Упражнения к разделу 4.1. Тема 7	172
4.14	Упражнения к разделам 4.2 – 4.4. Тема 8	181
4.15	Упражнения к разделам 4.5 – 4.6. Тема 9	190
4.16	Упражнения к разделам 4.8 – 4.9. Тема 10	198
4.17	Варианты контрольных работ	206
4.18	Задание к расчетной работе гл.4	208

4.19 Ответы к упражнениям	209
Библиографический список	212

Введение

Можно предположить, что потребность количественной оценки предметов (счете) возникла у древних общностей людей при организации обмена товаров натуральных хозяйств, то есть, как потребность экономики. Дальнейшее развитие математики говорит о том, что ее разделы появлялись и развивались под давлением потребности развивающегося общества. Но построению математических моделей и методов непременно предшествовало установление закономерностей развития соответствующих направлений астрономии, физики, географии, геологии, материаловедения, биологии, . . .

В этом перечне научных направлений экономические науки проявили потребность в математической поддержке по существу лишь в прошедшем столетии. Именно тогда стали осознаваться закономерности развития рыночных отношений. Созданный к этому времени аппарат теории вероятностей и математической статистики стал хорошей основой для осмысливания достижений и промахов в экономической деятельности.

В дальнейшем экономика начинает стимулировать развитие математики. Одно из направлений математики, появившихся из потребности развития экономики — это эконометрика — направление математики, благодаря которому стало возможным проводить анализ экономической деятельности сообществ людей, строить с привлечением статистических данных математические модели предприятий, составлять прогнозы их развития.

Раздел математики — теория операций — также во многом развивалась как аппарат для решения экономических задач. В частности, математическое программирование (непосредственно линейное программирование) родилось с решения конкретных задач оптимизации экономических процессов, а затем распространилось и на другие научные направления.

Еще одним примером применений математики, созданным потребностью банковской деятельности стала "финансовая математика", выделившаяся в последнее время в самостоятельный раздел математики.

Кроме перечисленных разделов математики, непосредственно связан-

ных с экономикой, серьезный анализ экономических процессов не может обойтись без знаний по таким разделам математики как линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, дискретная математика, теория множеств ...

Конечно, задача обучения экономистов перечисленным разделам математики на их современном уровне невозможно — слишком глубоки и обширны математические дисциплины. Тем не менее изучение основ математики дает надежду на то, что обучаемые смогут в дальнейшем углубить свои математические знания при изучении предусмотренных учебными планами специальных дисциплин или самостоятельно.

Предисловие

Учебник предназначен для студентов, обучаемых по специальностям экономики и менеджмента. Он включает в себя четыре части.

Часть 1.

Глава 1. Определители и матрицы.

Даны определения и описаны свойства основных понятий линейной алгебры и действия над ними. Рассмотрены матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и метод определителей.

Глава 2. Системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрен метод Гаусса-Жордана решения СЛАУ. Приведены теорема Кронекера-Капелли существования решений неоднородных и однородных СЛАУ. Рассмотрены подходы к определению допустимых решений.

Глава 3. Векторная алгебра.

Приведены основные операции над векторами, как геометрическими объектами. Даны понятия скалярного произведения и проекции вектора. Рассмотрено представление вектора в произвольном и ортонормированном базисах. Рассмотрена задача о делении отрезка в заданном отношении.

Глава 4. Аналитическая геометрия.

Приведены в различных видах уравнения прямой и плоскости. Рассмотрен вопрос о взаимном расположении плоскостей, прямых и плоскостей, сформулированы условия параллельности и ортогональности. Получены формулы для определения расстояния от точки до плоскости (прямой). Рассмотрены квадратные уравнения на плоскости и в пространстве. Описана последовательность приведения квадратных уравнений к каноническому виду. Перечислены основные свойства кривых и поверхностей второго порядка.

Часть 2.

Глава 1. Введение в математический анализ.

В главе даны основные понятия и определения теории множеств. Рассмотрены основные виды функций, в том числе известные из школьного

курса элементарные функции. Разобраны методы преобразования графиков функций. Приведены способы интерполяции, разобраны примеры. Даны понятия функций нескольких переменных.

Глава 2. Непрерывность и пределы функций.

Дано понятие числовой последовательности для функций одной и нескольких переменных. Сформулированы определения предела функций. Перечислены и пояснены свойства пределов. Введены понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин. Рассмотрены замечательные пределы. Даны определения непрерывных функций одной и нескольких переменных.

Глава 3. Производная и дифференциал.

Даны основные понятия и определения, связанные с производными и дифференциалами. Рассмотрены основные задачи, в том числе экономические, приводящие к этим понятиям и использующие аппарат дифференцирования. Описаны методы определения производных и дифференциалов, в том числе для функций нескольких переменных. Разобраны примеры.

Глава 4. Исследование функций.

Приведены основные теоремы дифференцирования. Описано правило Лопиталя, получены формулы Тейлора и Маклорена разложения функций. Введены понятия экстремумов (в том числе для функций нескольких переменных), возрастания, убывания функций, выпуклости, точек перегиба, асимптот. Описана последовательность анализа функций и построения их графиков. Разобраны примеры.

Глава 5. Численные методы.

Описаны численные методы определения корней уравнений: метод исключения интервалов, золотого сечения, хорд и касательных. Приведены примеры численного определения корней и экстремумов функций. Изложены и разобраны методы определения экстремумов функций нескольких переменных: симплекс метод и метод градиентного спуска.

Глава 6. Неопределенный интеграл;

Дано определение первообразной и неопределенного интеграла. Описаны свойства и приведена таблица основных интегралов. Рассмотрены методы вычисления неопределенных интегралов: замены переменной, интегрирования по частям, интегрирования рациональных дробей и некоторых типов тригонометрических функций.

Глава 7. Определенный интеграл.

Приведена формула Ньютона-Лейбница вычисления определенного интеграла. Описаны свойства определенных интегралов и раскрыт их геометрический смысл. Рассмотрены методы вычисления определенного интеграла и подходы к вычислению интегралов с переменным верхним пределом и несобственным интегралам. Описаны методы численного интегрирования.

Глава 8. Дифференциальные уравнения.

Рассмотрены основные типы дифференциальных уравнений. Описаны различные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка и линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Описаны численные методы решения задачи Коши: Эйлера и Рунге-Кутты.

Часть 3.

Глава 1. Теория вероятностей.

Даны основные понятия и определения теории вероятностей. Приведены способы вычисления вероятностей различных событий, в том числе сумм и произведений событий. Рассмотрены элементы комбинаторики.

Глава 2. Случайные величины.

Изложены основные способы и приемы построения законов распределения дискретных и непрерывных случайных величин. Рассмотрены методы вычисления вероятностей для сумм и произведений случайных величин. Даны определения и методы вычисления основных числовых характеристик случайных величин. Приведены основные законы распределения.

Глава 3. Математическая статистика.

Раскрыт смысл теории больших чисел, генеральной совокупности и выборки, вариационного ряда и гистограммы. Описаны методы оценки параметров случайных величин по их выборочным средним и выборочным дисперсиям. Рассмотрены способы построения теоретических рядов соответствующих полученным из опыта случайных величин. Дано понятие о критериях согласия.

Глава 4. Теория корреляций. Модели регрессии.

Изложены основы метода наименьших квадратов и его применения при построении линейных и нелинейных уравнений регрессии. Описаны методы корреляционного анализа, в том числе для двухмерных случайных величин.

Глава 5. Динамика экономических процессов.

Описаны основные методы анализа и сглаживания временных рядов. Рассмотрены методы расчета показателей динамических процессов, методы выявления и построения моделей трендов временных рядов.

Глава 6. Прогнозирование экономических процессов.

Приведено описание способов оценки адекватности и точности трендовых и регрессионных моделей и последующего прогнозирования процессов, описываемых временными рядами и другими совокупностями исходных данных. Описаны адаптивные модели прогнозирования.

Часть 4.

Глава 1. Линейное программирование.

Описан подход к решению систем неравенств. Рассмотрены традиционные задачи линейного программирования, в том числе задачи об оптимизации работы предприятия, транспортная задача. Разобраны геометрический и симплексный методы решения. Рассмотрены двойственные задачи линейного программирования. Представлены методы решения задач целочисленного программирования.

Глава 2. Нелинейное программирование.

Описана в общем виде постановка задачи отыскания условных экстремумов функций нескольких переменных. Рассмотрен метод неопределенных множителей Лагранжа отыскания условных экстремумов. Сформулирована теорема Куна-Таккера. Пояснены особенности других методов оптимизации.

Глава 3. Теория графов.

Даны определения основных характеристик графов. Рассмотрены задачи, решаемые с помощью графов, в том числе оптимизационные. Приведены наиболее распространенные методы решения задач.

Глава 4. Теория массового обслуживания.

Рассмотрены характерные задачи теории массового обслуживания, в том числе основанные на соотношениях Колмогорова.

Глава 5. Теория игр.

Описан подход к построению математических моделей задач при наличии неопределенностей. Рассмотрены методы решения антагонистических и неантагонистических игр.

Изложение теоретического материала значительно упрощено по сравнению, например, с аналогичным материалом учебников для физико-математических и технических специальностей вузов. В нем практически отсутствуют строгие доказательства теорем. Тем не менее, достаточно большое количество разобранных примеров и подробное пояснение смысла вводимых математических понятий и соотношений дают возможность читателям получить знания по математике, достаточные для изучения специальных дисциплин.

Предлагаемые в конце каждой из глав вопросы для самостоятельного контроля усвоения материала необходимы и для проверки своих знаний и для подготовки к экзаменам.

В конце глав разобраны решения типовых задач, которые могут быть использованы на семинарских занятиях. Приведены условия задач для их обязательного самостоятельного решения студентами и задания на расчетные работы, выполнение которых будет способствовать хорошему усвоению материала и поможет студентам приобрести навыки построения, решения и исследования математических моделей. В некоторых главах, где по

мнению автора следует осуществлять текущий контроль усвоения студентами учебного материала, приведены типовые билеты контрольных работ как для проверки приобретенных студентами навыков решения типовых задач, так и по проверке усвоения ими теоретического материала.

Студентам рекомендуется тщательно изучать материал по разделам. Важно усвоенный материал воспроизвести самостоятельно на бумаге, после чего выполнить рекомендуемые и помещенные в конце глав упражнения и расчетные работы.

После изучения материала главы следует ответить на "вопросы" для самопроверки усвоения материала и при возникновении трудностей в ответах на вопросы повторить соответствующий материал пособия.

Из опыта преподавания математики, который приобрел автор, следует, что для стимулирования работы студента в семестре большое значение имеет текущий контроль его знаний и учет текущих успехов в итоговой оценке знаний.

Можно, например, установить весовые баллы за выполнение студентами расчетных работ, написание контрольных работ и решение домашних задач. Так, каждую часть правильно и самостоятельно выполненной расчетной работы можно оценить 2 баллами (за все работы $2 \cdot 4 = 8$), каждую задачу, или каждый вопрос контрольных работ – 1 баллом ($1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 10$), каждую решенную дома задачу – 0,1 баллом ($0,1 \cdot (10 + 7 + 10 + 10 + 10 + 7) = 5,4$).

Таким образом, максимальная сумма $S = 23,4$ – это баллы, которые может заработать в семестре студент. Реально набранные студентом баллы s нормируются к пятибалльной системе и получается итоговая семестровая оценка работы и знаний студента: $C = 5 \frac{s}{S}$.

Эта оценка составляет 50% веса окончательной оценки O знаний студента. Вторые 50% дает экзаменационная оценка E . Так что $O = \frac{1}{2}(C + E)$.

Конечно, весовые коэффициенты между семестровыми и экзаменационными оценками знаний могут быть другими.

Можно стимулировать досрочную сдачу расчетных работ, умножая соответствующие баллы на коэффициент, больший единицы (но не более 1,5). Умножая баллы на коэффициенты, меньшие единицы, можно тем самым наказывать любителей авральных, после срока да еще и не самостоятельно выполняемых, работ. Множителями, меньшими единицы, можно наделять и оценки повторно переписываемых контрольных работ.

Для стимулирования посещаемости студентами аудиторных занятий можно каждый пропуск занятий оценивать штрафным (суммируемым с

минусом) баллом, например 0,1 – балла за каждый пропуск.

Описанный подход к оценке знаний студентов приводит (как показал опыт многолетнего его использования автором) к ритмичной работе студентов в семестре, улучшению качества их подготовки.

Глава 1

Определители. Матрицы

1.1 Матрицы. Определение. Основные виды матриц

Матрицей называется система чисел (объектов, явлений, ...), расположенных в виде таблицы:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}). \quad (1.1)$$

Здесь a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – элементы матрицы. Первый индекс (i) обозначает номер строки, на которой стоит элемент; второй (j) – номер столбца. Например, элемент a_{25} стоит на пересечении второй строки и пятого столбца матрицы.

Матрица, имеющая m строк и n столбцов (1.1), называется *прямоугольной* матрицей размера $m \times n$.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*. Говорят, что квадратная матрица имеет порядок n (количество строк равно количеству столбцов и равно n).

Матрица, имеющая только одну строку, называется *матрицей-строкой* или *вектор-строкой*; только один столбец – *матрицей-столбцом* или *вектор-столбцом*.

Элементы квадратной матрицы, имеющие одинаковые индексы, образуют *главную диагональ* матрицы.

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные выше (ниже) главной диагонали, равны нулю, называется *нижней (верхней) треугольной* матрицей:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, имеющая ненулевые элементы только на главной диагонали, называется *диагональной*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единице, называется *единичной*:

$$I_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Прямоугольная (в общем случае) матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*:

$$\Theta_{m \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^T , у которой по отношению к матрице A (1.1) элементы строк и столбцов поменялись местами, называется *транспонированной* по отношению к A :

$$A^T_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Очевидно соотношение

$$(A^T)^T = A.$$

Матрица, для которой справедливо равенство $A = A^T$, называется *симметричной*. Симметричной может быть только квадратная матрица.

Матрица-столбец $\begin{smallmatrix} A \\ m \times 1 \end{smallmatrix}$ для экономии места может быть представлена матрицей-строкой $\begin{smallmatrix} A^T \\ 1 \times m \end{smallmatrix} = (a_{11} \ a_{21} \dots a_{m1})$.

Часть элементов матрицы A размера $m \times n$, стоящая на пересечении k ее строк ($k \leq m$) и l столбцов ($l \leq n$) называется *подматрицей*. В частности, если столбцы матрицы размера $m \times n$ (1.1) рассматривать как m координат векторов A_j : $A_j^T = (a_{1j}; a_{2j}; \dots; a_{mj})$, ($j = \overline{1, n}$), то матрицу можно представить в виде вектора-строки, компонентами которой являются указанные векторы-столбцы A_j :

$$A = (A_1; A_2; \dots; A_m).$$

Матрица характеризуется значениями ее элементов и размерностью.

Еще одной характеристикой, относящейся только к квадратным матрицам, является ее определитель.

1.2 Определители

Определитель или *детерминант* – это число, характеризующее квадратную матрицу.

Определителем матрицы первого порядка $\begin{smallmatrix} A \\ 1 \times 1 \end{smallmatrix} = (a_{11})$ является число, равное значению ее единственного элемента:

$$\Delta_A = \det \begin{smallmatrix} A \\ 1 \times 1 \end{smallmatrix} = a_{11}. \quad (1.2)$$

Определителем матрицы второго порядка $\begin{smallmatrix} A \\ 2 \times 2 \end{smallmatrix}$ называется число, равное произведению элементов ее главной диагонали за вычетом произведения элементов ее побочной диагонали:

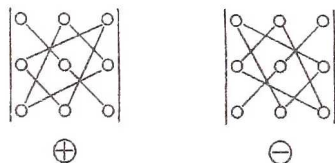
$$\Delta_A = \det \begin{smallmatrix} A \\ 2 \times 2 \end{smallmatrix} = \left| \begin{smallmatrix} A \\ 2 \times 2 \end{smallmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.3)$$

Определителем матрицы третьего порядка $\begin{smallmatrix} A \\ 3 \times 3 \end{smallmatrix}$ называется число, определяемое выражением

$$\Delta_A = \det \begin{smallmatrix} A \\ 3 \times 3 \end{smallmatrix} = \left| \begin{smallmatrix} A \\ 3 \times 3 \end{smallmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
 &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Существует простое правило составления записи (??), называемое *правилом треугольников*:



Примеры. Вычислить определители.

$$1. \det(-3) = -3; \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2;$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = -27.$$

Для вычисления определителей порядка, большего трех, существуют общие формулы. Эти формулы в пособии не приводятся, так как они практически не используются для вычисления определителей. Это объясняется, во-первых, громоздкостью вычислений и, во-вторых, существуют другие, более эффективные способы вычисления определителей порядка выше трех, о которых будет сказано после рассмотрения свойств определителей.

1.3 Свойства определителей

Сформулируем некоторые основные свойства определителей и продемонстрируем их справедливость на примерах определителей второго порядка. Читатель может проверить справедливость этих свойств на примере определителей третьего порядка. Справедливость свойств для определителей произвольного порядка доказывается методом математической индукции.

Пусть задан определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.5}$$

Сформулируем и убедимся в справедливости следующих свойств.

1. Определитель не изменится, если в нем строки и столбцы поменять местами:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta.$$

То есть, определитель квадратной матрицы равен определителю транспонированной матрицы.

Свойство говорит о равнозначности строк и столбцов в определителе. Поэтому свойства определителей, касающиеся действий со строками, распространяются и на их столбцы. В дальнейшем это свойство будет подразумеваться.

2. Если в определителе поменять местами две произвольные (в общем случае определителя n -ного порядка) строки, то определитель сменит знак на противоположный:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\Delta.$$

3. Общий множитель всех элементов какой-либо строки можно вынести за знак определителя:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{vmatrix} = ca_{11}a_{22} - ca_{12}a_{21} = c\Delta.$$

4. Определитель, имеющий пропорциональные строки, равен нулю:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} ca_{12} & ca_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = ca_{12}a_{22} - ca_{22}a_{12} = 0.$$

Это свойство является следствием свойств 2 и 3. Свойство будет справедливо, в частности, при $c = 1$ (две строки одинаковы) и при $c = 0$.

5. Если элементы какой-либо строки определителя представить в виде суммы двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_5 &= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{12} + b_{12})a_{21} = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21}) = \Delta_{aa} + \Delta_{ba} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки прибавить элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель.

С использованием свойств 4 и 5 осуществим преобразование определителя (1.5), к элементам первой строки которого прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на c :

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ca_{21} & ca_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$

7. Определитель треугольной (в частности, диагональной) матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22}.$$

В частности, определитель единичной матрицы равен единице, нулевой квадратной матрицы – нулю.

Отметим, что равенство нулю определителя квадратной матрицы говорит о том, что векторы-столбцы или векторы-строки этой матрицы линейно зависимы.

1.4 Разложение определителя по элементам строк (столбцов)

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ n -ного порядка называется произведение определителя $(n-1)$ -го порядка, получаемого из Δ путем вычеркивания i -той строки и j -того столбца (на пересечении которых стоит элемент a_{ij}), на $(-1)^{i+j}$.

Пример 1. Вычислить алгебраические дополнения элементов a_{22} и a_{32} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Теорема 1. *Определитель равен сумме произведений элементов любой из его строк (столбцов) на их алгебраические дополнения:*

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}A_{ij}; \quad (1.6)$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}. \quad (1.7) \text{)))))$$

Соотношение (1.6) представляет собой разложение определителя n -ного порядка по элементам его i -той строки; (1.7) – по элементам j -того столбца.

Убедимся в справедливости теоремы на примере определителя третьего порядка, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ &+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

Это выражение с точностью до порядка слагаемых совпадает с формулой (1.4) для определителя третьего порядка.

Теорема 2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой его строки (столбца) равна нулю.*

Получаемое в результате такого разложения выражение равноценно (как нетрудно убедиться) определителю с двумя равными строками (столбцами). По свойству 4, приведенному в предыдущем разделе, такой определитель равен нулю.

Обобщая теоремы 1 и 2, можно записать соотношения:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}A_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ji}A_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} \Delta & \text{при } i = k; \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases} \quad (1.8)$$

Величина δ_{ik} часто используется в математике и носит название “символ Крёнекера”.

Следствие. Если в определителе имеется строка только с одним ненулевым элементом, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.

Утверждение следствия очевидно, так как в разложении такого определителя по элементам упомянутой строки все слагаемые разложения, кроме одного, обратятся в нуль, так как соответствующие алгебраические дополнения умножаются на нули.

Рассмотренные свойства определителей и сформулированные теоремы позволяют понизить порядок определителя до третьего и второго и затем по приведенным в разделе 1.2 формулам вычислить его.

Пример 2. Вычислить определитель Δ .

Пояснение: С правой стороны определителей напротив некоторых строк поставлены добавляемые к ним произведения чисел на номера (N) строк. Снизу — соответствующие произведения для столбцов.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &\quad \quad \quad -3N1 \quad -4N1 \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -7 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3N3 \\ -2N3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -5 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 9(-4)(-1)^{2+1} \det(-1) = -20. \end{aligned}$$

В этом примере определитель четвертого порядка последовательными преобразованиями и разложениями по элементам строк приведен к определителю первого порядка, хотя преобразования можно было закончить после получения определителей третьего или второго порядков, правила вычисления которых приведены в разделе 1.2.

1.5 Линейные операции над матрицами

Матрицы A и B одной размерности считаются *равными*, если равны их соответствующие элементы:

$$\begin{matrix} A \\ m \times n \end{matrix} = \begin{matrix} B \\ m \times n \end{matrix} \iff a_{ij} = b_{ij}.$$

Суммой двух матриц A и B одной размерности $m \times n$ называется матрица C размерности $m \times n$, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$\begin{matrix} A \\ m \times n \end{matrix} + \begin{matrix} B \\ m \times n \end{matrix} = \begin{matrix} C \\ m \times n \end{matrix} \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Для суммы матриц справедливы следующие свойства.

Коммутативность:

$$A + B = B + A$$

Ассоциативность:

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Справедливость указанных свойств для матриц следует из справедливости этих свойств для чисел – элементов матриц:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \quad a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на число $\lambda \in \mathfrak{K}$ называется матрица B размера $m \times n$, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матрицы A на λ :

$$\underset{m \times n}{B} = \underset{m \times n}{\lambda A} \quad \Longleftrightarrow \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Следует обратить внимание на принципиальное отличие произведения числа на матрицу от произведения числа на определитель. В первом случае все элементы матрицы умножаются на число; во втором – элементы лишь одной из строк (или одного из столбцов) (свойство 3 раздела 1.3). По отношению к рассмотренному произведению и сумме матриц A и B ($\lambda, \mu \in \mathfrak{K}$) справедливы свойства *дистрибутивности*:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A;$$

коммутативности и ассоциативности:

$$\lambda A = A\lambda;$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \lambda(A\mu).$$

1.6 Произведение матриц

Произведением матрицы A размера $m \times k$ на матрицу B размера $k \times n$ называется матрица C размера $m \times n$. Элементы c_{ij} , стоящие на пересечении i -той строки и j -того столбца матрицы C , равны сумме произведений элементов a_{is} i -той строки матрицы A на элементы b_{sj} j -того столбца матрицы B :

$$\underset{m \times n}{C} = \underset{m \times s}{A} \underset{s \times n}{B} \quad \Longleftrightarrow \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}. \quad (1.9)$$

Из определения вытекает, что произведение возможно только в случае, если число столбцов матрицы, стоящей в произведении первой, равно числу строк второй матрицы. Число строк матрицы произведения равно числу строк первой из умножаемых матриц, а число столбцов – второй из них.

Пример 1. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}_{2 \times 1}.$$

Произведение матриц обладает перечисленными ниже свойствами.

1. *Некоммутативность:*

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Справедливость свойства следует хотя бы из того, что в выражении (1.9) в общем случае $m \neq n$ и тогда при изменении мест умножаемых матриц они станут несовместимыми для произведения. Даже в случае, если $m = n$, коммутативность произведения, как правило, не имеет места. Продемонстрируем сказанное на примере.

Пример 2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} (-2 \ 1)_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot (-2) & (-2) \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = (-2 \ 1)_{1 \times 2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = ((-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1) = (5).$$

Сравнение двух последних результатов говорит о том, что произведения одних и тех же, но расположенных в обратном порядке матриц не совпадают. Они отличаются даже размерами результирующих матриц.

Если произведение матриц не изменяется при их перестановке, то матрицы называются коммутирующими или перестановочными. В частности, как нетрудно проверить, единичная матрица является коммутирующей по отношению к любой квадратной матрице, имеющей одинаковый с единичной матрицей порядок:

$$I \cdot A = A \cdot I = A. \quad (1.10)$$

2. *Ассоциативность:*

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

3. *Дистрибутивность:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

4. Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Свойство легко проверяется, в частности, на примере произведения квадратных матриц второго порядка.

Пример 3. Записать в координатной форме (в виде соотношений между элементами матриц) матричное уравнение $A \cdot X = B$, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Используя свойства произведений матриц и определение равных матриц, данное в разделе 1.5, получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Таким образом, заданное в условии задачи матричное уравнение равносильно системе линейных алгебраических уравнений.

Пример 4. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

характеризует производство некоторого предприятия. Строки характеризуют виды сырья, столбцы — виды продукции. Например, $a_{23} = 4$ показывает что на выпуск единицы третьего вида продукции предприятие затрачивает 4 единицы сырья второго вида. Стоимость видов сырья задается матрицей-столбцом: $P^T = (120; 300)$. План предприятия предусматривает выпуск трех видов продукции в количествах, характеризуемых матрицей $C^T = (50; 80; 30)$. Требуется определить стоимость выпуска планируемого количества товаров.

Решение.

Плановое количество выпускаемой продукции можно определить после нахождения произведения матрицы P^T слева на матрицу A или матрицы A^T на матрицу P справа. В результате получим:

$$S^T = P^T A = (120; 300) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \\ (120 \cdot 4 + 300 \cdot 3; 120 \cdot 1 + 300 \cdot 0; 120 \cdot 5 + 300 \cdot 4) = (1380; 120; 1800).$$

Или

$$S = A^T P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 120 + 3 \cdot 300 \\ 1 \cdot 120 + 0 \cdot 300 \\ 5 \cdot 120 + 4 \cdot 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1380 \\ 120 \\ 1800 \end{pmatrix}.$$

Стоимость всей запланированной партии товаров:

$$c = C^T S = (50; 80; 30) \begin{pmatrix} 1380 \\ 120 \\ 1800 \end{pmatrix} = 50 \cdot 1380 + 80 \cdot 120 + 30 \cdot 1800 = 162600.$$

Два приведенные выше действия произведения матриц можно было объединить в одно на основе свойства ассоциативности матричных произведений:

$$c = C^T A^T P = P^T AC,$$

что приводит к тому же результату.

Произведение двух одинаковых квадратных матриц называется квадратом матрицы. Произведение квадрата матрицы на ту же матрицу справа или слева (такое произведение матриц всегда коммутативно) приводят к кубу матрицы и т.д. Матрица степени n образуется из матрицы $(n-1)$ -й степени умножением ее справа или слева на ту же матрицу в первой степени. То есть,

$$A^2 = A \cdot A; \quad A^3 = A^2 \cdot A; \quad \dots \quad A^n = A^{n-1} \cdot A.$$

1.7 Обратная матрица

Обратной матрицей по отношению к квадратной матрице A порядка n называется квадратная матрица A^{-1} порядка n , удовлетворяющая условию:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I, \tag{1.11}$$

где I — единичная матрица порядка n .

Неособенная матрица или *невырожденная матрица* — это матрица, определитель которой не равен нулю.

Теорема. Для каждой неособенной матрицы существует и при том единственная обратная матрица.

Докажем справедливость теоремы.

Пусть задана квадратная неособенная матрица A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \Delta = |A| \neq 0. \quad (1.12)$$

Присоединенной (союзной) матрицей A^c называется транспонированная матрица алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A . То есть,

$$A^c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{i1} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{i2} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & A_{2j} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{in} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Следует обратить внимание на то, что у элементов матрицы A^c первый индекс определяет, как и положено для транспонированной матрицы, номер столбца, а второй — номер строки исходной матрицы (1.11).

Рассмотрим и преобразуем произведение $A^c A$. При преобразовании воспользуемся равенством (1.8) и правилом произведения матрицы на постоянный множитель (раздел 1.5):

$$A^c A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k1} a_{kn} \\ \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{k2} a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{k1} & \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n A_{kn} a_{kn} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \Delta I.
\end{aligned}$$

Приравняв левую и правую части записанных равенств и поделив полученное равенство на определитель Δ :

$$\frac{1}{\Delta} A^c A = I.$$

Сравнивая записанное соотношение с (1.11), получим формулу для вычисления обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^c. \quad (1.14)$$

Такую же формулу можно получить, рассматривая произведение AA^c . То есть матрицы A и A^c коммутативны, как коммутативны матрицы A и A^{-1} .

Последовательность вычисления обратной матрицы вытекает из описанной выше последовательности получения формулы (1.14).

Доказательство единственности обратной матрицы следует из совпадения результатов следующих двух путей преобразований.

Предположим, что для матрицы A существуют две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1} . Тогда с учетом свойства ассоциативности произведения матриц и определения обратной матрицы (1.11) запишем:

$$A_1^{-1} A A_2^{-1} = \begin{cases} A_1^{-1} (A A_2^{-1}) = A_1^{-1} I = A_1^{-1} \\ (A_1^{-1} A) A_2^{-1} = I A_2^{-1} = A_2^{-1} \end{cases} \implies A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

Пример. Найти матрицу, обратную $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Р е ш е н и е.

Используя формулу (1.23), найдем определитель матрицы АЖ

$$\Delta = (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot (-2) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-3) \cdot 0 = -2.$$

Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы А:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2; & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = -6; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0; \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = -3; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2; \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -4. \end{aligned}$$

Запишем выражение для обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В правильности определения обратной матрицы можно убедиться, найдя ее произведение справа или слева на исходную матрицу. Это произведение, как нетрудно убедиться, равно единичной матрице третьего порядка.

Для обратной матрицы справедливы соотношения:

$$(A^{-1})^{-1} = A; \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

1.8 Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{nn} = b_n. \end{cases} \quad (1.15)$$

Ссылаясь на соотношения Примера 3 раздела 1.6, запишем СЛАУ (1.15) в матричном виде

$$AX = B, \quad (1.16)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Умножим обе части матричного уравнения (1.16) слева на матрицу A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Имея в виду соотношения $A^{-1}AX = IX = X$, запишем решение матричного уравнения (1.16) в виде

$$X = A^{-1}B \quad (\neq BA^{-1}). \quad (1.18)$$

Описанный метод решения СЛАУ называется *матричным методом* или *методом обратной матрицы*. Использование его возможно только в случае, если матрица A неособенная.

Пример 1. Матричным методом найти решение СЛАУ

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение.

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + N_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Так как матрица A неособенная (ее определитель не равен нулю), обратная по отношению к ней матрица существует.

Найдем все алгебраические дополнения матрицы A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= -4; & A_{21} &= -4; & A_{31} &= 0; \\ A_{12} &= -1; & A_{22} &= 7; & A_{32} &= -4; \\ A_{13} &= 3; & A_{23} &= -5; & A_{33} &= -4 \end{aligned}$$

и сформируем обратную матрицу (1.14):

$$A^{-1} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Получим решение СЛАУ, используя соотношение (1.18):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ -1 & 7 & -4 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \\ = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -8 - 8 + 0 \\ -2 + 14 - 28 \\ 6 - 10 - 28 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -16 \\ -16 \\ -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще один метод решения СЛАУ, вытекающий из матричного метода.

Представим решение (1.18) в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^n A_{ki} b_k \quad (i = \overline{1, n}).$$

Из последнего соотношения следует, что Δ_i — это определитель, образованный из Δ путем замены в последнем элементов i -того столбца на свободные члены.

Таким образом,

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (1.19)$$

Решения (1.19) уравнений (1.15) называются *формулами Крамера*, а метод решения — *методом Крамера* или *методом определителей*.

Пример 2. Методом Крамера найти решение системы уравнений Примера 1.

Р е ш е н и е.

Найдем определители Δ_i :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -32.$$

Подставим найденные значения в формулы Крамера (1.19) (значение $\Delta = -16$ было найдено в Примере 1):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-16} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-32}{-16} = 2.$$

Значения искоемых переменных, как и следовало ожидать, совпадает с решением СЛАУ, полученным в Примере 1 матричным методом.

Как и в случае использования матричного метода, формулы Крамера применимы только в случае, когда $\Delta \neq 0$.

1.9 Модель Леонтьева

Рассмотрим модель, предложенную Леонтьевым для анализа и планирования производственной деятельности предприятий (В.В.Леонтьев (1906-1999) — американский ученый-экономист русского происхождения).

Предположим, что все хозяйства некоторого анклава (автономной территориальной или хозяйственной единицы) состоит из n отраслей (машиностроение, легкая промышленность, энергетика, ...). Пусть производство всех отраслей хозяйства анклава за некоторый промежуток времени характеризуется следующими показателями.

Вектор $X^T = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ характеризует весь объем продукции анклава, x_i ($i = \overline{1, n}$) — объем продукции его i -той отрасли; $Y^T = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ — доля продукции, идущая на потребление в непроизводственной сфере. Что касается доли продукции, идущей на нужды i -того производства, то она может быть определена вектором $(a_{i1}x_1; a_{i2}x_2; \dots; a_{in}x_n)$. Коэффициенты a_{ij} ($i = \overline{1, n}$) характеризуют долю продукции j -той отрасли, идущую на производство продукции i -той отрасли. Так что суммарная продукция всех отраслей хозяйства анклава, идущая на нужды производства i -той отрасли:

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Обозначим через A матрицу коэффициентов a_{ij} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор затрат отраслей хозяйства анклава на собственное производство определится равенством:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Теперь можно составить *балансовую модель Леонтьева*, в которой общий объем продукции X складывается из продукции, идущей на производство AX , и идущей на потребление Y :

$$X = AX + Y. \quad (1.20)$$

Так как $X = IX$, уравнение (1.20) можно переписать в виде

$$(I - A)X = Y.$$

Отсюда, в случае невырожденности матрицы $I - A$ получим решение:

$$X = (I - A)^{-1}Y. \quad (1.21)$$

Если потребность непроизводственной сферы определяется вектором Y , то встает вопрос о том, может ли вектор производства X обеспечить эту потребность при сложившихся на предприятиях затратах, характеризующих матрицей A ? Этот вопрос связан с анализом *продуктивности* модели Леонтьева.

Прежде, чем ввести это понятие, приведем два определения.

Положительной матрицей $A = (a_{ij})$ ($A > \Theta$) (*неотрицательной* ($A \geq \Theta$)), называется матрица, все элементы которой положительны: $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$), где Θ — нулевая матрица.

Аналогично определяется положительный (неотрицательный) вектор.

Положительная матрица A в модели Леонтьева называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора Y существует решение уравнения (1.20), определяемое положительным вектором X .

Отметим, что векторы X и Y в балансовой модели Леонтьева, описывающей реальные процессы в экономике, всегда неотрицательны.

В математической экономике используется **критерий продуктивности**, который приведем без доказательства: *матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(I - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.*

Можно показать, что модель Леонтьева продуктивна, если она позволяет произвести хотя бы один строго положительный вектор потребления.

Пример 1. Данные о работе двух предприятий (фирм) представлены таблицей.

Фирма	Поставки фирме a_{ij}		Объем x_j продукции фирмы
	1	2	
1	0,1	0,4	200
2	0,8	0,2	300

Во втором столбце таблицы стоят цифры, которые показывают, что фирме 1 для производства единицы продукции требуются поставки от фирмы 1 (самой себе) 0,1 единицы продукции; от фирмы 2 — 0,8 единиц. Аналогично второй фирме требуется от первой фирмы (третий столбец) 0,4 единицы продукции и самой себе 0,2 единицы продукции.

В четвертом столбце стоят цифры объема продукции, производимой первой и второй фирмами.

Решение.

Таблица позволяет составить матрицы задачи Леонтьева:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1.20), получим:

$$\begin{aligned} Y = (I - A)X &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 2. Рассматривается работа двух фирм, коэффициенты затрат a_{ij} для которых представлены приведенной в Примере 1 таблицей. Известно, что конечный продукт этих фирм известен и составляет: для первой фирмы 60 единиц; для второй – 80 единиц. Т.е. задан вектор-столбец конечного продукта Y : $Y^T = (60; 80)$.

Решение.

Находим обратную по отношению к $(I - A)$ матрицу ($\det A = 0,4$):

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{0,4} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,8 & 0,9 \end{pmatrix}$$

и подставляем в уравнение (1.21) для определения вектора X :

$$X = (I - A)^{-1}Y = \frac{1}{0,4} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,8 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Таким образом для удовлетворения конечного спроса продукция первой фирмы должна составлять 200 единиц, второй — 300 единиц.

1.10 Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную ненулевую матрицу A размера $m \times n$ (1.1). Из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении ее k строк и k столбцов ($1 \leq k \leq \min\{m, n\}$), можно составить некоторое количество определителей различного порядка, часть из которых не будет равна нулю. Будем называть эти определители *порожденными* данной матрицей.

Рангом r матрицы A ($\text{rang } A = r$) называется наибольший порядок отличного от нуля определителя, порожденного данной матрицей.

Элементарными преобразованиями по отношению к матрицам называют преобразования, не изменяющие ранга матрицы.

К элементарным относятся преобразования:

- 1) умножение строк (столбцов) матрицы на любые числа, отличные от нуля;
- 2) вычеркивание строк (столбцов), состоящих только из нулевых элементов;
- 3) изменение места нахождения строк (столбцов) в матрице;
- 4) все действия, относящиеся к определителям и не изменяющие их значения.

Теорема. *С помощью элементарных преобразований любую ненулевую матрицу можно привести к единичной, порядок которой будет равен рангу матрицы.*

Понятно, что ранг нулевой матрицы равен нулю.

Преобразования можно осуществить следующим образом.

Переставим строки и столбцы исходной матрицы таким образом, чтобы на месте элемента a_{11} оказался ненулевой элемент (третье из перечисленных элементарных преобразований). Поделим элементы первой строки матрицы на a_{11} (первое из элементарных преобразований).

Умножая первую строку полученной матрицы на значение элемента матрицы, стоящего на месте a_{21} , вычтем все ее полученные элементы из соответствующих элементов второй строки (четвертое из перечисленных элементарных преобразований). В результате на месте элемента a_{21} появится нуль. Описанным образом можно получить нули во всех остальных элементах первого столбца, кроме первого.

Аналогично образуем нули во всех, кроме первого, элементах первой строки.

Оставляя далее “в покое” элементы первой строки и первого столбца, описанную операцию сделаем с элементом a_{22} , получив на его месте единицу и обращая в нуль остальные элементы второго столбца и второй строки. Затем переходим к третьему столбцу и строке и так далее.

Вычеркивая в процессе преобразований образовавшиеся нулевые строки и столбцы (второе из элементарных преобразований), в итоге придем к единичной матрице, порядок которой определит ранг исходной матрицы.

Конечно порядок преобразования матрицы может быть и иным.

Пример. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычтем из первой строки вторую для получения единицы на месте a_{11} :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на -2 и прибавим полученные значения ее элементов ко второй строке. Затем умножим первую строку на -5 и прибавим значения полученных элементов к третьей строке. В результате получим:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычтем элементы первого столбца из соответствующих элементов второго, затем эти же элементы умноженные на -2 их элементов третьего и, наконец, умноженные на 2 из элементов четвертого столбца:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычтем элементы второго столбца, умноженные на 9 , из соответствующих элементов третьего столбца и элементы этого же столбца, умноженные на -7 , из элементов четвертого столбца:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Два последних столбца полученной матрицы состоят только из нулевых элементов. Эти столбцы вычеркиваем.

Вычитая элементы второй строки из элементов третьей строки и вычеркивая из полученной матрицы последнюю строку, как состоящую только из нулевых элементов, приходим к единичной матрице:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная единичная матрица имеет второй порядок. Это максимальный порядок матрицы, порожденной исходной матрицей, с определителем, отличным от нуля. Следовательно,

$$\text{rang } A = \text{rang } A_5 = r = 2.$$

Отметим еще раз, что порядок проведения элементарных преобразований над матрицами для определения их ранга не имеет значения. Тем не менее удобно начинать преобразование с тех строк (столбцов), которые уже содержат единичные элементы и максимальное количество нулевых элементов.

1.11 Резюме

Матрицы имеют большое значение в математическом моделировании и решении экономических задач. В частности, к матричной записи можно

свести любую систему уравнений и неравенств, а затем использовать для ее решения подходящие методы.

Матрицу A характеризуют ее элементы a_{ij} ($A = (a_{ij})$). При таком обозначении первый индекс (i) указывает номер строки, второй (j) — номер столбца, на пересечении которых в матрице стоит элемент.

Одной из числовых характеристик квадратной матрицы является определитель.

Линейные операции над матрицами (сложение и умножение на число) обладают теми же свойствами, что и линейные операции над числами: коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность. Что касается умножения матриц A размера $m \times p$ и B размера $p \times n$, то оно может иметь место только для совместных матриц (количество столбцов первой матрицы равно числу p строк второй матрицы) и определяется равенством:

$$AB = C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right).$$

Умножение матриц некоммукативно: $AB \neq BA$.

Операции деления в матрицах не существует. Ее заменяет операция нахождения обратной матрицы, справедливая только для квадратных неособенных матриц. Обратной A^{-1} по отношению A матрицей называется матрица, удовлетворяющая равенству (I — единичная матрица):

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Обратная матрица может быть определена по формуле (Δ — определитель матрицы $A = (a_{ij})$, $\tilde{A}_{ji}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}):

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} (\tilde{A}_{ji}).$$

Важной характеристикой матрицы является ее ранг — наибольший порядок определителя, порожденного матрицей и отличного от нуля. От ранга матрицы коэффициентов зависит существование и единственность решения систем алгебраических уравнений (Теорема Кронекера-Капелли, рассмотренная в следующей главе).

В главе не нашли отражения вопросы, связанные с собственными значениями матриц, имеющие применение в некоторых задачах экономики. Эти и другие вопросы, расширяющие и углубляющие знания по матричной алгебре, можно найти в /4/, /5/, /6/, /7/.

1.12 Вопросы

1. Какой математический объект называют матрицей?
2. Как определяется размер матрицы?
3. Что обозначает первый индекс в обозначении a_{ij} элемента матрицы?
4. Какая матрица называется прямоугольной? квадратной? нулевой? единичной? треугольной? диагональной?
5. Что такое матрица-строка? матрица-столбец?
6. Какие элементы образуют главную диагональ матрицы?
7. Что такое транспонированная матрица? симметричная матрица?
8. Что собой представляет определитель матрицы?
9. Запишите формулы для вычисления определителей первого и второго порядков.
10. Сформулируйте правило треугольников вычисления определителя третьего порядка и запишите соответствующую правилу формулу.
11. Перечислите 7 основных свойств определителей и продемонстрируйте их справедливость на примере определителя второго порядка.
12. Убедитесь на примере определителя третьего порядка в справедливости свойства 6 определителя (раздел 1.3).
13. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
14. Запишите формулы разложения определителя по элементам строки и столбца.
15. Чему равна сумма произведений элементов i -той строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой его строки (столбца)?
16. Какие операции над матрицами называются линейными?
17. Перечислите основные свойства линейных операций над матрицами и приведите соответствующие формулы.

18. Что называется произведением матриц? Запишите формулу для определения элементов матрицы произведения.
19. Сформулируйте основные свойства произведений матриц. Сопроводите формулировки соответствующими формулами.
20. Как представить систему уравнений в матричном виде?
21. В каком случае произведение матриц может быть коммутативным?
22. Как возвести матрицу в степень?
23. Что такое обратная матрица?
24. Опишите последовательность вычисления обратной матрицы.
25. Что представляет собой неособенная матрица?
26. Почему требование неособенности важно для вычисления обратной матрицы?
27. Что такое союзная матрица?
28. Можно ли менять местами операции определения обратной матрицы и транспонирование?
29. Что собой представляет матричный метод решения СЛАУ? метод определителей?
30. Опишите последовательность определения решения СЛАУ методом обратной матрицы? методом определителей?
31. Какие преобразования называются элементарными по отношению к матрицам?
32. Что такое ранг матрицы и как его определить методом элементарных преобразований?

Выберите правильные ответы

1. Перечислите характеристики определителя $\Delta = \det(a_{ij})$ и его элементов.

1. Δ – число; 2. $a_{ij} = 1$ при $i = j$; 3. $i \neq j$;
4. i – количество строк; 5. (a_{ij}) – квадратная матрица.

2. Перечислите свойства, характеризующие определитель.

1. Постоянный множитель всех элементов можно вынести за знак определителя.
2. Строки и столбцы равноценны.
3. Определитель не изменится, если элементы любой его строки умножить на числовой множитель.
4. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов его главной диагонали.
5. Среди пунктов 1–4 нет требуемых.

3. Какие утверждения справедливы для выражения $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}$?

1. Правило вычисления определителя путем его разложения по элементам k -того столбца при $i = j$.
2. Правило вычисления определителя путем его разложения по элементам i -той строки при $i = j$.
3. Нуль при $i \neq j$.
4. Правило вычисления обратной матрицы.
5. a_{ij} – элементы квадратной матрицы, стоящие на пересечении i -той строки и j -того столбца.

4. Перечислите свойства, справедливые для определителя $\Delta = |a_{ij}|$ (A_{ij} – алгебраические дополнения; $i, j = \overline{1, n}$).

1. $\det(a_{ij}) = \det(a_{ji})$. 2. $\det(a_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{kj}$ 3. $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{kj} = \delta_{ij}$.

4. $\det(a_{ij}) = 0$, если $a_{ij} = 0$ при $i = j$.
5. $\det(-a_{ij}) = -\det(a_{ij})$, если n нечетно.
5. Перечислите соотношения, справедливые для обратной матрицы A^{-1} (A^c – союзная матрица; A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A ; $\Delta = \det A$).
 1. $A^c = (A_{ji})$; 2. $A^{-1} = A_{ij}/\Delta$; 3. $A^{-1}A \neq AA^{-1}$;
 4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$; 5. $\Delta \neq 0$, если A – квадратная матрица.
6. Перечислите элементарные преобразования над матрицами, не изменяющие их ранг.
 1. Умножение элементов любой строки на число, не равное нулю.
 2. Прибавление к элементам столбцов соответствующих элементов других столбцов.
 3. Перестановка любых строк (столбцов).
 4. Вычеркивание столбцов, состоящих только из нулевых элементов.
 5. Вычеркивание строки и столбца, на пересечении которых стоит нулевой элемент.
7. Перечислите свойства линейных операций над матрицами (A, B, C – матрицы одинаковых размерностей; λ – число).
 1. $B + A \neq A + B$. 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$. 3. $A(BC) = (AB)C$.
 4. $\lambda(A + B) = \lambda A + B = A + \lambda B$. 5. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.
8. Перечислите соотношения, справедливые для произведений матриц.
 1. $AB = BA$; 2. $A(BC) = (AB)C$; 3. $A^2 = (a_{ij}^2)$;
 4. $A(B + C) = AB + AC$; 5. $AB = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$.

9. Перечислите соотношения, определяющие решения СЛАУ матричным методом и методом определителей (A – матрица коэффициентов, B – матрица свободных членов).

1. BA^{-1} ; 2. $A^{-1}B$; 3. A^c/Δ ; 4. Δ_i/Δ ; 5. B/Δ .

1.13 Упражнения к разделам 1.2 – 1.4

Т Е М А 1

Определители

Семинарское занятие

Вопросы

1. Что собой представляет определитель матрицы?
2. Запишите формулы для вычисления определителей первого и второго порядков.
3. Сформулируйте правило треугольников вычисления определителя третьего порядка и запишите соответствующую правилу формулу.
4. Перечислите основные свойства определителей.
5. Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя?
6. Запишите формулы разложения определителя по элементам строки и столбца.
7. Чему равна сумма произведений элементов i -той строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой его строки (столбца)?

Задачи

Вычислить определители, используя определение.

1. $\det(-2) = |-2| = -2.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - (-2) \cdot 4 = 8.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 5 + 4 \cdot 6 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \cdot 0 -$
 $-(-2) \cdot (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 6 \cdot 0 = -21.$

$$4. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Матрица, порождающая этот определитель, является матрицей преобразования поворота на угол α декартовой ортогональной системы координат.

Вычислить определители, используя их свойства

$$4. \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -N2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \text{ так как элементы пер-} \\ \text{вой и третьей строк равны.}$$

$$5. \text{ При каких значениях переменных } x, y, z \text{ обратится в нуль определитель } \begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & z^2 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е

При $x = z$ первая и третья строки определителя становятся равными и определитель обратится в нуль. Кроме того рассматриваемый определитель будет равен нулю, если одна из переменных равна нулю.

Вычислить определители, образовав предварительно нули в элементах их строк (столбцов) и понижая порядок определителей до 2.

$$6. \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2N3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -7 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам третьего столбца:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-7) = 15.$$

7.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -N4/2 \\ \\ -N4 \\ :2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам четвертого столбца и вынесем из первого столбца общий множитель 3:

$$\Delta = 3 \cdot 2 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 6(-2 \cdot 5 - 1 \cdot (-3)) = -42.$$

$$8. \Delta = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & b(b-a) & b^2(b-a) \\ c & c(c-a) & c^2(c-a) \end{vmatrix} =$$

$-aN1 \quad -aN2$

Разложим определитель по элементам первой строки. При этом из второй строки вынесем общий множитель $b - a$, а из третьей строки $c - a$. В результате придем к определителю второго порядка:

$$\Delta = a(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

Определители различного порядка, подобные Δ , называются *определителями Вандермонда*. Они используются при аппроксимации функций.

Задачи для самостоятельного решения

К разделу 1.2.

Вычислить определители, используя определение и свойства определителей.

$$1. \det(-2); \quad 2. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \quad 4. \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0,5 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad 5. \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

К разделу 1.4.

Вычислить определители, образовав предварительно нули в элементах их строк (столбцов) и понижая порядок определителей до 2.

$$6. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \quad 7. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}; \quad 8. \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

1.14 Упражнения к разделам 1.5 – 1.7

ТЕМА 2

Матрицы

Семинарское занятие

Вопросы

1. Какой математический объект называют матрицей?
2. Как определяется размер матрицы?
3. Что обозначает первый индекс в обозначении a_{ij} элемента матрицы?
4. Какая матрица называется прямоугольной? квадратной? нулевой? единичной? треугольной? диагональной? матрицей-строкой? матрицей-столбцом?
5. Какие элементы образуют главную диагональ матрицы?
6. Что такое транспонированная матрица? симметричная матрица?
7. Какие операции над матрицами называются линейными? Перечислите основные свойства линейных операций над матрицами.
8. Что называется произведением матриц? Запишите формулу для определения элементов матрицы произведения?
9. Сформулируйте основные свойства произведений матриц. Как возвести матрицу в степень?
10. Что такое обратная матрица? Опишите последовательность вычисления обратной матрицы.
11. Что представляет собой неособенная матрица? Почему требование неособенности важно для вычисления обратной матрицы?
12. Что такое союзная матрица?
13. Можно ли менять местами операции определения обратной матрицы и транспонирование?

Задачи

1. Найти $2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Вспоминаем, что при произведении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число (в отличие от определителя, где на число умножаются элементы одной из строк или одного из столбцов). При суммировании матриц (одинакового размера) складываются соответствующие элементы матриц. Поэтому

$$2A - B = \begin{pmatrix} (2 \cdot 2 - 3) & (2 \cdot (-3) - (-5)) \\ (2 \cdot (-1) - (-1)) & (2 \cdot 1 - 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найти AB , BA , $B^T A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Сравнить полученные результаты.

Решение.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2)) & (3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 1) \\ (-1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)) & (-1 \cdot (-4) + 0 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \\ BA &= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6 + 4) & (-4 + 0) \\ (-6 - 1) & (4 + 0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \neq AB; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^T A^T &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6 + 4) & (-2 + 0) \\ (-12 - 2) & (4 + 0) \end{pmatrix} = \\ &= 2 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^T. \end{aligned}$$

3. Найти произведение матриц AA^T , $A^T A$, образованных вектором-столбцом

$$A^T = (2; -1; 0).$$

Решение

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad -1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot (-1) & (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0) = (5).$$

Получена матрица размера 1×1 , которая не совпадает с матрицей AA^T в том числе и размером.

4. Найти и сравнить произведения IA и AI , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, I — единичные матрицы: в первом случае размера 2×2 , во втором 3×3 .

Решение

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A;$$

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

5. Найти матрицу, обратную по отношению к матрице

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Найдем определитель матрицы:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{+N_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

{Разложим определитель по элементам второй строки}

$$= 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0!$$

Отличие определителя от нуля говорит о невырожденности матрицы. Следовательно, матрица, обратная по отношению к A , существует. Для определения A^{-1} найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

(стоят в тех же строках расширенной матрицы, что и единицы в матрице коэффициентов).

Однородные СЛАУ, согласно теореме Кронекера-Капелли, могут иметь или нулевые решения для всех неизвестных (если матрица их коэффициентов невырожденная), или, в случае вырожденности матрицы коэффициентов, бесчисленное множество решений.

Описание методов решения СЛАУ имеется в /1/, /2/, /4/ – /6/.

2.6 Вопросы

1. Как записать СЛАУ в матричном виде?
2. Как определяется размер матрицы коэффициентов СЛАУ?
3. Какая СЛАУ называется однородной?
4. Что представляют собой допустимые решения СЛАУ?
5. Опишите последовательность решения СЛАУ методом Гаусса.
6. Как формируется расширенная матрица СЛАУ?
7. К какому виду приводится матрица коэффициентов в итоге преобразования СЛАУ по методу Гаусса.
8. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли для общего вида СЛАУ. Для однородных СЛАУ.
9. Изобразите конечный вид расширенной матрицы СЛАУ для всех вариантов СЛАУ, в том числе для однородных СЛАУ.

Выберите правильные ответы

1. Перечислите утверждения, справедливые для множеств допустимых решений СЛАУ.
 1. Неотрицательные значения базисных решений.
 2. Любые значения свободных переменных.
 3. Решения, получаемые при условии, что свободные переменные равны нулю.
 4. Частные решения, являющиеся базисными.
 5. Среди пунктов 1–4 нет требуемых.
2. Какие утверждения справедливы согласно теореме Кронекера-Капелли (A – матрица коэффициентов; B – матрица свободных членов; m – количество уравнений; n – количество неизвестных)?

1. Если $\text{rang} A < \text{rang} B$, СЛАУ имеет бесчисленное множество решений.
 2. Если $\text{rang} A = \text{rang} B = n$, СЛАУ имеет единственное решение.
 3. Если определитель коэффициентов равен нулю, то однородная СЛАУ имеет бесчисленное множество решений.
 4. Если определитель коэффициентов не равен нулю, то однородная СЛАУ не имеет решений.
 5. Если $\text{rang} A = \text{rang} B < n$, СЛАУ не имеет решений.
3. Какие преобразования над расширенной матрицей допустимы при решении СЛАУ методом Гаусса?
1. Вычеркивание строк, соответствующие элементы которых пропорциональны.
 2. Перестановка строк или столбцов.
 3. Добавление к элементам строк соответствующих элементов других строк.
 4. Вычеркивание строки и столбца, на пересечении которых стоит нулевой элемент.
 5. Умножение всех элементов любого столбца на отличный от нуля множитель.

2.7 Упражнения к разделам 2.2 – 2.4

Т Е М А 4 Системы линейных алгебраических уравнений

Семинарское занятие

Вопросы

1. Какая СЛАУ называется однородной?
2. Что представляют собой допустимые решения СЛАУ?
3. Опишите последовательность решения СЛАУ методом Гаусса-Жордана.
4. Как формируется расширенная матрица СЛАУ?
5. К какому виду приводится матрица коэффициентов в итоге преобразования СЛАУ по методу Гаусса-Жордана.
6. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли для СЛАУ общего вида и для однородных СЛАУ.
7. Изобразите конечный вид расширенной матрицы СЛАУ для всех вариантов СЛАУ, в том числе для однородных.

Задачи

1. Систему уравнений $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ x-y=5 \end{cases}$ решить:

- 1) путем непосредственного выражения неизвестных в явном виде;
- 2) путем преобразования расширенной матрицы системы методом Гаусса-Жордана.

Р е ш е н и е

- 1). Умножим второе уравнение системы на 3 и прибавим полученное уравнение к первому: $\begin{cases} 5x = 15, \\ x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ 3 - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -2. \end{cases}$

- 2) Составим расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований строк преобразуем ее к единичной:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{+3N_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 15 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} :5 \\ \cdot(-1) \end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \end{array} \right)_{+N1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right)_{\substack{x \quad y \quad \text{св}}}$$

Первый столбец полученной матрицы соответствует коэффициентам при неизвестной x , второй — при y , третий — свободным членам. Если вернуться к системе уравнений после проделанных преобразований, то по-

лучим:
$$\begin{cases} 1 \cdot x + 0 \cdot y = 3, \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y = -2. \end{cases}$$

Отсюда: $x = 3, y = -2$.

То есть решение системы уравнений (столбец свободных членов преобразованной матрицы) соответствует неизвестным, коэффициенты при которых стали равными единице.

Решение системы линейных уравнений единственно, поэтому разные методы преобразования исходных уравнений привели (и не могли не привести) к одному результату.

Методом Гаусса-Жордана найти решение или доказать несовместимость нижеследующих систем уравнений.

2.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 2y + z = 6, \\ 3x + 4y - 4z = -4. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем матрицу коэффициентов при ее неизвестных к единичной:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & -4 & -4 \end{array} \right) &\xrightarrow{+N2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 10 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 12 & 0 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{:5 \\ -N3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 12 & 0 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{+10N1 \\ +12N1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{x \quad y \quad z \quad \text{св}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 6 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Так как матрица коэффициентов свелась к единичной матрице третьего порядка, то ранг исходной матрицы равен трем. Ранг расширенной матрицы также равен трем. В этом легко убедиться вычитая из последнего столбца последней записи преобразованной расширенной матрицы первый столбец, умноженный на 4, второй столбец, умноженный на 2, и третий

голец, умноженный на 6. В результате столбец свободных членов станет нулевым, и его можно вычеркнуть при определении ранга матрицы. Так как ранг матрицы коэффициентов и ранг расширенной матрицы равны, то согласно теореме Кронекера-Капелли система имеет единственное решение.

3.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = -6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

е ш е н и е

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем одну из подматриц коэффициентов при ее неизвестных к единичной матрице:

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -5 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[-2N_3]{+N_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{:2} \Rightarrow \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[-N_1]{-2N_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{:3} \Rightarrow \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+N_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad \text{св}$

В матрице коэффициентов выделена единичная матрица. Под столбцами этой матрицы стоят неизвестные x_1 , x_2 и x_3 , которые принимаем за зовые. Оставшееся неизвестное x_4 относим к свободным неизвестным и переносим в правую часть матрицы, заменив в его коэффициентах знаки противоположные:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & -2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{св} \quad x_4$

Вытекающее из последней матрицы запись решения СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_4, \\ x_2 = -2 - x_4/3, \\ x_3 = 2 + 2x_4/3. \end{cases}$$

В рассмотренном примере ранг матрицы коэффициентов равен рангу расширенной матрицы ($\text{rang} A = \text{rang} B = 3$), а количество неизвестных

($m = 4$) превосходит количество уравнений $n = \text{rang} A = 3$. Записанное общее решение системы подтверждает справедливость теоремы Кронекера-Капелли о бесконечном множестве ее частных решений. Каждому из бесчисленного множества значений свободной переменной x_4 соответствуют определенные частные решения (значения базовых переменных). Например, при $x_4 = 0$ получим: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Убедиться в правильности найденного общего решения (и каждого из частных решений) можно, подставив его в исходную СЛАУ.

Конечно, в качестве базовых можно выбрать и другие неизвестные, рассмотрев отличные от приведенных выше варианты преобразования матрицы коэффициентов. Если, например, в качестве базовых выбрать переменные x_1 , x_3 и x_4 , то в процессе преобразований по методу Гаусса-Жордана в единичную матрицу следует превратить подматрицу матрицы коэффициентов, столбцами которой будут коэффициенты при этих переменных.

Для получения такого решения воспользуемся матрицей, полученной после третьего шага ранее проделанных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & | & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & | & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+N2} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & | & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & | & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{+N1} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & | & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & | & -2 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & | & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \text{ св}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -11 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{x_1 \ x_3 \ x_4 \text{ св} \ x_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -11 & -6 \end{pmatrix}$$

Последняя матрица получена из предпоследней переносом в правую часть (следовательно сменой знака) второго столбца. Этим действием выбраны базовые переменные x_1 , x_3 и x_4 , а x_2 становится свободной переменной.

Вытекающее из последней матрицы запись решения СЛАУ (выражение основных переменных через свободную переменную):

$$\begin{cases} x_1 = -11 - 6x_2, \\ x_3 = -2 - 2x_2, \\ x_4 = -6 - 3x_2. \end{cases}$$

Одно из частных решений этой системы, полученное при $x_2 = -2$: $x_1 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$ совпадает с частным решением первого варианта решения.

4.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем матрицу коэффициентов при ее неизвестных к единичной:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2N_2 \\ -N_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} :5 \\ -N_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вид полученной матрицы говорит о следующем.

Ранг матрицы коэффициентов A оказался меньше ранга B расширенной матрицы ($\text{rang} A = 2 < \text{rang} B = 3$). По теореме Кронекера-Капелли рассматриваемая СЛАУ несовместна. Об этом говорит и преобразованное третье уравнение системы, приводящее к противоречию: $0 = 4$ (!).

5.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

Это однородная СЛАУ и она может иметь ненулевые решения только в случае, если матрица коэффициентов при неизвестных вырождена (определитель матрицы равен нулю). Вырожденность матрицы будет доказана, если окажется, что ее ранг меньше трех. Ранг матрицы, а заодно и ненулевые решения, если они существуют, определим используя процедуру преобразований Гаусса-Жордана.

Составим расширенную матрицу системы (к матрице коэффициентов прибавляем нулевой столбец свободных членов, что естественно не изменит ранга матрицы коэффициентов) и преобразуем полученную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3N_2 \\ -2N_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} :4 \\ -N_1 \end{matrix}.$$

Третью строку, обращающуюся в нуль после вычитания из нее первой строки, вычеркиваем из матрицы. После этого продолжим преобразования оставшихся двух строк матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + N_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{св}$
 $x_1 \quad x_3 \quad x_2$

Отсюда следует общее решение однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 2x_2. \end{cases}$$

Подстановка решения в исходную СЛАУ обращает ее в тождество:

$$\begin{cases} 3 \cdot 0 - 2x_2 + 2x_2 = 0 (!), \\ 0 + 2x_2 - 2x_2 = 0 (!), \\ 2 \cdot 0 - 4x_2 + 2 \cdot 2x_2 = 0 (!). \end{cases}$$

6. На изготовление единицы продукции первого вида предприятию требуется: 0,2 кг сырья первого вида; 0,4 кг сырья второго вида; 0,1 кг сырья третьего вида. Соответственно, на изготовление единицы продукции второго вида требуется сырья: 0,15 кг первого; 0,2 кг второго и 0,1 кг третьего видов. На изготовление единицы продукции третьего вида: 0,1; 0,05 и 0,2 килограммов сырья соответствующих видов.

Предприятие располагает сырьем трех видов в количествах: 21 — первого вида, 15 — второго и 15 — третьего.

Требуется определить количества товаров первого, второго и третьего видов, которые может выпустить предприятие из имеющихся у него запасов сырья.

Решение

Обозначая искомые количества товаров через x_1, x_2, x_3 , для их определения составим СЛАУ:

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,4x_2 + 0,1x_3 = 21, \\ 0,15x_1 + 0,2x_2 + 0,1x_3 = 15, \\ 0,1x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 = 15. \end{cases}$$

Для решения СЛАУ используем метод Гаусса-Жордана. Составим и преобразуем расширенную матрицу.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,2 & 0,4 & 0,1 & 21 \\ 0,15 & 0,2 & 0,1 & 15 \\ 0,1 & 0,05 & 0,2 & 15 \end{array} \right) \Rightarrow$$

{Для удобства дальнейших преобразований умножим расширенную матрицу (все ее элементы) на 10} $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ 1,5 & 2 & 1 & 150 \\ 1 & 0,5 & 2 & 150 \end{array} \right) \xrightarrow[-2N1]{-N1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ -0,5 & -2 & 0 & -60 \\ -3 & -7,5 & 0 & -270 \end{array} \right) \xrightarrow[(-1)]{(-2)} \Rightarrow \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 210 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 3 & 7,5 & 0 & 270 \end{array} \right) \xrightarrow[-3N2]{-2N2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & -30 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 0 & -4,5 & 0 & -90 \end{array} \right) \xrightarrow{:(-4,5)} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & -30 \\ 1 & 4 & 0 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \end{array} \right) \xrightarrow[-4N3]{+4N3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 50 \\ 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем решение СЛАУ:

$$(x_1; x_2; x_3) = (40; 20; 50).$$

В правильности полученного решения убедимся, подставив найденные значения неизвестных в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,2 \cdot 40 + 0,4 \cdot 20 + 0,1 \cdot 50 = 21, (!) \\ 0,15 \cdot 40 + 0,2 \cdot 20 + 0,1 \cdot 50 = 15, (!) \\ 0,1 \cdot 40 + 0,05 \cdot 20 + 0,2 \cdot 50 = 15. (!) \end{cases}$$

Упражнения для самостоятельного решения

К разделам 2.1 — 2.4.

Методом Гаусса-Жордана найти решения СЛАУ или доказать их несовместность

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -1. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$$

$$4. \text{ Определить } \lambda, \text{ при котором система уравнений } \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. Найти эти решения.

5. Зависимость количеств сырья S_i трех ($i = \overline{1,3}$) видов, идущих на изготовление единиц трех видов продукции T_i , приведены в таблице.

	S_1	S_2	S_3
T_1	0,2	0,3	0,15
T_2	0,25	0,4	0,1
T_3	0,3	0,3	0,2
	115	155	65

В последней строке таблицы приведены запасы сырья, приобретенного предприятием для изготовления указанных видов продукции. Требуется определить количества продукции трех видов, которые при этом планировало выпустить предприятие.

2.8 Варианты контрольных работ по определителям, матрицам и СЛАУ

БИЛЕТ ПО ТЕОРИИ

1. Перечислите свойства, характеризующие определитель.

1. Множитель всех элементов можно вынести за знак определителя.
2. Строки и столбцы равноценны.
3. Определитель не изменится, если элементы любой его строки умножить на числовой множитель.
4. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов его главной диагонали.
5. Среди пунктов 1–4 нет требуемых.

2. Перечислите соотношения, справедливые для произведений матриц.

1. $AB = BA$; 2. $A(BC) = (AB)C$; 3. $A^2 = (a_{ij}^2)$;

4. $A(B + C) = AB + AC$; 5. $AB = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

3. Перечислите элементарные преобразования над матрицами, которые не изменяют их ранг.

1. Прибавление к элементам столбца элементов другого столбца.
2. Вычеркивание части строк, если их количество превышает количество столбцов и наоборот.
3. Транспонирование матрицы.
4. Суммирование двух матриц.
5. Умножение матрицы на число, отличное от нуля.

4. Перечислите соотношения, определяющие решения СЛАУ матричным методом и методом определителей.

1. BA^{-1} ; 2. $A^{-1}B$; 3. A^c/Δ ; 4. Δ_i/Δ ; 5. B/Δ .

5. Какие утверждения согласуются с теоремой Кронекера-Капелли (A – матрица коэффициентов; B – матрица свободных членов; m – количество уравнений; n – количество неизвестных)?

1. Если $\text{rang} A < \text{rang} B$, СЛАО имеет множество решений.
2. Если $\text{rang} A = \text{rang} B = n$, СЛАО имеет единственное решение.
3. Если определитель коэффициентов равен нулю, то однородная СЛАО имеет бесчисленное множество решений.
4. Если определитель коэффициентов не равен нулю, то однородная СЛАО не имеет решений.
5. Если $\text{rang} A = \text{rang} B < n$, СЛАО не имеет решений.

БИЛЕТ ПО ПРАКТИКЕ

Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

1. Матричным методом;
2. Методом определителей;
3. Методом Гаусса-Жордана.

4. Методом Гаусса-Жордана решить систему уравнений или доказать ее несовместность

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$$

5. Найти λ , при котором система уравнений имеет ненулевые решения. Найти эти решения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

9. Задание на расчетную работу

В заданиях на расчетную работу используются два параметра: N — последняя цифра номера группы, в которой обучается студент; n — последние две цифры номера студенческого билета; $k = N + 0,1n$.

Задана СЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + kx_3 = kN, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 + 3N, \\ \lambda x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 3(1 - N). \end{cases}$$

В предположении, что $\lambda = N$ решить СЛАУ:

- 1) матричным методом;
- 2) методом определителей;
- 3) методом Гаусса.

Приравняв нулю правые части СЛАУ

- 4) определить λ , при котором СЛАУ имеет нетривиальные решения.

Найти эти решения.

- 5). Найти решения СЛАУ или доказать ее несовместность:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + kx_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2kx_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - kx_3 = k. \end{cases}$$