

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)**

И. Е. ДАВЫДОВ

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Электронное учебное пособие

Издано в рамках выполнения Программы развития Государственного
образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика
С.П. Королёва» на 2009-2018 годы

по проекту «Создание и внедрение новых методов исследования устойчивости
ракеты-носителя с различной компоновкой головных блоков и разработка методов и
средств по её реализации в научных исследованиях и учебном процессе СГАУ»

Соглашение № 2/9 от 3.06.2013 г

САМАРА

2013

УДК 629.78 (075)

Д 138

Автор: Давыдов Игорь Евгеньевич

Компьютерная вёрстка: Давыдов И.Е.

Теория автоматического управления [Электронный ресурс]: Электронное учеб. пособие / И. Е. Давыдов; ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)», - Электрон. текстовые и граф. дан. (0,79 Мбайт). - Самара, 2013. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM). - Систем. требования: ПК Pentium; Windows 98 или выше.

В электронном учебном пособии приведены указания к лабораторным работам по дисциплине «Теория автоматического управления» для обучения студентов старших курсов, магистров и аспирантов по специальностям: 160100.65 «Самолёто- и вертолётостроение» (дисц. «Теория автоматического управления», 3курс, 5 семестр), 160400.65 «Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов» (дисц. «Системы управления ЛА», 5 курс, 10 семестр), 220305 «Автоматизированное управление жизненным циклом продукции» (дисц. «Теория автоматического управления», 4 курс, 8 семестр).

Разработано на кафедре космического машиностроения.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2013

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из актуальных проблем космической техники становится проблема обеспечения выведения на заданную целевую орбиту одной ракетой–носителем (РН) различных полезных нагрузок, значительно отличающихся своими характеристиками.

Задача подобного рода возникает в связи с развивающейся в последние годы во многих странах, в том числе и в России, коммерциализацией космических полетов. При этом геометрические, инерционно – массовые, жесткостные и диссипативные характеристики головных блоков (ГБ), включающих в себя собственно космический аппарат (КА), разгонный блок и головной обтекатель (ГО), могут варьироваться в зависимости от решаемой целевой задачи в широких пределах по отношению к характеристикам так называемого "штатного" головного блока для данной конкретной ракеты–носителя. Взаимная увязка параметров ГБ и РН и, следовательно, обеспечение устойчивого движения системы "РН – ГБ" по траектории выведения может быть выполнено только на основе соответствующего выбора коэффициентов автомата стабилизации (АС) ракеты – носителя.

В указанной связи возникает задача обеспечения динамической совместимости системы "РН – ГБ – АС", имеющей многие упругие степени свободы конструкции.

С практической точки зрения эта проблема сводится к определению такого множества проектных параметров системы, выбор любого набора параметров из которого с учетом конструктивных, прочностных, эксплуатационных и иных требований обеспечивал бы устойчивость системы во всем диапазоне эксплуатационных нагрузок по траектории выведения.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СОВМЕСТИМОСТИ СИСТЕМЫ "РАКЕТА–НОСИТЕЛЬ – ГОЛОВНОЙ БЛОК – АВТОМАТ СТАБИЛИЗАЦИИ" МЕТОДОМ МОДАЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ

1.1. Процедура модального формирования

Общая постановка задачи формирования требуемых динамических свойств стационарной линейной системы "ракета – носитель – головной блок – автомат стабилизации".

Пусть имеется линейный стационарный объект "РН – ГБ – АС", уравнения которого для фазовых координат, записанные в векторно-матричной форме, имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t), \\ Y(t) &= CX(t), \\ X(0) &= X_0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где X – n - вектор (матрица-столбец $n \times 1$) состоит из переменных состояния $x_1, x_2, \dots, x_n$ и называется вектором состояния объекта; U – m – вектор представляет собой воздействия, которые могут быть поданы на объект со стороны системы управления и называется вектором управления; Y – r – вектор, составляющие которого – выходные сигналы объекта, называется выходным вектором, $t \geq 0$;

A, B, C - соответственно матрицы собственной динамики системы "РН – ГБ – АС", ее пространственной базы управления и выходного сигнала соответствующих размерностей ($n \times n, n \times m, r \times n$).

Доказано, что условием полной управляемости объекта является равенство ранга его матрицы управляемости порядку n объекта /65/. Матрица управляемости выражается через параметры объекта формулой

$$\text{Rank} \begin{bmatrix} B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B \end{bmatrix} = n.\tag{1.2}$$

Таким образом, если система (1.1) управляема, то существует управление

$$U(t) = -PX(t), \quad (1.3)$$

которое обеспечивает для замкнутой системы $A - BP$ любой наперед заданный спектр собственных чисел:

$$\text{Spec}_s(A - BP) = \text{Spec}_s A_0. \quad (1.4)$$

В выражениях (1.3) и (1.4) P – матрица преобразования регулятора ($m \times n$); знак минус указывает на реверсирование сигнала, имеющееся в любой замкнутой системе с отрицательной обратной связью, которое происходит в регуляторе; A_0 – матрица замкнутой системы, отвечающая заданным динамическим свойствам ($n \times n$).

Линейная обратная связь по состоянию вида (1.3) обеспечивает матрице $A - BP$ любой требуемый характеристический полином $F(s)$. В частном случае и тот, который давал бы системе асимптотическую устойчивость движения и требуемое качество переходных процессов по всем n выходам. В описанной выше постановке управление объектом (1.3) носит название модального.

Существуют определенные особенности модального управления как одного из возможных методов формирования динамических свойств в многомерной стационарной системе.

Во-первых, для реализации (1.3) необходима полная измеримость вектора состояния $X(t)$, что является с практической точки зрения проблематичным для упругих систем даже в случае применения наблюдающих устройств в виду наличия не поддающихся точному измерению внешних воздействий. Случайные ошибки приборного измерения переменных вектора состояния искажают движение системы, синтезированной методом модального управления, по сравнению с расчетным. Применение оптимальных сглаживающих фильтров, типа фильтров Калмана, в целом существенно усложняет систему управления многомерным стационарным объектом.

Во-вторых, если вектор состояния системы не поддается восстановлению полностью, то для решения задачи модального управления требуется использовать более одного входа системы (векторное управление).

В-третьих, при синтезировании модального регулятора обычно не накладывается ограничений на величины его коэффициентов усиления, хотя на практике реализация очень больших коэффициентов обратной связи влечет к потенциальной динамической неустойчивости.

При решении задачи о динамической совместимости ГБ и РН, когда структура автомата стабилизации может быть заданной, а параметры подлежат определению из некоторой области допустимых, целесообразно рассмотреть более общую методику формирования требуемых динамических свойств системы "РН – ГБ – АС", а именно процедуру модального формирования.

Под модальным формированием системы "РН – ГБ – АС" понимается выбор проектных параметров пространственной базы объекта и пространственной базы управления, определяемых парой матриц (А, В). При этом матрица Р линейного регулятора типа (1.3) может оставаться неизменной для данного варианта проектирования системы или также подлежит формированию наряду с А и В. В этом случае формирование элементов тройки матриц (А, В, Р) означает взаимное согласование проектных параметров объекта и его системы управления.

При реализации метода модального формирования динамических свойств системы решаются следующие задачи:

- частичного модального формирования, т.е. любые нефиксированные элементы из $n(n+2m)$ элементов тройки матриц (А, В, Р) определяются из условия

$$Spec_s(A - BP) \setminus Spec_s(A_0 - B_0 P_0) = \emptyset, \quad (1.5)$$

где матрицы A_0, B_0, P_0 принадлежат системе с требуемыми динамическими свойствами, а $\emptyset$ - пустое множество.

- полного модального формирования, т.е. когда все нефиксированные элементы тройки матриц (А, В, Р) определяются из условия (1.5).

В соотношении (1.5) под символом $Spec_s(\bullet)$ понимается сумма

$$Spec_s(A - BP) = Spec_{S_p}(A - BP) \cup Spec_{S_0}(A - BP),$$

где $Spec_{S_p}(\bullet)$ - спектр полюсов, а $Spec_{S_0}(\bullet)$ - спектр нулей системы (1.1) по рассматриваемому выходу.

Под объектом понимается система "ракета - носитель – головной блок". Поэтому под частично модально формируемой системой понимается условие выбора проектных параметров ГБ при фиксированных параметрах ракеты – носителя, либо наоборот, при уже заданной компоновке всей системы требуется уточнить некоторые отдельные ее проектные параметры. Именно по этой причине матрицы A и B могут содержать ненулевые элементы, величина которых не может быть произвольно изменена для получения у системы "РН – ГБ" требуемых динамических свойств.

Кроме этого, необходимо определить понятие "фиксированных элементов" матриц $\{A, B, P\}$. Под фиксированными элементами матриц понимаются такие, численная величина которых является определенной. К фиксированным элементам будут отнесены в том числе нулевые и единичные элементы.

Из вышесказанного вытекают следующие задачи частичного модального формирования системы (1.1):

1. Формирование пары $\{A, B\}$ при фиксированной матрице P (задача согласования параметров объекта и автомата стабилизации).
2. Формирование пространственной базы объекта управления (матрица A) при фиксированной структуре входного устройства (матрица B) и фиксированной матрице автомата стабилизации P (задача реконструирования объекта).
3. Формирование структуры входного устройства (матрица B) при фиксированной пространственной базе объекта (матрица A) и фиксированной матрице P (задача определения эффективности автомата стабилизации).
4. Формирование матрицы P при фиксированной паре $\{A, B\}$ (задача модального управления).

При проектировании образцов новой техники, как правило, работа ведется на основе анализа функционирования прототипа, структура

математической модели которой является уже найденной и апробированной в конкретных расчетах. При этом создается образец, превосходящий прототип по некоторым определенным критериям качества, и ставится цель формирования вполне определенных проектных параметров системы, реализация которых будет гарантировать требуемые динамические свойства. Применительно к задаче о динамической совместимости РН с различными ГБ это означает, что на этапе подготовки технического предложения или при эскизном проектировании могут быть заданы основные геометрические, инерционно–массовые и жесткостные характеристики конструкций РН и ГБ. Задача будет состоять в том, чтобы из заданного множества допустимых по массовым, прочностным и другим соображениям проектных параметров ГБ выбрать их совокупность (в общем случае тоже множество), которая обеспечивала бы динамическую совместимость РН с ГБ, исходя из условий устойчивости.

В технической литературе приводятся утверждения о условиях модального формирования системы (1.1) и о числе формируемых элементов. Приведем здесь эти утверждения без доказательства.

Утверждение 1.1.:

Система (1.1) модально формируема тогда и только тогда, когда она полностью модально управляема по отношению к произвольному спектру $Spec_s(A - BP)$.

Доказательство данного утверждения приведено в работе /28/, данное утверждение определяет необходимые и достаточные условия модальной формируемости системы (1.1) по произвольному спектру.

Утверждение 1.2.:

Если система (1.1) модально формируема с произвольным спектром по состоянию, то из $(m \times n)^2 + n^2$ фиксированных элементов матрицы A, B, P могут быть определены в области вещественных чисел только $n + n(m \times n)$ элементов.

Следствие: При заданной $(m \times n)$ – матрице P линейной обратной связи в (1.1) определяются в области вещественных чисел все нефиксированные элементы пары матриц $\{A, B\}$.

В частности, если в (3.1) управление скалярное, а вектор состояния $\bar{X}(t)$ полностью измерим, то число формируемых элементов пары $\{A, B\}$ равно $n \times (n+1)$.

Таким образом, данное утверждение определяет полный ресурс модального формирования системы (1.1). Отметим, что в реальных технических системах требуемое число формируемых элементов обычно существенно меньше полного ресурса, определяемого числом $n + n (m \times n)$. Это вытекает из того факта, что матрицы A и B , например применительно к модели "РН – ГБ", являются сильно разреженными в силу специфических особенностей самой системы.

1.2. Критерии качества переходных процессов в каналах управления

Качество работы любой системы регулирования в конечном счете определяется величиной ошибки, равной разности между требуемыми $y(t)$ и действительными $f(t)$ значениями регулируемой величины: $x(t) = y(t) - f(t)$. В системах стабилизации при $y(t) = 0$ ошибка $x(t) = -f(t)$.

Знание мгновенного значения ошибки в течение всего времени работы регулируемого объекта позволяет наиболее полно судить о свойствах системы регулирования. Однако в действительности, в следствии случайного характера задающего и возмущающего воздействий, такой подход не может быть реализован. Поэтому приходится оценивать качество системы регулирования оценивая по некоторым ее свойствам, проявляющимся при различных типовых воздействиях (в литературе подробно рассмотрена реакция системы на эталонное воздействие – на единичную ступенчатую функцию Хевисайда

hev(t)). Для определения качественных показателей системы регулирования в этом случае используются специальные критерии качества.

Качество системы будем оценивать, исходя из рассмотрения запаса устойчивости и быстродействия. Для этого будем основываться на характере протекания процессов во времени и использовать для формирования критериев качества расположение спектра собственных значений передаточной функции замкнутой системы (1.4) на заданной области комплексной переменной s , отвечающего требуемому качеству переходных процессов, что непосредственно вытекает из условия модального управления (формирования).

Динамическую совместимость, будем определять из условия устойчивости по Ляпунову для системы линеаризованных уравнений возмущенного движения системы "РН – ГБ – АС", приведенной к нормальному виду:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n), s = \overline{1, n},$$

где x_s – величина ошибки (возмущения координат).

Определение устойчивости по Ляпунову формулируется следующим образом - невозмущенное движение устойчиво, если для всякого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, можно подобрать другое положительное число $\eta(\varepsilon)$, такое, что для всех возмущенных движений $x_s = x_s(t)$, для которых в начальный момент времени $t = t_0$ выполняются неравенства $|x_s(t_0)| \leq \eta$, при всех $t > t_0$, будут выполняться неравенства $|x_s(t)| < \varepsilon$.

Если невозмущенное движение устойчиво и если число η можно выбрать настолько малым, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющим неравенствам $|x_s(t_0)| \leq \eta$, будут выполняться условия $\lim_{t \rightarrow \infty} x_s(t) = 0$, то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

При проведении поверочных расчетов движения системы "РН – ГБ – АС" при действии возмущений используется понятие устойчивости по

Моисееву Н.Д., так как предложенная им формулировка позволяет наиболее приемлемым образом оценить саму систему, исходя из ее потребительских качеств.

Движение системы линеаризованных уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n), s = \overline{1, n},$$

называется технически устойчивым относительно заданных верхних пределов начальных отклонений $\bar{x}_{s0} > 0$, заданных верхних пределов возмущающих сил $\bar{p}_s > 0$ и заданных верхних пределов последующих отклонений $\bar{x}_s > 0$ на заданном интервале времени $0 \leq t \leq t_k$ в том и только том случае, если любое решение $x_s = x_s(t)$ механической системы, возмущенное движение которой описывается уравнением

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + p_s(t), (s = \overline{1, n}),$$

(где $p_s(t)$ - возмущающие силы, действующие на систему) при любых начальных значениях x_{s0} , удовлетворяющих условию $|x_{s0}| \leq \bar{x}_{s0}$, и при произвольных возмущающих силах, на которые накладывается единственное ограничение $|p_s(t)| \leq \bar{p}_s$ при $0 \leq t \leq t_k$, будет удовлетворять условию $|x_s(t)| \leq \bar{x}_s$ для всех значений $t < t_k$. Данное определение устойчивости применяется при проведении поверочных расчетов переходных процессов при работе первой ступени РН.

Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, предложенное выше определение динамической совместимости является частным случаем данного определения. Отметим, что вопрос о динамической совместимости не выходит за рамки определения устойчивости, а только раскрывает требования к компоновке системы, исходя из устойчивости ее движения. В общем случае, независимо от того, какой критерий используется для определения устойчивости системы (Ляпунова, Моисеева и др.), динамическая

совместимость является составной частью выбранного критерия и определяет необходимое, но не достаточное, условие формирования компоновки устойчивой системы:

управляемая механическая система, состоящая из нескольких взаимодействующих подсистем, является динамически совместимой в том и только в том случае, если ее невозмущенное движение устойчиво по Ляпунову и обладает заданным качеством переходных процессов по каналам управления.

Дополнительное условие, характеризующее вместе с динамической совместимостью достаточность, вытекает из факта неединственности решения задачи модального формирования динамических свойств системы. С физической точки зрения, при множественности способов технической реализации одних и тех же динамических свойств системы, из-за конструктивных особенностей невозможно технически реализовать все эти способы (неоправданное усложнение конструкции, резкое возрастание стоимости изделия и т.д.). Вопрос особенностей компоновки системы не рассматривается, так как компоновка является чисто конструктивной характеристикой рассматриваемой системы. Отметим только, что рассматривается концепция множественности способов технической реализации, вытекающая из метода модального формирования, а выбор приемлемой технической реализации – это прерогатива специалистов, занимающихся вопросами создания конструкций системы.

Устойчивость переходных процессов в каналах управления вытекает из самого определения динамической совместимости в плане анализа контролируемых параметров (пространственный угол атаки, угол скольжения, линейные отклонения центра масс системы "РН – ГБ" относительно опорной траектории и их производные, угловые отклонения и их производные относительно опорной траектории и т.д.). Динамические свойства системы "РН – ГБ – АС" могут быть определены через спектральные оценки качества. Выберем в качестве основных следующие, хорошо известные в теории автоматического управления, пять критериев:

- длительность переходного процесса τ ;

- степень устойчивости η ;
- перерегулирование σ ;
- коэффициент затухания ζ ;
- колебательность μ .

Во временной области совокупность этих критериев определяет трубку траекторий процесса $\bar{x}(t)$ по рассматриваемой переменной движения системы "РН – ГБ – АС". Связь рассматриваемых критериев динамических свойств с соответствующими параметрами спектра полюсов осуществляется на основе следующих соображений. Корни системы (1.1), расположенные ближе всего к мнимой оси на комплексной плоскости, т.е. имеющие наименьшую по абсолютной величине вещественную часть, дают в переходном процессе члены, которые затухают наиболее медленно. В большинстве случаев переходный процесс можно считать закончившимся тогда, когда затухнет составляющая движения, определяемая ближайшим к мнимой оси корнем. Если ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, то приближенная зависимость между степенью устойчивости и временем переходного процесса имеет вид:

$$\tau \approx \frac{1}{\eta} \operatorname{Ln} \frac{1}{\Delta}. \quad (1.6)$$

Если ближайший к мнимой оси является пара комплексных корней $-\eta \pm j\beta$, то верхняя граница времени переходного процесса примет вид:

$$\tau \leq \frac{1}{\eta} \operatorname{Ln} \frac{1}{\Delta}. \quad (1.7)$$

Отсюда следует, что величина степени устойчивости определяет быстроту затухания переходного процесса.

Склонность системы к колебаниям будет наблюдаться, если система имеет комплексные корни вида $-\alpha \pm j\beta$. Эта склонность характеризуется отношением мнимой части корня (угловой частоты колебаний) к вещественной (коэффициенту затухания):

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (1.8)$$

Колебательность связана с другим корневым показателем запаса устойчивости – затуханием ζ . В случае ближайших к мнимой оси комплексно-сопряженных корней:

$$\zeta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}} \quad (1.9)$$

или

$$\mu = \frac{2\pi}{Ln \frac{1}{1-\zeta}}.$$

Затухание определяет темп диссипации энергии в системе. Обычно в системах автоматического регулирования допускается затухание за один период не менее, чем 90÷98 %. Так например, если $\zeta\% = 98\%$, то допустимая колебательность при этом составит $\mu = 1.57$. Соответственно, при $\zeta = 90\%$ получим $\mu \approx 2.72$. Задание определенной колебательности заставляет ограничивать область расположения спектра полюсов двумя лучами, которые составляют с вещественной осью угол $\varphi = \arctg \mu$.

Перерегулирование σ выражается через колебательность

$$\sigma \leq e^{-\frac{\pi}{\mu}} \cdot 100\%. \quad (1.10)$$

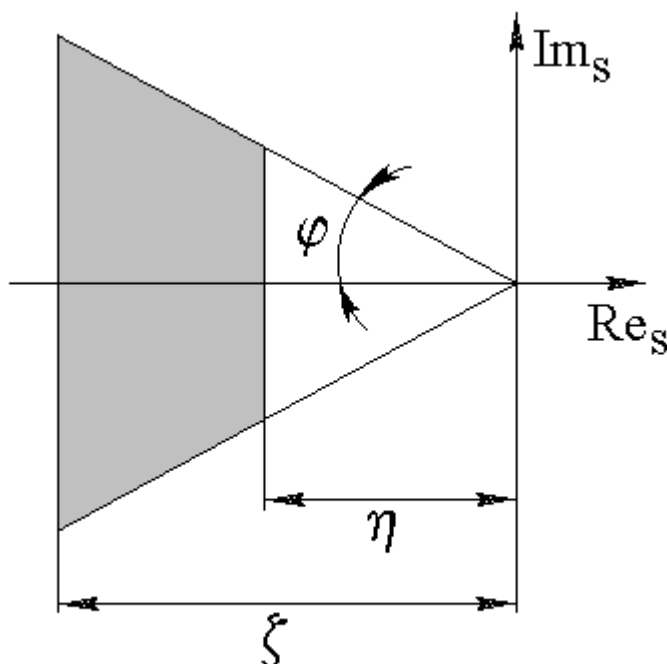


Рис. 1.1. Область гарантированного качества

Перерегулирование в упругой системе характеризует динамическую деформацию системы в процессе переходного режима. Исходя из решения конкретной целевой задачи, перерегулирование может быть ограничено в значительной степени или вообще быть равным нулю. В противном случае оно может

привести к существенным механическим напряжениям в элементах системы вплоть до выхода системы из строя.

Полученная на основании этих рассуждений область расположения спектра полюсов слева ограничивается вертикальной прямой, проходящей через вещественное значение наиболее удаленного от мнимой оси полюса (рис.1.1). При этом параметр ζ соответствует составляющей переходного процесса, которая затухает наиболее быстро.

Таким образом, область на комплексной плоскости s , ограниченная двумя вертикальными прямыми: $\text{Re } s = -\eta$ и $\text{Re } s = -\zeta$, а также двумя лучами, проведенными под углом $\varphi = \arctg \mu$, определяет так называемую область гарантированного качества (ОГК) системы. Смысл этого определения состоит в том, что любой спектр полюсов, взятый из этой области, будет соответствовать такой системе, переходный процесс в которой будет обладать заданными показателями качества τ , σ , ζ .

Полученные соотношения (1.6) – (1.10) определяют спектральные оценки качества динамических свойств системы "РН – ГБ – АС" и позволяют осмысленно подойти к выбору требуемых спектров полюсов для проектируемой системы.

1.3. Реализация процедуры модального формирования

Задача исследования динамической совместимости ГБ с РН рассматривается как задача выбора областей в пространстве проектных параметров, соответствующих устойчивости системы и заданному качеству переходных процессов в каналах управления, и формулируется как задача модального формирования на множестве спектров.

Постановка задачи (1.1) – (1.5) была разработана ранее и применена к проблеме формирования динамических свойств упругих космических

аппаратов как сложных технических систем, обладающих многими колебательными степенями свободы.

Постановка задачи в форме (1.1) – (1.5) относится к проблеме определения условий динамической совместимости составной системы "РН – ГБ – АС". В качестве параметров, которые могут обеспечить динамическую совместимость системы, в данном случае выступают коэффициенты автомата стабилизации $a_i, i = \overline{0,4}$ по соответствующему каналу управления. В качестве параметров, влияющих на динамическую совместимость РН и ГБ, выступают геометрические (аэродинамические), инерционно – массовые, жесткостные и диссипативные характеристики системы.

Таким образом, на множестве возможных значений проектных параметров системы "РН – ГБ – АС" (Р) требуется найти такую область D_p (рис.1.2), которая соответствует устойчивости системы и заданному качеству переходных процессов системы "РН – ГБ – АС". Множество допустимых проектных параметров задано совокупностью неравенств вида

$$a_j \leq p_j \leq b_j, \quad (1.11)$$

где постоянные $a_j, b_j, j = \overline{1,k}$ определяют заданные пределы изменения параметров.

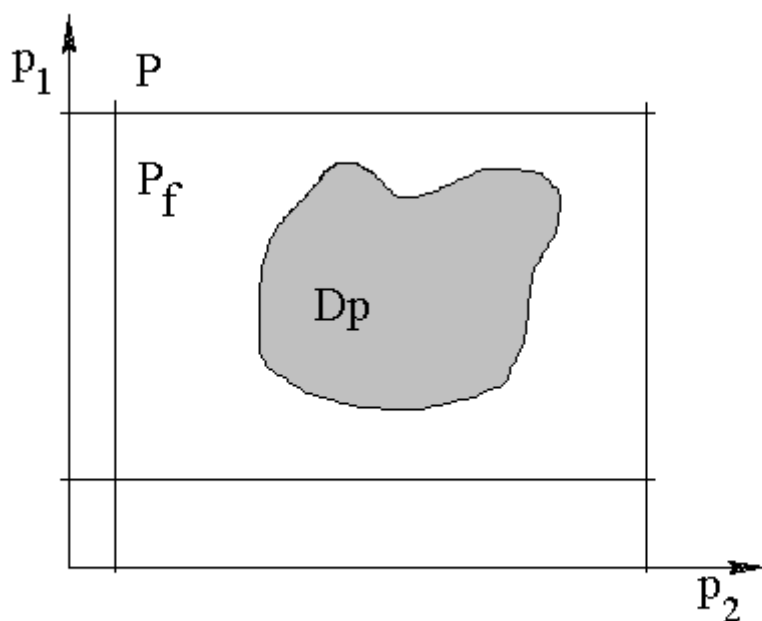


Рис. 1.2. Область D_p на плоскости проектных параметров

С другой стороны, заданному качеству реакции системы на внешнее воздействие соответствует определенная область D_s на плоскости комплексной переменной s .

Таким образом, математическая постановка решаемой задачи динамической совместимости формулируется следующим образом: в пространстве допустимых значений коэффициентов автомата стабилизации и проектных параметров системы "РН – ГБ" требуется найти такую область:

$D_p \subset P_f$, для которой

$$Spec_s(A - BP) \in D_s, \forall p_j \in D_p \subset P_f \subset P, j = \overline{1, k}, k > 1, \quad (1.12)$$

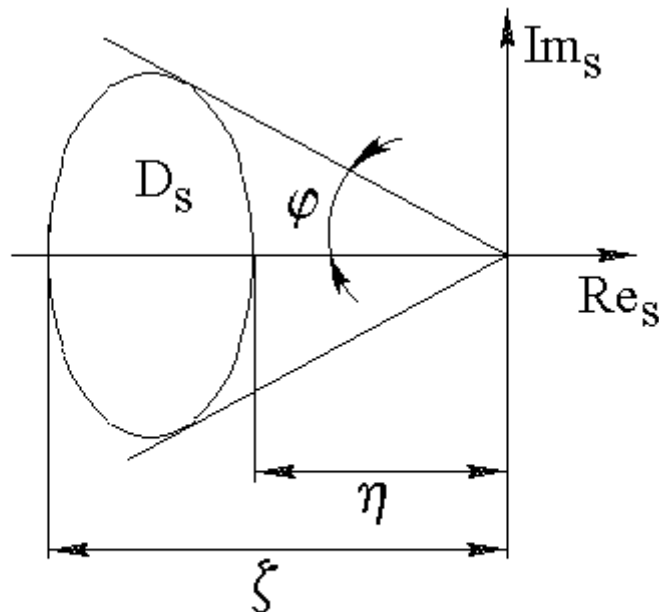


Рис. 1.3. Область D_s на плоскости комплексной переменной s

где D_s - область расположения на плоскости комплексной переменной s спектров совокупности подсистем, обладающих свойством устойчивости по Ляпунову невозмущенного движения и заданным качеством переходных процессов по каналам управления; p_j - элементы k - вектора проектных

(формируемых) параметров системы; P_f - множество допустимых проектных параметров; P - множество проектных параметров системы. Для асимптотической устойчивости линейных систем множество D_s должно располагаться в левой полуплоскости комплексной переменной s и иметь вполне определенную конфигурацию, соответствующую заданным значениям степени быстрогодействия η , колебательности μ и затухания ζ (рис.1.3.).

Допустимы различные конфигурации области D_s . Для систем типа "РН – ГБ – АС" связь геометрических параметров η , μ и ζ множества D_s и качества системы может быть приближенно определена соотношениями (1.6) – (1.10).

В силу сложности конфигурации множества D_s , которое в проектных задачах может быть произвольным, что вызывает определенные трудности при

получении функционала, определяющего принадлежность спектра полюсов данной области, поставим задачу преобразования множества D_s комплексной переменной s в некоторое другое множество D_q комплексной переменной q .

При этом потребуем, чтобы D_q имело бы более простую структуру и тем самым облегчило задачу построения функционала, определяющего принадлежность спектра системы "РН – ГБ – АС" области (множеству) D_s . Для преобразования области D_s в D_q будем использовать аппарат функционально – преобразованных (ФП) матриц.

Пусть на плоскости s задана некоторая область D_s , в которой расположены все собственные числа матрицы (1.1) $\bar{A} = A - BP$. Обозначим совокупность всех матриц порядка n , спектр которых принадлежит D_s , через $\bar{A}_s$:

$$\{\bar{A}_s\} = \left\{ \bar{A}_s / \text{Spec } \bar{A}_s \in D_s \right\}.$$

С другой стороны, пусть на плоскости переменной q задан круг радиусом r с центром в начале координат. Обозначим через $\bar{B}_q$ совокупность всех матриц порядка n , спектр которых находится внутри круга радиуса $|q_i| < r, i = \overline{1, n}$:

$$\{\bar{B}_q\} = \left\{ \bar{B}_q / \text{Spec } \bar{B}_q \in D_q \right\}, \quad (1.13)$$

где D_q - множество точек, лежащих внутри круга радиусом R .

Предположим, что существует оператор L , устанавливающий взаимно однозначное соответствие двух множеств $\bar{A}_s$ и $\bar{B}_q$. Оператор L , действуя на любую матрицу A_s , выбранную из $\bar{A}_s$, переводит ее спектр в множество точек, содержащихся в $\bar{B}_q$. Это означает, что все собственные числа $q_i (i = \overline{1, n})$ матрицы $\bar{B} = L(\bar{A})$ будут принадлежать кругу радиуса R с центром в начале координат. С вычислительной точки зрения необходимо, чтобы структура L была бы наиболее простой.

Задачу о соответствии между множествами можно свести к задаче о соответствии между границами множеств. Для этого необходимо найти аналитическую функцию

$$q = f(s), \quad (1.14)$$

которая переводит границу множества D_s в границу множества D_q при условии, что

$$Spec_s \bar{A} \in D_s. \quad (1.15)$$

Тогда, если спектр $\bar{A}$ расположен внутри D_s , то спектр матрицы $\bar{B}$ в результате функционального преобразования $q = f(s)$ будет располагаться внутри круга радиуса R с центром в начале координат. Преобразование D_s в D_q посредством $q = f(s)$ является конформным.

На основе проведенных рассуждений для того, чтобы найти условия принадлежности спектра $\{s_i\}, i = \overline{1, n}$ области D_s , требуется указать условия нахождения спектра $\{q_i\}, i = \overline{1, n}$ матрицы $\bar{B}$ в круге.

Поэтому задача (1.12), в соответствии с теорией модального формирования, заменяется следующей: в пространстве допустимых значений коэффициентов автомата стабилизации и проектных параметров системы "РН – ГБ" требуется найти такую область $D_p \subset P_f$, для которой

$$Spec_q \bar{B} \in D_q, \quad \forall p_j \in D_p \subset P_f \subset P, \quad j = \overline{1, k}; \quad k > 1, \quad (1.16)$$

где $\bar{B}$ – функционально – преобразованная посредством оператора L матрица $\bar{B} = L(\bar{A})$.

Процедура получения ФП–матрицы заключается в следующем.

Если матрица $\bar{A} \in \bar{A}_s$ и ее спектр $s_i \in D_s$, то необходимо и достаточно, чтобы наибольшее по величине собственное число матрицы $\bar{B}$ было по модулю меньше величины R . Тогда для того, чтобы $s_i \in D_s$, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялось условие

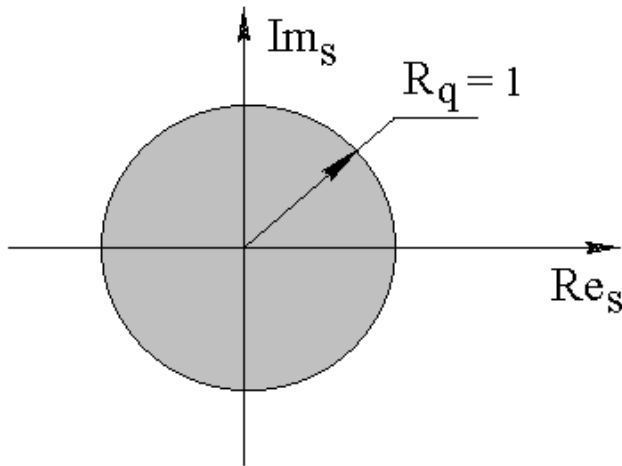
$$Lim_{k \rightarrow \infty} [L(\bar{A})]^k = 0, \quad (1.17)$$

где 0 – нулевая матрица.

В качестве функционала выберем спектральный радиус матрицы $\bar{B}$:

$$J = R_q = \max_i |q_i|, i = \overline{1, n}, \quad (1.18)$$

где Q_i - собственные числа ФП–матрицы $\bar{B}$.



Таким образом, если

$$\max_i |q_i| < 1, \quad (1.19)$$

то оценка выполняется относительно единичного круга с центром в начале координат (рис.1.4).

Отсюда следует, что

$$Spec_q \bar{B} \in D_q$$

Рис. 1.4. Единичный круг на плоскости q

и значит $Spec_s \bar{A} \in D_s$.

Аналитическая структура $q = f(s)$ может быть различной и отображать границы области заданного расположения спектра S_i на области, ограниченные кругами или алгебраическими кривыми высших порядков, расположенными внутри круга. Исходим из того, что близкие по динамическим характеристикам системы ("РН – АС" с различными ГБ), отвечающие определенным требованиям, будут иметь близкие по форме спектры. Поэтому область D_s принимается для всех однотипных систем одинаковой, а отличия будут только в размерах и положении этой области на комплексной плоскости s . В настоящей работе при исследовании влияния степени быстродействия η на динамическую совместимость "РН – ГБ – АС" использовалось функциональное преобразование левой полуплоскости s (с учетом смещения η относительно мнимой оси Im) на внутренность единичного круга с центром в начале координат комплексной плоскости q . При этом мнимая ось, рассматриваемая как окружность бесконечного радиуса, переходила в единичную окружность.

При учете остальных критериев качества на основе спектрального анализа, а также с учетом того, что при использовании общепринятой трапецевидной формы существуют зоны с малой вероятностью нахождения там комплексно–сопряженных корней системы (рис. 1.1), предпочтительной является область, ограниченная кривой четвертого порядка. Кроме того, практическое значение кривых четвертого порядка для задач машинного анализа и синтеза автоматических систем состоит в том, что, ограничивая область расположения спектра исходной матрицы $\bar{A}$ определенным замкнутым контуром, они позволяют с помощью относительно простого отображения перевести внутренность контура на единичный круг с центром в начале координат. Такому отображению соответствуют простые по структуре функционально - преобразованные матрицы.

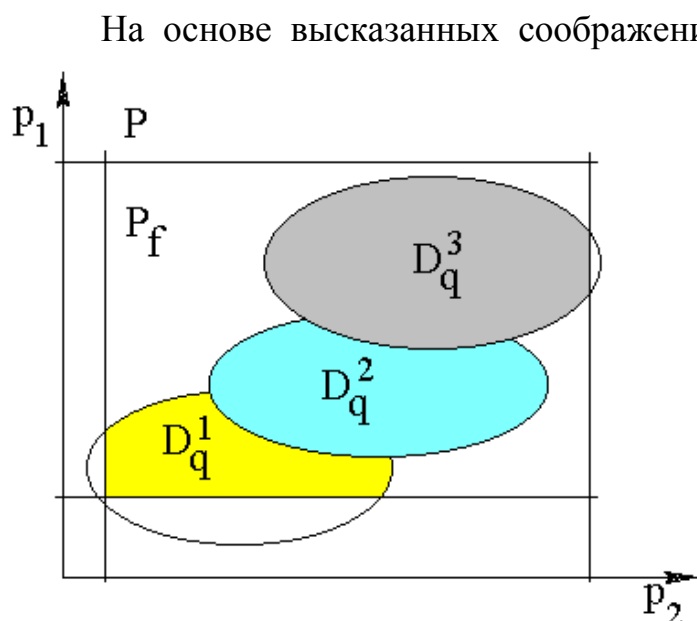


Рис. 1.5. Наложение областей D_p на плоскость проектных параметров p_1, p_2 для различных участков полета

четвертого порядка – овал Кассини (рис. 1.3.).

Поиск области D_p производится путем построения ее границы L_p /28/. В принципе возможно построение некоторой объемной области D_p в пространстве трех проектных параметров, однако это является

малоприемлемым с практической точки зрения, тем более, что для данной конкретной задачи области D_p в пространстве выбранных проектных параметров строятся в нескольких точках траектории (старт, район максимальных скоростных напоров, окончание работы первой ступени и т.д.) (рис. 1.5) с последующим наложением областей.

Поэтому граница L_p строится на плоскости двух выбранных проектных параметров из множества P_f , а остальные параметры либо изменяются по

определенному алгоритму, либо остаются постоянными. При этом k -мерное пространство проектных параметров рассекается $k(k-1)/2$ плоскими сечениями, в каждом из которых строится своя граница L_p области D_p . Из комплекса рассматриваемых задач (динамическая совместимость систем "РН – ГБ – АС") каждый раз выбирается конкретная задача (влияние параметров РН, ГБ или АС на совместимость системы), и поэтому реальное число областей D_p

$$\sum_{i=1}^c Dp_i < \frac{k(k-1)}{2}, c \leq k, c > 1, \quad (1.20)$$

где c – количество доминирующих проектных параметров системы "РН-ГБ-АС", определяющих области D_p в конкретной задаче динамической совместимости.

Так как граница L_p является линией равного значения функционала (1.18, 1.19), то она может быть выделена путем расчета максимального собственного числа ФП-матрицы $\bar{B}$. Для этой цели используется одна из приближенных оценок спектрального радиуса:

для верхнего приближения

$$R_{\rho m}^B = \sqrt[m]{\|\bar{B}_m\|}, m = 1, 2, \dots; \quad (1.21)$$

для нижнего приближения

$$R_{\rho m}^H = \sqrt{\frac{1}{n} sp \bar{B}^m}. \quad (1.22)$$

Здесь m – индекс итерации; n – порядок матрицы $\bar{B}$. Нормы в (1.21) может быть вычислена по любому из следующих соотношений:

l_1 – норма

$$\|\bar{B}\|_{l_1} = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|;$$

евклидова норма

$$\|\bar{B}\|_e = \left(\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 \right)^{1/2};$$

l_∞ - норма

$$\|\overline{B}\|_{l_\infty} = \max_{\substack{1 \leq i \\ j \leq n}} |b_{ij}|.$$

Алгоритм вычисления области D_p сводится к определению ее границы L_p и состоит из следующих этапов:

1. Определение глобального минимума функционала (1.18) на множестве P_f с использованием алгоритма случайного поиска с направляющим косинусом.
2. Проведение сечения P_f (из $k^{(k-1)}/2$ возможных (1.20)) через полученную точку глобального минимума функционала (1.18).
3. Организация сканирующих направлений из полученной точки и вычисление вдоль этих направлений оценок функционала (1.18) для верхнего и нижнего приближений по соответствующим формулам (1.21), (1.22).
4. Определение граничных точек области D_p вдоль сканирующих направлений.
5. Аппроксимация границы L_p по полученным граничным точкам алгебраическими кривыми заданного порядка.

Расчет внутренней точки области D_p допустимых значений проектных параметров в выбранном сечении сводится к решению задачи нелинейного программирования для функционала (1.18) с учетом ограничений (1.11). Исследование зависимости функционала (1.18) от проектных параметров, выполненное на модельных задачах невысокой размерности, показало, что эта зависимость является существенно нелинейной. Для задач высокой размерности при $n > 4$ такой анализ вообще затруднителен. Поэтому для отыскания глобального экстремума (1.18) предлагается использовать метод случайного поиска с направляющим косинусом. Метод применим как для случая многоэкстремальных задач, так и для случая, когда функционал (1.18) не всюду дифференцируем, особенно в точке экстремума. Он может быть также применен для определения экстремума (1.18) на границе области D_p .

"Центровая" точка в пространстве проектных параметров является точкой глобального минимума функционала (1.18). Обозначим ее координаты через $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$.

Соответственно на плоскости двух параметров в рассматриваемом сечении $k^{(k-1)}/2$ возможные координаты "центральной" точки обозначим через $\bar{p} = (p_l, p_m)$. Далее в выбранном сечении через полученную точку формируются сканирующие направления, задаваемые уравнением прямой :

$$p_m - p_m^i = \operatorname{tg} \varphi (p_l^i - p_l),$$

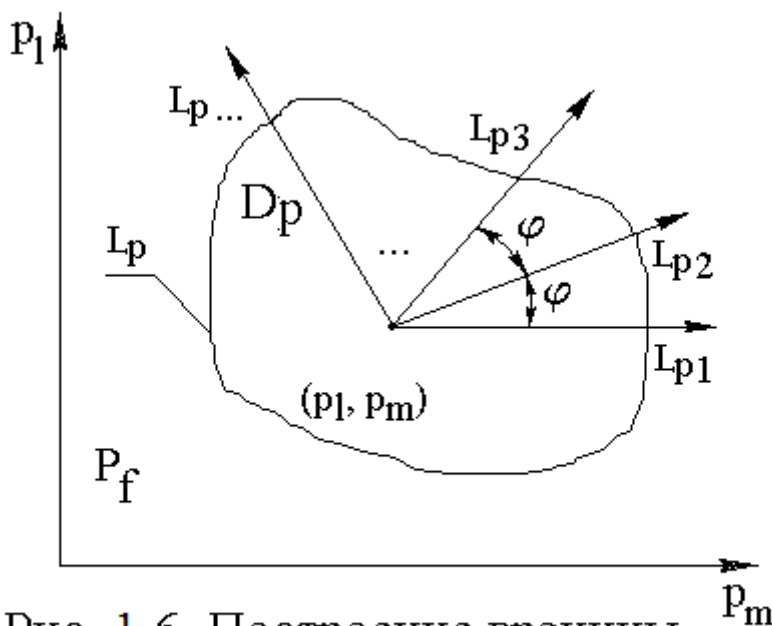


Рис. 1.6. Построение границы L_p области D_p

где угловой коэффициент $\operatorname{tg} \varphi$ варьируется таким образом, чтобы сканирующие лучи равномерно покрывали заданное сечение P_f (например, через $\Delta\varphi = 5 \dots 10^\circ$ или более часто, рис. 1.6).

Нахождение граничных точек $L_{p1}, L_{p2}, \dots$ производится

путем вычисления функционала (1.18) по оценкам (1.21) и (1.22) вдоль выбранного сканирующего направления с заданным шагом λ . Процесс вычисления функционала вдоль выбранного направления ведется до тех пор, пока выполняется неравенство:

$$\max_i |q_i| < 1, i = \overline{1, n} \quad (1.23)$$

После того, как $\max_i |q_i|$ станет больше единицы, идет уточнение положения граничной точки L_{pk} до выполнения условия: $\left| 1 - \max_i |q_i| \right| \leq \varepsilon$, где ε - назначенная погрешность определения граничной точки.

По изложенному алгоритму производится построение области гарантированного качества проектных параметров D_p в выбранных точках траектории (старт, район максимальных скоростных напоров и т.д.).

1.3.1. Расчет коэффициентов овала Кассини

Уравнение овала Кассини имеет вид:

$$(\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2)^2 + 2c^2(\operatorname{Re}^2 - \operatorname{Im}^2) = a^4 - c^4, \quad (1.24)$$

где Re , Im – ограничения области D_s по действительной и мнимой осям комплексной плоскости s , соответственно; a , c – параметры овала Кассини; знак "+" перед $2c^2$ обозначает, что данный овал "вытянут" относительно оси Re .

Размеры относительно осей для данного уравнения вычисляются по формулам:

$$1. \text{ По оси } \operatorname{Re} (OX): \pm \sqrt{a^2 - c^2},$$

$$2. \text{ По оси } \operatorname{Im} (OY): \pm \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Для общего случая $a \geq c\sqrt{2}$ (рис. 1.7), если данное условие не соблюдается, то овал Кассини вырождается в лемнискату Бернулли.

Уравнение перехода овала Кассини на комплексной плоскости параметра s к единичному радиусу на комплексной плоскости параметра q имеет вид:

$$q = \frac{1}{a^2}(c^2 + s^2).$$

Если спектр s_i матрицы $\bar{A}$ лежит внутри области D_s , ограниченной овалом Кассини комплексной плоскости s , то спектр q_i функционально-преобразованной матрицы $\bar{B} = L(\bar{A}) = \frac{1}{a^2}(c^2 E + \bar{A}^2)$ расположен внутри единичного круга с центром в начале координат комплексной плоскости q .

Необходимое и достаточное условие расположение спектра матрицы $\bar{A}$ внутри области D_s , границу которой описывает овал Кассини, имеет вид: $\bar{B} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Если ввести степень быстродействия η , то ФП – матрица запишется в виде:

$$\bar{B} = L(\eta, \bar{A}) = \frac{1}{a^2} (c^2 E + (\bar{A} + \eta E)^2). \quad (1.25)$$

В общем виде степень быстродействия определяется расстоянием границы выбранной области от мнимой оси Im (OY). Знак "+" степени устойчивости показывает смещение мнимой оси вправо (выбранная область смещается влево). В противном случае мнимая ось сместится влево. Для овала Кассини, который расположен симметрично относительно мнимой оси, при смещении овала Кассини влево относительно мнимой оси Im (OY) к выбранному значению степени быстродействия η нужно прибавить $\sqrt{a^2 - c^2}$ (рис. 1.7 а, б).

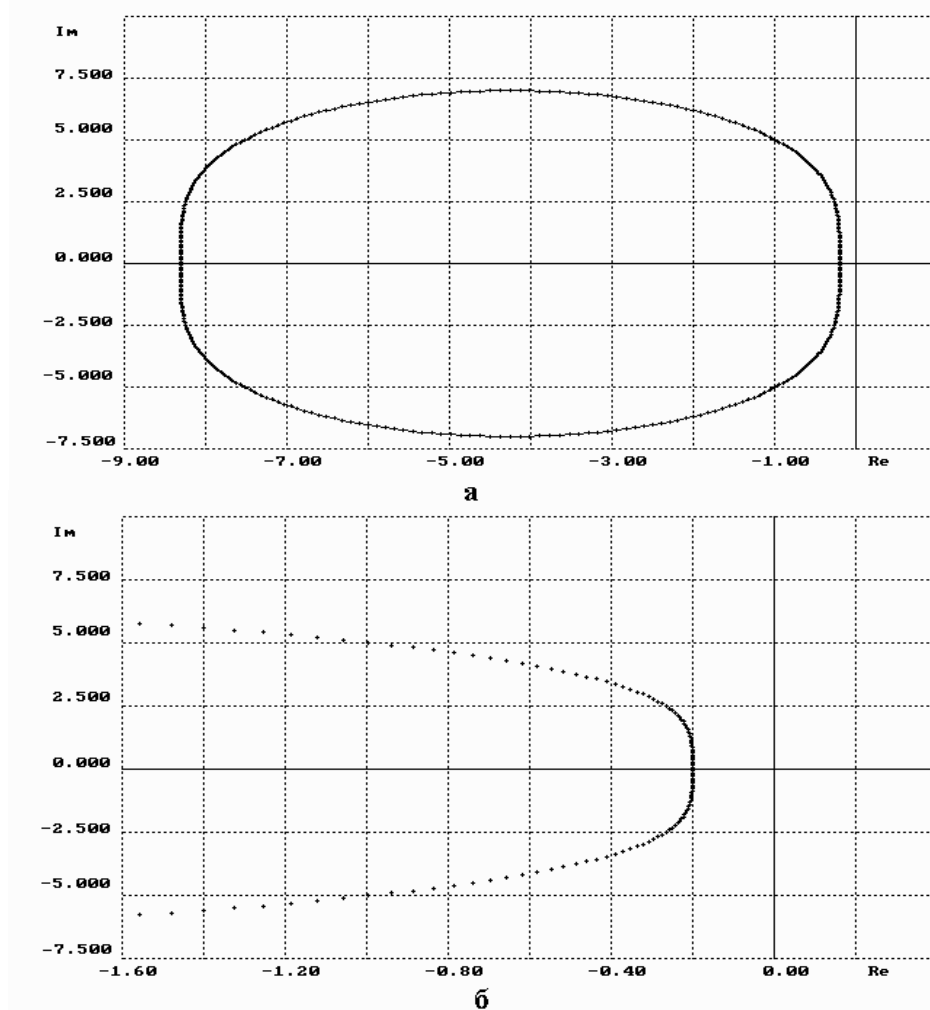


Рис. 1.7. Овал Кассини (а – общий вид, б - к мнимой оси Im ближняя часть)

Данный контур овала Кассини получен при следующих параметрах:

$$a = 5.72, c = 4.035, \eta = 0.2, \operatorname{Re} = \pm 4.054, \operatorname{Im} = \pm 7.0.$$

Пусть, например, матрица $\bar{A}$ замкнутой системы "РН – ГБ – АС" при векторе состояния $\mathbf{X} = [y; \dot{y}; g; \dot{g}; \delta; \dot{\delta}]^T$ (без учета упругости корпуса и жидкого наполнения) имеет вид:

$$\bar{A} = (A - BP) = \begin{array}{c|cc} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad -C_{yy} \quad -C_{y\dot{g}} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad -C_{gy} \quad -C_{g\dot{g}} \quad 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \quad 0 \\ -C_{y\delta} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ -C_{g\delta} \quad 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ \frac{a_2}{\tau_2} \quad \frac{a_3}{\tau_2} \quad \frac{a_0}{\tau_2} \quad \frac{a_1}{\tau_2} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \\ -1 \quad -\frac{\tau_1}{\tau_2} \end{array} \end{array}$$

и коэффициенты: $C_{yy} = 0.027$; $C_{y\dot{g}} = 20.183$; $C_{y\delta} = 0.932$; $C_{gy} = -0.001$; $C_{g\dot{g}} = -0.112$; $C_{g\delta} = 0.136$; $\tau_1 = 0.21$; $\tau_2 = 0.023$; $a_0 = 20.0$; $a_1 = 20.0$; $a_2 = -0.011$; $a_3 = -0.69$.

Расчет собственных значений исходной матрицы и ФП–матрицы произведен методом Лина.

Ниже приведена таблица соответствия собственных значений исходной матрицы $\bar{A}$ и функционально–преобразованной матрицы $\bar{B}$.

Таблица 1.1

Собственные значения матриц $\bar{A}$ и $\bar{B}$

Исходная матрица $\bar{A}$		ФП– матрица $\bar{B}$	
Re	Im	Re	Im
-0.0161	0.0000	1.0210	0.0000
-1.6994	0.0000	0.6818	0.0000
-0.5091	-1.4516	0.1703	-0.1962
-0.5091	1.4516	0.1703	0.1962
-3.2118	-3.4057	0.8393	-0.3234
-3.2118	3.4057	0.8393	0.3234

При получении ФП-матрицы использована степень быстрогодействия $\eta=0.2$ и поэтому при преобразовании овала Кассини в единичный круг один из корней не попадает в область, описанную овалом (один из радиус–векторов $R = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}$ ФП - матрицы больше единицы), и, следовательно, система с выбранными характеристиками не удовлетворяет заданному качеству процесса управления.

1.3.2. Определение глобального экстремума методом случайного поиска с направляющим косинусом

В задачах модального формирования динамических свойств на первое место выходит проблема решения экстремальных задач. При этом структура оптимизируемой функции такова, что допускает наличие локальных экстремумов, которые существенно усложняют процедуру поиска глобального экстремума.

В случае ограничения пространства проектных параметров заранее заданной областью (ограничения задаются на основе знаний "физики" рассматриваемого объекта и его системы управления) могут появиться два варианта определения глобального экстремума:

- * считать глобальным экстремумом тот, который попадает в выбранную область пространства проектных параметров;
- * независимо от ограничений на пространство проектных параметров определить глобальный экстремум всего пространства проектных параметров (рис. 1.5).

Отметим, что глобальный экстремум определяет минимально возможный спектральный радиус на плоскости комплексной переменной q ФП – матрицы для заданного гиперпространства допустимых проектных параметров k , т.е. задает минимально возможный для данных допустимых проектных параметров функционал. Следовательно, глобальный экстремум определяет максимально возможный запас относительно границы области Dq

на комплексной плоскости q расположения спектра собственных значений матрицы замкнутой системы "РН – ГБ – АС". Данный запас на расположение спектра собственных значений относительно границы области Dq определяется как $1 - J_{\min}(p_1, p_2, \dots, p_k)$.

Метод случайного поиска является одним из самых эффективных и широко применяемых методов поисковой оптимизации сложных многопараметрических систем. Сравнение градиентных методов и методов случайного поиска было проведено для случая, когда целевая функция выражалась квадратичной зависимостью, а для поиска экстремума использовались метод градиента и метод случайных направлений с одинаковыми величинами шагов поиска. Оказалось, что эти методы в смысле вычислительных затрат имеют примерно одинаковую эффективность при размерности задачи, равной трем, и достаточно большом удалении от точки экстремума. При увеличении размерности задачи более выгодным оказывается метод случайных направлений, однако по мере приближения к точке экстремума целесообразнее переходить к методу Ньютона.

Ниже приведен алгоритм модифицированного метода случайного поиска с направляющим косинусом с уточнением значения глобального экстремума методом Ньютона.

Пусть в пространстве допустимых проектных параметров $p_j \in p_f, j = \overline{1, k}$, находящихся в диапазонах $p_{j\min} \leq p_j \leq p_{j\max}$, определен гиперконус с параметрами λ и γ (λ - длина вектора поиска, γ - угол при вершине конуса поиска). Кроме того, задано число итераций поиска ζ , количество проб на данной итерации m и начальные значения проектных параметров $p_j^{нач}$ из области $p_{j\min} \leq p_j \leq p_{j\max}$. Потребуем, чтобы ось при вершине данного конуса совпадала с направлением так называемого "вектора памяти". Направление "вектора памяти" на нулевой итерации задается следующим образом. Из начальной точки $p_j^{нач}, j = \overline{1, k}$ в случайно выбранных направлениях проводятся m сканирующих сечений радиусом λ с последующим

расчетом функционала $J_l(p_1, p_2, \dots, p_k), l = \overline{1, m}$. Из данных сечений выбирается то, которому соответствует минимальное значение функционала $\min_l J_l(p_1, p_2, \dots, p_k)$. Данное сечение определяет направление "вектора памяти".

Далее вокруг вершины конуса, проводится гиперсфера радиуса λ . Конус отсечет от этой сферы часть гиперповерхности, на которой случайным образом выбирается m пробных точек. По значениям функций качества в этих точках $J_l(p_1, p_2, \dots, p_k), l = \overline{1, m}$ определяется точка, соответствующая минимальному значению функционала (1.18) на данной итерации по алгоритму:

$$J_{\min}(p_1, p_2, \dots, p_k) = \min_l J_l(p_1, p_2, \dots, p_k). \quad (1.26)$$

Данная точка задает направление "вектора памяти" для следующей итерации. В этом направлении и производится рабочий шаг. Направление поиска, таким образом, целиком и полностью определяется указанным конусом, т.е. случайные пробы выбираются внутри него. Поэтому естественно назвать этот конус направляющим. Направление "вектора памяти" при этом следует определять наилучшей пробой предыдущего этапа (1.26).

По мере накопления информации о поведении функционала (1.18) "вектор памяти" стремится развернуться в направлении, обратном градиенту (рис.1.8.). Правильный выбор сочетания λ и γ позволяет сравнительно легко переходить от одного экстремума к другому, обходить "овраги". После определения локальной области глобального экстремума функционала при заданном числе итераций ζ производится его уточнение до заданной точности ε с использованием метода Ньютона.

Одним из нюансов в задаче поиска глобального экстремума является правильное задание λ и γ .

Оптимальный вариант, полученный в результате многократных расчетов, соответствует $\gamma = (40 \div 60)^0$ и

$$\lambda = \frac{|p_{j \max} - p_{j \min}|}{20 \div 50}. \quad (1.27)$$

Для проведения поиска экстремума производится масштабирование заданного диапазона $p_{j \min} \leq p_j \leq p_{j \max}$ таким образом, чтобы $|p_{j \max} - p_{j \min}| = 1, j = \overline{1, k}$.

Это связано с тем, что истинные значения допустимых проектных параметров могут отличаться друг от друга в рассматриваемом диапазоне на несколько порядков. Например, в уравнении АС коэффициенты лежат в диапазонах: $a_0 = 0 \div 50$, $a_1 = (0 \div 50) \text{ с}$, $a_4 = (-0.01 \div 0.01) \frac{\text{с}^2}{\text{м}}$, а диапазон диаметра ГБ

составляет: $\varnothing_{\text{ГБ}} = (1 \div 10) \text{ м}$. Например, отношение $\frac{\varnothing_{\text{ГБ}}}{a_4^{\max}} = 10^2 \div 10^3$. Поэтому

общий радиус λ (шаг поиска) в гиперпространстве данных параметров задать не представляется возможным. Для диапазонов некоторых проектных параметров (например, a_4) выбранный радиус λ будет соизмерим с диапазоном этих параметров ($\lambda \approx |p_{j \max} - p_{j \min}|$), что вызовет нечувствительность метода к данным проектным параметрам (шаг поиска экстремума в любом направлении будет соответствовать выходу из заданного диапазона). В то же время, для других проектных параметров данный радиус λ (шаг поиска) будет слишком мал $\left(\frac{|p_{j \max} - p_{j \min}|}{\lambda} \geq 10^3 \right)$, что приведет к "зацикливанию" метода случайного

поиска либо на первом же локальном экстремуме, либо на "овраге" (без возможности выхода из него).

Поэтому на время поиска глобального экстремума все диапазоны допустимых проектных параметров приводятся к единому значению (например к единице) для обеспечения условия (1.27) для всех k проектных параметров. После определения глобального экстремума (функционала) по (1.26) все проектные параметры (и соответствующие им диапазоны) приводятся к своим истинным значениям.

Направление рабочего вектора можно определить либо с помощью направляющих косинусов относительно выбранных осей, либо с помощью любых чисел, пропорциональных данным косинусам:

$$\cos \varphi_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_k^2}}, \quad \cos \beta_j = \frac{h_j}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_k^2}}. \quad (1.28)$$

Направляющие косинусы $\cos \varphi_j, \cos \beta_j$ являются координатами единичных векторов, совпадающих по направлениям с "вектором памяти" и рабочим вектором, соответственно. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ являются проекциями "вектора памяти" (рис. 1.8) на соответствующие оси проектных параметров системы "РН – ГБ – АС", а числа $h_1, h_2, \dots, h_k$ – проекциями рабочего вектора на те же оси. В данном методе $\cos \varphi_j$ "вектора памяти" соответствует $\cos \beta_j$ рабочего вектора, определяемого наилучшей пробой предыдущего шага по (1.26). Связь между проектными параметрами $p_1, p_2, \dots, p_k$ и координатами рабочего вектора $h_1, h_2, \dots, h_k$ осуществляется через выражение:

$$p_j = p_j^{\text{нач}} + h_j, \quad j = \overline{1, k}. \quad (1.29)$$

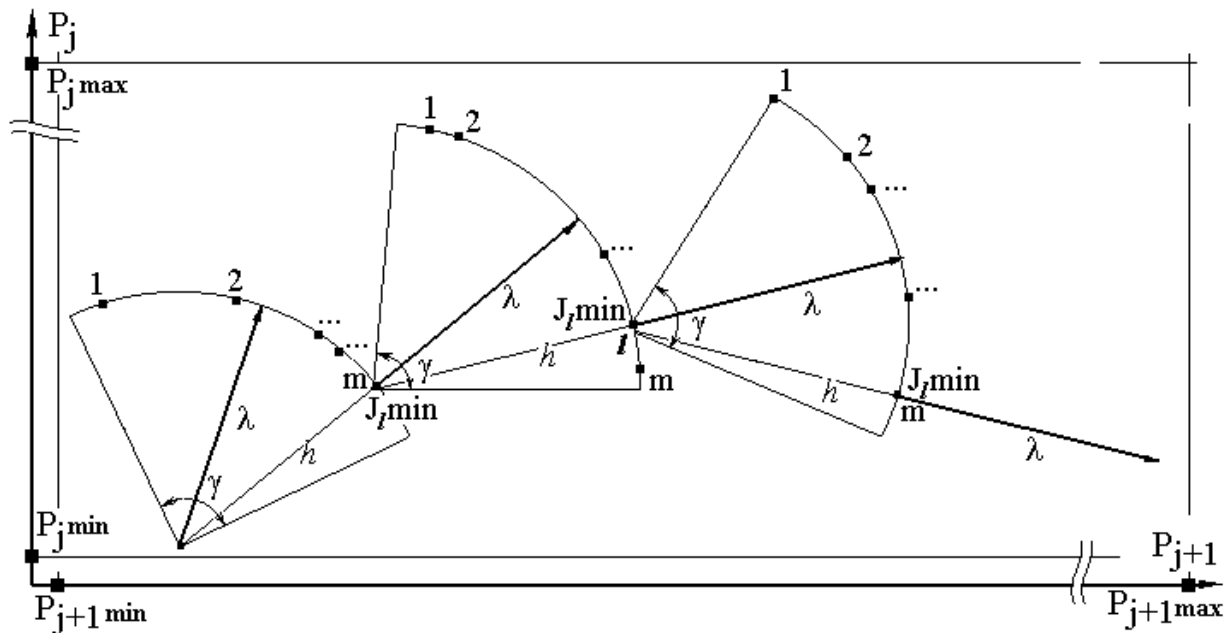


Рис. 1.8. Метод случайного поиска с направляющим косинусом

Угол ϕ между двумя векторами (не должен превышать половины угла направляющего конуса при вершине в гиперпространстве проектных параметров) определяется из условия:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \cos \varphi_1 \cos \beta_1 + \dots + \cos \varphi_k \cos \beta_k = \frac{\lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_k h_k}{\sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2} \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2}}, \\ \cos \phi &= \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j h_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^k \lambda_j^2} \sqrt{\sum_{j=1}^k h_j^2}}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Если учесть, что высота направляющего конуса (длина шага поиска) равна:

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2} = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_k^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^k \lambda_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^k h_j^2}, \quad (1.31)$$

то в результате получим:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{\sum_{j=1}^k \lambda_j h_j}{\lambda^2}, \\ \cos \phi &\leq \frac{\cos \gamma}{2}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Задача заключается в выборе m различных сочетаний параметров (проектных параметров), удовлетворяющих условиям (1.31), (1.32).

Введем дополнительные ограничения, позволяющие увеличить вероятность попадания значений параметров (проектных параметров) на гиперплоскость, образованную направляющим конусом:

- I. при выходе одного из параметров (проектных параметров) из допустимой зоны ($p_{j \min} \leq p_j \leq p_{j \max}$) вектор памяти меняет свое направление на противоположное - для поддержания угла при вершине направляющего конуса равным γ ,
- II. направление вектора памяти совпадает с направлением направляющего конуса; $\text{Sign}(\lambda_j) = \text{Sign}(h_j)$;
- III. с учетом (3.31): $h_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^k \lambda_j^2}$;

$$\text{IV. с учетом (3.32): } \sum_{j=1}^k \lambda_j h_j \leq \frac{\cos(\gamma)}{2} \lambda^2$$

Приведем алгоритм выбора λ , γ и поиска экстремума:

1. Выбор проектных параметров, определение рабочих диапазонов выбранных проектных параметров, проведение масштабирования заданных диапазонов $p_{j \min} \leq p_j \leq p_{j \max}$ по условию:

$$|p_{j \max} - p_{j \min}| = 1, \quad j = \overline{1, k}.$$

2. Выбор шага поиска λ по (1.27), угла γ отклонения выбранного направления от "вектора памяти", количества проб m , числа шагов поиска ζ , начальных значений проектных параметров $p_j^{\text{нач}}, j = \overline{1, k}$ и точности вычисления глобального экстремума ε ;

3. Случайным образом выбрать k параметров $h_j, j = \overline{1, k}$ с учетом ограничения III;

4. Рассчитать $\lambda^* = \sqrt{\sum_{j=1}^k h_j^2}$; если $\lambda^* \neq \lambda$, принять $\frac{\lambda^2}{\lambda^{*2}} = \eta$;

получить: $\lambda = \sqrt{\eta \sum_{j=1}^k h_j^2}$ или с учетом ограничения II:

$$h_j = \sqrt{h_j^2 \cdot \eta}.$$

5. Вычислить значения проектных параметров по (3.29) и определить функцию качества $J(p_1, p_2, \dots, p_k)$.

6. Повторить пункты 3 ÷ 5 m раз.

7. Определить точку, соответствующую минимальному значению функции качества по алгоритму (1.26), т.е задать направление "вектора памяти" на следующий шаг итерации по формуле:

$$\lambda_j = h_j, \quad j = \overline{1, k}.$$

8. Случайным образом выбрать k параметров $h_j, j = \overline{1, k}$ с учетом ограничений I и III.

9. Если ограничение IV не выполняется, то повторить пункт 7.
10. Произвести расчет по формуле (1.30) с учетом ограничения IV.
11. Повторить действия, описанные в пункте 4.
12. Вычислить значения проектных параметров по (1.29) и определить функцию качества $J(p_1, p_2, \dots, p_k)$.
13. Повторить пункты 8 ÷ 12 m раз.
14. Определить точку, соответствующую минимальному значению функции качества по алгоритму (1.26), т.е. задать направление "вектора памяти" и определить начальные значения проектных параметров на следующий шаг итерации по формуле:

$$\lambda_j = h_j, p_j^{нач} = p_j^{нач} + \lambda_j, j = \overline{1, k}.$$
15. Запомнить минимальное значение функции качества на каждом этапе поиска экстремумов (глобального, локальных и "оврагов") по рекуррентной формуле:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{\min}^v = J_{\min}^v(p_1, p_2, \dots, p_k) \\ p_j^{\min} = p_j, j = \overline{1, k} \end{array} \right\} \text{ при } J_{\min}^{v-1}(p_1, p_2, \dots, p_k) > J_{\min}^v(p_1, p_2, \dots, p_k),$$
- где v – номер итерации ($1 \leq v \leq \zeta$),
16. Если условие $v \geq \zeta$ не выполняется, то повторить пункты 8 ÷ 15.
17. За начальные значения проектных параметров принять параметры, соответствующие глобальному экстремуму $p_1^{\min}, p_2^{\min}, \dots, p_j^{\min}, j = \overline{1, k}$.
18. Уменьшить шаг поиска $\lambda = \lambda/10$; проверить условие $\lambda \geq \varepsilon$, и если оно не выполняется, то данные значения проектных параметров соответствуют точке глобального минимума с заданной точностью ε .
19. Снять ограничения по углу при вершине направляющего конуса γ , т.е. ограничение I привести к виду:

$$-\lambda^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \lambda^2,$$
- и увеличить количество итераций: $m = m * 10$.
20. Произвести расчет по пунктам 8 ÷ 18 с учетом принятых новых входных данных и ограничений.

Данный алгоритм реализован в подпрограмме *Model.exe*, которая позволяет находить глобальный экстремум в гиперпространстве проектных параметров системы. На рис. 1.9 показана работа разработанной программы с функцией, имеющей множество "оврагов" и локальных экстремумов:

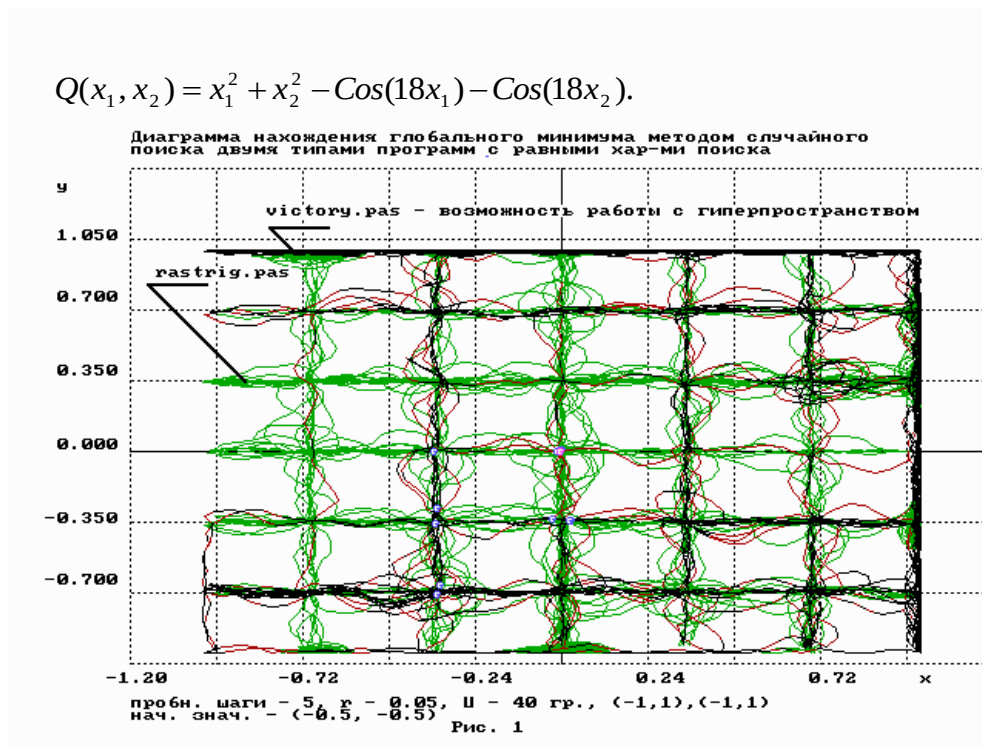


Рис. 1.9. Определение глобального экстремума методом случайного поиска с направляющим косинусом

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ «РАКЕТА-НОСИТЕЛЬ – АВТОМАТ СТАБИЛИЗАЦИИ» С УЧЁТОМ УПРУГОСТИ КОНСТРУКЦИИ

Для исследования областей устойчивости системы «РН – АС» с учётом упругости конструкции матрица собственной динамики системы "РН – АС" дополняется дополнительными элементами, учитывающими упругость конструкции.

Таким образом, для формирования матрицы собственной динамики системы "РН – АС", система уравнений движения РН дополняется уравнениями упругости конструкции.

Система дифференциальных уравнений возмущенного движения РН с учетом упругости конструкции и подвижности жидкости в баках в плоскости тангажа имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \ddot{y} + \frac{F_y}{M} &= \sum_{e=1}^h U_e \ddot{\beta}_e - \sum_{i=1}^m \mu_i S_i, \\
 \ddot{\vartheta} + \frac{M_v}{J_{zz}} &= - \sum_{e=1}^h (T_e \ddot{\beta}_e + P_e \beta_e) - \sum_{i=1}^m \nu_i S_i, \\
 \ddot{S}_i + \Delta_i \frac{\omega_i}{\pi} \dot{S}_i + \omega_i^2 S_i &= \sum_{e=1}^h R_{ie} \ddot{\beta}_e + k_{i\zeta} \delta_{\zeta} + k_{iB} \delta_B + k_{iB} \delta_B, \\
 \ddot{\beta}_e + \varepsilon_e \dot{\beta}_e + r_e \beta_e &= -t_e \ddot{\vartheta} - r_e \vartheta + u_e \ddot{y} + \sum_{i=1}^m N_{ei} \ddot{S}_i, \\
 \vartheta_{\Gamma} &= \vartheta + \sum_{i=1}^m f'(X_{\Gamma}) \cdot S_i, \\
 i &= 1, 2, \dots, m, \\
 e &= 1, 2, \dots, h,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

где S_i - параметр, характеризующий упругие перемещения корпуса РН при колебаниях в канале тангажа; β_e - параметр, характеризующий деформацию свободной поверхности жидкости в баке с номером e ; ϑ_{Γ} - информация об угле ϑ в месте установки гироскопа; $f'(X_{\Gamma})$ - угол наклона касательной к форме собственных колебаний корпуса "РН – ГБ" в месте установки гироскопа; F_y, M_v - соответственно внешние сила и момент,

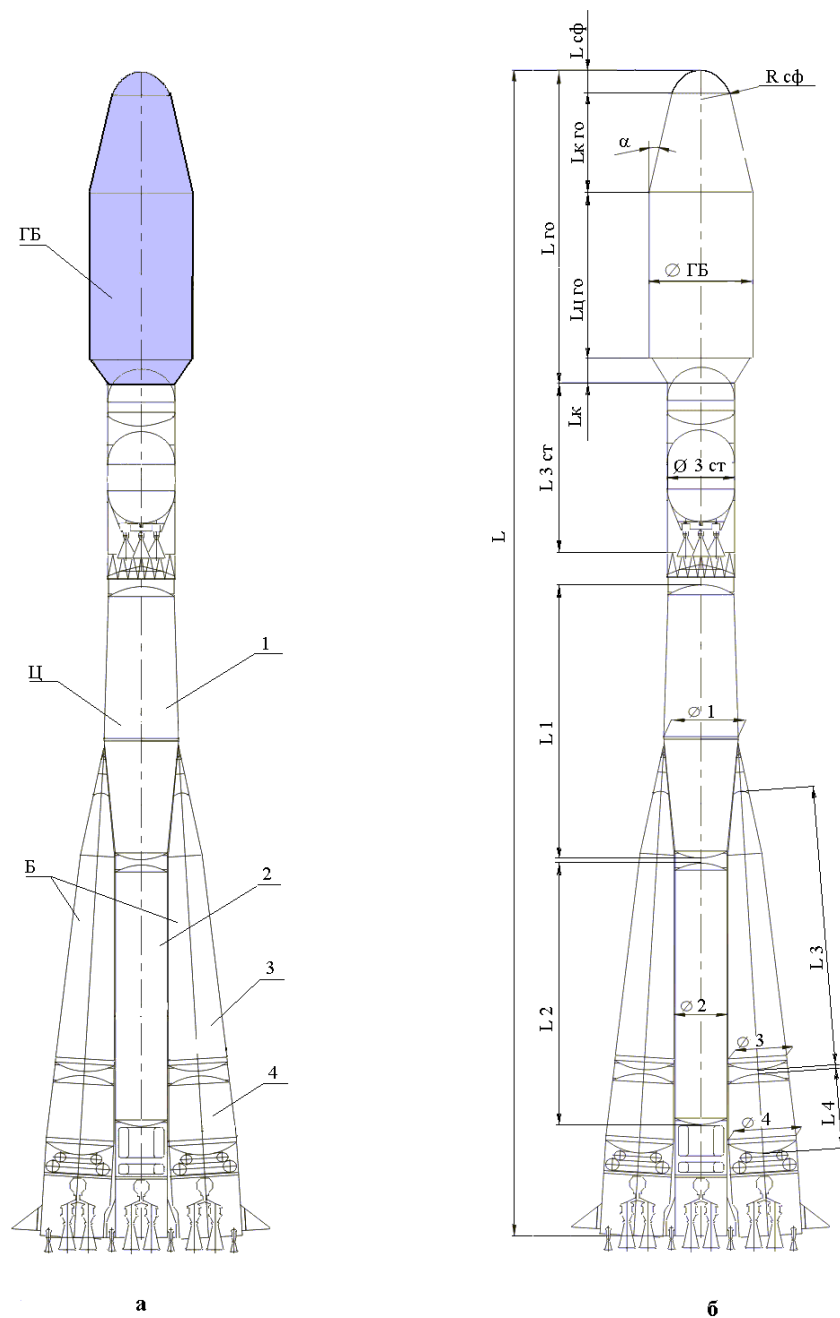


Рис.1. Конструктивно - компоновочная схема РН "Союз"

действующие на РН и не зависящие от упругих свойств конструкции и колебаний жидкости в баках; $\delta_u, \delta_B, \delta_V$ – соответственно вариации углов отклонения управляющих двигателей центрального блока "Ц", управляющих двигателей бокового блока "Б" и воздушных рулей "В"; m - число учитываемых тонов упругих колебаний корпуса РН; h - число баков, жидкое наполнение которых участвует в соответствующем движении.

Индексы "е" соответствуют:

1 – баку окислителя, расположенного в верхней части центрального блока РН;

2 – баку горючего, расположенного в нижней части центрального блока "Ц" РН;

3 – баку окислителя, эквивалентному по массе топлива бакам окислителя боковых блоков "Б", расположенным в верхней части блоков "Б" РН;

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Кроме влияния проектных параметров системы "РН – АС" друг на друга существенное влияние на области динамической совместимости оказывают дополнительные степени свободы, вызванные упругостью конструкции и жидким наполнением баков. Из результатов, приведенных на рис.3.1, видно, что на абсолютные значения области D_p наибольшее влияние оказывает учёт жидкого наполнения топливных баков (рис.3.1). Это является важным фактором при выборе значений расчетной точки А параметров системы "РН – АС". На рис.3.2 представлен фрагмент области допустимых значений проектных параметров АС для РН "Союз" с выбранной расчетной точкой А ($a_0 = 12$, $a_1=15$ с), приведенной на рис.3.1.

На определение значений параметров расчетной точки А, обеспечивающей динамическую совместимость "РН – ГБ" по всей траектории выведения в параметрах АС (a_0 , a_1), существенное влияние оказывают не только дополнительные степени свободы системы (рис. 3.1), но и их изменение по траектории выведения, что подтверждается результатами, представленными на рис.3.2. Поэтому параметры точки А либо выбираются как функции времени, либо задаются постоянными из области допустимых значений проектных параметров, обеспечивающих динамическую совместимость по всей траектории полета (на рис.3.2 эта область закрашена серым цветом).

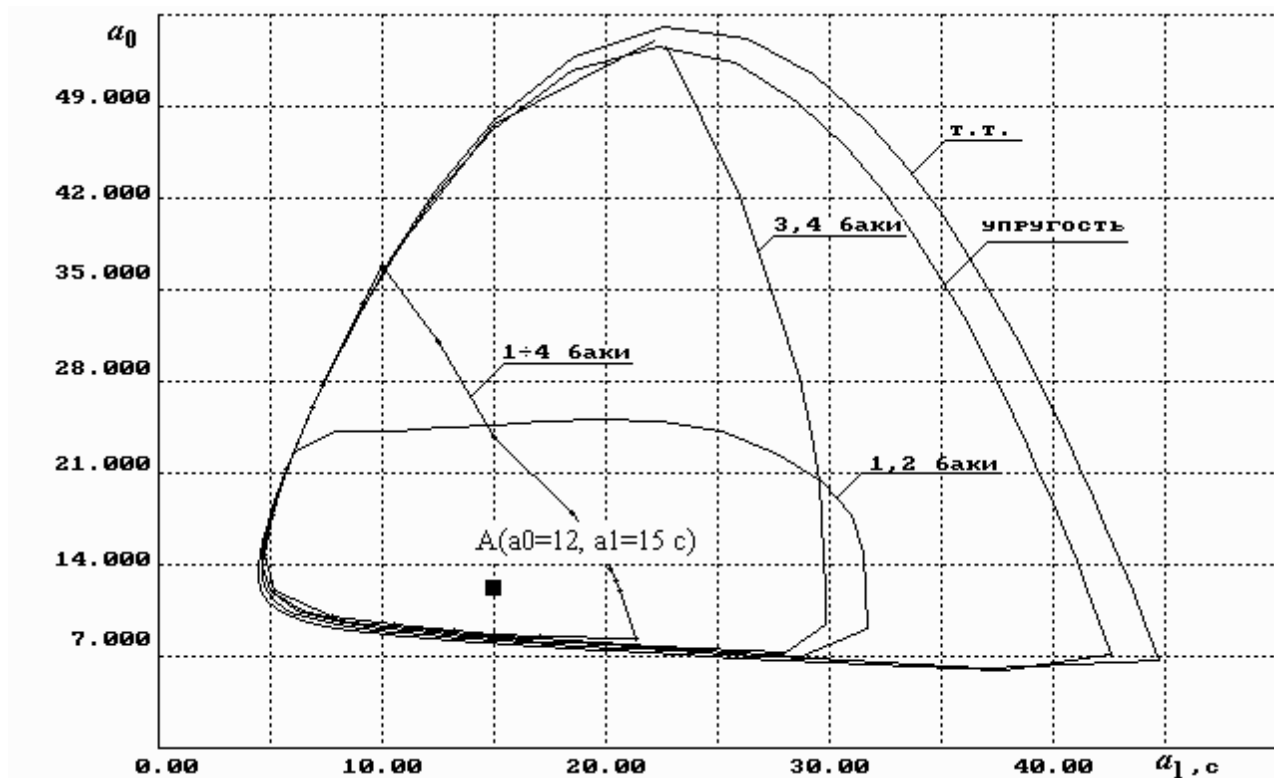


Рисунок 3.1. – Область допустимых проектных параметров в плоскости проектных параметров АС

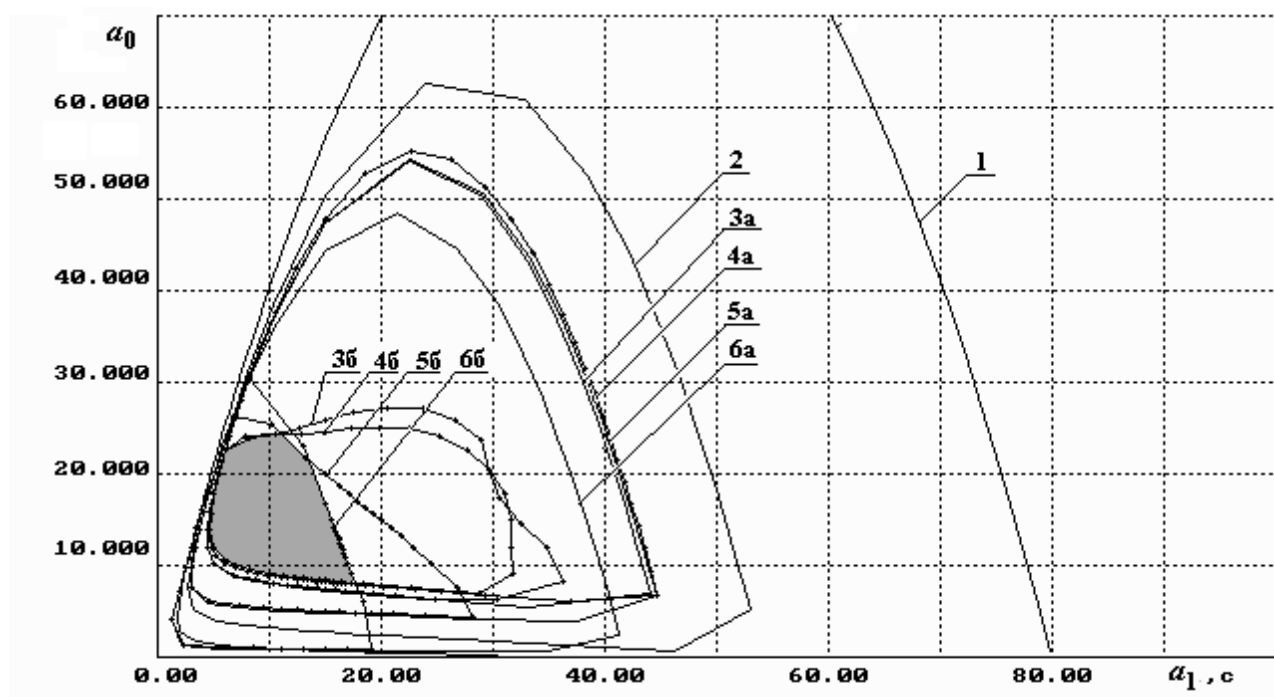


Рисунок 3.2. – Область допустимых проектных параметров в плоскости проектных параметров АС

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев, А.Н. Основы теории автоматического управления : Конспект лекций / А. Н. Гусев, В. А. Вьюжанин, В. Д. Закаблуковский ; Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Самара, 1996. - 110 с.
2. Гусев, А.Н. Основы теории автоматического управления : учеб. пособие / А. Н. Гусев, С. А. Ишков ; М-во образования Рос. Федерации, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Самара : СГАУ, 2001. - 164 с.
3. Системы автоматического управления самолетом : Методы анализа и расчета / И. А. Михалев и др. - М. : Машиностроение, 1971. - 464 с.
4. Козарук, В.В. Комплекс бортового оборудования самолета Ту-154 и его эксплуатация: Учеб. пособие для вузов граждан. авиации / В. В. Козарук. - М. : Машиностроение, 1975. - 336 с.
5. Дорф, Р.К. Современные системы управления / Р. К. Дорф, Р. Х. Бишоп. - М.: Лаб. базовых знаний : Юнимедиастайл, 2002. - 831 с.
6. Шумилов, И.С. Системы управления рулями самолетов [Текст] : [учеб. пособие для вузов по направлению "Системы упр. движением и навигация" специальности "Системы упр. летат. аппаратами"] / И. С. Шумилов. - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. - 469 с. - ISBN 978-5-7038-3085-7 : 560.00 р.
7. Коптев, А.Н. Системы самолетовождения: [учеб. пособие для авиац. специальностей вузов] / А. Н. Коптев. - [б. м.]: Машиностроение, 1984. - 128 с.
8. Ю.П.Гуськов, Г.И.Загайнов. Управление полетом самолетов. М.:Машиностроение, 1980, 216с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СОВМЕСТИМОСТИ СИСТЕМЫ "РАКЕТА–НОСИТЕЛЬ – ГОЛОВНОЙ БЛОК – АВТОМАТ СТАБИЛИЗАЦИИ" МЕТОДОМ МОДАЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ	4
1.1. Процедура модального формирования	4
1.2. Критерии качества переходных процессов в каналах управления	9
1.3. Реализация процедуры модального формирования	15
1.3.1. Расчет коэффициентов овала Кассини	25
1.3.2. Определение глобального экстремума методом случайного поиска с направляющим косинусом	28
2. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ «РАКЕТА-НОСИТЕЛЬ – АВТОМАТ СТАБИЛИЗАЦИИ» С УЧЁТОМ УПРУГОСТИ КОНСТРУКЦИИ	37
3. ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ	39
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	41