



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)**

В. М. Дуплякин

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ. ТЕОРИЯ ИГР

Мультимедийное учебное пособие

Индивидуальный сайт учебно-методического обеспечения

САМАРА 2012

УДК 519.83

ББК: 22.18

Д 839

Автор: **Дуплякин Вячеслав Митрофанович**

Редакционная обработка и компьютерная вёрстка В. М. Дуплякин

Дуплякин, В.М. Исследование операций. Теория игр [Электронный ресурс]: мультимед. уч. пособие / В. М. Дуплякин; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королёва (нац. исслед. нн.т). – Электрон. текстовые и граф. дан. (31,7 Мбайт). – Самара, 2012. – 1 эл. опт. диск (CD ROM).

Мультимедийное учебное пособие разработано на кафедре экономики факультета экономики и управления и предназначено для студентов, обучающихся по специальности 080500.62 «Бизнес-информатика». Представленные материалы могут быть использованы в рамках курса «Исследование операций (раздел: Теория игр)».

Представлено контентное обеспечение раздела курса исследования операций (раздел: Теория игр), лекционные презентации, банк тестовых заданий, пособие к контролируемой самостоятельной работе.

Может использоваться студентами и аспирантами экономических, инженерных и других специальностей различных форм обучения.

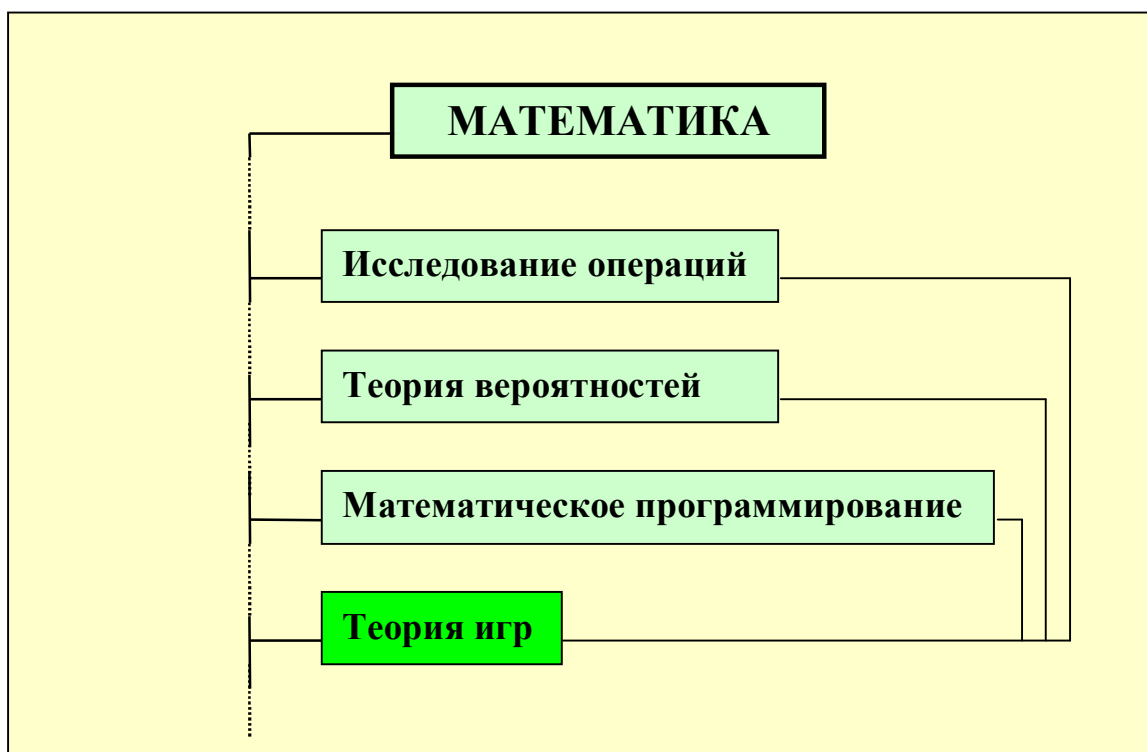
© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2012

ВВЕДЕНИЕ

Теория игр - математическая дисциплина, в которой рассматривается моделирование действий игроков, имеющее целью выбор оптимальных стратегий поведения в условиях конфликта.

По своему идейному существу теория игр является непосредственным продолжением такого раздела математики как исследование операций. В качестве инструментального обеспечения теория игр в основном базируется на аппарате математического программирования, весьма часто такой основой является линейное программирование.

Исходные данные в задачах теории игр могут быть в какой-то мере неопределёнными, т.е. иметь случайный характер – в таких случаях требуется применять аппарат теории вероятностей и математической статистики



Уточним значение слова "игра", которое часто употребляется в повседневном обиходе. Так, например, в приведенной ниже таблице представлены далеко не все варианты смысловых значений слова "игра", например, здесь нет таких вариантов как: игра артистов на сцене, игра в качестве способа получения удовольствия и т.п.

№ п/п	Название	Содержание
1	Спортивные игры	Футбол, баскетбол,
2	Азартные игры	Рулетка, покер,
3	Военные игры	Учения войск ПВО
4	Игра на музыкальных инструментах	Игра на фортепьяно На международном конкурсе
5	Детские игры	Казачи-разбойники
6	Конкуренция на рынке	Совершенная конкуренция, олигополия,

Разновидности игр, приведенные в рассматриваемой таблице, объединяются тем, что в каждой из них имеются следующие компоненты, характерные для классической теории игр:

- Конфликт интересов.
- Правила, определяющие регламент игры.
- Процедура определения выигрыша, имеющего численную интерпретацию.
- Необходимость использования стратегии для получения наибольшего выигрыша.

В нашем курсе игра понимается как конфликт игроков, оптимальное разрешение которого для его участников опирается на математический инструментальный выбор оптимальных стратегий поведения.

Исторический экскурс

Признанным основоположником теории игр является Джон фон Нейман (1903-1957) - выдающийся математик венгерского происхождения, который добился значительных результатов в развитии теории выпуклых множеств и этот достаточно абстрактный научный материал использовал в качестве фундаментального основания, разработанного им научного направления, которое называется теорией игр.

Основная работа, определившая появление теории игр в качестве математической науки: Дж. Фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение, 1944.

ДЖОН (ЯНОШ) ФОН НЕЙМАН

John (Janos) von Neumann

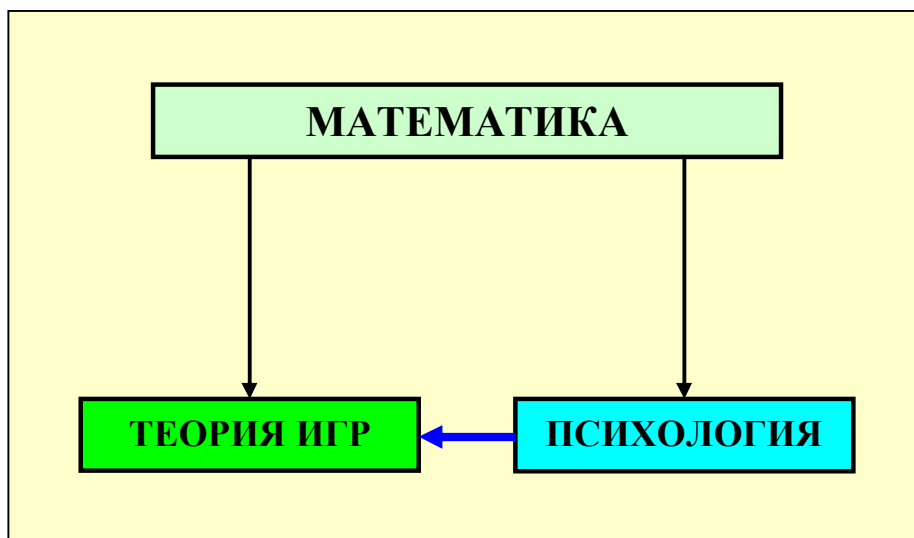
(28 декабря 1903 — 8 февраля 1957)

Американский математик родом из Венгрии, профессор Принстонского университета, член Национальной академии наук США (1937). Внес большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения. Широко известны так называемые “принципы фон Неймана”, определяющие архитектуру современных компьютеров: принцип двоичного кодирования, принцип программного управления, принцип адресации памяти и т.д.



Теория игр, благодаря усилиям Джона фон Неймана, сформировалась как фундаментальная математическая наука и с первых шагов своего становления использовалась в качестве эффективного средства решения масштабных политических и военных задач, надёжно прикрытых завесой секретности. Поэтому наиболее доступными были результаты приложений теории игр к решению экономических задач, что весьма актуально и в настоящее время, которое характеризуется развитием традиционных и появлением совершенно новых видов конфликтов участников экономических отношений на разных уровнях, таких как макроэкономика, мегаэкономика и микроэкономика.

В самой теории игр есть множество проблем, ждущих своего исследования и развития именно как математических проблем. Однако следует отметить, что **"передовая линия фронта"** современной теории игр проходит по стыку психологии и математики.



Красноречивое подтверждение этого факта заключается в том, что в 2005 году экономисты Томас Шеллинг (США) Роберт Ауман (Израиль) получили за свою совместную работу Нобелевскую премию по экономике с формулировкой "за углубление нашего понимания сути конфликта и сотрудничества путем анализа теории игр".

1. Основные понятия теории игр

Принцип – руководящая идея, основное правило поведения.

Операция – совокупность целенаправленных действий.

Конфликт – столкновение, противоборство интересов, целей и действий участников игры.

Игрок – участник игры, обозначающий отдельного участника игры или совокупность единомышленников.

Упрощённое определение игры

Игра (объект исследования в теории игр) – оговоренная правилами совокупность целенаправленных действий игроков, направленных на достижение собственного выигрыша (цели) в условиях конфликта.

Выигрыш (цель) должен иметь меру и метод его исчисления как при достижении финального состояния (позиции) игры, так и на каждом шаге игры.

Ход (тактический) игрока – это порядковый номер i -го хода k -го игрока ($k \in N$, где N – общее число игроков) в игре, который обычно совпадает с j -м шагом игры и его содержательное наполнение (тактика, решение, выбор) $c_{k,i}$ из его множества альтернатив $c_{k,i} \in C_k$, после которого игра переходит в определённое состояние (позицию).

Если k -й игрок пропускает свой i -й ход на j -м шаге игры, то во избежание путаницы i -й ход считается пустым, т.е. $i_k = \emptyset$. При такой нумерации ходов номер хода данного игрока всегда совпадает с j -м шагом игры, а именно $i_k = j$.

Дискретные и непрерывные ходы

Все игры можно разделить на два вида:

- Игры с дискретными ходами.
- Игры с непрерывными ходами.

Дискретный ход является результатом выбора из заданного, ограниченного числа альтернатив (известно число альтернатив и известны численные характеристики этих альтернатив).

Пример. Ходы игроков при игре в шахматы.

Непрерывный ход является результатом непрерывного во времени выбора из неограниченного числа альтернатив.

Пример. Выбор скорости данного спортсмена-бегуна в данный момент времени на сверхдальней дистанции.

Весьма продуктивным приёмом моделирования и последующего решения многих игр является замена игр с непрерывными ходами на игры с заданным числом дискретных ходов. Так вводятся в рассмотрение матричные игры, аппарат решения которых в теории игр наиболее развит.

Личный ход – вариант тактического хода, выбираемый игроком сознательно.

Случайный ход – понятие, совпадающее с понятием случайного события в теории вероятностей.

Теория вероятностей: Случайное событие это событие, которое может произойти или не произойти, заранее это неизвестно.

Агрессивно-нелогичный ход – сознательное снижение собственного выигрыша, приводящее к ещё большим потерям у противника. Цель такого поведения: вывести противника из игры. Нелогичность здесь в том, что противник не ожидает, что мы поступим себе во вред.

Пример. Демпинг – снижение цен ниже себестоимости, приводящее к разорению конкурента на локальном рынке.

Стратегия – упорядоченная по шагам игры совокупность тактик игрока при переходе из начального в конечное состояние процесса игры.

Тактика – локализованный вариант реализации выбранной стратегии.

Примечание. В одноходовой игре понятие тактики и стратегии совпадают. При неоднократном повторении одноходовой игры появляется возможность формирования стратегии.

Риск – действие наудачу с надеждой на благоприятный исход.

Примечание. Для студентов, обучающихся по специальности "Математические методы в экономике" предусмотрено изучение курса "Теория риска и моделирование рискованных ситуаций".

Безопасное поведение – способ действий, гарантирующий защиту от опасности.

Угроза – действие игрока, против которого противник не имеет защиты.

Блеф – действие игрока с целью дезинформации противника о своих реальных возможностях и целях.

Коалиция – совокупность игроков ($N \geq 2$), объединённых по некоторому признаку, например, имеющих общую цель.

Кооперация – понятие, включающее как наличие коалиции, так и обмен информацией в процессе игры и (или) до её начала.

1.1. Характерные особенности салонных игр

Прежде чем заняться изучением теории игр и её приложений для математизированного анализа поведения игроков, являющихся субъектами экономических отношений, полезно обратить внимание на особенности так называемых салонных игр, выделив те элементы, которые раскрываются в классической математической теории игр.

- Возникновение ситуации противоборства (конфликта) между участниками (не менее двух), приводящей к возникновению игры (конфликта), в процессе которой игроки стремятся достигнуть наибольшего выигрыша, выбирая оптимальную в некотором смысле стратегию.
- Степень информированности игроков о действиях и ресурсах противников.

Шахматы: Игроки видят доску с расположением фигур противника.

Покер: Игральные карты, получаемые при раздаче скрыты от противника.

Торговые фирмы: Текущая ценовая политика, хотя торговые фирмы играют не в салонах!

- Возможное наличие объединений "болельщиков" так или иначе влияющих на результат игры и может быть служащих причиной конфликта.
- Наличие ПРАВИЛ, которые включают:
 - Совокупность требований и ограничений на действия (тактика и стратегия) игроков.
 - Регламент обмена информацией между игроками о действиях противников.
 - Функция выигрыша – полезность хода, получаемый доход, риск.
 - Возможность права первого хода и определение последовательности текущих ходов (личных или случайных) всех игроков.
 - Наличие начальной и окончательной позиций, причём окончание игры возможно по истечении заданного времени, выполнения заданного числа ходов и т.д.

1.2. ИГРЫ БЕЗ ПРАВИЛ

Если правила неполные (нечёткие) или правил данной игры вообще не существует, то исходы таких игр непредсказуемы. Теория игр без правил отсутствует.

Принцип выживания в играх без правил: Не играй, т.е. не конфликтуй.

Китайская мудрость: Сиди на берегу и жди, пока трупы твоих врагов проплывут мимо тебя.

Известная сентенция в качестве интерпретации принципа выживания в играх без правил: Если не можешь изменить факты, то измени своё отношение к ним.

Парадокс: Неучастие в играх – это тоже стратегия игры, но особой формы и реализуют её только игорные мэтры, например, хозяева игорных заведений.

Психология. Неучастие в играх противоречит природе человеческой психики. Поэтому в теории игр существует неписанный принцип:

Сначала правила, потом игра.

Т.е. иными словами, не зная броду, не суйся в воду.

Примечание из области зоологии. Правила существуют даже во внутривидовых конфликтах животных, что не всегда можно сказать про игры Homo sapiens. Известно, что в мире животных во время брачных игр, как правило, если соперник принимает "позу побеждённого", то победитель не убивает "побеждённого", а позволяет жертве удалиться.

Современная теория игр является бурно развивающейся отраслью знаний, основное приложение которой имеет место в экономике и в планировании военных действий.

Азартные игры, хотя и являются замечательной иллюстрацией многих положений теории игр, можно разделить на два вида. Во-первых, те азартные игры, в которых выигрыш представляет собой чисто случайное явление, например, рулетка. Закономерности таких игр давно исследованы методами теории вероятностей. Во-вторых, азартные игры, в которых статистические закономерности, хотя и имеют значение, но отступают на второй план по сравнению с использованием психологии. Поэтому, например, выдающиеся корифеи игры в покер, обладая определёнными аналитическими способностями, по их же комментариям, на первое место ставят использование практической психологии.

Следует знать, что современная теория игр, даже с полным арсеналом своих методов и средств, вовсе не даёт рецептов беспроигрышного участия в азартных играх именно из-за слабой математической формализации психологии игроков.

Если взять приложение теории игр в экономике, то здесь есть вполне определённые достижения, особенно в теории антагонистических матричных игр.

Тем не менее, прикладное поле современной теории игр и соответствующий инструментарий следует рассматривать только лишь как введение в гораздо более обширный круг задач и методов, которые со всей очевидностью и явной востребованностью ждут своих исследователей и разработчиков

2. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Понятие платёжной матрицы.

Платёжные игры в примерах народных игр.

Понятие антагонистических игр (игры с нулевой суммой).

Биматричные игры.

Определение. Платёжной матрицей называется матрица, в которой представлены все возможные результаты ходов всех игроков

Пример №1. Народная игра "орлянка"

Играют два игрока.

Каждый игрок сжимает в кулаке свою монету.

Затем оба игрока одновременно делают ход, разжимая пальцы.

Если обе монеты "смотрятся" одинаково (два "орла" или две "решки"), то первый игрок P1 выигрывает у второго игрока P2 одну денежную единицу, например, монету противника. Если обе монеты "смотрятся" по-разному, то выигрывает игрок P2, а игрок P1 проигрывает ему одну денежную единицу.

Примечание. Проще всего играть одинаковыми монетами, используя их в качестве выигрыша.

Каждый игрок, естественно, знает, как он положил в кулак свою монету, но не знает, как кладёт свою монету другой игрок, поэтому выигрыш (проигрыш) каждого игрока зависит не только от него самого, но и от другого игрока.

Вывод: Каждый игрок, укладывая в кулак свою монету, ПРИНИМАЕТ РЕШЕНИЕ в условиях НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ, т.к. не знает, какое решение принял другой игрок.

Основная особенность: "Орлянка" – игра двух лиц с нулевой суммой, т.к. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого игрока или по-другому антагонистическая игра.

Игра одноходовая, поэтому тактика и стратегия совпадают, при этом каждый игрок располагает двумя стратегиями: "орёл" или "решка" в своём кулаке.

После того, как каждый игрок сделал ход и проигравший отдал выигрыш победителю, игра считается оконченной. Далее игра может повторяться любое число раз и вот тут стратегия отделяется от тактики и начинает заметно влиять психология игроков.

Формализованное описание "орлянки" – платёжная матрица

Рассмотрим расширенное представление матрицы выигрышей игрока P1.

[u(P1)]		Стратегии игрока P2	
		"Орёл"	"Решка"
Стратегии игрока P1	"Орёл"	1	-1
	"Решка"	-1	1

Обозначение результатов:

$u_{i,j} = 1$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) – выигрыш игрока P1,

$u_{i,j} = -1$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) – выигрыш игрока P2.

Матрица выигрышей первого игрока может быть представлена также и в компактном виде

$$[u(P1)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом введём матрицу выигрышей игрока P2.

[u(P2)]		Стратегии игрока P2	
		"Орёл"	"Решка"
Стратегии игрока P1	"Орёл"	-1	1
	"Решка"	1	-1

В компактном виде матрица выигрышей игрока P2 выглядит следующим образом

$$[u(P2)] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Как можно заметить, одноименные компоненты матриц выигрышей игроков P1 и P2 обладают свойством

$$u_{P2}(i, j) = -u_{P1}(i, j), \quad \forall(i = \overset{u_{P2}}{1, 2}; j = \overset{u_{P1}}{1, 2}). \quad (2.1)$$

Отсюда получаем, что

$$u_{P2}(i, j) + u_{P1}(i, j) = 0, \quad \forall(i = \overset{u_{P2}}{1, 2}; j = \overset{u_{P1}}{1, 2}). \quad (2.2)$$

Из соотношения (2.2) понятно, почему данная игра называется игрой с нулевой суммой. Как мы уже отмечали, здесь выигрыш одного игрока всегда равен проигрышу другого игрока, поэтому такие игры ещё имеют другое название – антагонистические игры.

Для формализованного представления игры в "орлянку" достаточно использовать матрицу выигрышей только одного игрока, т.к. она даёт полное представление об этой игре.

Определение. Платёжной матрицей игры двух игроков с нулевой суммой принято называть матрицу выигрышей первого игрока P1
 $[U] = [u(P1)].$

При желании для более наглядного представления данной игры можно объединить матрицы выигрышей игроков P1 и P2 в одну, так называемую биматрицу (очевидно, что она содержит избыточную информацию)

[u(P1, P2)]		Стратегии игрока P2	
		"Орёл"	"Решка"
Стратегии игрока P1	"Орёл"	(1; –1)	(–1; 1)
	"Решка"	(–1; 1)	(1; –1)

Основная задача теории игр состоит в выявлении оптимальных стратегий игроков, обеспечивающих им максимальный выигрыш, однако, используя методику анализа матричных игр, которую мы рассмотрим несколько позже, можно доказать, что в одноходовом варианте игры в "орлянку" оптимальной стратегии не имеет ни один из игроков.

Пример № 2. Игра Мора

Эта игра распространена в Италии. Рассмотрим двухпальцевый вариант, при котором каждый из двух игроков на поднятой руке показывает один или два пальца.

Правила игры:

- Оба игрока на опущенной вниз руке показывают, сколько по их предположению покажет другой игрок на поднятой вверх руке.
- Пальцы предварительно сжатые в кулак разжимаются одновременно.
- Если предположение одного из игроков оправдалось, а у другого не оправдалось, то он выигрывает.
- Выигрыш равен сумме пальцев обоих игроков на поднятых руках.
- Если ни один игрок не угадал число пальцев на поднятой руке противника, то игра заканчивается вничью.
- Если оба игрока угадали, то тоже ничья.

В примере приведенном ниже на рис. 2.1 выигрывает игрок P1 и выигрыш составляет 3 ден. единицы.

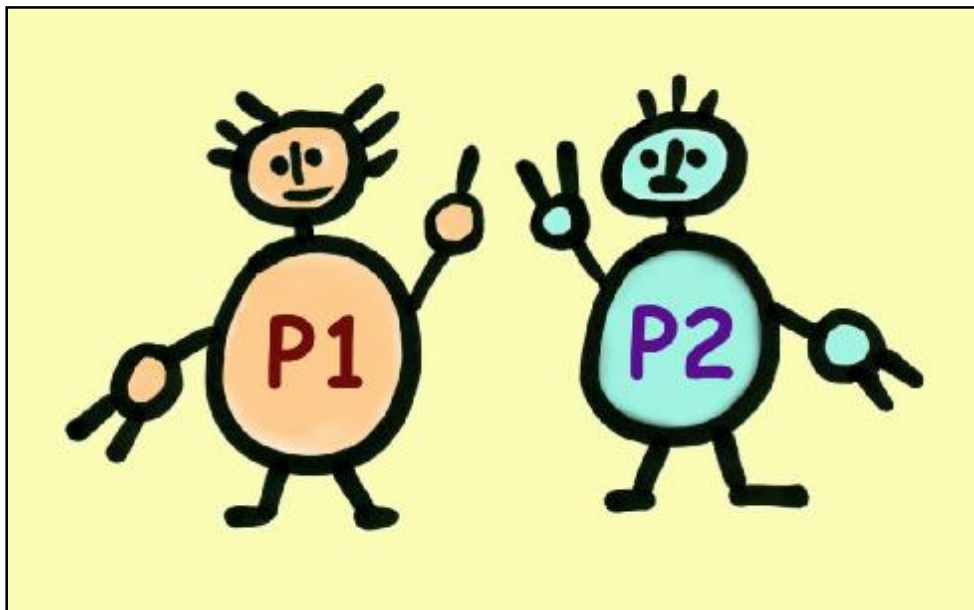


Рис. 2.1 - Игрок P1 выигрывает 3 ден. единицы.

Составим платёжную матрицу игры Мора, т.е. составим матрицу выигрышей игрока P1.

[u(P1)]		Стратегии игрока P2			
		(1; 1)	(2; 1)	(1; 2)	(2; 2)
Стратегии игрока P1	(1; 1)	0	-3	2	0
	(2; 1)	3	0	0	-4
	(1; 2)	-2	0	0	3
	(2; 2)	0	4	-3	0

Примечание. В обозначении стратегий принята следующая идентификация: (i, j) , где i – число пальцев данного игрока на поднятой вверх руке ($\uparrow$), а j – число пальцев на опущенной руке вниз ($\downarrow$).

Анализируя условия игры Мора, можно прийти к выводу, что это игра с нулевой суммой, т.е. антагонистическая игра.

Также как и в предыдущей игре, здесь в одноходовом варианте невозможно предложить оптимальную стратегию, а при неоднократном повторении эффективность игрока определяется его способностями к практической психологии.

Пример № 3. Конкуренция торговых предприятий

Рассмотрим работу двух торговых фирм на локальном рынке: супермаркет SM1 и супермаркет SM2. Каждая фирма реализует одну из двух возможных стратегий:

1-я стратегия – высокая цена;

2-я стратегия – низкая цена.

Ценовая политика изменяется в обеих фирмах синхронно еженедельно по понедельникам.

Матрица выигрышей фирмы SM1 (игрок P1) имеет следующий вид

[u(SM1)]		Стратегии SM2 (P2)	
		Высокая цена	Низкая цена
Стратегии SM1 (P1)	Высокая цена	100 1 2	30
	Низкая цена	150 3 4	10

Следует заметить, что выигрыш торговой фирмы в данном случае представлен условными единицами прибыли, полученной в течение прошедшей недели.

Примечание. Внутри матрицы выигрышей расположены дополнительные цифровые обозначения игровых ситуаций "1, 2, 3, 4", которые удобно использовать в пояснениях выбора оптимальных стратегий.

Матрица выигрышей фирмы SM2 (игрок P2), представленная ниже несколько отличается от аналогичной матрицы для SM1 вследствие различной динамики спроса на изменение ценовой политики, что можно объяснить, например, различием используемых систем стимулирования персонала, различием в организации рекламной кампании и т.п.

[u(SM2)]		Стратегии SM2 (P2)	
		Высокая цена	Низкая цена
Стратегии SM1 (P1)	Высокая цена	100 1 2	40
	Низкая цена	160 3 4	15

Сравнение одноименных компонент матриц $[u(SM1)]$ и $[u(SM2)]$ показывает, что

$$u_{SM2}(i, j) \neq -u_{SM1}(i, j), \quad \forall (i = \overset{uш}{1, 2}; j = \overset{uш}{1, 2}) \quad (1.3)$$

Поэтому данная игра не является игрой с нулевой суммой (следовательно, это неантагонистическая игра), а поскольку вся исходная информация для анализа данной игры представляется в двух матрицах, то она называется биматричной игрой.

Хотя данная игра и называется биматричной, тем не менее, её исходные данные можно представить одной объединённой матрицей

[u(SM1, SM2)]		Стратегии SM2 (P2)	
		Высокая цена	Низкая цена
Стратегии SM1 (P1)	Высокая цена	(100; 100) 1 2	(30; 40)
	Низкая цена	(150; 160) 3 4	(10; 15)

Объединение двух матриц $[u(SM1)]$ и $[u(SM2)]$ производится очевидным образом

$$u_{SM1, SM2}(i, j) = [u_{SM1}(i, j), u_{SM2}(i, j)], \quad \forall (i = \overset{uш}{1, 2}; j = \overset{uш}{1, 2}) \quad (1.4)$$

Предваряя анализ данной игры, который будет выполнен при дальнейшем изложении материала, можно отметить, что она имеет оптимальное решение (выбор оптимальных стратегий) как в одноходовом варианте, так и при многократном повторении, естественно, что эти решения могут отличаться между собой.

Пример № 4. "Дилемма заключённых" *

Каждого из двух заключённых P1 и P2 (соучастники серьёзного преступления) допрашивают отдельно друг от друга. У каждого из них есть два варианта поведения (дилемма):

- Признаться в совершённом преступлении и тем самым выдать не только себя, но и соучастника.
- Ни в чём не признаваться, т.е. полностью отрицать своё участие в преступлении.

В зависимости от признаний или отрицания вины заключёнными суд может принять различные решения:

- Если ПРИЗНАЕТСЯ ЛИШЬ ОДИН ЗАКЛЮЧЁННЫЙ, то ЕГО ОСВОБОДЯТ за чистосердечное признание. Обвинение будет предъявлено ДРУГОМУ заключённому, которого приговорят к ШЕСТИ ГОДАМ ЛИШЕНИЯ СВОБОДЫ.
- Если ОБА ЗАКЛЮЧЁННЫХ НЕ ПРИЗНАЮТСЯ, то за отсутствием улик обвинение в серьёзном преступлении будет снято. Однако в этом случае следователь может доказать виновность обоих заключённых в менее значительном преступлении и тогда оба получают ПО ОДНОМУ ГОДУ ЛИШЕНИЯ СВОБОДЫ.
- Если ОБА ЗАКЛЮЧЁННЫХ ЧИСТОСЕРДЕЧНО ПРИЗНАЮТСЯ, то их признание будет считаться смягчающим обстоятельством и ОБА получат по 3 ГОДА ЛИШЕНИЯ СВОБОДЫ.

Объединённая платёжная матрица данной игры, которая является биматричной игрой, выглядит следующим образом

[u(P1, P2)]		Стратегии P2	
		Признаться	НЕ признаваться
Стратегии P1	Признаться	(-3; -3) 1 2	(0; -6)
	НЕ признаваться	(-6; 0) 3 4	(-1; -1)

Особенностью данной игры является отсутствие выигрыша при выборе любой возможной стратегии из-за того, что в платёжной матрице расположены только отрицательные элементы (проигрыши) и нули. Поэтому абсолютным выигрышем в этой игре является отсутствие проигрыша.**

* "Дилемма заключённых" является хрестоматийным примером в большинстве учебников, как по исследованию операций, так и по теории игр.

** Оптимальное решение будет найдено при дальнейшем изложении данного курса.

3. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ИГР С ПРИРОДОЙ

Понятие игр с природой обобщает разновидность игр, конфликтный характер, которых раскрывается при взаимодействии активного игрока P1 и пассивного игрока P2. Пассивного игрока в таких играх обычно называют "ПРИРОДА", а активный игрок "ЧЕЛОВЕК", отсюда и название этих игр.

Поведение пассивного игрока не зависит от ходов активного игрока. В тоже время выигрыш активного игрока зависит от выбранной им стратегии и, конечно от поведения пассивного игрока.

В качестве примера игры с природой можно отметить поведение мелкого предпринимателя на рынке совершенной конкуренции. Из экономической теории известно, что на этом рынке поведение отдельного предпринимателя (активный игрок P1 – "ЧЕЛОВЕК") никак не отражается на состоянии рынка (пассивный игрок P2 – "ПРИРОДА"), имея в виду совокупный спрос и предложение, а так же равновесную цену.

Решение данной игры представляет собой выбор стратегии, которая обеспечивает наилучшее состояние активного игрока с его точки зрения.

3.1. Задача менеджера-булочника

На этом конкретном примере весьма удобно рассмотреть общие особенности решения игр с природой.

Постановка задачи. Ежедневно менеджер мелкой булочной должен принимать решение о количестве выпекаемых булочек, не зная определённо, каким будет уровень спроса на них.

Цель менеджера. Выбрать стратегию, которая обеспечит получение наибольшей прибыли.

Методология решения. Представление данной ситуации в виде игры Менеджера и Рынка:

- Менеджер – активный игрок P1 (ЧЕЛОВЕК).
- Рынок – пассивный игрок P2 (ПРИРОДА).

3.1.1. Формализация исходных данных

Формализация исходных данных представляет собой принципиальный этап решения данной задачи, обеспечивающий снижение трудоёмкости численного решения, что может иметь решающее значение для задач большой размерности.

Опыт показал, что ежедневный уровень спроса для рассматриваемой булочной обычно находится в пределах

$$B = 130 \dots 190 \text{ булочек.}$$

Булочки выпекаются партиями в количестве

$$A = n \cdot \Delta A,$$

где n – число поддонов, приготовленных для установки в печь,

$\Delta A = 20$ – ёмкость одного поддона.

Учитывая дискретный характер объёмов производства, именно с таким шагом дискретизируем уровни спроса

$$\Delta B = 20.$$

Определим средний уровень спроса

$$B_{\text{нб}} = \frac{130 + 190}{2} = 160 \text{ шт.}$$

Возможные уровни спроса определим следующим образом

$$B = \dots (B_{\text{нб}} - 2 \times \Delta B); (B_{\text{нб}} - \Delta B); B_{\text{нб}}; (B_{\text{нб}} + \Delta B); (B_{\text{нб}} + 2 \times \Delta B) \dots$$

У счётом имеющихся данных получим уровни спроса, представив их в виде матрицы

$$[B] = [140; 160; 180].$$

В более общем виде этот результат представим как

$$[B] = [B_1; B_2; B_3].$$

Уровни предложения также оформим в матричном виде, используя матрицы-столбцы*

$$[A] = \begin{bmatrix} 140 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix} \text{ или } [A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}.$$

Примечание. Множество возможных состояний Рынка и решений Менеджера должны обладать свойствами альтернативности (несовместности) и полноты.

* В некоторых случаях для компактности дальнейших записей матрицы-столбцы будут записываться в строчку с использованием фигурных скобок, как например

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \{A_1; A_2; A_3\}.$$

3.1.2. Матрица исходов

Отдельный исход v_{ij} представляет собой ситуацию, при которой Менеджер принял решение A_i , а рынок сформировал спрос B_j , т.е.

$$v_{ij} = v(A_i; B_j).$$

Все возможные исходы сгруппируем в матрицу исходов рассматриваемой игры

$$[V] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}.$$

3.1.3. Матрица полезностей исходов

Каждый исход v_{ij} даёт Менеджеру определённую полезность, количественную оценку которой обозначим u_{ij} . Все возможные полезности представим в виде матрицы

$$u_{ij} = u(v_{ij}) = u(A_i; B_j) \rightarrow [U].$$

3.1.4. Расчёт матрицы полезностей исходов

Чтобы вычислить полезности исходов нужно знать издержки, цены, штрафы.

1. Издержки производства одной булочки $R = 10$ руб/шт.
2. Цена реализации "горячей" булочки $P_1 = 15$ руб/шт.
3. Цена реализации "Негорячей" булочки $P_2 = 3$ руб/шт.

Здесь имеется в виду распродажа в конце дня, при которой убыток от продажи уценённой продукции составляет $G = R - P_2 = 10 - 3 = 7$ руб/шт.

4. Штраф за неудовлетворённый спрос $P_3 = -3$ руб/шт.

Рассмотрим механизм действия штрафа. При неудовлетворённом спросе недовольные клиенты могут перейти к конкурентам. Для смягчения ситуации каждому неудовлетворённому клиенту выдаётся сувенир с приглашением прийти в булочную на следующий день

Стоимость сувенира E_3 представляет собой штраф для булочной.

Перейдём непосредственно к расчёту компонент матрицы полезностей.

$$u_{11} = u(A_1, B_1) = A_1 \times (P_1 - R) = 140 \times (15 - 10) = 700 \text{ руб.}$$

$$u_{12} = u(A_1, B_2) = A_1 \times (P_1 - R) + (B_2 - A_1) \times P_3 = 700 + (160 - 140) \times (-3) = 640 \text{ руб.}$$

$$u_{13} = u(A_1, B_3) = A_1 \times (P_1 - R) + (B_3 - A_1) \times P_3 = 700 + (180 - 140) \times (-3) = 580 \text{ руб.}$$

$$u_{21} = u(A_2, B_1) = A_1 \times (P_1 - R) + (A_2 - B_1) \times (P_2 - R) = 700 + (160 - 140) \times (3 - 10) = 560 \text{ руб.}$$

$$u_{22} = u(A_2, B_2) = A_2 \times (P_1 - R) = 160 \times (15 - 10) = 800 \text{ руб.}$$

$$u_{23} = u(A_2, B_3) = A_2 \times (P_1 - R) + (B_3 - A_2) \times P_3 = 800 + (180 - 160) \times (-3) = 740 \text{ руб.}$$

$$u_{31} = u(A_3, B_1) = A_1 \times (P_1 - R) + (A_3 - B_1) \times (P_2 - R) = 700 + (180 - 140) \times (3 - 10) = 420 \text{ руб.}$$

$$u_{32} = u(A_3, B_2) = A_2 \times (P_1 - R) + (A_3 - B_2) \times (P_2 - R) = 800 + (180 - 160) \times (3 - 10) = 660 \text{ руб.}$$

$$u_{33} = u(A_3, B_3) = A_3 \times (P_3 - R) = 180 \times (15 - 10) = 900 \text{ руб.}$$

В итоге имеем матрицу полезностей исходов в виде

$$[U] = \begin{bmatrix} 700 & 640 & 580 \\ 560 & 800 & 740 \\ 420 & 660 & 900 \end{bmatrix}.$$

Из приведенных расчётов видно, что наибольшая полезность составляет $u_{\max} = u_{33} = 900$, а наименьшая полезность равна $u_{\min} = u_{31} = 420$.

3.2. Критерии оптимальности

Расчёт полезностей исходов позволяет найти наилучший и наихудший исходы. Это достаточно важный, но не заключительный этап решения.

Сравнивать нужно не исходы, а принимаемые решения.

Для этого необходимо сформировать критерии оптимальности, т.е. набор правил, следуя которым можно найти наилучшее решение.

Обычно критерий оптимальности представляет собой так называемую "свёртку" полезностей всех исходов, дающую некоторое число – полезность решения.

Выбор критерия оптимальности является неоднозначной задачей, которая допускает различные решения.

3.2.1 Критерий пессимиста (критерий Вальда)

В критерии пессимиста максимизируется наихудший из возможных результатов

$$u_{\text{opt}} = \max_i \min_j [U].$$

Вернёмся к примеру с задачей менеджера-булочника. Найдём наименьшие полезности исходов для каждого решения, принятого менеджером

$$u_{\min,1} = \min_{1,j} [U] = \min[u_{11}; u_{12}; u_{13}] = \min[700; 640; 580] = 580.$$

$$u_{\min,2} = \min_{2,j} [U] = \min[u_{21}; u_{22}; u_{23}] = \min[560; 800; 740] = 560.$$

$$u_{\min,3} = \min_{3,j} [U] = \min[u_{31}; u_{32}; u_{33}] = \min[420; 660; 900] = 420.$$

Оптимальное решение по критерию пессимиста должно иметь наибольшую полезность из наихудших результатов

$$u_{\text{opt}} = \max_{i=1,2,3} [u_{\min,i}] = \max[u_{\min,1}; u_{\min,2}; u_{\min,3}] = \max[580; 560; 420] = 580.$$

Решение, соответствующее найденной полезности, будет оптимальным по критерию пессимиста

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix}; \quad A_{\text{opt}} = A_1 = 140 \text{ шт.}$$

Обратим внимание на особенности полученного решения:

- Найденное решение гарантирует получение прибыли не меньше 580 руб., т.е. исключаются наихудшие из возможных результатов, такие как 420 и 520 руб.
- Очевидно, что при решении по критерию пессимиста гарантированно исключаются и самые лучшие результаты, а именно 900 и 800 руб.

Вывод: Использование критерия пессимиста страхует от наихудшего результата, но цена такой стратегии – потеря возможности получить наилучший из возможных результатов.

3.2.2. Критерий сожалеющего пессимиста (критерий Сэвиджа)

Критерий сожалеющего пессимиста предполагает минимизацию наибольшей потерянной прибыли, иными словами минимизируется наибольшее сожаление по потерянной прибыли

$$S_{\text{opt}} = \min_i \max_j [S], \text{ где } [S] - \text{матрица сожалений.}$$

Матрица сожалений заполняется по столбцам следующим образом

$$s_{ij} = \left(\max \begin{bmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{3j} \end{bmatrix} - u_{ij} \right).$$

В рассматриваемом примере с задачей менеджера-булочника матрица сожалений имеет следующий вид

$$[U] = \begin{bmatrix} 700 & 640 & 580 \\ 560 & 800 & 740 \\ 420 & 660 & 900 \end{bmatrix} \Rightarrow [S] = \begin{bmatrix} 0 & 160 & 320 \\ 140 & 0 & 160 \\ 280 & 140 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее для каждого решения менеджера найдём наибольшее сожаление

$$s_{1,\max} = \max_{1,j} [U] = \max [s_{11}; s_{12}; s_{13}] = \max [0; 160; 320] = 320.$$

$$s_{2,\max} = \max_{2,j} [U] = \max [s_{21}; s_{22}; s_{23}] = \max [140; 0; 160] = 160.$$

$$s_{3,\max} = \max_{3,j} [U] = \max [s_{31}; s_{32}; s_{33}] = \max [280; 140; 0] = 280.$$

Оптимальное решение по критерию сожалеющего пессимиста должно давать наименьшее сожаление из найденных сожалений на предыдущем шаге решения. Решение, соответствующее найденной полезности, будет оптимальным по критерию сожалеющего пессимиста

$$s_{\text{opt}} = \min \begin{bmatrix} s_{1,\max} \\ s_{2,\max} \\ s_{3,\max} \end{bmatrix} = \min \begin{bmatrix} 320 \\ 160 \\ 280 \end{bmatrix} = 160 \Rightarrow [A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{\text{opt}} = A_2 = 160 \text{ шт.}$$

Особенности полученного решения:

- Гарантированное отсутствие самых больших разочарований в 320 и 280 единиц.
- Гарантированное снижение максимальной возможной "радости" конкурентов.

При использовании статистического критерия максимизируется математическое ожидание полезности

$$\{\bar{u}(a_i; i = 1, 2, \dots, m)\} \Rightarrow \max, \text{ где } a_i - \text{стратегия игрока P1.}$$

Статистический критерий работает только при многократном повторении игры, поэтому данный критерий нельзя использовать для оптимизации однократно применяемых решений.

Практически статистическим критерием может пользоваться фирма с достаточно большим запасом финансовой устойчивости, поскольку положительный результат статистической оптимизации проявляется после достаточно большого числа повторений игры, а при небольшом числе повторений могут появляться значительные более низкие результаты по сравнению с ожидаемыми.

Для использования статистического критерия необходима информация о повторяемости отдельных уровней спроса, для обозначения которой введём обозначения:

f_j - число раз, когда наблюдался уровень спроса V_j .

Допустим, что в примере с задачей менеджера-булочника проведено 100 наблюдений, которые дают следующую статистику:

$$f_1=10; \quad f_2=40; \quad f_3=50.$$

Сформируем матрицу-столбец ожидаемой полезности

$$[\bar{U}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{bmatrix}; \quad \bar{u}_i = \frac{u_{i1} \cdot f_1 + u_{i2} \cdot f_2 + u_{i3} \cdot f_3}{f_1 + f_2 + f_3}; \quad i = 1, 2, 3.$$

В общем случае матрица ожидаемой полезности определяется как

$$[\bar{U}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \dots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix}; \quad \bar{u}_i = \frac{\sum_{j=1}^n u_{ij} \cdot f_j}{\sum_{j=1}^n f_j}; \quad i = \overline{1, m}.$$

В рассматриваемом примере матрица ожидаемых полезностей имеет вид

$$[\bar{U}] = \begin{bmatrix} 616 \\ 746 \\ 756 \end{bmatrix}.$$

Оптимальным является решение с наибольшей ожидаемой полезностью (прибылью)

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix}; \quad \bar{u}_{\max} = 756 \quad \Rightarrow \quad A_{\text{opt}} = A_3 = 180 \text{ шт.}$$

Заканчивая рассмотрение статистического критерия, ещё раз отметим, что стратегия, основанная на оптимизации математического ожидания полезности, может использоваться только теми фирмами (игроками), которые имеют повышенную финансовую устойчивость, допускающую длительный период проигрышей.

3.2.4. Критерий Лапласа

Критерий Лапласа представляет упрощенную максимизацию математического ожидания полезности, при которой предполагается, что уровни спроса равновероятны, а это избавляет от необходимости накопления реальной статистики повторяемости уровней спроса.

В общем случае при использовании критерия Лапласа матрица ожидаемых полезностей определяется как

$$[\bar{U}] = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \dots \\ \bar{u}_m \end{bmatrix}; \quad \bar{u}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_{ij}; \quad i = \overline{1, m}$$

Оптимальной будет стратегия с наибольшей ожидаемой полезностью

$$A_{\text{opt}} = \arg(\bar{u}_{\max}).$$

В рассматриваемом примере задачи менеджера-булочника оптимальное решение по критерию Лапласа находится следующим образом

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix}; \quad [\bar{U}] = \begin{bmatrix} 640 \\ 700 \\ 660 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{u}_{\max} = 700 \Rightarrow A_{\text{opt}} = A_2 = 160 \text{ шт.}$$

3.2.5. Критерий оптимиста

При использовании критерия оптимиста игрок всегда выбирает решение, которое может дать самый лучший результат, при этом оптимист предполагает, что условия игры будут для него наиболее благоприятными

$$A_{\text{opt}} = \arg(u_{\max}).$$

Обратимся к матрице решений и матрице полезностей в примере задачи менеджера-булочника. Поскольку наибольший из возможных результатов $u_{\max} = u_{33} = 900$ находится в третьей строке матрицы $[U]$, то поэтому оптимальное решение оптимиста находится следующим образом

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 = 140 \\ A_2 = 160 \\ A_3 = 180 \end{bmatrix} \Rightarrow [U] = \begin{bmatrix} 700 & 640 & 580 \\ 560 & 800 & 740 \\ 420 & 660 & 900 \end{bmatrix} \Rightarrow u_{\max} = 900 \Rightarrow A_{\text{opt}} = A_3 = 180 \text{ шт.}$$

Стратегия оптимиста приводит к весьма отрицательным последствиям, в случаях, когда максимальное предложение совпадает с минимальным спросом – фирма может получить убытки при списании нереализованной продукции (в нашем примере такая ситуация невозможна, поскольку даже в худшем сочетании предложения и спроса убытков нет, но в общем случае при увеличении размерности матрицы исходов получение убытков вполне вероятно).

В тоже время стратегия оптимиста имеет определённый смысл, так например, отпадает необходимость заботиться о неудовлетворённых покупателях, поскольку любой возможный спрос всегда удовлетворяется, поэтому нет нужды запасаться сувенирами для поддержки расположения покупателей.

Если реализуется максимальный спрос, то стратегия оптимиста позволяет получить максимальную полезность в то время, как другие стратегии приведут к недополученной прибыли, что даёт определённые конкурентные преимущества.

3.2.6. Критерий Гурвица

Критерий Гурвица представляет собой регулируемый компромисс между крайним пессимизмом и полным оптимизмом.

Наиболее просто этот критерий реализуется при непрерывном выборе стратегий в условиях, когда между характеристикой стратегии $A(i)$ и соответствующей полезностью $u(i) = u(A(i))$ существует монотонная зависимость близкая к линейной. В этом случае при возрастающей зависимости использование критерия Гурвица описывается следующим выражением

$$A_{opt} = A(0) + a \cdot (A(k) - A(0)),$$

где $A(0)$ – стратегия крайнего пессимиста, $A(k)$ – стратегия полного оптимиста, a – задаваемое значение весового коэффициента:

$0 \leq a \leq 1$; $a = 0$ – крайний пессимизм, $a = 1$ – полный оптимизм.

Использование критерия Гурвица вызывает принципиальные трудности, если зависимость полезности от характеристики стратегии $u(A)$ является немонотонной. В таких случаях линейную интерполяцию с весовым коэффициентом a можно выполнить по полезностям или по стратегиям – результаты будут совершенно различными. Как правило, линейная интерполяция по стратегиям является более логичной.

При небольшом числе дискретных стратегий, задавая желаемое значение весового коэффициента a , следует затем округлять получаемый результат до ближайшего возможного значения с учётом выполненной дискретизации.

3.3. Неоднозначность выбора оптимальных решений

Проблема **глобальной неоднозначности** оптимизации как инструмента поиска наилучших решений связана с тем, что в принципе, различные критерии оптимальности могут давать различные решения, в чём легко убедиться на рассмотренном примере задачи менеджера-булочника, сопоставляя результаты, приведенные ниже в таблице.

Сравнение статистической полезности при различной оптимизации			
№ п/п	Критерий оптимальности	Оптимальная стратегия	Ожидаемая полезность
1	Критерий пессимиста	$A_{\text{opt}} = A_1 = 140$	$\bar{u}(A_1) = 616$
2	Кр. сожалеющего пессимиста	$A_{\text{opt}} = A_2 = 160$	$\bar{u}(A_2) = 746$
3	Статистический критерий	$A_{\text{opt}} = A_3 = 180$	$\bar{u}(A_3) = 756$
4	Критерий Лапласа	$A_{\text{opt}} = A_2 = 160$	$\bar{u}(A_2) = 746$
5	Критерий оптимиста	$A_{\text{opt}} = A_3 = 180$	$\bar{u}(A_3) = 756$
6	Критерий Гурвица, $\alpha = 0,5$	$A_{\text{opt}} = A_1 = 160$	$\bar{u}(A_2) = 746$

Ожидаемые полезности $\bar{u}(A_i)$ вычислены для стратегий, соответствующих выбранным оптимальным стратегиям с использованием статистики повторяемости уровней спроса $f_1=10$, $f_2=40$, $f_3=50$.

Поскольку используемое число критериев оптимальности превышает возможное число стратегий, то поэтому некоторые решения совпадают. Следует отметить, что так уж получилось, что все без исключения возможные стратегии могут быть оптимальными по тому или иному критерию.

Довольно неожиданным и очевидно частным результатом является совпадение решений по статистическому критерию и по критерию оптимиста.

Конкретизация выбора используемых критериев оптимальности может быть связана с финансовым состоянием фирмы или с субъективными предпочтениями лица принимающего решения, такими как осторожность или склонность к риску.

Далее обратимся к **локальной неоднозначности** оптимальных решений, которая теоретически может проявляться после выбора конкретного критерия оптимальности (в нашем примере задачи менеджера-булочника это ситуация не наблюдается). В этом случае встаёт вопрос о том, каким именно решением воспользоваться.

Можно по-разному решить данный вопрос. Если матрица исходов имеет сравнительно небольшую размерность, как в примере задачи булочника-менеджера, то уменьшение шага дискретизации и как следствие увеличение размерности матрицы исходов может снять этот вопрос, т.к. неоднозначность исчезнет.

При неоправданно завышенном размере матрицы исходов действия по устранению локальной неоднозначности оптимизации могут быть прямо противоположными по сравнению с предыдущим приёмом, а именно снижение размерности за счёт увеличения шага дискретизации исходных данных.

4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

Конечные игры двух игроков с нулевой суммой.

Расширение понятия платёжной матрицы.

Нижняя и верхняя цена игры.

Решение в чистых стратегиях.

Седловая точка.

Теорема о решении конечной игры с нулевой суммой в чистых стратегиях.

Теорема об отсутствии решения в чистых стратегиях конечной игры с нулевой суммой.

Сокращение порядка платёжных матриц.

Доминирование строк и столбцов.

Обратимся к рассмотрению конечных игр двух игроков P_1 и P_2 с нулевой суммой с более общих теоретических позиций чем мы делали это до сих пор. Для этого сначала уточним понятие конечной игры.

Определение. Конечная игра предполагает, что каждый из игроков располагает конечным числом несовместных (альтернативных стратегий).

Нулевая сумма, как уже отмечалось, означает следующее: сколько выигрывает один из игроков, столько проигрывает другой, поэтому алгебраическая сумма их выигрышей равна нулю.

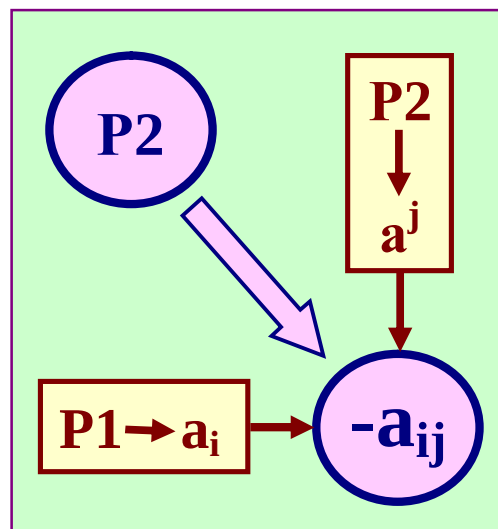
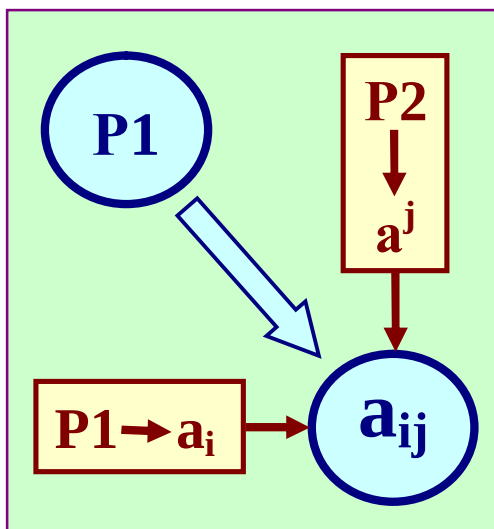
Будем считать, что игроки делают ходы одновременно и независимо друг от друга. Другими словами: каждый игрок принимает решение о выборе своей стратегии в условиях неопределённости действий противника, поэтому неясно, чем должен руководствоваться каждый игрок. Выбирая ту или иную стратегию.

Рассмотрим схематичное оформление платёжной матрицы рассматриваемой игры, представляющей собой матрицу выигрышей первого игрока P_1 .

Если игрок P_1 в данной игровой ситуации проигрывает, то соответствующий компонент платёжной матрицы имеет отрицательный знак, т.е. $a_{ij} < 0$.

[A]=[u(P1)]		Стратегии игрока P2							
		a^1	a^2	...	a^i	...	a^j	...	a^n
Стратегии игрока P1	a_1	a_{11}	a_{12}	...	...	...	a_{1j}	...	a_{1n}
	a_2	a_{21}	a_{22}	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	a_i	...	...	...	a_{ii}	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	a_j	...	...	...	...	...	a_{jj}	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	a_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mi}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Элемент платёжной матрицы a_{ij} представляет собой выигрыш игрока P1 при выборе стратегии a_i при условии, что игрок P2 выбрал стратегию a^j , а с другой стороны это проигрыш игрока P2 при тех же условиях.



4.1. Нижняя и верхняя цена игры

Нижняя цена игры: $\hat{a} = \max_{i=1,m} \min_{j=1,n} \{a_{ij}\}.$

$\hat{a}$ — максимальный гарантированный выигрыш игрока P1, независимый от того, какую бы стратегию ни выбрал игрок P2.

Верхняя цена игры: $\bar{a} = \min_{j=1,n} \max_{i=1,m} \{a_{ij}\}$

$\bar{a}$ — минимальный гарантированный проигрыш игрока P2, независимый от того, какую бы стратегию ни выбрал игрок P1.

Определение нижней или верхней цены игры производится в два этапа, как это показано на представленной ниже схеме

$[A] =$	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	$\min \Rightarrow a_1$
	a_{21}	...	a_{2j}	...	...	$\min \Rightarrow a_2$
	...	...	...	...	...	$\min \Rightarrow a_{\dots}$
	a_{i1}	...	a_{ij}	...	...	$\min \Rightarrow a_i$
	...	...	...	...	...	$\min \Rightarrow a_{\dots}$
	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	$\min \Rightarrow a_m$
$\begin{matrix} \max & \max & \max & \max & \max \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ a^1 & a^{\dots} & a^j & a^{\dots} & a^n \end{matrix}$						$\Downarrow$
Верхняя цена игры $\bar{a} = \min\{a^1; \dots; a^j; \dots; a^n\}$						Нижняя цена игры $\hat{a} = \max\{a_1; \dots; a_i; \dots; a_m\}$

Максиминная стратегия игрока P1 это стратегия a_{i_0} , которая соответствует нижней цене игры

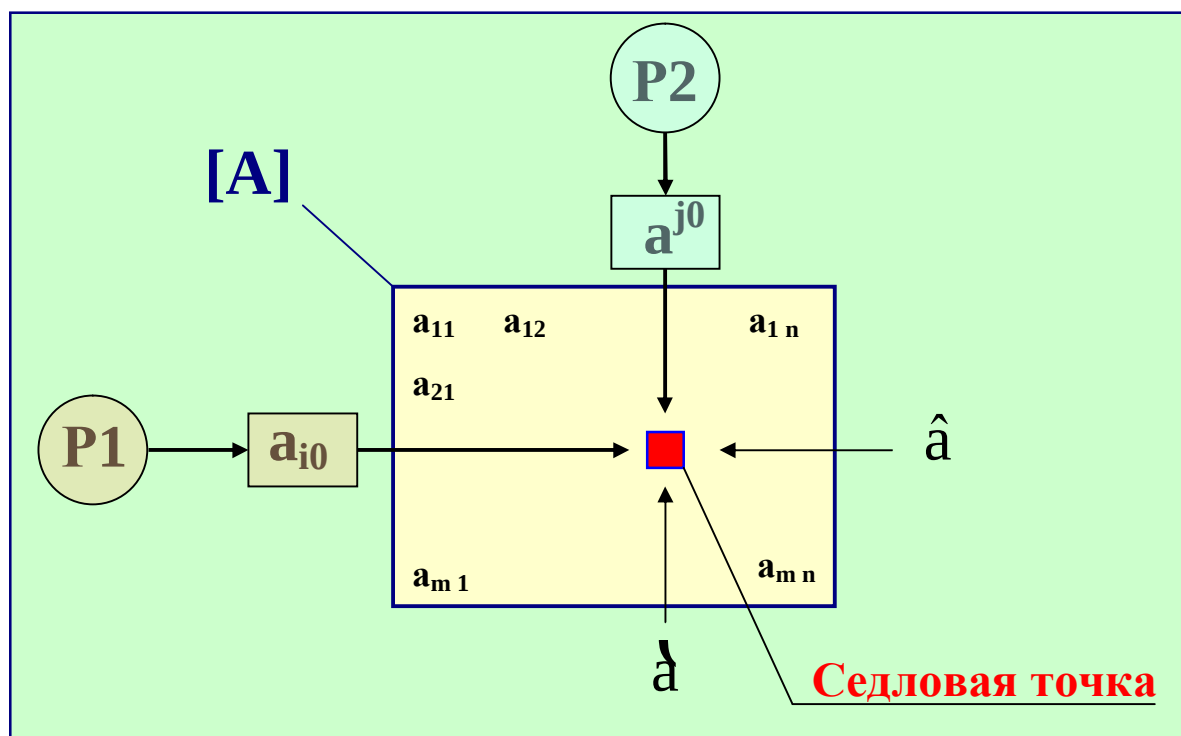
$$P1: \hat{a} \rightarrow a_{i_0}.$$

Минимаксная стратегия игрока P2 это стратегия a^{j_0} , которая соответствует верхней цене игры

$$P2: \bar{a} \rightarrow a^{j_0}.$$

4.2. Понятие седловой точки матричной игры

Седловой точкой называется компонент платёжной матрицы расположенный на пересечении строки с максиминной стратегией a_{i_0} (игрок P1) и столбца с минимаксной стратегией a^{j_0} (игрок P2).



4.3. Решение матричных игр в чистых стратегиях

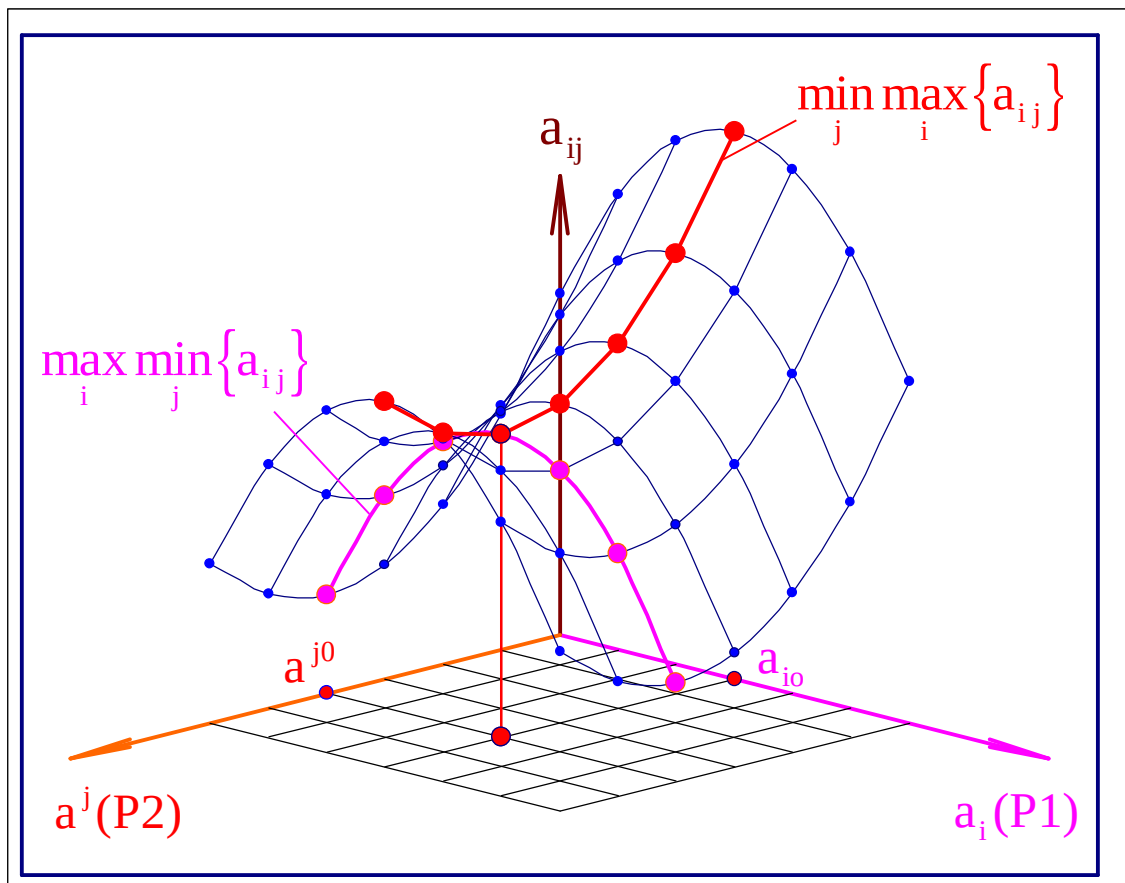
Теорема. Если нижняя и верхняя цены игры равны между собой, т.е. $\hat{a} = \tilde{a}$, то матричная игра имеет решение в чистых стратегиях.

При этом число $p = \hat{a} = \tilde{a}$ называется ценой игры.

Соответственно стратегии a_{i_0} (для P1) и a^{j_0} (для P2) называются оптимальными чистыми стратегиями.

Клетка платёжной матрицы $(a_{i_0}; a^{j_0})$ представляет собой седловую точку.

Смысл терминологии "оптимальные чистые стратегии" заключается в том, что отклонение от седловой точки, координатами которой они являются, ухудшает положение или одного, или обоих игроков, что иллюстрируется приведенной ниже схемой нахождения оптимальных чистых стратегий.



Если игра повторяется многократно, то игроки должны придерживаться найденных оптимальных стратегий $(a_{i0}; a^{j0})$. С точки зрения игрового азарта такая игра не представляет интереса, т.к. она предполагает фиксированное распределение ролей – один всегда выигрывает, а другой всегда проигрывает.

Здесь можно задаться вопросом: А в чём тогда смысл проведенной оптимизации? Оптимизация в данном случае позволяет игроку P1 максимизировать выигрыш вне зависимости от действий противника, в тоже время игрок P2 минимизирует свой проигрыш причём также независимо от действий P1.

Теорема. Если нижняя цена меньше верхней цены игры, т.е. $\hat{a} < \bar{a}$, то матричная игра **НЕ имеет** решения в чистых стратегиях.

Примечания:

- Конкретная ситуация $\hat{a} = \bar{a}$ или $\hat{a} < \bar{a}$ зависит только от вида платёжной матрицы.
- "Народные" игры, такие как "орлянка", "Моро" и многие другие не имеют решений в чистых стратегиях.

4.4. Сокращение порядка платёжных матриц

Если говорить об играх с дискретным набором возможных стратегий, то в реальных задачах размерность платёжной матрицы может быть достаточно высокой и скорее всего после некоторого анализа порядок платёжной матрицы можно сократить, что весьма желательно с технической точки зрения.

Другое дело, если решается задача с непрерывным выбором стратегий. Основным приёмом решения таких задач является их сведение к играм с дискретным выбором стратегий, при этом число выбранных дискретных стратегий может быть достаточно большим и тогда любое сокращение порядка платёжной матрицы может быть просто необходимым.

В связи с изложенным обратимся к простейшим приёмам сокращения порядка платёжных матриц.

Практически очевидным приёмом сокращения платёжных матриц является то, что если имеются одинаковые строки или столбцы, то дублиры можно убирать, т.к. цена игры от этого не изменяется.

Теорема. Доминируемые строки или столбцы, над которыми есть доминант, могут быть изъяты из платёжной матрицы, т.к. положение седловой точки (цена игры) от этого не изменяется.*

Определение. Если в некоторой строке платёжной матрицы все элементы больше или равны соответствующим элементам другой строки, то первая строка доминирует вторую и называется доминант-строкой

$$\text{Dominant-строка "i" : } a_{ij} \geq a_{kj}; \quad \forall (j=1, n).$$

Определение. Если в некотором столбце платёжной матрицы все элементы меньше или равны соответствующим элементам другого столбца, то первый столбец доминирует второй и называется доминант-столбцом

$$\text{Dominant-столбец "j" : } a_{ij} \leq a_{ik}; \quad \forall (i=1, m).$$

* При дальнейшем изложении материала к вопросу доминирования строк и столбцов мы будем обращаться неоднократно, что позволит более обстоятельно разобраться с этим вопросом.

5. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Обратимся к краткому повторению материала предыдущего раздела, в котором рассматривались матричные игры с нулевой суммой для двух игроков, а именно, одноходовые игры. Эти игры называют ещё антагонистическими, т.к. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого. Такая игра считается заданной, если известна платёжная матрица

		Стратегии игрока P2				
		a^1		a^j		a^n
Стратегии игрока P1	a_1	a_{11}	...	a_{12}	...	a_{1n}
	a_2	a_{21}	...	...	...	a_{2n}
	...	...	...	...	...	...
	a_i	a_{i1}	...	...	...	a_{in}
	...	...	...	...	...	...
	a_m	a_{m1}	...	a_{m2}	...	a_{mn}

$[A] =$

$\left. \begin{array}{c} \text{m - строк} \end{array} \right\}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{n - столбцов}}$

Размерность матрицы $[A]$ (выигрыши игрока P1) составляет $(m \times n)$

$$a_{ij}: \quad i=1, m; \quad j=1, n.$$

Если необходима матрица $[B]$ игрока P2, то её можно получить следующим образом

$$b_{ij} = -a_{ij}: \quad i=1, m; \quad j=1, n.$$

Основными характеристиками игры с нулевой суммой являются :

$$\hat{a} = \max_{i=1, m} \min_{j=1, n} \{ a_{ij} \} \text{ - нижняя цена;}$$

$$\hat{a} = \min_{j=1, n} \max_{i=1, m} \{ a_{ij} \} \text{ верхняя цена.}$$

Оптимальное решение для одноходовой игры имеет место при условии $\hat{a} = \hat{a} = v$, где v – цена игры.

При выполнении условия $\hat{a} = \hat{a}$ существует седловая точка с координатами $(a_{i_0}; a^{j_0})$, любое отклонение от которой в смысле перехода к другим стратегиям или уменьшает выигрыш P1 или увеличивает проигрыш P2 или вызывает и то и другое.

Если $\hat{a} < \frac{1}{2}$, то в одноходовой игре оптимального решения в "чистых" стратегиях не существует.

Однако, если игра повторяется неоднократно, то при такой платёжной матрице можно добиться оптимального результата в так называемых "смешанных" стратегиях, которые в отличие от "чистых" стратегий представляют собой смесь стратегий в определённой пропорции. Собственно, решению задачи поиска оптимального решения в смешанных стратегиях и посвящён данный раздел.*

5.1. Формализованное описание получения результата одноходовой игры

5.1.1. Структурирование платёжной матрицы

Рассмотрим платёжную матрицу размерностью (2×2)

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Выполним структурирование этой матрицы с точки зрения выигрышей игрока P1, для которого естественным является построчное видение платёжной матрицы поскольку выбор определённой строки соответствует выбору игроком возможной для него стратегии, а самой выделенной строке данный игрок видит возможные результаты, обусловленные действиями соперника

$$P1 \rightarrow [A] = \begin{bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} [a_1] &= [a_{11}; a_{12}] \\ [a_2] &= [a_{21}; a_{22}] \end{aligned}$$

Естественным структурированием платёжной матрицы для игрока P2 является её представление по столбцам

$$\begin{array}{c} P2 \\ \downarrow \\ [A] = \begin{bmatrix} [a^1] & [a^2] \end{bmatrix} \\ \swarrow \quad \searrow \\ [a^1] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad [a^2] = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

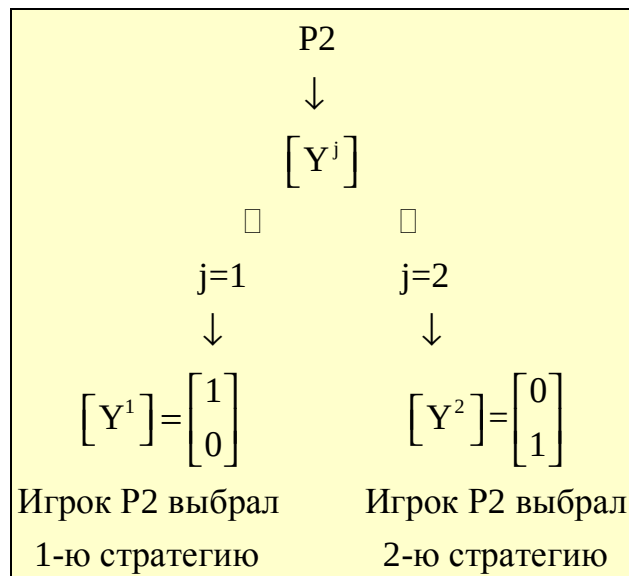
* Поясним смысл терминологии "чистая" стратегия – это та конкретная стратегия оптимальная в данной одноходовой игре, которую следует повторять, если игра будет повторяться при неизменной платёжной матрице.

5.1.2. Единичные индикаторные матрицы выбора стратегий

С целью формализации структурирования платёжных матриц, исходя из их естественного представления участниками игры, вводятся единичные индикаторные матрицы $[X_i]$, $i=1,...,m$ для игрока P1 и единичные матрицы $[Y^j]$, $j=1,...,n$ для игрока P2.

Заполнение единичных индикаторных матриц при выборе игроками конкретных стратегий иллюстрируется для случая игры с размерностью (2×2) на приведенной ниже схеме

$$\begin{array}{l} \text{P1} \rightarrow [X_i] \begin{array}{l} \square \text{ } i=1 \rightarrow [X_1]=[1;0] - \text{игрок P1 выбрал 1-ю стратегию;} \\ \square \text{ } i=2 \rightarrow [X_2]=[0;1] - \text{игрок P1 выбрал 2-ю стратегию.} \end{array} \end{array}$$



Пример. Если платёжная матрица имеет размерность (5×7) и игрок P1 выберет 3-ю стратегию, а игрок P2 выберет 6-ю стратегию, то соответствующие индикаторные матрицы имеют вид

$$[X_3] = [0; 0; 1; 0; 0]; \quad [Y^6] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.1.3. Платёжная функция

Рассмотрим процедуру определения выигрыша игрока P1, выбравшего стратегию a_i при условии, что игрок P2 выбрал стратегию a^j .

Решение найдём на пересечении i – й строки и j – го столбца платёжной матрицы $[A]$, введя следующие обозначения

$$u_1(i, j) = a_{ij}.$$

Очевидно, что при тех же условиях игры с нулевой суммой решения для игрока P2 получается как

$$u_2(i, j) = -u_1(i, j) = -a_{ij}.$$

С использованием индикаторных единичных матриц процедура поиска решения среди элементов платёжной матрицы может быть формализована следующим образом

$$u_1(i, j) = [X_i] \cdot [A] \cdot [Y^j] = a_{ij}.$$

Очевидно, что результат этой процедуры известен заранее, но в данном случае логические манипуляции с содержимым платёжной матрицы заменяются формальным перемножением матриц.

$$\text{Пример. } u_1(2, 1) = [0, 1] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [a_{21}; a_{22}] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{21}.$$

Допустим, что игра с заданной платёжной матрицей $[A]$ повторяется N раз при неизменном выборе стратегии a_i для игрока P1 и a^j для P2.

Суммарный выигрыш для P1 найдём как

$$u_{1\Sigma}(i, j) = N \cdot [X_i] \cdot [A] \cdot [Y^j] = N \cdot a_{ij}.$$

Средний выигрыш для игрока P1 составит

$$\bar{u}_1(i, j) = \frac{1}{N} N \cdot [X_i] \cdot [A] \cdot [Y^j] = [X_i] \cdot [A] \cdot [Y^j] = a_{ij}.$$

Отметим, что при фиксированном выборе стратегий, средний выигрыш игроков не зависит от числа повторений игры, да и не может зависеть, поскольку каждый раз получается один и тот же выигрыш или проигрыш.

Приведенные соображения позволяют ввести понятие **платёжной функции** в частном случае неизменного выбора стратегий

$$f(X, Y) = [X] \cdot [A] \cdot [Y].$$

Здесь матричные аргументы **X** и **Y** выступают как обобщение единичных индикаторных функции выбора стратегий.

Понятно, что результатом вычисления платёжной функции при заданных аргументах является средний выигрыш игрока P1.

Продолжая рассматривать матричную игру с нулевой суммой размерностью (2×2) , перейдём к более общему случаю, когда стратегии игроков смешиваются случайным образом с заданными вероятностями в течение N – го числа партий

P1	$\square$ $a_1 : N_1$ раз выбрана 1-я стратегия, $0 \leq N_1 \leq N$;
	$\square$ $a_2 : N_2$ раз выбрана 2-я стратегия, $N_2 = N - N_1$.

P2	$\square$ $a^1 : M_1$ раз выбрана 1-я стратегия, $0 \leq M_1 \leq N$;
	$\square$ $a^2 : M_2$ раз выбрана 2-я стратегия, $M_2 = N - M_1$.

Суммарный выигрыш игрока P1 за N партий вычислим следующим образом

$$u_{1\Sigma} = [N_1; N_2] \cdot [A] \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Найдем средний выигрыш для P1 при тех же условиях

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{N} \cdot [N_1; N_2] \cdot [A] \cdot \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Введём обозначения: $x_1 = \frac{N_1}{N}$, $x_2 = \frac{N_2}{N}$, $y_1 = \frac{M_1}{N}$, $y_2 = \frac{M_2}{N}$.

Отметим, что поскольку $N_1 + N_2 = N$ и $M_1 + M_2 = N$, то между введенными величинами существует очевидная взаимосвязь

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, & y_1 + y_2 &= 1; \\ x_2 &= 1 - x_1, & y_2 &= 1 - y_1. \end{aligned}$$

С использованием введённых обозначений средний выигрыш P_1 определяется зависимостью

$$\bar{u}_1 = [x] \cdot [A] \cdot [y], \text{ где } [x] = [x_1; x_2], \quad [y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Раскрывая матричные произведения, получим

$$\bar{u}_1 = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

Платёжная функция в случае использования смешанных стратегий перемешиваемых случайным образом даёт средний выигрыш и вычисляется следующим образом

$$f(x, y) = [x] \cdot [A] \cdot [y].$$

Использование платёжной функции, дающей средний выигрыш, в случае смешивания стратегий предполагает реализацию достаточно представительной статистики, при которой как минимум частота появления соответствующих стратегий должна сходиться к заданным вероятностям соответствующих стратегий.

5.2. Понятие оптимальности в смешанных стратегиях

Определение.

Смешанные стратегии $x^{(0)} = [x_1^{(0)}; x_2^{(0)}]$, $y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix}$ являются

оптимальными, если любое отклонение от них даёт снижение выигрыша, хотя бы одному из игроков, что соответствует условию

$$f(x, y^{(0)}) \leq f(x^{(0)}, y^{(0)}) \leq f(x^{(0)}, y).$$

Примечание. Если цена игры $v = f(x^{(0)}, y^{(0)})$, то игра "справедливая" в том смысле, что выигрыш одного игрока в среднем равен выигрышу другого игрока.

5.3. Теорема Джона Фон Неймана

Теорема. Для любой матричной игры с нулевой суммой и с заданной платёжной матрицей $[A]$ можно найти оптимальное решение $(x^{(0)}; y^{(0)})$ в смешанных или в чистых стратегиях, причём цена игры определяется как

$$n = \max_x \min_y [x] \cdot [A] \cdot [y] \quad \text{или} \\ n = \min_y \max_x [x] \cdot [A] \cdot [y].$$

Примечание 1. Теорема Дж. Фон Неймана утверждает, что решение есть всегда, но другое дело, что, если нет решения в чистых стратегиях, то его можно найти в смешанных стратегиях.

Примечание 2. Оптимизм, вселяемый этой теоремой, несколько убавляется при её практическом применении, т.к. теорема не даёт инструмента нахождения оптимального решения (так называемая неконструктивная теорема). Однако, если есть понимание того, что в рассматриваемых задачах всегда можно найти оптимальное решение, то поиск этого решения из принципиальной проблемы переходит в техническую проблему, которую можно решить например численным путём, имитируя на ЭВМ перебор возможных игровых ситуаций.

6. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ МАТРИЧНЫХ ИГР

Рассмотрим без доказательства известные закономерности матричных игр, сформулированные в виде так называемых утверждений. По сути, эти утверждения представляют собой некие вспомогательные теоремы, но гораздо меньшего в принципиальном плане значения, чем те теоремы, которые именно теоремами называются в теории игр.

Утверждение 1. Линейное преобразование платёжных матриц не отражается на выборе оптимальных стратегий.

Если $(x^{(0)}; y^{(0)})$ - оптимальные стратегии игрока P1, P2 в матричной игре с платёжной матрицей $[A]$ размерностью $(m \times n)$, где m – число строк и n – число столбцов и сформирована матрица

$$[B] = \alpha[A] + [G] \text{ где } \alpha > 0, \quad g_{ij} = g - \text{const},$$

то тогда для матричной игры с платёжной матрицей $[B]$ стратегии $(x^{(0)}; y^{(0)})$ так же оптимальны, а цена игры составляет

$$v_B = \alpha \cdot v_A + g,$$

где v_A – цена игры с платёжной матрицей $[A]$.

В справедливости данного утверждения легко убедиться, рассмотрев несколько конкретных примеров.

Примечание 1. Использование данного утверждения позволяет заменить матрицу $[A]$ с отдельными отрицательными элементами на матрицу $[B]$ только с положительными элементами, что чисто технически может быть удобнее при поиске оптимальных решений численными методами (перебор возможных игровых ситуаций) с использованием ЭВМ.

Примечание 2. В игры с положительной платёжной матрицей мало кто играет, т.к. здесь при реализации оптимальных стратегий роли игроков строго определены: один выигрывает, другой – проигрывает.

Примечание 3. Линейное преобразование платёжной матрицы может иметь практический смысл, если в игре участвует третий игрок P3, который сам не играет, но заинтересован в линейном преобразовании платёжной матрицы, за счёт которого игру можно сделать справедливой или в какой-то мере приблизить игру к справедливой. Таким третьим игроком может выступать "Общество" в лице такого выразителя своих интересов как "Государство".

Утверждение 2. Чистые стратегии включаются в условие оптимальности смешанных стратегий матричных игр.

Если v – цена игры с платёжной матрицей $[A]$ размерностью $(m \times n)$, для которой найдены оптимальные смешанные стратегии игроков P1, P2 связанные с ценой игры соотношением

$$v = f(x^{(0)}; y^{(0)}) = [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [y^{(0)}],$$

то тогда для **любой** стратегии игрока P1

$$[x] = [x_1; x_2; \dots; x_i; \dots; x_m], \quad \left(\sum_{i=1}^m x_i = 1\right)$$

и для **любой** стратегии игрока P2

$$[y] = [y_1; y_2; \dots; y_j; \dots; y_m], \quad \left(\sum_{j=1}^n y_j = 1\right)$$

при известной платёжной функции $f(x; y)$ справедливы неравенства

$$v \leq f(x^{(0)}; y) \text{ или } v \leq [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [y] \quad ; \quad f(x; y^{(0)}) \leq v \text{ или } [x] \cdot [A] \cdot [y^{(0)}] \leq v,$$

которые более компактно можно записать в виде

$$f(x; y^{(0)}) \leq f(x^{(0)}; y^{(0)}) \leq f(x^{(0)}; y).$$

Примечание 1. Для смешанных стратегий данное утверждение очевидно из определения оптимальности решений в смешанных стратегиях, но здесь имеет место расширение понятия для любых стратегий, **включая и чистые стратегии.**

Утверждение 3. В матричных играх условие оптимальности смешанных стратегий можно распространять на случай чистых стратегий.

Если v – цена игры с платёжной матрицей $[A]$ размерностью $(m \times n)$ и если для выбранных стратегий $(x^{(0)}; y^{(0)})$ игроков P1, P2 и **ЛЮБЫХ** других стратегий (включая чистые стратегии) справедливы неравенства

$$v \leq f(x^{(0)}; y), \text{ т.е. } v \leq [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [y] \quad \text{и} \quad f(x; y^{(0)}) \leq v, \text{ т.е. } [x] \cdot [A] \cdot [y^{(0)}] \leq v,$$

то тогда стратегии $(x^{(0)}; y^{(0)})$ являются оптимальными стратегиями игроков P1, P2.

Примечание. Очевидно, что утверждения 2 и 3 взаимнообратны.

Следствие из утверждения №3.

В матричных играх имеет место сочетание и взаимосвязь чистых и смешанных стратегий при выборе оптимальных стратегий.

Рассмотрим стратегии $(x; y)$, выбрав из них как частный случай чистые стратегии e_i, e^j

$$\begin{array}{l}
 \text{P1: } [x] = [x_1, x_2, \dots, x_m] \Rightarrow e_i = [0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0] \\
 \begin{array}{c} \leftarrow j \rightarrow \\ \leftarrow m \rightarrow \end{array} \\
 \\
 \text{P2: } [y] = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \Rightarrow e^j = [0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0, 0]^T \\
 \begin{array}{c} \leftarrow i \rightarrow \\ \leftarrow n \rightarrow \end{array}
 \end{array}$$

Воспользуемся определением оптимальной игры в виде

$$f(x; y^{(0)}) \leq f(x^{(0)}; y^{(0)}) \leq f(x^{(0)}; y),$$

которое представим следующим образом

$$[x] \cdot [A] \cdot [y^{(0)}] \leq v \leq [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [y].$$

Так как $[x]$ и $[y]$ могут быть любыми, то возьмём вместо них чистые стратегии e_i, e^j

$$[0, \dots, 1, \dots, 0] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \\ \dots \\ y_m^{(0)} \end{bmatrix} \leq v \leq [x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

После перемножения матриц получим

$$[a_i] \cdot [y^{(0)}] \leq v \leq [x^{(0)}] \cdot [a^j], \quad \forall (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

Рассмотрим поочередно левую и правую части приведенного неравенства:

$[a_i] \cdot [y^{(0)}] \leq v$ – означает, что любая чистая стратегия игрока P1 в сочетании с оптимальной стратегией P2 не лучше или так же эффективна как оптимальная стратегия $[x^{(0)}]$;

$v \leq [x^{(0)}] \cdot [a^j]$ – означает, что любая чистая стратегия игрока P2 в сочетании с оптимальной стратегией P1 не лучше или так же эффективна как оптимальная стратегия $[y^{(0)}]$.

Утверждение 4. Ограничения условий выбора оптимальных стратегий взаимосвязаны между собой.

Обратимся к раскрытию итоговых неравенств из предыдущего утверждения

$$[a_i] \cdot [y^{(0)}] \leq v \leq [x^{(0)}] \cdot [a^j], \quad \forall (i=1, \dots, m; j=1, \dots, n).$$

Рассматривая чистые неравенства и соответствующие равенства, можно обнаружить их взаимно однозначное соответствие

1. Если $[a_i] \cdot [y^{(0)}] < v$, то $x_i^{(0)} = 0$.
2. Если $x_i^{(0)} > 0$, то $[a_i] \cdot [y^{(0)}] = v$.
3. Если $v < [x^{(0)}] \cdot [a^j]$, то $y_j^{(0)} = 0$.
4. Если $y_j^{(0)} > 0$, то $v = [x^{(0)}] \cdot [a^j]$.

Утверждение 5. Кососимметричная платёжная матрица предопределяет справедливую игру.

Если платёжная матрица $[A]$ квадратная и кососимметричная, т.е.

$$a_{ij} = -a_{ji} \text{ при } i \neq j \text{ и } a_{ii} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

то оптимальная стратегия P1 совпадает с оптимальной стратегией P2

$$[x^{(0)}] = [y^{(0)}]^T.$$

Как следствие из этого утверждения, цена игры при такой платёжной матрице равна нулю

$$v = [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [y^{(0)}] = [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [x^{(0)}]^T = 0.$$

Отсюда следует, что при кососимметричной квадратной платёжной матрице игра всегда СПРАВЕДЛИВАЯ.

Утверждение 6. Скаляризация позволяет снизить трудоёмкость вычислительной процедуры поиска оптимальных стратегий.

Представим платёжную матрицу игры в блочном виде в двух вариантах структурирования: построчно и по-столбцам :

$$[A] = \begin{bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \\ \dots \\ [a_m] \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad [A] = \begin{bmatrix} [a^1] & [a^2] & \dots & [a^n] \end{bmatrix}.$$

Выделение строк и столбцов имеет определённый смысл, который заключается в том, что строки представляют собой результат выбора соответствующей стратегии игроком P1, а столбцы – игроком P2.

Цена матричной игры как следствие из утверждения № 3 может быть представлена с учётом блочного структурирования платёжной матрицы следующим образом

$$n = \max_x \min_{j=1, \dots, n} [x] \cdot [a^j] \quad \text{или} \quad n = \min_y \max_{i=1, \dots, m} [a_i] \cdot [y].$$

Рассмотрим выражение $\max_x \min_{j=1, \dots, n} [x] \cdot [a^j]$.

Допустим, что используется произвольная смешанная стратегия игрока P1

$$[x] = [x_1, x_2, \dots, x_m].$$

Для этой произвольной смешанной стратегии найдём скалярные произведения

$$[x] \cdot [a^1], \quad [x] \cdot [a^2], \quad \dots, \quad [x] \cdot [a^j], \quad \dots, \quad [x] \cdot [a^n].$$

На следующем этапе поиска оптимального решения найдём функцию минимумов всех скалярных произведений, координатами которой являются координаты вектора смешанных стратегий

$$\psi(x) = \min_{j=1, \dots, n} [x] \cdot [a^j].$$

Далее найдём максимум этой функции в m – мерном пространстве, который и будет равен цене данной игры

$$v = \max_x \psi(x).$$

Скаляризация, т.е. в данном случае использование скалярных произведений на промежуточной стадии решения, позволяет значительно снизить размерность решаемой задачи, т.к. внутренний поиск оптимума ведётся по чистым стратегиям (их всего n), а заключительный этап решения выполняется только по координатам вектора (x) , что намного эффективнее решения матричных уравнений с двумя произвольными векторами (x) и (y)

$$n = \max_x \min_y [x] \cdot [A] \cdot [y].$$

Примечание.

Аналогичные рассуждения и выводы можно получить, начиная с позиции игрока P2, который использует произвольные смешанные стратегии

$$[y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Обратимся к определению цены игры на основании следствия из утверждения № 3, которое с учётом блочного структурирования платёжной матрицы можно представить следующим образом

$$n = \min_y \max_{i=1, \dots, m} [a_i] \cdot [y].$$

Рассмотрим выражение $\max_y \min_{i=1, \dots, m} [a_i] \cdot [y].$

Для произвольной смешанной стратегии игрока P2 найдём скалярные произведения

$$[a_1] \cdot [y], \quad [a_2] \cdot [y], \quad \dots, \quad [a_i] \cdot [y], \quad \dots, \quad [a_m] \cdot [y].$$

На следующем этапе поиска оптимального решения найдём функцию максимумов полученных скалярных произведений

$$x(y) = \max_{i=1, \dots, m} [a_i] \cdot [y].$$

Далее найдём минимум этой функции в n -мерном пространстве, который и будет равен цене данной игры

$$v = \min_y x(y).$$

Как видно, и при таком подходе выполненная промежуточная скаляризация позволяет снизить трудоёмкость численной оптимизации матричных игр.

7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

7.1. Решение игры 7x6 в чистых стратегиях

Рассматривая пример для приведенной ниже платёжной матрицы, начнём с определения нижней и верхней цены игры.

Платёжная матрица [A]		Стратегии игрока P2						$\hat{a} = \max_{i=1,\dots,7} \min_{j=1,\dots,6} \{a_{ij}\}$	
		a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6		
		0	5	10	15	20	25		
Стратегии игрока P1	a_1	0	43,7 5	25,0 0	13,7 5	10,0 0	13,7 5	25,0 0	→ 10,0 0
	a_2	5	61,2 5	42,5 0	31,2 5	27,5 0	31,2 5	42,5 0	→ 27,5 0
	a_3	1	73,7 5	55,0 0	43,7 5	40,0 0	43,7 5	55,0 0	→ 40,0 0
	a_4	1	81,2 5	62,5 0	51,2 5	47,5 0	51,2 5	62,5 0	→ 47,5 0
	a_5	2	83,7 5	65,0 0	53,7 5	50,0 0	53,7 5	65,0 0	→ 50,0 0
	a_6	2	81,2 5	62,5 0	51,2 5	47,5 0	51,2 5	62,5 0	→ 47,5 0
	a_7	3	73,7 5	55,0 0	43,7 5	40,0 0	43,7 5	55,0 0	→ 40,0 0
			—	—	—	—	—		
			83,7 5	65,0 0	53,7 5	50,0 0	53,7 5	65,0 0	

Решение данной игры, а именно выбор оптимальных стратегий выглядит следующим образом

$$a_{\text{opt}}(P1) = a_5 = 20; \quad a_{\text{opt}}(P2) = a^4 = 15.$$

Следовательно, в данной игре игрок P1, выбрав 5-ю стратегию, обеспечивает себе гарантированный выигрыш не ниже чем 50 усл. единиц, а игрок P2, придерживаясь 4-й стратегии, имеет минимальный проигрыш не превосходящий 50 усл. единиц.

Выбор других стратегий участникам данной игры невыгоден.

7.2. Решение игры 2x2 в смешанных стратегиях

Рассмотрим пример матричной игры размерностью 2x2 с приведенной ниже платёжной матрицей.

Следует отметить, что игры размерностью 2x2 имеют скорее учебный, чем практический интерес, однако они допускают наглядную геометрическую иллюстрацию полуаналитического решения, в то время как игры более высокой размерности не имеют графического отображения в декартовой системе координат и решаются численно.

Тем не менее, основные особенности решения матричных игр в смешанных стратегиях весьма наглядно демонстрируются при решении игр 2x2, а переход к более высокой размерности платёжных матриц, решение которых отображается в гиперпространстве соответствующей размерности, вызывает чисто технические трудности, за исключением игр $2 \times n$ и $m \times 2$, которые также допускают графическую интерпретацию решения.

Платёжная матрица [A]		Стратегии игрока P2				
		a ¹	a ²		min	max min
Стратегии игрока P1	a ₁	5	3	→	3	3
	a ₂	2	6	→	2	
		— —				
		max	5	6		
		min max	5			

Анализ приведенной платёжной матрицы приводит к получению следующих результатов:

$$\hat{a} = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} \{a_{ij}\} = 3 \quad - \text{нижняя цена игры;}$$

$$\bar{a} = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} \{a_{ij}\} = 5 \quad - \text{верхняя цена игры.}$$

Поскольку видно, что $\hat{a} < \bar{a}$, то из этого следует, что данная игра не имеет решения в чистых стратегиях. Тем не менее, по теореме Дж. фон Неймана решение матричной игры есть всегда, но в данном случае его следует искать в смешенных, а не в чистых стратегиях.

Воспользуемся утверждением №6 (скаляризация решения) из предыдущего раздела и применительно к нашему примеру запишем

$$P1: \quad n = \max_x \min_{j=1,2} [x] \cdot [a^j]; \quad (7.1)$$

$$P2: \quad n = \min_y \max_{i=1,2} [a_i] \cdot [y]. \quad (7.2)$$

Воспользуемся первым соотношением, начав с раскрытия скалярных произведений, каждое из которых в данном случае представляет уравнение прямой линии

$$l_1(x) = [x] \times [a^1] = [x_1, x_2] \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2; \quad (7.3)$$

$$l_2(x) = [x] \times [a^2] = [x_1, x_2] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2. \quad (7.4)$$

Учитывая, что координаты вектора (x) представляют собой вероятности выбора соответствующих стратегий и в сумме равны единице, выразим вторую координату через первую

$$x_2 = 1 - x_1. \quad (7.5)$$

Подставив полученное выражение для координаты x_2 в соотношения (7.3, 7.4), получим

$$l_1(x_1) = 5 \cdot x_1 + 2 \cdot (1 - x_1) = 3 \cdot x_1 + 2; \quad (7.6)$$

$$l_2(x_1) = 3 \cdot x_1 + 6 \cdot (1 - x_1) = -3 \cdot x_1 + 6. \quad (7.7)$$

Для графического отображения полученных результатов найдём крайние значения скалярных функций, подставив соответствующие значения аргументов, $x_1 = 0$; $x_1 = 1$

Линии	Аргументы	
	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
$l_1(x_1)$	2	5
$l_2(x_1)$	6	3

Имея координаты крайних точек, построим линии $l_1(x_1)$, $l_2(x_1)$, как показано ниже на рис. 7.1.

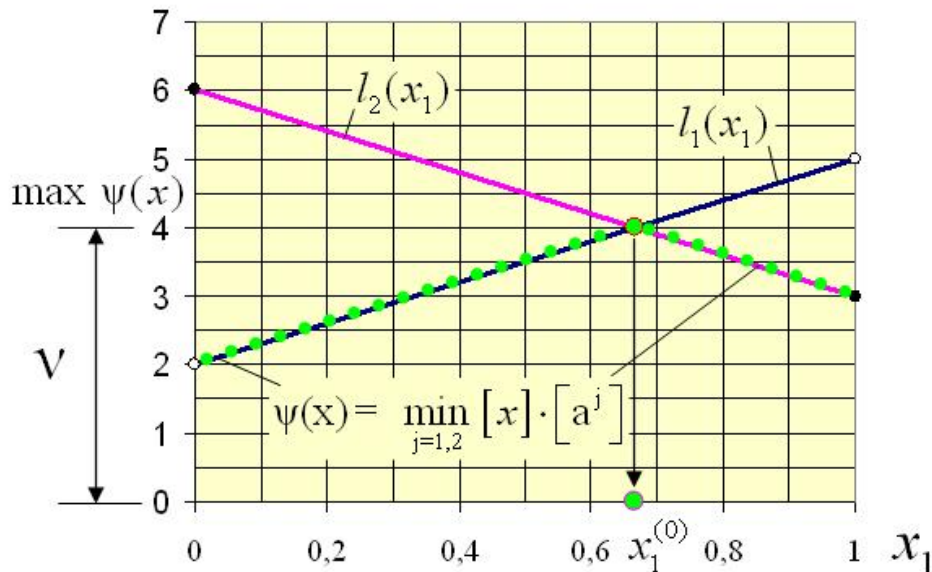


Рис. 7.1 – Определение оптимальной стратегии игрока P1

Далее займёмся построением линии $\psi(x_1) = \min_{j=1,2} [x] \times [a^j]$.

Мысленно пересекаем вертикалями построенные линии $l_1(x_1)$, $l_2(x_1)$, в каждом из этих мысленных сечений получаем две точки и выбираем ту из них, вертикальная координата которой минимальна. Совокупность найденных минимумов представляет собой точки искомой линии $\psi(x_1)$, как это показано на рис.7.1.

После этого найдём цену игры при оптимальных смешанных стратегиях – это будет максимум на линии $\psi(x_1)$ (если максимума внутри нет, то тогда выбираем наибольшее значение при крайних координатах).

Таким образом, реализована процедура определения цены при выборе оптимальных смешанных стратегий игрока P1

$$n = \max_x \min_{j=1,2} [x] \cdot [a^j] = \max_{x_1} \psi(x_1) = 4. \quad (7.8)$$

Приравнявая уравнения линий $l_1(x_1)$, $l_2(x_1)$, найдём координату точки их пересечения, которая представляет собой оптимальную вероятность выбора первой стратегии

$$3 \cdot x_1^{(0)} + 2 = -3 \cdot x_1^{(0)} + 6,$$

откуда получаем $x_1^{(0)} = \frac{2}{3} \approx 0,66(6)$ и $x_2^{(0)} = 1 - x_1^{(0)} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0,33(3)$.

Убеждаемся, что полученный результат соответствует выполненному на рис. 7.1 графическому построению.

На всякий случай выполним проверку, подставив значения координат в уравнение одной из линий, например $l_1(x_1)$

$$l_1(x_1^{(0)}) = l_1\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \times \frac{2}{3} + 2 = \frac{6}{3} + \frac{6}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

Очевидно, что нами получена цена оптимальной игры, а это и подтверждает правильность выполненного решения. Подстановка найденного решения в уравнение линии $l_2(x_1)$ приводит к аналогичному результату

$$l_2(x_1^{(0)}) = l_2\left(\frac{2}{3}\right) = -3 \times \frac{2}{3} + 6 = -\frac{6}{3} + \frac{18}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

В принципе можно организовать решение по-другому, имея цену игры, полученную как результат процедуры (7.8), воспользоваться полученным значением цены, подставив в уравнение одной из линий $l_1(x_1)$ или $l_2(x_1)$, например

$$n = l_1(x_1^{(0)}) \Rightarrow 4 = 3 \times x_1^{(0)} + 2 \Rightarrow x_1^{(0)} = \frac{2}{3}.$$

Окончательно полученное решение представим в виде

$$[x^{(0)}] = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}] = [0,66(6); 0,33(3)].$$

Займёмся поиском оптимальных стратегий игрока P2, понимая, что его роль принципиально отличается от роли первого игрока, он должен бороться за минимизацию своего проигрыша.

Воспользуемся соотношением (7.2)

$$n = \min_y \max_{i=1,2} [a_i] \cdot [y],$$

начав с раскрытия скалярных произведений, каждое из которых в данном случае представляет уравнение прямой линии

$$g_1(y) = [a_1] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [5; 3] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 5 \cdot y_1 + 3 \cdot y_2 ; \quad (7.9)$$

$$g_2(y) = [a_2] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [2; 6] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 2 \cdot y_1 + 6 \cdot y_2. \quad (7.10)$$

Подставив выражение для координаты $y_2 = 1 - y_1$ в соотношения (7.9, 7.10), получим

$$g_1(y_1) = 5 \cdot y_1 + 3 \cdot (1 - y_1) = 2 \cdot y_1 + 3 ; \quad (7.11)$$

$$g_2(y_1) = 2 \cdot y_1 + 6 \cdot (1 - y_1) = -4 \cdot y_1 + 6. \quad (7.12)$$

Найдём крайние значения скалярных функций, подставив соответствующие значения аргументов, $y_1 = 0$; $y_1 = 1$

Линии	Аргументы	
	$y_1 = 0$	$y_1 = 1$
$g_1(y_1)$	3	5
$g_2(y_1)$	6	2

По крайним точкам, построим линии $g_1(y_1)$, $g_2(y_1)$, как показано ниже на рис. 7.2.

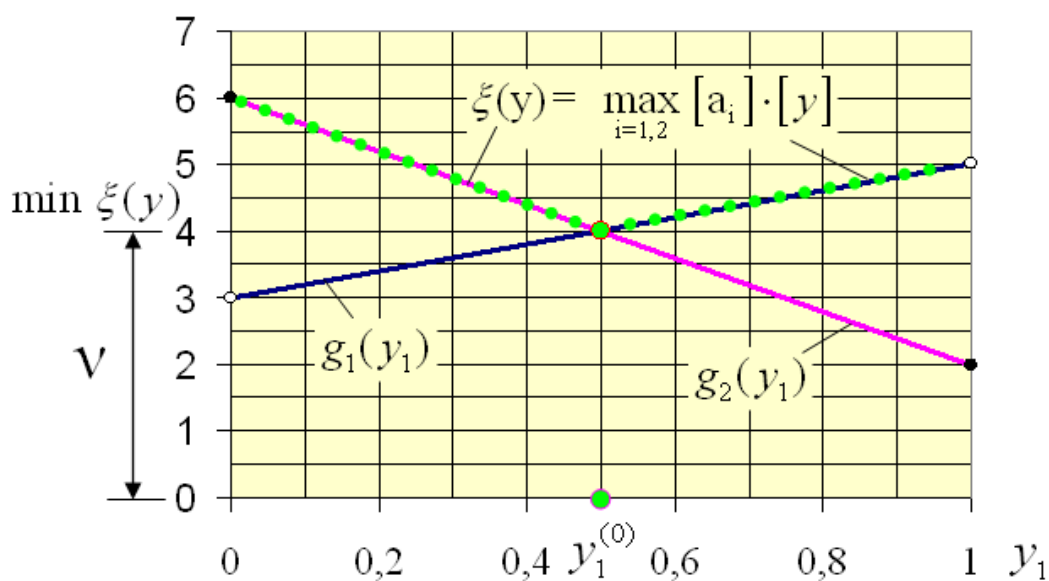


Рис. 7.2 – Определение оптимальной стратегии игрока P2

Займёмся построением линии $x(y_1) = \max_{i=1,2} [a_i] \times [y]$.

В каждом из произвольных вертикальных сечений мысленно находим точки пересечения с линиями $g_1(y_1)$, $g_2(y_1)$. Совокупность найденных максимумов представляет собой точки искомой линии $x(y_1)$, как это показано на рис. 7.2.

После этого найдём цену игры при оптимальных смешанных стратегиях игрока P2 – это будет минимум на линии $x(y_1)$.

Таким образом, реализована процедура определения цены при выборе оптимальных смешанных стратегий игрока P2

$$n = \min_y \max_{i=1,2} [a_i] \cdot [y]. \quad (7.13)$$

Приравнявая уравнения линий $g_1(y_1)$, $g_2(y_1)$, найдём координату точки их пересечения, которая представляет собой оптимальную вероятность выбора первой стратегии

$$2 \cdot y_1^{(0)} + 3 = -4 \cdot y_1^{(0)} + 6,$$

откуда получаем $y_1^{(0)} = \frac{1}{2} = 0,5$ и $y_2^{(0)} = 1 - y_1^{(0)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Таким образом, игрок P2 должен случайным образом смешивать свои стратегии в равных частях, что гарантирует ему проигрыш не более 4-х усл. единиц.

Выполним проверку, подставив значения координат в уравнение одной из линий, например $g_1(y_1)$

$$g_1(y_1^{(0)}) = g_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Нами получена цена оптимальной игры, что подтверждает правильность выполненного решения. Подстановка найденного решения в уравнение линии $g_2(y_1)$ приводит к такому же результату

$$g_2(y_1^{(0)}) = g_2\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \times \frac{1}{2} + 6 = -2 + 6 = 4.$$

То же решение можно организовать по-другому, но естественно, что результат будет тем же самым, аналогичная процедура обсуждалась при рассмотрении поиска оптимальных стратегий для игрока P1.

Окончательно решение для игрока P2 представим в виде

$$[y^{(0)}] = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

7.3. Доминирование в играх 2x2

Решение матричных игр с нулевой суммой и размерностью 2x2 в смешенных стратегиях позволяет наглядно проиллюстрировать понятие доминирования столбцов и строк, которое ранее было введено достаточно формальным путём.

Обратимся к примеру с платёжной матрицей приведенной ниже

Платёжная матрица [A]		Стратегии игрока P2				
		a ¹	a ²		min	max min
Стратегии игрока P1	a ₁	3	4	→	3	5
	a ₂	5	6	→	5	

max	5	6
min max	5	

$$\hat{a} = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} \{a_{ij}\} = 5 \quad - \text{нижняя цена игры;}$$

$$\bar{a} = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} \{a_{ij}\} = 5 \quad - \text{верхняя цена игры.}$$

Несмотря на тот очевидный факт, что данном случае нижняя цена равна верхней цене и, следовательно, данная игра имеет решение в чистых стратегиях, воспроизведём процедуру поиска оптимальных смешанных стратегий.

Опуская подробности, рассмотрим результаты скаляризации

$$n = \max_x \min_{j=1,2} [x] \cdot [a^j] = \max_{x_1} \psi(x_1) = 5$$

с построением линий $l_1(x) = [x] \times [a^1]$ и $l_2(x) = [x] \times [a^2]$ представив их графически на рисунке 7.3.

Из выполненного построения очевидно, что решение может находиться только на линии $l_1(x) = [x] \times [a^1]$, при построении которой используется столбец $[a^1]$, поэтому данный столбец представляет собой dominant-столбец.

Как мы отмечали ранее, доминируемый столбец $[a^2]$ может быть изъят из рассмотрения – теперь это наглядно иллюстрируется рисунком 7.3.

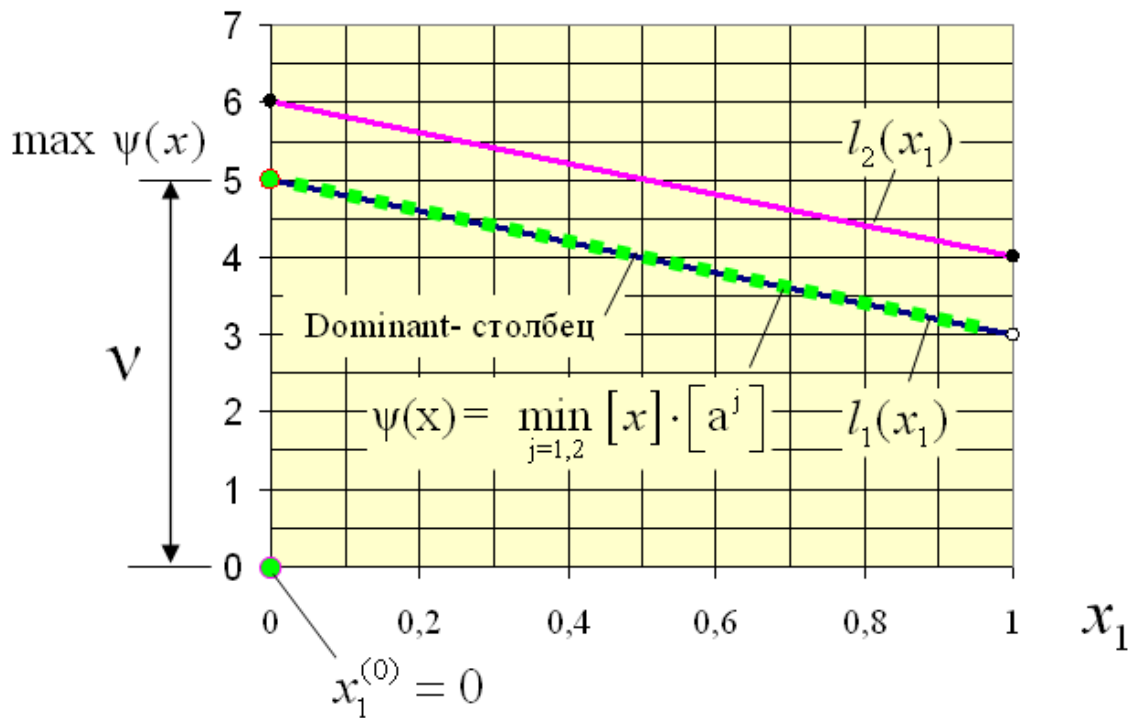


Рис. 7.3 – Формирование dominant-столбца

Далее рассмотрим скаляризацию вида $n = \min_y \max_{i=1,2} [a_i] \cdot [y] = 5$.

Построение линий $g_1(y_1) = [a_1] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix}$ и $g_2(y_1) = [a_2] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix}$,

приведенное на рисунке 7.4 показывает, что строка $[a_2]$ является доминант-строкой.

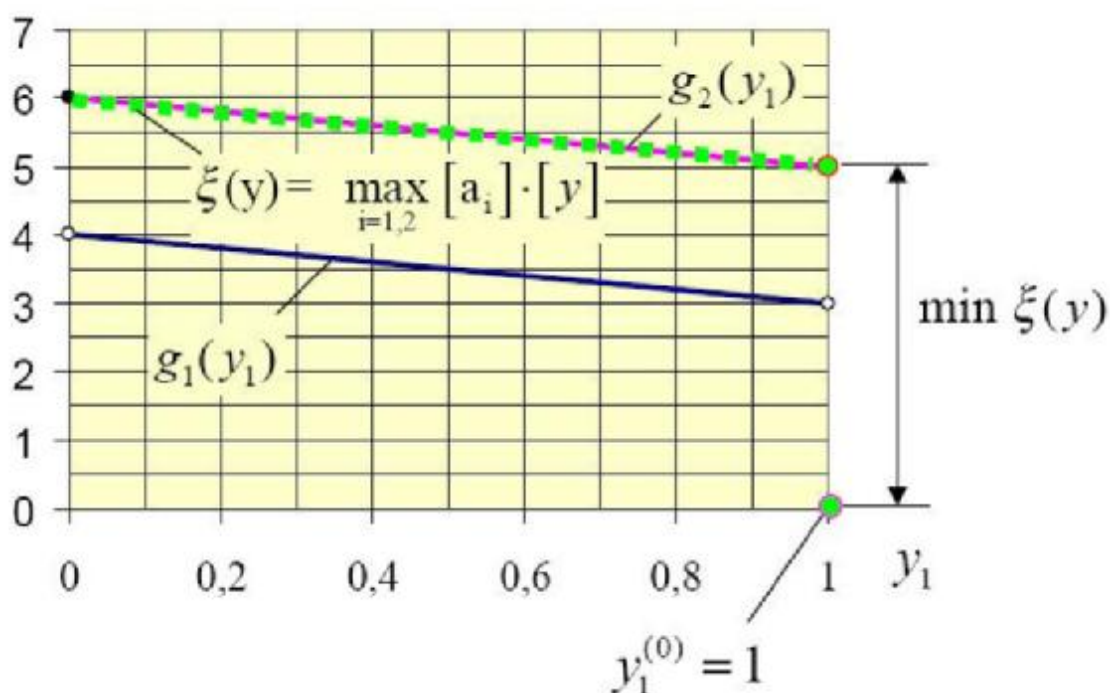


Рис. 7.4 – Формирование dominant-строки

Обобщая полученные результаты, можно утверждать, что условием доминирования столбцов и строк в играх 2x2 является отсутствие точек пересечения в соответствующих плоскостях линий промежуточной скаляризации.

Вернёмся к данным ранее определениям:

"Если в некотором столбце платёжной матрицы все элементы **меньше или равны** соответствующим элементам другого столбца, то первый столбец доминирует второй и называется доминант-столбцом".

Эта ситуация отражена графически на рисунке 7.3, где видно, что доминант-столбец $[a^1]$, т.е. первая стратегия игрока P2 всегда в данной игре доминирует вторую стратегию $[a^2]$.

"Если в некоторой строке платёжной матрицы все элементы **больше или равны** соответствующим элементам другой строки, то первая строка доминирует вторую и называется доминант-строкой".

Почему именно так формулируется условие доминирования строк, поясняет графическая иллюстрация на рисунке 7.4, из которой видно, что строка $[a_2]$ доминирует строку $[a_1]$.

8. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ $2 \times n$ И $m \times 2$

Матричные игры $2 \times n$ и $m \times 2$ так же как и игры 2×2 имеют наглядную графическую иллюстрацию, в то время как для игр более высокой размерности графической иллюстрации нет.

8.1. Решение игр $2 \times n$

Рассмотрим решение матричных игр $2 \times n$, платёжная матрица которых выглядит следующим образом

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & \dots & a_{2,n} \end{bmatrix}.$$

Теоретические аспекты решения данной задачи во многом совпадают с теорией решения игр 2×2 , поэтому обратимся к решению конкретного примера с приведенной ниже платёжной матрицей размерностью 2×4

Платёжная матрица [A]		Стратегии игрока P2			
		a^1	a^2	a^3	a^4
Стратегии игрока P1	a_1	2	-3	4	-1
	a_2	-4	2	1	-5

→

min
-3
-5

→

max min

-3

max

2	2	4	-1
---	---	---	----

→

min max

-1

$$\hat{a} = \max_{i=1,2} \min_{j=1,4} \{a_{ij}\} = -3 \quad \text{- нижняя цена игры;}$$

$$\bar{a} = \min_{j=1,4} \max_{i=1,2} \{a_{ij}\} = -1 \quad \text{- верхняя цена игры.}$$

Как видно из проведенного анализа нижняя цена не равна верхней, поэтому нет решения в чистых стратегиях, но по теореме Дж. фон Неймана есть оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Рассмотрим смешанные действия первого игрока при фиксированных стратегиях второго игрока, что по существу является скаляризацией промежуточного этапа поиска решения данной задачи.

Вычислим частные платёжные функции вида, частные в том смысле, что игрок P1 пользуется смесью стратегий $[x_1; x_2]$, а игрок P2 применяет чистую стратегию $[a^j]$

$$l_j = [x] \times [a^j] \quad \text{при } j = 1, 2, 3, 4, \quad \text{где } [x] = [x_1; x_2] = [x_1; 1 - x_1].$$

В рассматриваемом примере при заданных исходных данных получаем

$$l_1(x_1) = [x_1; 1 - x_1] \times \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = 2 \cdot x_1 - 4 + 4 \cdot x_1 = 6 \cdot x_1 - 4;$$

$$l_2(x_1) = [x_1; 1 - x_1] \times \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \cdot x_1 + 2 - 2 \cdot x_1 = -5 \cdot x_1 + 2;$$

$$l_3(x_1) = [x_1; 1 - x_1] \times \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot x_1 + 1 - x_1 = 3 \cdot x_1 + 1;$$

$$l_4(x_1) = [x_1; 1 - x_1] \times \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} = -x_1 - 5 + 5 \cdot x_1 = 4 \cdot x_1 - 5.$$

Графическое изображение полученных частных платёжных функций представлено на рис. 1.

Следующим этапом решения является построение кусочно-линейной функции минимального выигрыша первого игрока

$$\psi(x_1) = \min\{l_1(x_1); l_2(x_1); l_3(x_1); l_4(x_1)\}.$$

Для построения этой функции следует воспользоваться графиком на рис. 8.1 и мысленно провести на нём произвольные вертикальные линии, нижняя из полученных точек пересечения с частными платёжными функциями будет принадлежать искомой линии $\psi(x_1)$, как это показано на том же рисунке.

Наибольшее значение функции $\psi(x_1)$ даёт цену игры при оптимальном решении

$$v = \max \psi(x_1).$$

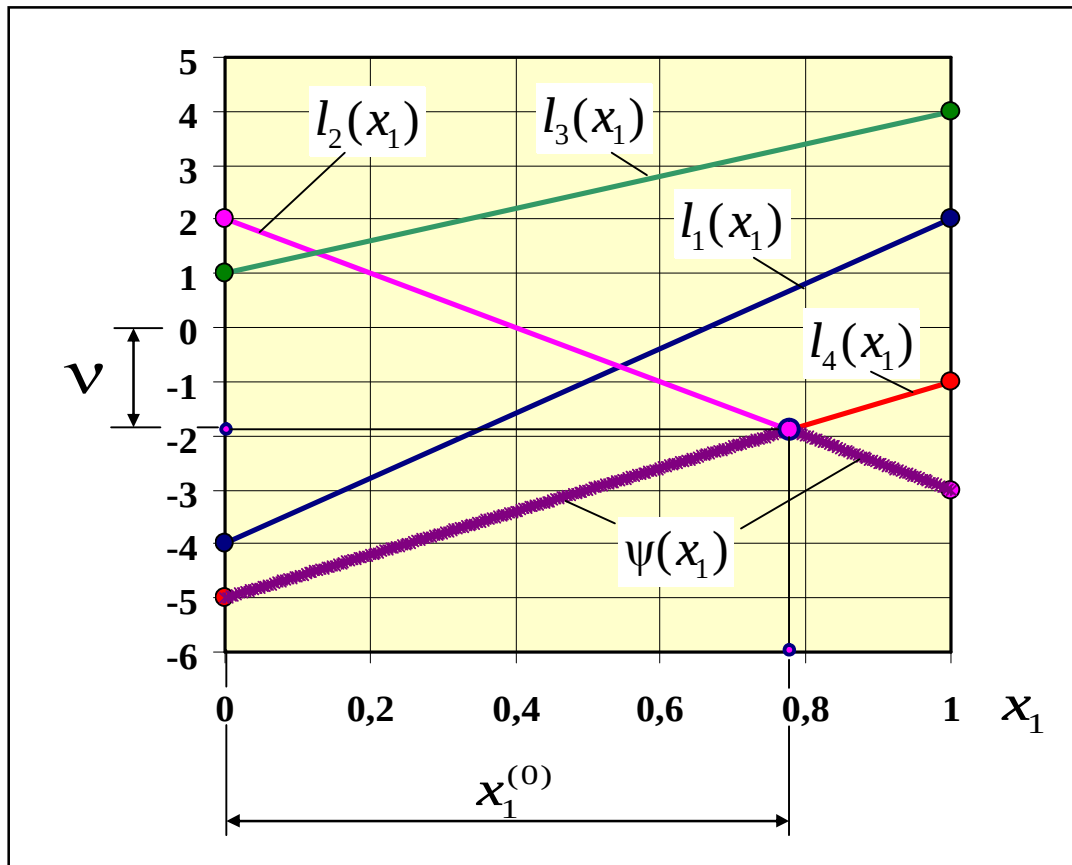


Рис. 8.1 – Оптимизация смешанных стратегий игрока P1

Что бы найти оптимальную смесь стратегий игрока P1 необходимо обратиться к графическому представлению частных платёжных функций и найти те из них, пересечение которых даёт цену оптимальной игры $v = \max \psi(x_1)$. Из рис. 8.1 видно, что линиями, приводящими к оптимальным стратегиям являются линии графиков частных платёжных функций $l_2(x_1)$ и $l_4(x_1)$. Приравняв уравнения этих линий, найдём оптимальное относительное содержание первой стратегии игрока P1

$$l_2(x_1^{(0)}) = l_4(x_1^{(0)}).$$

Используя найденные ранее зависимости для платёжных функций, запишем следующее

$$-5 \cdot x_1^{(0)} + 2 = 4 \cdot x_1^{(0)} - 5.$$

Решая полученное уравнение, найдём оптимальное содержание первой стратегии в смеси стратегий первого игрока

$$x_1^{(0)} = \frac{7}{9} = 0,77(7).$$

Как следствие этого решения имеем оптимальное относительное содержание второй стратегии игрока P1

$$x_2^{(0)} = 1 - x_1^{(0)} = \frac{2}{9} = 0,22(2).$$

Таким образом матрица выбора оптимальных стратегий игроком P1 выглядит как

$$[x^{(0)}] = [0,77(7); 0,22(2)].$$

Цену оптимальной игры можно найти, подставив координату $x_1^{(0)}$ в уравнение одной из платёжных функций, соответствующих найденному оптимуму, например

$$n = l_4(x_1^{(0)}) = 4 \times \frac{7}{9} - 5 = -\frac{17}{9} = -1,88(8).$$

Следует обратить внимание на особенность полученного решения, которая заключается в отрицательном знаке цены оптимальной игры. Это означает, что игроки по сравнению с принятым распределением как бы поменялись ролями: P1 проигрывает, а P2 выигрывает.

Перейдём к выбору оптимальных смешанных стратегий игрока P2.

Воспользуемся тем обстоятельством, что оптимальное решение первого игрока получено ранее при пересечении графиков частных платёжных функций $l_2(x_1)$ и $l_4(x_1)$. Оказалось, что платёжные функции $l_1(x_1)$ и $l_3(x_1)$ не задействованы при нахождении оптимального решения данной задачи. Поэтому вместо исходной платёжной матрицы $[A]$ можно ввести в рассмотрение эквивалентную платёжную матрицу $[A^*]$, выполнив изъятие "ненужных" стратегий или столбцов игрока P2

$$[A] = \begin{bmatrix} [a^1]; [a^2]; [a^3]; [a^4] \end{bmatrix} \Rightarrow [A^*] = \begin{bmatrix} [a^2]; [a^4] \end{bmatrix}.$$

Представим эквивалентную матрицу $[A^*]$ построчно $[A^*] = \begin{bmatrix} [a_1^*] \\ [a_2^*] \end{bmatrix}.$

С учётом конкретных данных имеем

$$[A^*] = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} [a_1^*] = [-3; -1] \\ [a_2^*] = [2; -5] \end{matrix}.$$

Дальнейшее решение с использованием эквивалентной матрицы $[A^*]$

можно представить как

$$v = \max_x \min_y [x_1; x_2] \times [A^*] \times \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix},$$

где в нашем конкретном случае

$$y_1^* = y_2; \quad y_2^* = y_4 \quad \text{и} \quad \text{поскольку} \quad y_2 = 1 - y_1, \quad \text{то} \quad y_2^* = 1 - y_1^*.$$

Перейдём к скаляризации промежуточного этапа решения

$$g_1^*(y_1^*) = [a_1^*] \times \begin{bmatrix} y_1^* \\ 1 - y_1^* \end{bmatrix}; \quad g_2^*(y_1^*) = [a_2^*] \times \begin{bmatrix} y_1^* \\ 1 - y_1^* \end{bmatrix}.$$

Вернувшись к исходной нумерации стратегий, получим частные платёжные функции игрока P2

$$g_2(y_2) = [a_1^*] \times \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_2 \end{bmatrix}; \quad g_4(y_4) = [a_2^*] \times \begin{bmatrix} y_4 \\ 1 - y_4 \end{bmatrix}.$$

Подставляя конкретные данные, получим

$$g_2(y_2) = [-3; -1] \times \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_2 \end{bmatrix} = [-2 \cdot y_2 - 1];$$

$$g_4(y_2) = [2; -5] \times \begin{bmatrix} y_2 \\ 1 - y_2 \end{bmatrix} = [7 \cdot y_2 - 5].$$

Построив графики платёжных функций $g_2(y_2)$, $g_4(y_4)$, как это показано на рис. 8.2, перейдём к построению кусочно-линейной зависимости для максимальных значений в вертикальных сечениях

$$x(y_2) = \max \{g_2(y_2); g_4(y_2)\}.$$

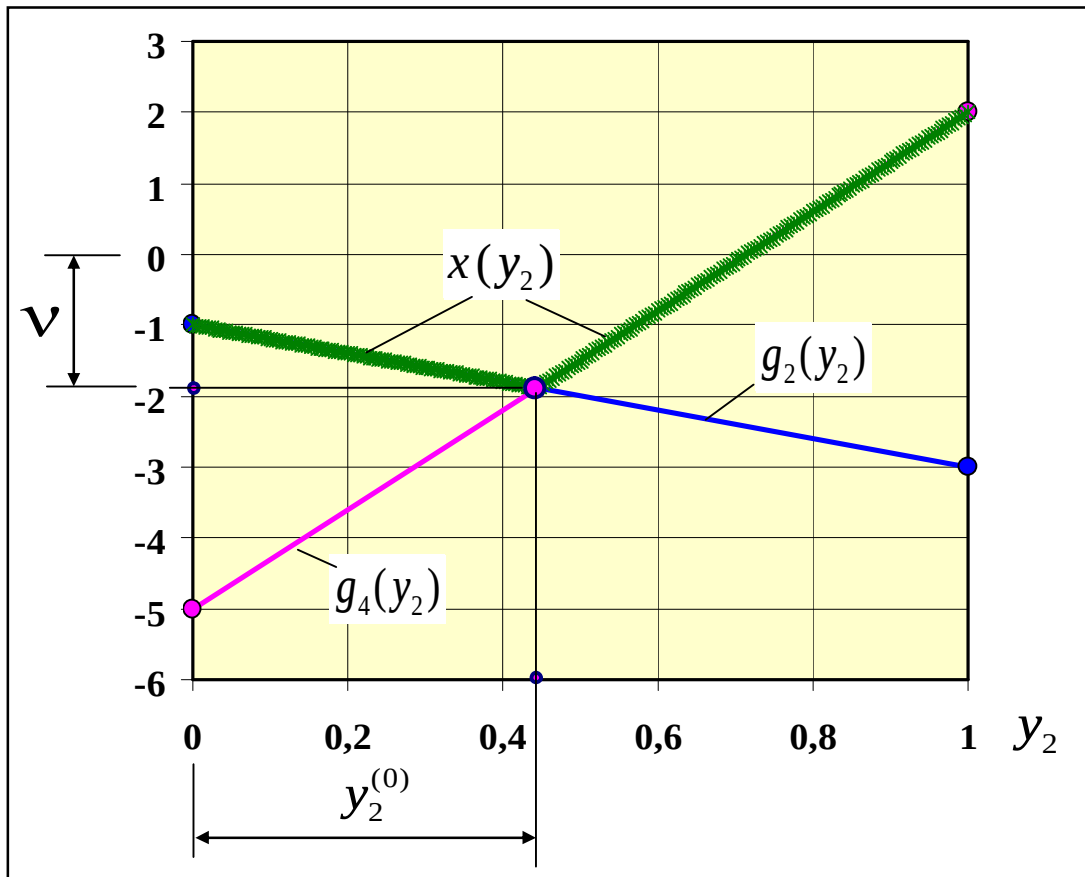


Рис. 8.2 – Оптимизация смешанных стратегий игрока P2

Приравняв уравнения линий $g_2(y_2)$ и $g_4(y_4)$, найдём оптимальное относительное содержание второй стратегии игрока P2

$$g_2(y_2^{(0)}) = g_4(y_2^{(0)}).$$

Используя найденные ранее зависимости для платёжных функций, запишем следующее

$$-2 \cdot y_2^{(0)} - 1 = 7 \cdot y_2^{(0)} - 5.$$

Отсюда найдём оптимальное содержание второй стратегии в смеси стратегий второго игрока

$$y_2^{(0)} = \frac{4}{9} = 0,44(4).$$

Очевидно, что оптимальное содержание четвёртой стратегии в смеси стратегий игрока P2 определяется как

$$y_4^{(0)} = 1 - y_2^{(0)} = \frac{5}{9} = 0,55(5).$$

Учитывая наличие "пустых" стратегий игрока P2, матрицу-столбец выбора оптимальных смешанных стратегий для второго игрока запишем в виде

$$[y^{(0)}] = [0; 0,44(4); 0; 0,55(5)]^T.$$

Примечание. Зная цену оптимальной игры из решения для первого игрока $v = -\frac{17}{9}$, можно найти $y_2^{(0)}$ из уравнения одной из частных платёжных функций, например, как

$$n = g_2(y_2^{(0)}) \Rightarrow -\frac{17}{9} = -2 \cdot y_2^{(0)} - 1 \Rightarrow y_2^{(0)} = \frac{4}{9} = 0,44(4).$$

Этот вариант решения рекомендуется использовать в качестве проверки.

Дополнительный анализ игры в чистых стратегиях

Если игра производится только один раз, то она реализуется в так называемых чистых стратегиях, поскольку каждый из игроков может выбрать одну из доступных ему стратегий.

При многократном повторении игры игроки могут придерживаться однажды выбранных стратегий, и это им выгодно, если нижняя цена игры совпадает с верхней ценой, что собственно и является решением в чистых стратегиях, отступать от этих стратегий невыгодно ни одному из игроков.

Если же нижняя цена игры ниже верхней, то оптимальный результат достигается только при достаточно большом повторении игры со случайным выбором стратегий при их перемешивании в заданной пропорции, это и есть решение в смешанных стратегиях.

В рассматриваемом примере с заданной платёжной матрицей игры 2×4 оптимальное решение в смешанных стратегиях реализуется при следующих частотах (вероятностях) выбора стратегий:

$$\text{Игрок P1: } [x^{(0)}] = [0,77(7); 0,22(2)].$$

$$\text{Игрок P2: } [y^{(0)}] = [0; 0,44(4); 0; 0,55(5)]^T.$$

При достаточном повторении игры с заданным оптимальным перемешиванием средний выигрыш игрока P1 составит $n_{\text{opt P1}} = -1,88(8)$, т.е. первый игрок проигрывает и его цель - минимизировать снизить возможный средний проигрыш.

Очевидно, что игрок P2 в данной игре при оптимальном смешивании стратегий добивается максимизации своего среднего выигрыша, который составляет $n_{\text{opt P2}} = -n_{\text{opt P1}} = 1,88(8)$.

Сопоставим результаты оптимизации рассматриваемой игры в смешанных стратегиях с теми результатами, которые можно получить в чистых стратегиях.

1. Максимально возможный результат игрока P1 при наиболее благоприятном поведении игрока P2, как видно из представленной платёжной матрицы формируется следующим образом

$$[x] = [1; 0], [y] = [0; 0; 1; 0]^T \Rightarrow n_{\max P1} = a_{1,3} = 4.$$

2. Наихудший результат P1

$$[x] = [0; 1], [y] = [0; 0; 0; 1]^T \Rightarrow n_{\min P1} = a_{2,4} = -5.$$

3. Максимально возможный результат P2

$$[x] = [0; 1], [y] = [0; 0; 0; 1]^T \Rightarrow n_{\max P2} = -a_{2,4} = 5.$$

4. Наихудший из возможных результатов игрока P2

$$[x] = [1; 0], [y] = [0; 0; 1; 0]^T \Rightarrow n_{\min P2} = -a_{1,3} = -4.$$

Как видно из приведенных результатов для одноходовой игры, переход к оптимальному смешиванию стратегий при её многократном повторении позволяет первому игроку значительно снизить проигрыш по сравнению с максимальным возможным для него проигрышем, а второй игрок гарантирует себе выигрыш.

8.2. Игры $m \times 2$

В матричных играх $m \times 2$, платёжная матрица имеет следующий вид

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \end{bmatrix}.$$

Решить такую задачу можно чисто технически, сведя её к уже рассмотренной задаче $2 \times n$, выполнив транспонирование платёжной матрицы, положив $n = m$ и перенумеровав игроков.

Рассмотрим прямо решение без транспонирования, основываясь на рассмотренной методике решения задачи $2 \times n$.

Сначала вычисляются частные платёжные функции игрока P2 для смеси стратегий $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ при условии, что игрок P1 применяет чистую стратегию $[a_i]$

$$g_i(y) = [a_i] \times [y] \quad \text{при } i = 1, 2, 3, 4, \quad \text{где } [y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix}.$$

Далее строится кусочно-линейная функция максимального выигрыша второго игрока

$$z(y_1) = \max \{g_1(y_1); g_2(y_1); g_3(y_1); g_4(y_1)\}.$$

Цена игры определяется как $v = \min_{y_1} z(y_1)$.

Далее зная цену игры, получим оптимальное содержание первой стратегии в смеси стратегий второго игрока, подставив значение цены и одно из уравнений тех частных платёжных функций, пересечение которых даёт найденный оптимум.

В качестве примера рассмотрим игру 4×2 с платёжной матрицей, имеющей следующий вид

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 3 & 9 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Пропуская конкретные вычисления, обратимся к графическому представлению выполненного решения, представленному на рис. 8.3, которое привело к следующим результатам

$$n = 5,680; \quad y_1^{(0)} = 0,560; \quad y_2^{(0)} = 0,440 \quad .$$

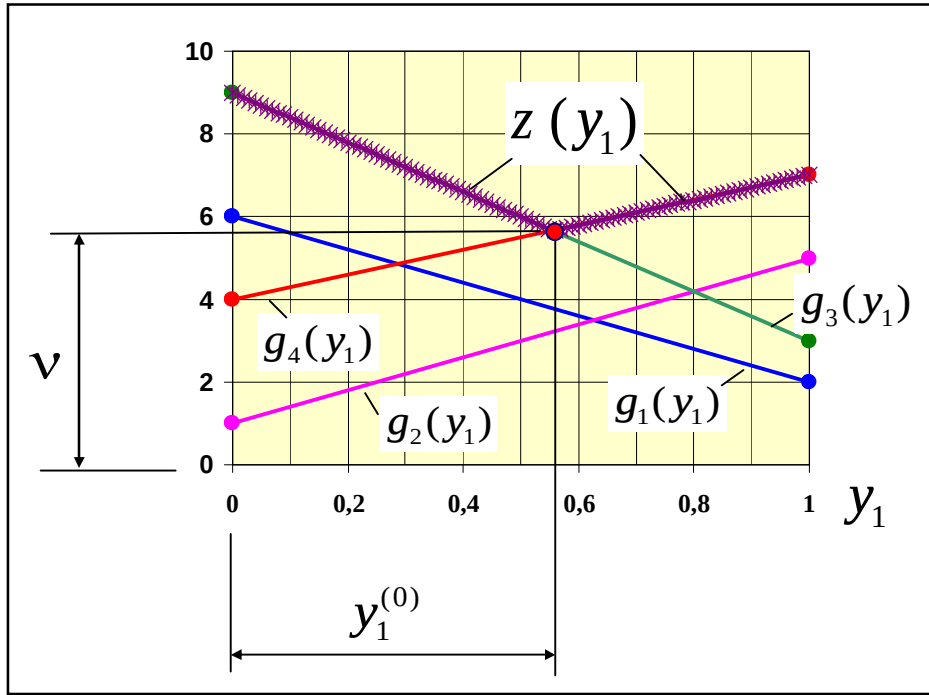


Рис. 8.3 – Оптимизация смешанных стратегий игрока P2

Как видно из рис.8.3, оптимальное решение для игрока P2 получено при пересечении линий $g_3(y_1)$ и $g_4(y_1)$, в то же время стратегии $g_1(y_1)$ и $g_2(y_1)$ не используются при формировании оптимальной смеси стратегий. Поэтому сокращённая эквивалентная платёжная матрица данной игры формируется изъятием стратегий $[a_1]$ и $[a_2]$

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \\ [a_3] \\ [a_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 3 & 9 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow [A^*] = \begin{bmatrix} [a_3] \\ [a_4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Представим вертикальную структуру эквивалентной платёжной матрицы

$$[A^*] = \begin{bmatrix} [a_1^*] & [a_2^*] \end{bmatrix}, \quad [a_1^*] = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad [a_2^*] = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Построим частные платёжные функции игрока P1, изображение которых приведено на рис. 8.4

$$l_1(x_1) = [x] \times [a_1^*] = [x_1; (1-x_1)] \times [a_1^*];$$

$$l_2(x_1) = [x] \times [a_2^*] = [x_1; (1-x_1)] \times [a_2^*].$$

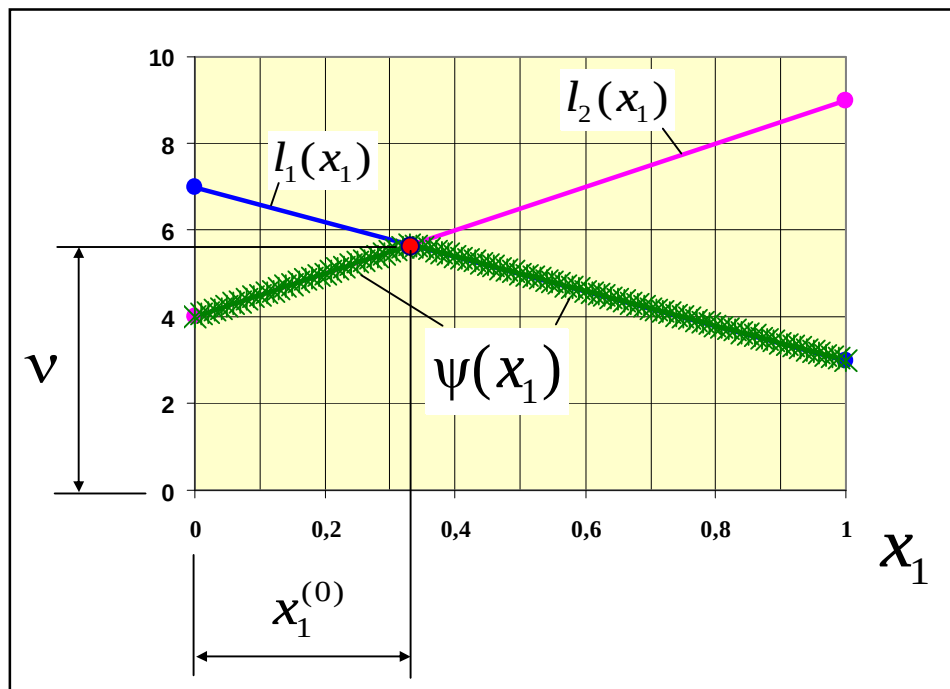


Рис. 8.4 – Оптимизация смешанных стратегий игрока P1

Далее, пользуясь вертикальными сечениями, построим функцию минимальных решений $\psi(x_1) = \min \{ l_1(x_1); l_2(x_1) \}$, максимум которой даёт оптимальную смесь стратегий первого игрока

$$\max_{x_1} \psi(x_1) \Rightarrow x_1^{(0)} = 0,330; \quad x_2^{(0)} = 1 - x_1^{(0)} = 0,670.$$

В итоге окончательное решение по выбору оптимальной смеси стратегий в данной задаче записывается следующим образом

$$P1: \quad [x^{(0)}] = [0; 0; 0,330; 0,670];$$

$$P2: \quad [y^{(0)}] = \begin{bmatrix} 0,560 \\ 0,440 \end{bmatrix}.$$

8.3. Доминирование и переход к чистым стратегиям в играх $2 \times n$ и $m \times 2$

Рассмотрим некоторую игру 2×4 , решение которой иллюстрируется на рис. 8.5, где линии $l_1(x_1), l_2(x_1), \dots, l_4(x_1)$ отражают результат скаляризации, а именно частные платёжные функции

$$l_j(x_1) = [x_1; 1 - x_1] \times [a^j].$$

При этом сама функция $l_j(x_1)$ даёт выигрыш игрока P1 при произвольном выборе смешанных стратегий $[x] = [x_1; 1 - x_1]$, а матрица $[a^j]$ представляет собой столбец платёжной матрицы игры $[A]$, соответствующий фиксированному выбору игроком P2 его j -й стратегии.

Линия минимумов $\psi(x_1) = \min\{l_1(x_1), l_2(x_1), l_3(x_1), l_4(x_1)\}$ в своей наивысшей точке даёт оптимальное решение рассматриваемой задачи

$$x_1^{(0)} = \arg \left[\max_{x_1} \psi(x_1) \right], \quad x_2^{(0)} = 1 - x_1^{(0)}.$$

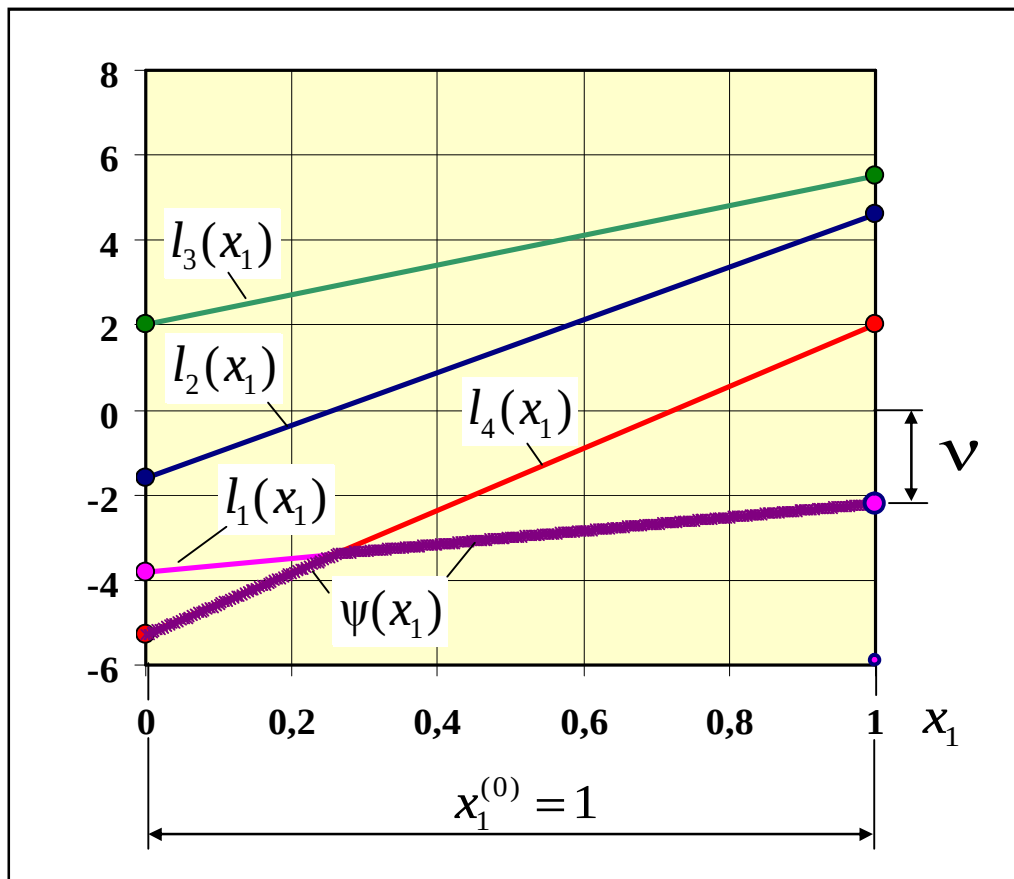


Рис. 8.5 – Оптимизация в чистых стратегиях игрока P1

Как видно из рис.8.5, при используемых исходных данных оптимальное решение в смешанных стратегиях игрока P1 вырождается в решение в чистых стратегиях, которое записывается следующим образом

$$[x^{(0)}] = [0; 1].$$

Исходя из того, что оптимальное для игрока P1 решение находится на линии минимумов $\psi(x_1)$, можно понять, что линия $l_1(x_1)$ и соответствующая ей стратегия $[a^1]$ доминирует как стратегию $[a^2]$ так и стратегию $[a^3]$, кроме того стратегия $[a^2]$ доминирует стратегию $[a^3]$.

Приведенная иллюстрация поясняет сформулированное ранее условие доминирования столбцов платёжной матрицы

Если в некотором столбце платёжной матрицы все элементы **меньше или равны** соответствующим элементам другого столбца, то первый столбец доминирует второй и называется доминант-столбцом

$$\text{Dominant-столбец "j" : } a_{ij} \leq a_{ik}; \quad \forall (i=1, m).$$

Рассмотрим ещё один пример, иллюстрирующий доминирование строк в игре 4×2 . Выполненное решение иллюстрируется на рис. 8.6. В отличие от предыдущего примера здесь решение строится, начиная с построения частных платёжных функций игрока P2, представляющих собой скалярные произведения

$$g_i(y_1) = [a_i] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ 1 - y_1 \end{bmatrix} \quad \text{при } i = 1, 2, 3, 4.$$

Затем строится кусочно-линейная функция максимального выигрыша второго игрока

$$z(y_1) = \max \{g_1(y_1); g_2(y_1); g_3(y_1); g_4(y_1)\}.$$

$$\text{Оптимальное решение находим из условия } y_1^{(0)} = \arg \left[\min_{y_1} z(y_1) \right].$$

Расположение графиков частных платёжных функций приведенных на рис. 8.6 демонстрирует вырождение оптимального решения в смешанных стратегиях к оптимуму в чистых стратегиях

$$[y^{(0)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

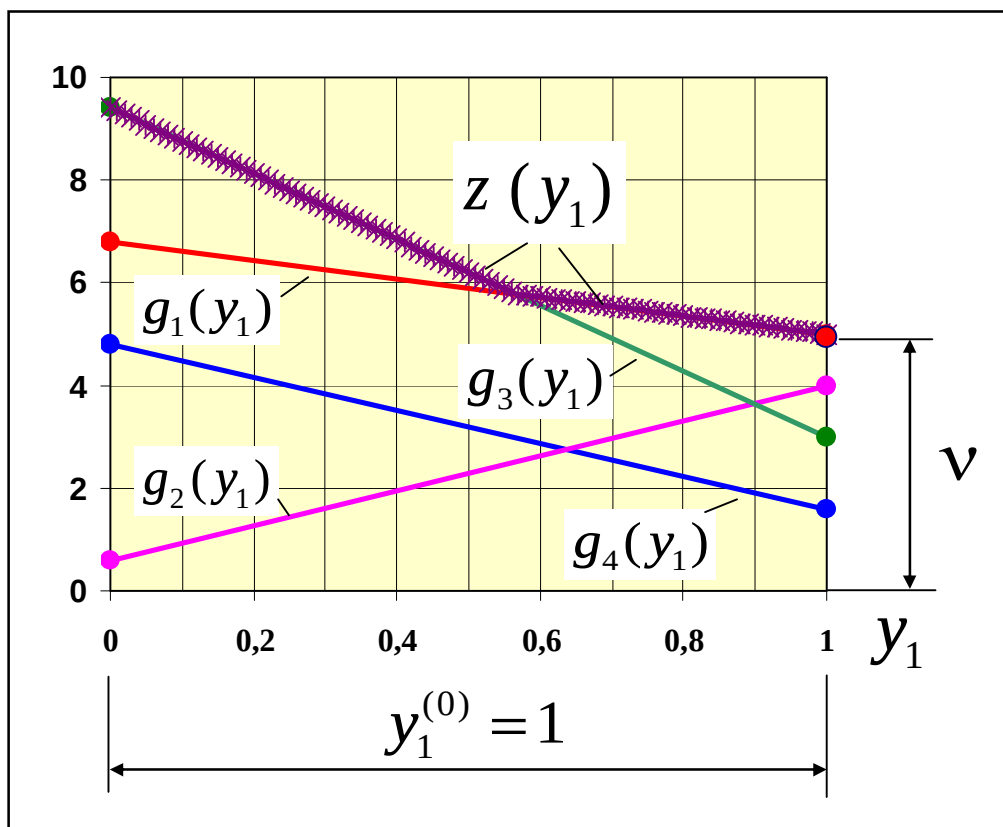


Рис. 8. 6 – Оптимизация в чистых стратегиях игрока P2

Оптимальное решение находится на линии локализованных по вертикали максимумов, поэтому, если две платёжные функции не пересекаются, то оптимальное решение может быть только на той из них, значения которой больше соответствующих значений сравниваемой функции.

Из этих соображений понятно, что, например, линия $g_1(y_1)$ и соответствующая ей стратегия $[a_1]$ первого игрока доминируют стратегию $[a_4]$, т.к. платёжная функция $g_4(y_1)$ располагается ниже.

Приведенное на рис. 8.6 решение матричной игры иллюстрирует сформулированное ранее условие доминирования строк платёжной матрицы

Если в некоторой строке платёжной матрицы все элементы **больше или равны** соответствующим элементам другой строки, то первая строка доминирует вторую и называется доминант-строкой

$$\text{Dominant-строка "i" : } a_{ij} \geq a_{kj}; \quad \forall (j=1, n).$$

9. ОДНОШАГОВЫЕ БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Биматричные игры могут иметь достаточно высокую размерность, которая определяется проведенной дискретизацией игры, но число игроков в этих играх всегда постоянно – два игрока: P1 и P2.

9.1. Равновесие и доминирование в биматричных играх

9.1.1. Равновесие в доминирующих стратегиях обоих игроков

Рассмотрим биматричную одношаговую игру с приведенной ниже платёжной матрицей, представляющей результат конкуренции двух супермаркетов на некотором локальном рынке. Каждый из игроков P1: SM1, P2: SM2 может реализовать одну из двух возможных стратегий:

1-я стратегия – "высокая цена",

2-я стратегия – "низкая цена".

[u(SM1, SM2)]		Стратегии SM2 (P2)	
		Высокая цена	Низкая цена
Стратегии SM1 (P1)	Высокая цена	(100; 100) 1 2	(-30; 150)
	Низкая цена	(150; -40) 3 4	(10; 10)

Каждый из элементов биматрицы представляет собой объединение результатов выбора стратегий обоими игроками и формируется следующим образом

$$u_{SM1, SM2}(i, j) = [u_{SM1}(i, j), u_{SM2}(i, j)], \quad \forall (i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 2}).$$

Рассмотрим графический анализ доминирования в биматричной игре. Допустим, что игрок P1 рассматривает свои возможные результаты, при условии, что игрок P2 выбрал 1-ю стратегию. Отметим вертикальной красной линией то, что в этих ситуациях может получить P1, а над лучшим результатом в первом столбце расположим условный знак  - "чашка". Аналогичным образом проанализируем возможные результаты игрока P1, при выборе вторым игроком второй стратегии и также на лучшем результате в выбранном столбце поставим знак .

Действия второго игрока будем рассматривать при фиксированных стратегиях игрока P1, т.е. в строках, выделив просматриваемые элементы матрицы синей линией.

Лучшие из возможных результатов отметим, расположив над ними условный знак $\wedge$ - "шалашик".

[u(SM1, SM2)]		Стратегии SM2 (P2)	
		Высокая цена	Низкая цена
Стратегии SM1 (P1)	Высокая цена	100 ; 100	-30 ; 150
	Низкая цена	150 ; -40	10 ; 10

Отметим геометрические (формальные) признаки доминирования:

Доминант-строка это строка, в которой располагаются два знака $\cup$.

Доминант-столбец это столбец, в котором проставлено два знака $\wedge$.

Пересечение доминант-строки и доминант-столбца (соответствующая ячейка матрица выделена жёлтым цветом) представляет собой точку равновесия в доминирующих стратегиях – это лучшие стратегии, которые позволяют застраховаться от агрессивных действий противника.

Дело здесь в том, что на первый взгляд наилучшим вариантом выбора стратегий является игровая ситуация "1", которая даёт каждому игроку весьма высокий результат

$$u_{SM1,SM2}(1, 1) = [100, 100] .$$

Однако, при повторении игры один из игроков может сменить стратегию, допустим, что так поступил игрок P2, тогда получим игровую ситуацию "2"

$$u_{SM1,SM2}(1, 2) = [-30, 150].$$

Действительно, игрок P2 увеличит свой выигрыш до 150 усл.ед., а вот игрок P1 понесёт убытки.

Рассматриваемая ситуация имеет простой экономический смысл: приблизительно одинаковый спрос в обоих супермаркетах, которые, монопольно увеличивая цену, повышают прибыль, поскольку речь идёт, например, о товаре с устойчивым повседневным спросом.

Если один из продавцов резко снижает цену, то число покупок данного товара у него практически удваивается и поэтому увеличивается выручка и прибыль, а у игрока P1, который торгует по прежней цене товар перестали брать и вследствие залежалости товарных запасов, часть товара пришлось списать, что и привело к убыткам.

С точностью до-наоборот положение повторяется в игровой ситуации "3", разница лишь в том, что игроки меняются ролями: P1 получает дополнительную прибыль, а P2 – имеет убытки.

В этой связи ситуация "4" представляется наиболее устойчивой, т.к. независимо от действий противника каждый из игроков имеет гарантированную прибыль.

Мы рассмотрели частный случай игрового равновесия - равновесие в доминирующих стратегиях, развитие которого приведёт в дальнейшем к понятию равновесия Нэша.

9.1.2. Равновесие с доминирующей стратегией одного из игроков

Рассмотрим следующий числовой пример, используя геометрический приём выделения доминирующих стратегий.

Проведенный графический анализ показывает, что в данном случае отсутствует доминант-столбец, а это означает, что у игрока P2 нет доминирующей стратегии.

[u(P1, P2)]		Стратегии игрока P2	
		a ¹	a ²
Стратегии игрока P1	a ₁	200 ; 200	-30 ; 40
	a ₂	250 ; -40	50 ; 50

dominant строка

N opt

Тем не менее, в игровой ситуации "4" выставлено два условных символа знака  и , и эта ситуация отражает наилучший выбор для обоих игроков.

Ситуация "4" как и в предыдущем примере соответствует равновесию Нэша, а это означает, что если один игрок не меняет своей стратегии, то и другому игроку менять стратегию невыгодно.

9.1.3. Равновесие без доминирующих стратегий

Следующий числовой пример, демонстрирует возможность устойчивого равновесия в чистых стратегиях без доминирующих стратегий у обоих игроков.

[u(P1, P2)]		Стратегии игрока P2	
		a ¹	a ²
Стратегии игрока P1	a ₁	300 ; 200	70 ; 80
	a ₂	50 ; 60	180 ; 250

N opt

N opt

Как видно, в данном случае имеет место неоднозначное положение равновесия Нэша, а именно в ситуациях "1" и "2". Попад в одну из этих ситуаций, ни одному из игроков невыгодно выходить из неё.

9.1.4. Отсутствие устойчивого равновесия в чистых стратегиях

Приведенный ниже пример иллюстрирует случай отсутствия, во-первых, доминирующих стратегий у обоих игроков, во-вторых, отсутствие устойчивого равновесия в чистых стратегиях.

[u(P1, P2)]		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии игрока P1	a_1	50 ; 70	60 ; -50
	a_2	100 ; 50	-50 ; 120

Diagram annotations: A blue bracket above the top row indicates that strategy a^1 is dominated by a^2 for Player 2. A red bracket to the left of the left column indicates that strategy a_2 is dominated by a_1 for Player 1. A blue bracket below the bottom row indicates that strategy a^2 is dominated by a^1 for Player 2. A red bracket to the right of the right column indicates that strategy a_1 is dominated by a_2 for Player 1. The numbers 1 and 2 are placed near the center of the matrix, indicating the players whose strategies are being compared.

9.2. Равновесие по Нэшу

Определение.

Пара чистых стратегий i_0 и j_0 в биматричной игре игроков P1 и P2 называется равновесием по Нэшу в чистых стратегиях, если при выборе игроком P2 стратегии j_0 для игрока P1 наиболее выгодной является стратегия i_0 и НАОБОРОТ.

Равновесие с доминирующими стратегиями является частным случаем равновесия по Нэшу.

Следует иметь в виду, что равновесие по Нэшу не сводится к равновесию в доминирующих стратегиях, хотя если есть доминирующие стратегии, то им соответствует равновесие по Нэшу

Практическое замечание. Положение равновесия Нэша в платёжной матрице биматричной игры можно определить по одновременному появлению условных знаков  и  в одной клетке.

9.2.1. Представление игр с нулевой суммой в виде биматричной игры

Рассмотрим матричную игру с нулевой суммой, имеющую оптимальное решение в чистых стратегиях, платёжная матрица которой представлена ниже

[A]		Стратегии игрока P2		min
		a ¹	a ²	
Стратегии игрока P1	a ₁	50	300	50
	a ₂	100	200	100
max		100	300	

седловая точка

$$\underline{a} = \min_i \max_j \{a_{ij}\} = 100$$

$$\hat{a} = \max_j \min_i \{a_{ij}\} = 100$$

Поскольку нижняя цена равна верхней цене, то данная игра имеет оптимальное решение в чистых стратегиях, которое в плоскости выбора стратегий координируется так называемой седловой точкой.

Учитывая, что в играх с нулевой суммой выигрыши игрока P2 равны проигрышам игрока P1 $b_{ij} = -a_{ji}$, формально представим игру с нулевой суммой как биматричную игру со следующей матрицей

[u(P1, P2)]		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии игрока P1	a_1	50 ; -50	300 ; -300
	a_2	100 ; -100	200 ; -200

N opt

Из проведенного перестроения платёжной матрицы игры с нулевой суммой в матрицу фиктивной биматричной игры становится очевидным, что прототипом равновесия по Нэшу является седловая точка игр с нулевой суммой при условии наличия оптимального решения в чистых стратегиях.

Выводы по теме "Биматричные игры":

- Равновесие Нэша в биматричных играх представляет собой обобщение понятия седловой точки (оптимальное решение) в играх с нулевой суммой.
- Равновесие Нэша – это некооперативное равновесие, которое, по сути, представляет конкурентное равновесие, являющееся результатом принятия решений игроками, не вступающими ни в какие соглашения друг с другом и имеющими цель максимизации собственного выигрыша.

Другими словами, каждый игрок заботится о минимизации последствий непредсказуемых действий конкурента.

Здесь со всей очевидность возникает мысль о возможности согласованного взаимодействия игроков с целью максимизации их выигрышей, однако это материал следующего раздела рассматриваемого теоретического материала.

9.3. Равновесие по Нэшу в биматричных играх при отсутствии решений в чистых стратегиях

Рассматриваются биматричные статические игры, т.е. рассматриваются одноходовые игры, в которых игроки делают ходы одновременно. В принципе такие игры могут повторяться какое-то число, но в рассматриваемой постановке считается, что какой бы раз не повторялась данная игра, платёжная матрица остаётся неизменной и поэтому не изменяются оптимальные решения, т.е. время не влияет на поведение игроков и на выбор оптимальных стратегий, именно поэтому такие игры называются статическими.

Теорема Дж. Нэimana. Если биматричная игра не имеет решения (оптимума) в чистых стратегиях, то она имеет хотя бы одно равновесие в смешанных стратегиях.

9.3.1. Формализация получения решения в смешанных стратегиях

Введём в рассмотрение платёжную матрицу биматричной игры, т.е. игры двух игроков, считая, что каждый из них может выбирать одну из двух известных стратегий.

Платёжная матрица		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии P1	a_1	$(a_{11}; b_{11})$	$(a_{12}; b_{12})$
	a_2	$(a_{21}; b_{21})$	$(a_{22}; b_{22})$

Произвольный компонент платёжной матрицы в данном случае формируется как

$$(a_{ij}; b_{ij}), \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2,$$

где a_{ij} – выигрыш игрока P1, выбравшего стратегию a_i при условии,

что игрок P2 выбрал стратегию a^j ,

b_{ij} – выигрыш игрока P2, выбравшего стратегию a^j при условии

выбора игроком P1 стратегии a_i .

Матрица выигрышей игрока P1, входящая в платёжную матрицу биматричной игры выглядит следующим образом

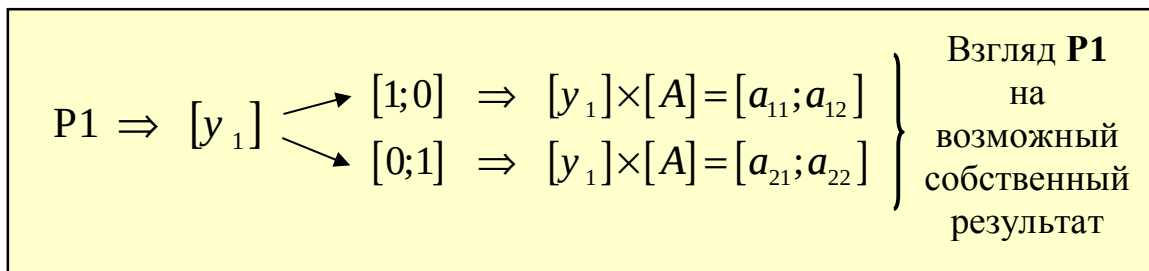
$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Матрица выигрышей игрока P2

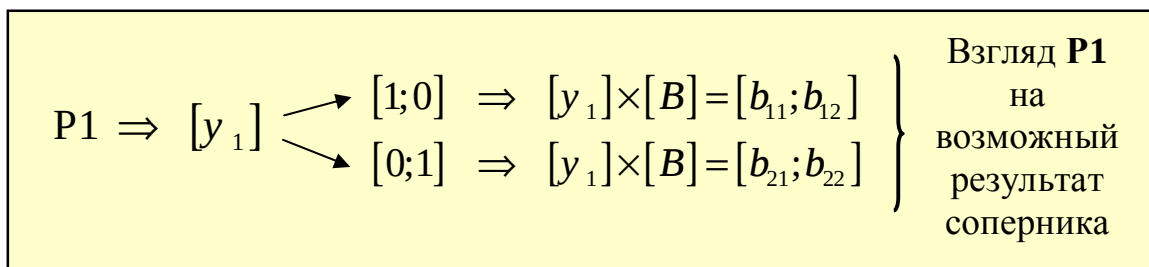
$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим формализацию выбора решений в чистых стратегиях. Хотя настоящий раздел посвящается смешанным стратегиям, т.е. случаям, когда решение в чистых стратегиях отсутствует, придётся для лучшего понимания материала вернуться именно к чистым стратегиям

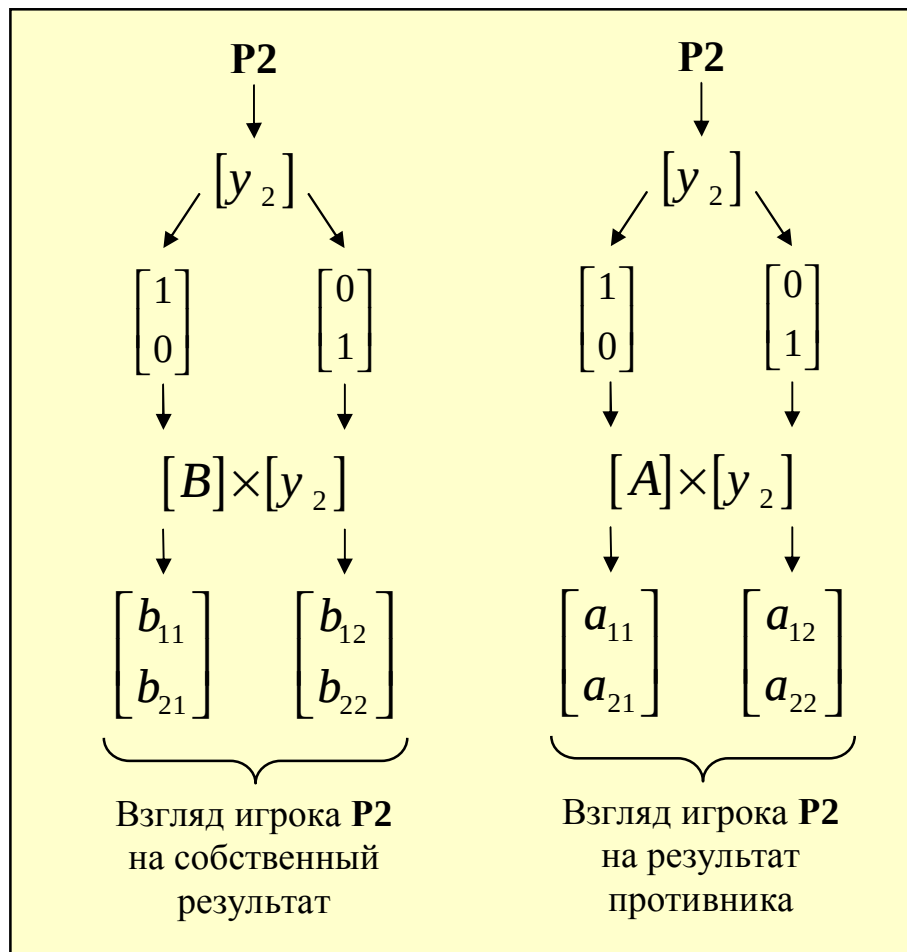
Воспользуемся единичными индикаторными функциями выбора стратегий для того, что бы формализовать получение возможных результатов игрока P1 при выборе им своей 1-й или 2-й стратегии. Очевидно, что каждый выбор игроком P1 одной из своих чистых стратегий может привести к двум возможным результатам, что зависит от того, какую стратегию выберет соперник, т.е. игрок P2.



Аналогичным образом можно сформировать возможные результаты игрока P2 при конкретном выборе игрока P1, что представляет собой как бы взгляд игрока P1 на последствия его выбора в том, что они могут дать игроку P2.



Индикаторные единичные функции, которые, позволяют формировать результаты выбора стратегий игроком P2 вводятся в рассмотрение следующим образом.



Перейдём к выбору смешанных стратегий, задавая относительное содержание каждой стратегии или вероятность её реализации, понимая, что при достаточно большом числе повторений игры заданное относительное содержание стратегий или частота их появления будет сходиться к соответствующим вероятностям.

$$[x] = [x_1; x_2], \quad x_1 + x_2 = 1, \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \Rightarrow 1 \geq x_2 \geq 0.$$

$$[y] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad y_1 + y_2 = 1, \quad 0 \leq y_1 \leq 1 \Rightarrow 1 \geq y_2 \geq 0.$$

Если относительное содержание одной из стратегий равно единице, то матрицы выбора смешанных стратегий вырождаются в матрицы выбора чистых стратегий

$$[x] \Rightarrow [y_1], \quad [y] \Rightarrow [y_2].$$

По аналогии с формированием результатов при использовании чистых стратегий запишем результаты, которые может получить каждый из игроков, выбирая определённую смесь своих стратегий, но при условии, что противник выбрал конкретную чистую стратегию.

Результаты игрока P1 при выборе смешанных стратегий с заданной пропорцией при условии, что P2 выбирает конкретные чистые стратегии:

$$u(P1; x | y_2) = [x] \times [A] = [x_1; x_2] \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [a_{11}x_1 + a_{21}x_2 ; a_{12}x_1 + a_{22}x_2];$$

$$u(P1; x | y_2) = [u(P1; x; a^1) ; u(P1; x; a^2)];$$

$$u(P1; x; a^1) = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \text{ – выигрыш игрока P1 при заданной смеси стратегий и при условии, что P2 выбрал стратегию } a^1;$$

$$u(P1; x; a^2) = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \text{ – выигрыш игрока P1 при заданной смеси стратегий и при условии, что P2 выбрал стратегию } a^2.$$

Взгляд P1 на результаты игрока P2 при условии, что P1 выбирает в заданной пропорции смесь собственных стратегий, а P2 придерживается одной из своих чистых стратегий:

$$u(P2(P1); x | y_2) = [x] \times [B] = [x_1; x_2] \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = [b_{11}x_1 + b_{21}x_2 ; b_{12}x_1 + b_{22}x_2];$$

$$u(P2; x | y_2) = [u(P2; x; a^1) ; u(P2; x; a^2)];$$

$$u(P2; x; a^1) = b_{11}x_1 + b_{21}x_2 \text{ – выигрыш игрока P2 при заданной смеси стратегий P1 и при условии, что P2 выбрал стратегию } a^1;$$

$$u(P2; x; a^2) = b_{12}x_1 + b_{22}x_2 \text{ – выигрыш игрока P2 при заданной смеси стратегий P1 и при условии, что P2 выбрал стратегию } a^2.$$

Результаты игрока P2 при выборе им смешанных стратегий с заданной пропорцией при условии, что P1 выбирает конкретные чистые стратегии:

$$u(P2; y | y_1) = [B] \times [y] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{bmatrix};$$

$$u(P2; y | y_1) = [u(P2; y; a_1) ; u(P2; y; a_2)];$$

$$u(P2; y; a_1) = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 \text{ – выигрыш игрока P2 при заданной смеси стратегий и при условии, что P1 выбрал стратегию } a_1;$$

$$u(P2; y; a_2) = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \text{ – выигрыш игрока P2 при заданной смеси стратегий и при условии, что P1 выбрал стратегию } a_2.$$

Взгляд P2 на игрока P1 при условии, что P2 выбирает в заданной пропорции смешанные стратегии, а P1 придерживается чистых стратегий:

$$u(P1(P2); y | y_1) = [A] \times [y] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{bmatrix};$$

$$u(P2; y | y_1) = [u(P2; y; a_1) ; u(P2; y; a_2)];$$

$u(P2; y; a_1) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$ – выигрыш игрока P2 при заданной смеси стратегий и при условии, что P1 выбрал стратегию a_1 ;

$u(P2; y; a_2) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$ – выигрыш игрока P2 при заданной смеси стратегий и при условии, что P1 выбрал стратегию a_2 .

Найдём средние выигрыши обоих игроков при использовании ими смешанных стратегий

$$\bar{f}_1(x, y) = [x] \times [A] \times [y] = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

$$\bar{f}_2(x, y) = [x] \times [B] \times [y] = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2.$$

Задачу выбора оптимальной смеси стратегий, обеспечивающих максимизацию выигрышей каждого из игроков можно представить в виде совокупности условий и ограничений как показано ниже

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{f}_1(x, y) \rightarrow \max \\ \bar{f}_2(x, y) \rightarrow \max \\ x = [x_1; x_2] \\ y = [y_1; y_2]^T \\ x_1 + x_2 = 1 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 \leq y_1 \leq 1 \\ 0 \leq y_2 \leq 1 \end{array} \right.$$

Очевидно, что перед нами известная задача, которая в математике называется задачей линейного программирования.*

* К задаче линейного программирования сводятся многие вопросы теории игр, поэтому в учебной литературе по теории игр зачастую подробно рассматриваются методические аспекты использования линейного программирования. Однако в нашем курсе вопросы линейного программирования не рассматриваются, поскольку учебный план предусматривает их изучение в курсе математики.

9.3.2. Условие равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях

Определение. Пара смешанных стратегий игроков P1 и P2

$$x^{(0)} = [x_1^{(0)}; x_2^{(0)}], y^{(0)} = [y_1^{(0)}; y_2^{(0)}]^T$$

называется равновесием по Нэшу в смешанных стратегиях, если ни одному из игроков невыгодно отклоняться от этих стратегий в одиночку, т.е. когда

$$\bar{f}_1(x, y^{(0)}) \leq \bar{f}_1(x^{(0)}, y^{(0)}) \quad \text{и} \quad \bar{f}_2(x^{(0)}, y) \leq \bar{f}_2(x^{(0)}, y^{(0)})$$

для любых x и y при условии, что $x \neq x^{(0)}$; $y \neq y^{(0)}$.

9.3.4. Аналитическое решение биматричных игр 2×2 в смешанных стратегиях

При минимальной размерности биматричной игры, т.е. при размерности 2×2, оптимальное решение в смешанных стратегиях можно без труда найти аналитически (при более высокой размерности платёжной матрицы оптимальное решение находят численными методами).

Воспользуемся выражениями для платёжных функций

$$\bar{f}_1(x, y) = [x] \times [A] \times [y] = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

$$\bar{f}_2(x, y) = [x] \times [B] \times [y] = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2.$$

Выразив вторые координаты через соответствующие им первые координаты $x_2 = 1 - x_1$, $y_2 = 1 - y_1$, преобразуем выражения платёжных функций к следующему виду

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(x, y) &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1(1 - y_1) + a_{21}(1 - x_1)y_1 + a_{22}(1 - x_1)(1 - y_1) = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1 - a_{12}x_1y_1 + a_{21}y_1 - a_{21}x_1y_1 + a_{22} - a_{22}y_1 - a_{22}x_1 + a_{22}x_1y_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(x, y) &= b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1(1 - y_1) + b_{21}(1 - x_1)y_1 + b_{22}(1 - x_1)(1 - y_1) = \\ &= b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1 - b_{12}x_1y_1 + b_{21}y_1 - b_{21}x_1y_1 + b_{22} - b_{22}x_1 - b_{22}y_1 + b_{22}x_1y_1. \end{aligned}$$

Продифференцируем приведенные выражения, с тем, что бы приравнять к нулю полученные производные и найти координаты, обеспечивающие максимальные значения платёжных функций*

$$\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} = a_{11}y_1 + a_{12} - a_{12}y_1 - a_{21}y_1 - a_{22} + a_{22}y_1;$$

$$\frac{\partial \bar{f}_2}{\partial y_1} = b_{11}x_1 - b_{12}x_1 + b_{21} - b_{21}x_1 - b_{22} + b_{22}x_1.$$

$$\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow y_1^{(0)}; \quad \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow x_1^{(0)}.$$

Решая полученные уравнения, получим выражения для оптимальной по Нэшу смеси стратегий в биматричной игре

$$y_1^{(0)} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \quad y_2^{(0)} = 1 - y_1^{(0)};$$

$$x_1^{(0)} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}; \quad x_2^{(0)} = 1 - x_1^{(0)}$$

Примечание. Если хотя бы одна из величин $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ окажется отрицательной, что, как видно из приведенных формул, вполне возможно, то это значит, что имеется решение в чистых стратегиях.

Обратим внимание на некоторые особенности выражений для оптимального решения игры 2×2 .

Во-первых, совершенно неожиданно оказалось, что в оптимальном решении для игрока Р1 присутствуют только лишь компоненты платёжной матрицы соперника, а компоненты собственной платёжной матрицы отсутствуют. То же самое и для игрока Р2.

Во-вторых, несмотря на похожий вид формул для $y_1^{(0)}$ и $x_1^{(0)}$, тем не менее, в них есть небольшое отличие: в числителе формулы для $y_1^{(0)}$ мы видим $\dots - a_{12}$, а в формуле для $x_1^{(0)}$ $\dots - b_{21}$, т.е. изменился индекс, вместо 12 стало 21.

* Вообще равенство нулю первой производной даёт условие критической точки, которая отражает необходимое, но вовсе недостаточное условие экстремума, которым может быть как минимум, так и максимум. В данной задаче не требуется дополнительных исследований достаточности и именно максимума, всё это гарантирует теорема Дж. Нэймана.

9.3.5. Пример аналитического решения биматричной игры 2×2 в смешанных стратегиях

Рассмотрим пример биматричной игры с приведенной ниже платёжной матрицей

Платёжная матрица		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии P1	a_1	(85;126)	(123;98)
	a_2	(130;41)	(35 ;46)

Доминирующих стратегий у игроков нет, а также нет решений, объединяющих предпочтительные результаты первого и второго игроков, следовательно, Нэш-оптимальность в чистых стратегиях отсутствует.

$$x_1^{(0)} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} = \frac{46 - 41}{126 - 98 - 41 + 46} = \frac{5}{33} \approx 0,1515;$$

$$x_2^{(0)} = 1 - x_1^{(0)} = 1 - \frac{5}{33} = \frac{28}{33} \approx 0,8485 ;$$

$$x^{(0)} = [x_1^{(0)}; x_2^{(0)}] = \left[\frac{5}{33}; \frac{28}{33} \right] \approx [0,1515; 0,8485].$$

$$y_1^{(0)} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{35 - 123}{85 - 123 - 130 + 35} = \frac{88}{133} \approx 0,6617;$$

$$y_2^{(0)} = 1 - y_1^{(0)} = 1 - \frac{88}{133} = \frac{45}{133} \approx 0,3383 ;$$

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 88/133 \\ 45/133 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,6617 \\ 0,3383 \end{bmatrix}.$$

Оценим средние возможные результаты игры при случайном перемешивании стратегий с найденными оптимальными по Нэшу пропорциями.

Средний выигрыш первого игрока при равновесии по Нэшу составляет

$$\bar{f}_1 = [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [y^{(0)}] = \begin{bmatrix} \frac{5}{33} & \frac{28}{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 85 & 123 \\ 130 & 35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{88}{133} \\ \frac{45}{133} \end{bmatrix} \approx 97,857.$$

Средний выигрыш второго игрока при равновесии по Нэшу равен

$$\bar{f}_2 = [x^{(0)}] \cdot [B] \cdot [y^{(0)}] = \begin{bmatrix} \frac{5}{33} & \frac{28}{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 126 & 98 \\ 41 & 46 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{88}{133} \\ \frac{45}{133} \end{bmatrix} \approx 53,878.$$

Анализируя полученные результаты, сразу же отметим главное: средние выигрыши обоих игроков при использовании оптимальной смеси стратегий превышают для каждого из них два своих наихудших результата в чистых стратегиях. В то же время оба средних выигрыша уступают для каждого игрока двум лучшим результатам в чистых стратегиях.

Получение средних характеристик подразумевает накопление достаточной статистики с тем, что бы статистические частоты выбора стратегий сошлись к вероятностям с заданными оптимальными значениями. Не углубляясь в анализ сходимости по вероятности, отметим, что число повторений игры, обеспечивающее достаточно точное воспроизведение ожидаемых средних вероятностей в данном случае вообще не может быть меньше чем $N = 133$, ну а на самом деле оно намного больше, что видно из представленных результатов статистического имитационного моделирования, приведенных в виде графиков ниже на рисунках 9.1–9.4.

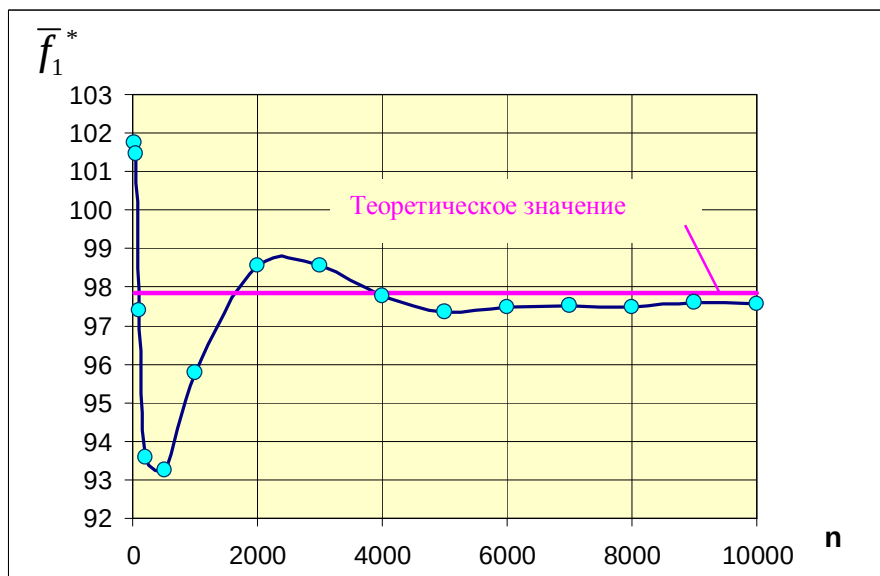


Рис. 9.1 – Сходимость среднего выигрыша игрока P1

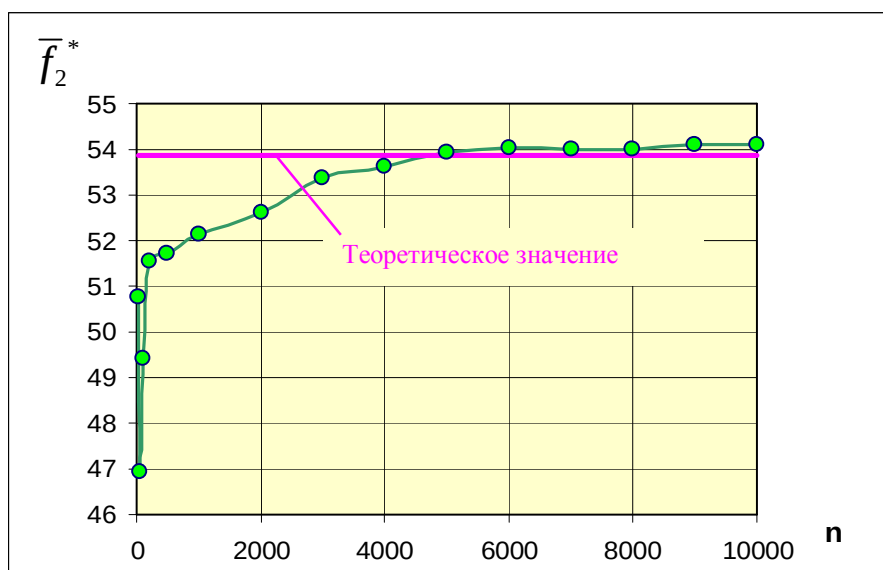


Рис. 9.2 – Сходимость среднего выигрыша игрока P2

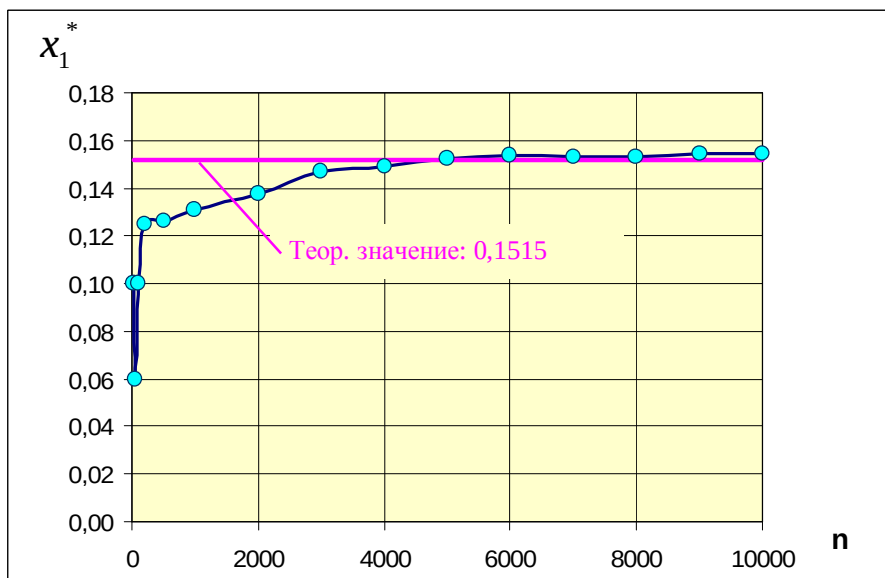


Рис. 9.3 – Сходимость частоты случайной реализации первой стратегии игрока P1

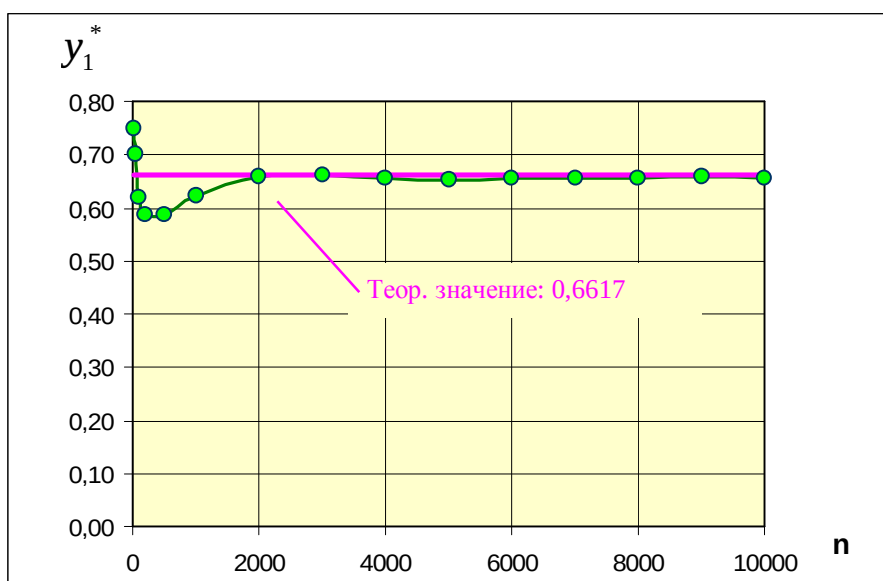


Рис. 9.4 – Сходимость частоты случайной реализации первой стратегии игрока P2

Как видно из представленных результатов статистического имитационного моделирования, сходимость среднего выигрыша обоих игроков к соответствующим теоретическим значениям имеет место при числе повторений игры не меньше $n = 5000$, что естественно приводит к вопросу о том, как интерпретировать использование найденных оптимальных смесей стратегий при реальном повторении игры, например, при $n = 12 - 30$.

Решить задачу выбора оптимальной смеси стратегий при ограниченном числе реализаций можно расширив ранее рассмотренную постановку оптимизационной задачи включением в неё минимизации рассеивания (дисперсии средних выигрышей), что выходит за рамки программы данного курса.

10. КООПЕРАТИВНОЕ РАВНОВЕСИЕ

В биматричных играх в отличие от игр с нулевой сумой конфликт интересов участников игры может быть не таким острым, поскольку здесь выигрыш одного из игроков не всегда сопровождается равным по величине проигрышем другого игрока. Снижение остроты конфликта, а так же участие в игре достаточно большого числа игроков создают благоприятные условия для согласованного взаимодействия отдельных участников игры, объединённых принятыми между ними механизмами взаимодействия.

Выделение групп игроков, которые могут получать дополнительный выигрыш от объединения усилий при выборе согласованных стратегий, анализ механизмов согласованного взаимодействия представляют содержание понятия кооперативного равновесия.

Коалиция – совокупность игроков ($N \geq 2$), объединённых в игре по некоторому принципу, например, имеющих общую цель и предполагающих согласованные действия при движении к выбранной цели.

В качестве цели объединяющей экономических субъектов на первом месте выступает "аксиоматическое" желание увеличивать прибыль, тем не менее, специфика локальных рынков может определять и другие цели, например, выдавливание мелких или неудобных конкурентов, техническое или организационное преобразование бизнеса и т.п.

Кооперация – понятие, включающее как наличие коалиции, так и обмен информацией между игроками в процессе игры и (или) до её начала.

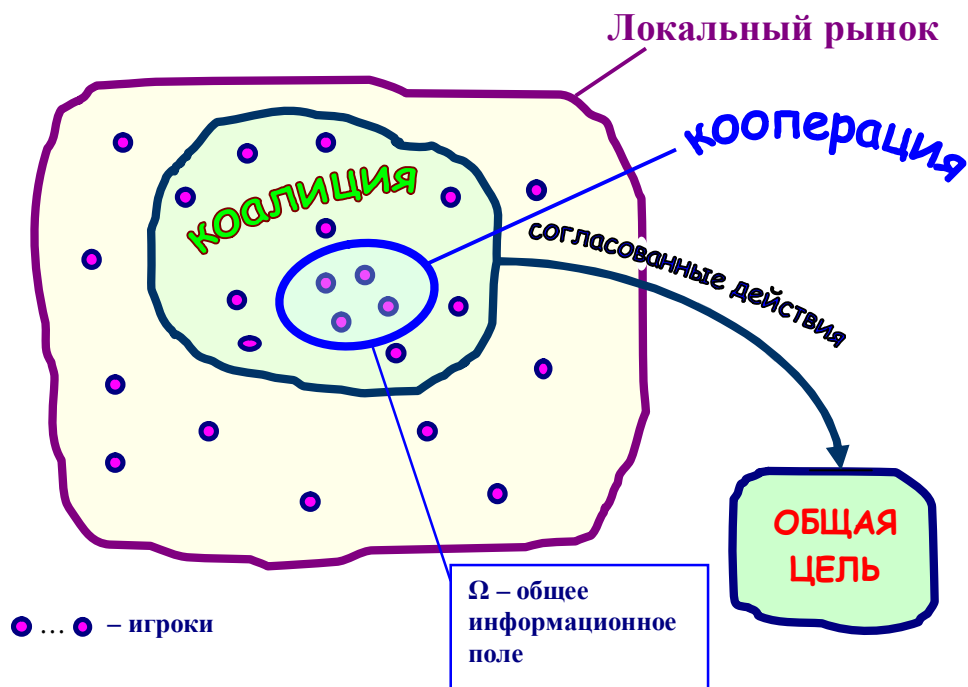


Рис. 10.1 -Схема формирования кооперации

10.1. Неустойчивость кооперативного равновесия

Снова вернёмся к примеру конкуренции двух супермаркетов, рассмотренному в предыдущем разделе. Выполненный ранее графический анализ, показал, что в этой игре имеет место Нэш-оптимальность в игровой ситуации "4", как показано ниже на рис. 10.2.

[$u(\text{SM1}, \text{SM2})$]		Стратегии SM2 (P2)	
		Высокая цена	Низкая цена
Стратегии SM1 (P1)	Высокая цена	100 ; 100	-30 ; 150
	Низкая цена	150 ; -40	10 ; 10

K opt points to the cell (100 ; 100).

N opt points to the cell (10 ; 10).

1 2
3 4

Рис. 10.2 - Схема формирования оптимальных стратегий

Формально можно ввести функцию выбора решений, которая задаёт игровую ситуацию "4" в виде

$$\psi_{Nopt} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T = [0; 1; 0; 1].$$

Векторная функция оптимального по Нэшу результата игры записывается следующим образом

$$F(\psi_{Nopt}) = F(0; 1; 0; 1) = [10; 10].$$

Фирмы **SM1** и **SM2** могут договориться между собой о том, что каждая из них выберет 1-ю стратегию, т.е. назначит высокую цену, что приводит к реализации игровой ситуации "1". В этом случае реализуется выгодное обоим игрокам кооперативное равновесие

$$\psi_{Kopt} = [1; 0; 1; 0]; \quad F(\psi_{Kopt}) = [100; 100].$$

При этом выигрыш каждого из игроков по сравнению с использованием Нэш-решения увеличивается в 100 раз.

Определение. Равновесие, достигнутое по взаимной договорённости о выборе стратегий, называется кооперативным равновесием.

Естественно, что рост прибыли у фирм SM1 и SM2 происходит за счёт покупателей, которым выгоднее равновесие по Нэшу. Вступая в сговор, две фирмы SM1 и SM2 по сути превращаются в одну, т.е. в какой-то мере в монополиста. Поэтому в большинстве развитых стран мира сговор о назначении цен, разделе рынка и т.п. относится к так называемым явным или неявным картельным соглашениям и преследуется по закону*.

Как показывает анализ статистики локальных рынков, большинство фирм явно предпочитает равновесие по Нэшу более выгодному кооперативному равновесию и вовсе не из-за эффективной деятельности антимонопольных служб.

Рассмотрим причины такого поведения игроков на нашем гипотетическом примере.

* В России противодействием сговору о назначении цен занимается Федеральная антимонопольная служба, которая функционирует с 1997 года, являясь правопреемницей созданного в 1990 году Государственного комитета РСФСР по антимонопольной политике и поддержке новых экономических структур.

Допустим, что **SM1** нарушает договорённость, назначая пониженную цену товара, а **SM2** продолжает придерживаться договора о повышенной цене. Есть ли смысл такого поведения? Да, есть – переход на низкую цену вызовет повышенный спрос и увеличение прибыли, если имеет место высокая ценовая эластичность спроса. Прибыль **SM1** возрастает со 100 до 150 усл.ед.

Впрочем, аналогичный манёвр выгоден и для **SM2**.

Более того, противник, который не подозревает о происках конкурента и удерживает высокую цену, терпит убытки, которые для **SM2** составят –40 усл.ед.

Появление убытков у конкурентов являются самостоятельным стимулом к отказу от соглашения, но на первом месте – увеличение собственной прибыли.

Вывод:

Кооперативное равновесие по своей природе неустойчиво, а некооперативное равновесие (равновесие по Нэшу) является устойчивым равновесием.

10.2. Парето-эффективность *

Продолжая рассматривать биматричные игры, введём функцию выигрыша в чистых стратегиях

$$f_k(i, j),$$

где используются следующие обозначения:

k – номер игрока, $k = 1$ - игрок P1, $k = 2$ - игрок P2;

i – номер стратегии игрока P1,

j – номер стратегии игрока P2.

Продолжим использовать пример конкуренции супермаркетов, рассматривая их взаимодействие как биматричную игру с заданной платёжной матрицей, приведенной на рис. 10.3.

* **Парето, Вильфредо** (1848–1923) — итальянский инженер, экономист и социолог, с 1893 г. и до конца жизни – профессор политической экономии Лозаннского университета в Швейцарии (подробнее с биографией В.Парето можно ознакомиться в приложении).

[u(P1, P2)]		Стратегии P2	
		a ¹	a ²
Стратегии P1	a ₁	100 ; 100	-30 ; 150
	a ₂	150 ; -40	10 ; 10

Рис. 10.3 – Платёжная матрица

Проверим себя в том, как пользоваться платёжной функцией $f_k(i, j)$, для этого найдём её конкретное значение, например, в игровой ситуации "4", рассматриваемой с позиции игрока P2, получим $f_2(2,1) = -40$.

Рассмотрим ситуацию "1", сравнивая её с любыми другими ситуациями в чистых стратегиях для обоих игроков

$$\begin{aligned}
 f_1(1,1) = 100 &< f_1(2,1) = 150 & f_2(1,1) = 100 &> f_2(2,1) = -40 \\
 f_1(1,1) = 100 &> f_1(1,2) = -30 & ; & f_2(1,1) = 100 < f_2(1,2) = 150 \\
 f_1(1,1) = 100 &> f_1(2,2) = 10 & f_2(1,1) = 100 &> f_2(2,2) = 10
 \end{aligned}$$

Анализируя приведенные неравенства, приходим к выводу:

В рассматриваемом примере не существует ни одной из ситуаций отличных от игровой ситуации "1" и таких, что бы одновременно выполнялись неравенства

$$f_1(1,1) \leq f_1(i, j) \text{ и } f_2(1,1) \leq f_2(i, j) ,$$

среди которых ХОТЯ БЫ ОДНО было строгим.

Обобщение результатов анализа рассматриваемого примера позволяет сформулировать определение

Пара чистых стратегий (i_0, j_0) называется эффективной (оптимальной) по Парето в чистых стратегиях, если не существует ни одной пары чистых стратегий (i, j) отличных от (i_0, j_0) и таких, что бы одновременно были справедливы неравенства

$$f_1(i_0, j_0) \leq f_1(i, j) \text{ и } f_2(i_0, j_0) \leq f_2(i, j),$$

среди которых хотя бы одно было строгим.

Очевидно, что в рассмотренном примере игровая ситуация "1" ($i_0 = 1; j_0 = 1$) является оптимальной по Парето.

Замечание. Эффективность по Парето означает, что совместными усилиями (выбирая чистые стратегии) игроки не могут строго увеличить выигрыш хотя бы одного из них, не уменьшая при этом строго выигрыш другого.

Ещё раз отметим отличие равновесия Парето от равновесия Нэша. В равновесии Нэша каждый игрок действует в одиночку и не может увеличить свой выигрыш, т.к. при выходе из равновесия у противника появляется более сильный ход. В равновесии Парето предполагается, что оба игрока могут действовать согласованно, увеличивая выигрыш хотя бы одного из них.

10.3. Парето-множество. Метод "северо-восточного угла"

Определение. Ситуации эффективные по Парето образуют Парето-множество.

Очевидно, что понятие Парето-множества имеет смысл, если эффективность по Парето достигается более чем в одной ситуации.

Для идентификации принадлежности игровых ситуаций биматричной игры с двумя участниками обычно используется наглядный графический метод "северо-восточного угла".

Представим себе, как это показано на рис. 10.4, что точками ● в плоскости возможных результатов биматричной игры отмечены игровые ситуации (координаты точек равны компонентам платёжной матрицы)

$$M_k = M(f_{1k}; f_{2k}),$$

где f_{1k} – выигрыш игрока P1 в игровой ситуации k,

f_{2k} – выигрыш игрока P2 в ситуации k.

Двигаясь неограниченно направо и вверх от точки M_k , убеждаемся, что в "заметаемый" квадрант не попадает ни одна из отмеченных на плоскости точек, а это значит, что совместными усилиями, выбирая другие возможные стратегии, игроки P1 и P2 не могут улучшить выигрыш хотя бы одного из них не ухудшая результат другого игрока, поэтому точка M_k отвечает условиям Парето-эффективности.

В то же время убеждаемся, что точка M_3 не соответствует условиям Парето-эффективности, поскольку в "заметаемый" от неё квадрант попадает точка M_2 .

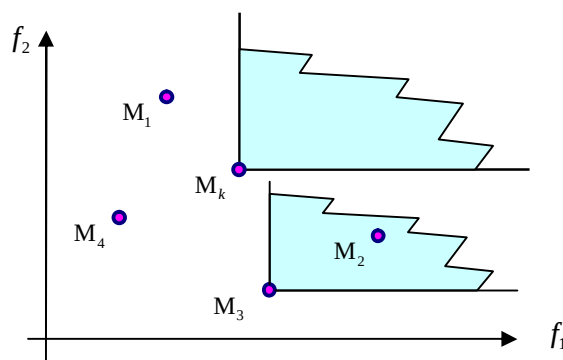


Рис. 10.4 – Использование метода "северо-восточного угла"

Графический анализ для всех представленных на рис. 10.4 точек позволяет найти те из них, которые удовлетворяют условиям Парето-эффективности, т.е. тем самым идентифицировать Парето-множество, как это показано на рис. 10.5.

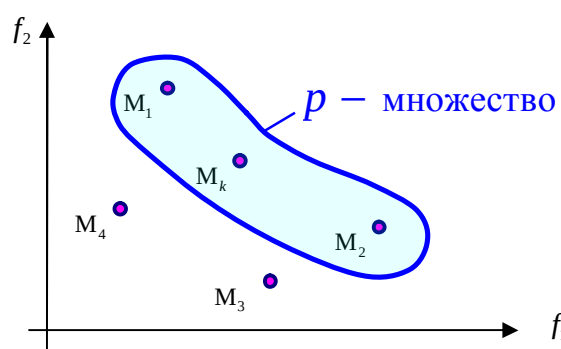


Рис. 10.5 – Идентификация Парето-множества

10.4. Примеры идентификации Парето-множества

10.4.1. Пример 1

[u(SM1, SM2)]		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии P1	a_1	(100;100)	(-30;150)
	a_2	(150;-40)	(10;10)

Рис. 10.6 – Платёжная матрица (пример 1)

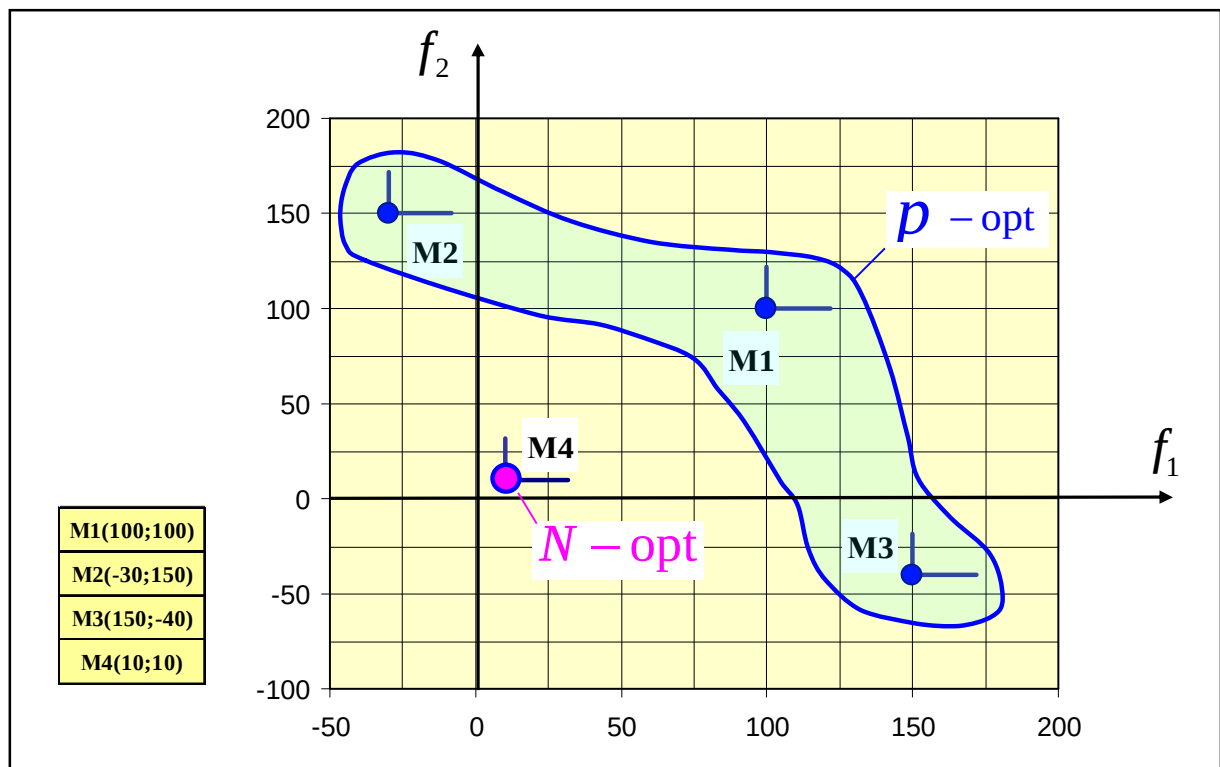


Рис. 10.7 – Парето-множество (пример 1)

В данном примере точка M4, соответствующая условию Нэш-оптимальности, она не попадает в Парето-множество. Таким образом, здесь все точки, кроме точки с Нэш-эффективностью, попали в Парето-множество.

10.4.2. Пример 2

[u(SM1, SM2)]		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии P1	a_1	(200;200) $\wedge$	(-30;40)
	a_2	(250;-40) $\smile$	(50;50) $\smile \wedge$

Рис. 10.8 – Платёжная матрица (пример 2)

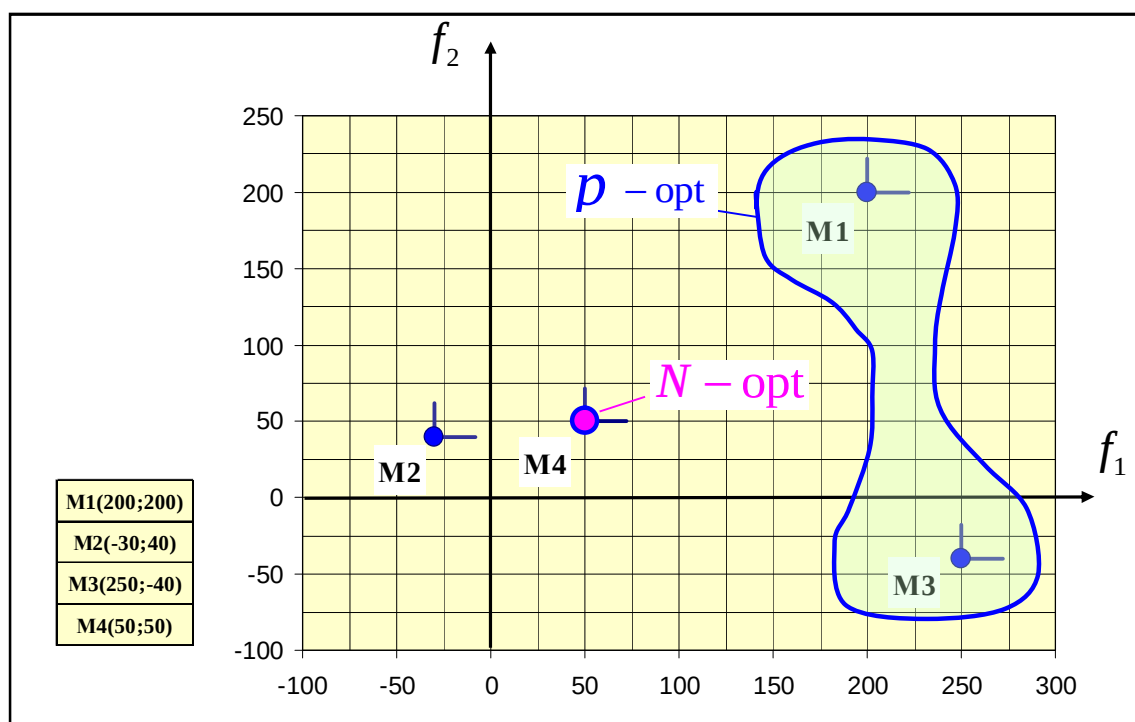


Рис. 10.9 – Парето-множество (пример 2)

В данном примере точка $M4$, соответствующая условию Нэш-оптимальности, не попадает в Парето-множество, что представляется вполне естественным, кроме того точка $M2$ так же не попала в Парето-множество.

10.4.3. Пример 3

[u(SM1, SM2)]		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии P1	a_1	(300;200)  	(70;80)
	a_2	(50;60)  	(180;250)  

Рис. 10.10 – Платёжная матрица (пример 3)

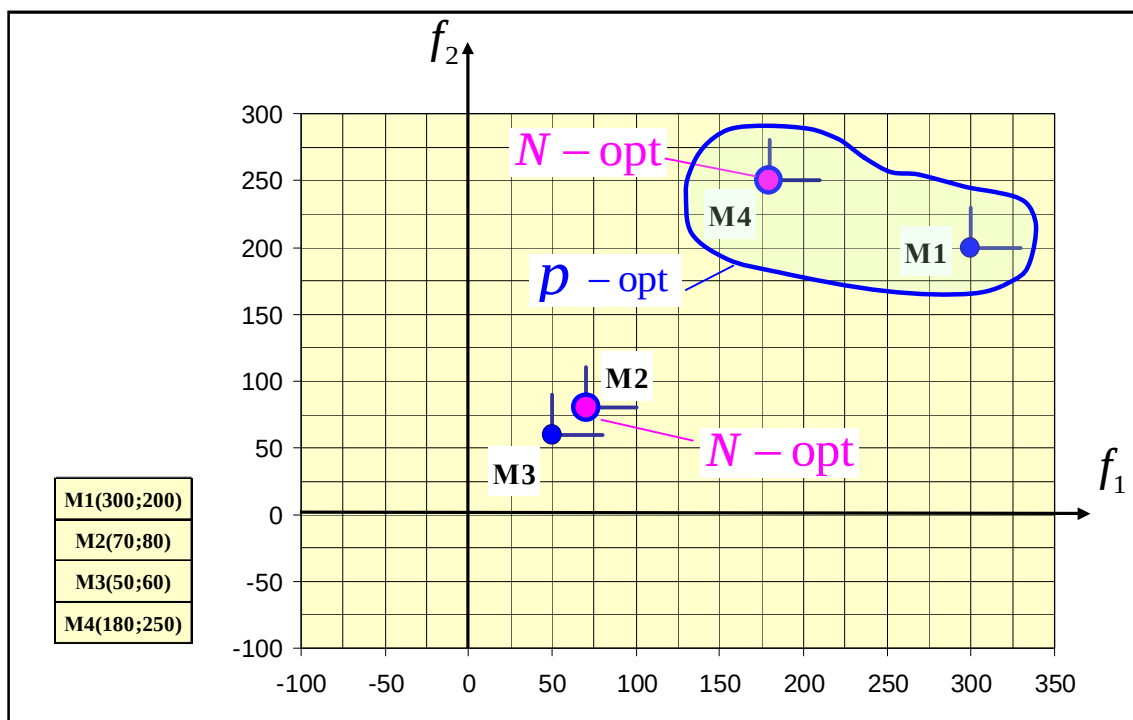


Рис. 10.11 – Парето-множество (пример 3)

Особенностью данной игры является то, что здесь две точки дают Нэш-оптимальность и одна из них, а именно, M4 входит в Парето-множество. Поэтому точка M4, сочетающая Нэш-оптимальность и входящая в Парето-множество намного привлекательнее для игроков, чем точка M1, хотя последняя то же входит в Парето-множество.

10.4.4. Пример 4

[u(SM1, SM2)]		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии P1	a_1	(50;70) 	(60;-50) 
	a_2	(100;50) 	(-50;120) 

Рис. 10.12 – Платёжная матрица (пример 4)

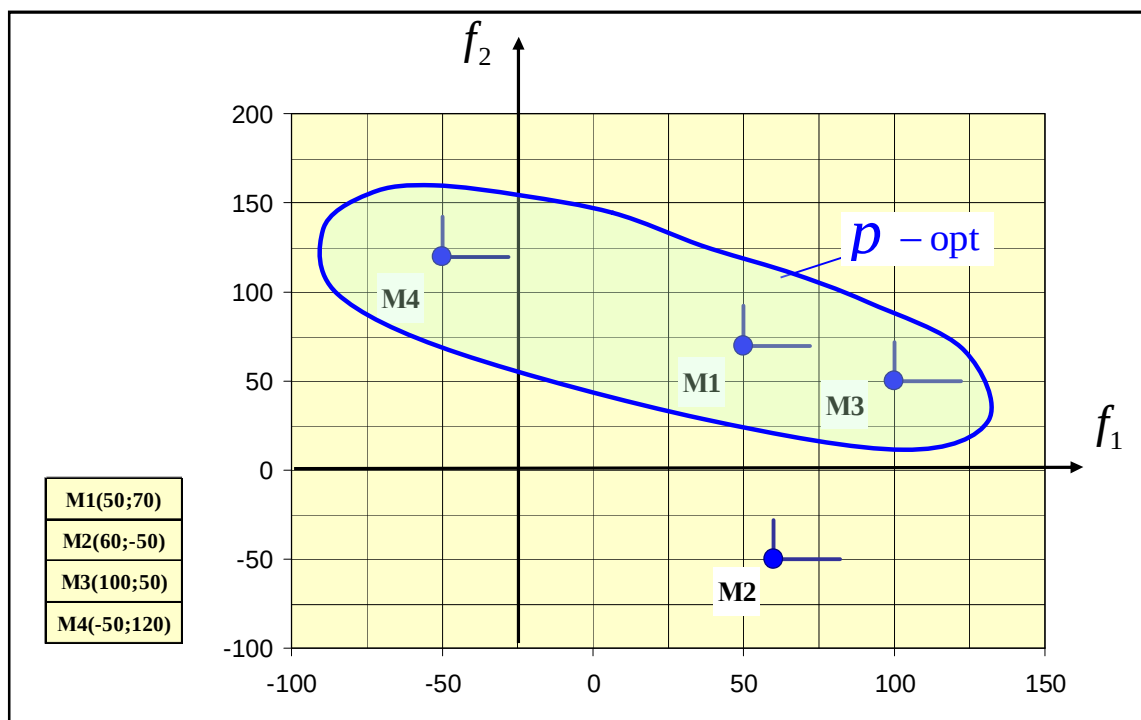


Рис. 10.13 – Парето-множество (пример 4)

Здесь представлен довольно любопытный пример, когда есть Парето-множество, но отсутствует Нэш-оптимальное решение. В такой ситуации игрокам нужно договариваться о согласованном выборе стратегий из Парето-множества, т.к., играя в одиночку, они не могут иметь каких-либо гарантий устойчивости результатов.

10.4.5. Пример 5

[u(SM1, SM2)]		Стратегии игрока P2	
		a^1	a^2
Стратегии P1	a_1	(50;-50) $\wedge$	(300;-300) $\cap$
	a_2	(100;-100) $\cap$ $\wedge$ 1 2 3 4	(200;-200)

Рис. 10.14 – Платёжная матрица (пример 5)

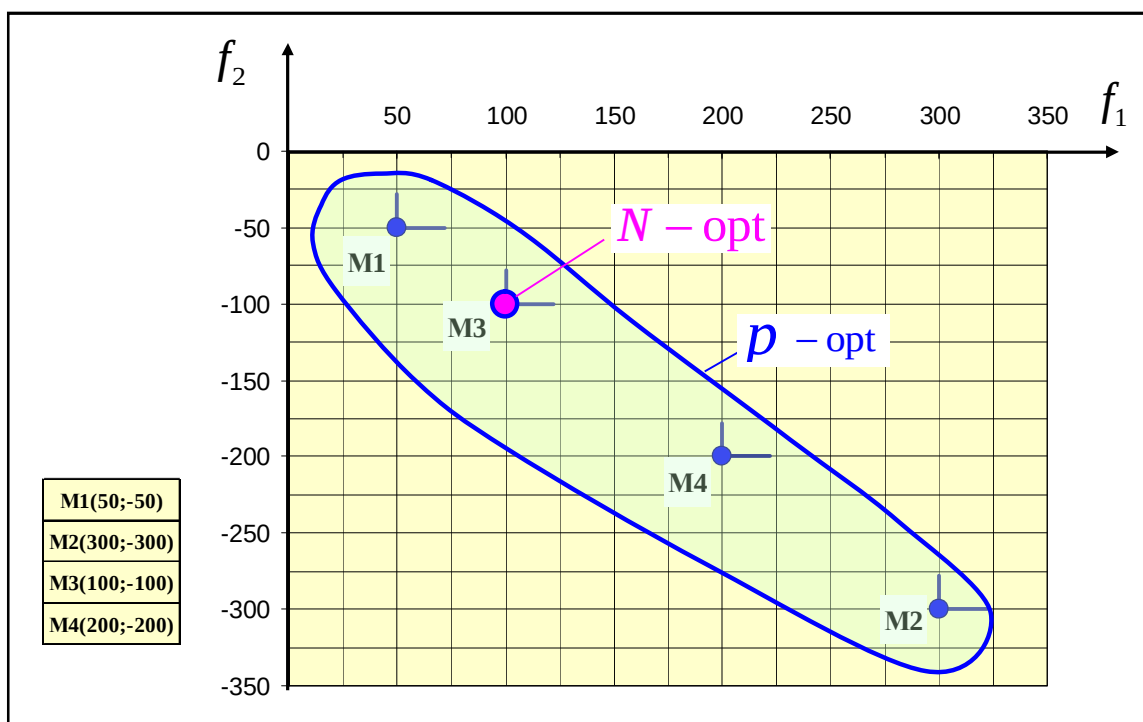


Рис. 10.15 – Парето-множество (пример 5)

Весьма интересный случай – любая из возможных ситуаций эффективна или по Парето, или по Нэш, поэтому выбор любых стратегий даёт эффективное решение данной задачи и можно не заботиться о согласовании своей стратегии с выбором конкурента.

Зададим себе вопрос: Что же даёт игрокам идентификация стратегий, входящих в Парето-множество биматричной игры?

Для ответа на этот вопрос обратимся к иллюстрации на рис. 10.16, предполагая, что в анализируемой игре найдено Парето-множество и множество решений соответствующих эффективности по Парето.

Будем считать, что выделенные множества не пересекаются и кроме того нет решений не принадлежащих одному из этих множеств.

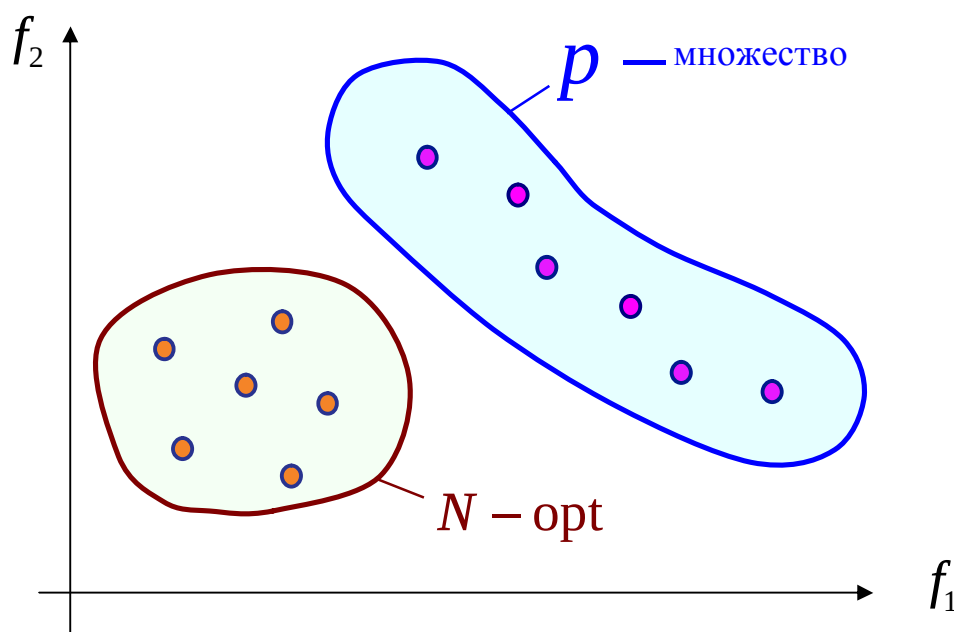


Рис. 10.16 – Непересекающиеся множества решений

Если один из игроков не уверен в постоянстве своего конкурента в плане выполнения соглашений, обеспечивающих Парето-эффективность выбираемых стратегий, то такой игрок должен искать решения среди решений, оптимальных по Нэшу, причём переход в Нэш-оптимальное множество даёт гарантированную защиту от агрессивных действий противника.

Если есть уверенность в выполнении соглашений между игроками, то в этом случае следует выбирать стратегии из Парето-множества, добиваясь перехода к соответствующим стратегиям совместными усилиями. Согласованное поведение игроков может приносить дополнительный выигрыш хотя бы одному из них.

Анализ рассмотренных примеров позволяет сделать обобщающий вывод: **В любой биматричной игре всегда есть хотя бы одно Парето-эффективное решение.**

Анализ Парето-эффективности для биматричных игр с тремя игроками не представляет каких-либо затруднений, если учесть, что в декартовом пространстве метод "северо-восточного угла" переходит в метод "северо-восточного куба".

При переходе к биматричным играм с числом игроков $N > 3$ Парето-множество располагается в гипер-пространстве, идентификация в котором требует задания метрики пространства (определение расстояния между точками пространства).

11. ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Рассмотрим пример биматричной игры, а именно конкуренцию супермаркетов SM1 и SM2 в предположении, что эта игра разыгрывается повторно несколько раз, что, конечно, больше соответствует действительности, так, например, SM1 и SM2 могут пересматривать цены на продаваемые товары каждую неделю.

Постановка задачи. Выбрать последовательность стратегий назначения цен, которая будет наилучшей или, по крайней мере, рациональной для каждого участника игры.

Таким образом, мы переходим к рассмотрению повторяющейся или по-другому многошаговой игры.

Процесс выбора оптимальных стратегий при многошаговой игре отличается от того, который реализуется в одношаговых играх.

Рассмотрим игру, платёжная матрица, которой приведена на рис. 11.1.

[u(SM1, SM2)]		Стратегии SM2 (P2)	
		Высокая цена	Низкая цена
Стратегии SM1 (P1)	Высокая цена	(100 ; 100) 1 2	(10 ; 150)
	Низкая цена	(150 ; 15) 3 4	(70 ; 70)

N

Рис. 11.1 – Платёжная матрица повторяющейся игры

В одношаговом варианте данной игры имеем два вида оптимальных решений:

- Игровая ситуация "1" – Парето-эффективность, но слабая устойчивость.
- Игровая ситуация "4" – Нэш-равновесие, высокая устойчивость.

При реализации игровой ситуации "1" соглашение о высокой цене будет, скорее всего, нарушено и установится равновесие по Нэшу.

В случае многошагового процесса каждая фирма имеет траекторию своих стратегий, и эта **траектория наблюдаема** для другой фирмы, следовательно, **может прогнозироваться**.

11.1. Фиксированное число шагов

Допустим, что биматричная игра (конкуренция) SM1 и SM2 продолжается фиксированное число, например, пять ходов.

Начнём с последнего хода для каждой из фирм SM1 и SM2.

Это так называемый

метод обратной индукции.

Выбор игроками последней в игре стратегии – всё равно, что выбор стратегии в условиях, когда биматричная игра разыгрывается только один раз.

Ответ в случае одношагового процесса известен: наиболее вероятно, что пара выбранных стратегий будет равновесием по Нэшу в чистых стратегиях, которое в данном случае есть равновесие в доминирующих стратегиях.

Весьма вероятно, что на 5-м ходу (5-й раунд) каждая фирма (SM1, SM2) назначит низкую цену, т.е. выберет вторую стратегию. При этом, если конкурент "зазевался", то можно получить дополнительную прибыль, а если не перейти на вторую стратегию, в то время как соперник сделает это, то получается незначительный выигрыш (наиболее низкий из возможных), получается проигрыш с убытком, поэтому наиболее вероятным является выбор второй стратегии обоими игроками.

Назначение низкой цены каждой фирмой означает, что каждая фирма нарушает соглашение, если оно было, согласно которому она должна назначить высокую цену.

Переходим к предпоследнему раунду. Если в последнем раунде, что весьма вероятно, каждая фирма нарушит соглашение, то вряд ли она поверит в соглашение в предпоследнем раунде (вспомним, что нарушать соглашение выгоднее, чем его соблюдать, если другая фирма продолжает соблюдать соглашение).

Весьма вероятно, что соглашение, обеспечивающее Парето-эффективность, будет нарушено и в предпоследнем раунде.

Эти рассуждения по аналогии можно продолжать до первого раунда (хода).

Таким образом, в случае фиксированного числа ходов в данной игре фирмы будут выбирать низкую цену и иметь стационарную траекторию своих стратегий – выбор низкой цены в каждом раунде.

В результате будет поддерживаться равновесие Нэша в доминирующих чистых стратегиях.

Обобщая проведенные рассуждения, отметим следующее:

Основанием для отказа от сотрудничества, а именно переход от Парето-эффективности к равновесию по Нэшу, в многоходовых играх является то, что игра не будет продолжаться более установленного числа ходов.

Следует заметить, что речь здесь не просто об ограниченном числе ходов, но ограниченном и обозримом, когда долгосрочная стратегия заменяется краткосрочной стратегией, а это по сути уже не стратегия, а тактика. Например, если число фиксированное число ходов составляет $N=60$, допустим, что такое число ходов реализуется за 10 лет, то на первом этапе такой продолжительной игры она представляется игрокам как игра с неограниченным числом ходов. Равновесие по Парето представляется вполне оправданным и конструктивным. Ближе к завершению такой игры игроки осознают, что эта игра с ограниченным числом ходов, и переходят к равновесию Нэша. Если же фиксированное число ходов игры составляет $N=3...6$, то в этом случае игроки сразу же осознают ограниченность числа ходов и реализуют равновесие по Нэшу.

11.2. Неограниченное число шагов

Неограниченная последовательность ходов представляется скорее некоторой абстракцией, которой в экономической реальности соответствует игра с достаточно большим числом повторений и самое главное – это число повторений заранее неизвестно, тогда модель поведения игроков приближается к модели игры с неограниченным числом ходов.

Имея перспективу длительного взаимодействия, игроки, как правило, поддерживают принимаемые соглашения о сотрудничестве, т.е. реализуют Парето-эффективные стратегии, предпочитая стабильный выигрыш в бесконфликтных условиях откровенному противостоянию.

Переход к оптимизации траекторий многократно повторяющихся стратегий приводит к необходимости выбора критериев оптимизации, которые, безусловно, по своей сути отличаются от рассмотренных нами ранее критериев оптимизации одноходовых игр.

Критерий оптимизации траекторий многократно повторяющихся стратегий – **максимизация совокупной прибыли.**

Примечание. Совокупная прибыль понимается как суммарная прибыль за предполагаемое число ходов.

11.2.1. Стратегия "зуб за зуб"

Отклонения одного из игроков от принятого соглашения, например, отклонения от соглашения о высокой цене игроков-супермаркетов SM1 и SM2, могут сопровождаться активными действиями другого игрока, побуждающими "нарушителя" возвращаться к выбору Парето-эффективных стратегий.

Одной из стратегий, обеспечивающих максимизацию совокупного результата, является так называемая стратегия "зуб за зуб". При такой стратегии отклонение игрока от принятого соглашения сопровождается переходом противника на эту же стратегию при следующем ходе. Поэтому "зуб за зуб" конечно, понимается фигурально в смысле повторения "зубца" на траектории выбора стратегий с отставанием на один ход.

Рассмотрим механизм реализации стратегии "зуб за зуб" на конкретном примере, платёжная матрица которого представлена на рис. 2.

[u(SM1, SM2)]		Стратегии SM2 (P2)	
		Высокая цена	Низкая цена
Стратегии SM1 (P1)	Высокая цена	(120 ; 100)	(40 ; 140)
	Низкая цена	(160 ; 20)	(80 ; 60)

P_{-opt} (blue italic) points to the cell (120 ; 100).
 N_{-} (blue italic) points to the cell (80 ; 60).
 Blue numbers 1, 2, 3, 4 are placed near the cells: 1 near (120 ; 100), 2 near (40 ; 140), 3 near (160 ; 20), 4 near (80 ; 60).

Рис. 11.2 – Платёжная матрица к демонстрации стратегии "зуб за зуб"

Рассмотрим многократное повторение игры с неизменной платёжной матрицей, приведенной на рис. 11.2.

Допустим, что игрок P1 выдерживает соглашение о высокой цене, выбирая первую стратегию подряд три хода, как это показано на траектории его стратегий на рис. 11.3.

Четвёртый ход. На четвёртом ходу P1 переходит на вторую стратегию, т.е. снижает цену. Как видно из рис.4, игрок P2 не нарушил на 4-м ходу принятое ранее соглашение. Результат создавшейся ситуации виден на рисунках 11.5 и 11.6: P1 увеличил выигрыш до 160 усл.ед., а P2 снизил выигрыш со 100 усл.ед. до 20 усл.ед.

$$\begin{aligned} u(P1)_3 = 120 &\Rightarrow u(P1)_4 = 160; \\ u(P2)_3 = 100 &\Rightarrow u(P2)_4 = 20. \end{aligned}$$

Пятый ход. На 5-м ходу P1 удерживает вторую стратегию, продолжая нарушать принятое ранее соглашение, а игрок P2 в соответствии со стратегией "Зуб за Зуб" перешёл на вторую стратегию. Результат создавшейся игровой ситуации: $u(P1)_5 = 80$, $u(P2)_5 = 60$. Как видно, игрок P1 скатился с завоёванной вершины причём ниже уровня соответствующего взаимному соглашению о высокой цене, а P2 выходит из предыдущего провала

$$\begin{aligned} u(P1)_4 = 160 &\Rightarrow u(P1)_5 = 80; \\ u(P2)_4 = 20 &\Rightarrow u(P2)_5 = 60. \end{aligned}$$

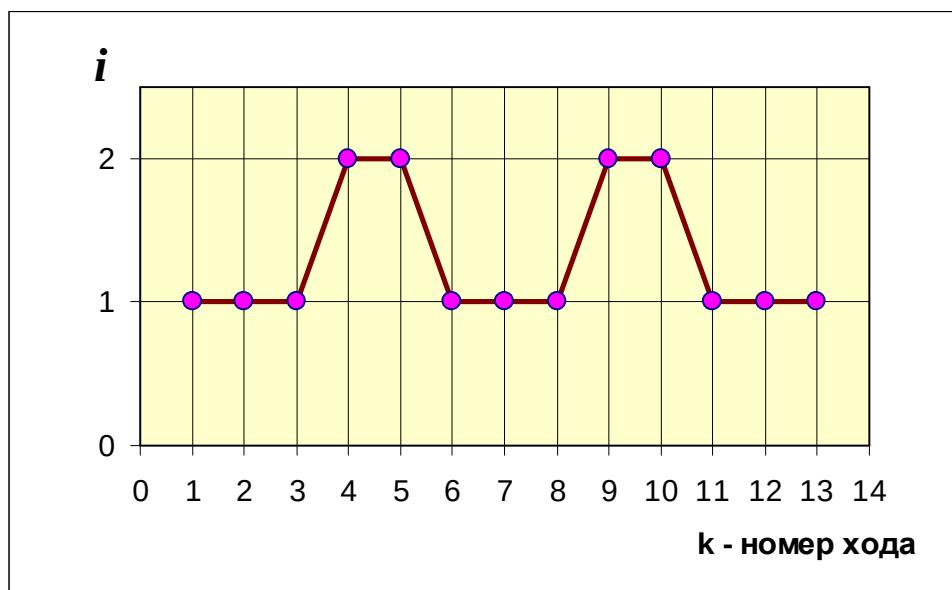


Рис. 11.3 - Траектория выбора стратегий (игрок P1)

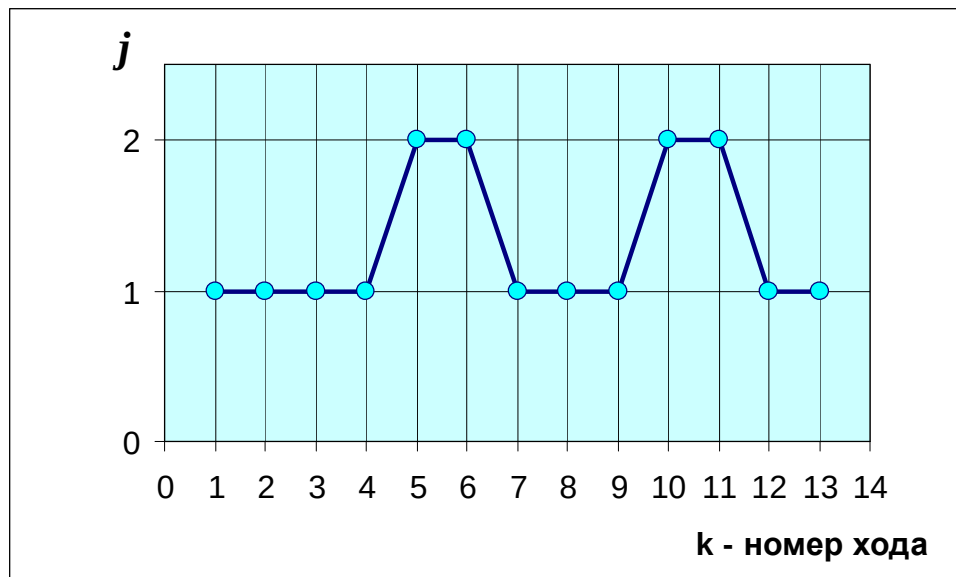


Рис. 11.4 - Траектория выбора стратегий (игрок P2)

Шестой ход. P1 "вспомнил" о соглашении под давлением упущенной выгоды и вернулся к высокой цене, но P2 повторяет предыдущую стратегию своего конкурента. P1 катится всё ниже, теряя возможную прибыль – достойное наказание за нарушение соглашения. P2 как бы получает компенсацию в виде максимально возможного выигрыша, получая эту компенсацию не как агрессор, а как убеждённый последователь вполне понятной стратегии "зуб за зуб"

$$u(P1)_5 = 80 \Rightarrow u(P1)_6 = 40;$$

$$u(P2)_5 = 60 \Rightarrow u(P2)_6 = 140.$$

Седьмой ход. Оба игрока возвращаются к равновесию по Парето

$$u(P1)_7 = 120;$$

$$u(P2)_7 = 100.$$

На девятом ходу, несмотря на полученный негативный опыт, игрок P1 снова нарушает соглашение – история повторяется.

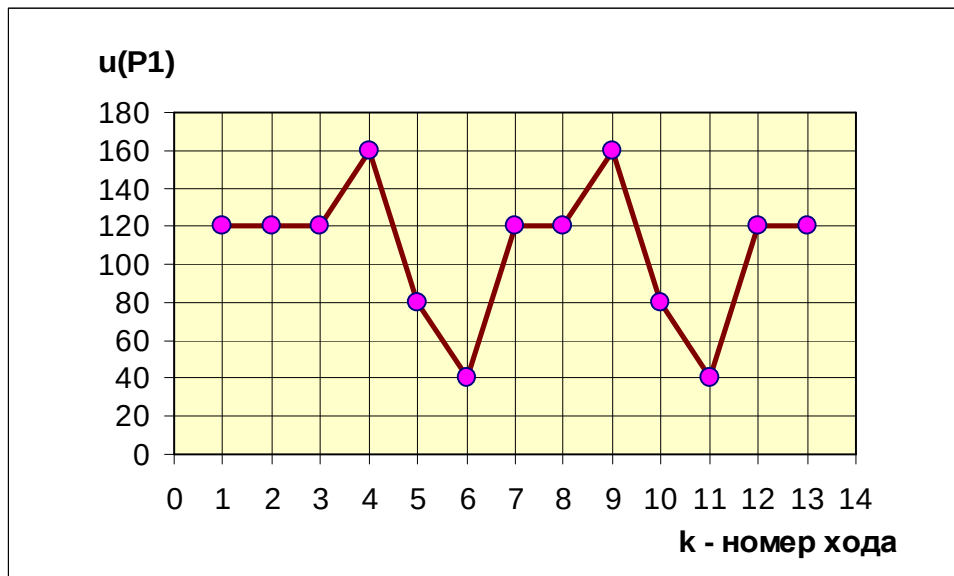


Рис. 11.5 – Текущий выигрыш (игрок P1)

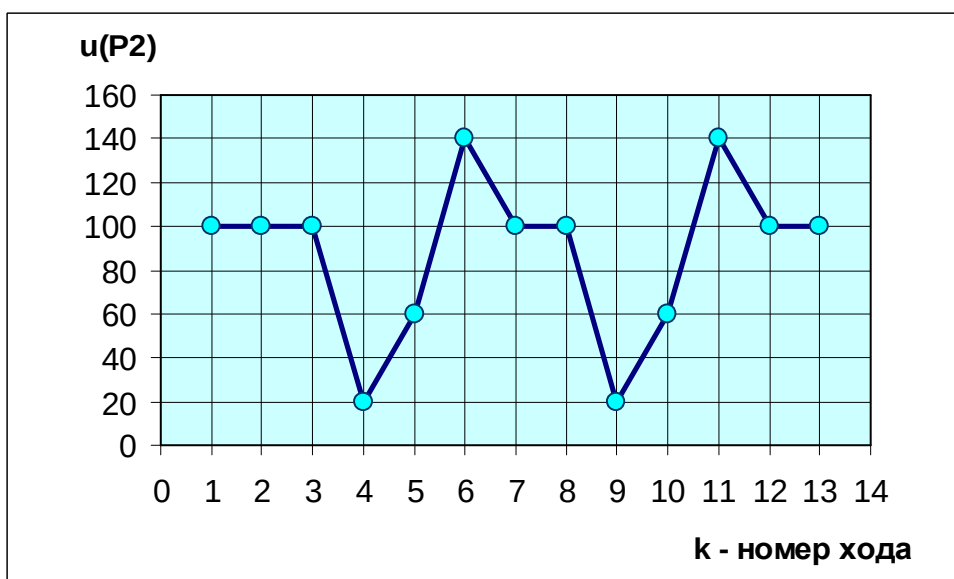


Рис. 11.6 - Текущий выигрыш (игрок P2)

Достаточно информативным при анализе стратегии "зуб за зуб" является сопоставление выигрышей накопленных игроками, графики которых приведены на рисунках 11.7 и 11.8.

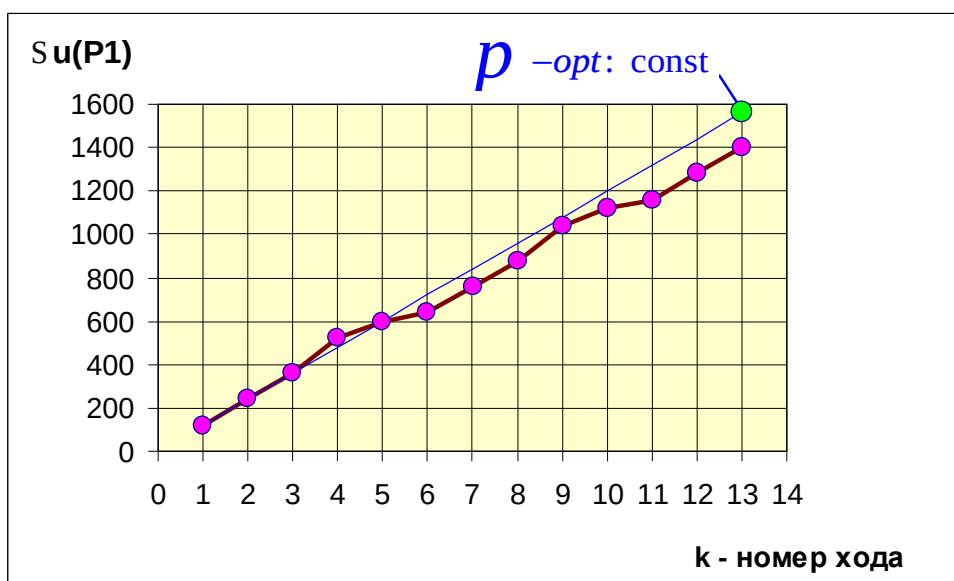


Рис. 11.7 - Накопленный выигрыш (игрок P1)

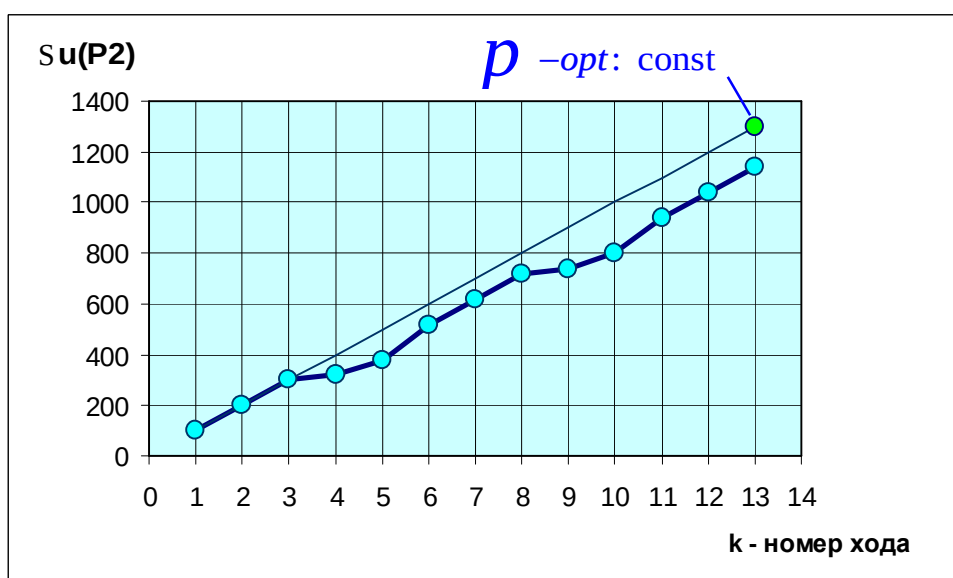


Рис. 11.8 - Накопленный выигрыш (игрок P2)

Из графиков на рис. 11.7 и 11.8, где тонкой линией нанесён результат, соответствующей повторению ходов без нарушения соглашения, видно, что стратегия "зуб за зуб" является достаточно эффективным средством максимизации совокупного выигрыша.

В экономической реальности стратегия "зуб за зуб" является распространённым и действенным механизмом получения максимального совокупного выигрыша для каждого игрока, если число раундов заранее не фиксировано.

12. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Существуют игры (например, шашки, шахматы), в которых игроки делают ходы не одновременно, а последовательно, сохраняя в течение всей игры заданную последовательность ходов.

Основные особенности последовательных игр :

- Делая очередной ход, игрок знает, какой ход перед этим сделал его противник.
- Участники игры могут просчитать выигрыши при всех возможных вариантах развития игры.

Игры с отмеченными особенностями называют последовательными или позиционными, последнее объясняется тем, что игрок, делающий свой очередной ход, видит текущую позицию противника.

Последовательные игры относятся к так называемым динамическим играм. Вообще под динамическими играми в теории игр понимают игры, которые реализуются непрерывно какой-то период времени или дискретно при числе ходов $N > 1$.

Примечание. Игры-одноходовки в противоположность многоходовым играм относят к статическим играм.*

Последовательные игры удобно представлять в виде графов.

Сами по себе графы являются совокупностью условных обозначений рассматриваемых с их помощью процессов в виде системы обозначений: узлы, которые отражают события и дуги (направленные или ненаправленные) – пути перехода между событиями.

Расширенная форма представления последовательных игр – представление игры с использованием графов.

Обычная форма представления последовательных игр – представление с использованием матриц.

* Следует иметь в виду, что понятие динамики и статики в теории игр не имеют ничего общего с известными понятиями статики и динамики в механике.

Будем считать, что при реализации последовательных игр игрок P1 начинает и затем делает все нечётные ходы, а игрок P2 делает второй ход и все последующие чётные ходы.

Чтобы ходы игроков имели нумерацию, формально совпадающую с нумерацией ходов игры, введём так называемые "пустые" ходы, обозначаемые как $\emptyset$, тогда функции выбора стратегий y_k^* любого k -го хода игры записывается следующим образом:

$$y_k^* = (i_k; \emptyset) \text{ если } k = 2n - 1, \text{ т.е. для всех нечётных ходов игры (P1);}$$

$$y_k^* = (\emptyset; j_k) \text{ если } k = 2n, \text{ т.е. для всех чётных ходов игры (P2);}$$

где i_k – номер стратегии игрока P1 на k -м ходу игры;
 j_k – номер стратегии игрока P2 на k -м ходу игры.

Очевидно, что $i_{k=2n} = \emptyset$, $j_{k=2n-1} = \emptyset$.

Таким образом, платёжная функция 4-х ходовой последовательной игры может быть записана в виде

$$f_4(y_1^*; y_2^*; y_3^*; y_4^*) = f_4((i_1; \emptyset); (\emptyset; j_2); (i_3; \emptyset); (\emptyset; j_4)) = (A_4; B_4),$$

где $A_4; B_4$ – выигрыши игроков P1 и P2 после 4-х ходов игры.

Промежуточные результаты той же самой игры после второго хода можно записать как

$$f_2(y_1^*; y_2^*) = f_2((i_1; \emptyset); (\emptyset; j_2)) = (A_2; B_2).$$

С другой стороны, понимая, что "пустые" ходы производятся в строгой последовательности, упростим запись платёжной функции, убрав символы "пустых" ходов

$$f_4(y_1; y_2; y_3; y_4) = f_4(i_1; j_2; i_3; j_4) = (A_4; B_4),$$

т.е., используя сокращённую форму записи функции выбора решений в виде

$$y_k = i_k \text{ если } k = 2n - 1; \quad y_k = j_k \text{ если } k = 2n,$$

где i_k – номер стратегии игрока P1 на k -м ходу игры;

j_k – номер стратегии игрока P2 на k -м ходу игры.

12.1. Последовательная игра "Выход фирмы на рынок"

Постановка задачи. На некоторый отраслевой рынок планирует выйти фирма F1, несмотря на то, что в настоящее время на этом рынке доминирует фирма-монополист F2.

Стратегии фирмы F1 (игрок P1)		
№	Обозначение	Действия
1-я стратегия	В	Выход на отраслевой рынок обеспеченный постройкой собственного завода для выпуска соответствующей продукции
2-я стратегия	Н	Не выходить на рынок и не строить завод.

Стратегии фирмы F2 (игрок P2)		
№	Обозначение	Действия
1-я стратегия	С	Сохранить объём выпускаемой продукции.
2-я стратегия	У	Уменьшить объём производства.

Первый ход делает игрок P1, т.е. фирма F1, которая выходит на рынок или не делает этого.

Рассмотрим приведенный граф данной игры, рассчитанный на два хода и представленный на рис. 12.1.

В узлах графа проставлены номера игроков, принимающих решения.

То, что дуги второго хода не заканчиваются узлами говорит о возможности дальнейшего продолжения игры.

Справа в круглых скобках показаны результаты двух ходов при движении по выбранной траектории графа, первое число – выигрыш P1, второе число – выигрыш P2.

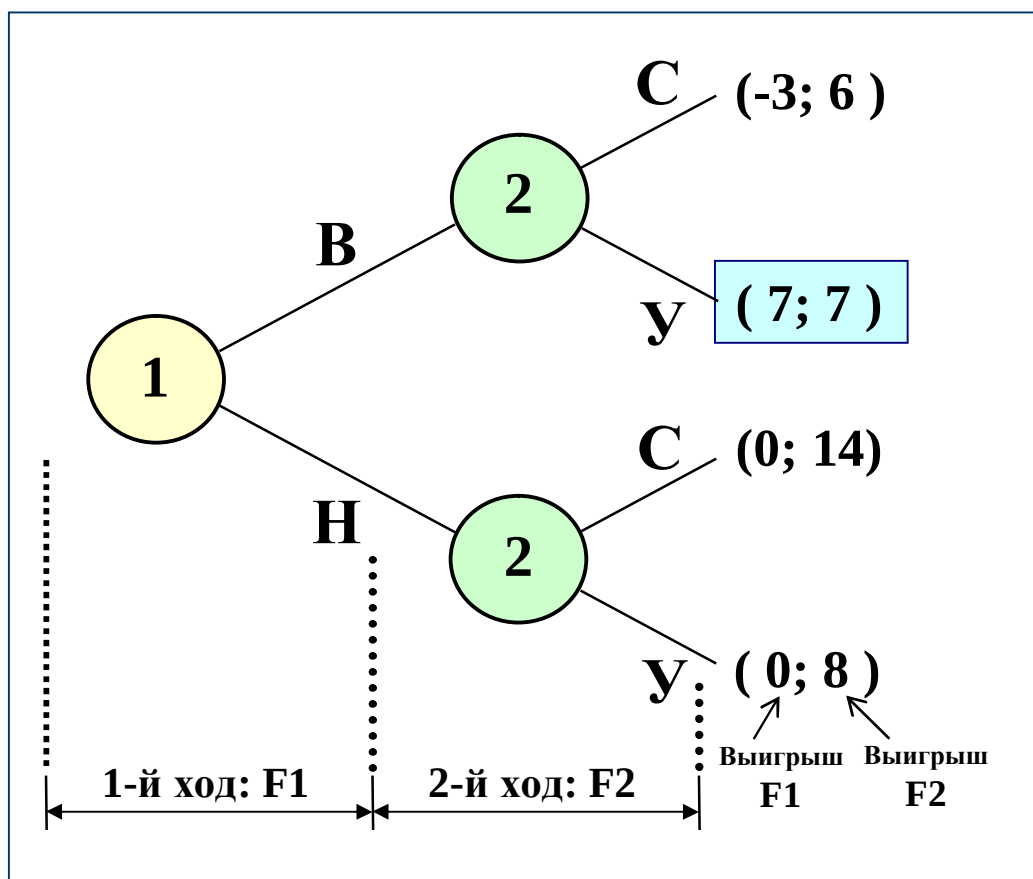


Рис. 12.1 – Граф игры "Выход фирмы на рынок"

Займёмся анализом приведенного графа игры "Выход фирмы на рынок". Как видно из рис. 12.1, нижняя ветвь графа может дать игроку F2 следующие результаты:

$$B_2 = \{14; 8\}.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что фирма-монополист рассматривает как возможный вариант сокращение производства, даже когда конкурент не вышел на рынок. Это говорит о том, что F2 чувствует возможное ухудшение конъюнктуры, т.е. снижение спроса.

Наиболее рациональным решением данной игры представляется следующий сценарий развития событий:

F1 выходит на рынок, построив завод,

F2 уменьшает производство, учитывая как снижение спроса, так и появление конкурента.

В формализованном виде получение данного решения оформляется как

$$(A_2; B_2) = f_2(1; 2) = (7; 7).$$

В результате выбранных ходов игроки имеют следующие результаты:

выигрыш F1 составляет 7 усл. ед.,

выигрыш F2 составляет 7 усл. ед.

Если разобраться подробнее с рассматриваемым развитием событий, то оно представляет не самый худший вариант для F2, поскольку здесь второй игрок проигрывает только лишь 1 усл.ед. от своего пессимистического прогноза, а при неблагоприятном для F2 решении он может потерять ещё 1 усл.ед.

Весьма специфической является траектория, соответствующая верхней ветви графа

$$f_2(1;1) = (A_2; B_2) = (-3; 6).$$

Очевидно, что второй ход игрока F2 – сохранение объёма выпускаемой продукции, после выхода на рынок нового игрока, снижает его возможный выигрыш до 6 усл.ед., но при этом противник получит ощутимые убытки вместо прибыли. Этот агрессивный ход игрока F2 нацелен на вытеснение конкурента с рынка и подразумевает желание сохранить монопольное положение. Однако надеждам руководства фирмы F2 вряд ли удастся реализоваться, т.е. убрать с рынка конкурента, который уже построил завод и, возможно, предвидя агрессивные действия монополиста, приготовился к длительной "войне".

Обычно фирмы, осваивающие новый для них рынок, предвидят жёсткое противодействие конкурентов и планируют малоприбыльный или убыточный начальный период освоения рынка. Основными факторами, определяющими такое поведение новых игроков, является наличие у них более совершенной технологии, обеспечивающей как снижение издержек, так и повышенное качество выпускаемой продукции, что в конечном итоге позволит потеснить игроков, вышедших ранее на рынок, даже при активном их противодействии.

Что же должен делать игрок F1: выходить в рынок или отказаться от этой идеи?

1. Если есть уверенность, что монополист F2 будет вести себя "разумно", то следует выходить на рынок, тем более что монополист в какой-то мере и сам без нажима конкурента планирует сокращение объёма производства, как бы освобождая, занимаемую им нишу, для соперника.

2. Если уверенности в "разумном" поведении монополиста F2 нет, то не выходить на рынок, т.к. это приведёт к убыткам.

Мы рассмотрели только два хода игры, но можно рассмотреть и последующее развитие игры на несколько ходов вперёд, предусмотрев, различные варианты изменения спроса, потребительских предпочтений, проанализировав изменение технического состояния производственной базы монополиста и планируя более поздний выход новой фирмы на монопольный рынок. Методически, с точки зрения техники построения графа и анализа получаемых результатов, здесь всё понятно, но чем больше шагов игры вводится в рассмотрение, тем менее достоверными оказываются численные расчётные характеристики результативности принимаемых решений на более поздних ходах и тем более на последних ходах.

12.2. Последовательная двухходовая игра "Конкуренция торговых фирм"

Постановка задачи. Рассматривается конкуренция двух торговых фирм SM1 (игрок P1) и SM2 (игрок P2). Фирма SM1 в реализации своей стратегии опережает фирму SM2 ровно на один ход. В экономическом смысле эта ситуация встречается довольно часто, когда часть игроков синхронно, с отставанием на один шаг воспроизводит ценовую политику лидера локального рынка.

Стратегии фирм SM1 и SM2 (игроки P1, P2)		
№	Обозначение	Содержание
1-я стратегия	В	Назначение высокой цены
2-я стратегия	Н	Назначение низкой цены

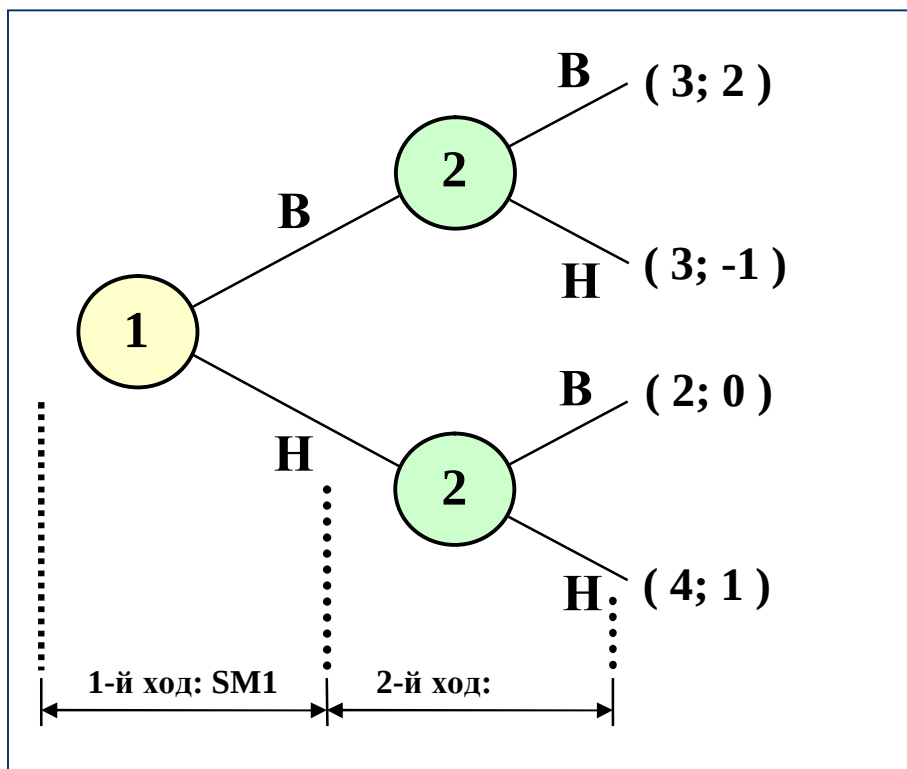


Рис. 12.2 – Граф игры "Конкуренция торговых фирм"

Так же как и в предыдущем примере, узлы имеют идентификацию, которая фиксирует номер игрока принимающего решение, как это обозначается на рис. 12.2.

Дуги – отражают само решение, т.е. выбор игроком конкретных чистых стратегий из числа его возможных стратегий.

Примечание. Последние дуги не заканчиваются узлами, что означает возможность продолжения игры с дальнейшим разветвлением графа.

Представим результат первых двух ходов данной игры в виде векторной функции

$$f_2(y_1; y_2) = (A_2; B_2),$$

где ψ – функция выбора стратегий, A_2 – выигрыш игрока P1 (SM1), B_2 – выигрыш игрока P2 (SM2).

Проанализируем возможные сценарии рассматриваемой игры.

1. Допустим, что игрок P1 выбрал стратегию "B" – высокая цена. Очевидно, что при таком развитии событий для P2 выгодна такая же стратегия "B". В результате такого сценария имеем

$$f_2(1;1) = (3; 2).$$

Решение игрока P2 в виде $f_2(1;2) = (3;-1)$ представляется полностью лишённым смысла.

2. Допустим, что игрок P1, делая первый ход, выбрал стратегию "Н" – низкая цена, что вполне оправдано надеждой на максимальный выигрыш $A_2 = 4$ усл.ед., поскольку именно такой исход имеет место при "разумном" поведении игрока P2

$$f_2(2;2) = (4;1).$$

Посмотрим, в чём "разумность" игрока P2 в этой ситуации. Очевидно, что, если игрок P1 выбрал стратегию "Н", то из двух решений P2, отмеченное решение более выгодное, чем

$$f_2(2;1) = (2;0).$$

3. Игровая ситуация $f_2(2;1) = (2;0)$ может рассматриваться не как "неразумность" игрока P2, но совсем иначе, а именно как спланированная агрессивность. Ведь выбор стратегии "В", игроком P2, после того как P1 выбрал "Н", приводит соперника к наименьшему из его возможных результатов, чего он вряд ли ожидал, предвкушая получить максимальный результат $B_{2\max} = 4$. Поэтому выполненный ход игрока P2, если он сделан сознательно, следует классифицировать как агрессивный и достаточно удачный, ведь сам "агрессор", т.е. P2 получил не самый худший результат. Худшим результатом для P2 является проигрыш 1 усл.ед.

Общие выводы по игре "Конкуренция торговых фирм"

1. Если оба игрока "разумны", то наилучшее решение

$$f_2(2;2) = (4;1).$$

2. Если P1 осведомлен о возможной агрессивности P2, то более надёжным является решение

$$f_2(1;1) = (3;2).$$

3. Для наиболее эффективного поведения игрока P1 ему нужно быть информированным о "характере" противника, т.е. игрока P2.

Очевидно, что возможно рассмотрение последующего повторения данной игры с накоплением результатов.

12.3. Последовательная четырёхходовая игра

Рассмотрим пример четырёхходовой последовательной игры, граф которой приведен на рис. 12.3.

Найдём наилучшие и наихудшие сценарии с точки зрения каждого из игроков.

Наиболее благоприятный сценарий для P1 представлен на рис. 12. Формально получение наилучшего для P1 результата записывается следующим образом

$$f_4(y_1; y_2; y_3; y_4) = f_4(1; 1; 1; 1) = (139; 50).$$

В конечном итоге, т.е. на 4-м ходу игры, игрок P1 имеет максимально возможный результат*

$$A_{4, \max} = 139.$$

Наихудший сценарий для P1, показанный на рис. 12.3, приводит к следующему результату

$$f_4(1; 2; 2; 1) = (17; 120), \quad A_{4, \min} = 17.$$

Следует отметить неявную, но важную особенность реализации наихудшего для P1 сценария. Конечный результат $A_{4, \min} = 17$ меньше чем предшествующий результат этого игрока $A_{2, \min} = 22$, т.е. последний ход игрока P1 при данном сценарии принёс ему убытки в размере 5 усл.ед.

* В соответствии с логикой последовательной четырёхходовой игры, игрок P1 получает окончательный результат уже на 3-м ходу игры, но на графе конечный результат этого игрока проставлен после 4-го хода, что, возможно, имеет некоторый смысл, поэтому конечный результат для P1 обозначен как A_4 .

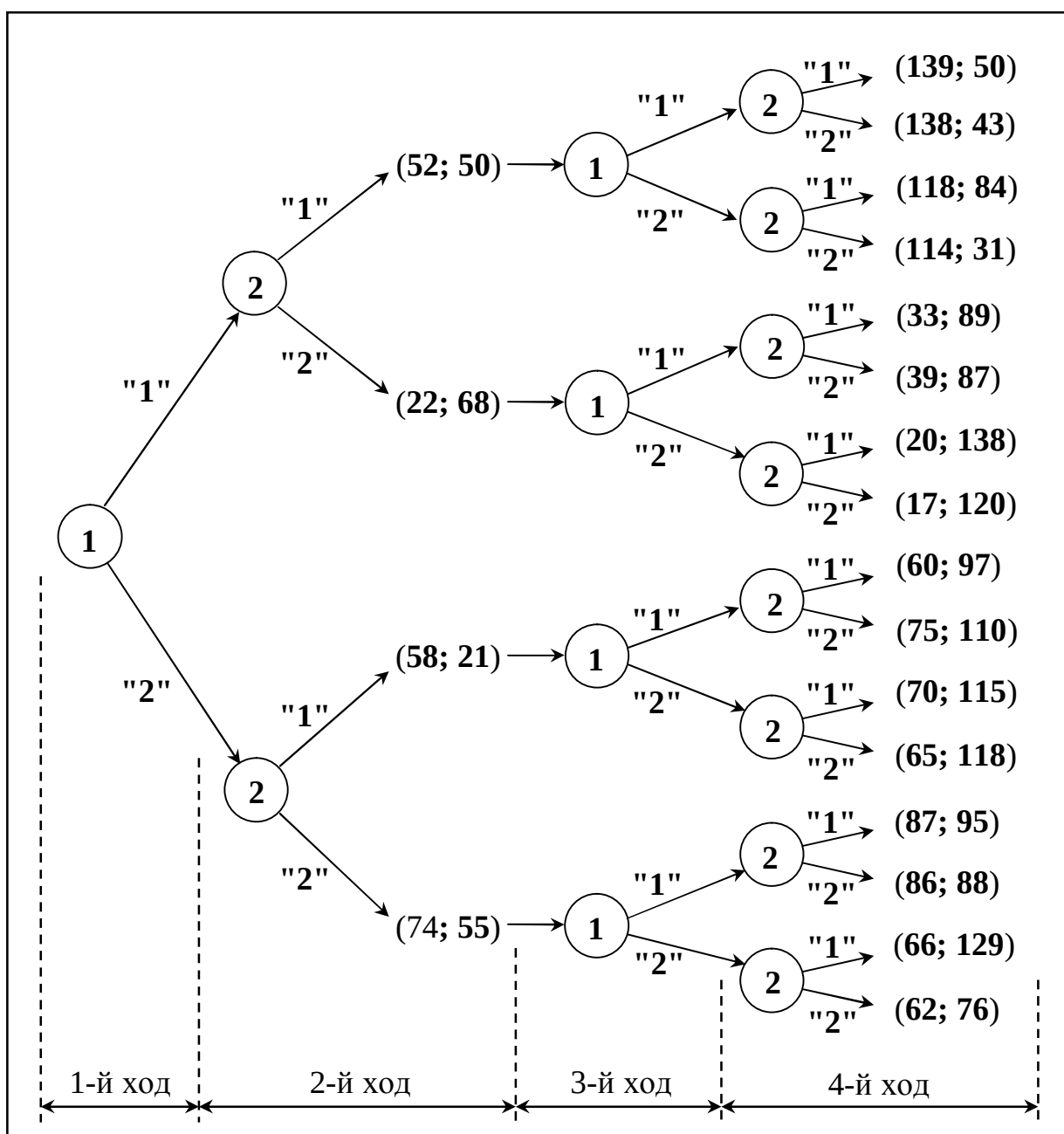


Рис. 12.3 – Граф четырёхходовой игры

Наиболее благоприятный сценарий для P2 представлен на рис. 14. Формально получение наилучшего для P2 результата записывается следующим образом

$$f_4(1; 2; 2; 1) = (20; 138), \quad B_{4, \max} = 138.$$

Достаточно логичным является то, что наилучшие результаты игроков P1 и P2 незначительно различаются между собой.

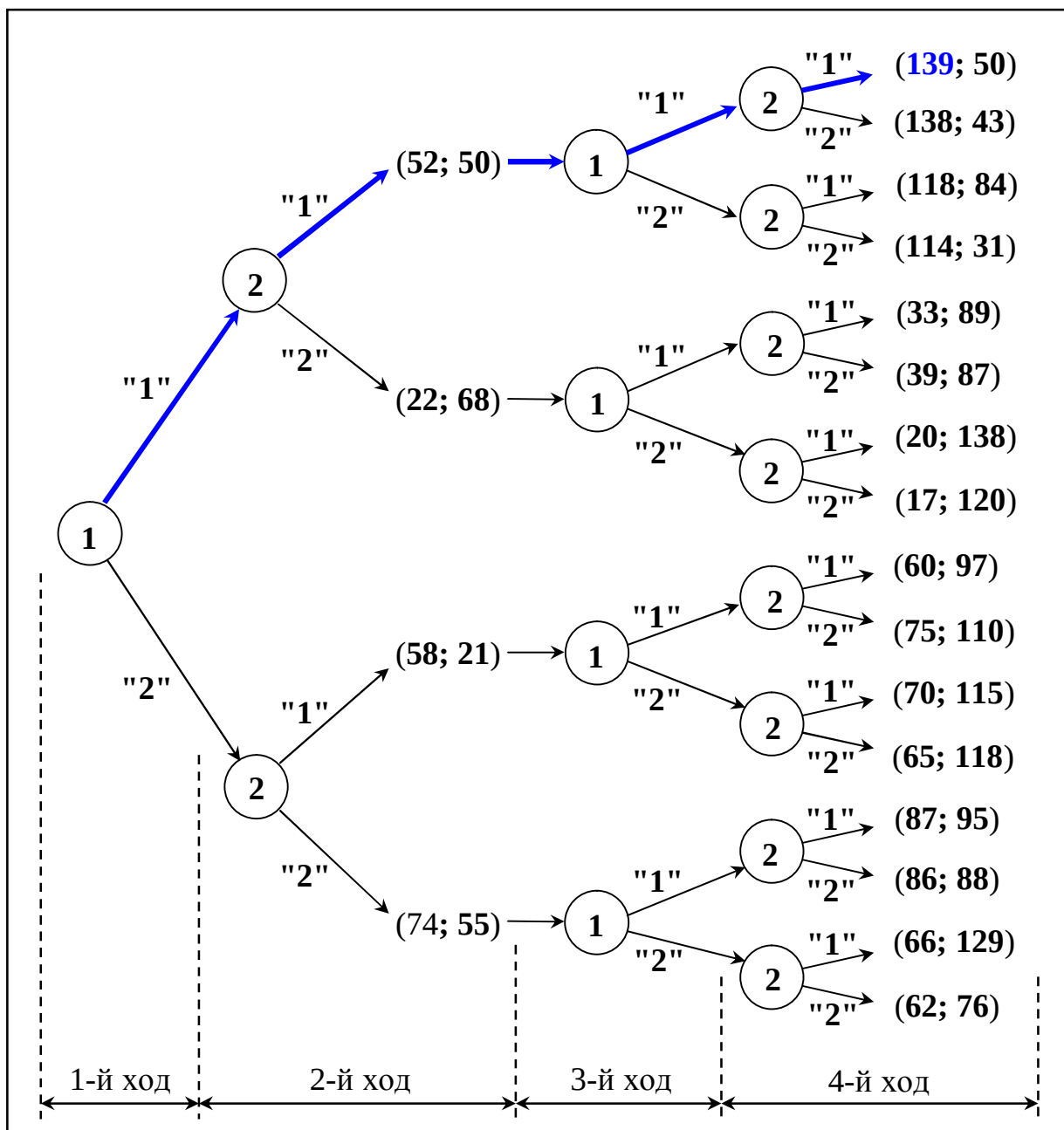


Рис. 12.4 – Наиболее благоприятный сценарий для игрока P1

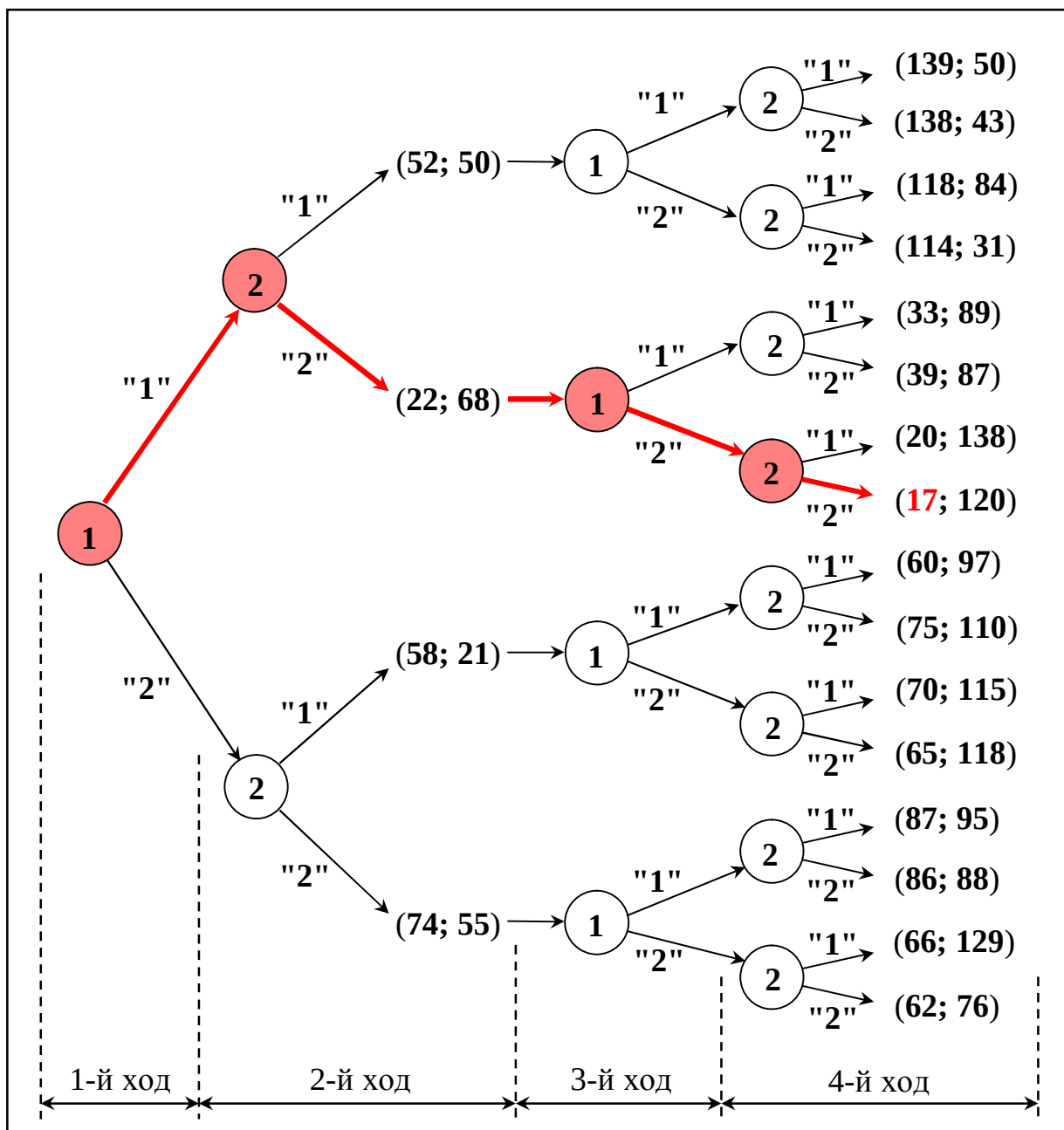


Рис. 12.5 – Наихудший сценарий для игрока P1

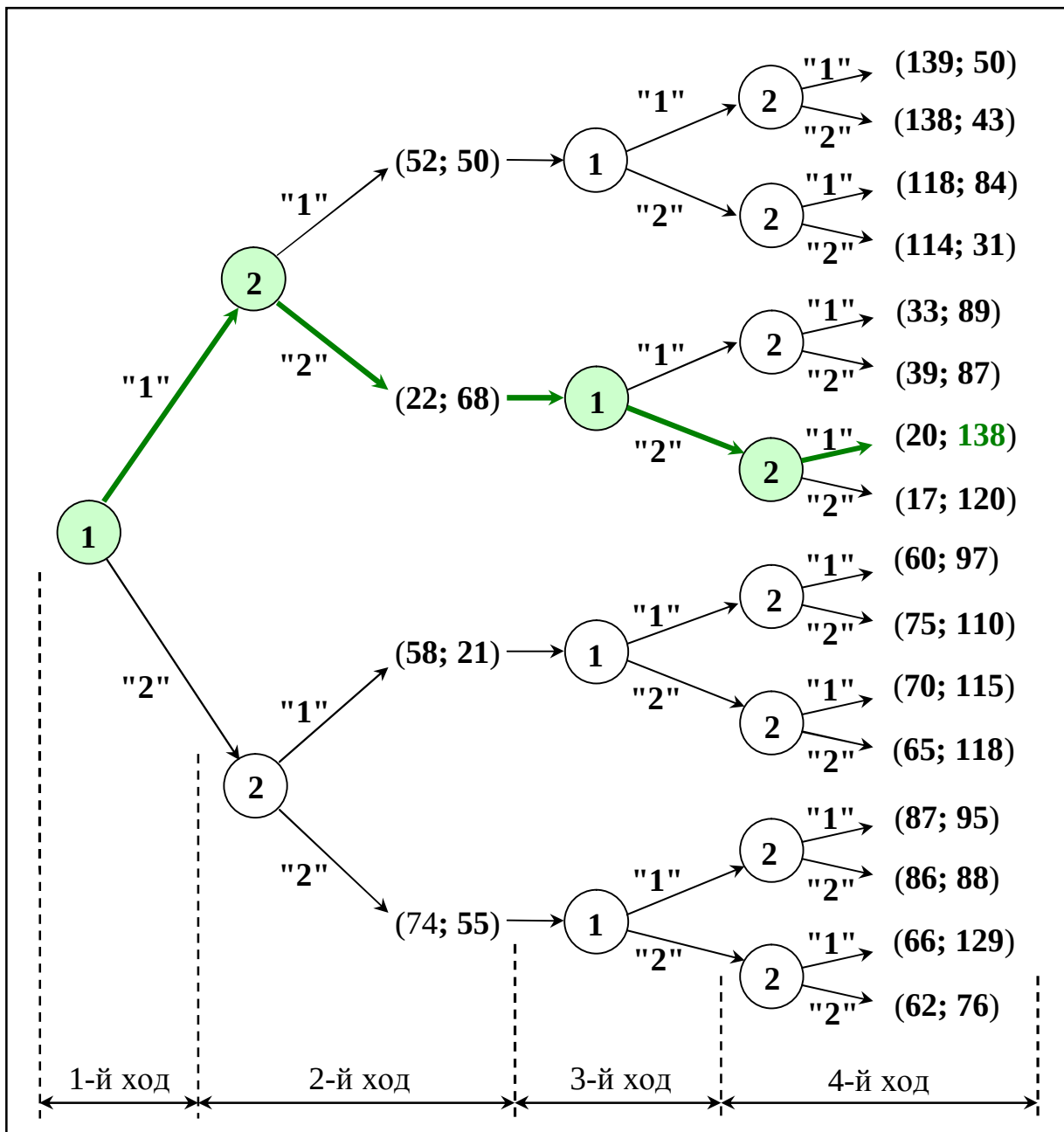


Рис. 12.6 – Наиболее благоприятный сценарий для игрока P2

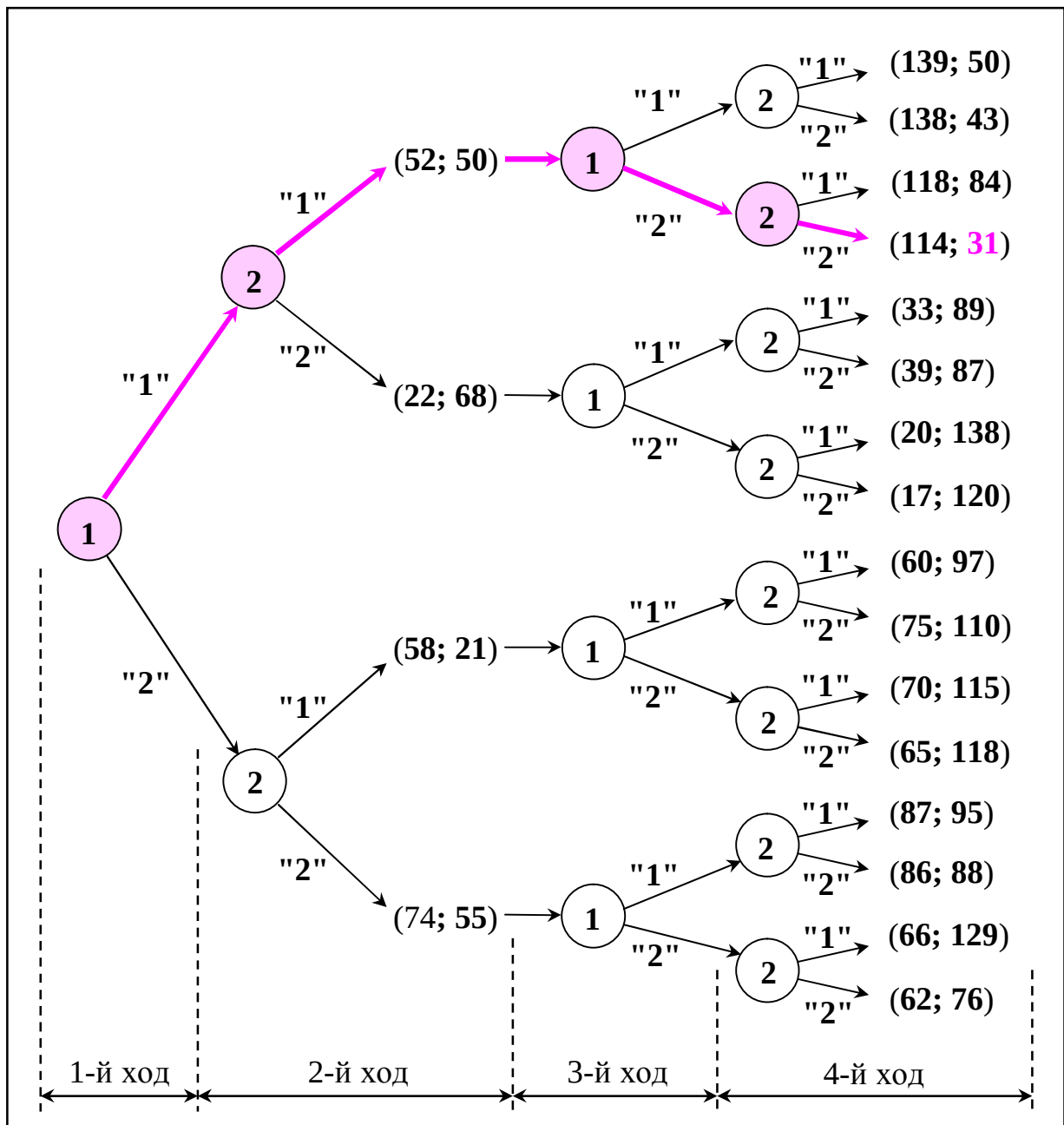


Рис. 12.7 – Наихудший сценарий для игрока P2

Наихудший сценарий для P2 (рис. 12.7) формируется следующим образом

$$f_4(1;1;2;2) = (114; 31), \quad B_{4,\min} = 31.$$

Поскольку худший результат игрока P1 практически вдвое меньше чем у игрока P2, то игроку P1 следует придерживаться менее оптимистичной стратегии, чем игроку P2.

Пессимизм игрока P1 так же может быть обусловлен другими соображениями. Например, если считать, что все сценарии равновероятны*, то игрок P1 в трёх случаях из 16-ти по окончании игры имеет убытки. Игрок P2 только в двух случаях имеет убытки и в одном случае имеет нулевую прибыль, что несколько лучше чем у P1.

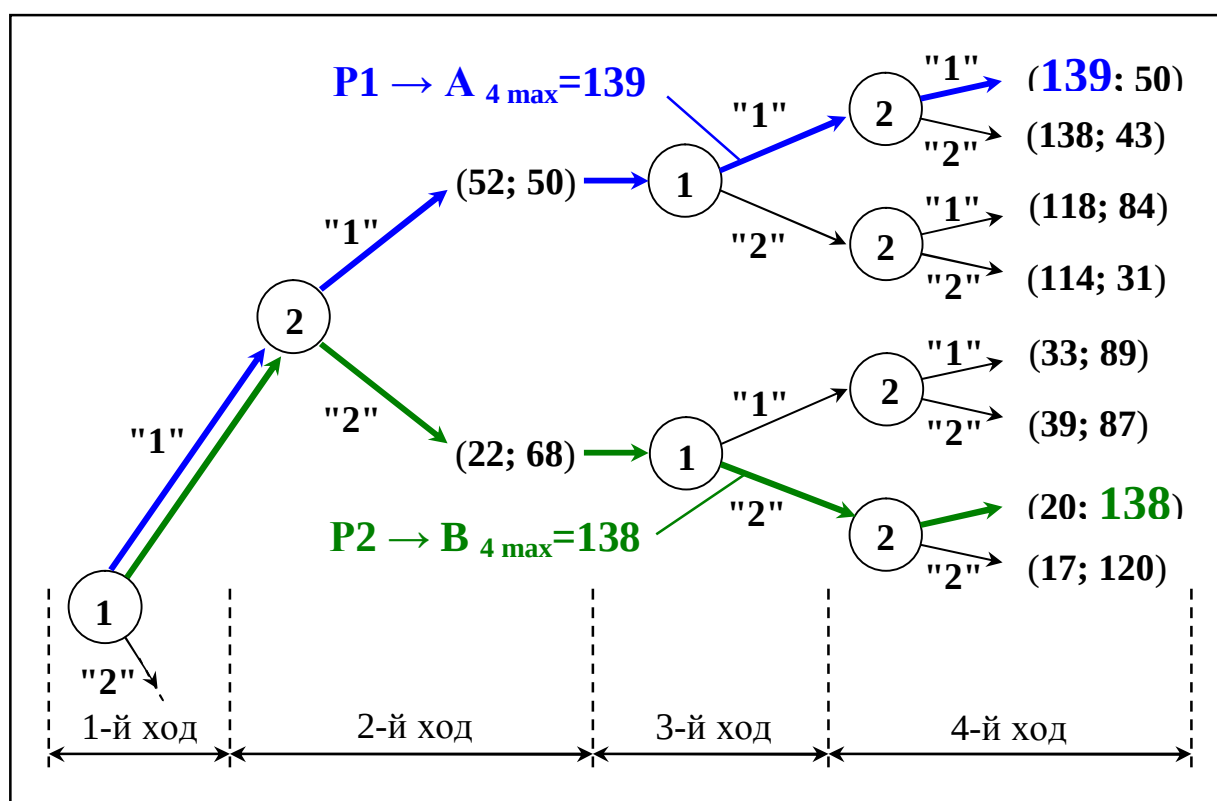


Рис. 12.8 – Фрагмент графа с траекториями движения к наилучшим результатам

* При неравновероятных сценариях, обработав имеющуюся статистику или из каких-либо других соображений, можно дополнить приведенный граф, если нанести у каждой дуги графа вероятность её прохождения на данном ходу игры. Такой подход позволяет перейти к статистическому анализу игры, а само графическое отображение в рассматриваемой статистической интерпретации известно как "дерево решений".

Если считать, что игроки P1, P2 могут правильно рассчитать все возможные варианты игры и соответствующие им результаты, то встаёт вопрос: Как же будет развиваться игра, какие ходы приведут игроков к наилучшим из возможных результатов?

Конечно, оба игрока в первую очередь ориентируются на достижение наилучших результатов, траектории движения, к которым показаны на рис. 12.8. В этом плане ход первого игрока с выбором стратегии "1" устраивает обоих игроков, т.к. является началом траекторий, приводящим их к наилучшим результатам.

Далее логичным продолжением игры является второй ход, при котором игрок P2 выбирает стратегию "2". Возможным конечным результатом для P2 являются следующие выигрыши

$$B_4 : \{89; 87; 138; 120\}.$$

При этом очевидно, что наилучший результат $B_{4\max} = 138$ для P2 недостижим, т.к. P1, желая избежать самых низких результатов $A_4 : \{20; 17\}$, выберет на 3-м ходу стратегию "1", что гарантирует несколько лучший результат $A_4 : \{33; 39\}$.

Таким образом, стремление к наибольшему из возможных результатов в данной игре приводит к довольно скромным выигрышам

$$\frac{P1: A_4 \Rightarrow A_{\max} = 139}{P2: B_4 \Rightarrow B_{\max} = 138} \Rightarrow A_4 = 33; B_4 = 89.$$

Очевидно, что игроки будут искать другие траектории для более эффективных решений, причём, поскольку P1 делает первый ход, то именно этот игрок попытается на первом ходу выбрать траекторию "2", мотивируя такое поведение тем, что оно позволит избежать наихудших для него конечных результатов $A_4 : \{33; 39; 20; 17\}$. Дальнейший ход игры отражается на фрагменте графа, изображённом на рис. 12.9.

Логика данного решения вполне очевидна:

2-й ход: Игрок P2 выбирает стратегию "2", поскольку эта стратегия с точки зрения текущей результативности намного превосходит стратегию "1".

3-й ход: Игрок P1 выбирает траекторию которая в конечном итоге приведёт к локальному максимуму $A_4 : \{87; 86\}$, причём, как видно, этот результат мало зависит от действий противника.

4-й ход: Игрок P2 без сомнений выбирает путь к своему локальному максимуму $B_4 = 95$.

Таким образом, формализованная запись рассмотренного сценария выглядит следующим образом

$$f_4(2;2;1;1) = (87;95).$$

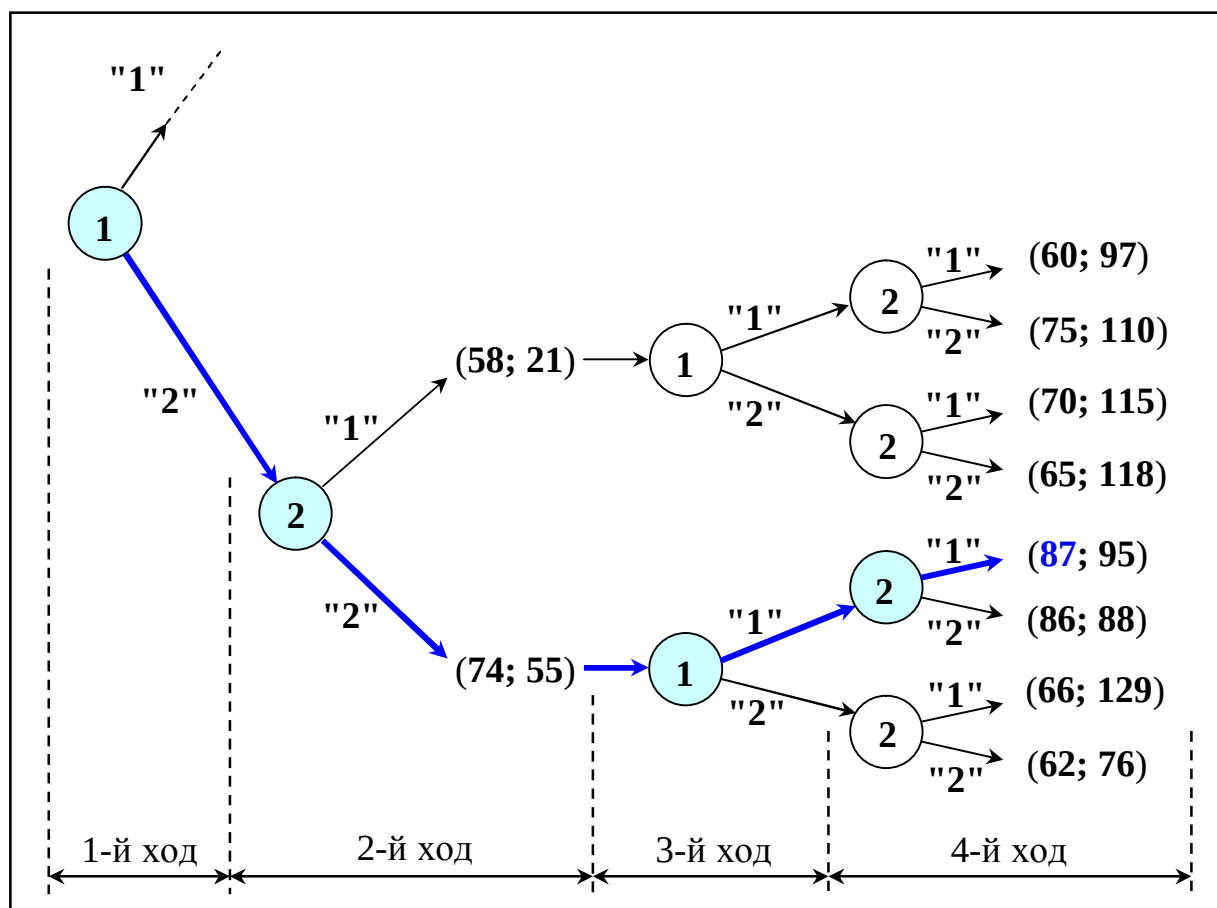


Рис. 12.9 – Фрагмент графа с максимизацией выигрыша для P1

Хотя первый ход делает игрок P1 и в дальнейшем он активно управляет выбором траектории движения к результату, тем не менее, он как бы проигрывает игроку P2, поскольку выигрыш последнего выше чем у первого игрока. Тем не менее, оба игрока имеют значительно более высокие результаты, чем те, которые получаются при безоглядном стремлении к максимальным результатам.

Казалось бы очевидные преимущества предыдущего решения не вызывают сомнений, но это не так. Снова обратимся ко 2-му ходу траектории, изображённой на рис. 16, здесь была выбрана стратегия "2"

$$P2: y_2 = 2 \Rightarrow A_2 = 55.$$

Рассмотрим другой вариант этого хода

$$P2: y_2 = 1 \Rightarrow A_2 = 21.$$

Посмотрим, к чему этот, на первый взгляд нелогичный ход, может привести к концу игры

$$f_4(2;1;1;2) = (75; 110).$$

Как видно, результат игрока P2 увеличился, причём очевидно, что выигрыш P1 уменьшился, что в конкурентной борьбе не на последнем месте. Наглядно данное решение представлено на рис. 12.10.

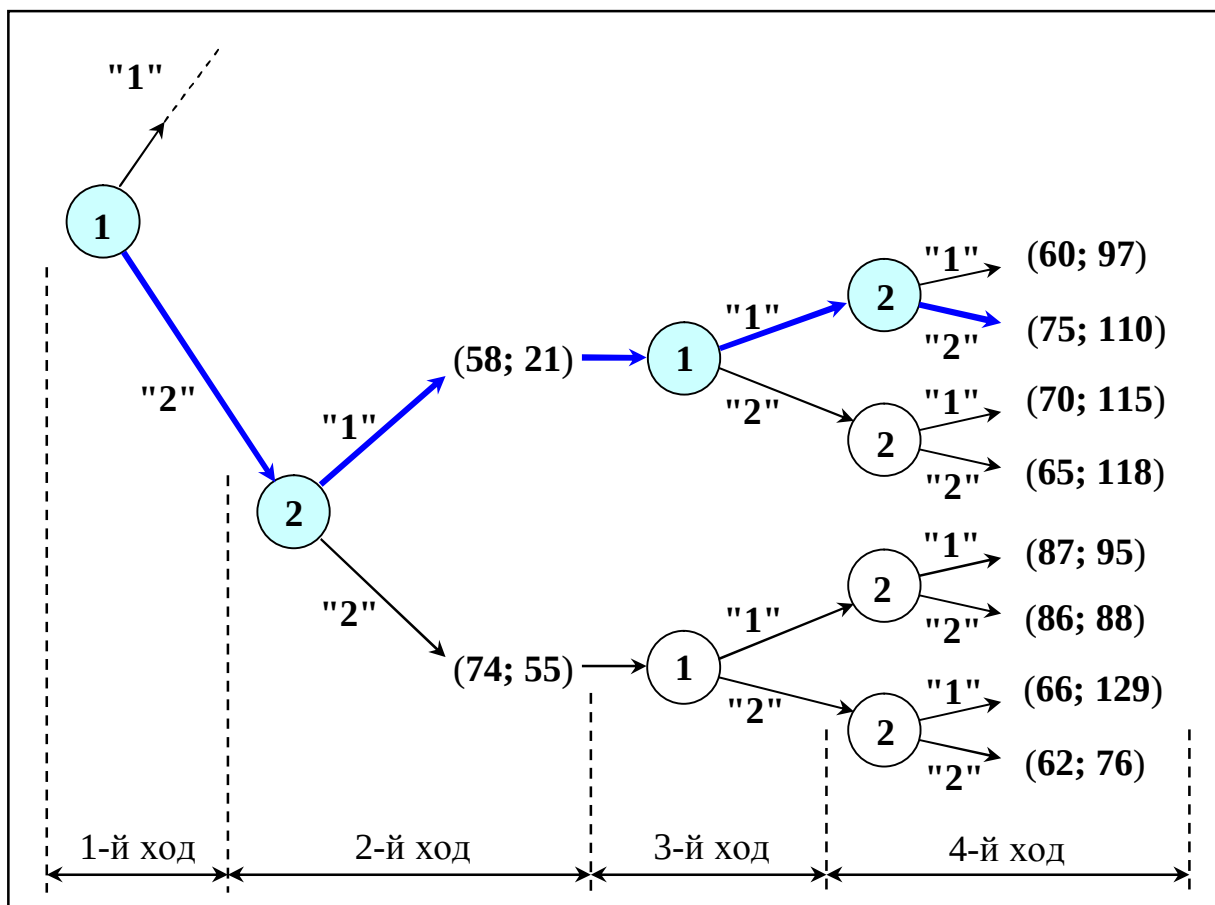


Рис. 12.10 – Максимизация выигрыша для P2

Как видно из графа на рис. 12.10, в данной игре достаточно принципиальное решение принимается игроком P2 на 2-м ходе игры. Что же может повлиять на выбор игрока P2, какую стратегию он здесь выберет? Ответ на этот вопрос следует искать, обратив внимание на устойчивость финансового состояния игрока P2.

Если, например, ко времени второго хода (допустим, что это второй год планируемого периода) финансовое состояние достаточно устойчивое, то можно согласиться с получением сравнительно небольшой прибыли $B_2 = 21$, наперстав упущенное в конце игры, т.е. получив через два года повышенный результат $B_4 = 110$.

Если же, финансовое состояние Р2 отличается слабой устойчивостью к моменту выполнения второго хода, то без всяких сомнений нужно выбрать наиболее результативную текущую стратегию $y_2 = 2$, которая даёт повышенный текущий результат $B_2 = 55$, но приводит к более слабому результату в конце игры.

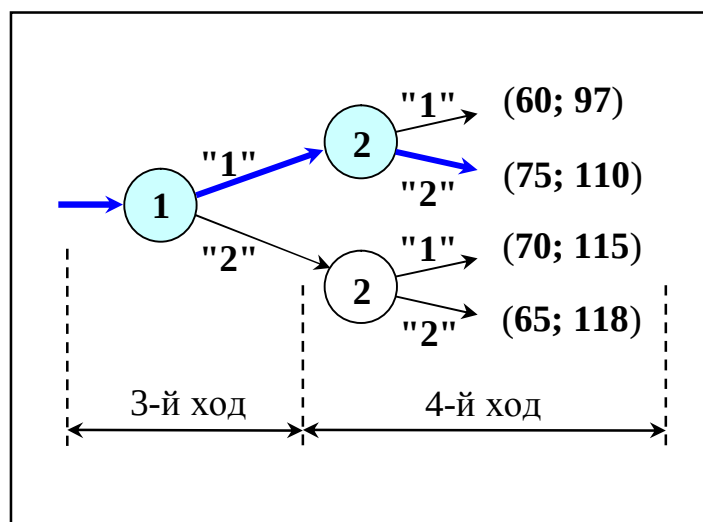


Рис. 12.11 – Фрагмент графа с окончанием игры

Вернёмся снова к 3-му ходу игры, воспользовавшись фрагментом графа на рис. 12.11. Обсудим то, на сколько продуманным является ход игрока Р1. Если считать, что на 4-м ходу игрок Р2 с равной вероятностью выбирает стратегию "1" или стратегию "2", то для игрока Р1 математическое ожидание окончательного результата одинаково при выборе любой из возможных стратегий. Действительно, в этом несложно убедиться

$$m_1(A_4) = \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 75 = 67,25; \quad m_2(A_4) = \frac{1}{2} \cdot 70 + \frac{1}{2} \cdot 65 = 67,25.$$

Несмотря на одинаковую ожидаемую результативность обеих возможных стратегий для Р1, всё же есть дополнительные соображения склоняющие его к выбору стратегии "1". Во-первых, максимальный возможный результат Р1 всё же выше при выборе стратегии "1". Во-вторых, выбирая "1", игрок Р1 снижает у конкурента как средний результат, так и максимально возможный. Поэтому выбор стратегии "1" для игрока Р1 на 3-м ходу выглядит не случайным, а вполне обоснованным.

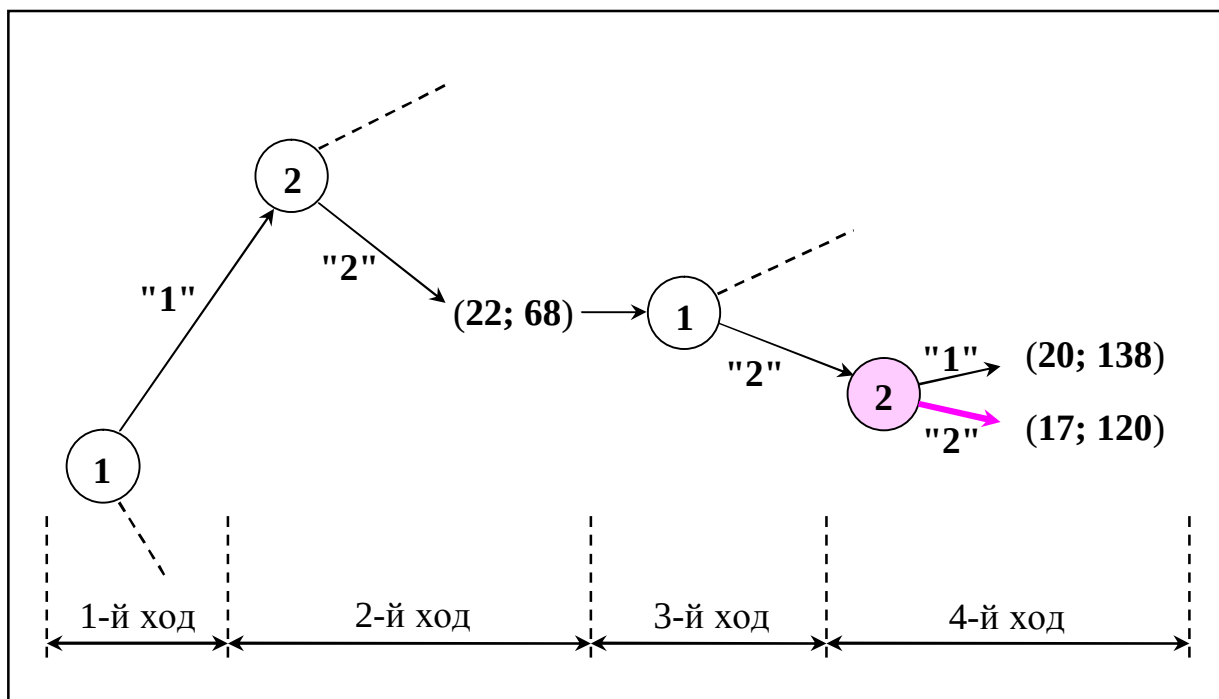


Рис. 12.12 – Агрессивно-нелогичный ход игрока P2

На примере рассматриваемой игры продемонстрируем так называемый "агрессивно-нелогичный ход". Для этого обратимся к фрагменту графа игры, представленному на рис. 12.12. Не уточняя, какие соображения при выборе ходов привели игру в данное состояние, рассмотрим формализованное описание игры с агрессивно-нелогичным заключительным ходом

$$f_4(1; 2; 1; 2) = (17; 120).$$

Агрессивно-нелогичным ходом является 4-й ход игры, который делает игрок P2. Дело в том, что игрок P2 мог бы выбрать стратегию "1" и тогда результат игры составил бы

$$f_4(1; 2; 1; 1) = (20; 138),$$

что даёт увеличение выигрыша игрока P2, но игрок P1 сознательно выбрал уменьшение своего выигрыша на 18 усл.ед. При этом игрок P1, имеющий незначительный выигрыш 20 усл.ед., теряет 3 усл.ед., за которым маскируются его убытки после третьего хода в 5 усл.ед. Такое состояние игрока P1 может вызвать его банкротство, что собственно и даёт основание для агрессивного поведения игрока P2.

13. РАСШИРЕННАЯ И НОРМАЛЬНАЯ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ БИМАТРИЧНЫХ ИГР

Расширенную форму представления последовательных игр, т.е. использование графов для наглядного отображения возможных ходов и получаемых выигрышей можно дополнить такт называемой нормальной формой представления игры платёжной матрицей, содержащей в явном виде все возможные чистые стратегии.

Нормальная форма дополняет расширенную форму представления последовательных игр, давая возможности дополнительного анализа.

Обратимся в качестве примера демонстрирующего сочетание расширенной формы и нормальной формы представления последовательных игр к задаче о конкуренции двух торговых фирм, постановка которой подробно рассматривалась в предыдущем разделе. Граф первых двух ходов этой игры представлен на рис. 13.1.

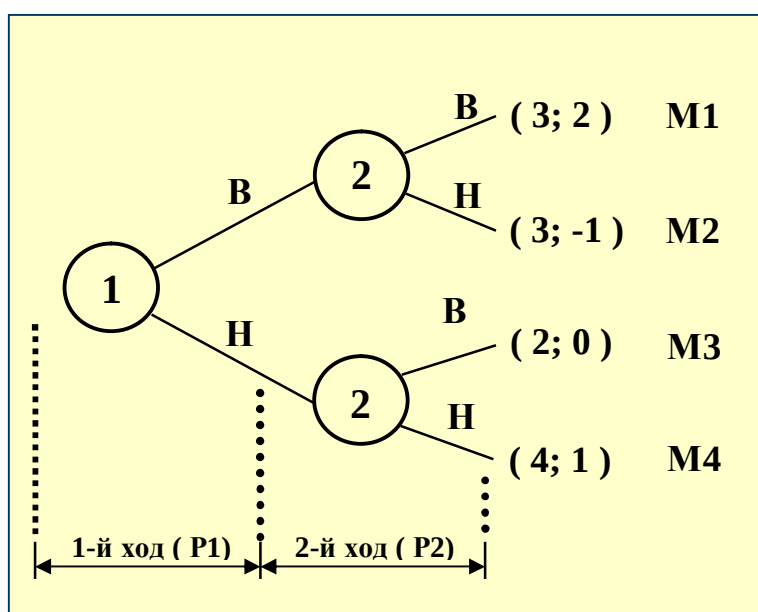


Рис. 13.1 – Граф игры "Конкуренция торговых фирм" (расширенная форма представления)

Нормальная форма представления рассматриваемой игры приведена на рис. 13.2.

$u(P1;P2)$		Стратегии P2			
		$a^1 (B B;B H)$	$a^2 (H B;H H)$	$a^3 (B B;H H)$	$a^4 (H B;B H)$
Стратегии P1	$a_1 (B)$	$(3; 2)_{M_1}$	$(3; -1)_{M_2}$	$(3; 2)_{M_1}$	$(3; -1)_{M_2}$
	$a_2 (H)$	$(2; 0)_{M_3}$	$(4; 1)_{M_4}$	$(4; 1)_{M_4}$	$(2; 0)_{M_3}$

Рис. 13.2 – Платёжная матрица игры "Конкуренция торговых фирм" (нормальная форма представления)

Условные обозначения стратегий первого игрока $a_1 (B)$, $a_2 (H)$ понятны без дополнительных пояснений, поскольку первый игрок делает первый и единственный в данной игре ход, поэтому здесь нет никаких отличий по сравнению с одноходовой игрой.

Условные обозначения стратегий второго игрока формируются следующим образом

$$a^j (B_1^j; B_2^j),$$

где j – номер стратегии игрока P1, $j = 1, 2, 3, 4$,

B_1^j – реакция игрока P2 в его j – й стратегии на первую стратегию P1,

B_2^j – реакция игрока P2 в его j – й стратегии на вторую стратегию P1.

Реакция второго игрока для наглядности визуализируется, например, как $B_1^2 = H|B$, что означает вторую стратегию P2 при выборе игроком P1 первой стратегии, или, выбор игроком P2 стратегии "H"-низкая цена, при условии, что P1 выбрал стратегию "B"- высокая цена.

Нетрудно заметить, что возможные игровые ситуации, обозначенные на графе как M_1 , M_2 , M_3 , M_4 в платёжной матрице повторяются дважды в её различных частях, что показывает избыточность платёжной матрицы последовательных игр.

Примечание. Нумерация стратегий и последовательность их перебора в платёжной матрице не имеют принципиального значения, главное, что бы были представлены все возможные сочетания стратегий второго и первого игроков.

13.1. Анализ платёжной матрицы последовательной игры

Использование нормальной формы представления последовательных биматричных игр, хотя и уступает в наглядности расширенной форме представления, но имеет собственные преимущества, в частности нормальная форма позволяет графически исследовать доминирование и находить Нэш-оптимальные решения в чистых стратегиях.

Что бы убедиться в возможностях нормального представления последовательной биматричной игры, выполним графический анализ доминирования для рассматриваемого примера, как это показано на рис. 13.3.

$u(P1;P2)$		Стратегии P2			
		$a^1 (B B;B H)$	$a^2 (H B;H H)$	$a^3 (B B;H H)$	$a^4 (H B;B H)$
Стратегии P1		$(3; 2)$ M_1 $(2; 0)$ M_3	$(3; -1)$ M_2 $(4; 1)$ M_4	$(3; 2)$ M_1 $(4; 1)$ M_4	$(3; -1)$ M_2 $(2; 0)$ M_3
	$a_2 (H)$				

N opt
dominant-столбец

Рис. 13. 3 – Графический анализ доминирования

Отметим особенности результатов выполненного графического анализа:

- Правый столбец стратегии a^3 игрока P2 доминирует все другие столбцы.
- Равновесие по Нэшу имеет место в двух ситуациях: $M_1(3;2)$, $M_4(4;1)$.

Проанализируем взаимное расположение Парето-множества и множества Нэш-оптимальных решений. Для этого отметим исходы всех возможных стратегий в плоскости возможных результатов на рис. 13.4.

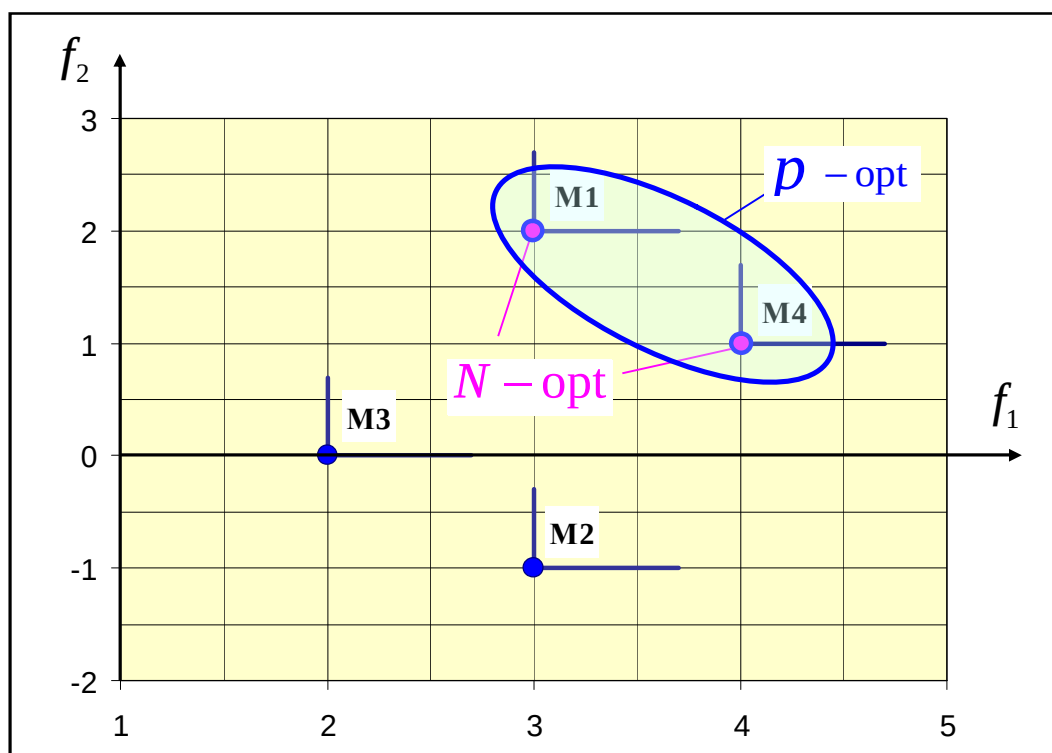


Рис. 13.4 – Парето-множество

В данном конкретном случае Парето-множество и множество решений эффективных по Нэшу совпадают, что вообще-то не обязательно, но имеет определённый смысл – Парето-множество, как результат взаимного соглашения игроков становится устойчивым из-за того, что устойчивым является равновесие по Нэшу.

13.2. Расширенная форма представления статических биматричных игр. Понятие информационного поля

Расширенная форма представления матричных игр – это представление игры в виде графа. Казалось бы, что в статических играх невозможна расширенная форма их представления, т.к. в них ходы делаются одновременно, а не последовательно и поэтому граф, из-за отсутствия дуг как таковых вырождается.

Тем не менее, введение так называемого информационного поля позволяет и для статических игр использовать расширенную форму. Это имеет смысл в сложной смешанной игре, когда в последовательные ходы включаются фрагменты статических игр.

Дело в том, что теория графов даёт наглядный инструментальный анализа и решения последовательных игр, который желательно использовать и в смешанных играх. Как уже отмечалось, избежать кажущихся трудностей включения статических фрагментов в граф последовательных игр позволяет использование понятия информационного поля.

Информационное поле графически отображает возможность игрока получить информацию о предшествующем выборе хода другим игроком при последовательном выполнении ходов.

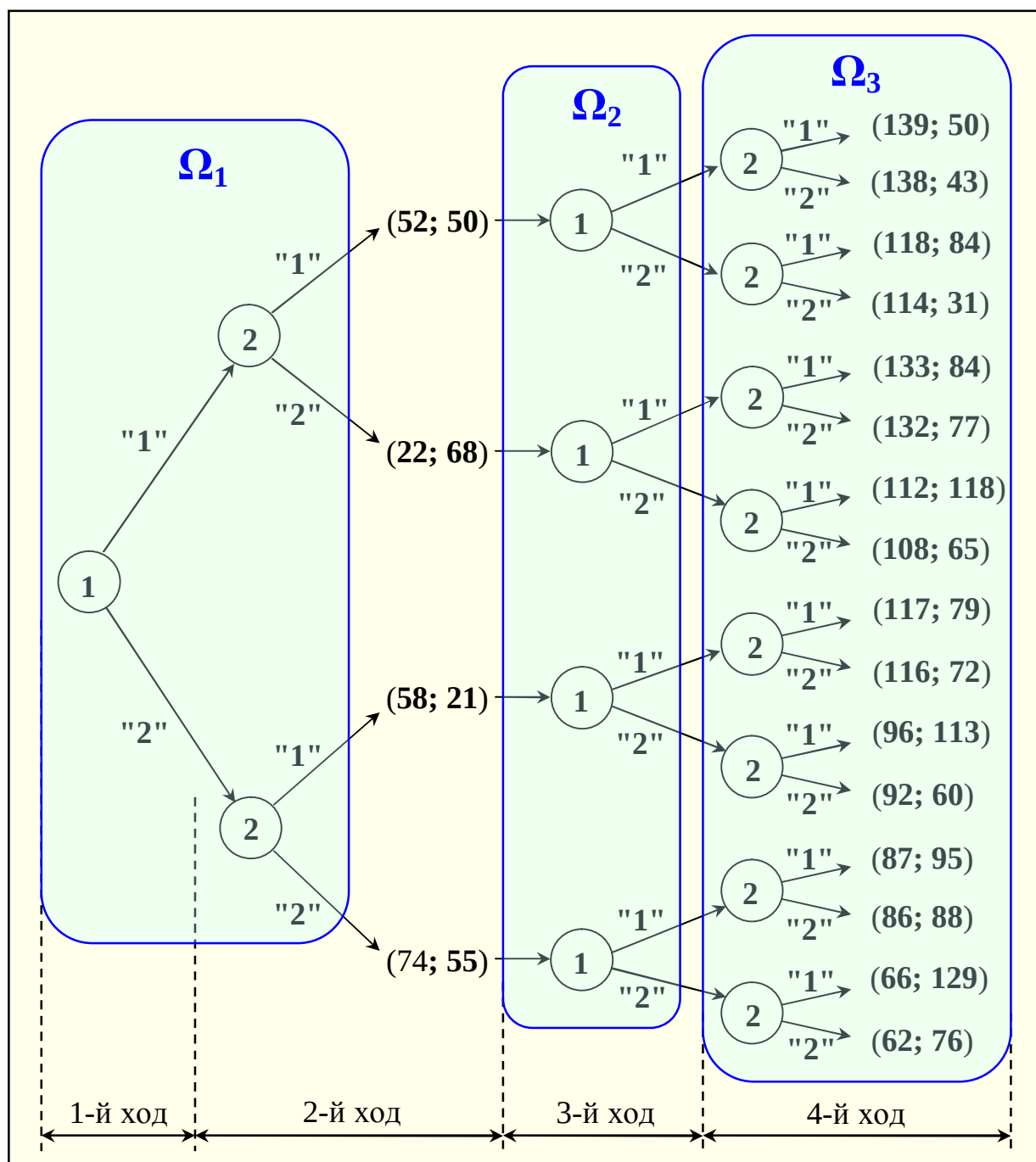


Рис. 13.5 – Граф смешанной игры

Так, например, на рис. 13.5 представлен граф смешанной игры с информационными полями $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. В круглых скобках приведены значения текущих выигрышей, накопленных с начала игры.

Информационное поле Ω_1 охватывает выполнение первого хода, его делает игрок P1, и выполнение второго хода (P2). Это значит, что игрок P2, делая свой ход, знает, как походил противник. Если P1 выбрал стратегию "1", то P2 выберет стратегию "2". Если P1 выберет "2", то для P2 наилучшим ходом является выбор стратегии "1". Таким образом, первые два хода реализуют последовательную игру.

Информационное поле Ω_2 охватывает выполнение третьего хода, его делает игрок P1. Поскольку это поле не пересекается с информационными полями смежных ходов, и так же не пересекается с соседними информационное поле четвёртого хода Ω_3 , то это означает, что 3-й и 4-й ходы реализуют одновременную одноходовую игру.

14. ПАРЕТО-ЭФФЕКТИВНОСТЬ БИМАТРИЧНЫХ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

14.1. Понятие Парето-эффективности в смешанных стратегиях

Определение. Пара смешанных стратегий

$$x^* = (x_1^*; x_2^*), \quad y^* = (y_1^*; y_2^*)$$

называется эффективной (оптимальной) по Парето в смешанных стратегиях, если не существует такой пары смешанных стратегий

$$x = (x_1; x_2), \quad y = (y_1; y_2),$$

для которой выполняются неравенства

$$f_1(x^*; y^*) \leq f_1(x; y) \quad \text{и} \quad f_2(x^*; y^*) \leq f_2(x; y)$$

среди которых по крайней мере одно неравенство должно быть строгим.

Примечание. Стратегии $x^* = (x_1^*; x_2^*)$, $y^* = (y_1^*; y_2^*)$ могут быть и чистыми стратегиями, однако произвольно выбираемые для анализа стратегии $x = (x_1; x_2)$, $y = (y_1; y_2)$, в данном контексте предполагаются смешанными стратегиями.

Пояснение. Равновесие по Нэшу означает, что ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить свой выигрыш. В случае эффективной по Парето пары смешанных стратегий, все игроки, действуя совместно, не могут строго увеличить выигрыш хотя бы одного игрока, не уменьшая строго выигрыш другого игрока.

14.2. Выявление множества Парето-эффективных решений в смешанных стратегиях

Рассмотрим методику выявления Парето-множества решений в смешанных стратегиях на примере биматричной повторяющейся игры*, платёжная матрица которой приведена на рис. 14.1.

[u(P1,P2)]		Стратегии P2	
		Стратегия "1"	Стратегия "2"
Стратегии P1	Стратегия "1"	(20 ; 70)	(60 ; -40)
	Стратегия "2"	(100 ; 40)	(-20 ; 120)

Рис. 14.1 – Платёжная матрица игры при поиске Парето-множества решений в смешанных стратегиях

Предварительно выполним графический анализ доминирования и поиск решений по Нэшу в чистых стратегиях, как это показано на рис. 14.2.

[u(P1,P2)]		Стратегии P2	
		Стратегия "1"	Стратегия "2"
Стратегии P1	Стратегия "1"	(20 ; 70)	(60 ; -40)
	Стратегия "2"	(100 ; 40)	(-20 ; 120)

Рис. 14.2 – Выявление Нэш-оптимальных решений в чистых стратегиях

* Собственно, решение в смешанных стратегиях уже подразумевает неоднократное повторение игры.

Выполненный графический анализ показал отсутствие Нэш-оптимальных решений в чистых стратегиях (об этом свидетельствует то, что ни одна из возможных игровых ситуаций 1,2,3,4 одновременно не собирает в соответствующей клетке платёжной матрицы двух геометрических признаков оптимальности, таких как  ).

Найдём оптимум по Нэшу в смешанных стратегиях, который должен быть по теореме Дж. Неймана. Воспользуемся аналитическим решением

$$y_1^{(0)} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \quad y_2^{(0)} = 1 - y_1^{(0)};$$

$$x_1^{(0)} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}; \quad x_2^{(0)} = 1 - x_1^{(0)}.$$

После подстановки компонент платёжной матрицы рассматриваемой игры получим следующие численные результаты

$$x^{(0)} = [0,421; 0,579] \quad ; \quad y^{(0)} = [0,500; 0,500]^T.$$

Средние значения выигрышей, соответствующие найденным оптимальным смесям вычисляются как

$$\bar{f}_1 = [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [y^{(0)}] = 40,00 \quad ; \quad \bar{f}_2 = [x^{(0)}] \cdot [B] \cdot [y^{(0)}] = 52,63.$$

Далее займёмся построением области возможных результатов в плоскости выигрышей.*

Воспользуемся аналитическим представлением функций средних выигрышей

$$\bar{f}_1(x, y) = [x] \times [A] \times [y] = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2,$$

$$\bar{f}_2(x, y) = [x] \times [B] \times [y] = b_{11}x_1y_1 + b_{12}x_1y_2 + b_{21}x_2y_1 + b_{22}x_2y_2.$$

Сгруппируем слагаемые по y_1 и y_2

$$\bar{f}_1 = y_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_2) + y_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2),$$

$$\bar{f}_2 = y_1(b_{11}x_1 + b_{21}x_2) + y_2(b_{12}x_1 + b_{22}x_2).$$

* Именно построение границы области возможных результатов позволит найти множество Парето-оптимальных решений в смешанных стратегиях.

Продemonстрированные аналитические преобразования платёжных функций повторим, используя численные данные рассматриваемого примера

$$\begin{aligned}\bar{f}_1(x, y) &= [x_1; x_2] \times [A] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [x_1; x_2] \times \begin{bmatrix} 20 & 60 \\ 100 & -20 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{f}_2(x, y) &= [x_1; x_2] \times [B] \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [x_1; x_2] \times \begin{bmatrix} 70 & -40 \\ 40 & 120 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Запишем результат перемножения матриц с одновременной группировкой по y_1 и y_2

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= y_1(20 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2) + y_2(60 \cdot x_1 - 20 \cdot x_2), \\ \bar{f}_2 &= y_1(70 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2) + y_2(-40 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2).\end{aligned}$$

Представим полученные соотношения в виде векторной функции

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} = y_1 \left[x_1 \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix} \right] + y_2 \left[x_1 \begin{bmatrix} 60 \\ -40 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -20 \\ 120 \end{bmatrix} \right].$$

Матрицы-столбцы в правой части полученного выражения для платёжной векторной функции представляют собой координаты точек, соответствующих игровым ситуациям рассматриваемого примера, поэтому ниже в под каждым из этих столбцов подпишем обозначение соответствующей игровой ситуации в виде M1, M2, M3, M4.

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} = y_1 \left(x_1 \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix} \right) + y_2 \left(x_1 \begin{bmatrix} 60 \\ -40 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -20 \\ 120 \end{bmatrix} \right) \quad (14.1)$$

M1

M3

M2

M4

Аналогичным образом выполним группировку аргументов векторной функции средних выигрышей по x_1 и x_2

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} = x_1 \left(y_1 \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 60 \\ -40 \end{bmatrix} \right) + x_2 \left(y_1 \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -20 \\ 120 \end{bmatrix} \right) \quad (14.2)$$

M1

M2

M3

M4

Введём в рассмотрение плоскость выбора возможных решений, как в чистых, так и в смешанных стратегиях (см. рис. 14.3). Сначала отметим в этой плоскости точки, которые соответствуют выбору чистых стратегий, обозначив их следующим образом:

$$N1 = N(y_1) = N(x_1 = 1; y_1 = 1),$$

$$N2 = N(y_2) = N(x_1 = 1; y_1 = 0),$$

$$N3 = N(y_3) = N(x_1 = 0; y_1 = 1),$$

$$N4 = N(y_4) = N(x_1 = 0; y_1 = 0).$$

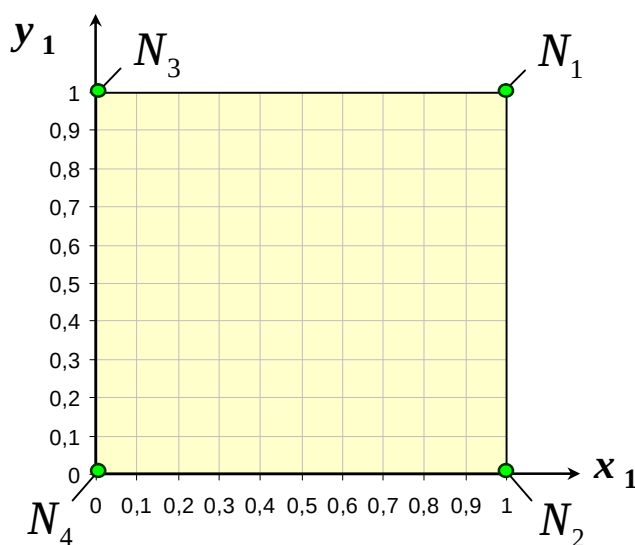


Рис. 14.3 – Плоскость выбора возможных стратегий

Внутри единичного квадрата $N1-N2-N3-N4$ находятся точки соответствующие выбору всех возможных смешанных стратегий. Границы квадрата, т.е. его грани $N1-N2$, $N1-N3$, $N4-N2$, $N4-N3$ за исключением вершин представляют решения, при которых один из игроков выбирает чистую стратегию, а другой игрок использует произвольную смесь стратегий. Например, грань $N2-N1$ является геометрическим местом точек, представляющих решения, при которых первый игрок выбирает первую стратегию $x_1 = 1$, а второй игрок выбирает любую смешанную стратегию $0 < y_1 < 1$. Соответствующие вторые стратегии: $x_2 = 0$ и $1 < y_2 < 0$.

Очевидно, что точки N_1, N_2, N_3, N_4 отображаются в плоскости возможных результатов в соответствующие им точки M_1, M_2, M_4, M_3 , как это показано на рис. 14.4

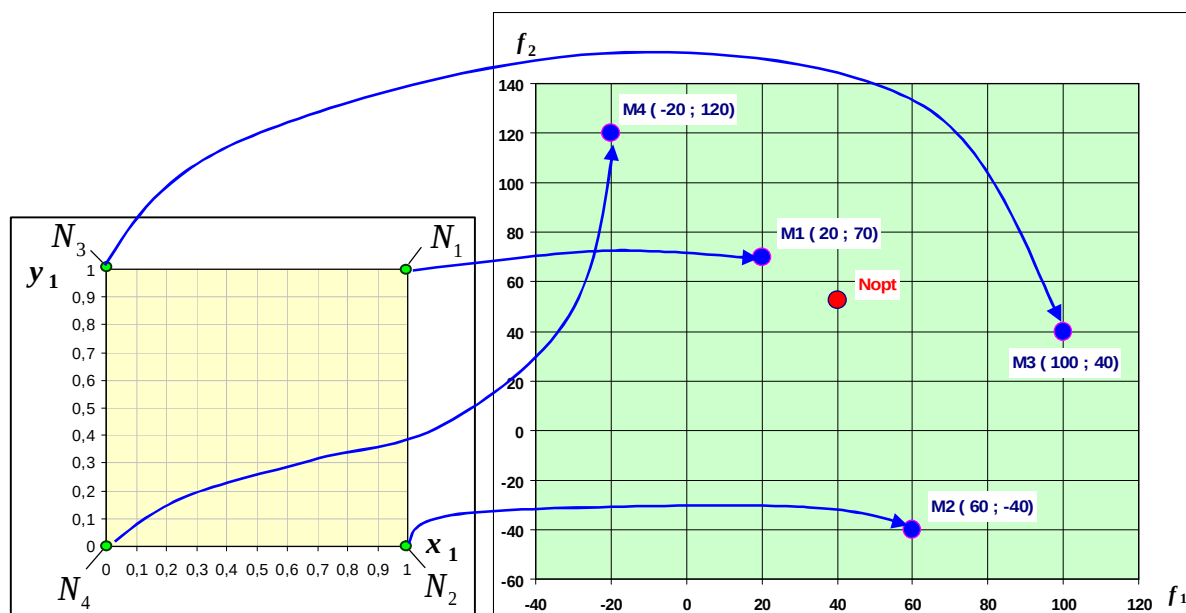
$$N_1 \Rightarrow M_1,$$

$$N_2 \Rightarrow M_2,$$

$$N_3 \Rightarrow M_3,$$

$$N_4 \Rightarrow M_4.$$

Точки $M_1(20;70)$, $M_2(60;-40)$, $M_3(100;40)$, $M_4(-20;120)$ принадлежат множеству возможных решений, отражая выбор решений в чистых стратегиях. Кроме того на рис. 14.4 отметим так же точку Нэш-равновесия $N_{opt}(40; 52,63)$.



а) Плоскость выбора решений

б) Плоскость результатов

Рис. 14.4 – Отображение решений в чистых стратегиях

Далее встаёт вопрос о том, каким образом в плоскости возможных результатов соединить между собой точки M_1, M_2, M_3, M_4 . Попробуем соединить отмеченные точки отрезками прямых линий M_1-M_2 , M_1-M_3 , M_3-M_4 , как показано на рис.5. Поскольку функции результатов имеют линейный характер (см. уравнения 14.1 и 14.2), то очевидно, что отмеченные отрезки принадлежат области возможных решений и, наверное, совпадают с границей области возможных решений. Однако последнее утверждение насчёт границы множества не выдерживает никакой критики, если обратить внимание на то, что точка Нэш-оптимальности в смешанных стратегиях, которая, безусловно,

принадлежит области возможных средних результатов, находится за пределами многоугольника М1-М2-М4-М3.

Пользуясь теорией выпуклых множеств, можно показать, что в рассматриваемой задаче многоугольник М1-М2-М4-М3 представляет границу области возможных состояний, только в том случае, если он выпуклый, но в нашем примере этот многоугольник не является выпуклым.

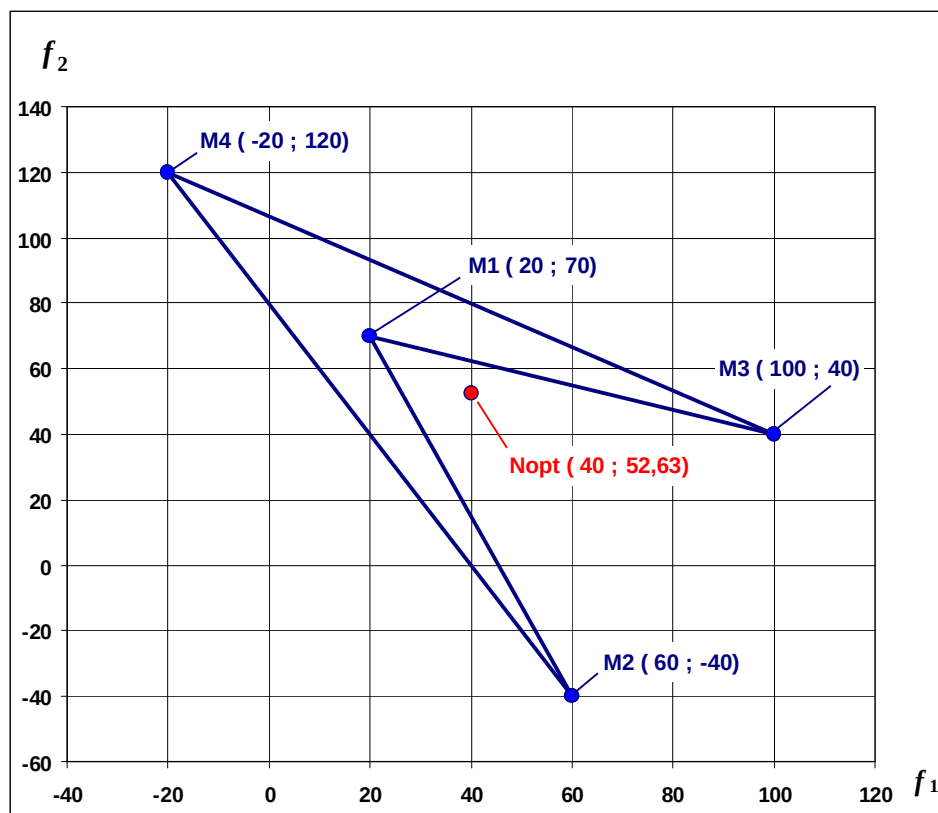


Рис. 14.5 – Отображение выбора решений в чистых стратегиях

Что бы уточнить границы области возможных решений, включающей все без исключения решения, в том числе и решения в смешанных стратегиях, воспользуемся так называемым приёмом заметания, который представляет собой графический анализ векторных функций решения (14.1) и (14.2). При таком методе анализа рассматривается изменение результатов при фиксированной чистой стратегии одного игрока и условии, что другой игрок выбирает произвольную смешанную стратегию.

Рассмотрим применение отмеченного приёма, начиная с грани единичного квадрата N3–N1. Заметание представим как движение точки на грани N3–N1, начиная от точки N3 и двигаясь дальше к точке N1, при этом координаты функции выбора решений будут изменяться следующим образом

$$y_1 = 1; \quad y_2 = 0; \quad 0 \leq x_1 \leq 1; \quad 1 \leq x_2 \leq 0.$$

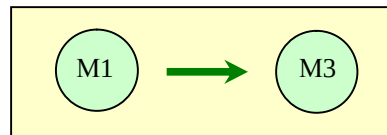
Поскольку в рассматриваемом заметании стратегии второго игрока чистые, т.е. $y_1 = 1, y_2 = 0$, то поэтому обратимся к векторной функции решения (14.1), которая с учётом стратегий P2 преобразуется к виду

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 20 \\ 70 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix} \quad (14.3)$$

M1

M3

Очевидно, что, если $0 \leq x_1 \leq 1$ и одновременно $1 \leq x_2 \leq 0$, то векторная функция решения линейно изменяет свои значения в соответствии с перемещением от точки M3 к точке M1 в плоскости возможных результатов



Таким образом, движение по отрезку N3–N1 в плоскости выбора решений "заметает" отрезок M3–M1 в плоскости возможных результатов.

Повторяя аналогичные рассуждения, рассмотрим "заметание" при движении по всем граням единичного квадрата, которое приводит к следующему

$$\begin{aligned} N1 - N2 &\Rightarrow M1 - M2; \\ N2 - N4 &\Rightarrow M2 - M4; \\ N3 - N4 &\Rightarrow M3 - M4; \\ N1 - N3 &\Rightarrow M1 - M3. \end{aligned}$$

Перенося результаты "заметания" на рис. 4, можно соединить точки M1, M2, M3, M4 отрезками прямых линий, которые по существу являются отображением соответствующих граней единичного квадрата в плоскости выбора решений.

Далее рассмотрим "заметание" отрезка внутри единичного квадрата, который параллелен одной из осей координат, например, параллелен оси y . Из предыдущего анализа ясно, что результатом "заметания" будет отрезок прямой линии, как это показано на рис. 14.6.

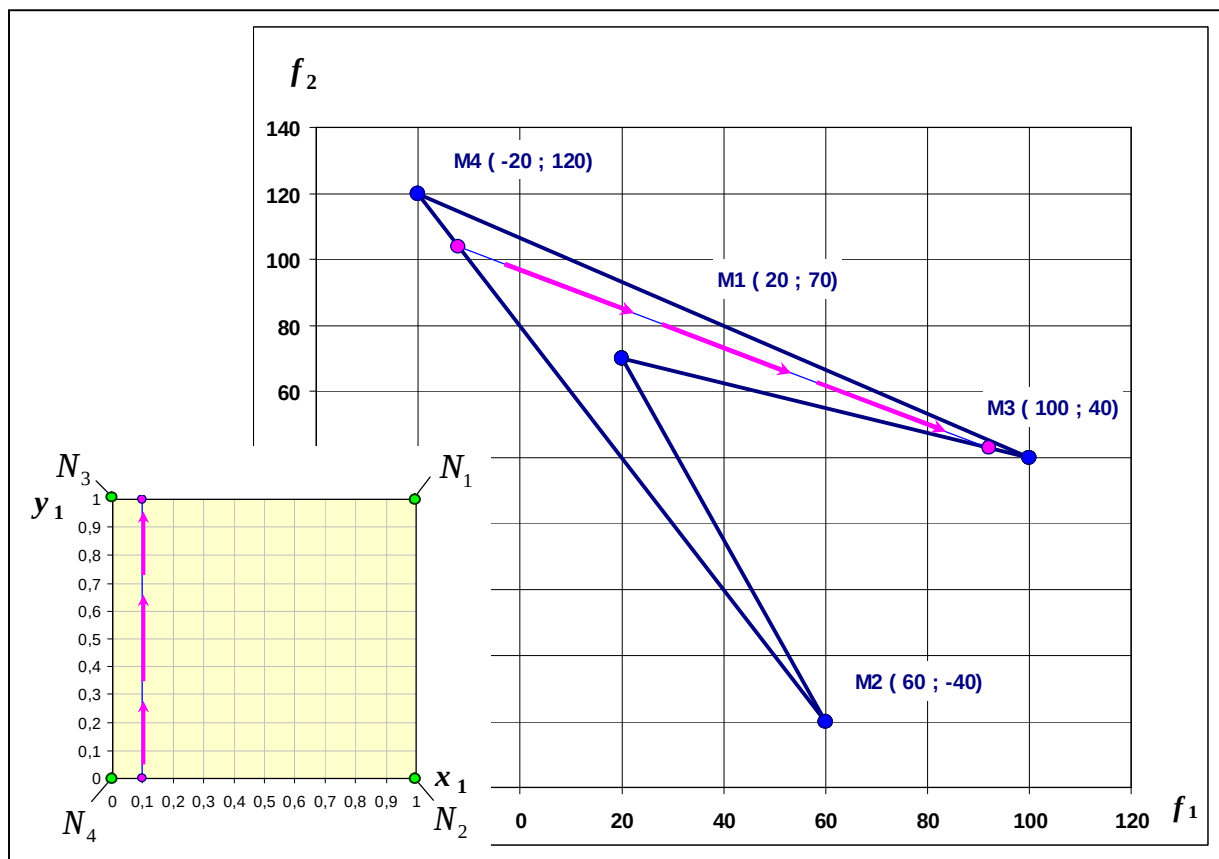


Рис. 14. 6 – "Заметание" отрезка $x_1 = 0,1$ ($x_2 = 0,8$); $0 \leq y_1 \leq 1$ ($1 \leq y_2 \leq 0$)

Выполняя "заметание" серией параллельных отрезков проведённых с некоторым шагом в единичном квадрате, как это показано на рис. 14.7, выявим область возможных решений рассматриваемой задачи. Обратим внимание на то, что точка Нэш-оптимальности оказалась внутри заметаемой области, что вполне закономерно.

Построив серию "заметаемых" отрезков, следует найти точки их пересечения и провести через эти точки огибающую линию, которая будет нелинейной границей области возможных решений.

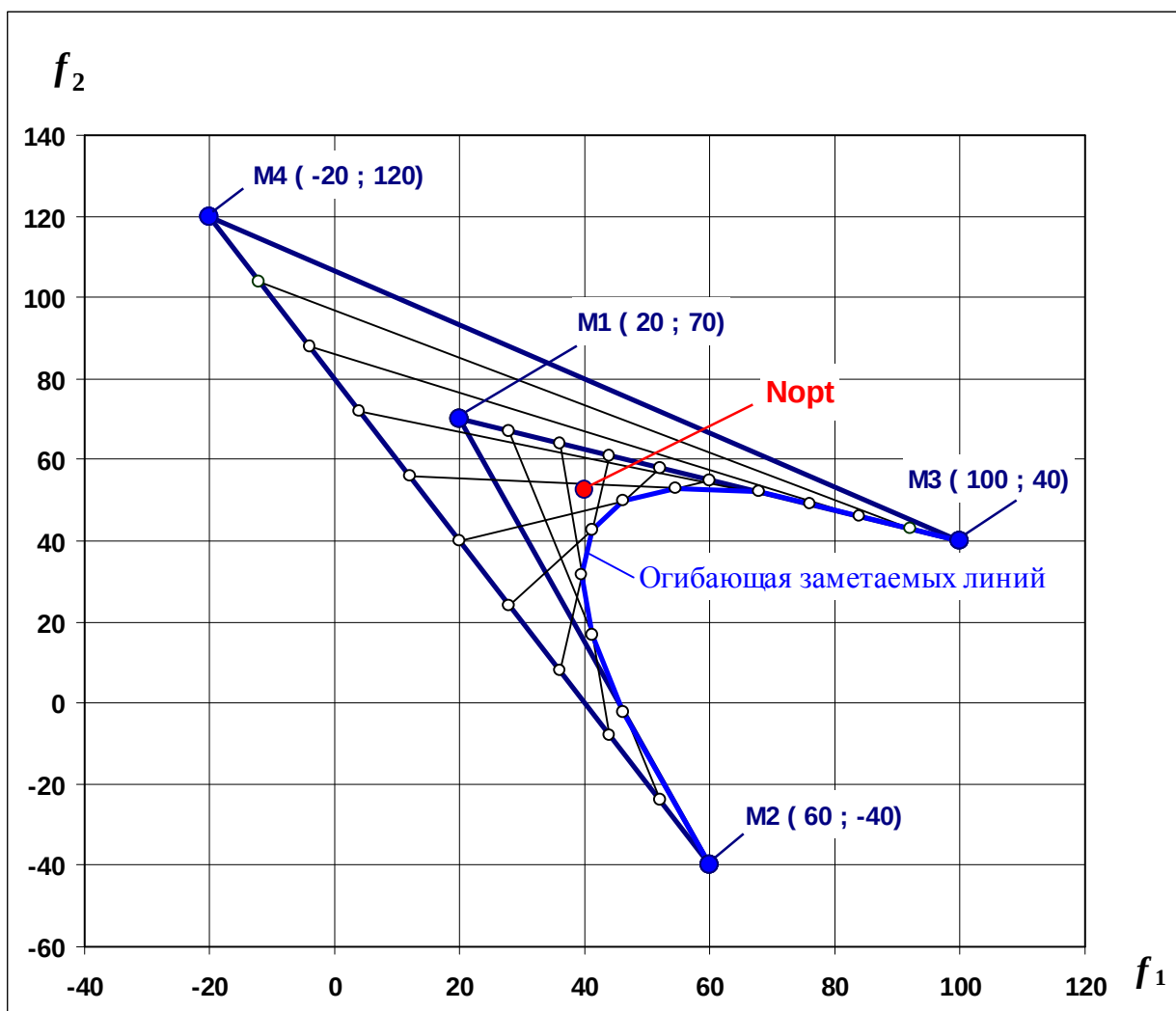


Рис. 14.7 – Построение огибающей заметаемых линий

В конечном итоге, убрав заметаемые отрезки, построим область возможных решений, как в смешанных, так и в чистых стратегиях, представив её на рис. 14.8.

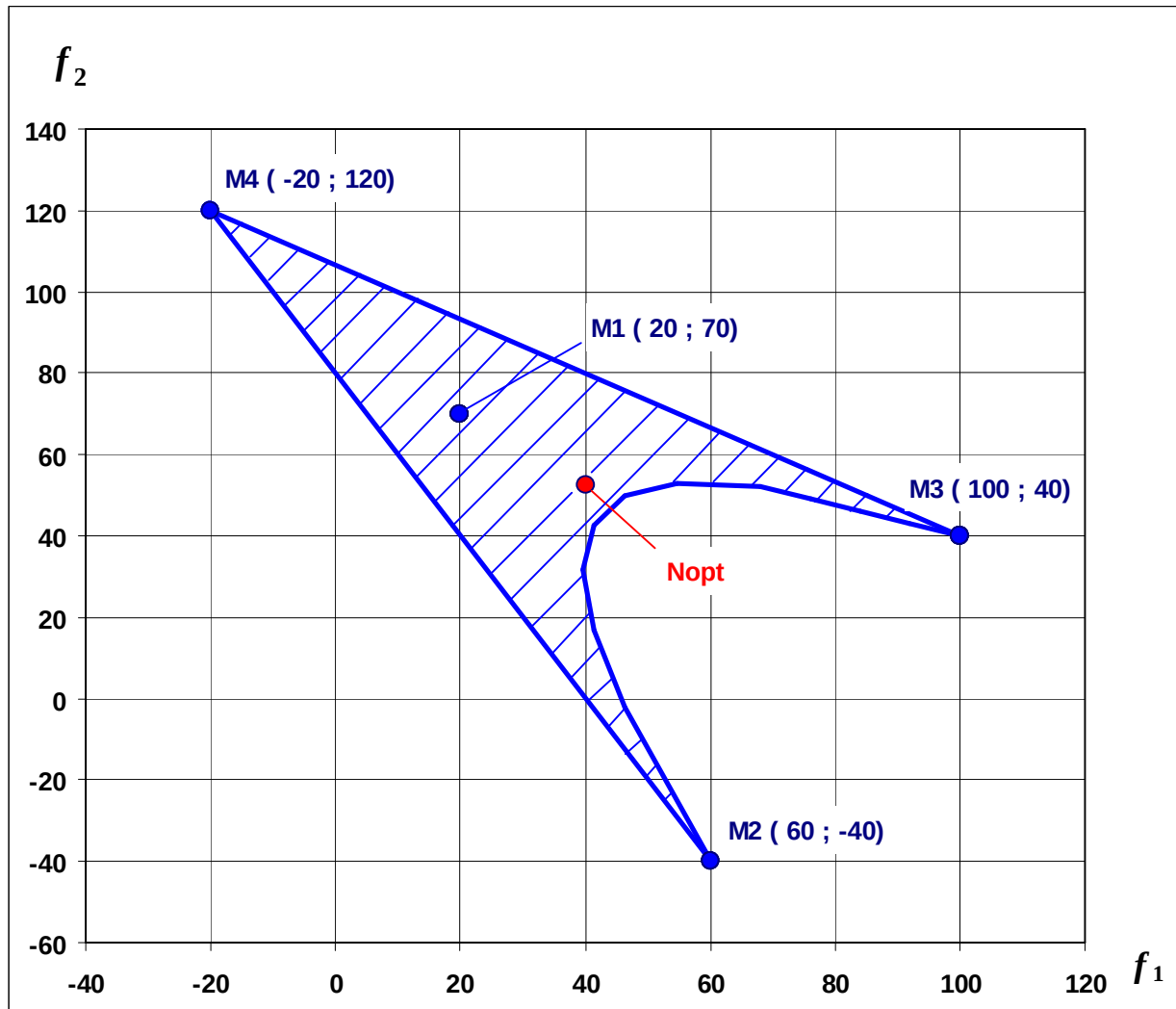


Рис. 14.8 – Область возможных решений

Выявление Парето-множества решений в смешанных стратегиях иллюстрируется на рис. 14.9. Следует отметить, что две точки, соответствующие выбору чистых стратегиях, а именно точки $M3$ и $M4$ непосредственно примыкают к множеству Парето-оптимальных решений в чистых стратегиях.

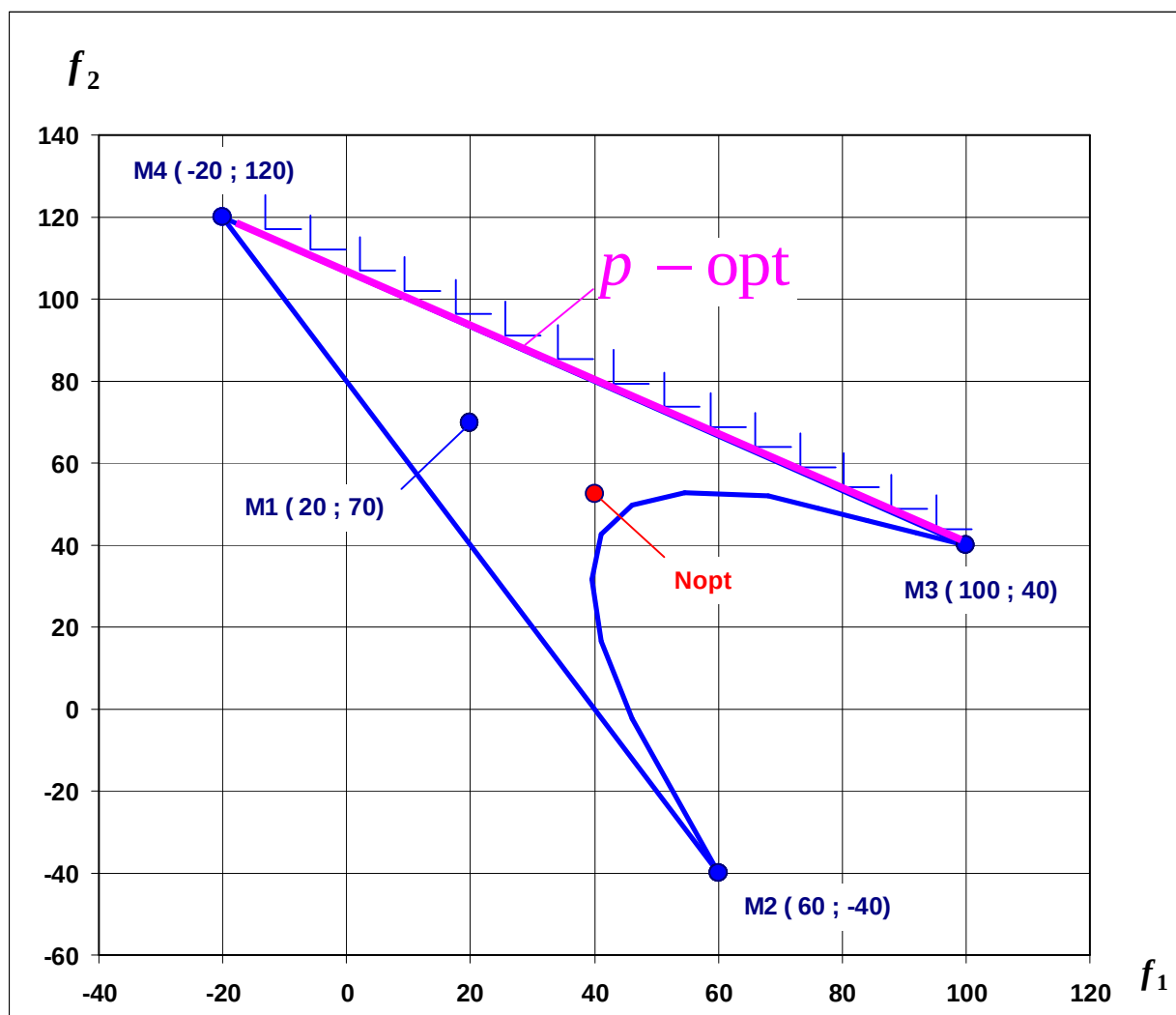


Рис. 14.9 – Парето-множество решений в смешанных стратегиях

Если рассматривать Парето-оптимальность только в чистых стратегиях, то она достигается в трёх точках: M1, M3, M4. Если же рассматривать Парето-оптимальность как в чистых, так и в смешанных стратегиях, то точка M1 перестаёт принадлежать Парето-множеству.

15. МАКСИМИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ БИМАТРИЧНЫХ ИГР

Повторение биматричных игр позволяет реализовать траектории выбора стратегий, обеспечивающие повышение результативности игроков по сравнению с одноходовым вариантом.

15.1. Игра "Семейный спор"

15.1.1. Доминирование. Решение по Нэшу. Парето-оптимальность

Рассмотрим возможности повышения результативности на известном примере игры "Семейный спор". В этой игре предполагается, что некая семейная пара (скорее всего молодожёны) пытается найти наилучшие варианты распределения свободного времени: совместное посещение театра или футбола, или те же варианты, но порознь. Естественно, что каждый из игроков Р1 – "ОН", Р2 – "ОНА" имеет свою шкалу предпочтений и соответственно степень удовлетворения, т.е. налицо игровая задача с конфликтом интересов и выбором оптимальных стратегий. Платёжная матрица выигрышей этой игры, где мерой выигрыша является субъективная оценка полезности или степени удовлетворения, приведена на рис. 15.1.

[u(P1, P2)]		Стратегии Р2 - "ОНА"	
		"Театр"	"Футбол"
Стратегии Р1 – "ОН"	"Театр"	(3; 5) 1 2	(-1; -1)
	"Футбол"	(2; 2) 3 4	(5; 3)

Рис. 15.1 – Платёжная матрица игры "Семейный спор"

Сначала выполним анализ доминирования строк или столбцов платёжной матрицы, как это показано на рис. 15.2. Убеждаемся, что в представленной матрице нет ни доминирующих строк, ни столбцов, поэтому отсутствует оптимальное равновесие в доминирующих стратегиях.

Как видно из графического анализа, представленного рис. 15.2, в двух игровых ситуациях "1" и "4" имеет место равновесие по Нэшу.

[u(P1,P2)]		Стратегии P2 - "ОНА"	
		"Театр"	"Футбол"
Стратегии P1 - "ОН"	"Театр"	3 ; 5	-1 ; -1
	"Футбол"	2 ; 2	5 ; 3

N_{opt}

Рис. 15.2 – Графический анализ доминирования

Схематично выбор стратегий оптимальных по Парето оформляется следующим образом

$$\begin{array}{l}
 N_{opt} \begin{cases} \rightarrow y^{(1)} = ((1;0);(1;0)) \Rightarrow f^{(1)} = (3;5) \\ \rightarrow y^{(4)} = ((0;1);(0;1)) \Rightarrow f^{(4)} = (5;3) \end{cases}
 \end{array}$$

Рис. 15.3 – Формализованный выбор Нэш-оптимальных стратегий

Сравнивая найденные Нэш-оптимальные стратегии, убеждаемся в их зеркальной симметрии и как следствие этого в том, что в одноходовом варианте данная игра несправедливая, т.к. один игрок всегда получает больше другого.

Рассмотрим нахождение Парето-множества оптимальных решений данной игры, предполагая, что согласованное поведение игроков в принципе может дать возможность увеличить их выигрыши.

В данном случае, как видно из рис. 15.4, Парето-множество совпадает с множеством Нэш-эффективных решений, поэтому согласованное поведение игроков здесь не даёт выигрыша ни одному из них по сравнению и Нэш-оптимальным выбором стратегий. Игра остаётся несправедливой.

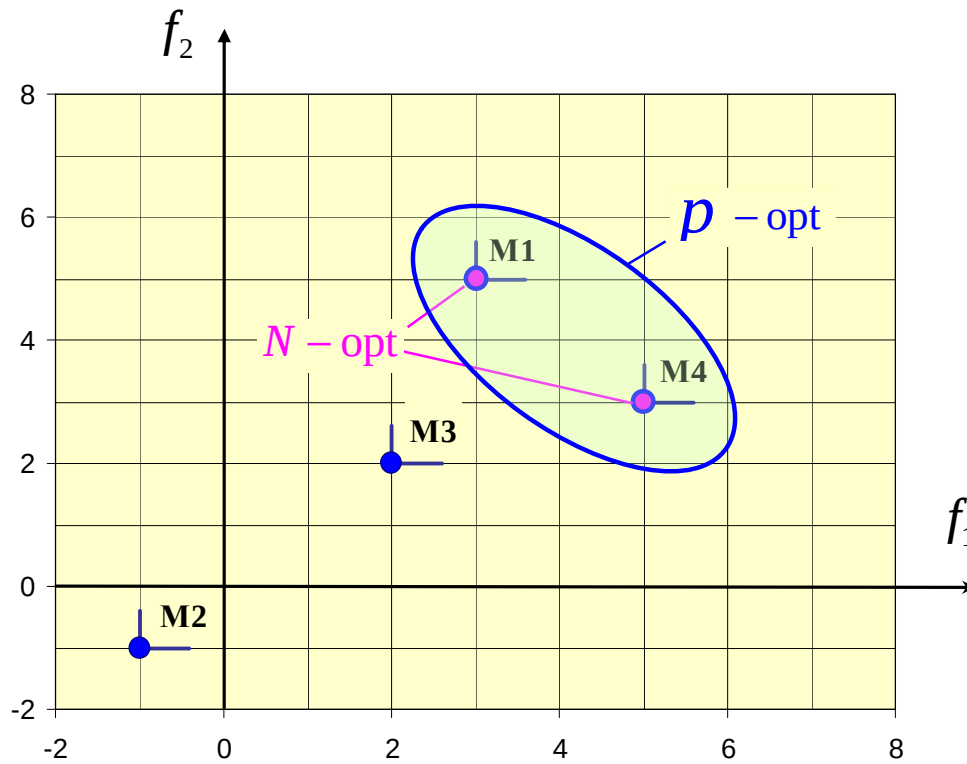


Рис. 15. 4 – Выявление Парето-множества

15.1.2. Решение в смешанных стратегиях

Найдём оптимальные по Нэшу решения в смешанных стратегиях.

$$x_1^{(0)} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}} = \frac{3 - 2}{5 + 1 - 2 + 3} = \frac{1}{7} \approx 0,143;$$

$$x_2^{(0)} = 1 - x_1^{(0)} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \approx 0,857 ;$$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} \end{bmatrix} \approx [0,143; 0,857].$$

$$y_1^{(0)} = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = \frac{5 + 1}{3 + 1 - 2 + 5} = \frac{6}{7} \approx 0,857;$$

$$y_2^{(0)} = 1 - y_1^{(0)} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7} \approx 0,143 ;$$

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,857 \\ 0,143 \end{bmatrix}.$$

Вследствие симметрии предпочтений игроков оптимальные смеси стратегий являются как бы зеркально симметричными.

Оценим средние возможные результаты игры при случайном перемешивании стратегий с найденными оптимальными по Нэшу пропорциями.

Средний выигрыш первого игрока при равновесии по Нэшу составляет

$$\bar{f}_1 = [x^{(0)}] \cdot [A] \cdot [y^{(0)}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \frac{17}{7} \approx 2,429.$$

Средний выигрыш второго игрока при равновесии по Нэшу равен

$$\bar{f}_2 = [x^{(0)}] \cdot [B] \cdot [y^{(0)}] = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6/7 \\ 1/7 \end{bmatrix} = \frac{17}{7} \approx 2,429.$$

Анализируя полученные результаты, отметим главное:

При найденной оптимальной смеси стратегий игра становится справедливой.

С помощью статистического имитационного моделирования убедимся в сходимости средних результатов к полученным теоретическим значениям средних выигрышей. Результаты статистического имитационного моделирования выполненного на ЭВМ и представленные на рис. 15.5 – 15.8, подтверждают сходимость средних результатов игроков именно к полученным теоретическим значениям, но скорость сходимости весьма невелика. Как видно из приведенных данных, безусловная устойчивая сходимость наблюдается после числа повторений игры $n > 400$, хотя при рассматриваемой статистической имитации хорошее совпадение с теоретическими расчётами наблюдается при $n = 50$, что можно считать случайным совпадением.

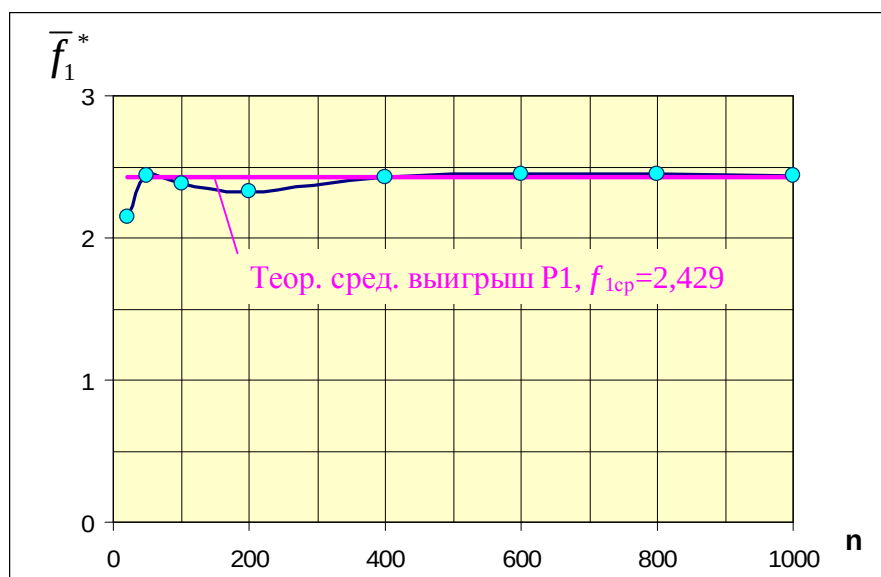


Рис. 15.5 – Сходимость среднего выигрыша игрока P1

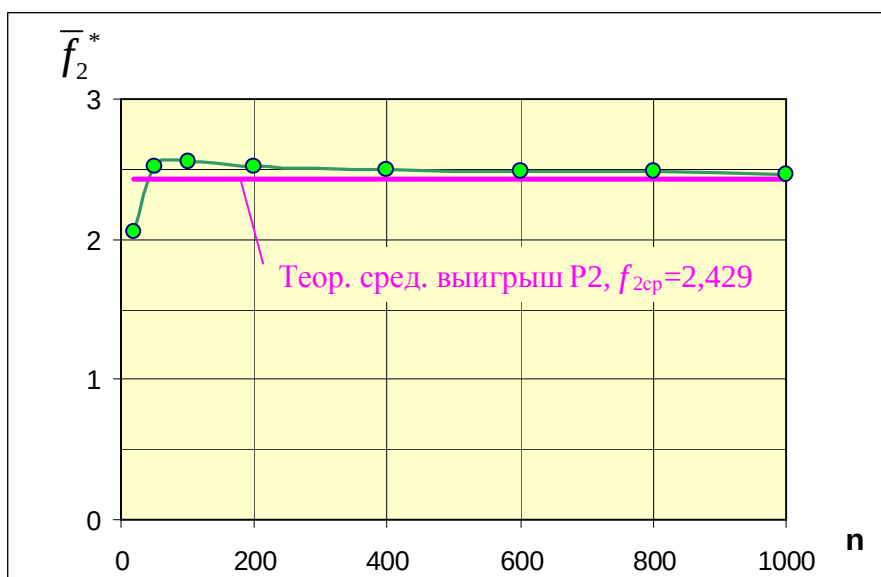


Рис. 15.6 – Сходимость среднего выигрыша игрока P2

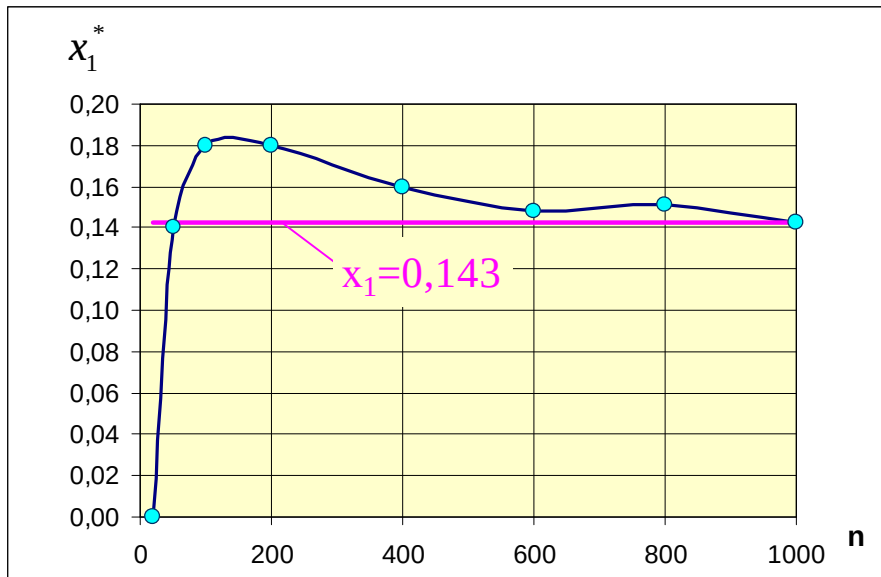


Рис. 15.7 – Сходимость частоты появления первой стратегии игрока P1

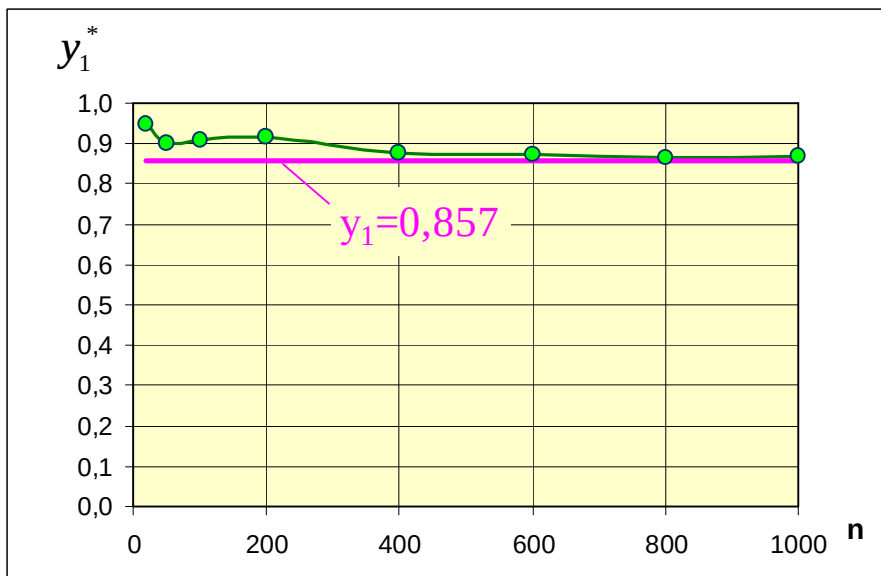


Рис. 15.8 – Сходимость частоты появления первой стратегии игрока P2

Очевидно, что скорость сходимости данной игры к справедливой игре при выборе оптимальной смеси стратегий невелика настолько, что реальные игроки вряд ли дождутся впечатления о том, что выбираемые ими смеси стратегий оптимальны и скорее всего будут использовать равновероятный случайный выбор стратегий.

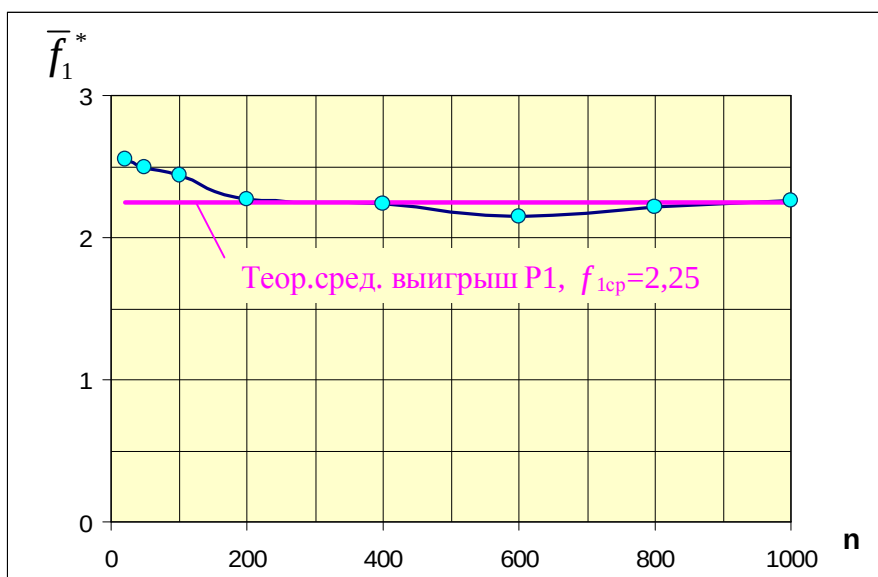


Рис. 15.9 – Сходимость среднего выигрыша игрока P1 при равновероятном случайном выборе стратегий

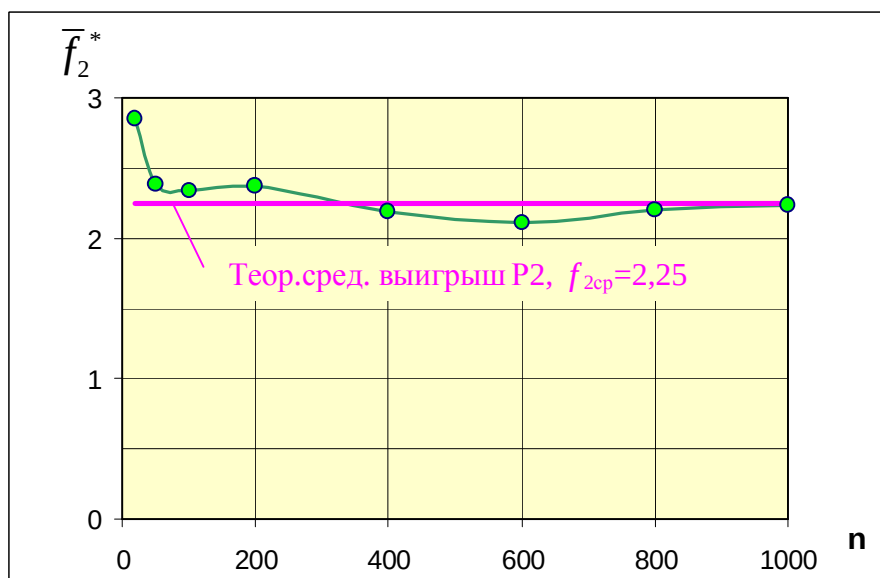


Рис. 15.10 – Сходимость среднего выигрыша игрока P2 при равновероятном случайном выборе стратегий

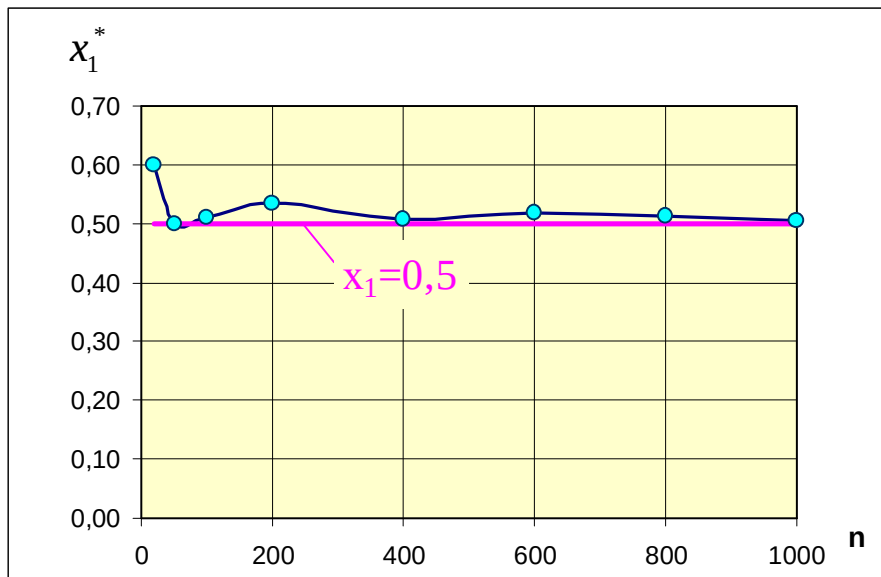


Рис. 15.11 – Сходимость частоты выбора первой стратегии игроком Р1 при равновероятном выборе стратегий

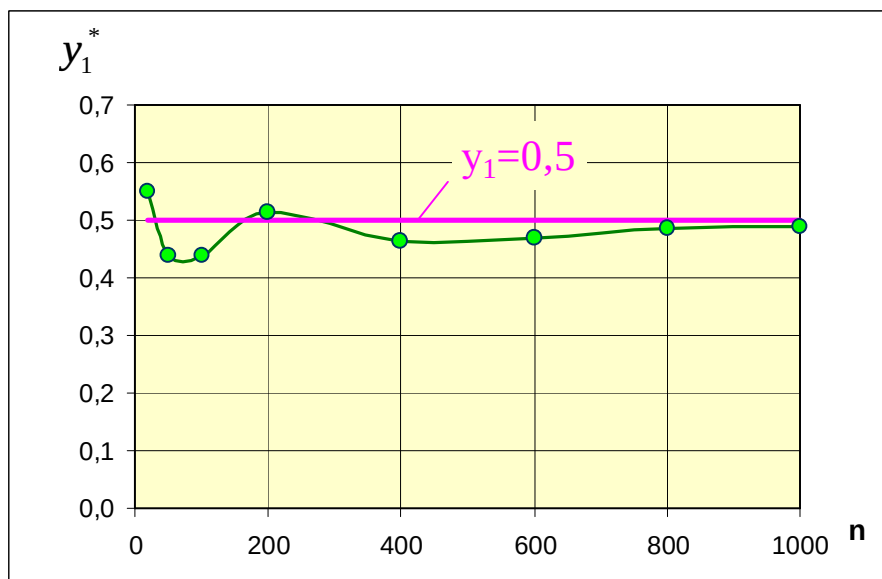


Рис. 15. 12 – Сходимость частоты выбора первой стратегии игроком Р2 при равновероятном выборе стратегий

Как показывают результаты численного эксперимента, приведенные на рис. 15.9 и 15.10, случайный выбор стратегий игроками в соответствии с законом равномерной плотности приводит в данном случае к результатам, которые ненамного уступают использованию оптимальной смеси стратегий, но реализуются значительно проще в техническом плане.

Кроме того большое значение имеет моральная сторона вопроса, поскольку равновероятный выбор стратегий обоими игроками создаёт у них ощущение справедливости, которое укрепляется по мере приближения к одинаковым средним результатам.

$$\bar{f}_{1opt} = \bar{f}_{2opt} = 2,43 \Rightarrow \bar{f}_{1\text{равновероят.}} = \bar{f}_{2\text{равновероят.}} = 2,25 .$$

15.1.3. Максимизация результата: Двойное соглашение

Допустим, что участники рассматриваемой игры "Семейный спор" пришли к двойному соглашению:

1. Синхронизировать выбор одинаковых стратегий.
2. Каждую игру менять общую стратегию, как это показано на рисунках 15.13 и 15.14 .

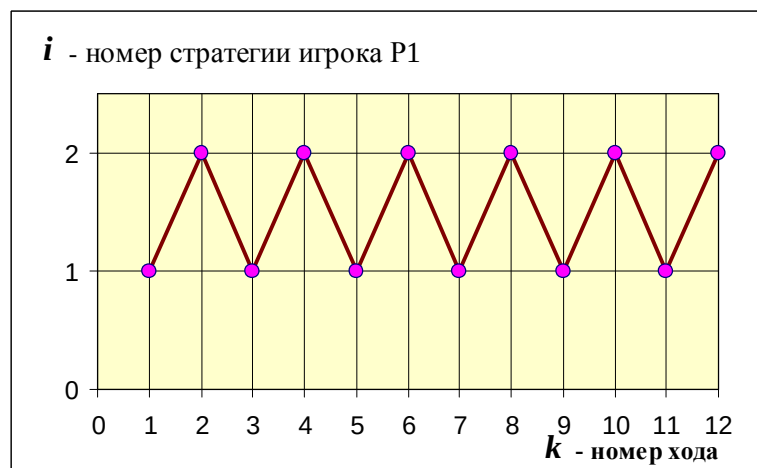


Рис. 15.13 – Траектория ходов игрока P1



Рис. 15.14 – Траектория ходов игрока P2

Выбор стратегии на первом ходу игры роли не играет, так, например, в приведенном случае первый ход игроки делают с учётом предпочтений второго игрока.

Функция формализованного выбора стратегий в данном примере имеет следующий вид

$$y = \{y_1; y_2; y_3; \dots; y_k; \dots; y_{2n}\} = \{(1;1); (2;2); (1;1); \dots; (2;2); \dots; (2;2)\}.$$

Если выполняется любое, но чётное число ходов, то начиная с 2-х ходов, средний выигрыш имеет следующее значение

$$\bar{f}_1 = \frac{3+5}{2} = 4; \quad \bar{f}_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Как мы можем заметить, полученный при двойном соглашении средний выигрыш намного превосходит оптимальное значение в смешанных стратегиях $\bar{f}_{1opt} = \bar{f}_{2opt} = 2,43$. А то, что этот результат гарантирован уже при двух ходах, делает рассматриваемый механизм максимизации выигрыша понятным обоим игрокам и легко реализуемым.

Иными словами "разумная динамика" в данном случае является интерпретацией народной мудрости "как нитка за иголкой" (имеется в виду стратегия жизни счастливой супружеской пары).

Очевидной особенностью максимизации при двойном соглашении в данной игре является её справедливость при чётном числе ходов.

У каждого из игроков есть "соблазн" нарушить соглашение и получить выигрыш в 5 усл. единиц на том ходу, когда ему по соглашению приходится выигрыш всего лишь в 3 усл. ед.

Вывод: Если игроки понимают, что принятое двойное соглашение обеспечивает справедливость за два хода и, что результат значительно выше оптимального решения по Нэшу в смешанных стратегиях, то их альянс будет устойчивым.

15.1.4. Максимизация результата: Дополнительное соглашение. Делёж

Можно ли в игре "Семейный спор" добиться справедливости в каждой игре и получить такой же высокий результат как при использовании двойного соглашения?

Ответ на этот вопрос даёт теория кооперативных игр, которая будет рассматриваться при последующем изложении нашего курса. Однако в нашем примере можно и без этой теории найти механизм получения максимизированного справедливого решения в каждой игре, руководствуясь простейшими соображениями.

Введём к имеющемуся двойному соглашению дополнительное условие:

Делёж прибыли выше наихудшего результата на каждом шаге игры поровну между игроками.

Рассмотрим первый ход игры "Семейный спор" при двойном соглашении

$$y_1 = (1; 1) \Rightarrow u(P1) = 3, u(P2) = 5.$$

Выполним делёж разности выигрышей

$$\Delta = \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow \begin{aligned} u^*(P2) &= u(P2) - \Delta = 5 - 1 = 4; \\ u^*(P1) &= u(P1) + \Delta = 3 + 1 = 4. \end{aligned}$$

Другими словами – кто получает повышенный выигрыш, тот отдает половину разности выигрышей другому участнику игры.

Результат дополнительного соглашения очевиден – справедливая игра реализуется с максимальным результатом на любом ходу игры, включая все нечётные ходы.

16. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И ВОЗМОЖНОСТИ

В предыдущих разделах 15.1.3 и 15.1.4 на простейшем примере мы рассмотрели возможности кооперации двух игроков и наглядно продемонстрировали механизмы согласования их действий, которые приводят к увеличению результативности в многоходовой игре.

Проведенный анализ не нуждался в каком-либо специфическом инструментарии, он выполнен на основе очевидных логических соображений.

Тем не менее, существует достаточно развитая теория кооперативных игр, опирающаяся на специфические понятия и собственный инструментарий.

Основная задача теории кооперативных игр состоит в анализе возможностей кооперации какого-либо числа игроков из общего числа участников данной игры.

Обратимся к рассмотренным нами ранее антагонистическим играм двух игроков, в которых интересы игроков были противоположными: Выигрыш одного игрока равен проигрышу другого игрока, что называется игрой с нулевой суммой

$$P1: a_{ij}; P2: b_{ij} \Rightarrow a_{ij} = -b_{ij} \Rightarrow a_{ij} + b_{ij} = 0.$$

Однако, во многих ситуациях интересы сторон, участвующих в конфликте, могут пересекаться, но не быть прямо противоположными, и тогда конфликт не является антагонистическим – игрокам выгодно кооперироваться, т.е. объединив свои усилия, найти согласованное решение, которое приведёт к увеличению выигрыша каждого из игроков вообще или каждого игрока, поддерживающего кооперацию.

Примечание. Следует отметить, что в реальной экономической ситуации кооперация игроков может преследоваться по закону. Например, ценовой сговор производителей или продавцов преследуется в соответствии с антимонопольным законодательством. Если такого запрета нет, то игроки имеют возможность совместного выбора стратегий, т.е. возможность кооперации.

Определение. Кооперативной игрой нескольких игроков ($n \geq 2$) называется игра с непостоянной суммой, в которой часть игроков может обсуждать перед игрой свои стратегии, образуя коалиции.

Наглядный пример использования коалиции в качестве средства достижения собственных политических целей демонстрируют парламентарии. Отсюда, например, терминология – правящая коалиция.

16.1. Игра с непостоянной суммой – необходимое условие кооперации

Рассмотрим известный в теории игр пример "Двое в горячей комнате":

Два человека оказались заперты в горячей комнате с запертой дверью. Ни один из них не в состоянии самостоятельно вышибить дверь, если же они объединят усилия, то смогут сломать дверь и выйти из горячей комнаты.

Очевидно, что каждый игрок в данной ситуации имеет две стратегии:

I – Толкать дверь.

II – Не толкать дверь.

Допустим, что выигрыш каждого, если он выходит из горячей комнаты, равен 100 усл.ед. Если же человек остаётся в горячей комнате, то выигрыш равен нулю.

Составим платёжную биматрицу, представив её на рис. 16.1.

[u(P1, P2)]		Стратегии P2	
		I – "Толкать"	II – "Не толкать"
Стратегии P1	I – "Толкать"	(100; 100) 1 2	(0; 0)
	II – "Не толкать"	(0; 0) 3 4	(0; 0)

Рис. 16.1 – Платёжная матрица игры "Двое в горячей комнате"

Решение данной игры более чем очевидно: Толкать обоим

$$y_{opt} = (1; 1) \Rightarrow A = A_{\max} = 100; B = B_{\max} = 100.$$

Иными словами, игроки должны действовать согласованно, т.е. кооперироваться.

Формальный признак того, что конфликт игроков неантагонистический – непостоянная сумма выигрышей:

$$a_{ij} + b_{ij} \neq \text{const}; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2.$$

16.2. Классические кооперативные игры

Рассмотрим не два, а большее число участников игры, используя следующие обозначения:

I – множество всех игроков, участвующих в данной игре

$$I = \{1, 2, \dots, n\}; \quad n \geq 2.$$

S – коалиция (подмножество) игроков согласовавших свои стратегии и поэтому выступающая как единый игрок $S \subset I$.

V – характеристическая функция игры, т.е. функция гарантированного выигрыша.

$k = k' + 1 = 2^n$ – максимально возможное число подмножеств S , включая пустое подмножество, которые можно выделить из множества I , состоящего из n элементов. С другой стороны, k – число значений аргумента, для которых должна быть определена характеристическая функция*.

Используя введенные обозначения, можно представить кооперативную игру символически следующим образом

$$\left(I, V(S) \rightarrow \max_S \right); \quad S \subset I.$$

Убедимся в справедливости соотношения $k = k' + 1 = 2^n$ хотя бы на одном примере, приняв $n = 4$.

Исходное множество игроков в данном случае представляется как

$$I = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Возможные коалиции составляют одноэлементные фиктивные коалиции, двухэлементные, трёхэлементные, четырёхэлементные коалиции и пустое множество.

Численность однотипных коалиций определяется как соответствующее число сочетаний.

1. Все возможные одноэлементные коалиции*

$$S\{1\}; \quad S\{2\}; \quad S\{3\}; \quad S\{4\}.$$

$$S\{i\}; \quad i = \overline{1, 4} \Rightarrow C_4^1 = 4.**$$

2. Двухэлементные коалиции

$$S\{1, 2\}; \quad S\{1, 3\}; \quad S\{1, 4\};$$

$$S\{2, 3\}; \quad S\{2, 4\};$$

$$S\{3, 4\}.$$

$$S(i, j); \quad i = \overline{1, 3}; \quad j > i; \quad j = \overline{2, 4} \Rightarrow C_4^2 = 6.$$

3. Трёхэлементные коалиции

$$S\{1, 2, 3\}; \quad S\{1, 2, 4\};$$

$$S(i, j, k); \quad i = \overline{1, 2}; \quad j > i; \quad j = \overline{2, 3, 4}; \quad k > j; \quad k = \overline{3, 4} \Rightarrow C_4^3 = 4$$

$$S\{2, 3, 4\}.$$

4. Четырёхэлементные коалиции

$$S\{1, 2, 3, 4\}.$$

* В число подмножеств k входит ситуация пустого подмножества $V(\emptyset) = 0$, что означает равенство нулю характеристической функции от пустого подмножества.

* По существу это фиктивные коалиции, т.к. согласование действий данного игрока самим с собой не имеет смысла.

** Число сочетаний вычисляется как $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

$$S(i, j, k, l); \quad i = 1; \quad j = 2; \quad k = 3, \quad l = 4 \Rightarrow C_4^4 = 1$$

5. Пустое множество

$$S(\emptyset) = 0; \quad C_1^1 = 1.$$

В результате получим возможное число подмножеств, на которых должна быть определена характеристическая функция

$$k = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 + C_1^1 = 4 + 6 + 4 + 1 + 1 = 16 \Rightarrow k = 2^4.$$

Используя метод математической индукции, можно обобщить полученный частный результат в виде общего соотношения

$$k = 2^n.$$

16.3. Понятие супераддитивности

Прежде чем объединяться, игрокам необходимо понять, выгодно ли им это с точки зрения увеличения выигрыша. Формальное условие возможной выгоды от объединения игроков двух коалиций S и T в одну общую коалицию выражается условием для характеристической функции игры

$$V(S) + V(T) \leq V(S \cup T), \quad (16.1)$$

где $S \subset I$,

$T \subset I$,

$S \cap T = \emptyset$.

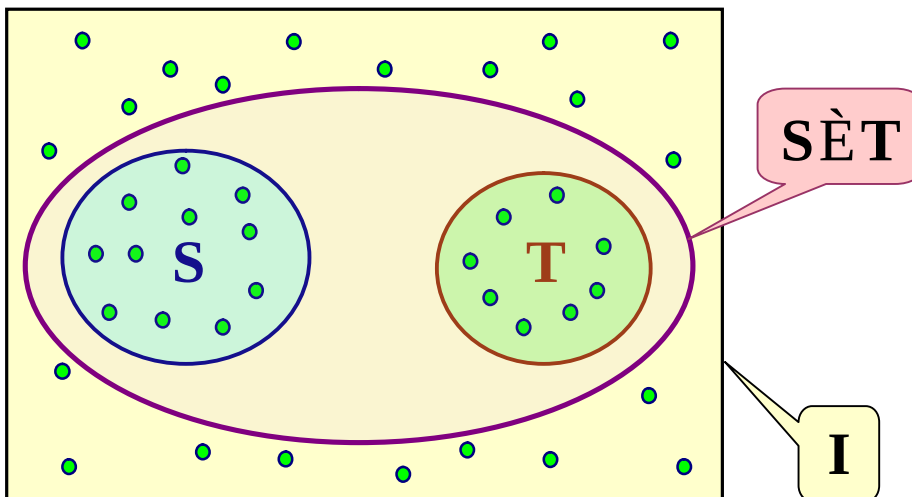


Рис. 16. 1 – Объединение непересекающихся коалиций

Если соотношение (16.1) выполняется для любых S и T , то характеристическая функция игры называется супераддитивной.

Определение. Супераддитивность

$$\forall S, S \subset I; \forall T, T \subset I ; S \cap T = \emptyset \Rightarrow V(S) + V(T) \leq V(S \cup T) \quad (16.2)$$

Супераддитивность указывает на то, что любое объединение участников игры является целесообразным или, по крайней мере, не ухудшает их положения, т.к. в этом случае величина выигрыша объединённой коалиции увеличивается (не уменьшается) с увеличением вошедших в неё участников игры.

Продemonстрируем условия супераддитивности характеристической функции на примере игры с числом участников $n = 4$. В этом случае должна выполняться следующая система неравенств.

$$\begin{aligned} V(S\{1\}) + V(S\{2, 3, 4\}) &\leq V(S\{1, 2, 3, 4\}); \\ V(S\{2\}) + V(S\{1, 3, 4\}) &\leq V(S\{1, 2, 3, 4\}); \\ V(S\{3\}) + V(S\{1, 2, 4\}) &\leq V(S\{1, 2, 3, 4\}); \\ V(S\{4\}) + V(S\{1, 2, 3\}) &\leq V(S\{1, 2, 3, 4\}); \\ V(S\{1, 2\}) + V(S\{3, 4\}) &\leq V(S\{1, 2, 3, 4\}); \\ V(S\{2, 3\}) + V(S\{1, 4\}) &\leq V(S\{1, 2, 3, 4\}). \end{aligned}$$

В принципе следует так же рассмотреть все сочетания различных коалиций с "пустым" множеством игроков, убедившись в том, что

$$\begin{aligned} V(S\{\emptyset\}) + V(S\{1, 2, 3, 4\}) &\leq V(S\{1, 2, 3, 4\}); \\ V(S\{\emptyset\}) + V(S\{1, 2, 3\}) &\leq V(S\{1, 2, 3\}); \\ V(S\{\emptyset\}) + V(S\{1, 2, 4\}) &\leq V(S\{1, 2, 4\}); \\ V(S\{\emptyset\}) + V(S\{2, 3, 4\}) &\leq V(S\{2, 3, 4\}); \\ V(S\{\emptyset, 1\}) + V(S\{2, 3\}) &\leq V(S\{1, 2, 3\}); \\ V(S\{\emptyset, 1\}) + V(S\{3, 4\}) &\leq V(S\{3, 4\}); \\ &\dots\dots\dots \\ V(S\{\emptyset, 1, 2, 3\}) + V(S\{4\}) &\leq V(S\{1, 2, 3, 4\}). \end{aligned}$$

Однако в такой проверке нет необходимости поскольку на основе декларированного ранее свойства характеристических функций $V(\emptyset) = 0$ неравенства с участием "пустых" множеств превращаются в равенства

$$\begin{aligned}
V(S\{\emptyset\}) + V(S\{1,2,3,4\}) &= V(S\{1,2,3,4\}); \\
V(S\{\emptyset\}) + V(S\{1,2,3\}) &= V(S\{1,2,3\}); \\
V(S\{\emptyset\}) + V(S\{1,2,4\}) &= V(S\{1,2,4\}); \\
V(S\{\emptyset\}) + V(S\{2,3,4\}) &= V(S\{2,3,4\}); \\
V(S\{\emptyset,1\}) + V(S\{2,3\}) &= V(S\{1,2,3\}); \\
V(S\{\emptyset,1\}) + V(S\{3,4\}) &= V(S\{3,4\}); \\
..... \\
V(S\{\emptyset,1,2,3\}) + V(S\{4\}) &= V(S\{1,2,3,4\}).
\end{aligned}$$

В общем случае, используя метод математической индукции, можно сформировать следующее условие супераддитивности

$$\sum_{i=1}^k V(S_i) \leq V\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right), \quad (16.3)$$

где S_i – непересекающиеся коалиции ($i = 1, 2, \dots, k$), k – число возможных непересекающихся коалиций, включая одиночные, хотя последние по существу являются фиктивными коалициями.

Следствием условия (16.3) для частного случая максимально возможной по размеру коалиции, представляющей собой объединение всех игроков участвующих в игре $\sum_{i=1}^n V(S_i) \rightarrow I$, является соотношение

$$\sum_{i=1}^n V(S_i) \leq V(I), \quad (16.4)$$

при этом множество игроков $\{I\}$ выступает как один игрок I .

Содержательная интерпретация неравенства (16.4) заключается в том, что при супераддитивной характеристической функции всем игрокам участвующим в игре выгодно объединиться в коалицию I .

С математической точки зрения соотношение (16.4) может рассматриваться в частном варианте и как равенство, что будет соответствовать случаю, когда объединение формально ничего не прибавляет к совокупному выигрышу игроков.

Однако с экономической точки зрения объединение всех игроков даже без увеличения совокупного выигрыша имеет определённый смысл, поскольку это даёт эффекты зачастую неучитываемые характеристической функцией, такие, как возможное снижение операционных расходов, повышение конкурентоспособности на локальном рынке, снижение предпринимательских рисков и т.п.

Таким образом, при супераддитивности выигрыш каждого из игроков, выступающего в одиночку, как и любой из возможных коалиций, в которые вошли не все участники игры, не будет превышать выигрыша коалиции, объединившей всех участников игры.

16.4. Существенность кооперативных игр

Определение. Игра $\left(I, V(S) \rightarrow \max_s, S \subset I \right)$ называется **существенной**, если выполняется условие превышения выигрыша максимальной по размеру коалиции по сравнению с суммой выигрышей всех игроков, играющих в одиночку

$$\sum_{i \in I} V\{S_i\} < V(I).$$

Таким образом, если игра является существенной, то при ситуации объединения всех участников конфликта возникает **дополнительный выигрыш**

$$\Delta = V(I) - \sum_{i \in I} V\{S_i\} > 0, \quad (16.5)$$

который может быть распределён между всеми игроками и каждый из них увеличивает свой выигрыш по сравнению с одиночным участием в игре или по сравнению с участием в коалиции включающей не всех игроков.

Определение.

Игра $\left(I, V(S) \rightarrow \max_s, S \subset I \right)$ называется **несущественной**, если выполняется условие

$$\sum_{i \in I} V\{S_i\} \geq V(I).$$

Это означает, что в условиях несущественной игры дополнительного выигрыша от объединения всех игроков в коалицию не возникает.

16.5. Делёж дополнительного дохода

Даже, если игра является существенной и потенциальная выгода от объединения игроков существует, то нельзя однозначно утверждать, что все игроки захотят объединяться, т.к. они не знают правил распределения дополнительного выигрыша, возникающего от объединения в коалицию.

Другими словами, нужен чёткий механизм распределения дополнительного дохода. Что и будет стимулом или условием согласованного поведения всех игроков.

Поэтому процедура дележа дополнительного возможного дохода является ключевым условием формирования коалиции игроков.

Следует отметить, что даже в несущественной игре могут появляться коалиции, заведомо не имеющие возможности получать дополнительный выигрыш. Например, объединение депенгующих участников олигополии.

Определение.

Дележом кооперативной игры называется вектор

$$X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\},$$

если он удовлетворяет двум условиям:

$$1. \quad x_i \geq V_i = V(S_i); \quad \forall i \in I. \quad (16.6)$$

$$2. \quad \sum_{i=1}^n x_i = V(I). \quad (16.7)$$

Условие (16.6) называется условием индивидуальной рациональности.

Это условие означает, что объединяться выгодно только в том случае, когда каждый вошедший в коалицию игрок получит при распределении общего выигрыша коалиции, по меньшей мере, столько же, сколько он мог бы получить, действуя самостоятельно, не объединяясь с другими игроками

Например, при $n = 4$ условие индивидуальной рациональности означает выполнение следующей системы неравенств

$$x_1 > V_1; \quad x_2 > V_2; \quad x_3 > V_3; \quad x_4 > V_4 .$$

В соответствии с условием индивидуальной рациональности неравенства в предыдущей записи можно заменить на равенства, но, если все неравенства заменить на равенства, то прагматического смысла в таком объединении не очень много.

Условие (16.7) называется условием коллективной рациональности. Оно указывает на то, что игроки должны делить между собой реально возможный выигрыш.

Так, например, если условие (16.7) не выполняется, т.е., когда $\sum_{i=1}^n x_i > V(I)$, то в этом случае игроки пытаются делить нереализуемый (невозможный) выигрыш.

Для того, что бы вектор $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ был дележом кооперативной игры $\left(I, V(S) \rightarrow \max_s, S \subset I \right)$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$x_i = V(i) + a_i, \quad \forall i \in I$$

и при этом

$$a_i \geq 0; \quad i \in I;$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = \Delta = V(I) - \sum_{i=1}^n V(i).$$

Понятие дележа распространяется на любую коалицию S , включая и подмножества из множества I . При этом именно делёж, возникающий как результат соглашения игроков, является решением игры.

Если игра является несущественной, т.е. выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n V(i) = V(I),$$

то получаем тривиальный и однозначный делёж

$$X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}, \text{ где } x_i = V(i) \text{ при } i = 1, 2, \dots, n.$$

В более широком смысле, выходящим за рамки математической теории супераддитивных кооперативных игр, решением в первую очередь следует считать определение состава коалиции, которая может получить максимальный совокупный дополнительный выигрыш, а уж потом определить делёж, хотя, конечно, это всё взаимосвязано.

16.6. Доминирование делёжей

Существенная кооперативная супераддитивная игра может иметь не один делёж X , а множество дележей (векторов) H , удовлетворяющих соотношениям индивидуальной и групповой рациональности (16.6, 16.7)

$$X \in H.$$

Что бы выбрать из возможных дележей наиболее привлекательный для всех участников коалиции, вводится понятие доминирования дележей, которое позволяет сравнивать дележи по предпочтительности.

Определение.

Делёж X доминирует делёж Y по коалиции S

$$X \underset{S}{f} Y,$$

если выполняются соотношения:

$$x_i > y_i, \quad \forall i \in S; \quad (16.8)$$

$$\sum_{i=1}^S x_i \leq V(S). \quad (16.9)$$

Примечание. Доминирование множества одноэлементных коалиций по кооперированному множеству всех игроков НЕВОЗМОЖНО.

Сделанное примечание следует из качественного анализа от обратного: Коалиция множества всех игроков не может быть слабее разрозненного одноэлементного множества, поэтому полная коалиции доминирует множество отдельных игроков. Следовательно, множество отдельных игроков не может доминировать полную коалицию.

17. ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ГОЛОСОВАНИЕМ

Одним из признанных атрибутов демократии, безусловно, является выборность руководящих должностей различного уровня, например от президента страны до ректора университета, президента акционерного уровня или председателя городской думы.

Выборы на демократической основе предполагают альтернативность программ кандидатов, что вызывает с одной стороны разнообразные дискуссии, а с другой стороны создаёт конфликтную ситуацию.

Победитель определяется на основе принятых правил голосования, в которых определяющую роль играет процедура подсчёта голосов.

Несмотря на кажущуюся простоту процедуры голосования, она может при одних и тех же мнениях выборщиков давать различные результаты, которые зависят от выбора правил голосования из набора известных правил и процедур голосования.

Налицо игровая ситуация с конфликтом участников и выбором стратегий, допускающая математическое моделирование.

Следует отметить, что в жизни любого акционерного общества принятие решений голосованием на общем собрании акционеров или в совете директоров является инструментом управления, использование которого регламентируется уставом акционерного общества.

17.1. Особенности процедуры демократических выборов

Принятие решений голосованием – один из основных принципов демократии.

Суть голосования и выбора победителя заключается в преобразовании множества индивидуальных предпочтений всех выборщиков в единое коллективное предпочтение их общества.

Демократизм процедуры голосования: равноправное участие выборщиков в принятии решений в соответствии с их предпочтениями.

Справедливость: перевес воли большинства над мнением меньшинства.

Основной парадокс выборов: несмотря на соблюдение правил голосования, большая часть выборщиков оказывается неудовлетворенной итогами выборов, и поэтому считает проведенное голосование сфальсифицированным, а его итоги неправильными.

Использование математического подхода к анализу принятия решений голосованием позволяет описать типовые процедуры голосования, выявить возникающие парадоксы и установить ограниченность демократических принципов голосования.

Роль математического моделирования здесь заключается в анализе возможных результатов голосования и в анализе последствий решений, принимаемых в процессе голосования. Например, снятие с голосования аутсайдера.

17.2. Постановка задачи на конкретном примере

Представительный орган муниципального образования (городская дума) состоит из 17 депутатов. Путём тайного голосования предстоит избирать председателя. На должность председателя выдвинуто четыре кандидата: А, В, С, D.

Каждый депутат тщательно изучил кандидатов, их программы действий и сформировал своё индивидуальное предпочтение.

Предпочтения выборщиков формируются следующим образом:

1.

A>D>B>

 - 3 депутата.
 2.

A>D>C>

 - 5 депутатов.
 3.

B>C>D>

 - 5 депутатов.
 4.

C>D>B>

 - 4 депутата.
-

Кто выйдет победителем?

Ответ не является однозначным.

Мы при дальнейшем изложении покажем, что **любой** из претендентов может победить в зависимости от способа выявления воли большинства, т.е. в зависимости от принимаемых правил голосования.

17.3. Основные понятия

Модель голосования включает следующие компоненты:

- множество кандидатов,
- множество выборщиков,
- множество предпочтений,
- правило голосования.

Множество кандидатов – предполагается, что оно известно всем выборщикам.

Множество выборщиков – все равноправны.

Множество предпочтений – формируется из предпочтений отдельных выборщиков, каждый из которых имеет предпочтения, обладающие следующими свойствами:

- **полнота**, т.е. по каждой паре кандидатов данный выборщик может определить, кто лучше, например, $A > B$; $C > D$; $B > C$.
- **транзитивность** (упорядоченность пар) - если $A > B$ и $B > D$, то $A > D$.

Профиль предпочтений

Оформляется в виде матрицы предпочтений с их частотами в нижней строке. Верхняя строка имеет наивысший уровень предпочтений.

Профиль предпочтений				Иерархия предпочтений
A	A	B	C	1-е место
D	D	C	D	2-е место
B	C	D	B	3-е место
C	B	A	A	4-е место
3	5	5	4	← Частота рассматриваемого профиля

17.4. Правила голосования

Правило голосования преобразует множество индивидуальных предпочтений выборщиков в единое предпочтение, которое призвано выражать их коллективную волю в определении победителя.

Цель применения правила голосования – справедливо выявить и отразить волю большинства выборщиков.

Существуют разные правила голосования, которые отличаются формулировкой справедливости голосования и приводят к различным результатам.

Примечание. Мы будем считать (для упрощения), что каждый выборщик обязательно участвует в голосовании.

17.4.1. Правило относительности большинства

Правило относительного большинства используется чрезвычайно широко из-за того, что при такой организации выборов в любом случае выявляется, если выборщиков нечётное число, то победитель гарантированно выявляется в первом туре раунде

- каждый выборщик отдаёт голос одному кандидату, наилучшему в его индивидуальном предпочтении;
- коллективная ценность кандидата измеряется числом полученных голосов;
- победителем признаётся кандидат, имеющий наибольшую коллективную ценность, т.е. получивший наибольшее количество голосов.

Решение. Найдем коллективную ценность кандидатов, т.е. число полученных ими голосов.

$$N(A)=3+5+0+0=8$$

$$N(B)=0+0+5+0=5$$

$$N(C)=0+0+0+4=4$$

$$N(D)=0+0+0+0=0$$

$$N(A) > N(B) > N(C) > N(D) \rightarrow \text{победил: } \mathbf{A}$$

Вопрос: Сколько выборщиков будут недовольны результатом?

Ответ: $K=5+4=9$, что больше половины, т.к. $17 / 2 = 8,5$.

17.4.2. Правило абсолютного большинства

Предыдущее правило (правило относительного большинства), как мы убедились, позволяет победить претенденту, которым будет недовольно большинство выборщиков.

Эту несправедливость устраняет правило абсолютного большинства:

- каждый выборщик отдаёт свой голос кандидату, наилучшему в его индивидуальном предпочтении;
- коллективная ценность определяется числом полученных голосов;
- определяется лидер, у которого наибольшее число голосов;
- если лидер набрал больше половины голосов, то он победил. Если не набрал, то второй тур с ближайшим кандидатом.

Как видим, второй тур реализует идею абсолютного большинства, если она не реализовалась в первом туре.

Решение.

1-й тур: $N(A)=8$; $N(B)=5$; $N(C)=4$; $N(D)=0$

Очевидна необходимость второго тура, т.к. никто из претендентов не набрал более половины голосов.

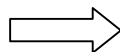
2-й тур: A+B

Составим профиль предпочтений второго тура, считая, что личные предпочтения выборщиков не изменились

A	B
B	A
8	9

$$N(A) = 8$$

$$N(B) = 9$$



B – победил !

Однако у многих этот результат вызовет разочарование и чувство несправедливости, т.к. 8 кандидатов считает лучшим из лучших вариант А и только 5 кандидатов считает лучшим В.

17.4.3. Рейтинговое правило голосования

В предыдущих правилах голосования выборщик имел один голос и должен был отдать его одному кандидату. При этом не учитывается его мнения и предпочтения по другим кандидатурам.

При таких подходах не имеют шансов представители центристской ориентации, которые стремятся сбалансировать противоречивые интересы выборщиков и могут в какой-то мере удовлетворить интересов большей части выборщиков.

Эта несправедливость устраняется рейтинговым правилом голосования:

- водится шкала числовых рейтингов $R_1, R_2 \dots R_k$, в которой $R_1 > R_2 > \dots > R_k$;
- рейтинговые шкалы едины для всех выборщиков;
- рейтинговая шкала известна каждому выборщику до голосования;
- голосования заключается в том, что каждый выборщик в соответствии со своим индивидуальным предпочтением присваивает каждому кандидату рейтинги из указанной шкалы, не используя повторений;
- коллективная ценность кандидата измеряется суммой рейтингов;
- побеждает кандидат с наивысшим рейтингом.

Важно! Шкалирование рейтингов может влиять на результаты выборов.

Наиболее распространены прямые рейтинги ($R_{i+1} - R_i = 1$), они могут начинаться с нуля или единицы.

Вычислим рейтинг каждого претендента, используя исходные предпочтения

Предпочтения и частоты				R
A	A	B	C	3
D	D	C	D	2
B	C	D	B	1
C	B	A	A	0
3	5	5	4	

$$R_A = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 0 + 0 = 24$$

$$R_B = 3 \cdot 1 + 0 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 22$$

$$R_C = 0 + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 27$$

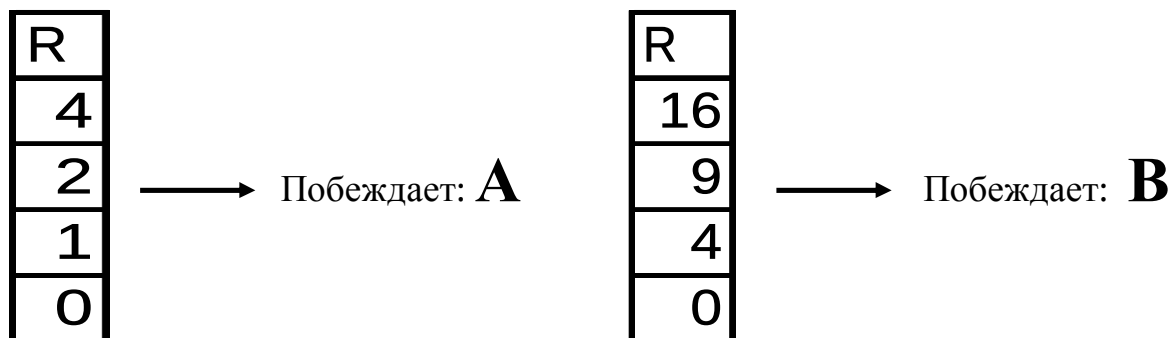
$$R_D = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 29$$

Побеждает кандидат D!

Сравним результаты рейтингового голосования с другими правилами:

- Победил наихудший по правилу относительного большинства!!
- Наилучший в абсолютном большинстве B – здесь оказался наихудшим!!

Посмотрим, опуская очевидные вычисления, на то, что дадут неравномерные шкалы рейтингов



Особенности рейтингового голосования, если кандидатов всего два, K=2:

1. Выбор шкалы рейтингов не влияет на результат
2. Рейтинговое голосование, правило относительного и абсолютного большинства дают одинаковый результат.

Примечание:

Возможная модификация рейтингового голосования: каждый выборщик получает суммарный рейтинг на всех кандидатов и делит его между ними по своему усмотрению.

17.4.4. Правило парного преимущества

Идея это правила определения победителя на выборах основывается на выявлении мнения каждого выборщика относительно всех возможных парных сочетаний претендентов, такой подход к решению проблемы выбора наилучшего решения называется методом элементарного суждения.

Процедура голосования с использованием правила парного преимущества строится следующим образом:

- из множества кандидатов формируется множество пар сравнения;
- из общего профиля предпочтения формируется профиль предпочтений для каждой пары сравнения (профиль парного предпочтения);
- для каждой пары сравнения определяются победители;
- выигрывает тот, кто имеет большее число побед в парных сравнениях.

P.S. Каждый сравнивается с каждым.

Парные сравнения

№ п/л	Пара сравнения	Лидер пары
1	(A;B)	(8; 9) B
2	(A;C)	(8; 9) C
3	(A;D)	(8; 9) D
4	(B;C)	(8; 9) C
5	(B;D)	(5;12) D
6	(C;D)	(9; 8) C

$B \rightarrow 1; \quad C \rightarrow 3; \quad D \rightarrow 2; \quad A \rightarrow 0$

Результат голосования: C – победил!

Примечание. Если кандидатов всего два, то от предыдущих правил результат не будет отличаться!

Выводы относительно рассмотренных правил голосования:

1. Частный вывод.

В рассмотренном примере четыре, несомненно, справедливых и демократических правила выводят в победители четырех разных кандидатов.

2. Общий вывод.

Справедливость демократического принятия решений голосованием оказывается весьма чувствительной к форме ее реализации в правилах голосования, т.е. к оттенкам понимания воли большинства.

17.5. Парадоксы голосования

1. Отсутствие решения. Существуют такие профили голосования, при которых невозможно выявить победителя, хотя имеются явные парные претенденты

Например, три претендента и девять выборщиков

$\left. \begin{array}{l} A > B: 3 \text{ раза.} \\ B > C: 3 \text{ раза.} \\ C > A: 3 \text{ раза.} \end{array} \right\}$	Заикливание!
---	---------------------

Причиной такой неопределённости является нарушение транзитивности.

2. Снятие кандидатуры аутсайдера кардинально изменяет результаты голосования.

Казалось бы, что снятие кандидатуры заведомого аутсайдера никак не может сказаться на выборе победителя по установленному правилу голосования. Тем не менее, это совсем не так.

Совершенно непредвиденная ситуация может иметь место при использовании правил абсолютного большинства, когда понадобится 2-й тур. Используя данные нашего примера, допустим, что аутсайдер 2-го тура снимает свою кандидатуру еще перед 1-м туром.

В рассмотренном примере аутсайдером по правилу абсолютного большинства был претендент А.

Нетрудно убедиться, что, если А снимает свою кандидатуру, то вместо ранее выигрывавшего без снятия аутсайдера В победит D.

3. Дополнительная поддержка отнимает победу лидера первого тура.

Например, при использовании правила абсолютного большинства представленное перераспределение предпочтений приводит к выходу во 2-й тур с другим противником и проигрыш.

Исходная матрица предпочтений ($k=3$)

А	С	В	В
В	А	С	А
С	В	А	С
6	5	4	2

Рассмотрим подробнее данную ситуацию.

Первый тур: $N(A)=6$; $N(B)=6$; $N(C)=5$.

Нет победителя по правилу абсолютного большинства.

Назначается второй тур между А и В.

Второй тур при неизменном распределении предпочтений выборщиков.

Матрица предпочтений второго тура

А	В
В	А
11	6



Побеждает А

Другой вариант голосования, при котором изначально группа поддержки обеспечила перераспределение предпочтений выборщиков, в результате чего лидер первого тура получает дополнительно 2 голоса ($A=A+2$) и поэтому матрица предпочтений имеет вид

A	C	B
B	A	C
C	B	A
8	5	4

Первый тур: $N(A)=8$; $N(C)=5$; $N(B)=4$.

Нет победителя по правилу абсолютного большинства.

Назначается второй тур между A и C

(противником A до активизации группы поддержки был B).

Второй тур при неизменном распределении предпочтений выборщиков

Матрица предпочтений второго тура

A	C
C	A
8	9

→ **Побеждает C**

Вывод: A проиграл из-за активности своей группы поддержки.

17.6. Теорема Эрроу

Кеннет Джозеф Эрроу, являющийся признанным создателем теории групповых рациональных решений, в 1951 году сформулировал известную теорему

Единственное правило голосования, удовлетворяющее принципу справедливости является правило голосования диктатора, при котором выборщик – один человек.

Парадоксальный характер этой теоремы до сих пор активно обсуждается в учёных кругах, о чём можно убедиться, используя возможности Интернета.

Автобиографическая справка

Кеннет Джозеф Эрроу*

(англ. Kenneth Joseph Arrow)

род. 23 августа 1921, Нью-Йорк)

— американский экономист,

лауреат Нобелевской премии

по экономике за 1972 год

(совместно с Джоном Хиксом)

«за новаторский вклад в общую теорию равновесия и теорию благосостояния».

Доктор философии по экономике (степень присвоена в Колумбийском университете).

Работал в Чикагском, Стэнфордском и Гарвардском университетах.

Президент Международной экономической ассоциации (1983—1986).

Президент Эконометрического общества (1956).

Президент Американской экономической ассоциации в 1973 году.

Награждён медалью Дж. Б. Кларка (1957).

Входит в редколлегию журнала Games and Economic Behavior.

Кеннет Джозеф Эрроу

Kenneth Joseph Arrow



Дата рождения: 23 августа 1921 (89 лет)

Место рождения: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США

Страна:  США

Научная сфера: экономика

Альма-матер: Колумбийский университет

Награды и премии Медаль Джона Бейтса Кларка (1957)

 Нобелевская премия по экономике (1972)

 Национальная научная медаль США (2004)

В 1990-х годах совместно с рядом других Нобелевских лауреатов в области экономики К.Д.Эрроу давал как положительные, так и отрицательные оценки отдельных аспектов рыночных реформ в России.

* Материал из Википедии – свободной энциклопедии

Связь теории игр и моделей принятия решений голосованием

Кандидаты: стратегии (но они же могут быть и игроками!)

Игроки: группы выборщиков с одинаковыми предпочтениями.

Матрица выигрышей: возможно рейтинги.

Функция выигрыша: (место) рейтинг.

Принцип справедливости: Парето-множество.

Список использованной литературы

1. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: Учебное пособие. – М.: Макс-Пресс, 2005. – 272 с.
2. Оуэн Г. Теория игр. - М.: Вузовская книга, 2007. – 216 с.
3. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций: Учебное пособие. _ М.: Гелиос АРВ, 2003. - 368 с.
4. Петросян С.Н., Зенкевич Н.А., Сёмина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.
5. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами: Учебное пособие. – М.: Синтег, 2005 – 138 с/.
6. Меншиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. – М., МЗ Пресс, 2006. – 208 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Основные понятия теории игр	7
1.1. Характерные особенности салонных игр.....	9
1.2. ИГРЫ БЕЗ ПРАВИЛ	10
2. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ.....	12
Пример №1. Народная игра "орлянка"	12
Пример № 2. Игра Мора.....	15
Пример № 3. Конкуренция торговых предприятий.....	17
Пример № 4. "Дилемма заключённых"	19
3. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ.....	20
3.1. Задача менеджера-булочника	20
3.1.1. Формализация исходных данных	21
3.1.2. Матрица исходов.....	22
3.1.3. Матрица полезностей исходов.....	22
3.1.4. Расчёт матрицы полезностей исходов	22
3.2. Критерии оптимальности	23
3.2.1 Критерий пессимиста (критерий Вальда)	24
3.2.2. Критерий сожалеющего пессимиста	25
(критерий Сэвиджа)	25
3.2.3. Статистический критерий.....	26
3.2.4. Критерий Лапласа.....	27
3.2.5. Критерий оптимиста.....	28
3.2.6. Критерий Гурвица.....	29
3.3. Неоднозначность выбора оптимальных решений.....	30
4. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР	32
4.1. Нижняя и верхняя цена игры.....	34
4.2. Понятие седловой точки матричной игры	35
4.3. Решение матричных игр в чистых стратегиях	35
4.4. Сокращение порядка платёжных матриц.....	37
5. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ	38
5.1. Формализованное описание получения результата одноходовой игры	39
5.1.1. Структурирование платёжной матрицы.....	39
5.1.2. Единичные индикаторные матрицы выбора стратегий.....	40
5.1.3. Платёжная функция	41
5.2. Понятие оптимальности в смешанных стратегиях	43
5.3. Теорема Джона Фон Неймана	44
6. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ МАТРИЧНЫХ ИГР	44
7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР.....	51
7.1. Решение игры 7×6 в чистых стратегиях	51
7.2. Решение игры 2×2 в смешанных стратегиях.....	52
7.3. Доминирование в играх 2×2	58
8. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ $2 \times n$ И $m \times 2$	61
8.1. Решение игр	61
8.2. Игры.....	68
8.3. Доминирование и переход к чистым стратегиям в играх $2 \times n$ и $m \times 2$	72
9. ОДНОШАГОВЫЕ БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ.....	75
9.1. Равновесие и доминирование в биматричных играх	75
9.1.1. Равновесие в доминирующих стратегиях обоих игроков	75
9.1.2. Равновесие с доминирующей стратегией одного из игроков	77
9.1.3. Равновесие без доминирующих стратегий	78
9.1.4. Отсутствие устойчивого равновесия в чистых стратегиях	79
9.2. Равновесие по Нэшу	79
9.2.1. Представление игр с нулевой суммой в виде биматричной игры.....	80
9.3. Равновесие по Нэшу в биматричных играх	82
при отсутствии решений в чистых стратегиях	82
9.3.1. Формализация получения решения в смешанных стратегиях	82

9.3.2. Условие равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях	87
9.3.5. Пример аналитического решения биматричной игры 2×2	89
в смешанных стратегиях	89
10. КООПЕРАТИВНОЕ РАВНОВЕСИЕ.....	93
10.1. Неустойчивость кооперативного равновесия	94
10.2. Парето-эффективность	96
10.3. Парето-множество. Метод "северо-восточного угла".....	98
10.4. Примеры идентификации Парето-множества.....	101
11. ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ.....	107
11.1. Фиксированное число шагов	108
11.2. Неограниченное число шагов.....	110
11.2.1. Стратегия "зуб за зуб"	111
12. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ.....	116
12.1. Последовательная игра "Выход фирмы на рынок"	118
12.2. Последовательная двухходовая игра.....	121
"Конкуренция торговых фирм".....	121
12.3. Последовательная четырёхходовая игра.....	124
13. РАСШИРЕННАЯ И НОРМАЛЬНАЯ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ	136
БИМАТРИЧНЫХ ИГР.....	136
13.1. Анализ платёжной матрицы последовательной игры.....	138
13.2. Расширенная форма представления статических биматричных игр.	139
Понятие информационного поля	139
14. ПАРЕТО-ЭФФЕКТИВНОСТЬ БИМАТРИЧНЫХ ИГР	142
В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ.....	142
14.1. Понятие Парето-эффективности в смешанных стратегиях	142
14.2. Выявление множества Парето-эффективных решений	143
в смешанных стратегиях	143
15. МАКСИМИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТИВНОСТИ	154
ПОВТОРЯЮЩИХСЯ БИМАТРИЧНЫХ ИГР.....	154
15.1. Игра "Семейный спор"	154
15.1.1. Доминирование. Решение по Нэшу. Парето-оптимальность	154
15.1.2. Решение в смешанных стратегиях	156
15.1.3. Максимизация результата: Двойное соглашение.....	162
15.1.4. Максимизация результата: Дополнительное соглашение. Делёж.....	163
16. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ	164
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И ВОЗМОЖНОСТИ	164
16.1. Игра с непостоянной суммой – необходимое условие кооперации.....	165
16.2. Классические кооперативные игры.....	166
16.3. Понятие супераддитивности	168
17. ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ГОЛОСОВАНИЕМ	175
17.1. Особенности процедуры демократических выборов	175
17.2. Постановка задачи на конкретном примере.....	176
17.3. Основные понятия	177
17.4. Правила голосования	178
17.4.1. Правило относительности большинства.....	178
17.4.2. Правило абсолютного большинства	179
17.4.3. Рейтинговое правило голосования.....	180
17.4.4. Правило парного преимущества	181
17.5. Парадоксы голосования.....	182
17.6. Теорема Эрроу	184
Список использованной литературы	187

**Дуплякин
Вячеслав Митрофанович**

**Заслуженный деятель
науки и техники
Российской Федерации**

Доктор технических наук

**Профессор кафедры экономики
Самарского государственного
Аэрокосмического университета**



Дуплякин Вячеслав Митрофанович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ. ТЕОРИЯ ИГР

Мультимедийное учебное пособие