МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Образовательный контент
в системе дистанционного обучения Moodle

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ
на 2009 – 2018 годы по проекту «Разработка стандарта НИУ «Производство изделий на предприятиях аэрокосмического кластера»
Соглашение № 1/5 от 03.06.2013 г.

САМАРА
2013

УДК 531(075)
Т338

Автор-составитель: **Алексеев Алексей Владимирович**

Теоретическая механика [Электронный ресурс] : образоват. контент в системе дистанц. обучения Moodle / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А. В. Алексеев. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав образовательного контента входят:
1. Теоретическая механика. Курс лекций.
2. Теоретическая механика. Задания для расчетно-графических работ.
3. Теоретическая механика. Задачи для самостоятельной работы.
4. Теоретическая механика. Рекомендации по решению задач.
5. Теоретическая механика. Набор тестов для самоконтроля.

Образовательный контент предназначен для студентов инженерно-технологического факультета, обучающихся по направлению «Производство изделий на предприятиях аэрокосмического кластера», изучающих дисциплину «Теоретическая механика» в 3 семестре.

Контент разработан на кафедре теоретической механики.

Кинематика точки

Введение в кинематику.

Способы задания движения точки. Определить (или задать) движение точки — значит определить (задать) ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Это делается одним из следующих способов.

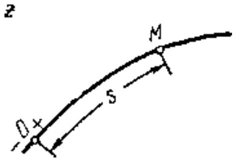


Рис. 1.

а) *Естественный* способ определения движения точки требует задания ее *траектории* относительно выбранной системы отсчета xyz (рис. 1). На траектории следует задать *начало и положительное направление* отсчета расстояний $s = OM$; расстояние s от начала отсчета O до точки M, измеренное вдоль дуги траектории и взятое с соответствующим знаком, будет однозначно определять положение точки M на траектории, а следовательно, и в системе отсчета xyz. Далее должно быть указано *начало отсчета времени* (начальный момент $t = 0$). Тогда движение точки будет определено, если для каждого момента времени t будет известна величина s, указывающая положение точки, т. е. если будет дана зависимость

$$s = f(t) \tag{1}$$

Равенство (1) называется *законом движения* (или *конечным уравнением* движения) точки.

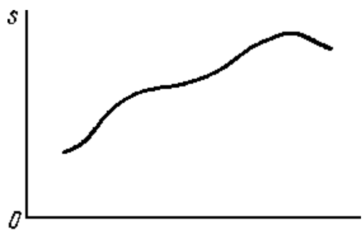


Рис. 2.

Таким образом, при *естественном* способе определения движения точки должны быть заданы: 1) траектория точки; 2) начало отсчета расстояний на траектории с указанием положительного направления отсчета и начальный момент времени; 3) закон движения точки вдоль траектории в виде

$$s = f(t).$$

По самой природе движения функция $f(t)$ должна быть:

1) *однозначной*, ибо в один и тот же момент времени движущаяся точка не может находиться в двух различных точках пространства;

2) *непрерывной*, ибо движение непрерывно и поэтому каждому бесконечно малому изменению t соответствует бесконечно малое изменение s;

3) *дифференцируемой*, т. е. должна допускать *производную*. Необходимость этого требования будет вполне очевидна из рассмотрения основных положений кинематики и динамики.

Если $s = c = const$, то это означает, что точка относительно данной системы отсчета находится в покое.

Закон движения точки может быть задан не только аналитически, но и графически (рис. 2), т. е. в виде кривой, дающей зависимость между s и t. Это графическое изображение закона движения сокращенно называют *графиком движения*. Кривую графика движения не следует смешивать с траекторией движения; траектория может быть, например, прямой, а закон движения вдоль этой прямой может быть каким угодно, т. е. график движения может быть выражен любой кривой.

б) *Координатный* способ определения движения точки состоит в том, что даются: 1) какая-либо система координат (система ориентировки), связанная с телом отсчета, и 2) координаты движущейся точки, как функции времени.

Положение точки в пространстве трех измерений определяется тремя числами q_1, q_2, q_3, которые вообще называются криволинейными координатами точки. Следовательно, закон движения точки будет в общем случае задаваться уравнениями

$$q_1 = q_1(t), \qquad q_2 = q_2(t), \qquad q_3 = q_3(t). \tag{2}$$

Здесь, как и в равенстве (1), все функции должны быть однозначными, непрерывными и дифференцируемыми.

Чаще всего для определения положения точки используется прямоугольная декартова система координат *xyz*. В этой системе координат движение точки задается в виде

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t). \tag{3}$$

Каждое из трех уравнений (3), взятое отдельно, определяет закон движения проекции точки на соответствующую ось; поэтому можно считать, что при этом способе задания исследуемое движение разлагается по направлениям осей координат и представляется как совокупность трех движений вдоль этих взаимно перпендикулярных осей.

Уравнения (3) представляют собой, с одной стороны, закон движения точки, так как позволяют для каждого момента времени *t* определить *x*, *y* и *z*, а следовательно, и положение точки М; с другой стороны, эти уравнения являются уравнениями траектории точки в *параметрической форме*, причем роль параметра играет время *t*. Исключая из уравнений (3) параметр *t*, получим одну из следующих систем двух уравнений:

$$\left.\begin{matrix}\varphi(x,y)=0\\ \chi(x,z)=0\end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix}\psi(y,z)=0\\ \varphi(x,y)=0\end{matrix}\right\}, \qquad \left.\begin{matrix}\chi(x,z)=0\\ \psi(y,z)=0\end{matrix}\right\}; \tag{4}$$

каждая из этих систем представляет траекторию точки как пересечение двух цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны осям координат (рис. 3). Если $x = a$, $y = b$, $z = c$ где a, b и c — постоянные, то точка М относительно системы отсчета *xyz* находится в покое.

Кроме декартовой, в механике для изучения движения точки используются и другие системы координат, в частности сферические и цилиндрические, которые будут рассмотрены ниже (см. стр. 83).

в) *Векторный* способ определения движения точки основан на задании ее положения радиусом-вектором *r*, проведенным из начала О выбранной системы ориентировки (см. рис. 3). Так как

$$r = xi + yj + zk,$$

то в векторной форме закон движения точки представится в виде

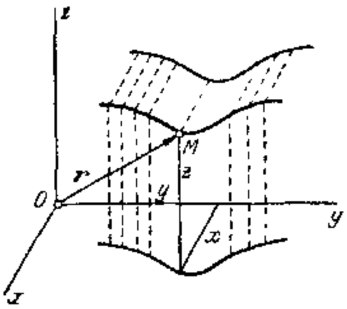


Рис. 3.

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \tag{5}$$

Траекторией точки при векторном задании движения будет годограф радиуса-вектора r.

В случае *плоского движения*, т. е. когда траектория есть плоская кривая, закон движения точки относительно какой-либо системы координат, расположенной в плоскости движения, выразится только двумя уравнениями.

В частности, в случае плоской декартовой системы координат (xy) будем иметь:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{6}$$

а в случае плоской полярной системы координат (r, φ) (см. рис. 10)

$$r = r(t), \qquad \varphi = \varphi(t), \tag{7}$$

где r — полярный радиус.

Векторное выражение закона плоского движения будет

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j \tag{8}$$

Исключая t в системах (6) или (7), получим уравнения траектории плоского движения в декартовых координатах

$$f(x, y) = 0 \tag{9}$$

или в полярных

$$\Phi(r, \varphi) = 0 \tag{10}$$

По характеру траектории движение точки может быть *прямолинейным и криволинейным*, причем эти свойства траектории, конечно, зависят от выбора системы отсчета. Движение, прямолинейное относительно одной системы отсчета, может быть криволинейным относительно другой, и наоборот.

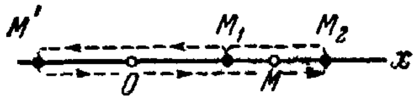


Рис. 4.

Прямолинейное движение точки.

Закон прямолинейного движения. Прямолинейным называется такое движение точки, при котором ее траектория относительно выбранной системы отсчета есть прямая линия.

Положение точки на прямой определяется координатой x (рис. 4), которая представляет собой расстояние движущейся точки М от произвольно выбранного начала О, и берется с положительным или отрицательным знаком в зависимости от направления отрезка ОМ; величина $OM = x$ есть, следовательно, величина алгебраическая. Когда точка М движется прямолинейно, то закон движения ее выражается уравнением

$$x = f(t). \tag{1}$$

Если x по абсолютной величине возрастает, то точка M удаляется от начала О и движение называется прямым, в противном случае — возвратным. Если $x = f(t)$ за все время движения на некотором интервале времени только убывает или только возрастает, то прямолинейное движение на этом интервале называется *монотонным*. Если x от времени не зависит, то точка М не изменяет своего расстояния от начала O и, следовательно, находится в покое относительно данной системы отсчета. (По существу, положение точки М определяется вектором $\overline{OM}$; но так как все векторы $\overline{OM}$ при прямолинейном движении коллинеарны и различаются между собой, кроме длины, только стороной, куда они направлены, т. е. знаком, то в этом случае положение точки M можно определять алгебраической, величиной ОМ.)

Пусть точка M движется по прямой Ох (см. рис. 4) и в момент времени t_1 находится в положении M_1, а в момент t_2 — в положении M_2. Вектор $\overline{M_1M_2}$, имеющий начало в начальном положении точки, а конец — в конечном, называется *перемещением* точки M. за промежуток времени $t_2—t_1$. Необходимо различать между собой понятия «перемещение» и «путь»: точка М может прийти из положения M_1 в положение M_2, пройдя разные пути (например, путь $M_1M'M_2$), тогда как перемещение ее будет одно и то же, т. е. $\overline{M_1M_2}$.

В случае прямолинейного движения векторы перемещений точек будут коллинеарны, и мы их можем тоже рассматривать как алгебраические величины. Понятия «перемещение» и «путь» совпадают только в том случае, если движение прямолинейно и монотонно.

Гармоническое колебание. Одним из часто встречающихся в приложениях случаев прямолинейного движения является *гармоническое колебательное* движение, закон которого дается уравнением

$$x = a\sin\omega t\,, \tag{10}$$

Скорость точки при гармоническом колебании будет:

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega\cos\omega t\,, \tag{11}$$

а ускорение

$$w = \frac{d\sigma}{dt} = -a\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 x\,. \tag{12}$$

Величина а есть наибольшее отклонение движущейся точки от начала отсчета О и называется *амплитудой* колебаний (рис. 5); точка О называется *центром* колебаний, а промежуток времени, в течение которого точка возвращается в прежнее положение с той же скоростью, — *периодом* колебаний (Т). Период определяется из условий [см. формулы (10) и (11)]:

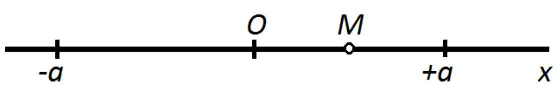


Рис. 5.

$$\sin\omega(t+T) = \sin\omega t \ \text{ и } \ \cos\omega(t+T) = \cos\omega t\,,$$

откуда

$$\omega T = 2\pi \ \text{ и } \ T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{13}$$

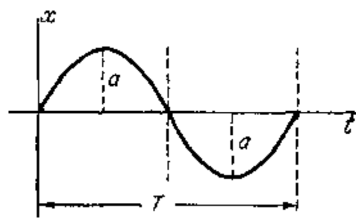


Рис. 6.

Величина, обратная периоду, т. е.

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \upsilon\,,$$

называется *частотой* колебаний. Аргумент синуса ωt называется *фазой* колебаний. Величина $\omega = 2\pi\upsilon$ называется *циклической* или *круговой частотой* колебаний. Кривой расстояний этого движения является синусоида (рис. 6), кривой скоростей—косинусоида, а кривой ускорений — также синусоида, но сдвинутая по фазе относительно графика движения на π. Как видно из формулы (12), ускорение гармонического движения точки пропорционально ее отклонению от центра колебаний.

В общем случае закон гармонических колебаний дается уравнением $x = a\sin(\omega t + \alpha)$, где величина α является начальной фазой колебаний (фазой в момент $t = 0$). В частности, при $\alpha = 0$ получаем закон (10); при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ закон движения будет $x = a\cos\omega t$.

Криволинейное движение точки.

Закон движения. Если траектория движущейся точки относительно выбранной системы отсчета есть кривая линия, то движение называется *криволинейным*.

Положение точки в данной системе отсчета определяется радиусом-вектором $r(x, y, z)$, имеющим начало в начале координат (рис. 7). При движении точки радиус-вектор меняется (в общем случае и по модулю и по направлению) как функция времени. Закон криволинейного движения точки выражается векторным уравнением

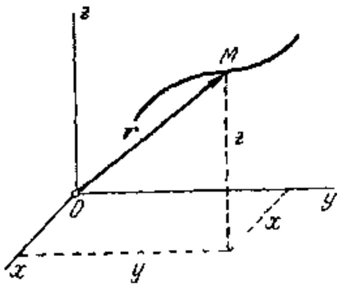


Рис. 7.

$$r = f(t), \tag{1}$$

которое равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

представляющим собой законы движения проекций точки по осям координат, или закон движения точки в осях прямоугольных декартовых координат.

Если $r = const$, то точка находится относительно данной системы отсчета в покое. Если r изменяется в зависимости от времени, точка будет двигаться, описывая траекторию, которая явится годографом вектора r. Равенства (2) представляют собой одновременно уравнения траектории в параметрической форме.

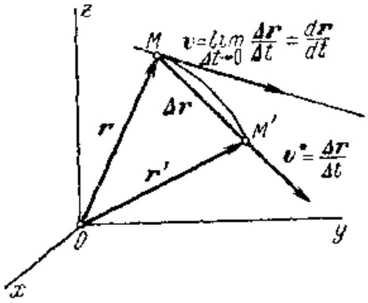


Рис. 8.

Скорость в криволинейном движении. Пусть в некоторый момент времени t положение точки М (рис. 8) определяется радиусом-вектором r, а в момент t' — радиусом-вектором $r' = r + \Delta r$. Тогда перемещение точки М за промежуток времени $\Delta t = t' - t$ будет:

$$\overline{MM'} = r' - r = \Delta r .$$

Величина, равная отношению перемещения точки к соответствующему промежутку времени, т. е.

$$v^* = \frac{r' - r}{t' - t} = \frac{\Delta r}{\Delta t}, \tag{3}$$

называется средней скоростью точки за промежуток времени Δt.

Следовательно, средняя скорость точки есть вектор, направленный по хорде в сторону движения (так как Δt есть скаляр).

Скорость точки в данный момент определяется как предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$v = \lim \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \text{ или } v = \frac{dr}{dt}. \tag{4}$$

Таким образом, скорость точки в данный момент времени есть векторная величина, равная первой производной от радиуса-вектора точки по времени. Так как в пределе, при $\Delta t \to 0$, направление вектора $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ совпадает с направлением касательной к траектории (см. рис. 8), то скорость точки в данный момент времени направлена по касательной к ее траектории. Далее, так как, $|dr| = |ds|$ где ds есть элемент дуги траектории, то модуль скорости

$$|v| = \left|\frac{dr}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|. \tag{5}$$

Заметим, что равенство

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{6}$$

определяет алгебраическую величину скорости или, иными словами, проекцию вектора на касательную τ, проведенную в точке M в сторону положительного отсчета расстояния s, т. е. в этом случае $v = v_\tau$.

Выражая r через его проекции на прямоугольные декартовы оси координат в виде

$$r = xi + yj + zk\,,$$

получим выражение скорости точки через ее проекции на те же оси:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k\,. \tag{7}$$

Отсюда легко заключить, что проекции скорости точки на прямоугольные декартовы оси координат равны первым производным от координат точки по времени, т. е.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\,, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}\,, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}\,. \tag{8}$$

Из этих равенств следует также, что проекция скорости точки на любую неподвижную относительно данной системы отсчета ось равна скорости проекции этой точки на ту же ось.

По общей формуле, выражающей модуль вектора через его проекции, из равенств (8) имеем:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \text{ или } v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{9}$$

Для направляющих косинусов скорости получим:

$$\cos(v \hat{,} x) = \frac{v_x}{v}\,,\ \cos(v \hat{,} y) = \frac{v_y}{v}\,,\ \cos(v \hat{,} z) = \frac{v_z}{v}\,, \tag{10}$$

где v_x, v_y, v_z и υ определяются равенствами (8) и (9).

Формулы (8) — (10) позволяют вычислить скорость точки в любой момент времени, если движение задано уравнениями (2), т. е. координатным способом.

Скорость в круговом движении. Угловая скорость. Рассмотрим движение точки M по окружности радиуса R (рис. 9). Скорость точки M в

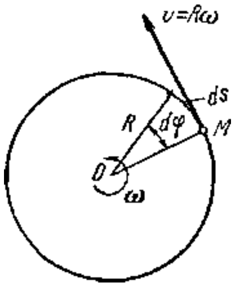


Рис. 9.

этом случае будет иметь численное значение

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}, \qquad (11)$$

так как $ds = Rd\varphi$. Величина

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad (12)$$

называется *угловой скоростью* вращения радиуса $OM = R$. Таким образом, при круговом движении скорость точки будет:

$$v = R\omega. \qquad (13)$$

Направлена скорость по касательной к окружности, т. е. перпендикулярно к радиусу OM.

Разложение скорости на радиальную и трансверсальную составляющие. Представим радиус-вектор r точки в виде

$$r = rr^0, \qquad (14)$$

где r^0 есть единичный вектор по направлению r. При движении точки вектор r меняется и по длине и по направлению, а следовательно, r^0 и r суть некоторые функции времени. Дифференцируя равенство (14) по t, получим следующее выражение скорости точки:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}r^0 + \frac{dr^0}{dt}r. \qquad (15)$$

Скорость, как видно из этого выражения, состоит из двух слагаемых. Первое из них $\frac{dr}{dt}r^0$ имеет то же направление, что и радиус-вектор r, и характеризует изменение r по модулю. Чтобы выяснить смысл второго слагаемого, заметим, что $\left|dr^0\right| = d\varphi$ где φ — угол поворота вектора r; следовательно, модуль второго слагаемого будет:

$$\left|\frac{dr^0}{dt}\right| = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Направление этого слагаемого перпендикулярно к направлению r^0, так как направление дифференциала единичного вектора перпендикулярно к направлению самого вектора. Тогда

$$r\frac{dr^0}{dt}=r\frac{d\varphi}{dt}p^0. \qquad (16)$$

где p^0 есть единичный вектор направления, перпендикулярного к r^1). Таким образом, второе слагаемое представляет изменение вектора r по направлению. Окончательное выражение скорости будет:

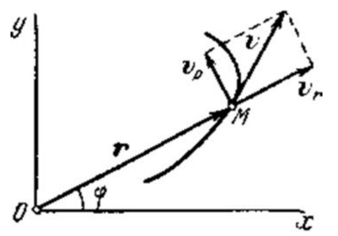


Рис. 10.

$$v=v_r+v_p=\frac{dr}{dt}r^0+r\frac{d\varphi^0}{dt}p^0. \qquad (17)$$

Первое слагаемое $v_r=\frac{dr}{dt}r^0$ называется *радиальной* составляющей, а второе слагаемое $v_p=r\frac{d\varphi^0}{dt}p^0$ — *трансверсальной* (или поперечной) составляющей скорости (рис. 10).

Скорость точки в полярных координатах. Пусть точка движется в плоскости и закон ее движения дан в полярных координатах уравнениями

$$r=r(t),\ \varphi=\varphi(t). \qquad (18)$$

Тогда (рис. 10)

$$v=v_r+v_p=v_r r^0+v_p p^0, \qquad (19)$$

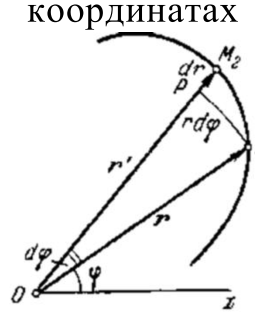


Рис. 11.

где, согласно (17),

$$v_r=\dot r,\ v_p=r\dot\varphi. \qquad (20)$$

Модуль скорости найдется из равенства

$$v=\sqrt{v_r^2+v_p^2}\ \text{или}\ v=\sqrt{r^2+r^2\varphi^2}. \qquad (21)$$

Этот же результат можно получить непосредственно, исходя из выражения элемента дуги ds в полярных координатах на плоскости. Рассматривая бесконечно малый криволинейный треугольник M_1M_2P (рис. 11), мы можем его, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, считать за прямолинейный и прямоугольный (угол P — прямой, так как PM_1 есть дуга окружности радиуса r). Тогда по теореме Пифагора получим:

$$(M_1M_2)^2 = (PM_2)^2 + (M_1P)^2.$$

Но $M_1M_2 = ds$, $PM_2 = dr$ и $M_1P = rd\varphi$. Следовательно,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Отсюда, деля обе части равенства на dt^2, получаем:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \qquad (22)$$

что совпадает с результатом, даваемым формулой (21).

Ускорение точки в криволинейном движении. Пусть точка, двигаясь по закону, выражаемому равенствами (1) или (2), в момент t находится в положении M и имеет скорость $v = \varphi(t)$, а в момент $t + \Delta t$ приходит в положение M' и имеет скорость $v' = v(t + \Delta t)$ (рис. 12). По строим вектор, равный v', в точке M. Тогда

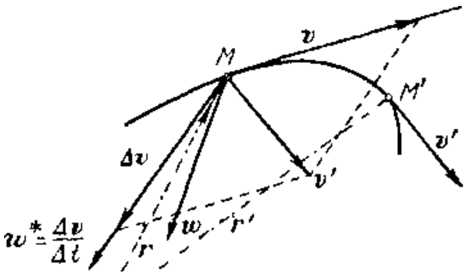


Рис. 12.

$$v' - v = \Delta v,$$

где Δv есть приращение скорости за промежуток времени Δt. Разделив Δv на Δt, получим вектор

$$w^* = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \qquad (32)$$

который называется *средним ускорением* точки за промежуток времени Δt. Перейдя к пределу, при $\Delta t \to 0$, получим величину w, называемую *ускорением* точки в данный момент времени t:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \qquad (33)$$

или, учитывая равенство (4),

$$w = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}, \qquad (34)$$

Таким образом, ускорение точки в данный момент времени есть векторная величина, равная первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Вектор w расположен по ту же сторону от касательной M_τ к траектории, что и векторы w^* или Δv; следовательно, он всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Предельное положение плоскости, проходящей через какие-нибудь три точки кривой, когда эти точки стремятся к точке M, или (что то же) предельное положение плоскости, проходящей через касательную M_τ и точку M', когда эта точка стремится к M, определяет *соприкасающуюся плоскость* в точке M кривой. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость есть, очевидно, плоскость самой кривой.

Из равенства (33) следует, что вектор w будет лежать в той же плоскости, в которой в пределе лежит вектор $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, т. е. в соприкасающейся плоскости. Таким образом, вектор ускорения w лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону погнутости траектории.

Разложим вектор r по осям координат; тогда

$$r = xi + yj + zk.$$

Дифференцируя это выражение два раза по времени, получим:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}i + \frac{d^2y}{dt^2}j + \frac{d^2z}{dt^2}k.$$

Отсюда

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = x, \qquad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = y, \qquad w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = z \tag{35}$$

и

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} \text{ или } w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{36}$$

Направляющие косинусы ускорения будут:

$$\cos(\widehat{w, x}) = \frac{w_x}{w}, \qquad \cos(\widehat{w, y}) = \frac{w_y}{w}, \qquad \cos(\widehat{w, z}) = \frac{w_z}{w}, \tag{37}$$

где значения w_x, w_y, w_z и w даются равенствами (35) и (36).

Согласно (35), проекции ускорения точки на оси координат равны вторым производным от координат этой точки по времени. Одновременно из формул (35) видно, что проекция ускорения точки на любую, неподвижную относительно данной системы отсчета ось, равна ускорению проекции этой точки на ту же ось.

Формулы (35)—(37) позволяют вычислить ускорение точки в любой момент времени, если движение задано координатным способом уравнениями (2).

Разложение ускорения по осям естественного трехгранника. Представим скорость точки *M* в виде

$$v = v_\tau \tau^0 = v\tau^0, \tag{43}$$

где $v = v_\tau$ — проекция вектора v на ось $M\tau^0$). Дифференцируя равенство (43) по времени, получим:

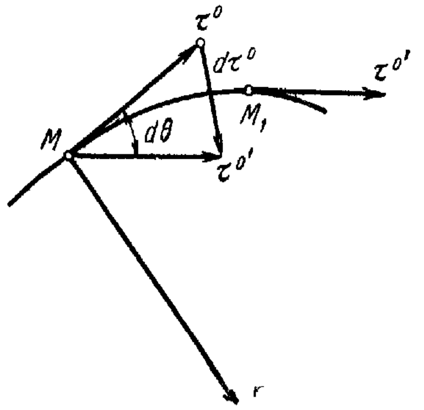


Рис. 13.

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\tau^0 + \frac{d\tau^0}{dt}v, \tag{44}$$

Первое слагаемое есть вектор $\frac{dv}{dt}\tau^0$, направленный по касательной τ^0. Найдем значение второго слагаемого. Дифференциал единичного вектора $d\tau^0$ перпендикулярен к τ^0 и, как видно из рис. 13, лежит в соприкасающейся плоскости; следовательно, вектор $d\tau^0$ направлен по главной нормали n^0. Кроме того, $|d\tau^0| = |\tau^0| d\theta = d\theta$, где $d\theta$ — угол смежности. Отсюда находим, что $d\tau^0 = d\theta n^0$

и

$$\frac{d\tau^0}{dt} = \frac{d\theta}{dt}n^0.$$

Но

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho},$$

так как

$$\frac{ds}{dt} = v, \text{ а } \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho},$$

где ρ есть радиус кривизны кривой в точке M. Следовательно,

$$\frac{d\tau^0}{dt} = \frac{v}{\rho} n^0. \tag{45}$$

Подставляя найденную величину в равенство (44), получим окончательно:

$$w = \frac{dv}{dt} \tau^0 + \frac{v^2}{\rho} n^0. \tag{46}$$

Таким образом, проекции ускорения на оси естественного трехгранника равны

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2},\ w_n = \frac{v^2}{\rho},\ w_b = 0. \tag{47}$$

Вектор $w_\tau = w_\tau \tau^0$ называется *тангенциальной* или *касательной* составляющей ускорения, а вектор $w_n = w_n n^0$ *нормальной* составляющей (рис. 14). Модуль ускорения на основании равенств (46) будет:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$$

или

$$w = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \tag{48}$$

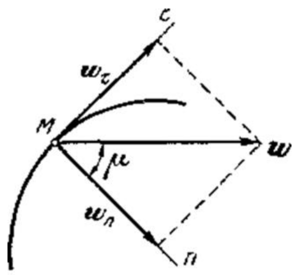


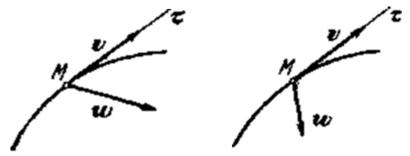
Рис. 14.

Угол μ, между вектором w и главной нормалью определяется из уравнения (см. рис. 14)

$$tg\mu = \frac{w_\tau}{w_n}. \tag{49}$$

По формулам (47) — (49) можно определить модуль и направление ускорения, если движение задано естественным способом, т. е. дана траектория (следовательно, известен радиус кривизны в каждой ее точке) и дан закон движения вдоль траектории в виде $s = f(t)$. Вектор τ^0 (или ось τ) направляется в этом случае в сторону положительного отсчета расстояния s.

Рассуждая так же, как в случае прямолинейного движения (стр. 56), придем к выводу, что движение будет ускоренным, когда проекции векторов v и w на ось τ, т. е. величины $v = \frac{ds}{dt}$ и $w_\tau = \frac{dv}{dt}$ имеют одинаковые знаки (угол между v и w острый, рис. 15, *а*), и замедленным, когда эти знаки разные (угол между v и w тупой, рис. 15, б).



а) б)
Рис. 15.

Если в *данный момент времени* $\frac{dv}{dt} = w_\tau = 0$ (что может иметь место, когда величина скорости достигает максимума или минимума), то ускорение точки в этот момент направлено по главной нормали ($w=w_n$, $\mu=0$). Если же $\frac{dv}{dt} = w_\tau = 0$ в течение некоторого *промежутка времени,* то на этом интервале времени численная величина скорости постоянна (движение является равномерным криволинейным), а ускорение, появляющееся за счет изменения вектора о по направлению, направлено вдоль главной нормали к траектории $w = \frac{v^2}{\rho} n^0$.

Аналогично если в *данный момент времени* $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$, то вектор w в этот момент направлен по касательной к траектории ($w=w_\tau$, $\mu=90°$). Такой

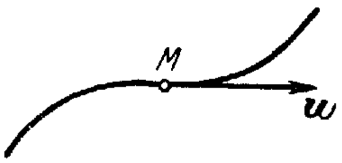


Рис. 16.

случай может иметь место или когда в данный момент скорость точки обращается в нуль (точка меняет направление своего движения), или же когда движущаяся точка находится в точке перегиба своей траектории, где $\rho = \infty$ (рис. 16). Если же $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ в течение некоторого *промежутка времени*, а точка движется ($v \neq 0$), то это может быть лишь в случае, когда в течение всего промежутка времени движение прямолинейно ($\rho = \infty$).

Наконец, полное ускорение точки в течение некоторого промежутка времени может быть равно нулю ($w=0$), когда в течение этого промежутка и $w_\tau = 0$ и $w_n = 0$, т. е., как следует из предыдущих рассуждений, когда точка в течение этого промежутка движется относительно выбранной системы отсчета равномерно и прямолинейно.

Законы равномерного и равнопеременного криволинейного движения. 1) Если во все время движения численная величина скорости постоянна, т. е. $v = v_0 = const$, то криволинейное движение называется равномерным. Из выражения $\frac{ds}{dt} = v$ или $ds = vdt$, интегрируя, найдем закон равномерного криволинейного движения:

$$s = s_0 + v_0 t\,, \tag{50}$$

где s_0 — начальное расстояние точки (в момент $t=0$).

2) Если *касательное ускорение* точки во все время движения постоянно, т. е. $w_\tau = a_\tau = const$ криволинейное движение называется равнопеременным. Из выражения $\frac{dv}{dt} = a_\tau$ или $dv = a_\tau dt$ найдем закон изменения скорости в этом движении:

$$v = v_0 + a_\tau t\,, \tag{51}$$

где v_0 — начальная скорость точки (в момент $t=0$). Отсюда, принимая во внимание, что $v = \frac{ds}{dt}$, получим закон равнопеременного криволинейного движения в виде

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}\,, \tag{52}$$

где s_0 — начальное расстояние. От случая прямолинейного движения выражение (52) отличается тем, что в него вместо x входит s, а вместо a — величина a_τ.

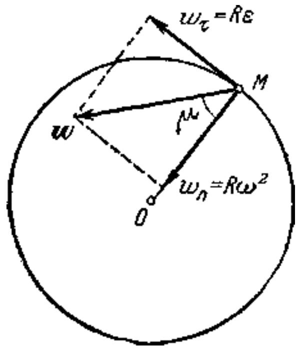


Рис. 17.

Ускорение в круговом движении. Если точка движется по окружности радиуса $OM=R$ (рис. 17), то, согласно (13), скорость ее будет:

$$v = R\omega\,. \tag{53}$$

Дифференцируя это выражение по t, получим тангенциальную проекцию ускорения

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = R\frac{dw}{dt} = R\varepsilon\,. \tag{54}$$

Величина

$$\varepsilon = \frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,. \tag{55}$$

называется угловым ускорением вращения радиуса $OM=R$.

Нормальную проекцию ускорения, которую при круговом движении называют еще *центростремительным* ускорением, получим, принимая во внимание, что радиус кривизны $\rho=R$, в виде

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{w^2R^2}{R} = Rw^2\,. \tag{56}$$

Модуль ускорения точки в круговом движении будет:

$$w = R\sqrt{\varepsilon^2 + w^4}\,. \tag{57}$$

Угол μ, который образует ускорение w с радиусом, определяется из равенства

$$tg\mu = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\,. \tag{58}$$

Если $v = const$, то ускорение в круговом движении будет направлено по радиусу, так как тангенциальное ускорение в этом случае равно нулю.

Разложение ускорения на радиальную и трансверсальную составляющие. Выражение ускорения в полярных координатах. Пусть точка движется по плоской кривой (рис. 18) по закону $r = r(t)$. Согласно формуле (17), скорость v этого движения можно представить в виде

$$v = \frac{dr}{dt}r^0 + \frac{d\varphi}{dt}p^0\,.$$

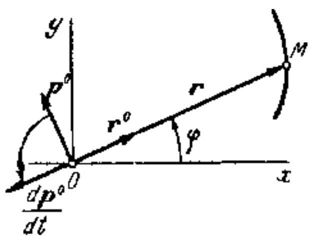


Рис. 18.

Дифференцируя данное равенство по t, получим:

$$\frac{dv}{dt} = w = \frac{d^2r}{dt^2}r^0 + \frac{dr}{dt}\frac{dr^0}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}p^0 + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}p^0 + r\frac{d\varphi}{dt}\frac{dp^0}{dt}\,. \tag{59}$$

Найдем модуль и направление вектора $\frac{dp^0}{dt}$.

Дифференциал единичного вектора dp^0 перпендикулярен к p^0 и направлен, как видно из рисунка, противоположно r^0 (направление dp^0 получается поворотом p^0 на 90° в сторону положительного отсчета угла φ); кроме того, $dp^0 = d\varphi$. Следовательно,

$$\frac{dp^0}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} r^0. \tag{60}$$

Подставляя это значение $\frac{dp^0}{dt}$ в равенство (59) и вынося единичные векторы r^0 и p^0 за скобки, получим, принимая во внимание равенство (16) и приводя подобные члены,

$$w = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} r^0 + \left\{r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right\} p^0. \tag{61}$$

Формула (61) представляет собой разложение ускорения на составляющие: *радиальную*

$$w = \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} r^0, \tag{62}$$

направленную по радиусу-вектору, и *трансверсальную* (или *поперечную*)

$$w = \left\{r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right\} p^0. \tag{63}$$

перпендикулярную к радиусу-вектору.

Рассмотрим отдельно члены, входящие в выражения w_r и w_p. Член $\frac{d^2r}{dt^2}$ есть ускорение точки вследствие ее движения по радиусу-вектору, а $r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ есть центростремительное ускорение, происходящее вследствие вращения радикса-вектора; этим же вращением вызывается тангенциальное ускорение $r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ в выражении w_p дар. Член $2\,\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}$ представляет собой так называемое *поворотное* или *кориолисово* ускорение.

Заметим, что величина w_p может быть представлена еще в виде

$$w_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right). \tag{64}$$

Выражение $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$, можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{dv_\sigma}{dt}=\frac{d^2\sigma}{dt},$$

называется *секторным ускорением*.

Легко доказать, что момент ускорения относительно какого-либо центра равен удвоенному секторному ускорению относительно этого центра. Действительно, согласно равенству $2v_\sigma=2\frac{d\sigma}{dt}=r\times v$,

$$mom_0 v=r\times v=2\frac{d\sigma}{dt}.$$

Дифференцируя это равенство по времени, будем иметь:

$$\frac{dr}{dt}\times v+r\times\frac{dv}{dt}=2\frac{d^2\sigma}{dt^2}.$$

Так как $\frac{d\sigma}{dt}=w$, $\frac{dr}{dt}=v$, вследствие чего первый член левой части обращается в нуль, то окончательно получим:

$$r\times v=2\frac{d^2\sigma}{dt^2},$$

или

$$mom_0 w=2\frac{d^2\sigma}{dt^2}, \tag{65}$$

что и требовалось доказать.

Если закон движения точки дан в полярных координатах уравнениями

$$r=r(t) \qquad \text{и} \qquad \varphi=\varphi(t),$$

то по этим данным легко вычислить проекции ускорения w_r и w_p, так как, согласно (62) и (63),

$$w_r=\ddot{r}-r\varphi^2,\ w_p=r\ddot{\varphi}-2\dot{r}\ddot{\varphi}. \tag{66}$$

Модуль ускорения выразится формулой

$$w=\sqrt{w_r^2-w_p^2}=\sqrt{\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)^2+\left(r\ddot{\varphi}-2\dot{r}\dot{\varphi}\right)^2}. \tag{67}$$

Криволинейные координаты. Выражение скорости в криволинейных координатах. Пусть в некоторой декартовой системе K точка M имеет координаты x, y, z. За координаты этой точки мы можем принять любые однозначные и дифференцируемые функции x, y, z:

$$q_1 = f_1(x,y,z)\,, \qquad q_2 = f_2(x,y,z)\,, \qquad q_3 = f_3(x,y,z)\,, \tag{68}$$

если только возможно из системы (68) однозначно определить:

$$x = \varphi_1(q_1,q_2,q_3)\,, \qquad y = \varphi_2(q_1,q_2,q_3)\,, \qquad z = \varphi_3(q_1,q_2,q_3) \tag{69}$$

(точечное преобразование пространства). Действительно, тогда всякой системе значений (x, y, z) будет соответствовать определенная система значений (q_1, q_2, q_3), даваемая равенствами (68), и обратно. Числа q_1, q_2, q_3 называются вообще *криволинейными координатами* точки M.

Заметим, что уравнения (69) при каждом частном значении переменных (q_1, q_2, q_3) обращаются в уравнения координатных плоскостей системы K

$$x = c_1\,,\ y = c_2\,,\ z = c_3\,; \tag{70}$$

эти плоскости параллельны основным координатным плоскостям и пересекаются в точке (c_1, c_2, c_3). В свою очередь уравнения (68) при каждом частном значении переменных (x, y, z) представляют собой уравнения некоторых *поверхностей*:

$$q_1 = \alpha\,,\ q_2 = \beta\,,\ q_3 = \gamma\,; \tag{71}$$

где α, β и γ суть некоторые постоянные, причем вид этих поверхностей зависит от вида функций f_1, f_2 и f_3. Действительно, подставляя в равенства (71) вместо q_1, q_2 и q_3 их выражения через x, y и z, получим уравнения

$$f_1(x,y,z) = \alpha\,, \qquad f_2(x,y,z) = \beta\,, \qquad f_3(x,y,z) = \gamma\,, \tag{72}$$

которые являются относительно декартовой системы координат уравнениями поверхностей.

Таким образом, если декартовы координаты x, y и z какой-нибудь точки связаны с тремя параметрами q_1, q_2, q_3 уравнениями (68), то q_1, q_2, q_3 можно рассматривать как координаты той же точки в некоторой системе координат, у которой роль координатных плоскостей играют поверхности, определяемые уравнениями (71) или (72); поэтому эти поверхности называются *координатными поверхностями* данной системы координат (q_1, q_2, q_3).

Уравнения (70) представляют семейство координатных плоскостей. Каждые два уравнения из этих трех в совокупности определяют семейство *координатных линий (прямых)*. Итак, в декартовой системе координат точка определяется пересечением или трех координатных плоскостей, или соответствующих координатных линий. Рассуждая аналогично, найдем, что в случае системы координат (q_1, q_2, q_3) точка определяется пересечением или трех координатных поверхностей, или соответствующих им координатных линий, определяемых попарным пересечением координатных поверхностей. Так как координатные линии вообще будут кривыми, то все системы координат, имеющие произвольные координатные поверхности, называются *криволинейными системами координат*.

В случае декартовой системы координат все пространство можно себе представить состоящим из множества бесконечно малых параллелепипедов, ребра которых параллельны осям координат. При преобразовании координат точек этого пространства к криволинейным координатам эти параллелепипеды, исказившись, обратятся в бесконечно малые ячейки с кривыми гранями и ребрами, образуемыми координатными поверхностями и линиями. Преобразование координат точек, конечно, не изменяет метрики пространства, и последнее остается прежним евклидовым пространством.

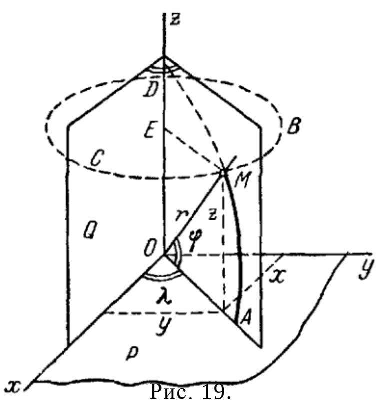


Рис. 19.

Среди всех возможных пространственных криволинейных систем координат всего чаще употребляются *сферические* и *цилиндрические* координаты.

В *сферической* (или *полярной*) системе координат положение точки M (рис. 19) определяется длиной полярного радиуса $OM=r$, проведенного из начала координат O, углом φ, который образует полярный радиус r с плоскостью P (плоскостью Oxy), называемой *полярной* или *экваториальной плоскостью* (или углом, образуемым r с осью Oz, называемой *полярной* *осью*), и двугранным углом λ, который образует плоскость, проходящая через полярную ось и точку M, с основной плоскостью Q (называемой иногда *плоскостью первого меридиана*). Так как этой системой часто пользуются в астрономии, то угол φ называют еще *широтой*, а λ — *долготой* (иногда вместо широты φ употребляют *полярный угол* $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$).

Итак, сферические координаты точки M суть:

$$r = OM, \qquad \lambda = \angle xOA, \qquad \varphi = \angle AOM, \tag{73}$$

Непосредственно из рисунка видно, что связь между сферическими и декартовыми координатами при расположении осей x, y, z, указанном на рисунке, будет следующая:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\lambda, \\ y &= r\cos\varphi\sin\lambda, \\ z &= r\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Координатные поверхности в сферической системе координат представляются уравнениями

$$r = \alpha, \qquad \lambda = \beta, \qquad \varphi = \gamma, \tag{75}$$

где α, β и γ — некоторые переменные параметры. Эти уравнения соответственно представляют:

$r = \alpha$ — сферу, описанную радиусом α из центра O,

$\lambda = \beta$ — плоскость, проходящую через точку M и полярную ось z,

$\varphi = \gamma$ — круглый конус с осью z, вершиной O и углом при вершине, равным $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$.

Координатные линии получаются пересечением координатных поверхностей, т. е. определяются следующими совокупностями двух уравнений из (75):

$$\text{(а)} \begin{cases} r = \alpha \\ \lambda = \beta \end{cases}, \qquad \text{(б)} \begin{cases} \lambda = \beta \\ \varphi = \gamma \end{cases}, \qquad \text{(в)} \begin{cases} \varphi = \gamma \\ r = \alpha \end{cases}, \tag{76}$$

Они представляют собой:

(а) — окружность AMD радиуса α (или меридиан),

(б) — прямую OM, по которой направлен вектор r,

(в) — окружность $MBCM$ радиуса $\alpha\cos\varphi$ (или параллель).

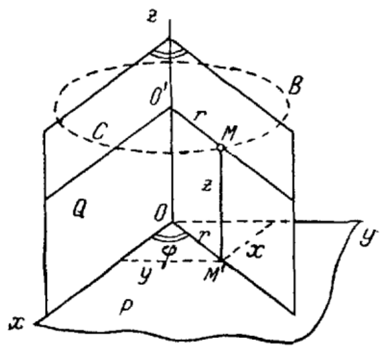


Рис. 20.

В *цилиндрической или полуполярной* системе координат положение точки M (рис. 20) определяется расстоянием ее $O'M = r$ до оси Oz, проходящей через начало O, расстоянием проекции точки M на ось Oz до начала O, т. е. величиной $OO' = z$, и двугранным углом $\varphi = \angle CO'M$, образуемым плоскостью, проходящей через точку M и ось Oz, с основной плоскостью Q. Иначе положение точки M в цилиндрической системе координат определяется расстоянием плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно к оси Oz, от начала O, т. е. величиной $OO' = z$, и плоскими полярными координатами точки в этой плоскости $O'M = r$ и $\angle CO'M = \varphi$.

Итак, цилиндрические координаты точки M суть:

$$r = OM' = O'M, \qquad \varphi = \angle CO'M, \qquad z = OO'.$$

Непосредственно из рисунка видно, что связь между цилиндрическими и декартовыми координатами при расположении осей x, y, z, указанном на рисунке, будет следующая:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z. \tag{77}$$

Координатные поверхности в цилиндрической системе координат даются уравнениями

$$r = \alpha, \qquad \varphi = \beta, \qquad z = \gamma. \tag{78}$$

где α, β и γ — некоторые переменные параметры. Эти уравнения соответственно представляют:

$r = \alpha$ — круглый цилиндр радиуса α, ось которого совпадает с осью z,

$\varphi = \beta$ — плоскость, проходящую через ось z и точку M,

$z = \gamma$ — плоскость, проходящую через точку M перпендикулярно к оси z.

Координатные линии получатся пересечением координатных поверхностей, т. е. определятся следующими совокупностями уравнений из (78):

$$(а)\ \begin{cases} r=\alpha \\ \varphi=\beta \end{cases} \qquad (б)\ \begin{cases} \varphi=\beta \\ z=\gamma \end{cases} \qquad (в)\ \begin{cases} z=\gamma \\ r=\alpha. \end{cases} \tag{79}$$

Они представляют собой:

(а) — прямую *M'M*,

(б) — прямую *O'M*,

(в) — окружность *MBCM*.

Сферические и цилиндрические системы координат обладают тем свойством, что координатные линии у них пересекаются между собой под прямыми углами. Такие системы называются *ортогональными*. Прямоугольные декартовы координаты также принадлежат к ортогональным системам.

Чтобы получить выражение скорости в криволинейных координатах, проще всего воспользоваться формулой

$$v^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \tag{80}$$

и найти в криволинейных координатах выражение элемента дуги ds.

Пусть имеем прямоугольную декартову систему координат. Тогда

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \tag{81}$$

Найдем квадрат дифференциала дуги в произвольной системе криволинейных координат (q_1, q_2, q_3) Для этого вычислим дифференциалы x, y, z, рассматривая их как функции q_1, q_2, q_3. Получим:

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3,\\ dy&=\frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3,\\ dz&=\frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Подставляя эти значения dx, dy, dz в равенство (81), найдем ds^2 в виде квадратичной формы от дифференциалов координат q_1, q_2, q_3 (т. е. в виде однородного многочлена второй степени относительно этих дифференциалов):

$$ds^2 = a_{11}dq_1^2 + a_{22}dq_2^2 + a_{33}dq_3^2 + 2a_{23}dq_2dq_3 + 2a_{31}dq_3dq_1 + 2a_{12}dq_1dq_2 = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}dq_idq_k, \quad (83)$$

где обозначено:

$$a_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \quad (84)$$

$$a_{ik} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_k} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3), \quad (85)$$

Если система (q_1, q_2, q_3) ортогональная, то коэффициенты a_{ik} из равенств (85) обращаются в нули и выражение квадрата дифференциала дуги в этом случае будет:

$$ds^2 = a_{11}dq_1^2 + a_{22}dq_2^2 + a_{33}dq_3^2. \quad (86)$$

В самом деле, координатная линия q_1 определяется как пересечение поверхностей $q_2 = const$ и $q_3 = const$. Направляющие косинусы касательной к этой линии будут пропорциональны dx, dy, dz или, как видно из равенств (82), где в этом случае $dq_2 = dq_3 = 0$, эти косинусы пропорциональны

$$\frac{\partial x}{\partial q_1},\ \frac{\partial y}{\partial q_1},\ \frac{\partial z}{\partial q_1}.$$

Аналогично направляющие косинусы касательных к координатным линиям q_2 и q_3 будут пропорциональны соответственно

$$\frac{\partial x}{\partial q_2},\ \frac{\partial y}{\partial q_2},\ \frac{\partial z}{\partial q_2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x}{\partial q_3},\ \frac{\partial y}{\partial q_3},\ \frac{\partial z}{\partial q_3}.$$

Отсюда видно, что в случае, когда система (q_1, q_2, q_3) ортогональна, величины (85) действительно равны нулю.

Подставляя в (80) выражение элемента дуги (83), имеем:

$$v^2 = \frac{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}dq_idq_k}{dt^2} = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\frac{dq_i}{dt}\frac{dq_k}{dt} = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k,$$

откуда получаем следующее выражение модуля скорости в криволинейных координатах.

$$v = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k}\ , \tag{87}$$

Если система (q_1, q_2, q_3) ортогональная, то равенство (87) примет вид

$$v = \sqrt{a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + a_{33}\dot{q}_3^2}\ . \tag{88}$$

В частности, сферическая и цилиндрическая системы координат ортогональны и для них v определяется формулой (88).

Для сферических координат, считая $q_1 = r$, $q_2 = \lambda$, $q_3 = \varphi$, найдем из равенств (74), пользуясь формулами (84),

$$a_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \cos^2\varphi\left(\cos^2\lambda + \sin^2\lambda\right) + \sin^2\varphi = 1\,,$$

и аналогично

$$a_{22} == r^2\cos^2\varphi\,, \quad a_{33} == r^2\,.$$

Следовательно, в сферических координатах, согласно (88),

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\cos^2\varphi\dot{\lambda}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\ . \tag{89}$$

Для цилиндрических координат, полагая $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, получим аналогичным образом из равенств (77), что $a_{11} == 1$, $a_{22} == r^2$, $a_{33} == 1$. Следовательно, в *цилиндрических* координатах, согласно (88),

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + z^2}\ . \tag{90}$$

Формулы (89) и (90) легко получить и непосредственным расчетом, подобно тому как это делалось для плоской полярной системы координат (см. стр. 65). Элементарное перемещение ds складывается в сферических координатах геометрически из элементарных перемещений вдоль координатных линий OM, MB и MD (см. рис. 19); эти перемещения взаимно перпендикулярны и численно равны dr, $ME \cdot d\lambda = (r\cos\varphi)d\lambda$ и $rd\varphi$. Следовательно, $ds^2 = dr^2 + (r\cos\varphi)^2 d\lambda^2 + r^2 d\varphi^2$, откуда, деля обе части этого равенства на dt^2, получим формулу (89).

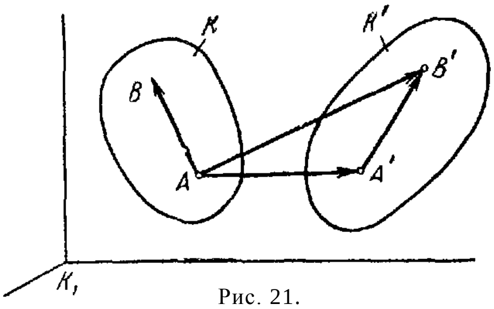


Рис. 21.

Точно так же в цилиндрических координатах ds складывается из взаимно перпендикулярных элементарных перемещений вдоль координатных линий *O'M, MB* и *M'M* (см. рис. 20), численно равных dr, $rd\varphi$ и dz следовательно, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, откуда, деля обе части этого равенства на dt^2, приходим к формуле (90).

Выражение ускорения в криволинейных координатах будет выведено в динамике точки иным методом.

Теорема о сложении скоростей. Если мы знаем движение точки относительно системы отсчета K и движение системы K относительно основной (неподвижной) системы отсчета K_1, то можно определить движение точки по отношению к системе K_1. Движение точки по отношению к подвижной системе K называют в этом случае *относительным*, а по отношению к неподвижной системе K_1 — *сложным* или, условно, *абсолютным*; движение самой системы K по отношению к системе K_1 называют *переносным движением*.

Пусть подвижная система занимает в момент времени t положение K, а движущаяся точка M находится в этот момент в положении A (рис. 21). За промежуток времени Δt точка M переместится по отношению к системе K в новое положение B, совершив относительное перемещение $\overline{AB}$. Величина

$$v_{отн} = v_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AB}}{\Delta t} \tag{91}$$

называется *относительной скоростью* точки M.

Одновременно система K за промежуток времени Δt переместится (по отношению к основной системе K_1) в другое положение K' и точка A системы K, где в момент t находилась точка M, придет в положение A'. Вектор $\overline{AA'}$ определяет переносное перемещение точки, а величина

$$v_{пер} = v_e = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta t} \tag{92}$$

называется *переносной скоростью* точки M. Следовательно, переносная скорость — это скорость той, принадлежащей подвижной системе отсчета точки A, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M.

В результате точка M придет через промежуток времени Δt в положение B' и совершит по отношению к основной системе отсчета K_1 абсолютное перемещение $\overline{AB'}$. Величина

$$v_{абс} = v_a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AB'}}{\Delta t} \tag{93}$$

называется *абсолютной скоростью* точки M или *скоростью сложного движения*.

Зависимость между всеми этими скоростями дается теоремой: *скорость сложного движения точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей*. Для доказательства заметим, что из векторного треугольника $AA'B'$ следует равенство $\overline{AB'} = \overline{AA'} + \overline{A'B'}$. Деля обе его части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

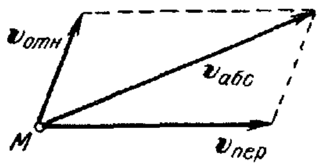


Рис. 22.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{AB'}}{\Delta t} = \lim \frac{\overline{AA'}}{\Delta t} + \lim \frac{\overline{A'B'}}{\Delta t}.$$

Отсюда, замечая, что при $\Delta t \to 0$ положение K' подвижной системы неограниченно приближается к K и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{A'B'}}{\Delta t} = \lim \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = v_{отн} = v_r ,$$

а также учитывая (92) и (93), находим:

$$v_{абс} = v_{отн} + v_{пер}. \tag{94}$$

Равенство (94) и выражает теорему о сложении скоростей или так называемый закон параллелограмма скоростей (рис. 22).

Последовательно применяя полученный результат к случаю, когда движущаяся точка перемещается по отношению к подвижной системе отсчета K_1, которая в свою очередь движется относительно другой подвижной системы K_2 и т. д. вплоть до некоторой системы движущейся относительно основной системы отсчета K_n, получим:

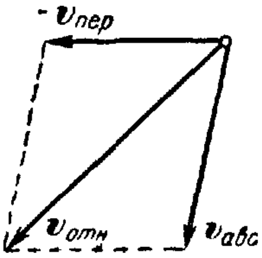


Рис. 23.

$$v_{абс} = \sum_{k=1}^{n} v_k \ , \tag{95}$$

где v_1 — относительная скорость точки по отношению к системе K_1, v_2 — первая переносная скорость, получаемая при движении системы K_1 относительно K_2, v_3 — вторая переносная скорость, получаемая при движении системы K_2 относительно K_3, и т. д. Кратко этот результат формулируют так: *скорость сложного движения равна геометрической сумме скоростей составных движений.*

Доказанная теорема позволяет также, зная абсолютную скорость точки по отношению к основной системе отсчета K_1 и движение подвижной системы отсчета K по отношению к K_1, определить относительную скорость точки в системе K по вытекающей из (94) формуле (рис. 23)

$$v_{отн} = v_{абс} - v_{пер} = v_{абс} + (-v_{пер})\,. \tag{96}$$

В качестве простейшего примера применения формулы (94) найдем выражение скорости точки в полярных координатах. Движение точки по отношению к основной системе отсчета Oxy (см. рис. 10) можно рассматривать как относительное вдоль радиуса OM со скоростью $v_{отн} = \dot{r} = v_r$. Переносным движением будет при этом вращение радиуса OM с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ и переносная скорость будет равна скорости той точки радиуса, где в данный момент находится точка M; следовательно, по формуле (11) $v_{пер} = r\dot{\varphi} = v_p$. В результате приходим к найденным ранее равенствам (20) и (21).

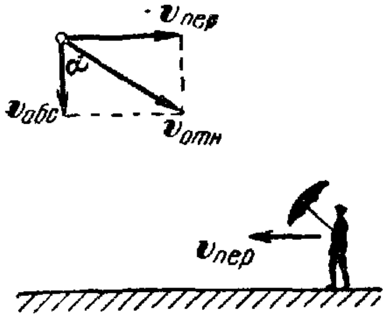


Рис. 24.

Примерами применения формулы (96) служат известные из элементарной физики задачи о наклонении зонта под дождем или астрономических труб для устранения влияния «аберрации». Так, например, скорость дождевой капли, падающей на землю вертикально со скоростью $v_{абс}$, будет относительно человека, идущего со скоростью $v_{пер}$ (рис. 24), выражаться вектором $v_{отн}$ наклоненным к вертикали под углом

$$\alpha = arctg\frac{v_{пер}}{v_{абс}}.$$

Плоскопараллельное движение

Геометрическое рассмотрение движения плоской фигуры в ее плоскости. Теорема I. *Всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть составлено из поступательного перемещения и поворота около произвольного центра (полюса).*

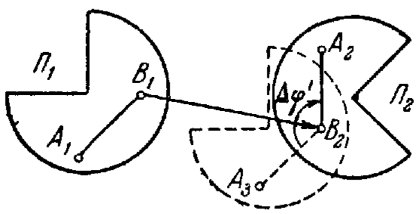


Рис. 25.

Пусть имеем два произвольных положения $П_1$ и $П_2$ плоской фигуры $П$, характеризуемые положениями A_1B_1 и A_2B_2 отрезка AB, неизменно связанного с этой фигурой. Поступательным движением фигуры $П$ переместим ее из положения $П_1$, в $П_3$ так, чтобы точка A_1 заняла положение A_2 (это перемещение определяется вектором $\overline{A_1A_2}$). Тогда отрезок AB займет положение $A_2B_3||A_1B_1$. При повороте фигуры около центра A_2 на угол $B_3A_2B_2$ отрезок A_2B_3 займет положение A_2B_2, а фигура $П$ — требуемое положение $П_2$.

В ходе доказательства в качестве полюса, выбор которого произволен, была взята точка A. При этом поступательное перемещение фигуры определялось вектором $\overline{A_1A_2}$, а вращательное — углом поворота $\Delta\varphi = \angle B_3A_2B_2$. Если в качестве полюса взять другую точку, например B (рис. 25), то из положения $П_1$ в $П_2$ фигура будет переведена поступательным перемещением, определяемым вектором $\overline{B_1B_2}$ и поворотом вокруг полюса B_2 на угол $\Delta\varphi' = \angle A_3B_2A_2$. Легко видеть, что $\overline{B_1B_2} \neq \overline{A_1A_2}$, т. е. что поступательная часть перемещения с изменением полюса меняется; угол же $\Delta\varphi' = \Delta\varphi'$, так как эти углы образованы параллельными отрезками. Следовательно, *вращательная часть движения фигуры от выбора полюса не зависит*, т. е. при любом полюсе, чтобы привести фигуру из положения $П_1$ в положение $П_2$, ее надо повернуть вокруг полюса на один и тот же угол $\Delta\varphi$, равный углу между направлениями отрезков A_1B_1 и A_2B_2.

Поскольку поступательная часть перемещения фигуры с изменением полюса меняется, оказывается возможным выбрать полюс так, чтобы эта часть перемещения вообще отсутствовала.

Теорема II. *Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть выполнено одним поворотом ее около определенного центра, называемого центром, или полюсом конечного вращения.*

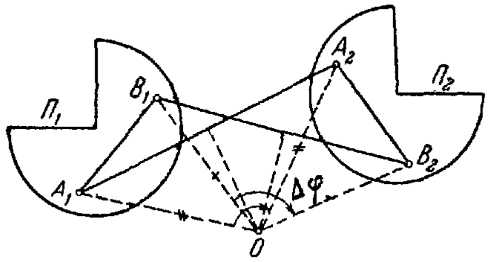


Рис. 26.

Пусть имеем два произвольных положения $П_1$ и $П_2$ плоской фигуры $П$, характеризуемых положениями A_1B_1 и A_2B_2 отрезка AB, неизменно связанного с этой фигурой (рис. 26), причем, согласно условиям теоремы, A_1B_1 не параллельна A_2B_2. Если центр конечного вращения существует, то он должен находиться в такой точке O, которая была бы равно удалена от A_1 и A_2, а также от B_1 и B_2, так как должно быть $OA_1 = OA_2$ и $OB_1 = OB_2$. Следовательно, центр вращения должен находиться в точке O пересечения перпендикуляров, восставленных из середин отрезков A_1A_2 и B_1B_2. Докажем, что точка O действительно есть центр вращения.

В самом деле, так как $A_1O = A_2O$, $B_1O = B_2O$ и $\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2$, то при повороте фигуры на $\angle A_1OA_2 = \Delta\varphi$ отрезок A_1B_1 совпадает с A_2B_2 и фигура из положения $П_1$ перейдет в положение $П_2$.

Равенство углов A_1OA_2 и B_1OB_2 легко доказать следующим образом. Из равенства соответственных сторон ($A_1B_1 = A_2B_2$, $OA_1 = OA_2$ и $OB_1 = OB_2$) следует равенство треугольников A_1B_1O и A_2B_2O, откуда $\angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2$, прибавив к обеим частям последнего равенства по углу B_1OA_2, получим:

$$\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2 = \Delta\varphi .$$

При этом легко видеть, что угол $\Delta\varphi$ равен углу между направлениями отрезков A_1B_1 и A_2B_2, т. е. остается таким же, как при повороте вокруг любого полюса по теореме I.

Доказанные теоремы касаются лишь вопроса о том, как можно *переместить* плоскую фигуру из какого-то одного фиксированного положения в другое. Однако, основываясь на них, можно представить и геометрическую картину *движения* плоской фигуры.

Всякое движение, в том числе и движение плоской фигуры в ее плоскости, непрерывно и может рассматриваться как непрерывная последовательность элементарных перемещений, которые по доказанным теоремам можно представить двумя способами.

1) Согласно теореме I элементарное перемещение можно получить путем бесконечно малого поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота на бесконечно малый угол вокруг этого полюса. Отсюда вытекает, что всякое *движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольно выбранного полюса, и вращательного движения вокруг этого полюса*.

2) Согласно теореме II любое элементарное перемещение фигуры можно осуществить одним только поворотом на бесконечно малый угол вокруг некоторого *определенного* центра, называемого *мгновенным центром вращения*. Отсюда вытекает, что *всякое непоступательное движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как непрерывную последовательность бесконечно малых поворотов вокруг мгновенных центров вращения.* При этом положение мгновенного центра вращения непрерывно изменяется как в неподвижной плоскости, так и в плоскости, связанной с движущейся фигурой.

Из доказанных теорем следует также, что поворот вокруг любого полюса или вокруг мгновенного центра происходит с одной и той же для данного момента времени угловой скоростью $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Величина ω, не зависящая от выбора полюса, называется *угловой скоростью* фигуры в данный момент времени или *мгновенной угловой скоростью*.

Скорости точек плоской фигуры. Пусть плоская фигура движется по отношению к основной системе отсчета $\Omega\xi\eta$, в которой положения полюса A и произвольной точки M определяются соответственно радиусами-векторами ρ_A и ρ_M. Тогда в любой момент времени между Векторами ρ_A, ρ_M и $r = \overline{AM}$ имеет место соотношение $\rho_M = \rho_A + r$. Дифференцируя обе части этого равенства по времени, будем иметь:

$$\frac{d\rho_M}{dt} = \frac{d\rho_A}{dt} + \frac{dr}{dt}.$$

Но так как AM=const, то вектор r изменяется при движении фигуры только по направлению. Следовательно, для него справедлива формула $\frac{dr}{dt} = \omega \times r$. Кроме того, $\frac{d\rho_A}{dt} = v_A$, и мы получаем:

$$v_M = v_A + \omega \times r \text{ или } v_M = v_A + v_{MA}. \qquad (4)$$

Таким образом, в соответствии с теоремой о сложении скоростей, скорость любой точки M плоской фигуры складывается из: 1) скорости v_A произвольно выбранного полюса A, общей для всех точек фигуры; это скорость поступательной части движения фигуры; и 2) скорости $v_{MA} = \omega \times r$ происходящей вследствие вращения фигуры вокруг полюса A (рис. 27). Вектор v_{MA} направлен перпендикулярно к MA в сторону вращения фигуры, а по модулю $v_{MA} = \omega \cdot AM$.

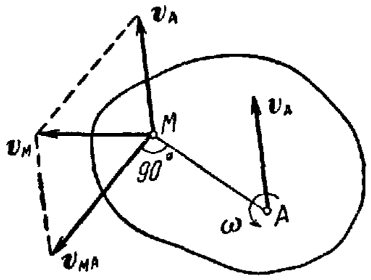


Рис. 27.

Полученный результат позволяет найти скорость любой точки фигуры, если известны скорость какой-нибудь одной ее точки A и угловая скорость фигуры ю. Другие способы определения скоростей точек плоской фигуры вытекают из рассматриваемых ниже теорем.

Теорема I. *Если известны скорость какой-либо точки фигуры и направление скорости другой ее точки, то можно определить скорость любой точки плоскости этой фигуры с помощью мгновенного центра вращения.*

Пусть даны скорость точки A и направление скорости точки B. По данным направлениям скоростей в точках A и B (рис. 28) строим мгновенный центр вращения P. Тогда из равенства

$$v_A = \omega \cdot PA$$

находим мгновенную угловую скорость ω вращения фигуры

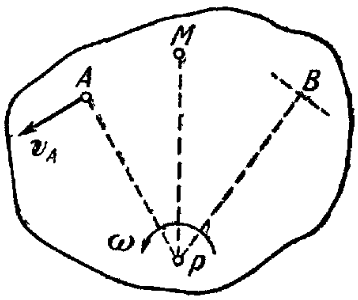


Рис. 28.

$$\omega = \frac{v_A}{PA}. \tag{5}$$

Отсюда скорость v_M произвольной точки M фигуры в этот момент будет:

$$v_M = \omega \cdot PM = v_A \frac{PM}{PA}, \tag{6}$$

а направление v_M перпендикулярно к $\overline{PM}$.

Равенство (6) показывает, что в каждый данный момент времени скорости всех точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра вращения.

Если направления заданных скоростей v_A и v_B будут между собой параллельны, то доказанная теорема теряет силу. При этом может иметь место один из следующих случаев.

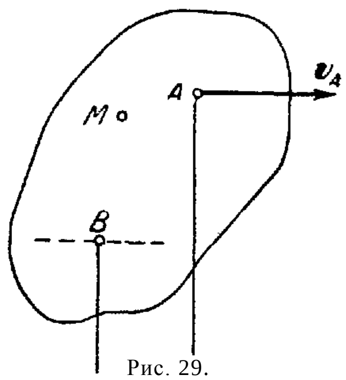
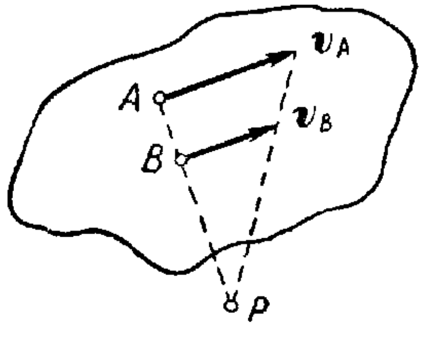


Рис. 29.

а) $v_A || v_B$, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к v_A (рис. 29). В этом случае, как видно из рисунка, мгновенный центр P лежит в бесконечности и равенство (5) дает $\omega = 0$.

Тогда из формулы (4) следует, что скорость любой точки фигуры $v_M = v_A$, т. е. имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей.

б) $v_A || v_B$, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к AB (рис. 30). В этом случае перпендикуляры AP и BP к векторам v_A и v_B сливаются и для определения положения точки P надо дополнительно знать модули обеих скоростей. Тогда, согласно формуле (6), будет:



$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB},$$

и точка P найдется как пересечение прямой, соединяющей концы векторов, изображающих скорости v_A и v_B, с прямой AB.

Рис. 30.

Следовательно, в этом случае для нахождения скорости любой точки фигуры надо знать модули и направления скоростей обеих точек A и B.

Если, в частности, будет $v_A = v_B$, то опять имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей и для любой точки фигуры $v = v_A$.

В заключение отметим, что если плоское движение фигуры осуществляется путем качения ее без скольжения по некоторой неподвижной линии, то контур фигуры и эта линия будут соответственно подвижной и неподвижной центроидами и, следовательно, точка их касания будет мгновенным центром вращения. Для определения скорости любой точки фигуры надо в этом случае знать только скорость какой-нибудь одной из ее точек.

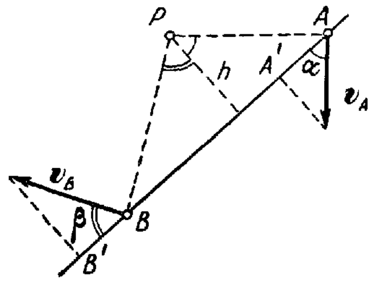


Рис. 31.

Во всех случаях, когда мгновенный центр P найден, угловая скорость фигуры или скорость любой ее точки вычисляются по формулам (5) и (6).

Теорема II. *Проекция скоростей концов неизменяемого отрезка на его направление равны между собой.* Пусть v_A и v_B суть скорости концов отрезка AB (рис. 31). Восставив из точек A и B перпендикуляры к соответствующим скоростям, найдем мгновенный центр вращения P. Если мгновенная угловая скорость отрезка AB равна ω, то скорости точек A и B будут:

$$v_A = \omega \cdot PA, \qquad v_B = \omega \cdot PB,$$

а их проекции на отрезок AB

$$AA' = (v_A)_{AB} = v_A \cos\alpha = \omega \cdot PA \cdot \cos\alpha = \omega \cdot h,$$

$$BB' = (v_B)_{AB} = v_B \cos\beta = \omega \cdot PB \cdot \cos\beta = \omega \cdot h,$$

где h есть длина перпендикуляра, опущенного из P на направление отрезка AB. Следовательно,

$$(v_A)_{AB} = (v_B)_{AB}. \tag{7}$$

что и требовалось доказать.

Ускорения точек плоской фигуры. Скорость любой точки М плоской фигуры, согласно формуле (4), будет:

$$v_M = v_A + (\omega \times r), \tag{9}$$

где $r = \overline{AM}$ — радиус-вектор, проведенный из полюса A в точку M. Дифференцируя обе части этого равенства по времени, получим:

$$\frac{dv_M}{dt} = \frac{dv_A}{dt} + \left(\frac{d\omega}{dt} \times r\right) + \left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right), \tag{10}$$

Величина $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ есть вектор углового ускорения фигуры, направленный (как и ω) перпендикулярно к плоскости фигуры. Кроме того, согласно формуле $\frac{dr}{dt} = \omega \times r$. Тогда, учитывая, что $\omega \perp r$ и $\omega \cdot r = 0$, будем иметь:

$$\omega \times \frac{dr}{dt} = \omega \times (\omega \times r) = \omega \cdot (\omega \cdot r) - r(\omega \cdot \omega) = -\omega^2 r.$$

В результате равенство (10) даст:

$$\omega_M = \omega_A + (\varepsilon \times r) - \omega^2 r. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$\varepsilon \times r = \omega_{MA}^{\text{вр}}, \quad -\omega^2 r = \omega_{MA}^{\text{цс}}. \tag{12}$$

Векторы $\omega_{MA}^{\text{вр}}$ и $\omega_{MA}^{\text{цс}}$ представляют соответственно те вращательное (касательное) и центростремительное (нормальное) ускорения, которые имела бы точка M, если фигура совершала бы только вращение вокруг полюса A. Окончательно находим:

$$\omega_M = \omega_A + \omega_{MA}^{\text{вр}} + \omega_{MA}^{\text{цс}} \tag{13}$$

или

$$\omega_M = \omega_A + \omega_{MA}, \tag{14}$$

где $\omega_{MA} = \omega_{MA}^{\text{вр}} + \omega_{MA}^{\text{цс}}$ Таким образом, ускорение любой точки плоской фигуры складывается геометрически из ускорения полюса и ускорения, которое точка получает при вращении фигуры вокруг полюса. Так как $\varepsilon \perp r$ и $r = AM$, то численно

$$\omega_{MA}^{\text{вр}} = AM \cdot \varepsilon, \quad \omega_{MA}^{\text{цс}} = AM \cdot \omega^2, \quad \omega_{MA} = AM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (15)$$

Угол μ, который вектор ω_{MA} образует с радиусом MA, определяется из равенства

$$tg\mu = \frac{\omega_{MA}^{\text{вр}}}{\omega_{MA}^{\text{цс}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (16)$$

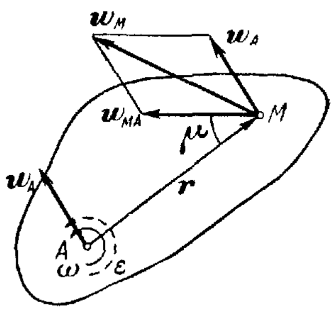


Рис. 32.

Полученные результаты позволяют построить вектор w_M так, как это показано на рис. 32.

Движение твердого тела около неподвижной точки

Теорема Эйлера — Даламбера. Рассмотрим теперь движение абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Докажем, что в этом случае имеет место теорема Эйлера—Даламбера: *Всякое перемещение твердого тела около неподвижной точки можно получить одним только поворотом тела вокруг определенной оси, проходящей через эту точку и называемой осью конечного вращения.* Доказывается эта теорема аналогично теореме II на стр. 102. Как известно, положение твердого тела в пространстве определяется положением любых трех его точек, не лежащих на одной прямой. Если точка O тела неподвижна, то его положение определится положением любых двух других точек, не лежащих на одной прямой с точкой O. Опишем из неподвижной точки O тела, как из центра, сферу произвольного радиуса и на этой сфере возьмем две точки A и B (рис. 33); тогда положение тела можно определить положением дуги AB большого круга рассматриваемой сферы.

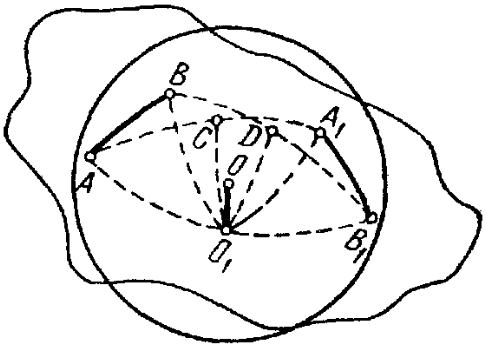


Рис. 33.

Пусть тело переместилось так, что дуга AB заняла положение A_1B_1 ; тогда, соединив точки A и A_1, B и B_1 дугами большого круга и восставив из середины этих дуг C и D сферические перпендикуляры (т. е. проведя через точки C и D дуги больших кругов, пересекающих ортогонально дуги AA_1 и BB_1), получим в пересечении их на сфере точку O_1, которая будет равноудалена от точек A и A_1, B и B_1. При этом сферические треугольники ABO_1 и $A_1B_1O_1$ будут равны. Повернув тело вокруг оси OO_1 на $\angle AO_1A_1 = \angle BO_1B_1$, мы совместим дугу AB с дугой A_1B_1. Следовательно, перемещение тела из положения, определяемого дугой AB, в положение, определяемое дугой A_1B_1, действительно получается одним только поворотом вокруг оси OO_1.

Скорости точек тела, движущегося около неподвижной точки. По аналогии с плоскопараллельным движением заключаем, что распределение скоростей всех точек твердого тела будет в данный момент времени таким же, как если бы мгновенная ось вращения была неподвижной. Следовательно, скорость любой точки тела в данный момент времени определяется векторной формулой Эйлера:

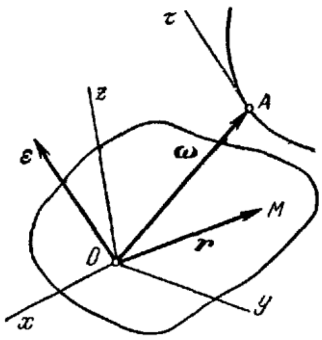


Рис. 34.

$$v = \omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}, \tag{2}$$

где $r = \overline{OM}$ — радиус-вектор, проведенный из центра *О в* точку *М* тела; $p = \omega_x$, $q = \omega_y$, $r = \omega_z$ — проекции вектора ω на какую-нибудь систему прямоугольных осей *Oxyz*, проведенных из точки *О* (см. рис. 34); *x, y, z* — координаты точки *М* в этой системе осей. Из векторного равенства (2) получаем:

$$v_x = qz - ry, \qquad v_y = rx - pz, \qquad v_z = py - qx. \tag{3}$$

Это — так называемые формулы Эйлера, определяющие проекции скорости любой точки *M (x, y, z)* тела, имеющего неподвижную точку *О*. Вид этих формул не зависит от того, считаем мы оси *Oxyz* неподвижными или же связанными с телом и вращающимися вместе с ним, т. е. эти формулы ковариантны по отношению к переходу от неподвижной к подвижной системе осей.

Ускорение точек тела, движущегося около неподвижной точки. Теорема Ривальса. Найдем ускорение точки М твердого тела, движущегося около неподвижной точки *О*. Дифференцируя по времени обе части равенства (2), получим:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt}, \tag{4}$$

Но здесь $\frac{dr}{dt} = v = \omega \times r$, а $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$. Поэтому

$$w = \varepsilon \times r + \omega \times v = \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r), \tag{5}$$

Раскрывая второй член правой части, как тройное векторное произведение, получим $\omega\times(\omega\times r)=\omega\cdot(\omega\cdot r)-r\omega^2$ и, следовательно,

$$w=\varepsilon\times r+\omega\cdot(\omega\cdot r)-r\omega^2. \tag{6}$$

Здесь вообще ω не перпендикулярно к r, как это было в случае плоскопараллельного движения, и $\omega\cdot r\neq 0$.

В проекциях на оси координат $Oxyz$ (подвижные или неподвижные) равенство (6) дает:

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \varepsilon_y z-\varepsilon_z y+p(px+qy+rz)-\omega^2 x\\ w_y &= \varepsilon_z x-\varepsilon_z z+p(px+qy+rz)-\omega^2 y\\ w_z &= \varepsilon_x y-\varepsilon_y x+p(px+qy+rz)-\omega^2 z\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Если оси $Oxyz$ неподвижные, то $\varepsilon_x=\dot p$, $\varepsilon_y=\dot q$, $\varepsilon_z=\dot r$.

Выражению (6) можно придать иной вид. Заменяя ω через ω^0 и вынося ω^2 за скобки, имеем:

$$\omega\times(\omega\times r)=\omega^2\{\omega^0(\omega^0\cdot r)-r\}.$$

Но $\omega^0\cdot r=r_\omega$ есть проекция вектора r на направление ω (рис. 35), поэтому

$$\omega\times(\omega\times r)=\omega^2(r_\omega\omega^0-r)=\omega^2 h.$$

где h — вектор, равный разности векторов $r_\omega\omega^0$ и r.

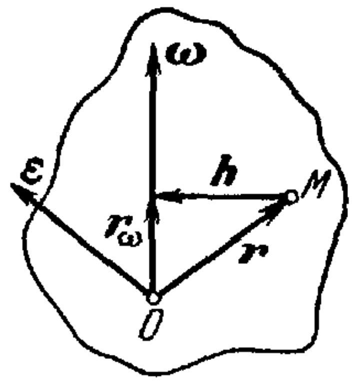


Рис. 35.

Окончательное выражение ускорения, принадлежащее Ривальсу. будет:

$$w=\varepsilon\times r+\omega^2 h. \tag{8}$$

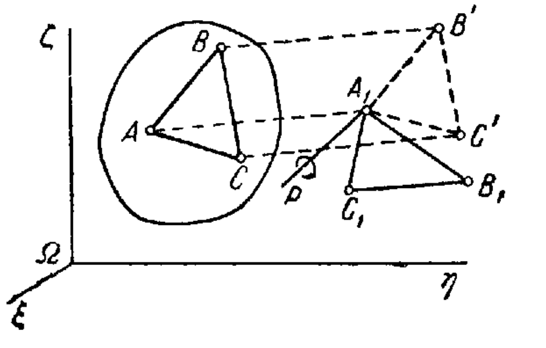
Вектор $\omega^2 h$**,** направленный к мгновенной оси вращения, называется *осестремительным* компонентом ускорения (по аналогии с выражением $R\omega^2$ — центростремительного компонента при круговом движении точки). Что касается вектора $\varepsilon\times r$, то он направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы r и $\boldsymbol{\varepsilon}$**,** т. е. так, как было бы направлено касательное ускорение точки *M,* если тело вращалось бы вокруг оси, совпадающей с $\boldsymbol{\varepsilon}$**.** Вектор $\varepsilon\times r$ называют еще вращательным компонентом ускорения.

Движение свободного твердого тела

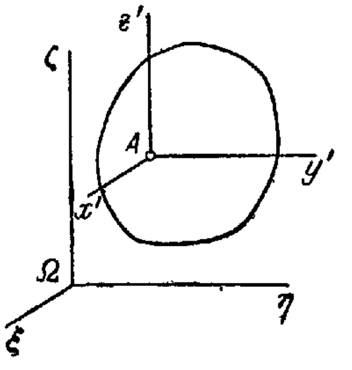
Теорема Шаля для движения свободного твердого тела. В предыдущем параграфе рассматривалось сложное движение тела, слагавшееся из движения по отношению к одной системе отсчета, которая в свою очередь перемещалась по отношению к другой и т. д., при этом каждое из составных движений было мгновенным, вращательным или поступательным движением. Результирующее движение в самом общем случае оказалось мгновенным винтовым.

Сейчас мы рассмотрим самый общий случай движения твердого тела по отношению к *одной* фиксированной (основной) системе отсчета. Таким движением является движение свободного твердого тела. Это движение, оказывается, тоже будет слагаться из серии мгновенных винтовых движений. К такому выводу приводит теорема Шаля, которая по отношению к свободному телу играет ту же роль, что и теорема Эйлера — Даламбера по отношению к твердому телу, имеющему неподвижную точку, и которая нами уже была рассмотрена для случая плоскопараллельного движения.

Теорема Шаля состоит в следующем: всякое перемещение свободного твердого тела из одного положения в другое может быть получено посредством поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс.



а)



б)

Рис. 36.

Пусть мы имеем твердое тело, положение которого по отношению к системе отсчета определяется тремя точками A, B, C (рис. 36, а), и пусть это тело переместилось так, что точки A, B, C заняли положения A_1, B_1, C_1 Нам нужно показать, что тело может быть переведено из первого положения во второе посредством поступательного перемещения и поворота. Для этого переместим сначала тело поступательно так, чтобы точка А (полюс) совпала с точкой A_1, тогда треугольник ABC займет положение A_1B'C', причем $A_1B'\#AB$, $B'C'\#BC$, $C'A_1\#CA$. Остается совместить точки B' с B_1 и C' с C_1. Но это мы можем сделать, согласно теореме Эйлера—Даламбера, посредством поворота тела вокруг некоторой оси A_1P, проходящей через точку A_1. Итак, любое перемещение свободного твердого тела может быть действительно осуществлено путем поступательного перемещения и вращения.

При этом, как видно из рисунка, поступательная часть перемещения зависит от выбора полюса (при полюсе A это перемещение определяется вектором $\overline{AA_1}$, а при полюсе B — вектором $\overline{BB_1} \neq \overline{AA_1}$ и т. д.); вращательная же часть перемещения, как и в случае плоскопараллельного движения, от выбора полюса не зависит.

Проведем через полюс A координатные оси $Axyz$, которые будут перемещаться вместе с полюсом поступательно (рис. 36, б). Тогда теорема Шаля, по существу, утверждает, что любое перемещение свободного тела по отношению к осям слагается из вращательного перемещения вокруг точки A по отношению к осям $Ax'y'z'$ и поступательного перемещения вместе с осями $Ax'y'z'$ по отношению к осям $\Omega\xi\eta\zeta$. В случае мгновенных перемещений такие два движения, слагаясь, дают мгновенное винтовое движение. Можно доказать, что аналогичный результат имеет место и для конечных перемещений. Поэтому теорема Шаля допускает еще следующую формулировку: *всякое перемещение свободного твердого тела может быть осуществлено одним винтовым движением около некоторой винтовой оси, называемой осью конечного винтового перемещения.*

Полученные результаты позволяют представить картину движения свободного твердого тела как непрерывную последовательность элементарных перемещений одним из следующих двух способов. Из первой формулировки теоремы Шаля вытекает, что движение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, определяемого движением произвольно выбранного полюса, и из вращательного движения вокруг этого полюса, как вокруг неподвижной точки. В свою очередь движение вокруг неподвижной точки представляет собой непрерывную последовательность бесконечно малых поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту точку.

По второй из этих формулировок всякое элементарное перемещение тела представляет собой мгновенное винтовое движение вокруг соответствующей мгновенной винтовой оси. Поэтому движение свободного твердого тела можно еще представить как непрерывную последовательность мгновенных винтовых движений. Геометрические места мгновенных винтовых осей в пространстве, связанном с неподвижной системой отсчета, и в самом движущемся теле образуют две линейчатые поверхности, называемые соответственно *неподвижным* и *подвижным винтовыми аксоидами*; так как две соседние (бесконечно близкие) мгновенные винтовые оси не могут пересекаться, то эти поверхности будут неразвертывающимися. При движении тела подвижный винтовой аксоид катится по неподвижному, имея с ним в каждый данный момент времени общую образующую, являющуюся для этого момента мгновенной винтовой осью, и одновременно проскальзывает вдоль этой образующей. Такое качение с продольным скольжением и дает последовательность мгновенных винтовых движений. Отсюда следует, что геометрическую картину движения свободного тела в общем случае можно получить, если жестко связать это тело с подвижным винтовым аксоидом и катить этот аксоид со скольжением вдоль образующих

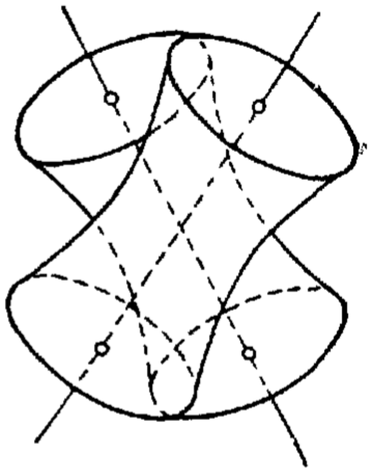


Рис. 37.

по соответствующему неподвижному аксоиду.

Примером такого качения со скольжением может служить движение однополостного гиперболоида по другому такому же неподвижному гиперболоиду при условии, что эти гиперболоиды во все время движения касаются друг друга по образующей, которая и будет мгновенной винтовой осью (рис. 37).

В соответствующих частных случаях аксоиды могут быть коническими поверхностями (при движении тела около неподвижной точки) или цилиндрическими (при плоскопараллельном движении). В этих случаях качение аксоидов происходит без скольжения.

Скорости точек свободного твердого тела. Рассмотрим свободное твердое тело, которое движется относительно основной (неподвижной) системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$. Возьмем подвижную систему координат *Axyz* с началом в произвольной точке *A,* неизменно связанную с твердым телом. Обозначим радиус-вектор точки *A* через $\boldsymbol{\rho_A}$ (ξ_A, η_A, ζ_A), радиус-вектор любой точки *M* тела относительно неподвижной системы через $\boldsymbol{\rho}$ (ξ, η, ζ), а относительно подвижной—через $r(x, y, z)$ (рис. 38).

Согласно теореме Шаля, движение тела мы можем рассматривать составленным из поступательного движения вместе с полюсом *A* и движения тела около точки *A* как неподвижной. Поэтому скорости какой-либо точки *M* тела будет равна сумме двух скоростей: 1) скорости от поступательного движения,

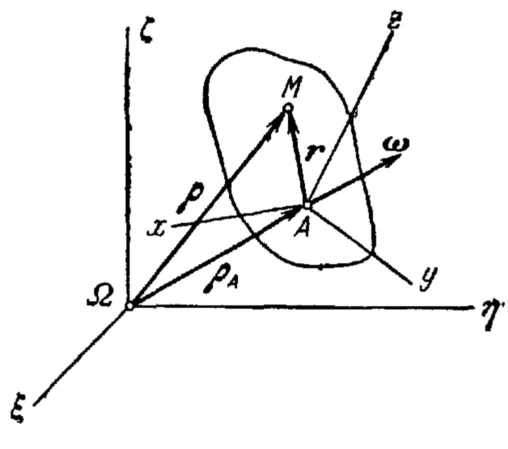


Рис. 38.

равной скорости $v_A = \dfrac{d\rho_A}{dt}$ точки *A,* и 2) скорости от движения около точки *A* как неподвижной» которая, согласно формуле $v = \omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$, равна $\omega \times r$, где ω - мгновенная угловая скорость тела. Следовательно,

$$v = v_A + \omega \times r = \frac{d\rho_A}{dt} + \omega \times r \,. \tag{1}$$

Если принять во внимание, что $r = \rho - \rho_A$, то формулу (1) можно еще представить в виде

$$v = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_A}{dt} + \omega \times \left(\rho - \rho_A\right). \tag{2}$$

Обозначим проекции мгновенной угловой скорости ω на подвижные и неподвижные оси соответственно через $p,\ q,\ r$ и $p_1,\ q_1,\ r_1$. Тогда, проектируя обе части равенства (2) на оси системы $\Omega\xi\eta\zeta,$ получим проекции скорости точки M на неподвижные оси:

$$\left.\begin{aligned} v_\xi &= \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi_A}{dt} + q_1\left(\xi - \xi_A\right) - r_1\left(\eta - \eta_A\right) \\ v_\eta &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta_A}{dt} + r_1\left(\eta - \eta_A\right) - p_1\left(\zeta - \zeta_A\right) \\ v_\zeta &= \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta_A}{dt} + p_1\left(\zeta - \zeta_A\right) - q_1\left(\xi - \xi_A\right) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Проектируя же на оси системы $Oxyz$ обе части равенства (1), найдем проекции скорости точки M на подвижные оси:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{Ax} + qz - ry \\ v_y &= v_{Ay} + rx - pz \\ v_z &= v_{Az} + py - qx \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Входящие сюда величины v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az} (проекции вектора v_A на оси $x,\ y,\ z$) могут быть вычислены по формулам:

$$\left.\begin{aligned} v_{Ax} &= \frac{d\xi_A}{dt}(11) + \frac{d\eta_A}{dt}(12) + \frac{d\zeta_A}{dt}(13), \\ v_{Ay} &= \frac{d\xi_A}{dt}(21) + \frac{d\eta_A}{dt}(22) + \frac{d\zeta_A}{dt}(23), \\ v_{Az} &= \frac{d\xi_A}{dt}(31) + \frac{d\eta_A}{dt}(32) + \frac{d\zeta_A}{dt}(33), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где (ik) $(i,\ k\ =\ 1,\ 2,\ 3)$ суть косинусы углов между осями подвижного и неподвижного трехгранников.

Ускорения точек свободного твердого тела. Скорость любой точки M свободного твердого тела определяется формулой (1)

$$v = \frac{dp_A}{dt} + \omega \times r \,.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t и учитывая, что $\frac{dr}{dt}=\omega\times r$, получим:

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2\rho_A}{dt^2}+\frac{d\omega}{dt}\times r+\omega\times(\omega\times r) \tag{6}$$

или

$$w=w_A+\frac{d\omega}{dt}\times r+\omega\cdot(\omega\cdot r)-\omega^2 r \tag{7}$$

Проектируя обе части равенства (7) на оси подвижного трехгранника $Axyz$, получим проекции ускорения на подвижные оси:

$$\left.\begin{aligned}
w_x&=w_{Ax}+\frac{dq}{dt}x-\frac{dr}{dt}y+(px+qy+rz)p-\omega^2 x,\\
w_y&=w_{Ay}+\frac{dr}{dt}y-\frac{dp}{dt}z+(px+qy+rz)q-\omega^2 y,\\
w_z&=w_{Az}+\frac{dp}{dt}z-\frac{dq}{dt}x+(px+qy+rz)r-\omega^2 z,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где w_{Ax}, w_{Ay}, w_{Az} — проекции вектора w_A на оси x, y, z. Положив в формуле (7) $r=\rho-\rho_A$, получим выражение ускорения точки M в виде

$$w=\frac{d^2\rho}{dt^2}=\frac{d^2\rho_A}{dt^2}+\frac{dw}{dt}\times(\rho-\rho_A)+\omega[\omega\cdot(\rho-\rho_A)]-\omega^2\cdot(\rho-\rho_A). \tag{9}$$

Проектируя обе части этого равенства на оси неподвижного трехгранника $\Omega\xi\eta\zeta$, найдем проекции ускорения на неподвижные оси:

$$\left.\begin{aligned}
w_\xi&=\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{d^2\xi_A}{dt^2}+\frac{dq_1}{dt}(\zeta-\zeta_A)-\frac{dr_1}{dt}(\eta-\eta_A)+[p_1(\xi-\xi_A)+q_1(\eta-\eta_A)+r_1(\zeta-\zeta_A)]p_1-\omega^2(\xi-\xi_A)\\
w_\eta&=\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d^2\eta_A}{dt^2}+\frac{dr_1}{dt}(\xi-\xi_A)-\frac{dp_1}{dt}(\zeta-\zeta_A)+[p_1(\xi-\xi_A)+q_1(\eta-\eta_A)+r_1(\zeta-\zeta_A)]q_1-\omega^2(\eta-\eta_A)\\
w_\zeta&=\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{d^2\zeta_A}{dt^2}+\frac{dp_1}{dt}(\eta-\eta_A)-\frac{dq_1}{dt}(\xi-\xi_A)+[p_1(\xi-\xi_A)+q_1(\eta-\eta_A)+r_1(\zeta-\zeta_A)]r_1-\omega^2(\zeta-\zeta_A)
\end{aligned}\right\}$$

Сложное движение точки

Полная и относительная производные от вектора. Пусть подвижная *Oxyz* и неподвижная $O\xi\eta\zeta$ системы отсчета имеют общее начало *O,* и пусть ω — мгновенная угловая скорость подвижной системы *Oxyz* по отношению к неподвижной (рис. 39). Рассмотрим точку *M,* совершающую движение, которое не зависит от движения триэдра *Oxyz*. Ее радиус-вектор $r = \overline{OM}$ будет, очевидно, с течением времени изменяться в каждой из систем отсчета по разным законам. Тогда за некоторый промежуток времени Δt

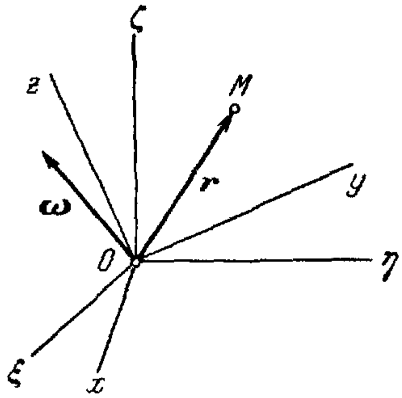


Рис. 39.

вектор *r* получит по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$ и *Oxyz* разные приращения, которые мы соответственно обозначим через Δr и $\tilde{\Delta} r$.

Пределы отношений Δr и $\tilde{\Delta} r$ *к* Δt при $\Delta t \to 0$ дадут соответственно производные

$$\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{d} r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\tilde{\Delta} r}{\Delta t}. \tag{2}$$

Производную $\frac{dr}{dt}$ будем называть «абсолютной» или «полной», а производную $\frac{\tilde{d} r}{dt}$ «относительной» или «локальной». Найдем зависимость между этими производными. С этой целью обратимся к их кинематическому смыслу. Из определений относительной v_r и абсолютной v_a скоростей следует, что

$$\frac{\tilde{d} r}{dt} = v_r, \ \frac{dr}{dt} = v_a. \tag{3}$$

Но, согласно (1), $v_a = v_r + v_e$, где переносная скорость v_e есть скорость той неизменно связанной с триэдром *Oxyz* точки пространства, в которой в данный момент находится точка *M*. Тогда по формуле Эйлера $v_e = \omega + r$ и равенство (1) дает:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\tilde{d}r}{dt} + \omega \times r\,. \tag{4}$$

Так как всякий вектор $a = a(t)$, заданный как непрерывная и дифференцируемая функция времени, можно рассматривать как радиус-вектор некоторой точки (конца этого вектора), то полная и локальная производные любого вектора $a(t)$ будут связаны тем же соотношением

$$\frac{da}{dt} = \frac{\tilde{d}a}{dt} + \omega \times a\,. \tag{5}$$

Если воспользоваться проекциями, то локальная производная любого вектора a относительно системы $Oxyz$ может быть определена как вектор, проекции которого на оси этой системы равны производным от проекции вектора a на те же оси.

Дадим другое доказательство справедливости формулы (5). Пусть, как всегда, $i,\ j,\ k$ суть единичные координатные векторы подвижного триэдра $Oxyz$; тогда

$$a = a_x i + a_y j + a_z k\,.$$

Дифференцируя по времени, получим:

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k\right) + \left(a_x \frac{di}{dt} + a_y \frac{dj}{dt} + a_z \frac{dk}{dt}\right). \tag{6}$$

Первые три члена справа дают локальную производную $da_r\ da_v\ da,\ da$

$$\frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k = \frac{\tilde{d}a}{dt}\,. \tag{7}$$

так как они представляют собой производную вектора a при условии, что $i,\ j,\ k$ постоянны. Производные единичных векторов суть скорости их концов, т.е. скорости точек неизменяемой системы, которой является триэдр $Oxyz$. Следовательно, по формуле Эйлера

$$\frac{di}{dt} = \omega \times i\,, \qquad \frac{dj}{dt} = \omega \times j\,, \qquad \frac{dk}{dt} = \omega \times k\,. \tag{8}$$

Равенства (8) называют еще формулами Пуассона. Тогда из выражения (6) находим:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\tilde{d}a}{dt} + a_x \omega \times i + a_y \omega \times j + a_z \omega \times k = \frac{\tilde{d}a}{dt} + \omega \times \left(a_x i + a_y j + a_z k \right), \qquad (8)$$

или

$$\frac{da}{dt} = \frac{\tilde{d}a}{dt} + \omega \times a . \qquad (5)$$

Заметим, что формула (5) сохраняет свой вид и в том случае, когда трехгранник *Oxyz*, кроме вращения вокруг точки *O*, совершает еще и поступательное движение, т. е. перемещается как свободное твердое тело. В самом деле, от поступательного перемещения триэдра *Oxyz* единичные векторы его осей *i, j, k* не изменяются, следовательно, формулы Пуассона (8) сохраняют свой вид и равенство (6) опять приводит к соотношению (5).

Рассмотрим частные случаи.

1) Если система *Oxyz* неподвижна, то

$$\omega = 0, \qquad \frac{da}{dt} = \frac{\tilde{d}a}{dt} . \qquad (9)$$

2) Если вектор *a* неподвижен по отношению к основной системе $\Omega\xi\eta\zeta$, то

$$\frac{da}{dt} = 0, \qquad \frac{\tilde{d}a}{dt} = -\omega \times a . \qquad (10)$$

3) Если вектор *a* неизменно связан с триэдром *Oxyz*, то

$$\frac{\tilde{d}a}{dt} = 0, \qquad \frac{da}{dt} = \omega \times a . \qquad (11)$$

т. е.. как и должно быть, скорость конца *a* определяется в этом случае как скорость точки твердого тела, скрепленного с триэдром *Oxyz*.

К случаю второму относится вычисление относительных производных от единичных координатных векторов ξ^0, η^0, ζ^0 неподвижной системы $O\xi\eta\zeta$. По формуле (10) получим:

$$\frac{\tilde{d}\xi^0}{dt} = -\omega \times \xi^0, \qquad \frac{\tilde{d}\eta^0}{dt} = -\omega \times \eta^0, \qquad \frac{\tilde{d}\zeta^0}{dt} = -\omega \times \zeta^0 . \qquad (12)$$

С помощью равенств (12) можно определить производные от косинусов углов между осями подвижного и неподвижного триэдров. Проекции на оси *Oxyz* равны (11), (21), (31); если *p, q, r* суть проекции ω на те же оси, то

$$\frac{d\xi^0}{dt} = -\omega \times \xi^0 = -\begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ (11) & (21) & (31) \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Разлагая по осям системы *Oxyz,* получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(11)}{dt} &= (\dot{11}) = -[q(31) - r(21)], \\ \frac{d(21)}{dt} &= (\dot{21}) = -[r(11) - p(31)], \\ \frac{d(31)}{dt} &= (\dot{31}) = -[p(21) - q(11)], \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

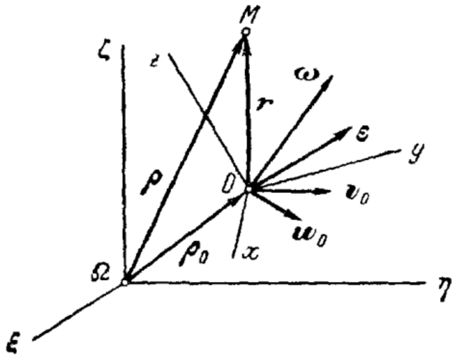


Рис. 40.

Из двух других равенств (12) аналогичным путем находятся формулы для производных остальных шести косинусов.

Теорема о сложении ускорений. Пусть подвижная система *Oxyz* движется относительно неподвижной $\Omega\xi\eta\zeta$ как свободное твердое тело. Обозначим скорость и ускорение начала (полюса) *O* по отношению к осям $\Omega\xi\eta\zeta$ через v_0 и w_0, а мгновенную угловую скорость и угловое ускорение самого трехгранника *Oxyz* по отношению к тем же осям $\Omega\xi\eta\zeta$ через *w* и ε (рис. 40). Рассмотрим точку *M,* совершающую движение, которое вообще не зависит от движения системы *Oxyz*. Обозначим через ρ и *r* ее абсолютный и относительный радиусы-векторы, а через ρ_0 радиус-вектор точки *O*. Тогда в любой момент времени

$$\rho = \rho_O + r\,. \tag{15}$$

Возьмем от обеих частей этого равенства полную производную по времени. Учитывая формулы (5) и (3), будем иметь:

$$v_a = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_O}{dt} + \frac{dr}{dt} = v_0 + \frac{\tilde{d}r}{dt} + \omega \times r = v_0 + \omega \times r + v_r\,. \tag{16}$$

Но $v_0 + \omega \times r_r$ есть скорость той неизменно связанной с системой *Oxyz* точки, в которой в данный момент находится точка *M,* следовательно, по определению это — переносная скорость, т. е.

$$v_0 + \omega \times r = v_e\,. \tag{17}$$

В результате из (16) находим:

$$v_a = v_r + v_e. \tag{18}$$

Таким образом, мы другим путем доказали теорему о сложении скоростей.

Беря теперь производные от обеих частей равенства (18), будем иметь:

$$w_a = \frac{dv_a}{dt} = \frac{dv_r}{dt} + \frac{dv_e}{dt},$$

или, после замены v_e его значением из (17),

$$w_a = \frac{d}{dt}(v_0 + \omega \times r) + \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \frac{dw}{dt} \times r + w \times \frac{dr}{dt} + \frac{dv_r}{dt}.$$

Применяя здесь формулу (5) r и v_r, получим:

$$w = \frac{dv_O}{dt} + \frac{dw}{dt} \times r + w + \left(\frac{\tilde{d}r}{dt} + \omega \times r \right) + \frac{\tilde{d}v_r}{dt} + \omega \times v_r.$$

В этом выражении

$$\frac{dv_O}{dt} = w_O, \qquad \frac{dw}{dt} = \varepsilon, \qquad \frac{\tilde{d}r}{dt} = v_r.$$

и его можно представить в виде

$$w = w_0 + \varepsilon \times r + \omega \times v_r + \omega \times (\omega \times r) + \frac{\tilde{d}v_r}{dt} + \omega \times v_r$$

или, после приведения,

$$w = \frac{\tilde{d}v_r}{dt} + w_0 + \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r) + 2(\omega \times v_r). \tag{19}$$

Рассмотрим, что представляют собой слагаемые, входящие в правую» часть равенства (19). Величина

$$w_r = \frac{\tilde{d}v_r}{dt} = \frac{\tilde{d}^2 r}{dt^2} \tag{20}$$

есть по определению *относительное* ускорение (как локальная производная от относительной скорости по времени). Иным путем в этом можно убедиться, положив в (19) $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$, $\omega_0 = 0$, т. е. считая оси $Oxyz$ неподвижными. Тогда полное ускорение точки M должно совпасть с относительным и мы придем к равенству (20). Величина

$$w_e = w_0 + \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r) \tag{21}$$

есть переносное ускорение, так как, она равна ускорению той неизменно связанной с системой *Oxyz* точки, в которой в данный момент находится точка *M*. Иным путем это можно получить, положив в (19) $v_r = 0$, $w_r = 0$, т. е. считая, что точка *M* неизменно связана с системой *Oxyz*. Тогда ее полное ускорение совпадает с переносным и мы получим равенство (21).

Величина

$$w_c = 2w \times v_r \tag{22}$$

которая не входит ни в относительное, ни в переносное ускорения, называется *поворотным* или *кориолисовым* ускорением.

В результате получаем следующую теорему о сложении ускорений или теорему Кориолиса: *абсолютное ускорение точки при сложном движении равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений*

$$w_a = w_r + w_e + w_c\,. \tag{22}$$

Если переносное движение (движение подвижной системы *Oxyz)* является *поступательным*, то $w_c = 0$, так как $w = 0$, и мы имеем:

$$w_a = w_r + w_e\,. \tag{24}$$

Следовательно, при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

Кориолисово ускорение появляется только тогда, когда подвижные оси при своем движении вращаются (отсюда термин «поворотное» ускорение). Как видно из хода доказательства, вектор $ча_c$ является суммой двух векторов $w \times v_r$. Один из них учитывает изменение вектора относительной скорости v_e при непоступательном переносном движении, а другой — изменение переносной скорости v_r при относительном перемещении точки (при изменении вектора *r* в относительном движении).

Если подвижная система отсчета движется поступательно, равномерно и прямолинейно, то $w_0 = 0$, $w = 0$, $\varepsilon = 0$ и, как видно из (21) и (22), $w_e = 0$ и $w_c = 0$, т. е. в этом случае относительное и абсолютное ускорения совпадают.

Отметим еще, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль *в данный момент времени,* если в этот момент $w = 0$, или $v_r = 0$, или же $v_r \| w$.

В тех случаях, когда $w_c \neq 0$, его модуль, согласно (22), вычисляется по формуле

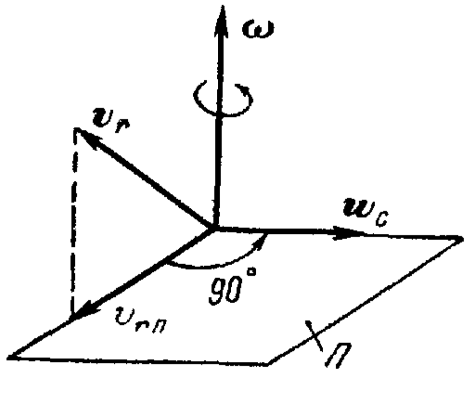


Рис. 41.

$$w_c = 2wv_r \sin\left(\widehat{w, v_r}\right), \qquad (25)$$

а направление определяется как направление векторного произведения $w \times r$. Направление w_c можно еще найти, спроектировав вектор v_r на плоскость *П*, перпендикулярную к w, и повернув эту проекцию на 90° в сторону переносного вращения, что видно из рис. 41. Такой способ особенно удобен в случае плоского движения, когда v_r уже лежит в плоскости, перпендикулярной к w.

Статика

Аксиомы, или основные законы, механики. Будем рассматривать тело столь малых размеров, что различием в движении отдельных его точек можно пренебречь. Такое тело называется *материальной точкой*; его можно представить в виде точки, снабженной массой. Произведение массы m материальной точки на ее скорость v есть векторная величина, называемая *количеством движения* (или импульсом) точки; т.к. масса m есть величина скалярная, то направление mv совпадает с направлением скорости точки.

Аксиома 1 (закон инерции). *Материальная точка, на которую не действуют никакие силы, имеет постоянную по модулю и направлению скорость.*

Таким образом, всякая, лишенная каких бы то ни было воздействий извне свободная материальная точка движется прямолинейно и равномерно ($v = const$) или, в частности, находится в покое ($v = 0$).

Закон инерции имеет место только по отношению к некоторым определенным системам отсчета, которые называются *инерциальными.*

Аксиома 2 (основной закон динамики). *Производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на нее силе, т. е.*

$$\frac{d(mv)}{dt} = F. \tag{1}$$

В классической механике масса частицы считается постоянной; поэтому основной закон динамики может быть еще представлен в виде

$$m\frac{dv}{dt} = F \tag{2}$$

или, так как $\dfrac{dv}{dt} = w$, где w есть ускорение точки,

$$mw = F, \tag{3}$$

т. е. *произведение массы точки на ее ускорение равно действующей на точку силе.* Так как масса есть величина скалярная, то векторы w и F коллинеарны, т. е. сила есть вектор, направленный по ускорению, которое получает точка от действия силы. В частности, если сила на точку не действует, т. е. если $F = 0$, то $mw = 0$, откуда

$$w = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ или } v = const.$$

Итак, эффект действия силы на материальную точку заключается в том, что точка получает ускорение; при отсутствии силы ускорение точки равно нулю, т. е. точка движется по инерции.

Из аналитического выражения этого закона, даваемого равенством (3), следует что: 1) одна и та же сила сообщает различным точкам ускорения, обратно пропорциональные их массам, и 2) различные силы сообщают одной и той же точке ускорения, пропорциональные силам. Таким образом, действие силы на точку зависит от массы точки, которая поэтому и является мерой ее инерции.

<u>Аксиома 3</u>(закон действия и противодействия). *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

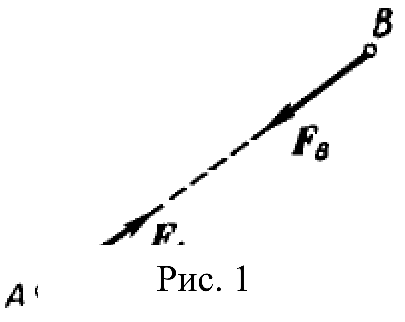


Рис. 1

Эта аксиома предполагает *дальнодействие,* т. е. возможность действия материальных тел друг на друга на расстоянии, что характерно для классической механики Галилея – Ньютона.

Если точка А с массой m_A действует на точку B с силой F_B, а точка B с массой m_B действует на точку A с силой F_A (рис.1), причем точки A и B получают от действия этих сил ускорения, соответственно равные w_A и w_B, то имеем:

$$F_B = -F_A \text{ и } F_A = F_B$$

или

$$m_A w_A = m_B w_B;$$

Следовательно, ускорения, сообщаемые материальным точкам силами взаимодействия, обратно пропорциональны массам точек.

<u>Аксиома 4</u> (закон независимости действия сил). *Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил действует независимо от других и сообщает точке ускорение, равное этой силе, деленной на массу точки.*

Следовательно, если на точку с массой m действует система сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$, то каждая сила F_i сообщит точке ускорение

$$w_i = \frac{F_i}{m};$$

поэтому ускорение, получаемое точкой от действия всей системы сил, будет:

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} F_i,$$

откуда имеем:

$$mw = \sum_{i=1}^{n} F_i. \tag{4}$$

Из этого равенства следует, что система нескольких сил $F_1, F_2, \ldots, F_n$ действует на материальную точку так же, как одна сила F, равна сумме $F_1, F_2, \ldots, F_n$, т. е.

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i. \tag{5}$$

Это следствие представляет обобщенный *закон параллелограмма сил.*

Система материальных точек. Совокупность материальных точек носит название *системы материальных точек.* Если система материальных точек обладает тем свойством, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то такая система называется *механической системой* материальных точек.

Если точки системы или тела связаны между собой неизменно, т. е. так, что взаимное расстояние между двумя любыми точками остается постоянным, то такая система называется *неизменяемой системой,* а тело – *абсолютно твердым телом;* в противном случае система называется изменяемой, а тело *деформируемым.*

Связи. Если каждая из точек системы может занимать произвольное положение в пространстве и иметь произвольные скорости, то система называется *свободной;* в противном случае система будет *несвободной.* Условия, которые налагают ограничения на движение системы, называются *связями.* Если связь налагает ограничение только на положение системы или на относительное положение точек, составляющих систему, в том смысле, что система, а следовательно, и ее элементы не могут занимать произвольного положения в пространстве, то такая связь называется *геометрической;* если же связь, кроме того, налагает ограничения еще и на кинематические элементы (например, на скорость), то такая связь носит название *кинематической.*

Геометрические связи представляются аналитически уравнениями, дающими зависимость между координатами точек системы. Для системы, состоящей из n материальных точек, положения которых определяются их декартовыми координатами $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$, уравнение геометрической связи имеет вид

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \tag{6}$$

или, сокращенно,

$$f(x, y, z) = 0. \tag{6'}$$

Уравнения же кинематической связи, налагающей ограничения не только на положения, но и на скорости точек системы, имеет вид

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \tag{7}$$

Если влияние связи не может прекратиться или, другими словами, система не может освободиться от связи, то такая связь называется *неосвобождающей;* если же система может покинуть связь, то связь носит название *освобождающей.*

Связи, выражаемые уравнениями вида (6) или (11), являются неосвобождающими. Если связь является освобождающей (и геометрической), то она выражается неравенством вида

$$f(x, y, z) \geq 0 \text{ или } f(x, y, z) \leq 0. \tag{8}$$

Связи, не зависящие от времени, называются *стационарными* или *склерономными.* Если же связь зависит от времени, то она называется *нестационарной* или *реономной* связью.

Связи, выражаемые уравнениями вида (6), (7) или (8), будут склерономными. Уравнения реономной связи (и притом геометрической.ю неосвобождающей) имеет вид

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{9}$$

Отметим, наконец, что по отношению к рассматриваемой системе связи можно разделить на *внутренние* и *внешние.* Внутренней называется такая связь, которая не препятствует перемещению всей системы в целом, а налагает ограничения только на относительное расположение точек системы; в противном случае связь называется внешней. Систему, которая имеет только внутренние связи, также называют *свободной* системой.

Координаты системы. Независимые между собой величины, определяющие положение или *конфигурацию* системы материальных точек относительно какой-либо системы отсчета, называются *координатами системы.* Если на систему наложены только геометрические связи, то число координат системы называется *числом степеней свободы* этой системы.

Пусть мы имеем систему, состоящую из n материальных точек. Положение каждой точки определяется тремя декартовыми координатами (x_v, y_v, z_v), где v есть номер точки; следовательно, положение всей системы, если на нее не наложены связи, будет определяться $3n$ координатами:

$$x_v,\ y_v,\ z_v \quad (v = 1, 2, \ldots, n),$$

и такая система будет иметь $3n$ степеней свободы.

Допустим теперь, что система подчинена k геометрическим связям вида (6), т. е.

$$f_\chi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (\chi = 1, 2, \ldots, k). \tag{10}$$

Тогда $3n$ координат точек системы не будут уже между собой независимы и не могут иметь произвольных значений, а будут связаны k условиями (10); поэтому независимых координат будет:

$$3n - k. \tag{11}$$

Таким образом, число координат системы, а следовательно и число степеней свободы ее, будет $3n - k$.

За координаты системы можем принять в данном случае любые $3n - k$ декартовых координат (x_v, y_v, z_v), которые будем считать независимыми; тогда остальные k из этих координат будут функциями первых. Можно $3n - k$ независимых декартовых координат системы преобразовать в другие посредством точечного преобразования, выразив их в функциях $3n - k$ независимых переменных $q_1, q_2, \ldots, q_{3n-k}$, т. е. положив

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \ldots), \quad y_1 = y_1(q_1, q_2, \ldots), \quad \text{и т. д.,} \tag{12}$$

где $x_1, y_1, \ldots$ будут аналитическими функциями переменных q_i, при чем якобиан

$$\frac{\partial(x_1, y_1, \ldots)}{\partial(q_1, q_2, \ldots)} \neq 0.$$

Тогда $q_1, q_2, \ldots, q_{3n-k}$ будут координатами системы, в общем случае криволинейными. Декартовы координаты точек системы в этом случае будут функциями координат $q_1, q_2, \ldots, q_{3n-k}$, т. е.

$$x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots, y_n, z_n \mid q_1, q_2, \ldots, q_{3n-k}.$$

Виды сил.

1) *Поверхностные* силы – силы, действующие на точки поверхности тела. Они возникают при действии одного тела на другое непосредственным соприкосновением и приложены к той части поверхности тела, в которой взаимодействующие тела касаются друг друга.

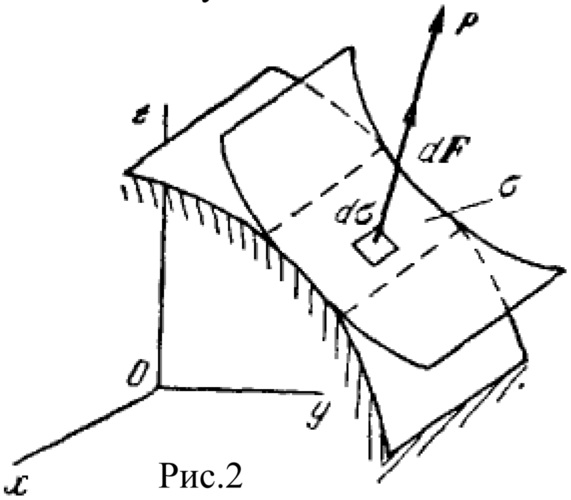


Рис.2

Пусть тело 1 действует на тело 2, касаясь его вдоль некоторой поверхности σ (рис. 2). Действующие на эту поверхность распределенные силы характеризуются их напряжением $\boldsymbol{p}$, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу площади. Если н7а элемент $d\sigma$ площади контакта действует сила $d\boldsymbol{F}$, то

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \sigma}. \qquad (13)$$

Величина $\boldsymbol{p}$ будет вообще функцией координат точки, определяющей положение элемента $d\sigma$.

2) *Массовые,* или *объемные,* силы – силы, которые действуют на все частицы тела. К таким силам относятся силы дальнодействия, такие, например, как силы тяготения или тяжести. Массовые силы характеризуются их напряжением $\boldsymbol{f}$, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу объема.

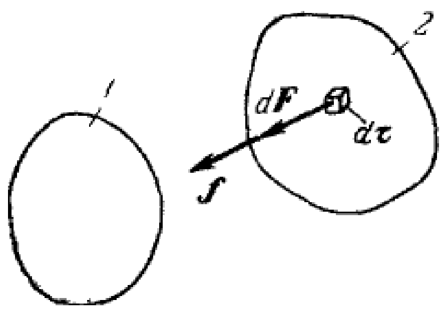


Рис.3

Пусть при взаимодействии тел (1) и (2)на элемент объема $d\tau$ тела 2 действует сила $d\boldsymbol{F}$ (рис. 3); тогда

$$\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{F}}{d\tau}. \qquad (14)$$

Величина $\boldsymbol{f}$ является вообще функцией координат точки, определяющие положение элемента объема $d\tau$. Пусть масса рассматриваемого элемента объема равна dm; тогда величина

$$\frac{dm}{d\tau} = \rho, \qquad (15)$$

представляющая собой массу единицы объема в данной точке, называется *плотностью* тела в данной точке и есть, очевидно, функция координат этой точки. Если ускорение, сообщаемое элементу объема силой $d\boldsymbol{F}$, обозначим $\boldsymbol{w}$, то будем иметь:

$$dF = dm \cdot w = \rho w d\tau. \tag{16}$$

Сравнивая равенства (14) и (16), получим:

$$f = \rho w. \tag{17}$$

Если силу dF будем относить не к единице объема, а к единице массы, то из равенства (16) получим:

$$\frac{dF}{dm} = w. \tag{18}$$

Реакции связей. Связи, налагаемые на точки системы, стесняют свободу движения этих точек. Отклоняя их движение от того, которое они имели бы под действием тех же сил, будучи свободными от связей. Поэтому мы можем считать, это эффект действия связей такой же, как и действия сил, вследствие чего *действие связей можно заменить соответствующими силами, которые называются реакциями связей.*

Реакции связей по природе своей несколько отличаются от всех других действующих на систему сил, не являющихся реакциями, которые принято называть *активными* силами. Активные силы, действуя на покоящуюся систему, могут сообщить ей то или иное движение; реакции же связей этим свойством не обладают, вследствие чего их называют *пассивными* силами.

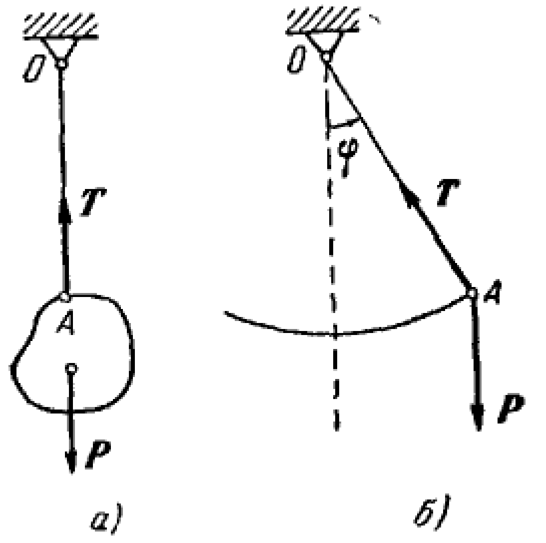


Рис. 4

Пусть, например, твердое тело весом P подвешено в неподвижной точке O на нерастяжимой нити, прикрепленной к точке A тела (рис. 4, а). Нить, служащая связью, дает реакцию T, приложенную в точке A тела и направленную по нити; числовое значение этой реакции равно в данном случае весу тела P, ибо нить действует на тело с силой T, а тело действует на нить с силой P. Если же тяжелое тело весом P, подвешенное на на нити к неподвижной точке O (рис.4, б), совершает колебания, то реакция нити T будет по-прежнему направлена вдоль нити, однако его численная величина будет зависеть не только от P, но и от угла φ и угловой скорости $\frac{d\varphi}{dt}$, т. е., вообще говоря, от движения тела.

Если связью служит неподвижная гладкая поверхность (рис. 5), то она дает реакцию N, приложенную в точке касания A тела к этой поверхности и направленную по нормали к ней; напряжение реакции зависит от активных сил, действующих на тело, и от движения тела. Неподвижная гладкая кривая, служащая связью (рис. 6), развивает реакцию, приложенную в точке касания

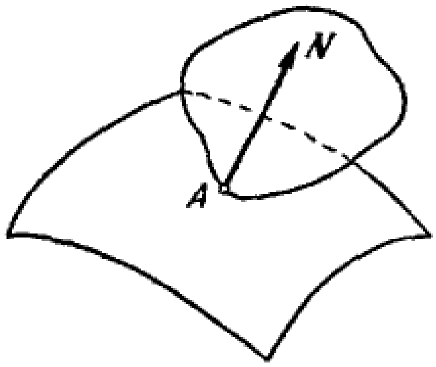


Рис. 5

Рис. 6

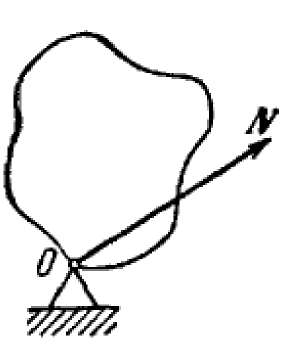


Рис. 7

A и направленную по нормали к кривой; в этом случае реакции может иметь какое угодно напряжение и направление, лежащее в нормальной плоскости, проведенной к кривой через точку A. Если связью является неподвижная точка O (рис. 7), то она может дать любую по напряжению и направлению реакцию N, приложенную к этой точке. Модуль и направление реакции в последних двух случаях зависят от действующих активных сил и от движения тела.

Связи, развивающие *нормальную* реакцию, являются *идеальными* связями (*связями без трения*), в отличие от *связей с трением*, которые, кроме нормальной реакции N, дают еще реакцию F, лежащую в касательной плоскости (рис. 8) и возникающую благодаря трению; вследствие этого реакция связи с трением N_1 может отклоняться от нормали на некоторый угол φ.

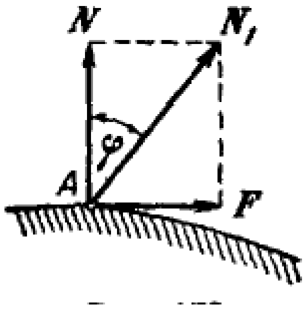


Рис. 8

Разделение кинетики на статику и динамику. Обычно кинетику разделяют на *статику* – учение о равновесии механической системы под действием сил и *динамику* – учение о движении системы под действием сил.

Определение и аксиомы статики

Элементарная и аналитическая статика.

Элементарная статика представляет собой в основном статику абсолютно твердого тела. В ней силы рассматриваются как некоторые определенные заданные величины и изучают методы замены различных систем сил, действующих на абсолютно твердое тело, простейшими системами, а затем находят условия равновесия этих систем.

Аналитическая статика представляет собой развитие одного из основных принципов механики, именно принципа виртуальных перемещений, который дает общий критерий равновесия механической системы, вследствие чего выводы аналитической статики относятся к какой угодно механической системе.

Сила. Сила, действуя на материальную точку, сообщает ей ускорение, направленное по силе; поэтому действие силы на точку зависит: 1) от направления силы и 2) от напряжения (численного значения или модуля) силы. Прямая, по которой направлена сила, называется *линией действия силы.* Сила, как неподвижный вектор, определяется: 1) *точкой приложения*, 2)*направлением* и 3)*напряжением.*

Основные определения.

Определения. 1) Совокупность сил, действующих на какую-либо механическую систему, в частности на твердое тело, называется *системой сил.*

2) Система сил, которая, действуя на свободное твердое тело, находящееся в покое, не сообщает ему никакого движения, находится в *равновесии*, или, иначе говоря, *эквивалентна нулю.*

3) Если направления всех сил какой-либо системы (S) изменить на противоположные, сохраняя точки их приложения, то получается система сил (S'), которая называется системой, противоположно системе (S). Символически это обозначается так:

$$(S') = (-S)$$

4) Если две системы сил (S_1) и (S_2), действующие одновременно на свободное твердое тело, находятся в равновесии, то говорят, что система (S_2) уравновешивает систему (S_1), и наоборот.

5) Если система сил (S_1) уравновешивается системой, противоположной системе (S_2), то системы сил (S_1) и (S_2) называются *эквивалентными.* Символически это определение записывается так: если $(S_1)+(-S_2)\propto 0$, то $(S_1)\propto(S_2)$ (знак $\propto$ есть символ эквивалентности).

<u>Следствие 1.</u> Из определения 5) следует, что если система сил (S_2) уравновешивает систему (S_1), то система ($-S_2$) эквивалентна системе (S_1).

<u>Следствие 2.</u> Две системы сил (S_1) и (S_2) эквивалентны третьей (S), эквивалентны между собой, т. е. если $(S_1)\propto(S),(S_2)\propto(S)$, то $(S_1)\propto(S_2)$.

6) Если система сил (S) эквивалентна одной силе F, то сила F называется *равнодействующей* системы (S).

Из определений 5) и 6) вытекает, что если система сил (S) имеет равнодействующую F, то эта система (S) уравновешивается одной силой, равной $-F$.

7) Если все силы, действующие на твердое тело, образуют систему сил, находящуюся в равновесии, то мы будем говорить, что и само тело находится в равновесии.

Аксиомы статики.

Рис. 9

1) Система двух взаимно противоположных сил, равных по напряжению и приложенных в одной точке, находится в равновесии (рис.9).

2) Система двух равных по направлению взаимно противоположных сил, приложенных в двух каких-либо точках абсолютно твердого тела и направленных по прямой, соединяющей их точки приложения, находится в равновесии (рис. 10).

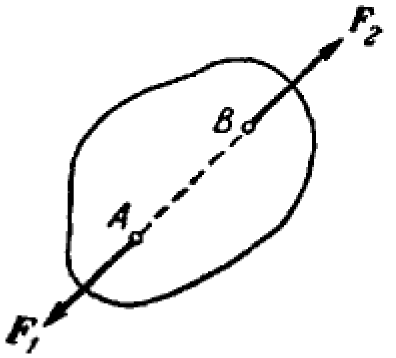


Рис. 10

3) Всякую систему сил (S_1) можно, не изменяя оказываемого ею действия, заменить другой системой (S_2), ей эквивалентной.

Следствие. Всякую силу, приложенную в какой-либо точке абсолютно твердого тела, можно, не изменяя ее действия, перенести в любую другую точку, лежащую на линии действия этой силы.

Для определения силы, действующей на абсолютно твердое тело, надо знать: 1) какую-либо точку, через которую проходит линия действия силы, 2) направление силы, 3) напряжение силы.

4) Две системы сил, различающиеся между собой на систему сил, эквивалентную нулю, эквивалентны между собой.

5) Равновесие механической системы, находящейся в покое, не нарушается от наложения новых связей; в частности, равновесия механической системы не нарушается, если все частицы системы связать между собой неизменно (принцип отвердевания).

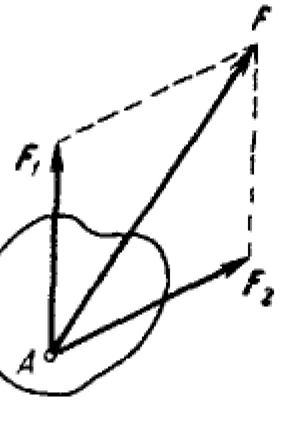


Рис. 12

6) Система двух сил, приложенных в одной точке, эквивалентна одной силе, приложенной в той же точке и равной геометрической сумме этих сил (закон параллелограмма сил).

$$F = F_1 + F_2$$

Следствие. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке и направленных по одной прямой, равна алгебраической сумме этих сил и направлена по той же прямой.

Несвободное твердое тело. Аксиома связей.

Аксиома связей: *Всякое несвободное твердое тело можно освободить от связей, заменив действие связей их реакциями, и рассматривать его как свободное, находящееся под действием приложенных к нему активных сил и реакций связей.*

В случае идеальных связей неподвижная поверхность (см. рис. 5) дает реакцию, приложенную в точке касания и направленную по нормали к поверхности.

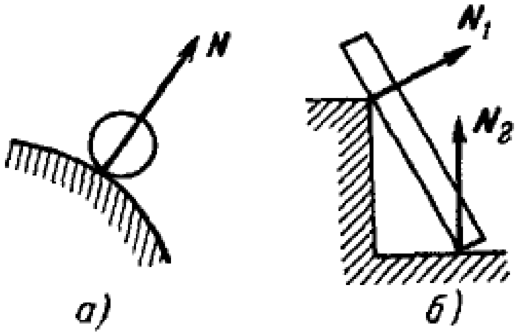


Рис. 13

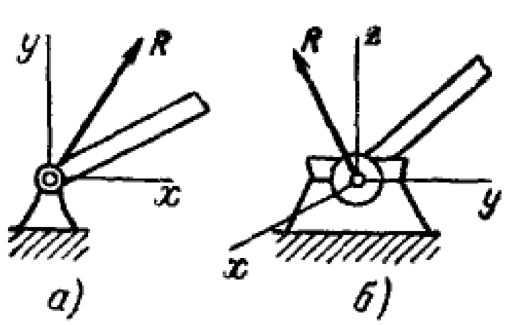


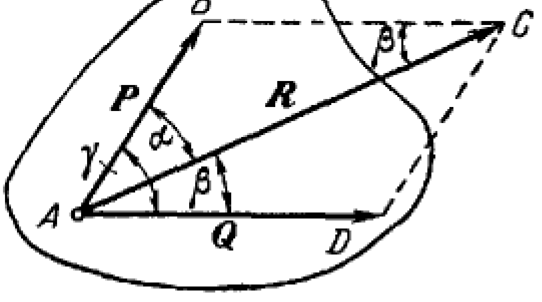
Рис. 14

Когда связь осуществляется в виде некоторого тела, реакция направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис.13, а); если же одна из поверхностей вырождается в точку, то реакция направлена по нормали к другой поверхности (рис. 13, б). Реакция неподвижной линии (см. рис. 6) приложена в точке касания и может иметь любое направление в нормальной плоскости, проведенной к кривой в этой точке. Примером такой связи служит цилиндрический шарнир (подшипник), в котором ось шарнира, перпендикулярная к рисунку, является неподвижной прямой (рис. 14, а); реакция R такого шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к его оси (т. е. в плоскости рисунка). Неподвижная точка (см. рис. 7) может развить какую угодно по модулю и направлению реакцию. Примером такой связи служит шаровой шарнир (рис. 14, б) или подпятник (подшипник с упором). Реакция гибкой нити всегда направлена по нити (см. рис. 4) и равна натяжению нити.

§ 3. Система сил, приложенных в одной точке. Сходящиеся силы

Равнодействующая системы сил, приложенных в одной точке. Предположим сначала, что на тело действуют две силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, приложенные в одной точке A и образующие между собой угол $\widehat{\boldsymbol{PQ}}=\gamma$ (рис. 15).Равнодействующая $\boldsymbol{R}$ этих двух сил, согласно аксиоме о параллелограмме сил, равна геометрической сумме данных сил, т. е.

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}. \tag{19}$$



Модуль равнодействующей можно определить из треугольника ABC;

заметив, что $\angle ABC = 180^\circ - (\widehat{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}})$, получаем:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(\widehat{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}})}. \qquad (20)$$

Найдем теперь направление равнодействующей, т. е. определим углы

$$\alpha = (\widehat{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{P}}) \text{ и } \beta = (\widehat{\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}}),$$

которые равнодействующая составляет с силами $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Применяя известную теорему тригонометрии, получим из треугольника ABC, учитывая, что $\sin\left[180^\circ - (\widehat{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}})\right] = \sin(\widehat{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}})$,

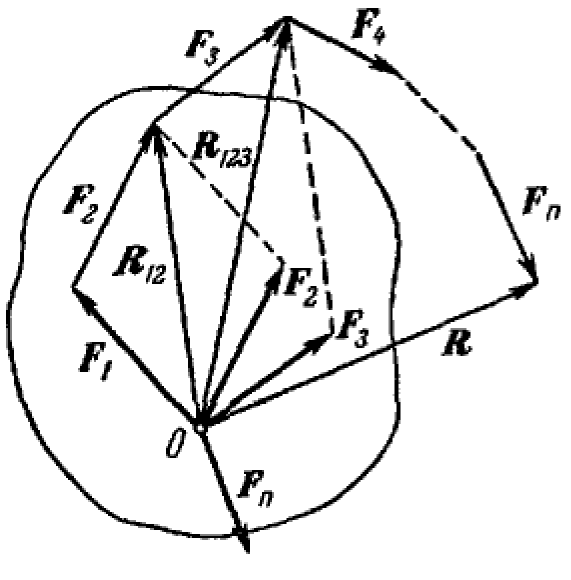
$$\frac{P}{\sin(\widehat{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}})} = \frac{Q}{\sin(\widehat{\boldsymbol{R},\boldsymbol{P}})} = \frac{R}{\sin(\widehat{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}})}. \qquad (21)$$

Формулы (20) и (21) определяют модуль и направление равнодействующей, если известны величины составляющих сил и угол между ними.

Вектор $\boldsymbol{R}$ можно также найти, строя один из треугольников ABC или ADC, образующих параллелограмм $ABCD$.

Задача разложения данной силы $\boldsymbol{R}$ на эквивалентные ей две силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, которую можно считать задачей, обратной определению равнодействующей, имеет, очевидно, бесчисленное множество решений. Для определенности надо задать дополнительно или линии действия искомых сил, или их модули, или же модуль и направление одной из сил. Первая задача сводится к построению параллелограмма, у которого известна диагональ $\boldsymbol{R}$ и направление сторон AB и AD (см. рис. 15). Другие же две задачи сведутся к построению треугольника по трем заданным сторонам (имеет два решения) или по двум сторонам и углу между ними.

Перейдем теперь к определению равнодействующей системы n сил $(\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3}, \ldots, \boldsymbol{F_n})$, приложенных к телу в точке O (рис. 16).



Применяя последовательно аксиому параллелограмма сил, получим:

$$(\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}) \propto \boldsymbol{R_{12}},$$

где

$$\boldsymbol{R_{12}} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2};$$

далее,

$$(\boldsymbol{R_{12}}, \boldsymbol{F_3}) \propto \boldsymbol{R_{123}},$$

где

$$\boldsymbol{R_{123}} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3};$$

и т. д. Наконец,

$$(\boldsymbol{R_{123\cdots(n-1)}}, \boldsymbol{F_n}) \propto \boldsymbol{R},$$

где

Рис. 16

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \ldots + \boldsymbol{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F_i}. \quad (4)$$

Таким образом, система сил, приложенных в одной точке, эквивалентна одной силе, т. е. имеет равнодействующую. Эта равнодействующая равна геометрической сумме всех сил системы и приложена в той же точке.

Равнодействующая $\boldsymbol{R}$ может быть получена или графически, причем сложение сил совершается по методу векторного многоугольника, или аналитически через проекции составляющих сил на оси координат. В последнем случае, применяя выведенные ранее формулы векторного исчисления, получим:

$$\left.\begin{aligned} &R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}, \\ &R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

$$\cos(\boldsymbol{R},\hat{} \, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{R},\hat{} \, y) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\boldsymbol{R},\hat{} \, z) = \frac{R_z}{R}, \quad (24)$$

Формулы (23) и (24), дающие модуль и направляющие косинусы равнодействующей рассматриваемой системы сил, вполне определяют ее по напряжению и по направлению.

Равнодействующая система сходящихся сил. Система действующих на абсолютно твердое тело сил ($\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_1}, \ldots, \boldsymbol{F_n}$), обладающих тем свойством, что линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке O, называется *системой сходящихся сил* (рис. 7).

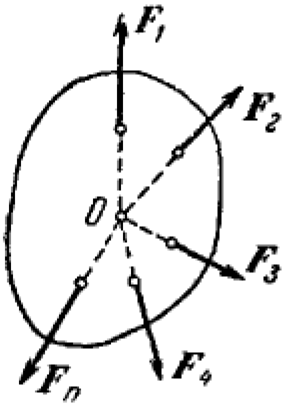


Рис. 7

Условия равновесия. Всякая система сходящихся сил (в том числе и сил, приложенных в одной точке) имеет равнодействующую; поэтому для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая системы $\boldsymbol{R}$ была равна нулю, т. е.

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = 0. \quad (25)$$

Это – условие равновесия в векторной форме. В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат, т. е. в *аналитической форме,* условия равновесия, согласно (23), представляются в виде

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0. \quad (26)$$

Теорема о трех силах. *Если плоская система трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

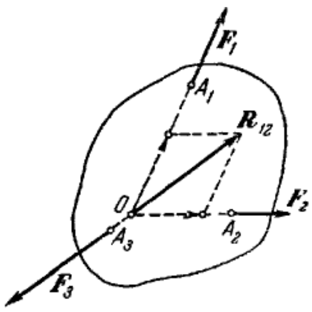


Рис. 8

Пусть плоская система трех сил $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3}$, приложенных в точках A_1, A_2, A_3, находится в равновесии (рис. 8). Предположим, что линии действия сил $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}$ пересекаются в точке O; перенесем эти две силы $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}$ по линиям их действия в точку пересечения O и по правилу параллелограмма найдем их равнодействующую $\boldsymbol{R_{12}}$. Тогда

$$(\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3}) \propto (\boldsymbol{R_{12}}, \boldsymbol{F_3}).$$

Но система двух сил находится в равновесии только в том случае, если эти силы направлены по одной прямой. Следовательно, линия действия силы $\boldsymbol{F_3}$ должна совпадать с линией действия силы $\boldsymbol{R}_{12}$, которая проходит через точку O, т. е. пройти через точку O.

Итак, для равновесия системы трех сил, лежащих в одной плоскости, необходимо (но недостаточно), чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке.

Этой теоремой иногда удобно пользоваться при решении задач на равновесие тел, находящихся под действием плоской системы трех сил, в частности для определения наперед неизвестных направлений реакции связей.

Трение и связи с трением

Трение скольжения. Связь с трением, кроме нормальной реакции $\boldsymbol{N}$, развивает еще тангенциальную реакцию $\boldsymbol{F}$, лежащую в касательной плоскости, проведенной через точку A, в которой тело соприкасается с поверхностью, служащей связью (рис. 9); если связью служит кривая, то тангенциальная реакция $\boldsymbol{F}$ направлена по касательной к этой кривой. В то время как нормальная реакция представляет собой давление связи на тело, тангенциальная реакция появляется благодаря *силе трения.*

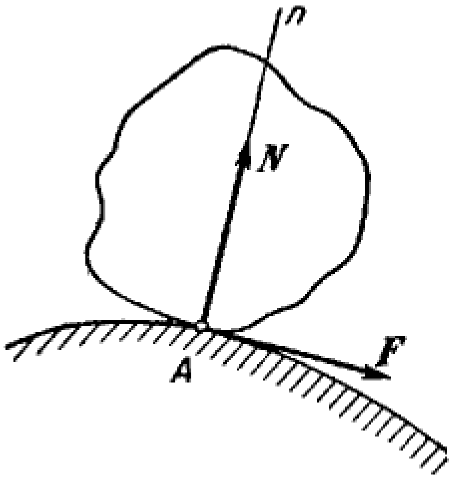


Рис. 9

Сила трения есть результат взаимодействия двух соприкасающихся по некоторым давлением тел. Эта сила возникает в точках соприкосновения, лежит в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел и препятствует скольжению одного тела относительно другого. Трение такого рода носит название трения *скольжения.*

Законы трения скольжения. При рассмотрении явления трения следует различать статическое трение, имеющее при относительном покое соприкасающихся тел, и трение движения, которое имеет место при относительном движении тел.

Установленные экспериментально законы трения скольжения при покое можно сформулировать так:

1) Сила трения скольжения действует в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел; численно сила трения имеет всякий раз то значение, которое необходимо для предотвращения относительного скольжения тел, но не может стать больше некоторое определенной предельной величины, т. е.

$$F \le F_{\max}. \tag{27}$$

2) Величина предельной силы трения зависит от природы соприкасающихся тел и от возникающей при их взаимном давлении друг на друга нормальной реакции N и определяется равенством

$$F_{\max} = f_0 N, \tag{28}$$

где f_0 - отвлеченное число, называемое коэффициентом трения скольжения при покое (или статическим коэффициентом трения). Коэффициент f_0 зависит от материала, характера обработки и состояния (влажности, температуры и др.) трущихся поверхностей и определяется опытным путем.

3) Сила трения не зависит от площади контакта соприкасающихся при трении поверхностей.

Из равенств (27) и (28) следует, что

$$F \le f_0 N. \tag{29}$$

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную относительно скорости тела, а ее численная величина определяется равенством

$$F = fN, \tag{30}$$

где f - коэффициент трения скольжения при движении (или динамический коэффициент трения).

Реакция связи с трением. Угол и конус трения. Полная реакция $\boldsymbol{R}$ связи с трением слагается геометрически из нормальной реакции $\boldsymbol{N}$ и перпендикулярной к ней силы трения $\boldsymbol{F}$. Так как $F \le F_{\max}$, то при данной величине N полная реакция может иметь разные численные значения и образовывать разные углы с нормалью. Наибольшее значение $\boldsymbol{R}_{\max}$ полная реакция имеет при $F = F_{\max}$ (рис. 10). Образуемый при этом реакцией $\boldsymbol{R}_{\max}$ угол φ с нормалью (наибольший из всех возможных углов отклонения) называется *углом трения.* Как видно из рисунка, $F_{\max} = N\,tg\,\varphi$. Сравнивая этот результат с равенством (28), находим, что

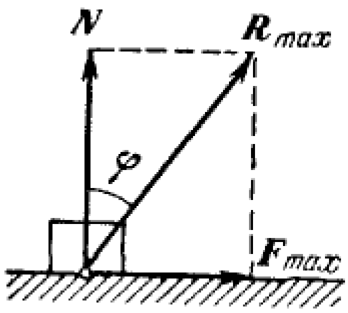


Рис. 10

$$tg\,\varphi = \frac{F_{\max}}{N} = f_0. \tag{31}$$

Так как тело может перемещаться вдоль поверхности, реализующей связь, по любому направлению, то связь с трением может развить реакцию по всякому направлению, лежащему внутри конуса (вообще не кругового, если структура поверхности неоднородна), осью которого служит нормаль, а угол между осью и образующей равен углу трения φ (рис. 11). Отсюда, в частности, следует, что для равновесия тела, касающегося шероховатой поверхности в точке A, необходимо, чтобы все силы, действующие на тело, привелись к равнодействующей, проходящий через точку A и лежит внутри конуса трения.

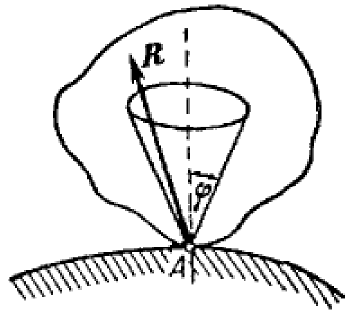


Рис. 11

Трение качения. Опыт показывает, что для качения тяжелого цилиндра (катка) по горизонтальной плоскости к оси цилиндра необходимо приложить некоторую горизонтальную силу $\boldsymbol{Q}$ для того, чтобы преодолеть сопротивление, возникающее при качении цилиндра. Это сопротивление носит название *трения качения.*

Параллельные силы

Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону.

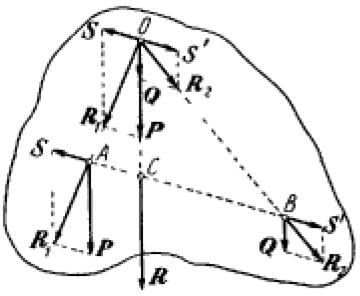


Рис.12

Рассмотрим систему четырех сил ($\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{S},\mathbf{S}'$) в точке O (рис. 12).

Систему сил ($\mathbf{S},\mathbf{S}'$), как эквивалентную нулю, отбросим; остаются две силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Эти силы направлены в одну сторону и действуют по одной прямой, которая параллельна линиям действия сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$; следовательно, равнодействующая этих сил $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$ будет по модулю равна сумме модулей слагаемых сил, т. е.

$$R = P + Q \tag{32}$$

и направлена параллельно данным силам. Из подобия соответствующих треугольников имеем:

$$\frac{P}{OC} = \frac{S}{AC}, \frac{Q}{OC} = \frac{S'}{CB}.$$

Разделив почленно одну пропорцию на другую, получим:

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC}, \text{ откуда } \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}.$$

Таким образом, точка C находится на отрезке AB и делит его внутренним образом на части, обратно пропорциональные силам. Составив из последней пропорции производную пропорцию, получим:

$$\frac{P+Q}{AC+CB} = \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC},$$

Или, так как $P+Q=R,$ а $AC+CB=AB,$

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}. \tag{33}$$

Равенства (33), очевидно, сохраняются, если силы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ считать приложенными в точках A_1 и B_1, лежащих на общем перпендикуляре к линиям действия этих сил (рис. 13). Тогда, полагая $A_1C = p,\ CB_1 = q,$ будем иметь:

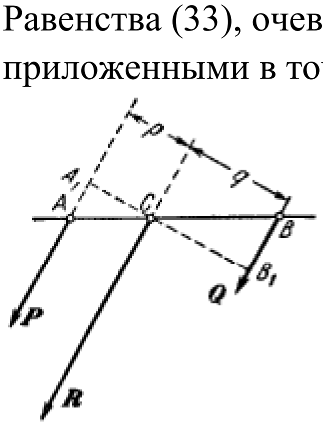


Рис. 13

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB_1}{A_1C} = \frac{q}{p},$$

Откуда

$$Pp = Qq.$$

Расстояние от точки C до линии действия силы называется плечом силы относительно точки C.

Система двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны (антипараллельных).

Пусть мы имеем систему антипараллельных сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, не равных по модулю и приложенных в точках A и B. (рис. 14).

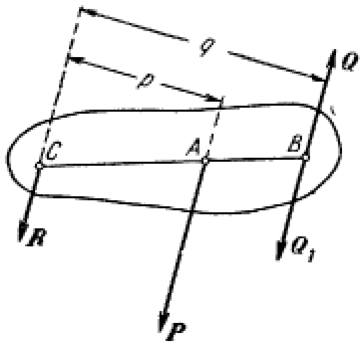


Рис. 14

Разложим большую силу $\boldsymbol{P}$ на две параллельные силы $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Q_1}$, из которых одну ($\boldsymbol{Q_1}$), равную по напряжению силе $\boldsymbol{Q}$, приложим в точке B так, что силы $\boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{Q_1}$ будут действовать по одной прямой в разные стороны. Тогда напряжение другой силы $\boldsymbol{R}$ и точка ее приложения C определяется из соотношений вида (32) и (33), которые, учитывая, что $Q = Q_1$, дают:

$$R = P - Q,$$

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}.$$

Пара сил. Система двух равных по модулю антипараллельных сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 15), называется *парой сил.*

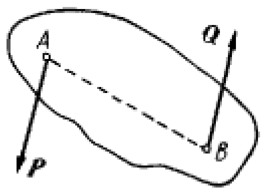


Рис.15

Система многих параллельных сил. Точка, через которую проходит равнодействующая системы параллельных сил, направленных в одну сторону, определяемая по формуле

$$r_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i},$$

называется *центром параллельных сил.*

Проектируя обе части равенства (34) на оси координат, найдем выражения для координат x_0, y_0, z_0 центра параллельных сил:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}, \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i}, \quad z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i},$$

Где x_i, y_i, z_i - координаты точки приложения силы P_i.

Статические моменты. Для определения радиуса-вектора центра параллельных сил мы получили формулу (34). В этой формуле выражение $\sum_{i=1}^{n} P_i r_i$ носит название *статического момента* системы параллельных сил относительно центра O.

§ 6. Центр тяжести. Точка, являющаяся центром параллельных сил тяжести частиц тела, называется *центром тяжести* данного тела.

$$r_0 = \frac{\sum \rho \Delta v \cdot r}{\sum \rho \Delta v}, \tag{35}$$

$$x_0 = \frac{\sum \rho \Delta v \cdot x}{\sum \rho \Delta v},\ y_0 = \frac{\sum \rho \Delta v \cdot y}{\sum \rho \Delta v},\ z_0 = \frac{\sum \rho \Delta v \cdot z}{\sum \rho \Delta v}, \tag{36}$$

Формулами (35) и (36) определяются соответственно радиус-вектор или координаты *центра масс (центра инерции)* тела.

Теорема Гульдена-Паппа. Теорема 1. *Площадь поверхности, полученной вращением дуги плоской кривой (или ломаной линии) вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но ее не пересекающей, равна длине дуги, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.*

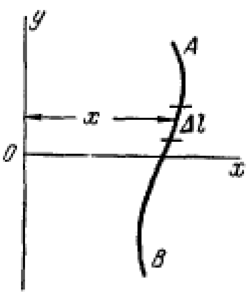


Рис. 16

Пусть дана дуга AB некоторой кривой и ось вращения y в плоскости этой кривой (рис.16). Разобьем дугу на элементы длины Δl. При вращении вокруг оси элемент длины Δl опишет элементарную поверхность, площадь которой равна $2\pi x \Delta l$.

Площадь поверхности, описанная всеми элементами, будет:

$$S = 2\pi \sum x\Delta l.$$

Но $\sum x\Delta l = x_0 l$, где x_0 есть координата центра тяжести дуги AB. Следовательно, площадь поверхности, описанной дугой AB, будет:

$$S = 2\pi x_0 l.$$

Теорема 2. *Объем тела вращения, образованного вращение плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и ее не пересекающейся, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести площади фигуры.*

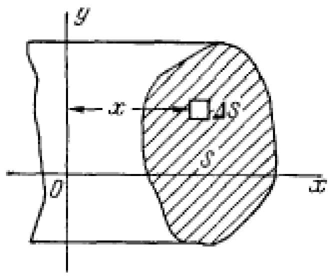


Рис. 17

Разобьем данную площадь на элементарные площадки ΔS (рис.17). При вращении каждая элементарная площадка образует некоторое элементарное тело, объем которого будет равен

$$\Delta v = 2\pi x \Delta S.$$

Следовательно, объем полученного тела вращения будет:

$$v = 2\pi x_0 S.$$

Момент силы. Момент силы относительно точки и оси. Момент пары сил.

Момент силы относительно точки O - это вектор, модуль которого равен произведению модуля силы на плечо - кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы. Направление вектора момента силы перпендикулярно плоскости, проходящей через точку и линию действия силы, так, что глядя по направлению вектора момента, вращение, совершаемое силой вокруг точки O, происходит по часовой стрелке (рис. 18)

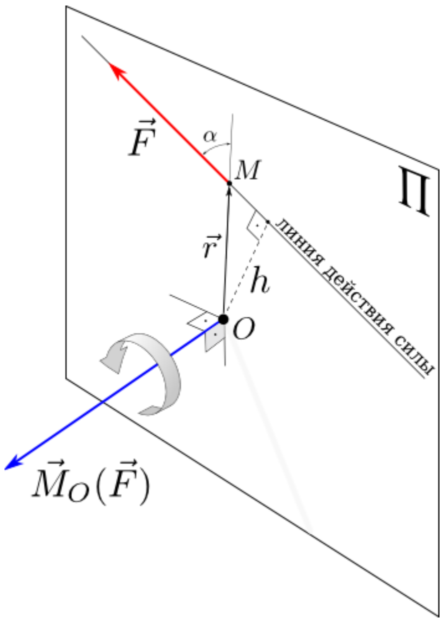


Рис. 18

Если известен радиус-вектор $\vec{r}$ точки приложения силы $\vec{F}$ относительно точки O, то момент этой силы относительно O выражается следующим образом:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Действительно, модуль этого векторного произведения:

$$\left|\vec{M}_0\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \sin\alpha$$

В соответствии с рисунком $\left|\vec{r}\right| \sin\alpha = h$ поэтому:

$$\left|\vec{M}_0\right| = \left|\vec{F}\right| h.$$

Вектор $\vec{M}_0$,как и результат векторного произведения, перпендикулярен векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, которые принадлежат плоскости Π . Направление вектора $\vec{M}_0$ таково, что глядя по направлению этого вектора, кратчайшее вращение от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ происходит по часовой стрелке. Другими словами, вектор $\vec{M}_0$ достраивает систему векторов $(\vec{r}, \vec{F})$ до правой тройки.

Зная координаты точки приложения силы в системе координат, начало которой совпадает с точкой O, и проекцию силы на эти оси координат, момент силы может быть определен следующим образом:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}.$$

Проекция момента силы относительно точки на некоторую ось, проходящую через эту точку называется моментов силы относительно оси (рис.19).

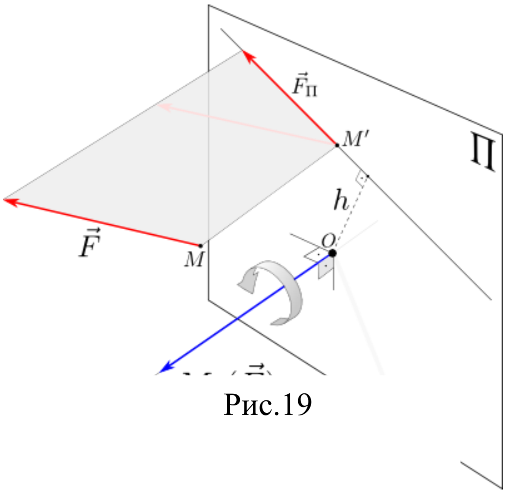


Рис.19

Момент силы относительно оси вычисляется как момент проекции силы $\vec{F}$ на плоскость Π, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью Π:

$$M_z(\vec{F}) = M_z(\vec{F}_\Pi) = \pm F_\Pi h.$$

Знак момента определяется направлением вращения, которое стремится придать телу сила $\vec{F}_\Pi$. Если, глядя по направлению оси Oz сила вращает тело по часовой стрелке, то момент берется со знаком ``плюс'', иначе - ``минус''.

Теоремы о парах.

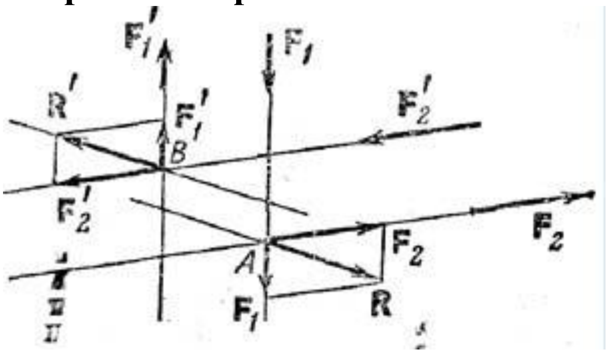


Рис.20

Теорема 1. *Две пары, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости, с моментом, равным сумме моментов данных двух пар*

Для док–ва рассмотрим две пары (F_1, F_1') и (F_2, F_2') (рис. 20) и перенесем точки приложения всех сил вдоль линий их действия в точки A и B соответственно. Складывая силы по аксиоме 3, получим $R = F_1 + F_2$ и $R = F_1' + F_2'$, но $F_1' = -F_1$ и $F_2' = -F_2$. Следовательно, $R = -R'$, т. е. силы R и R' образуют пару. Момент этой пары:

$$M = M(R, R') = BA \times R = BA \times (F_1 + F_2) = BA \times F_1 + BA \times F_2. \qquad (37)$$

При переносе сил, составляющих пару, вдоль линий их действия ни плечо, ни направление вращения пары не меняются, следовательно, не меняется и момент пары. Значит, $BA \times F_1 = M(F_1, F_1') = M_1$, $BA \times F_2 = M(F_2, F_2') = M_2$, и формула (37) примет вид $M = M_1 + M_2$, ч.т.д.

Сделаем два замечания. 1. Линии действия сил, составляющих пары, могут оказаться параллельными. Теорема остается справедливой и в этом случае.

2. После сложения может получиться, что $M(R, R') = 0$; на основании замечания1 из этого следует, что совокупность двух пар $(F_1, F_1', F_2, F_2') \sim 0$.

Теорема 2. *Две пары, имеющие равные моменты, эквивалентны.*

Пусть на тело в плоскости I действует пара (F_1, F_1') с моментом M_1. Покажем, что эту пару можно заменить другой парой (F_2, F_2'), расположенной в плоскости II, если только ее момент M_2 равен M_1. Прежде всего, заметим, что плоскости I и II должны быть параллельны, в частности, они могут совпадать. Действительно, из параллельности моментов M_1 и M_2 (в пашем случае $M_1 = M_2$) следует, что плоскости действия пар, перпендикулярные моментам, также параллельны. Введем в рассмотрение новую пару $(F_3,F_3^{'})$ и приложим ее вместе с парой $(F_2,F_2^{'})$ к телу, расположив обе пары в плоскости II. Для этого согласно аксиоме 2 нужно подобрать пару $(F_3,F_3^{'})$ с моментом M_3 так, чтобы приложенная система сил $(F_2,F_2^{'},F_3,F_3^{'})$ была уравновешена. Это можно сделать, например, следующий образом: положим F_3=-$F_1^{'}$ и $F_3^{'}$=-F_1 и совместим точки приложения этих сил с проекциями A_1 и B_1 точек A и B на плоскость II (см. рис. 21).

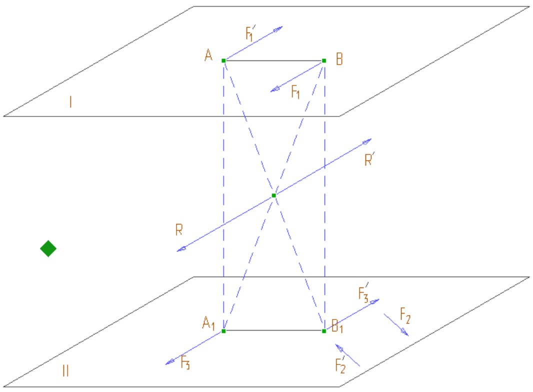


Рис. 21

В соответствии с построением будем иметь: M_3 = —M_1 или, учитывая что M_1= M_2,

$$M_2+M_3=0$$

$$(F_1,F_1^{'}) \sim (F_1,F_1^{'},F_2,F_2^{'},F_3,F_3^{'}). \qquad (38)$$

$$(F_1,F_1^{'},F_3,F_3^{'}) \sim (R,R^{'}) \sim 0.$$

$$(F_1,F_1^{'},F_2,F_2^{'},F_3,F_3^{'}) \sim (F_2,F_2^{'}). \qquad (39)$$

Сравнивая соотношения (38) и (39), получим $(F_1,F_1^{'}) \sim (F_2,F_2^{'})$, что и требовалось доказать. Из этой теоремы следует, что пару сил можно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия, переносить в параллельную плоскость; наконец, в паре можно менять одновременно силы и плечо, сохраняя лишь направление вращения пары и модуль ее момента $(F_1h_1=F_2h_2)$.

В дальнейшем мы будем широко пользоваться такими эквивалентными преобразованиями пары.

<u>Теорема 3.</u> *Две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре, момент которой равен сумме моментов двух данных пар.*

Пусть пары $(F_1,F_1^{'})$ и $(F_2,F_2^{'})$ расположены в пересекающихся плоскостях I и II соответственно. Пользуясь следствием теоремы 2, приведем обе пары к плечу AB (рис.22), расположенному на линии пересечения плоскостей I и II. Обозначим транспонированные пары через $(Q_1,Q_1^{'})$ и $(Q_2,Q_2^{'})$. При этом должны выполнятся равенства:

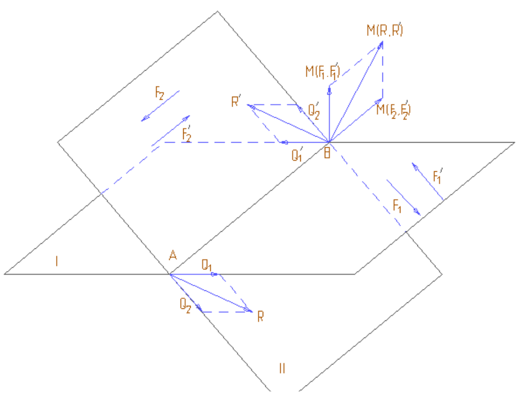


Рис. 22

$M_1=M(Q_1,Q_1^{'})=M(F_1,F_1^{'})$ и $M_2=M(Q_2,Q_2^{'})=M(F_2,F_2^{'})$.

Сложим по аксиоме 3 силы, приложенные в точках A и B соответственно. Тогда получим $R=Q_1+Q_2$ и $R=Q_1^{'}+Q_2^{'}$. Учитывая, что $Q_1^{'}$=-Q_1 и $Q_2^{'}$=-Q_2, получим: R=-$R^{'}$. Таким образом, мы доказали, что система двух пар эквивалентна одной паре (R,R').

Найдем момент M этой пары. Имеем $M(R,R')=\overline{BA}\times R$, но $R=Q_1+Q_2$ и, следовательно,

$M(R,R')=\overline{BA}\times(Q_1+Q_2)=\overline{BA}\times Q_1+\overline{BA}\times Q_2=M(Q_1,Q_1')+M(Q_2,Q_2')=M(F_1,F_1')+M(F_2,F_2')$, или $M=M_1+M_2$.

Лемма о параллельном переносе силы.

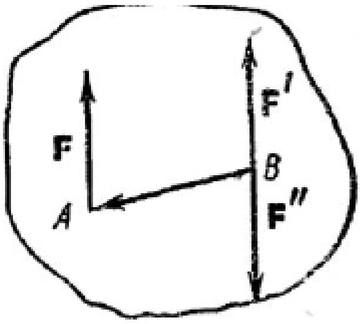


Рис. 23

Сила, приложенная в какой-либо точке твердого тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

Пусть в точке A твердого тела приложена сила F (рис. 23). Приложим теперь в точке B тела систему двух сил F' и F^2-, эквивалентную нулю, причем выбираем F'=F (следовательно, F"=–F). Тогда сила F~(F, F', F"), так как (F',F")~0. Но, с другой стороны, система сил (F, F', F") эквивалентна силе F' и паре сил (F, F"); следовательно, сила F эквивалентна силе F' и паре сил (F, F"). Момент пары (F, F") равен $M=M(F,F")=BA\times F$, т.е. равен моменту силы F относительно точки B $M=M_B(F)$. Таким образом, лемма о параллельном переносе силы доказана.

Основная теорема статики. *Произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы и пары сил. Сила равна главному вектору системы сил и приложена в произвольно выбранной точке (центре приведения), момент пары равен главному моменту системы сил относительно этой точки.*

Доказательство. Пусть точка O − центр приведения. Пользуясь доказанной леммой, перенесем силу $\vec{F}_1$ в точку O, добавляя при этом пару с моментом $\vec{M}_1: \vec{F}_1'=\vec{F}_1, \vec{M}_1=\vec{M}_0(\vec{F}_1)$. Аналогично перенесем в точку O остальные силы. В результате получим систему сходящихся в точке O сил $\vec{F}_k'=\vec{F}_k, k=1,2,\ldots,n$ и систему пар сил с моментами $\vec{M}_k=\vec{M}_0(\vec{F}_k), k=1,2,\ldots,n$. По теореме о существовании равнодействующей системы сходящихся сил их можно заменить одной силой $\vec{R}=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k$, равной главному вектору. Систему пар по теореме о сложении пар можно заменить одной парой, момент которой равен главному моменту $\vec{M}_0=\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_0(\vec{F}_k)$.

Из основной теоремы статики вытекает условие равновесия произвольной пространственной системы сил.

Для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенной к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент системы равнялись нулю:

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0.$$

Проектируя эти равенства на оси координат, получаем условие равновесия в аналитической форме.

Для равновесия произвольной пространственной системы сил, приложенной к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на три координатные оси и суммы моментов всех сил относительно этих осей были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k) = 0, \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Теорема Вариньона. В некоторых случаях при определении момента силы возникают трудности в расчете плеча силы.

Решение вопроса упрощает **теорема Вариньона**, согласно которой *момент равнодействующей системы сил относительно какого-либо центра равен геометрической сумме моментов составляющих систему сил относительно того же центра.*

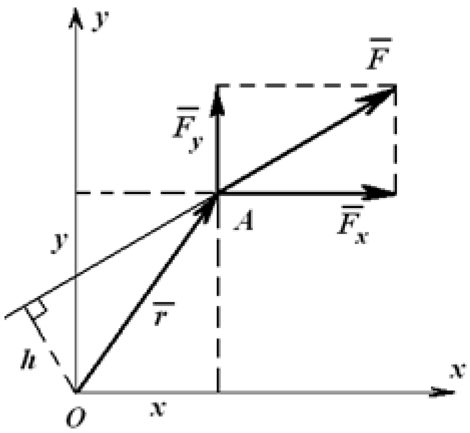


Рис. 24

Например, момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки $\boldsymbol{O}$ можно определить как алгебраическую сумму моментов сил $\boldsymbol{F_x}$ и $\boldsymbol{F_y}$ (на которые можно разложить силу $\boldsymbol{F}$) относительно той же точки $\boldsymbol{O}$ (рис. 24). То есть

$$\boldsymbol{M_o(F) = -Fh = -F_x y + F_y x},$$

где $\boldsymbol{F_x}$, $\boldsymbol{F_y}$, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – проекции на оси координат силы $\boldsymbol{F}$ и радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$.

Динамика точки

Динамика точки. Основные понятия и определения.

В разделе кинематики исследовалось движение тел без учета причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В разделе динамики решается более сложная и важная задача. Определяется движение тела под действием сил приложенных к нему, с учетом внешних и внутренних условий, влияющих на это движение, включая самих материальных тел.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Понятие о силе, как о величине, характеризующей меру механического взаимодействия материальных тел, было введено в статике. Но при этом в статике мы, по существу, считали все силы постоянными. Между тем, на движущееся тело наряду с постоянными силами (постоянной, например, можно считать силу тяжести) действуют обычно силы переменные, модули и направления которых при движении тела изменяются.

Как показывает опыт, переменные силы могут определенным образом зависеть *от времени, от положения тела и от его скорости.* В частности, от времени зависит сила тяги электровоза при постепенном выключении или включении реостата; от положения тела зависит сила упругости пружины; от скорости движения зависят силы сопротивления среды (воды, воздуха).

К понятию об инертности тел мы приходим, сравнивая результаты действия одной и той же силы на разные материальные тела. Опыт показывает, что если одну и ту же силу приложить к двум разным, свободным от других воздействий покоящимся телам, то в общем случае по истечении одного и того же промежутка времени эти тела пройдут разные расстояния и будут иметь разные скорости.

Инертность и представляет собой *свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил.* Если, например, при действии одинаковых сил изменение скорости первого тела происходит медленнее, чем второго, то говорят, что первое тело является более инертным, и наоборот.

Количественной мерой инертности данного тела является физическая величина, называемая массой тела. В механике масса m рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого данного тела.

В общем случае движение тела зависит не только от его суммарной массы и приложенных сил; характер движения может еще зависеть от формы тела, точнее от взаимного расположения образующих его частиц (т. е. от распределения масс).

Чтобы при первоначальном изучении динамики иметь возможность отвлечься от учета влияния формы тел (распределения масс), вводится понятие о материальной точке.

Материальной точкой называют материальное тело (тело, имеющее массу), размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

Практически данное тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда расстояния, проходимые точками тела при его движении, очень велики по сравнению с размерами самого тела. Кроме того, как будет показано в динамике системы *поступательно* движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе всего тела.

Наконец, материальными точками можно считать частицы, на которые мы будем мысленно разбивать любое тело при определении тех или иных его динамических характеристик.

Точку будем называть *изолированной*, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

Первый закон Ньютона (аксиома инерции). Сила.

Если на материальную точку не действует сила, то она сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Система, состоящая из одной материальной точки, называется изолированной материальной точкой.

Аксиома инерции: Существуют такие системы отсчёта, относительно которых изолированная материальная точка движется прямолинейно или сохраняет состояние покоя.

Масса. Второй закон Ньютона.

Второй закон Ньютона устанавливает связь между материальной точкой, силой, приложенной к ней и возникающим при этом ускорением.

Если m – масса материальной точки, а w – её ускорение в инерциальной системе отсчёта, то, согласно второму закону Ньютона,

$$mw = F,$$

где F сила, приложенная к точке.

Третий закон Ньютона (аксиома взаимодействия материальных точек).

Если одна материальная точка действует на вторую, то и вторая из них действует на первую, причём силы, приложенные к каждой из них, равны по величине, и направлены вдоль прямой, соединяющие эти точки, в противоположенные стороны.

Задачи динамики для свободной и несвободной материальной точки.

Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие: 1) зная закон движения точки, определить действующую на нее силу *(первая задача динамики);* 2) зная действующие на точку силы, определить закон движения точки *(вторая* или *основная задача динамики).*

Решаются обе эти задачи с помощью уравнений, выражающих основной закон динамики, так как эти уравнения связывают ускорение $\vec{a}$ т.е. величину, характеризующую движение точки, и действующие на нее силы.

В технике часто приходится сталкиваться с изучением *несвободного* движения точки, т.е. со случаями, когда точка, благодаря наложенным на нее связям, вынуждена двигаться по заданной неподвижной поверхности или кривой.

Несвободной материальной точкой называется точка, свобода движения которой ограничена.

Тела, ограничивающие свободу движения точки, называются *связями.*

Пусть связь представляет собой поверхность какого-либо тела, по которой движется точка. Тогда координаты точки должны удовлетворять уравнению этой поверхности, которое называется уравнением связи.

$$f(x, y, z) = 0$$

Если точка вынуждена двигаться по некоторой линии, то уравнениями связи являются уравнения этой лини.

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad f_2(x, y, z) = 0$$

Таким образом, движение несвободной материальной точки зависит не только от приложенных к ней активных сил и начальных условий, но так же от имеющихся связей. При этом значения начальных параметров должны удовлетворять уравнениям связей.

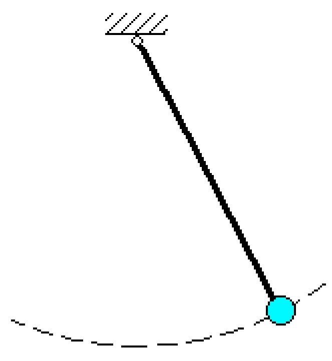
Связи бывают двухсторонние или удерживающие и односторонние или неудерживающие.

Связь называется двухсторонней если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме равенств, определяющих кривые или поверхности в пространстве на которых должна находится точка.

Пример. Материальная точка подвешена на стержне длины l.

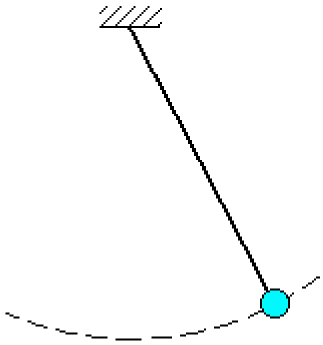
Уравнение связи имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$



Связь называется односторонней если, накладываемые ею на координаты точки ограничения выражаются в форме неравенств. Односторонняя связь препятствует перемещению точки лишь в одном направлении и допускает ее перемещение в других направлениях.

Пример. Материальная точка подвешена на нити длины l.
Уравнение связи имеет вид:
$x^2 + y^2 + z^2 \leq l^2$



В случаях несвободного движения точки, как и в статике, будем при решении задач исходить из *аксиомы связей (принцип освобождаемости от связей)*, согласно которой *всякую несвободную материальную точку можно рассматривать как свободную, отбросив связь и заменив ее действие реакцией этой связи* $\vec{N}$. Тогда основной закон динамики для несвободного движения точки примет вид:

$$m\bar{a} = \sum F_k^a + \bar{N},$$

где F_k^a -действующие на точку активные силы.

Пусть на точку действует несколько сил. Составим для неё основное уравнение динамики: $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}_i$. Перенесём все члены в одну сторону уравнения и запишем так: $\Sigma\vec{F}_i - m\vec{a} = 0$ или $\Sigma\vec{F}_i + \vec{F}_i^{\text{ин}} = 0$.

Это уравнение напоминает условие равновесия сходящихся сил. Поэтому можно сделать вывод, что, если к движущейся материальной точке приложить её силу инерции, то точка будет находиться в равновесии. (Вспомним, что на самом деле сила инерции не приложена к материальной точке и точка не находится в равновесии.) Отсюда следует метод решения таких задач, который называется методом кинетостатики:

Если к силам, действующим на точку, добавить ее силу инерции, то задачу можно решать методами статики, составлением уравнений равновесия.

Первая задача динамики для несвободного движения будет обычно сводиться к тому, чтобы, зная движение точки и действующие на нее активные силы, определить реакцию связи.

Дифференциальные уравнения движения точки

С помощью дифференциальных уравнений движения решается вторая задача динамики. Правила составления таких уравнений зависят от того, каким способом хотим определить движение точки.

1) Определение движения точки координатным способом.

Рассмотрим свободную материальную точку, движущуюся под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, .., \vec{F}_n$. Проведем неподвижные координатные оси *Oxyz* (рис.1). Проектируя обе части равенства $ma = \sum F_k$ на эти оси и учитывая, что $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ и т.д., получим *дифференциальные уравнения криволинейного движения точки* в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}.$$

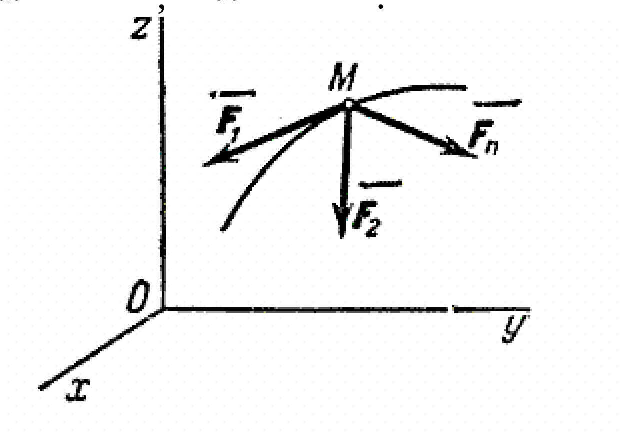


Рис.1

Так как действующие на точку силы могут зависеть от времени, от положения точки и от ее скорости, то правые части уравнений могут содержать время *t*, координаты точки *x, y, z* и проекции ее скорости $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}$. При этом в правую часть каждого из уравнений могут входить все эти переменные.

Чтобы с помощью этих уравнений решить основную задачу динамики, надо, кроме действующих сил, знать еще начальные условия, т.е. положение и скорость точки в начальный момент. В координатных осях *Oxyz* начальные условия задаются в виде: при $t = 0$

$$\begin{cases} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \\ v_x = v_{x0}, \quad v_y = v_{y0}, \quad v_z = v_{z0} \end{cases}.$$

Зная действующие силы, после интегрирования уравнений найдем координаты *x, y, z* движущейся точки, как функции времени *t,* т.е. найдем закон движения точки.

2) Определение движения точки естественным способом.

Координатным способом обычно определяют движение точки, не ограниченные какими-либо условиями, связями. Если на движение точки наложены ограничения, на скорость или координаты, то определить такое движение координатным способом совсем не просто. Удобнее использовать естественный способ задания движения.

Определим, например, движение точки по заданной неподвижной линии, по заданной траектории (рис. 2).

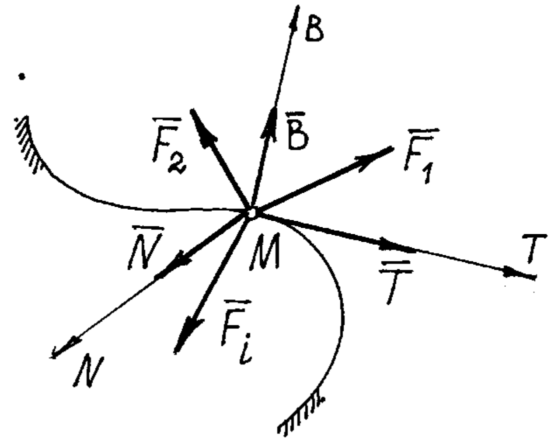


Рис.2

На точку M кроме заданных активных сил $\vec{F}_i$, действует реакция линии. Показываем составляющие реакции $\vec{R}$ по естественным осям $\vec{N}, \vec{T}, \vec{B}.$

Составим основное уравнение динамики $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i + \vec{N} + \vec{T} + \vec{B}$ и спроектируем его на естественные оси

$$\left.\begin{aligned} ma_n &= \sum F_{in} + N, \\ ma_\tau &= \sum F_{i\tau} + T, \\ ma_B &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned}\right\}$$

Так как $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho}, \ a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \ddot{s}, \quad a_b = 0,$ то получим дифференциальные уравнения движения, такие

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\upsilon^2}{\rho} &= \sum F_{in} + N, \\ m\ddot{s} &= \sum F_{i\tau} + T, \\ 0 &= \sum F_{ib} + B. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь сила $\vec{T}$ - сила трения. Если линия, по которой движется точка, гладкая, то T = 0 и тогда второе уравнение будет содержать только одну неизвестную – координату s:

$m\ddot{s} = \sum F_{i\tau}$.

Решив это уравнение, получим закон движения точки $s = s(t)$, а значит, при необходимости, и скорость и ускорение. Первое и третье уравнения (1) позволят найти реакции $\vec{N}$ и $\vec{B}$.

Относительное движение материальной точки

В предыдущем параграфе показано было как определяется движение точки относительно неподвижной системы отсчета, абсолютное движение.

Нередко приходится исследовать движение материальной точки относительно системы, которая сама движется и довольно сложным образом.

Точка M (рис.3) под действием некоторых сил $\vec{F}_i$ совершает сложное движение. Абсолютное определяется координатами x, y, z, относительное – координатами x_1, y_1, z_1.

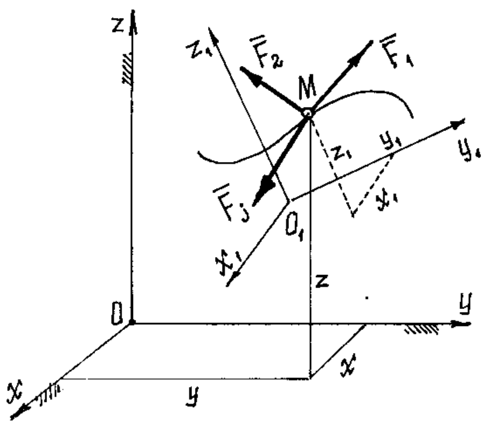


Рис.3

Составим основное уравнение динамики для точки $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$, где абсолютное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$. Поэтому уравнение будет таким $m(\vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c) = \sum \vec{F}_i$ или $m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_i - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$.

Но $(-m\vec{a}_e) = \vec{F}_e^{\text{ин}}$ - переносная сила инерции, $(-m\vec{a}_c) = \vec{F}_c^{\text{ин}}$ - кориолисова сила инерции. Поэтому основное уравнение динамики для относительного движения запишем так

6. $$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{F}_e^{\text{ин}} + \vec{F}_c^{\text{ин}}. \qquad (2)$$

Спроектировав это векторное равенство на подвижные оси x_1, y_1, z_1, имея в виду, что проекции вектора ускорения на оси – есть вторые производные от соответствующих координат по времени, получим дифференциальные уравнения относительного движения

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= \sum X_i + X_e^{\text{ин}} + X_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{y}_1 &= \sum Y_i + Y_e^{\text{ин}} + Y_c^{\text{ин}}, \\ m\ddot{z}_1 &= \sum Z_i + Z_e^{\text{ин}} + Z_c^{\text{ин}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Сравнивая эти уравнения с дифференциальными уравнениями абсолютного движения, замечаем, что *относительное движение материальной точки определяется такими же методами, что и абсолютное, надо лишь кроме обычных сил учесть переносную силу инерции и кориолисову силу инерции.*

Если переносное движение поступательное, равномерное и прямолинейное, т.е. подвижная система инерциальная, то ускорение $\vec{a}_e = 0$ и $\vec{a}_c = 0$. Значит $\vec{F}_e^{\text{ин}} = 0, \quad \vec{F}_c^{\text{ин}} = 0$ и дифференциальное уравнение (3) будет точно совпадать с дифференциальным уравнением абсолютного движения. Следовательно, движение точки во всех инерциальных системах описывается аналогичными законами (отличаются только постоянными интегрирования, зависящими от начальных условий).

Поэтому невозможно установить, наблюдая за движением точки, движется система поступательно, равномерно и прямолинейно или находится в покое. Этот вывод впервые был сделан Г.Галилеем и называется его именем – *принцип относительности Галилея*.

Общие теоремы динамики точки

Для решения многих задач динамики, особенно в динамике системы, вместо метода интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более удобным пользоваться так называемыми *общими теоремами,* являющимися следствиями основного закона динамики.

Значение общих теорем состоит в том, что они устанавливают наглядные зависимости между основными динамическими характеристиками движения материальных тел и открывают тем самым новые возможности исследования движений механических систем, широко применяемые в инженерной практике. Кроме того, общие теоремы позволяют изучать отдельные, практически важные стороны данного явления, не изучая явление в целом. Наконец, применение общих теорем избавляет от необходимости проделывать для каждой задачи те операции интегрирования, которые раз и навсегда производятся при выводе этих теорем; тем самым упрощается процесс решения. Сейчас мы рассмотрим, как выглядят эти теоремы для одной материальной точки.

Количество движения точки

Основными динамическими характеристиками движения точки являются *количество движения* и *кинетическая энергия.*

Количеством движения точки называется векторная величина $m\vec{v}$ *равная произведению массы точки на вектор ее скорости.* Направлен вектор $m\vec{v}$ так же, как и скорость точки, т. е. по касательной к ее траектории.

Кинетической энергией (или живой силой) точки называется скалярная величина $mv^2/2$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

Необходимость введения двух динамических характеристик объясняется тем, что одной характеристикой нельзя охватить все особенности движения точки.

Например, зная количество движения автомобиля (т.е. величину $Q = mv$) а не величины m и v в отдельности) и действующую на него при торможении силу, можно определить, через сколько секунд автомобиль остановится, но по этим данным нельзя найти пройденный за время торможения путь. Наоборот, зная начальную кинетическую энергию автомобиля и тормозящую силу, можно определить тормозной путь, но по этим данным нельзя найти время торможения.

Импульс силы

Для характеристики действия, оказываемого на тело силой за некоторый промежуток времени, вводится понятие об импульсе силы. Введем сначала понятие об элементарном импульсе, т. е. об импульсе за бесконечно малый промежуток времени *dt. Элементарным импульсом силы* *называйся векторная величина* $d\vec{S}$ *, равная произведению вектора силы* $\vec{F}$ *на элементарный промежуток времени* dt

$$d\vec{S} = \vec{F}dt.$$

Направлен элементарный импульс по линии действия силы.

Импульс $\vec{S}$ любой силы $\vec{F}$ за конечный промежуток времени t_1 вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных импульсов:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F}dt.$$

Следовательно, *импульс силы за любой промежуток времени,* t_1 *равен определенному интегралу от элементарного импульса, взятому в пределах от 0 до* t_1.

В частном случае, если сила $\vec{F}$ и по модулю, и по направлению постоянна ($\vec{F}$ =const), будем иметь $\vec{S} = \vec{F}t_1$. Причем, в этом случае и модуль $S = Ft_1$. В общем случае модуль импульса может быть вычислен через его проекции.

Проекции импульса силы на прямоугольные декартовы оси координат равны:

$$\overline{S}_x = \int_0^{t_1} \overline{F}_x dt \qquad \overline{S}_y = \int_0^{t_1} \overline{F}_y dt \qquad \overline{S}_z = \int_0^{t_1} \overline{F}_z dt.$$

Единицей измерения импульса в СИ является – $1\,\text{Н} \cdot \text{с}$

Теорема об изменении количества движения точки

Так как масса точки постоянна, а ее ускорение $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$, то уравнение, выражающее основной закон динамики, можно представить в виде

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum \overline{F}_k.$$

Уравнение выражает одновременно теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения точки равна геометрической сумме действующих на точку сил.*

Проинтегрируем это уравнение. Пусть точка массы *m*, движущаяся под действием силы $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ (рис.4), имеет в момент *t*=0 скорость $\vec{v}_0$, а в момент t_1-скорость $\vec{v}_1$.

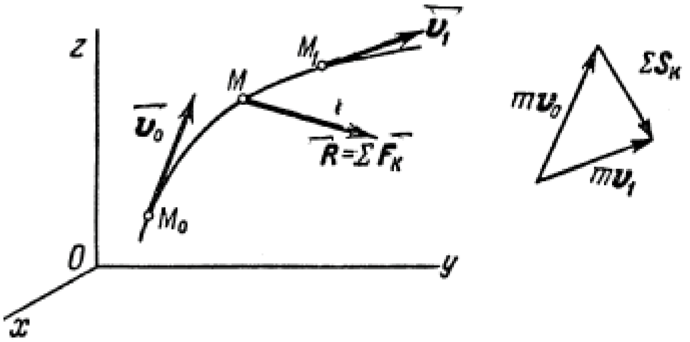


Рис.4

Умножим тогда обе части равенства на dt и возьмем от них определенные интегралы. При этом справа, где интегрирование идет по времени, пределами интегралов будут 0 и t_1, а слева, где интегрируется скорость, пределами интеграла будут соответствующие значения скорости v_0 и v_1. Так как интеграл от $d(mv)$ равен mv, то в результате получим:

$$m\bar{v}_1 \cdot m\bar{v}_0 = \sum\int \bar{F}_K dt.$$

Стоящие справа интегралы представляют собою импульсы действующих сил. Поэтому окончательно будем иметь:

$$m\bar{v}_1 \cdot m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k.$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения точки в конечном виде: *изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени (*рис. 15).

При решении задач вместо векторного уравнения часто пользуются уравнениями в проекциях.

$$\begin{cases} mv_{1X} - mv_{0X} = \sum S_{KX}; \\ mv_{1Y} - mv_{0Y} = \sum S_{KY}; \\ mv_{1Z} - mv_{0Z} = \sum S_{KZ}. \end{cases}$$

В случае прямолинейного движения, происходящего вдоль оси *Ox* теорема выражается первым из этих уравнений.

§ 2. Работа. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Работа силы. Мощность.

Для характеристики действия, оказываемого силой на тело при некотором его перемещении, вводится понятие о работе силы.

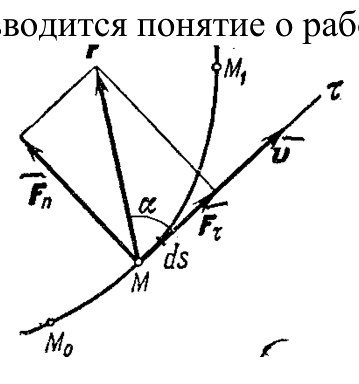


Рис.5

При этом работа характеризует то действие силы, которым определяется изменение *модуля* скорости движущейся точки.

Введём сначала понятие об элементарной работе силы на бесконечно малом перемещении ds. Элементарной работой силы $\vec{F}$ (рис.5) называется скалярная величина:

$dA = F_\tau ds$ **,**

где F_τ - проекция силы $\vec{F}$ на касательную к траектории, направленную в сторону перемещения точки, а ds -бесконечно малое перемещение точки, направленное вдоль этой касательной.

Данное определение соответствует понятию о работе, как о характеристике того действия силы, которое приводит к изменению модуля скорости точки. В самом деле, если разложить силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_\tau$ и $\vec{F}_n$, то изменять модуль скорости точки будет только составляющая $\vec{F}_\tau$, сообщающая точке касательное ускорение Составляющая же $\vec{F}_n$ или изменяет направление вектора скорости v (сообщает точке нормальное ускорение), или, при несвободном движение изменяет давление на связь. На модуль скорости составляющая $\vec{F}_n$ влиять не будет, т.е., как говорят, сила $\vec{F}_n$ «не будет производить работу».

Замечая, что $F_\tau = F\cos\alpha$, получаем:

$$dA = Fds\cos\alpha\,. \qquad (4)$$

Таким образом, элементарная работа силы равна проекции силы на направление перемещения точки, умноженной на элементарное перемещение ds или элементарная работа силы равна произведению модуля силы на элементарное перемещение ds и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения.

Если угол α острый, то работа положительна. В частности, при $\alpha = 0$ элементарная работа $dA = Fds$.

Если угол α тупой, то работа отрицательна. В частности, при $\alpha = 180^0$ элементарная работа $dA = -Fds$.

Если угол $\alpha = 90^0$, т.е. если сила направлена перпендикулярно перемещению, то элементарная работа силы равна нулю.

Найдем аналитическое выражение элементарной работы. Для этого разложим силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$ по направлениям координатных осей (рис.6; сама сила $\vec{F}$ на чертеже не показана).

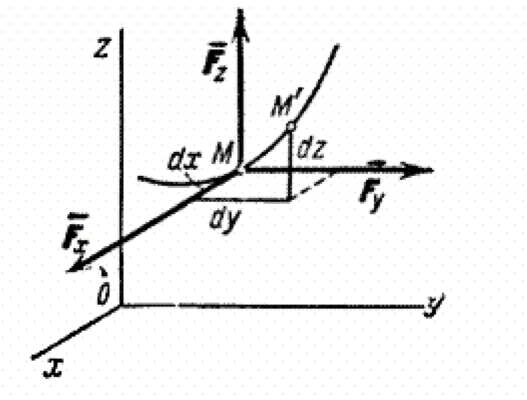


Рис.6

Элементарное перемещение $MM' = ds$ слагается из перемещений dx, dy, dz вдоль координатных осей, где *x, y, z* - координаты точки *M*. Тогда работу силы $\vec{F}$ на перемещении ds можно вычислить как сумму работ её составляющих $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$, $\vec{F}_z$ на перемещениях dx, dy, dz.

Но на перемещении dx совершает работу только составляющая $\vec{F}_x$, причем её работа равна $F_x dx$. Работа на перемещениях dy и dz вычисляется аналогично. Окончательно находим: $dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$.

Формула дает аналитическое выражение элементарной работы силы.

Работа силы на любом конечном перемещении M_0M_1 вычисляется как интегральная сумма соответствующих элементарных работ и будет равна:

$$A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} F\tau ds$$

или

$$A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Следовательно, *работа силы на любом перемещении* M_0M_1 *равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.* Пределы интеграла соответствуют значениям переменных интегрирования в точках M_0 и M_1.

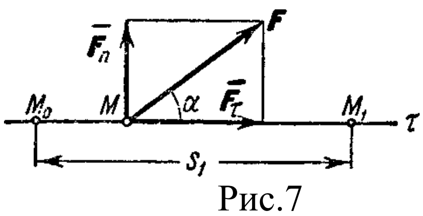


Рис.7

Если величина F_τ постоянна (F_τ = const), то и обозначая перемещение M_0M_1 через s_1 получим: $A_{(M_0M_1)} = F_\tau s_1$.

Такой случай может иметь место, когда действующая сила постоянна по модулю и направлению (*F*= const), а точка, к которой приложена сила, движется прямолинейно (рис.7}. В этом случае $F_\tau = F\cos\alpha = const$ и работа силы $A_{(M_0M_1)} = Fs_1\cos\alpha$.

Единицей измерения работы в системе СИ является *джоуль* (1 дж= 1 нм).

Мощность.

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность

$$W = \frac{A}{t},$$

где *t* - время, в течение которого произведена работа *A*. В общем случае

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau V.$$

Следовательно, мощность равна произведению касательной составляющей силы на скорость движения.

Единицей измерения мощности в системе *СИ* является *ватт* (1 *вт*=1 *дж/сек).* В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила, равная 75 *кГм/сек* или 736 *вт.*

Работу, произведенную машиной, можно измерять произведением ее мощности на время работы. Отсюда возникла употребительная в технике единица измерения работы киловатт-час (1 *квт-ч* = $3{,}6\cdot 10^6$ *дж* ≈ 367100 *кГм).*

Из равенства $W = F_\tau V$ видно, что у двигателя, имеющего данную мощность *W,* сила тяги F_τ будет тем больше, чем меньше скорость движения *V*. Поэтому, например, на подъеме или на плохом участке дороги у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при полной мощности двигаться с меньшей скоростью и развивать большую силу тяги.

Потенциальная энергия

Часть пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от места положения точки, называется силовым полем.

Причем, эта сила определяется с помощью силовой функции u = u(x, y, z). Если она не зависит от времени, то такое поле называется стационарным. Если во всех точках она одинакова, то поле – однородное.

Если же проекции силы на декартовы оси есть частные производные от силовой функции по соответствующим координатам

$$X = \frac{\partial u}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial u}{\partial y},\quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad (5)$$

то такое поле называется потенциальным.

Вычислим работу силы потенциального поля при перемещении точки из положения M_1 в положение $M_{2.}$ (рис. 8).

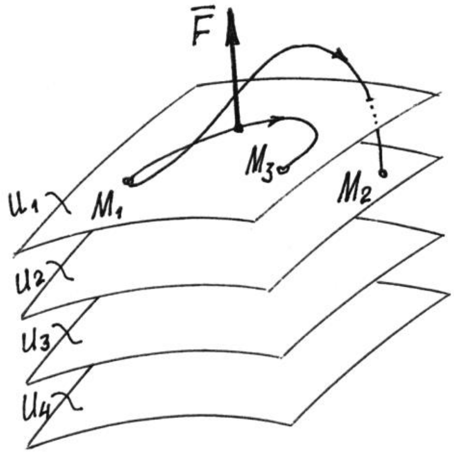


Рис.8

Элементарная работа, $dA = Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz = du$

Это есть полный дифференциал силовой функции.

Работа на конечном перемещении

$$A = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1, \tag{6}$$

где u_2 и u_1 – значения силовой функции в точках M_2 и M_1.

Следовательно, работа силы потенциального поля не зависит от траектории движения точки, а определяется лишь значениями силовой функции в начальном и конечном положениях точки.

Естественно, если точка вернется в начальное положение, работа силы $\vec{F}$ будет равна нулю. Работа окажется равной нулю и при переходе в другую точку M_3, если там значение силовой функции будет такое же, как и в начальном положении.

Нетрудно догадаться, что точки с одинаковыми значениями силовой функции будут образовывать целую поверхность. И что силовое поле – это слоеное пространство, состоящее из таких поверхностей (рис. 8). Эти поверхности называются *поверхностями уровня* или *эквипотенциальными поверхностями*. Уравнения их: $u(x, y, z)=C$ (C – постоянная, равная значению u в точках этой поверхности). А силовую функцию называют, соответственно, *потенциалом поля*.

Конечно, эквипотенциальные поверхности не пересекаются. Иначе существовали бы точки поля с неопределенным потенциалом.

Поскольку, при перемещении точки по эквипотенциальной поверхности работа силы $\vec{F}$ равна нулю, то вектор силы перпендикулярен поверхности.

Выберем среди этих поверхностей какую-нибудь одну и назовем ее нулевой поверхностью (положим у нее $u=u_0$).

Работа, которую совершит сила $\vec{F}$ при переходе точки из определенного места M на нулевую поверхность, называют потенциальной энергией точки в этом определенном месте M:

$$П = А = u_0 - u \quad (7)$$

Заметим, что потенциальная энергия в одной и той же точке поля зависит от выбора нулевой поверхности.

По (7) силовая функция $u = u_0 - П$. Поэтому проекции силы на декартовы оси, по (6), так как $u_0 = const$,

$$X = -\frac{\partial П}{\partial x};\quad Y = -\frac{\partial П}{\partial y};\quad Z = -\frac{\partial П}{\partial z} \quad (8)$$

и вектор силы $\vec{F} = -\left(\frac{\partial П}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial П}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial П}{\partial z}\cdot\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\,П$.

Рассмотрим несколько потенциальных полей.

1) *Поле силы тяжести.*

Вблизи поверхности Земли сила тяжести во всех точках одинакова $\vec{F} = \vec{P}$, равна весу тела. Значит, это силовое поле однородное. Так как при перемещении точки в горизонтальной плоскости работа силы равна нулю, то эквипотенциальными поверхностями будут горизонтальные плоскости (рис. 9), а уравнения их: $u = z = C$.

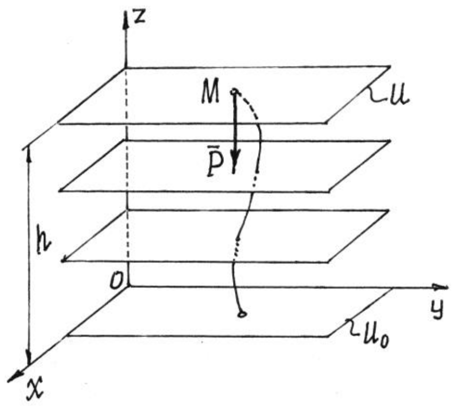


Рис.9

Если нулевой поверхностью назначить плоскость *xOy*, то потенциальная энергия точки в положении *M* будет равна работе силы тяжести:

$П = А = Ph$.

2) Поле упругой силы.

При деформации упругого тела, например пружины, появляется сила. То есть около этого тела возникает силовое поле, силы которого пропорциональны деформации тела и направлены в сторону недеформированного состояния. У пружины – в точку M_0, где находится конец недеформированной пружины (рис. 10).

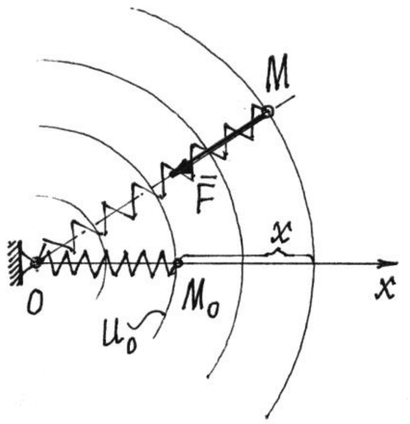


Рис.10

Если перемещать конец пружины так, чтобы длина ее не изменялась, то работа упругой силы $\vec{F}$ будет равна нулю. Значит эквипотенциальными поверхностями являются сферические поверхности с центром в точке О.

Назначим нулевой поверхностью сферу, проходящую через точку M_0, через конец недеформированной пружины. Тогда потенциальная энергия пружины в положении M: $\Pi = A = \frac{1}{2}cx^2$.

При таком выборе нулевой поверхности потенциальная энергия всегда будет положительной (П>0), и в растянутом, и в сжатом состоянии.

Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Рассмотрим точку с массой m, перемещающуюся под действием приложенных к ней сил из положения M_0 , где она имеет скорость $\vec{v}_0$, в положение M_1 , где ее скорость равна $\vec{v}_1$.

Для получения искомой зависимости обратимся к уравнению $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$ выражающему основной закон динамики. Проектируя обе части этого равенства на касательную M_τ к траектории точки M, направленную в сторону движения, получим:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{kx}$$

Стоящую слева величину касательного ускорения можно представить в виде

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dV}{ds}V.$$

В результате будем иметь:

$$mV\frac{dV}{ds} = \sum F_{kx}.$$

Умножив обе части этого равенства на ds, внесем m под знак дифференциала. Тогда, замечая, что $\sum F_{k\tau}ds = dA_k$ где dA_k - элементарная работа силы F_k получим выражение теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$d(\frac{mV^2}{2}) = \sum dA_k$$.

Проинтегрировав теперь обе части этого равенства в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 и M_1, найдем окончательно:

$$\frac{mV_1^2}{2} \cdot \frac{mV_0^2}{2} = \sum A(M_0 M_1)$$.

Уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечном виде: *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.*

Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов).

Из двух основных динамических характеристик, величина $m\vec{v}$ является векторной. Иногда при изучении движения точки вместо изменения самого вектора $m\vec{v}$ оказывается необходимым рассматривать изменение его момента. Момент вектора $m\vec{v}$ относительно данного центра O или оси z обозначается $m_0(m\vec{v})$ или $m_z(m\vec{v})$ и называется соответственно *моментом количества движения* или *кинетическим моментом* точки относительно этого центра (оси). Вычисляется момент вектора $m\vec{v}$ так же, как и момент силы. При этом вектор $m\vec{v}$ считается приложенным к движущейся точке. По модулю $m_0|m\vec{v}| = mvh$, где h - длина перпендикуляра, опущенного из центра O на направление вектора $m\vec{v}$

Теорема моментов относительно центра. Найдем для материальной точки, движущейся под действием силы F (рис.26), зависимость между моментами векторов $m\vec{v}$ и $\vec{F}$ относительно какой-нибудь неподвижного центра O. В конце было показано, что $m_0(F) = \vec{r} \times \vec{F}$.

Аналогично $m_0(m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{V}$.

При этом вектор $m_0(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и вектор $\vec{F}$, а вектор $m_0(m\vec{v})$ - перпендикулярно плоскости, проходящей через центр O и вектор $m\vec{v}$.

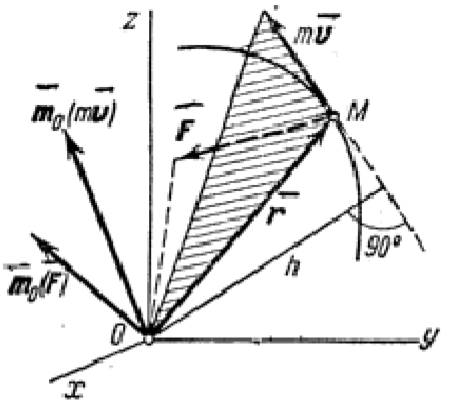


Рис.11

Дифференцируя выражение $m_0(m\vec{v})$ по времени, получаем:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{V})=(\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{V})+(\bar{r}\times m\frac{d\bar{V}}{dt})=(\bar{V}\times m\bar{V})+(\bar{r}\times m\bar{a}).$$

Но $\bar{V}\times m\bar{V}=0$, как векторное произведение двух параллельных векторов, а $m\vec{a}=\vec{F}$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{V})=\bar{r}\times\bar{F}$$

или $$\frac{d}{dt}[\bar{m}_0(m\bar{V})]=\bar{m}_0(\bar{F}).$$

В результате мы доказали следующую теорему моментов относительно центра: *производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь неподвижного центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.* Аналогичная теорема имеет место для моментов вектора $m\vec{v}$ силы $\vec{F}$ относительно какой-нибудь оси *z*, в чем можно убедиться, проектируя обе части равенства $\frac{d}{dt}[\bar{m}_0(m\bar{V})]=\bar{m}_0(\bar{F})$ на эту ось. Математическое выражение теоремы моментов относительно оси дается формулой

Прямолинейные колебания точки

Свободные колебания без учета сил сопротивления.

Учение о колебаниях составляет основу ряда областей физики и техники. Хотя колебания, рассматриваемые в различных областях, например в механике, радиотехнике, акустике и др., отличаются друг от друга по своей физической природе, основные законы этих колебаний во всех случаях остаются одними и теми же. Поэтому изучение механических колебаний является важным не только по той причине, что такие колебания очень часто имеют место в технике, но и вследствие того, что результаты, полученные при изучении механических колебаний, могут быть использованы для изучения и уяснения колебательных явлений в других областях.

Начнем с изучения свободных колебаний точки без учета сил сопротивления. Рассмотрим точку *M,* движущуюся прямолинейно под действием одной только *восстанавливающей силы* $\overline{F}$, направленной к неподвижному центру *O* и пропорциональной расстоянию от этого центра. Проекция силы $\overline{F}$ на ось *Ox* (рис.12) будет равна

F_x=-*cx*.

Рис.12

Сила $\overline{F}$, как видим, стремится вернуть точку в равновесное положение *O*, где $F=0$; отсюда и наименование «восстанавливающая» сила. Примером такой силы является сила упругости. Коэффициент *c* пропорциональности называется *жесткостью упругого элемента*.

Найдем закон движения точки *M.* Составляя дифференциальное уравнение движения получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx.$$

Деля обе части равенства на *m* и вводя обозначение

$$\frac{c}{m}=k^2,$$

приведем уравнение к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0.$$

Уравнение представляет собою *дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления.* Решение этого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка ищут в виде $x=e^{nt}$. Полагая $x=e^{nt}$, получим для определения *n* так называемое характеристическое уравнение, имеющее в данном случае вид $n^2 + k^2 = 0$. Поскольку корни этого характеристического уравнения являются чисто мнимыми ($n_{1,2} = \pm ik$), то, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение имеет вид

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Если вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные a и α, такие, что $C_1 = a\cos\alpha$, $C_2 = a\sin\alpha$, то мы получим $x = a(\sin kt\cos\alpha + \cos kt\sin\alpha)$ или $x = a\sin(kt+\alpha)$.

Это другой вид решения, в котором постоянными интегрирования являются a и α. Им удобнее пользоваться для общих исследований.

Скорость точки в рассматриваемом движении равна

$$V_x = \dot{x} = ak\cos(kt+\alpha).$$

Колебания, совершаемые точкой по закону $x = a\sin(kt+\alpha)$ называются *гармоническими колебаниями.*

Всем характеристикам этого движения можно дать наглядную кинематическую интерпретацию. Рассмотрим точку B, движущуюся равномерно по окружности радиуса a из положения B_0 определяемого углом $\angle DOB = \alpha$ (рис.13).

Пусть постоянная угловая скорость вращения радиуса OB равна k. Тогда в произвольный момент времени t угол $\varphi = \angle DOB = \alpha + kt$ и проекция M точки B на диаметр, перпендикулярный к DE, движется по закону $x = a\sin(kt+\alpha)$, где $x=OM$, т.е. совершает гармонические колебания.

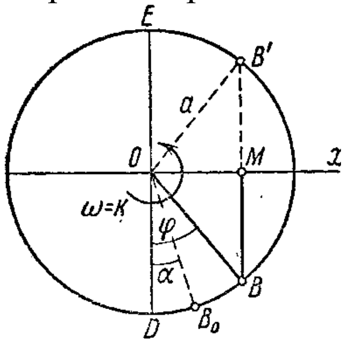


Рис.13

Величина a, равная наибольшему отклонению точки M от центра колебаний, называется *амплитудой колебаний.* Величина $\varphi = \alpha + kt$ называется *фазой колебаний.*

Величина k, совпадающая с угловой скоростью вращения радиуса OB, показанного на рис.4 называется *круговой частотой колебаний.*

Промежуток времени T (или τ), в течение которого точка совершает одно полное колебание, называется *периодом колебаний.*

По истечении периода фаза изменяется на 2π. Следовательно, должно $kT = 2\pi$ откуда период

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Величина υ, обратная периоду и определяющая число колебаний, совершаемых за одну секунду, называется *частотой колебаний*

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}.$$

Отсюда видно, что величина k отличается от T только постоянным множителем 2π. В дальнейшем мы обычно для краткости частотой колебаний будем называть величину k.

Значения a и α определяются по начальным условиям. Считая при t=0 $x = x_0$, $V_x = V_0$ получим $x_0 = a\sin\alpha$ и $\frac{V_0}{k} = a\cos\alpha$. Отсюда, складывая сначала квадраты этих равенств, а затем деля их почленно, найдем:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}, \quad tg\alpha = \frac{kx_0}{V_0}.$$

Отметим, что свободные колебания при отсутствии сопротивления обладают следующими свойствами: 1) амплитуда и начальная фаза колебаний *зависят* от начальных условий; 2) частота k, а следовательно, и период T колебаний от начальных условий *не зависят.*

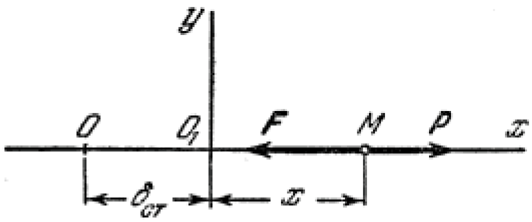


Рис.14

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки. Пусть на точку *M,* кроме восстанавливающей силы *F*, направленной к центру *O*, действует еще постоянная по модулю и направлению сила *P* (рис.14). Величина силы *F* по прежнему пропорциональна расстоянию от центра *O*, т.е. $F = c \cdot OM$.

Очевидно, что в этом случае положением равновесия точки *M* будет центр O_1 отстоящий от O на расстоянии $OO_1 = \delta_{cm}$, которое определяется равенством $c \cdot \delta_{cm} = P$ или

$$\delta_{cm} = \frac{P}{c}.$$

Величину δ_{cm} назовем *статическим отклонением* точки. Примем центр O_1 за начало отсчета и направим координатную ось O_1x в сторону действия силы $\vec{P}$. Тогда $F_x = -c(x + \delta_{cm})$, $P_x = P$. В результате, составляя дифференциальное уравнение движения и учитывая, что согласно равенству $c \cdot \delta_{cm} = P$, будем иметь:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Отсюда заключаем, что *постоянная сила P не изменяет характера колебаний, совершаемых точкой под действием восстанавливающей силы F, а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы P на величину статического отклонения* δ_{cm}.

Понятие о фазовой плоскости

Обычное описание движения системы с одной степенью свободы в виде зависимости координаты от времени $x = x(t)$ не является единственно возможным. В ряде случаев, особенно при изучении нелинейных механических колебаний, определенными достоинствами обладает представление движения на фазовой плоскости.

Состояние системы в любой фиксированный момент времени t определяется парой соответствующих значений x и $v = \dot{x}$ и может быть представлено изображающей (фазовой) точкой в плоской декартовой системе координат x, v, если откладывать по оси абсцисс координату x, а по оси ординат – скорость v. Такая плоскость называется *фазовой.*

В процессе движения рассматриваемой системы величины x и v изменяются и, соответственно, меняется положение изображающей точки на фазовой плоскости. *Геометрическое место изображающих точек для данного движения называется фазовой траекторией.*

Для построения фазовой траектории при заданном законе движения $x = x(t)$ нужно путем дифференцирования образовать выражение скорости $v = \dot{x}(t)$, а затем исключить время из двух уравнений: $x = x(t)$, $v = \dot{x}(t)$.

Функция $v = v(x)$ и описывает фазовую траекторию данного движения.

Фазовая плоскость особенно удобна для представления колебательных процессов, когда координата и скорость не выходят за известные пределы; поэтому вся картина движения даже в течение неограниченного времени занимает ограниченную часть фазовой плоскости.

Совокупность фазовых траекторий, которая описывает все возможные движения данной системы, называется фазовой диаграммой (фазовым портретом) данной системы.

Для свободных гармонических колебаний $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$, а $v(t) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \alpha)$. Исключая из этих выражений время t получаем

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega \cdot A}\right)^2 = 1.$$

Это уравнение эллипса (рис.15). Его полуоси зависят от амплитуды и круговой частоты.

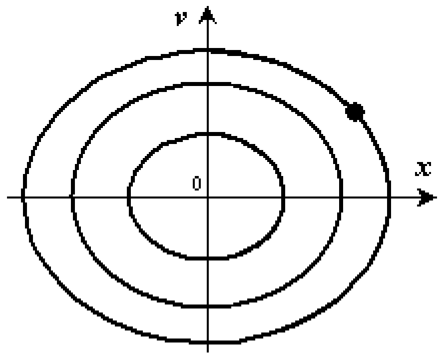


Рис.15

Свободные колебания в поле постоянной силы.

На материальную точку кроме упругой силы, действует сила постоянная по величине и направлению.

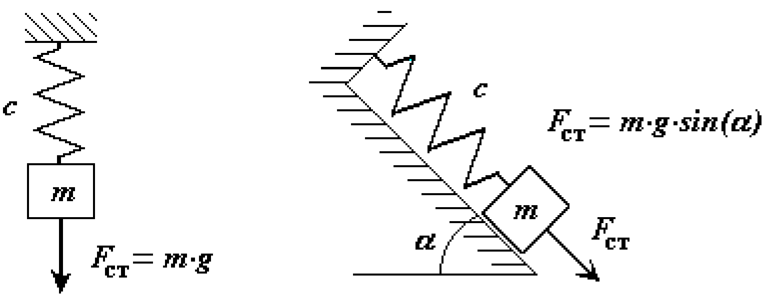


Рис.16

Обозначим ее $F_{ст}$ (рис.16), тогда дифференциальное уравнение движения точки примет вид:

$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = F_{ст}$ или $\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = \frac{F_{ст}}{m}$, где $\omega^2 = \frac{c}{m}$

Начальные условия имеют вид:

при $t = 0$: $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Это неоднородное дифференциальное уравнение. Его решение складывается из решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного дифференциального уравнения $x_{частн.}(t) = x_{ст} = \frac{F_{ст}}{c}$.

Решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{F_{ст}}{c}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega \cdot C_1 \cdot sin(\omega \cdot t) + \omega \cdot C_2 \cdot cos(\omega \cdot t)$$

$$C_1 = x_0 - \frac{F_{ст}}{c} \qquad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_{ст}}{c} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) + \frac{F_{ст}}{c},$$

Если начало отсчета координаты сдвинуть на $x_{cm} = \dfrac{F_{cm}}{c}$, $x_1 = x - x_{cm}$ (рис.17), тогда в новой системе отсчета решение будет иметь вид:

$x_1(t) = x_{10} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \dfrac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t)$, $x_1(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

$A = \sqrt{{x_{10}}^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}}$ - амплитуда колебаний;

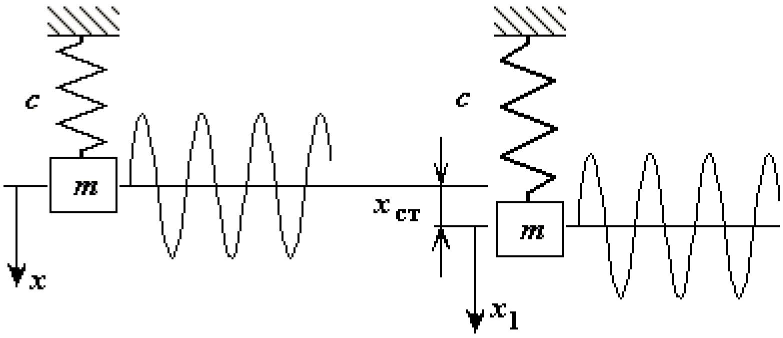


Рис.17

Параллельное включение упругих элементов.

Масса закреплена с помощью двух упругих элементов расположенных параллельно (рис.18).

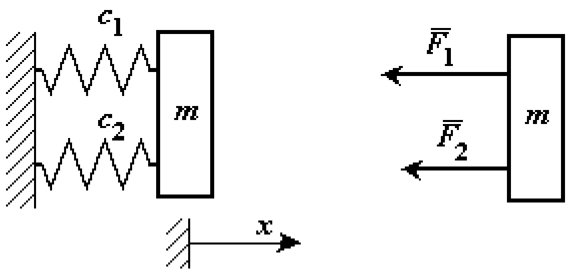


Рис.18

Сместим массу на расстояние *x*.

$F_1 = -c_1 \cdot x$, $F_2 = -c_2 \cdot x$,

$F = F_1 + F_2 = -(c_1 + c_2) \cdot x = -c_\Sigma \cdot x$

Результирующая жесткость упругих элементов расположенных параллельно равна сумме жесткостей этих элементов.

Последовательное включение упругих элементов.

Масса закреплена с помощью двух упругих элементов расположенных последовательно (рис.19).

Рис.19

Сместим массу на расстояние x. В упругих элементах возникает восстанавливающая (упругая) сила F, одинаковая для обоих элементов (рис.19). Первый упругий элемент изменит длину на x_1, второй - на x_2.

$x = x_1 + x_2$. $F = -c_1 \cdot x_1$, $F = -c_2 \cdot x_2$, $F = -c_\Sigma \cdot x$.

$x = x_1 + x_2 = -\frac{F}{c_1} - \frac{F}{c_2} = -\frac{F}{c_\Sigma}$, следовательно $\frac{1}{c_\Sigma} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$

Обратная величина результирующей жесткости упругих элементов расположенных последовательно равна сумме обратных величин жесткостей этих элементов.

Обратная величина жесткости упругого элемента называется податливостью этого элемента.

$u = \frac{1}{c}$, $u_1 = \frac{1}{c_1}$, $u_2 = \frac{1}{c_2}$, $u = u_1 + u_2$

Результирующая податливость упругих элементов расположенных последовательно равна сумме податливостей этих элементов.

Вынужденные колебания. Резонанс.

Рассмотрим важный случай колебаний, возникающих, когда на точку, кроме восстанавливающей силы $\bar{F}$, действует еще периодически изменяющаяся со временем сила $\bar{Q}$, проекция которой на ось Ox равна

$$Q = Q_0 \sin pt.$$

Эта сила называется *возмущающей силой,* а колебания, происходящие при действии такой силы, называются *вынужденными.* Величина P является *частотой возмущающей силы.*

Возмущающей силой может быть сила, изменяющаяся со временем и по другому закону. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда Q_x определяется указанным равенством. Такая возмущающая сила называется *гармонической.*

Рассмотрим движение точки, на которую, кроме восстанавливающей силы $\bar{F}$, действует только возмущающая сила $\bar{Q}$. Дифференциальное уравнение движения в этом случае

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q_0 \sin pt.$$

Разделим обе части этого уравнения на m и положим

$$\frac{Q_0}{m} = P_0.$$

Тогда, учитывая обозначение, приведем уравнение движения к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = P_0 \sin pt.$$

Уравнение является *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления.* Его решением, как известно из теории дифференциальных уравнений, будет $x = x_1 + x_2$, где x_1 - общее решение уравнения без правой части, а x_2 - какое-нибудь частное решение полного уравнения.

Полагая, что *p* = *k,* будем искать решение x_2 в виде

$$x_2 = A\sin pt,$$

где *A* - постоянная величина, которую надо подобрать так, чтобы равенство обратилось в тождество. Подставляя значение x_2 и его второй производной в уравнение будем иметь:

$$-pA\sin pt + k^2 A\sin pt = P_0 \sin pt.$$

Это равенство будет выполняться при любом *t,* если $A(k^2 - p^2) = P_0$ или

$$A = \frac{P_0}{k^2 - p^2}.$$

Таким образом, искомое частное решение будет

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin pt.$$

Так как $x = x_1 + x_2$, а общее решение имеет окончательно вид

$$x = a\sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2}\sin pt,$$

где *a* и α - постоянные интегрирования, определяемые по начальным данным. Решение показывает, что колебания точки складываются в этом случае из: 1) колебаний с амплитудой *a* (зависящей от начальных условий) и частотой *k,* называемых *собственными колебаниями,* и 2) колебаний с амплитудой А (не зависящей от начальных условий) и частотой *p,* которые называются *вынужденными колебаниями*

Частота *p* вынужденных колебаний, как видно, равна частоте возмущающей силы. Амплитуду этих колебаний, если разделить числитель и знаменатель на k^2, можно представить в виде:

$$A = \frac{P_0}{\left|k^2 - p^2\right|} = \frac{\delta_0}{\left|1 - (\frac{p}{k})^2\right|},$$

где $\delta_0 = \frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c}$, т. е. δ_0 есть величина статического отклонения точки под действием силы Q_0. Как видим, *A* зависит от отношения частоты *p* возмущающей силы к частоте *k* собственных колебаний.

Подбирая различные соотношения между *p* и *k*, можно получить вынужденные колебания с разными амплитудами. При $p = 0$ амплитуда равна δ_0 (или близка к этой величине). Если величина *p* близка к *k,* амплитуда *A* становится очень большой. Когда $p >> k$, амплитуда *A* становится очень малой (практически близка к нулю).

Резонанс. В случае, когда $p = k$**,** т.е. когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, имеет место так называемое явление резонанса. Размахи вынужденных колебаний при резонансе будут со временем неограниченно возрастать так, как показано на рис.20.

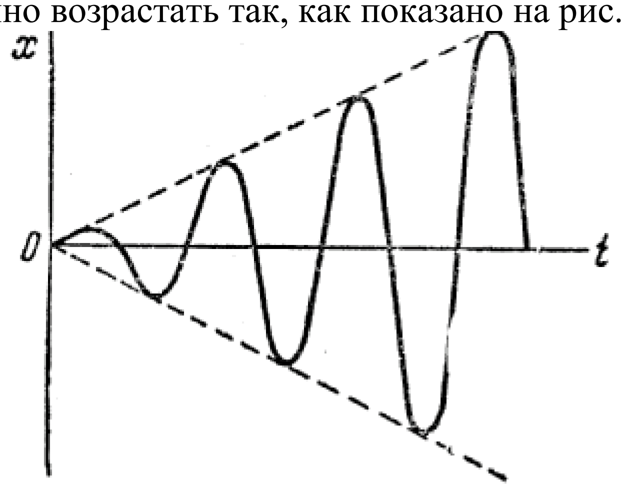


Рис.20

Свободные колебания с вязким сопротивлением.

Существуют устройства (демпферы), которые создают силу пропорциональную относительной скорости $F_Д = -b \cdot \dot{x}$ (рис.21). Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом демпфирования или коэффициентом вязкого сопротивления.

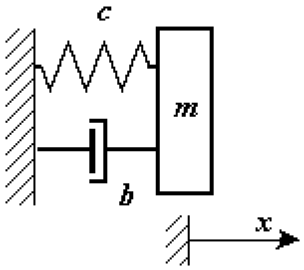


Рис.21

Дифференциальное уравнение движения точки с массой *m*, закрепленной на упругом элементе и демпфере имеет вид:

$m \cdot x = F_У + F_Д$

$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0$ или $\ddot{x} + 2 \cdot n + \omega^2 \cdot x = 0$, $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$, $2 \cdot n = \dfrac{b}{m}$.

Начальные условия имеют вид: $t = 0$, $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 + 2 \cdot n \cdot \lambda + \omega^2 = 0$.

Корни характеристического уравнения равны: $\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$

Рассмотрим возможные решения:

1-й случай $n < \omega$, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$, $\lambda_{1,2} = -n \pm i \cdot \omega_1$

Решение имеет вид:

$$x(t) = A \cdot e^{-n \cdot t} \cdot sin(\omega_1 \cdot t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + n \cdot x_0)^2}{\omega_1^{\ 2}}}$$, $A \cdot e^{-n \cdot t}$ - условная амплитуда затухающих колебаний;

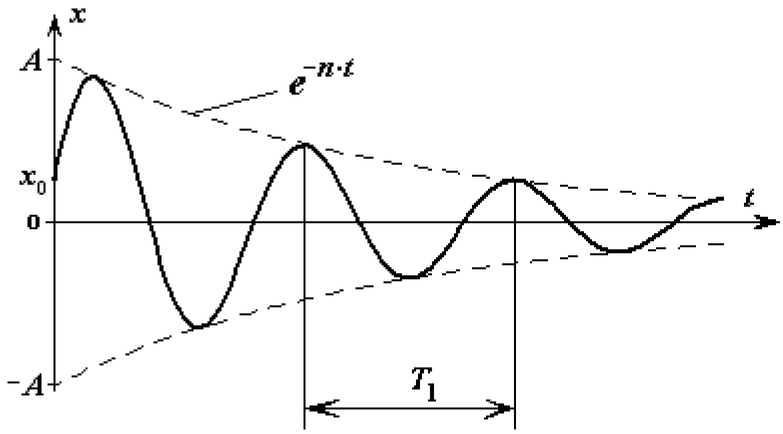


Рис.22

ω_1 - круговая или циклическая частота затухающих колебаний. Измеряется в рад/сек.

α - фазовый угол (или просто фаза).

$$tg(\alpha) = \frac{x_0 \cdot \omega_1}{v_0 + n \cdot x_0}$$

$$T_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} > T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$ - период затухающих колебаний (рис.22).

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2 \cdot \pi}$$ - частота колебаний (1 колеб/сек=1 Гц)

$$D = \frac{x_i^{\max}}{x_{i+1}^{\max}} = e^{n \cdot T_1}$$ - декремент колебаний.

$\eta = \ln(D) = n \cdot T_1$ - логарифмический декремент колебаний.

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой ω_1 и амплитудой, величина которой все время убывает.

Движение изображающей точки на фазовой плоскости показано на рис. 23.

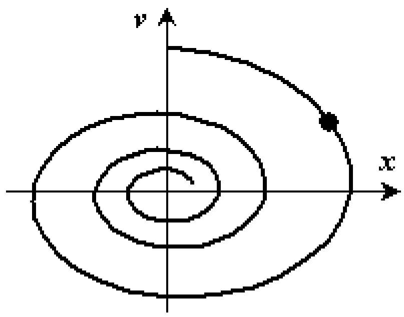


Рис.23

2-й случай $n > \omega$, $\omega_2 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$, $\lambda_{1,2} = -n \pm \omega_2$

Решение имеет вид:

$x(t) = e^{-n \cdot t} \cdot (C_1 \cdot e^{\omega_2 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\omega_2 \cdot t})$

Материальная точка совершает затухающее неколебательное движение (рис.24).

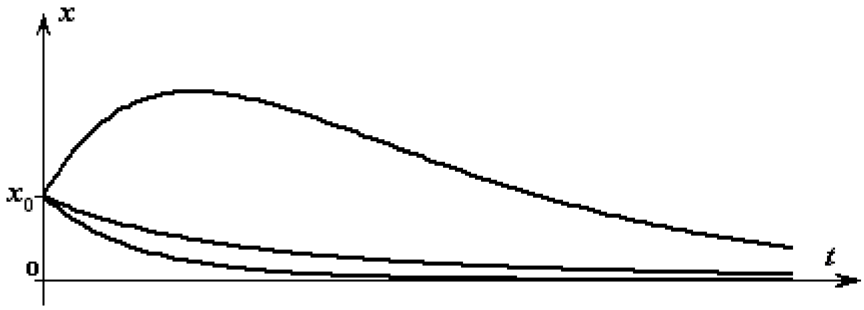


Рис.24

3-й случай $n = \omega$, $\lambda_{1,2} = -n$ (два одинаковых корня)

Решение имеет вид:

$x(t) = e^{-n \cdot t} \cdot (C_1 \cdot t + C_2)$

Материальная точка так же совершает затухающее неколебательное движение (рис.39).

Вынужденные колебания с вязким сопротивлением.

Рассмотрим движение точки под действием трех сил: одна восстанавливающая сила, вторая - сила демпфирования (сила вязкого сопротивления), а третья зависит от времени. $F(t) = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ - гармоническая возмущающая сила.

F_0 - амплитуда возмущающей силы.

ω - круговая частота возмущающей силы.

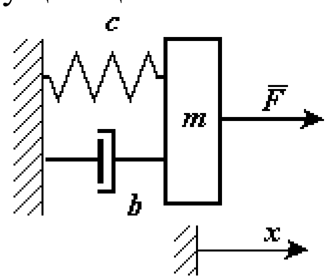


Рис.25

Дифференциальное уравнение движения точки с массой *m*, закрепленной на упругом элементе и демпфере (рис.25), под действием возмущающей гармонической силы имеет вид:

$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$

Задавая решение уравнения в виде: $x(t) = x_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$ и подставляя его в дифференциальное уравнение получим алгебраическое уравнение для определения амплитуды вынужденных колебаний.

$$-m \cdot \omega^2 \cdot x_0 + i \cdot \omega \cdot b \cdot x_0 + c \cdot x_0 = F_0 .$$

Разделим его на массу и обозначим $\Omega^2 = \dfrac{c}{m}$, $2 \cdot n = \dfrac{b}{m}$, тогда $x_0 \cdot \left(\Omega^2 - \omega^2 + i \cdot \omega \cdot 2 \cdot n\right) = F_0 / m$ и окончательно

$$x_0 = \frac{F_0 / m}{\Omega^2 - \omega^2 + i \cdot \omega \cdot 2 \cdot n}$$ - амплитуда вынужденных колебаний.

Ω - частота собственных колебаний

Материальная точка колеблется с амплитудой x_0 и частотой возмущающей силы ω.

Построим зависимость модуля амплитуды $|x_0|$ от частоты возмущающей силы ω (рис.26).

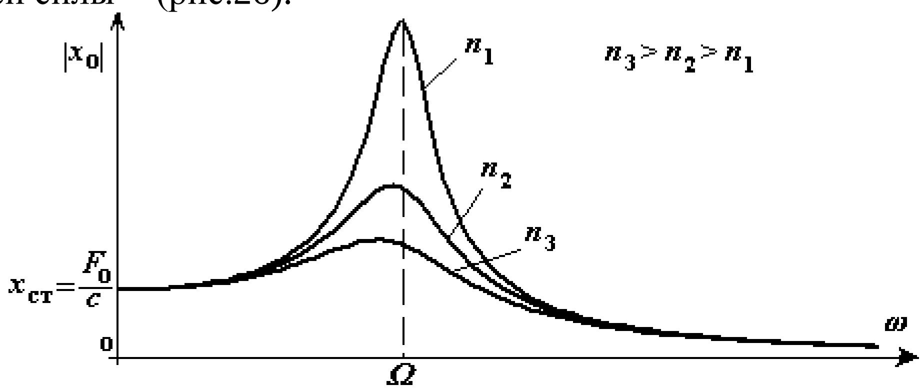


Рис.26

Модуль амплитуды вынужденных колебаний возрастает от $x_{cm} = \dfrac{F_{cm}}{c}$ (при $\omega = 0$) до некоторой величины, а затем убывает до нуля (при $\omega \to \infty$).

Динамика системы и твердого тела

Механическая система. Силы внешние и внутренние.

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки (или тела) зависит от положения и движения всех остальных.

Материальное абсолютно твердое тело мы также будем рассматривать как систему материальных точек, образующих это тело и связанных между собой так, что расстояния между ними не изменяются, все время остаются постоянными.

Классическим примером механической системы является солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения. Другим примером механической системы может служить любая машина или механизм, в которых все тела связаны шарнирами, стержнями, тросами, ремнями и т.п. (т.е. различными геометрическими связями). В этом случае на тела системы действуют силы взаимного давления или натяжения, передаваемые через связи.

Совокупность тел, между которыми нет никаких сил взаимодействия (например, группа летящих в воздухе самолетов), механическую систему не образует.

В соответствии со сказанным, силы, действующие на точки или тела системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.

Внутренними называются силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы. Будем обозначать внешние силы символом - $\vec{F}^e$, а внутренние - $\vec{F}^i$.

Как внешние, так и внутренние силы могут быть в свою очередь или *активными*, или *реакциями связей.*

Реакции связей или просто – *реакции*, это силы которые ограничивают движение точек системы (их координаты, скорость и др.). В статике это были силы заменяющие связи. В динамике для них вводится более общее определение.

Активными или задаваемыми силами называются все остальные силы, все кроме реакций.

Необходимость этой классификации сил выяснится в следующих главах.

Разделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем. Например, если рассматривать движение всей солнечной системы в целом, то сила притяжения Земли к Солнцу будет внутренней; при изучении же движения Земли по её орбите вокруг Солнца та же сила будет рассматриваться как внешняя.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

1. *Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равняется нулю.* В самом деле, по третьему закону динамики любые две точки системы (рис.27) действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами $\vec{F}_{12}^{\,i}$ и $\vec{F}_{21}^{\,i}$, сумма которых равна нулю. Так как аналогичный результат имеет место для любой пары точек системы, то

$$\sum \vec{F}_k^{\,i} = 0.$$

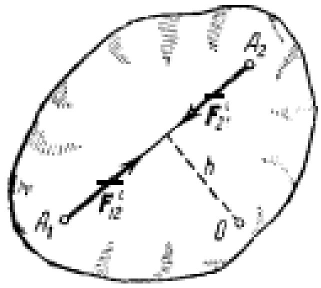


Рис.27

2. *Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси равняется нулю.* Действительно, если взять произвольный центр *O*, то из рис.7 видно, что $\vec{m}_0(\vec{F}_{12}^{\,i}) + \vec{m}_0(\vec{F}_{21}^{\,i}) = 0$. Аналогичный результат получится при вычислении моментов относительно оси. Следовательно, и для всей системы будет:

$$\sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^{\,i}) = 0 \text{ или } \sum m_x(\vec{F}_k^{\,i}) = 0.$$

Из доказанных свойств не следует однако, что внутренние силы взаимно уравновешиваются и не влияют на движение системы, так как эти силы приложены к *разным* материальным точкам или телам и могут вызывать взаимные перемещения этих точек или тел. Уравновешенными внутренние силы будут тогда, когда рассматриваемая система представляет собою абсолютно твердое тело.

Масса системы. Центр масс.

Движение системы, кроме действующих сил, зависит также от её суммарной массы и распределения масс. *Масса системы* равна арифметической сумме масс всех точек или тел, образующих систему

$$M = \sum m_k.$$

В однородном поле тяжести, для которого $g = const$, вес любой частицы тела будет пропорционален ее массе. Поэтому о распределении масс в теле можно судить по положению его центра тяжести. Преобразуем формулы, определяющие координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum P_k x_k}{P}, \quad y_C = \frac{\sum P_k y_k}{P}, \quad Z_C = \frac{\sum P_k Z_k}{P}. \qquad (9)$$

В полученные равенства входят только массы m_k материальных точек (частиц), образующих тело, и координаты x_k, y_k, z_k этих точек.

Следовательно, положение точки C (x_C, y_C, z_C) действительно характеризует распределение масс в теле или в любой механической системе, если под m_k, x_k, y_k, z_k понимать соответственно массы и координаты точек этой системы.

Геометрическая точка C, координаты которой определяются указанными формулами, *называется центром масс* или *центром инерции системы.*

Положение центра масс определяется его радиус-вектором $\vec{r}_c$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M},$$

где $\vec{r}_k$ - радиус-векторы точек, образующих систему.

Хотя положение центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, находящегося в однородном поле тяжести, понятия эти не являются тождественными. Понятие о центре тяжести, как о точке, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести, по существу имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие же о центре масс, как о характеристике распределения масс в системе, имеет смысл для любой системы материальных точек или тел, причем, это понятие сохраняет свой смысл независимо от того, находится ли данная система под действием каких-нибудь сил или нет.

Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции.

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например (рис.28), если расстояния h от оси Oz каждого из одинаковых шаров A и B увеличить на одну и ту же величину, то положение центра масс системы не изменится, а распределение масс станет другим, и это скажется на движении системы (вращение вокруг оси Oz при прочих равных условиях будет происходить медленнее).

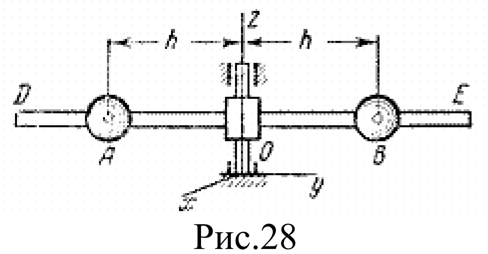


Рис.28

Поэтому в механике вводится еще одна характеристика распределения масс - момент инерции. *Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси Oz (или осевым моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси*

$$I_Z = \sum m_k h_k^2$$

Из определения следует, что момент инерции тела (или системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Заметим также, что момент инерции тела – это геометрическая характеристика тела, не зависящая от его движения.

Осевой момент инерции играет при вращательном движении тела такую же роль, какую масса при поступательном, т.е. что *осевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении.*

Согласно формуле момент инерции тела равен сумме моментов инерции всех его частей относительно той же оси. Для одной материальной точки, находящейся на расстоянии h от оси, $I_Z = mh^2$.

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции. *Радиусом инерции* тела относительно оси Oz называется линейная величина $\rho_И$, определяемая равенством

$$I_Z = M \cdot \rho_и^2,$$

где M - масса тела. Из определения следует, что радиус инерции геометрически равен расстоянию от оси Oz той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

В случае сплошного тела, разбивая его на элементарные части, найдем, что в пределе сумма, стоящая в равенстве $I_Z = \sum m_k h_k^2$, обратится в интеграл. В результате, учитывая, что $dm = \rho dV$, где ρ - плотность, а V-объем, получим

$$I_Z = \int_{(V)} h^2 dm \quad \text{или} \quad I_Z = \int_{(V)} \rho h^2 dV$$

Интеграл здесь распространяется на весь объем V тела, а плотность ρ и расстояние h зависят от координат точек тела.

Моменты инерции некоторых однородных тел:

1.Тонкий однородный стержень длины l и массы M. Вычислим его момент инерции относительно оси Az, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец A (рис. 29).

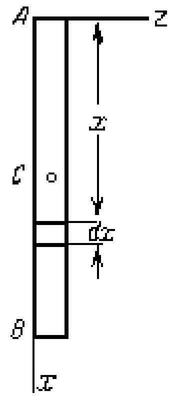


Рис.29

Направим вдоль AB координатную ось Ax. Тогда для любого элементарного отрезка длины dx величина $h=x$, а масса $dm = p_1 dx$, где $p_1 = M/l$ - масса единицы длины стержня. В результате

$$I_A = \int_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \rho_1 \frac{l^3}{3}.$$

Заменяя здесь ρ_1 его значением, найдем окончательно:

$$I_A = \frac{1}{3}Ml^3$$

2. Тонкое круглое однородное кольцо радиуса *R* и массы *M.* Найдем его момент инерции относительно оси *Cz*, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр (рис.34,*а).* Так как все точки кольца находятся от оси *Cz* на расстоянии h_k=*R*, то

$$I_C = \sum m_k R^2 = (\sum m_k)R^2 = MR^2.$$

Следовательно, для кольца $I_C = MR^2$.

Очевидно, такой же результат получится для момента инерции тонкой цилиндрической оболочки массы *M* и радиуса *R* относительно ее оси.

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиуса *R* и массы *M.* Вычислим момент инерции круглой пластины относительно оси *Cz*, перпендикулярной к пластине и проходящей через ее центр (см. рис.30,*а*). Для этого выделим элементарное кольцо радиуса *r* и ширины *dr* (рис.30,*б*).

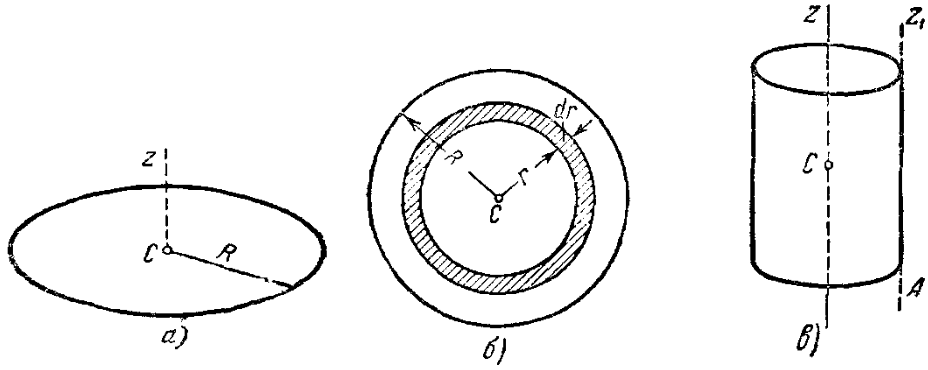


Рис.30

Площадь этого кольца равна $2\pi r dr$, а масса $dm = \rho_2 2\pi r dr$, где $\rho_2 = \dfrac{M}{\pi R^2}$ - масса единицы площади пластины. Тогда для выделенного элементарного кольца будет

$$dI_C = r^2 dm = 2\pi\rho_2 r^3 dr,$$

а для всей пластины $I_C = 2\pi\rho_2 \int\limits_0^R r^3 dr = \dfrac{1}{2}\pi\rho_2 R^4$. Заменяя здесь ρ_2 его значением, найдем окончательно $I_C = \dfrac{1}{2}MR^2$.

Такая же формула получится, очевидно, и для момента инерции I_z однородного круглого цилиндра массы *M* и радиуса *R* относительно его оси *Oz* (рис.30,*в*).

4. Прямоугольная пластина, конус, шар. Опуская выкладки, приведем формулы, определяющие моменты инерции следующих тел:

а) сплошная прямоугольная пластина массы *M* со сторонами *AB = a* и *BD = b* (ось *x* направлена вдоль стороны *AB*, ось *y* - вдоль *BD*):

$$I_X = \frac{1}{3}Mb^2, \quad I_Y = \frac{1}{3}Ma^2,$$

б) прямой сплошной круглый конус массы M с радиусом основания R (ось z направлена вдоль оси конуса):

$$I_Z = 0{,}3MR^2;$$

г) сплошной шар массы M и радиуса R (ось z направлена вдоль диаметра): $I_Z = 0{,}4MR^2$.

Моменты инерции тела относительно параллельных осей. Теорема Гюйгенса.

Моменты инерции данного тела относительно разных осей будут, вообще говоря, разными. Покажем, как зная момент инерции относительно какой-нибудь одной оси, проведенной в теле, найти момент инерции относительно любой другой оси, ей параллельной.

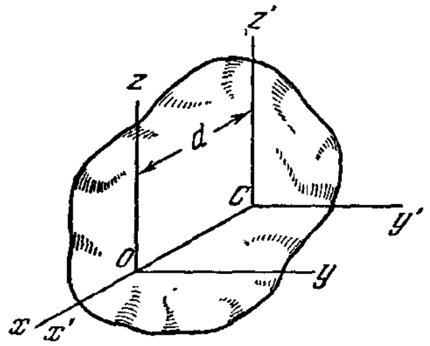


Рис.31

Проведем через центр масс C тела произвольные оси $Cx'y'z'$, а через любую точку O на оси Cx' - оси $Oxyz$, такие, что $Oy \| Cy'$, $Oz \| Cz'$ (рис. 35). Расстояние между осями Cz' и Oz обозначим через d. Тогда

$$I_{O_Z} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$I_{C_{Z''}} = \sum m_k (x'^2_k + y'^2_k),$$

но, как видно из рисунка, для любой точки тела $x_k = x'_k - d$ или $x_k^2 = x'^2_k + d^2 - 2x'_k d$, а $y_k = y'_k$. Подставляя эти значения x_k, y_k, в выражение для I_{OZ} и вынося общие множители d^2 и $2d$ за скобки, получим

$$I_{OZ} = \sum m_k (x'^2_k + y'^2_k) + (\sum m_k) d^2 - 2d(\sum m_k x'_k).$$

В правой части равенства первая сумма равна $I_{cz'}$, а вторая - массе тела M. Найдем значение третьей суммы. На основании формул для координат центра масс $\sum m_k x'_k = Mx'_C$.Так как в нашем случае точка C является началом координат, то $x_C = 0$ и, следовательно, $\sum m_k x'_k = 0$. Окончательно получаем:

$$I_{OZ} = I_{CZ} + Md^2.$$

Формула выражает следующую *теорему Гюйгенса*:

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной, проходящей через центр масс *тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями.*

Момент инерции тела относительно произвольной оси.

Найдем момент инерции тела относительно оси u, проходящей через некоторую точку O (рис. 32).

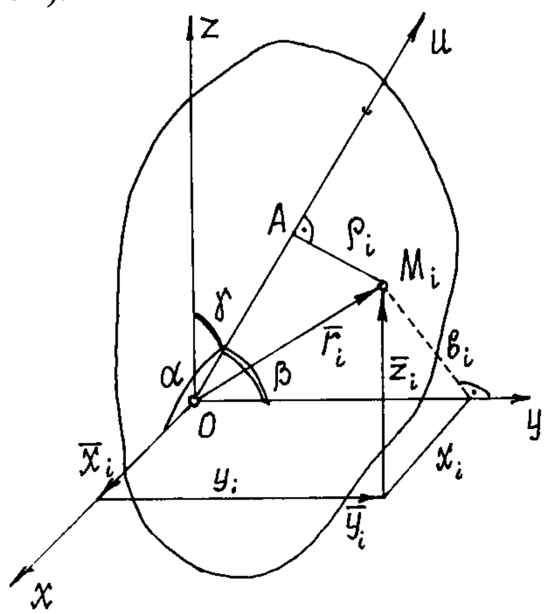


Рис.32

По определению момент инерции $I_u = \sum m_i \rho_i^2$.

Поместим в точку O начало координатных осей x, y, z. Из прямоугольного треугольника OAM_i следует $\rho_i^2 = r_i^2 - OA^2$, где $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. И так как радиус-вектор точки M_i : $\vec{r}_i = \vec{x}_i + \vec{y}_i + \vec{z}_i$, то, проектируя это равенство на ось u, получим $AO = x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma$ (α, β, γ - углы между осью u и осями x, y, z).

Как известно из тригонометрии $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Поэтому

$$\rho_i^2 = r_i^2 - OA^2 = r_i^2\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) - \left(x_i \cos\alpha + y_i \cos\beta + z_i \cos\gamma\right)^2 =$$
$$= x_i^2 \cos^2\alpha + x_i^2 \cos^2\beta + x_i^2 \cos^2\gamma + y_i^2 \cos^2\alpha + y_i^2 \cos^2\beta + y_i^2 \cos^2\gamma + z_i^2 \cos^2\alpha +$$
$$+ z_i^2 \cos^2\beta + z_i^2 \cos^2\gamma - x_i^2 \cos^2\alpha - y_i^2 \cos^2\beta - z_i^2 \cos^2\gamma - 2x_i y_i \cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2y_i z_i \cos\beta\cos\gamma - 2x_i z_i \cos\alpha\cos\gamma.$$

И, группируя подобные члены, содержащие косинусы одинаковых углов, получим:

$$\rho_i^2 = \left(y_i^2 + z_i^2\right)\cos^2\alpha + \left(x_i^2 + z_i^2\right)\cos^2\beta + \left(x_i^2 + y_i^2\right)\cos^2\gamma - 2x_i y_i \cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2y_i z_i \cos\beta\cos\gamma - 2x_i z_i \cos\alpha\cos\gamma.$$

Но $y_i^2 + z_i^2 = a_i^2;\ x_i^2 + z_i^2 = b_i^2;\ x_i^2 + y_i^2 = c_i^2;$ где a_i, b_i, c_i - расстояния от точки M_i до осей x, y, z, соответственно. Поэтому

$$I_u = \sum m_i \rho_i^2 = \left(\sum m_i a_i^2\right)\cos^2\alpha + \left(\sum m_i b_i^2\right)\cos^2\beta + \left(\sum m_i c_i^2\right)\cos^2\gamma -$$
$$-2\left(\sum m_i x_i y_y\right)\cos\alpha\cos\beta - 2\left(\sum m_i y_i z_y\right)\cos\beta\cos\gamma - 2\left(\sum m_i x_i z_y\right)\cos\alpha\cos\gamma$$

или $$I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cdot\cos\beta -$$
$$2I_{yz}\cos\beta\cdot\cos\gamma - 2I_{xz}\cos\alpha\cdot\cos\gamma,$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно осей координат; I_{xy}, J_{yz}, J_{xz} - *центробежные моменты инерции* относительно осей отмеченных в индексах.

Если два центробежных момента инерции, оба содержащих в индексах названия какой-нибудь одной оси, равны нулю, то эта ось называется *главной осью инерции*. Например, если $J_{yz} = 0$ *и* $J_{xz} = 0$, то ось z – главная ось инерции.

Так как все моменты инерции зависят от того, где находится точка O, от выбора начала координат, то обязательно надо указать для какой точки определены эти моменты инерции. Если начало координат взято в центре масс C, то все главные оси инерции называются *главными центральными осями инерции.*

Если в данной точке координатные оси являются главными осями инерции (центробежные моменты инерции относительно их равны нулю), то формула (2) упрощается:

$$I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\cos^2\beta + I_z\cos^2\gamma \; .$$

Иногда по некоторым признакам нетрудно найти главные оси инерции тела.

1. Если у однородного тела имеется ось симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Действительно. Направим координатную ось z по оси симметрии. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно отыскать точку с координатами ($-x_i$, $-y_i$, $-z_i$) и поэтому центробежные моменты инерции $I_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$ и $I_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$. Значит ось z – главная ось инерции, и центральная ось, т.к. центр масс, как известно, находится на оси симметрии. Причём, эта ось будет главной для любой точки расположенной на оси симметрии.

2. Если у однородного тела имеется плоскость симметрии, то любая ось перпендикулярная ей будет главной осью инерции для всех точек этой плоскости.

Направим ось z перпендикулярно плоскости симметрии из любой её точки O, назначив там начало координат. Тогда для каждой точки тела с координатами (x_i, y_i, z_i) можно найти симметричную ей точку с координатами (x_i, y_i, $-z_i$). Поэтому центробежные моменты инерции I_{xz} и I_{yz} будут равны нулю. Значит ось z – главная ось инерции.

Дифференциальные уравнения движения системы.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_k. Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных и реакций связей) через

$\vec{F}_k^e$, а равнодействующую всех внутренних сил - через $\vec{F}_k^i$. Если точка имеет при этом ускорение $\vec{a}_k$, то по основному закону динамики

$$m_k\vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

Аналогичный результат получим для любой точки. Следовательно, для всей системы будет:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ m_n\vec{a}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{array}\right\}$$

Эти уравнения, из которых можно определить закон движения каждой точки системы, называются *дифференциальными уравнениями движения системы* в векторной форме. Уравнения являются дифференциальными, так как $\vec{a}_k = \dfrac{d\vec{V}_k}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$; входящие в правые части уравнений силы будут в общем случае зависеть от времени, координат точек системы и их скоростей.

Проектируя на какие-нибудь координатные оси, мы можем получить дифференциальные уравнения движения системы в проекциях на эти оси.

Полное решение основной задачи динамики для системы состояло бы в том, чтобы, зная заданные силы, проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения и определить таким путем закон движения каждой из точек системы в отдельности.

Однако такой путь решения обычно не применяется по двум причинам. Во-первых, этот путь слишком сложен и почти всегда связан с непреодолимыми математическими трудностями. Во-вторых, в большинстве случаев при решении задач механики бывает достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы в целом, а не движение каждой из ее точек в отдельности. Эти суммарные характеристики определяются с помощью *общих теорем* динамики системы, к изучению которых мы и перейдем.

Основная роль уравнений состоит в том, что они, или следствия из них, являются исходными для получения соответствующих общих теорем.

Общие теоремы динамики механической системы: теоремы о движении центра масс механической системы и об изменении количества движения, теоремы об изменении кинетического момента и кинетической энергии, -являются следствием основного уравнения динамики. Данные теоремы рассматривают не движение отдельных точек и тел, входящих в механическую систему, а некоторые интегральные характеристики, такие как движение центра масс механической системы, ее количество движения, кинетический момент и кинетическую энергию. В результате из рассмотрения исключаются неизвестные внутренние силы, а в ряде случаев и реакции связей, что существенно упрощает решения задачи.

Основные теоремы динамики механических систем

Теорема о движении центра масс

В ряде случаев для определения характера движения системы (особенно твердого тела), достаточно знать закон движения ее центра масс. Например, если бросить камень в цель, совсем не нужно знать как он будет кувыркаться во время полета, важно установить попадет он в цель или нет. Для этого достаточно рассмотреть движение какой-нибудь точки этого тела.

Чтобы найти этот закон, обратимся к уравнениям движения системы и сложим почленно их левые и правые части. Тогда получим:

$$m_k \vec{a}_k = \Sigma \vec{F}_k^e + \Sigma \vec{F}_k^i.$$

Преобразуем левую часть равенства. Из формулы для радиус-вектора центра масс имеем:

$$\sum m_k \vec{r}_k = M \vec{r}_c.$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\sum m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2}$$

или

$$\sum m_k \vec{a}_k = M \vec{a}_c.$$

где $\vec{a}_c$ - ускорение центра масс системы. Так как по свойству внутренних сил системы $\sum \vec{F}_k^i = 0$, то, подставляя все найденные значения, получим окончательно:

$$M \vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e \quad (4)$$

Уравнение и выражает теорему о движении центра масс системы: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* Сравнивая с уравнением движения материальной точки, получаем другое выражение теоремы: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.*

Проектируя обе части равенства на координатные оси, получим:

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \quad M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \; M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum F_{kz}^e.$$

Эти уравнения представляют собою *дифференциальные уравнения движения центра масс* в проекциях на оси декартовой системы координат.

Значение доказанной теоремы состоит в следующем.

1) Теорема дает обоснование методам динамики точки. Из уравнений видно, что *решения, которые мы получаем, рассматривая данное тело как материальную точку, определяют закон движения центра масс этого тела,* т.е. имеют вполне конкретный смысл.

В частности, если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс. Таким образом, поступательно движущееся тело можно всегда рассматривать как материальную точку с массой, равной массе тела. В остальных случаях тело можно рассматривать как материальную точку лишь тогда, когда практически для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс.

2) Теорема позволяет при определении закона движения центра масс любой системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы. В этом состоит ее практическая ценность.

Так движение автомобиля по горизонтальной плоскости может происходить только под действием внешних сил, сил трения, действующих на колеса со стороны дороги. И торможение автомобиля тоже возможно только этими силами, а не трением между тормозными колодками и тормозным барабаном. Если дорога гладкая, то как бы не затормаживали колеса, они будут скользить и не остановят автомобиль.

Или после взрыва летящего снаряда (под действием внутренних сил) части, осколки его, разлетятся так, что центр масс их будет двигаться по прежней траектории.

Теоремой о движении центра масс механической системы следует пользоваться для решения задач механики, в которых требуется:

- по силам, приложенным к механической системе (чаще всего к твердому телу), определить закон движения центра масс;
- по заданному закону движения тел, входящих в механическую систему, найти реакции внешних связей;
- по заданному взаимному движению тел, входящих в механическую систему, определить закон движения этих тел относительно некоторой неподвижной системы отсчета.

С помощью этой теоремы можно составить одно из уравнений движения механической системы с несколькими степенями свободы.

При решении задач часто используются следствия из теоремы о движении центра масс механической системы.

Следствие 1. Если главный вектор внешних сил, приложенных к механической системе, равен нулю, то центр масс системы находится в покое или движется равномерно и прямолинейно. Так как ускорение центра масс равно нулю, $\vec{a}_C = 0$.

Следствие 2. Если проекция главного вектора внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то центр масс системы или не изменяет своего положения относительно данной оси, или движется относительно нее равномерно.

Теорема об изменении кинетического момента.

Кинетический момент механической системы $\overline{K}_O$ относительно неподвижного центра O является мерой движения системы вокруг этого центра. При решении задач обычно применятся не сам вектор $\overline{K}_O$, а его проекции на оси неподвижной системы координат, которые называются кинетическими моментами относительно оси. Например, K_z - кинетический момент системы относительно неподвижной оси Oz .

Кинетический момент механической системы складывается из кинетических моментов точек и тел, входящих в эту систему. Рассмотрим способы определения кинетического момента материальной точки и твердого тела при различных случаях их движения.

Для материальной точки с массой m_k, имеющей скорость $\bar{V}_k$, кинетический момент относительно некоторой оси Oz определяется как момент вектора количества движения этой точки относительно выбранной оси:

$$K_z = m_z\ (m_k\bar{V}_k) = \bar{r}_k \times (m_k\bar{V}_k).$$

Кинетический момент точки считается положительным, если со стороны положительного направления оси движение точки происходит против часовой стрелки.

Если точка совершает сложное движение, для определения ее кинетического момента следует вектор количества движения $m_k\bar{V}_k$ рассматривать как сумму количеств относительного и переносного движений (рис.33)

$$m_k\bar{V}_k = m_k\bar{V}_{kr} + m_k\bar{V}_{ke}.$$

Тогда

$$K_z = m_z\ (m_k\bar{V}_k) = m_z\ (m_k\bar{V}_{kr}) + m_z\ (m_k\bar{V}_{ke}).$$

Но $V_{ke} = \omega h_e$, где h_e - расстояние от точки до оси вращения, и

$$m_z\ (m_k\bar{V}_{ke}) = m_k\omega h_e \cdot h_e = m_k h_e^2\omega.$$

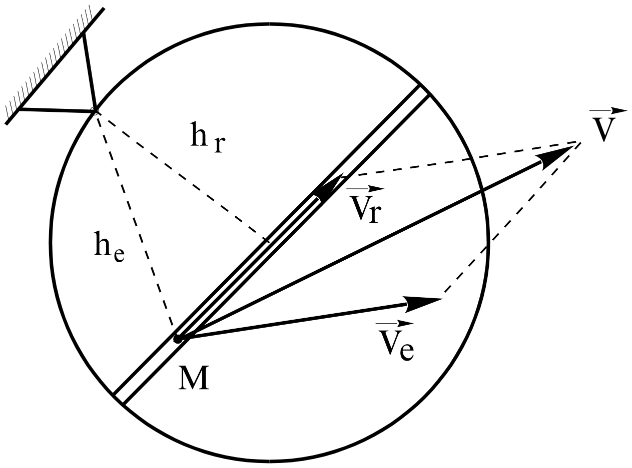


Рис. 33

Вторую составляющую вектора кинетического момента $m_z\ (m_k\bar{V}_{kr})$ можно определить так же, как и момент силы относительно оси. Как и для момента силы, величина $m_z\ (m_k\bar{V}_{kr})$ равна нулю, если вектор относительной скорости лежит в одной плоскости с осью переносного вращения.

Кинетический момент твердого тела относительно неподвижного центра можно определить как сумму двух составляющих: первая из них характеризует поступательную часть движения тела вместе с его центром масс, вторая - движение системы вокруг центра масс:

$$\overline{K}_O = \overline{m}_O\left(M\overline{V}_C\right) + \overline{K}_{rC}.$$

Если тело совершает поступательное движение, то вторая составляющая равна нулю

$$\overline{K}_{r_{,,}} = 0 .$$

Наиболее просто вычисляется кинетической момент твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси

$$K_z = I_z\,\omega ,$$

где I_z - момент инерции тела относительно оси вращения.

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ее движении вокруг неподвижного центра формулируется следующим образом: полная производная по времени от вектора кинетического момента механической системы относительно некоторого неподвижного центра *O* по величине и направлению равна главному моменту внешних сил, приложенных к механической системе, определенному относительно того же центра

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{M}_O^e,$$

где $\overline{M}_O^e = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k^e) = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{r}_k \times \overline{F}_k^e$ - главный момент всех внешних сил относительно центра *O*.

При решении задач, в которых рассматриваются тела, вращающиеся вокруг неподвижной оси, используют теорему об изменении кинетического момента относительно неподвижной оси

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k^e).$$

Как и для теоремы о движении центра масс, теорема об изменении кинетического момента имеет следствия.

Следствие 1. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторого неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этого центра остается неизменным.

Следствие 2. Если главный момент всех внешних сил относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то кинетический момент механической системы относительно этой оси остается неизменным.

Теорема об изменении кинетического момента применяется для решения задач, в которых рассматривается движение механической системы, состоящей из центрального тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и одного или нескольких тел, движение которых связано с центральным.. Связь может осуществляться при помощи нитей, тела могут перемещаться по поверхности центрального тела или в его каналах за счет внутренних сил. С помощью данной теоремы можно определить зависимость закона вращения центрального тела от положения или движения остальных тел.

Закон сохранения движения центра масс.

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю $\sum \vec{F}_k^e = 0.$

Тогда из уравнения $M\vec{a}_c = \sum \vec{F}_k^e$ следует, что $\vec{a}_c = 0$ или $\vec{V}_c = const.$ Следовательно, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. равномерно и прямолинейно.* В частности, если вначале центр масс был в покое, то он и останется в покое. Действие внутренних сил, как мы видим, движение центра масс системы изменить не может.

2) Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но эти силы таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например, ось *Ox)* равна нулю:

$\sum F_{kx}^e = 0.$

Тогда уравнение $M\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e,$ дает: $\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = 0$ или $\dfrac{dx_C}{dt} = V_{CX} = const.$

Следовательно, если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. В частности, если в начальный момент $V_{CX} = 0$, то и в любой последующий момент $V_{CX} = 0$, т.е. центр масс системы в этом случае вдоль оси *Ox* перемещаться не будет ($x_c = const$).

Все эти результаты выражают собою *закон сохранения движения центра масс системы.* Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие его приложения.

а) Движение центра масс солнечной системы. Так как притяжением звезд можно практически пренебречь, то можно считать, что на солнечную систему никакие внешние силы не действуют. Следовательно, в первом приближении ее центр масс движется в мировом пространстве равномерно и прямолинейно.

б) Действие пары сил на тело. Если на свободное твердое тело начнет действовать пара сил $(\vec{F}, \vec{F}')$, то геометрическая сумма этих внешних сил будет равна нулю $(\vec{F} + \vec{F}' = 0)$. Следовательно, центр масс *C* тела, если он вначале был неподвижен, должен остаться неподвижным и при действии пары. Таким образом, где бы к свободному твердому телу ни была приложена пара сил, тело начнет вращаться вокруг своего центра масс.

в) Движение по горизонтальной плоскости. При отсутствии трения человек с помощью своих мускульных усилий (силы внутренние) не мог бы двигаться вдоль горизонтальной плоскости, так как в этом случае сумма проекций на любую горизонтальную ось Ox всех приложенных к человеку внешних сил (сила тяжести и реакция плоскости) будет равна нулю и центр масс человека вдоль плоскости перемещаться не будет ($x_c = const$).

§ 5. Количество движения системы.

Количество движения системы.

Количеством движения системы будем называть векторную величину $\vec{Q}$, *равную геометрической сумме (главному вектору) количеств движения всех точек системы* (рис.34):

$\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k$.

Из чертежа видно, что независимо от величин скоростей точек системы (если только эти скорости не параллельны) вектор $\vec{Q}$ может принимать любые значения и даже оказаться равным нулю, когда многоугольник, построенный из векторов $m_k\vec{V}_k$, замкнется. Следовательно, по величине $\vec{Q}$ нельзя полностью судить о характере движения системы.

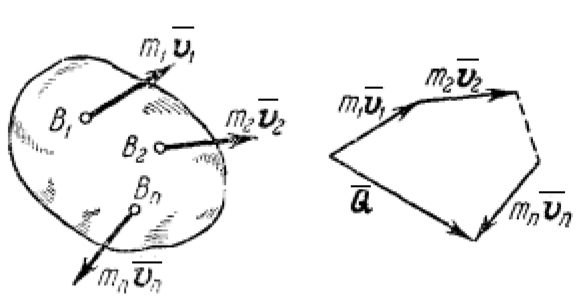


Рис.34

Найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислять величину $\vec{Q}$, а также уяснить ее смысл.

Из равенства $\vec{r}_C = \dfrac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$ следует, что $\sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C$.

Беря от обеих частей производную по времени, получим

$\sum m_k \dfrac{d\vec{r}_k}{dt} = M\dfrac{d\vec{r}_C}{dt}$ или $\sum m_k \vec{V}_k = M\vec{V}_C$.

Отсюда находим, что $\vec{Q} = M\vec{V}_C$,

т.е. *количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.* Этим результатом особенно удобно пользоваться при вычислении количеств движения твердых тел.

Из формулы видно, что если тело (или система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Например, количество движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр масс, будет равно нулю.

Если же движение тела является сложным, то величина $\vec{Q}$ не будет характеризовать вращательную часть движения вокруг центра масс.

Например, для катящегося колеса $\vec{Q} = M\vec{V}_C$, независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс *C*.

Таким образом, *количество движения характеризует только поступательное движение системы.* При сложном же движении величина $\vec{Q}$ характеризует только поступательную часть движения системы вместе с центром масс.

Теорема об изменении количества движения.

Рассмотрим систему, состоящую из *n* материальных точек. Составим для этой системы дифференциальные уравнения движения и сложим их почленно. Тогда получим:

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i.$$

Последняя сумма по свойству внутренних сил равна нулю. Кроме того,

$$\sum m_k \vec{a}_k = \frac{d}{dt}(\sum m_k \vec{V}_k) = \frac{d\vec{Q}}{dt}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e.$$

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.* В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\frac{dQ_X}{dt} = \sum F_{kx}^e, \ \frac{dQ_Y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \ \frac{dQ_Z}{dt} = \sum F_{kz}^e.$$

Найдем другое выражение теоремы. Пусть в момент $t = 0$ количество движения системы равно $\vec{Q}_0$, а в момент t_1 становится равным $\vec{Q}_1$. Тогда, умножая обе части равенства $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$ на *dt* и интегрируя, получим:

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_k^e dt$$

или

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e,$$

так как интегралы, стоящие справа, дают импульсы внешних сил.

Уравнение выражает теорему об изменении количества движения системы в интегральной форме: *изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.*

В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$Q_{1X} - Q_{0X} = \sum S_{kx}^e, \ Q_{1Y} - Q_{0Y} = \sum S_{ky}^e, \ Q_{1Z} - Q_{0Z} = \sum S_{kz}^e.$$

Укажем на связь между доказанной теоремой и теоремой о движении центра масс. Так как $\vec{Q} = M\vec{V}_C$, то, подставляя это значение в равенство и учитывая, что $\dfrac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{a}_C$, мы получим $M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e$.

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две разные формы одной и той же теоремы. В тех случаях, когда изучается движение твердого тела (или системы тел), можно в равной мере пользоваться любой из этих форм.

Практическая ценность теоремы состоит в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы (например, силы давления друг на друга частиц жидкости).

Закон сохранения количества движения.

Из теоремы об изменении количества движения системы можно получить следующие важные следствия:

1) Пусть сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$\sum F_k^e = 0.$

Тогда из уравнения $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \sum F_k^e$ следует, что при этом $Q = const$. Таким образом, *если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.*

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их проекций на какую-нибудь ось (например Ox) равна нулю:

$\sum F_{kx}^e = 0.$

Тогда из уравнения $\dfrac{dQ_X}{dt} = \sum F_{kx}^e$ следует, что при этом $Q_x = const$. Таким образом, *если сумма проекций всех действующих внешних сил на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Эти результаты и выражают *закон сохранения количества движения системы.* Из них следует, что внутренние силы изменить суммарное количество движения системы не могут. Рассмотрим некоторые примеры:

а) Явление отдачи или отката. Если рассматривать винтовку и пулю как одну систему, то давление пороховых газов при выстреле будет силой внутренней. Эта сила не может изменить суммарное количество движения системы. Но так как пороховые газы, действуя на пулю, сообщают ей некоторое количество движения, направленное вперед, то они одновременно должны сообщить винтовке такое же количество движения в обратном направлении. Это вызовет движение винтовки назад, т.е. так называемую отдачу. Аналогичное явление получается при стрельбе из орудия (откат).

б) Работа гребного винта (пропеллера). Винт сообщает некоторой массе воздуха (или воды) движение вдоль оси винта, отбрасывая эту массу назад. Если рассматривать отбрасываемую массу и самолет (или судно) как одну систему, то силы взаимодействия винта и среды как внутренние не могут изменить суммарное количество движения этой системы. Поэтому при отбрасывании массы воздуха (воды) назад самолет (или судно) получает соответствующую скорость движения вперед, такую, что общее количество движения рассматриваемой системы останется равным нулю, так как оно было нулем до начала движения.

Аналогичный эффект достигается действием весел или гребных колес.

в) Реактивное движение. В реактивном снаряде (ракете) газообразные продукты горения топлива с большой скоростью выбрасываются из отверстия в хвостовой части ракеты (из сопла реактивного двигателя). Действующие при этом силы давления будут силами внутренними, и они не могут изменить суммарное количество движения системы ракета - продукты горения топлива. Но так как вырывающиеся газы имеют известное количество движения, направленное назад, то ракета получает при этом соответствующую скорость движения вперед.

Главный момент количеств движения системы.

Главным моментом количеств движения (или кинетическом моментом) системы относительно данного центра O называется величина $\vec{K}_0$, равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра.

$$\vec{K}_0 = \sum m_O(m_k \vec{V}_k).$$

Аналогично определяются моменты количеств движения системы относительно координатных осей:

$$K_X = \sum m_X(m_k \vec{V}_k), \quad K_Y = \sum m_Y(m_k \vec{V}_k), \quad K_Z = \sum m_Z(m_k \vec{V}_k).$$

При этом K_X, K_Y, K_Z представляют собою одновременно проекции вектора $\vec{K}_0$ на координатные оси.

Подобно тому, как количество движения системы является характеристикой ее поступательного движения, *главный момент количеств движения системы является характеристикой вращательного движения системы.*

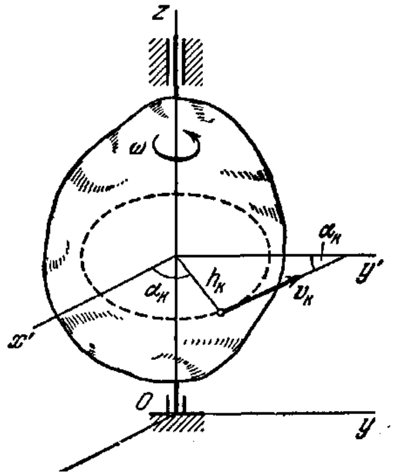


Рис.35

Чтобы уяснить механический смысл величины K_0 и иметь необходимые формулы для решения задач, вычислим кинетический момент тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис.35). При этом, как обычно, определение вектора $\vec{K}_0$ сводится к определению его проекций K_X, K_Y, K_Z.

Найдем сначала наиболее важную для приложений формулу, определяющую величину K_z, т.е. кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.

Для любой точки тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии h_k, скорость $v_k = \omega h_k$. Следовательно, для этой точки $m_k(m_k\vec{V}_k) = m_k V_k h_k = m_k \omega h_k^2$. Тогда для всего тела, вынося общий множитель ω за скобку, получим

$$K_Z = \sum m_Z(m_k\vec{V}_k) = (\sum m_k h_h^2)\omega.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z. Окончательно находим

$$K_Z = I_Z\omega.$$

Таким образом, *кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.*

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то, очевидно, будет

$$K_Z = I_{1Z}\omega_1 + I_{2Z}\omega_2 + \cdots + I_{nz}\omega_n$$

Легко видеть аналогию между формулами $\vec{Q} = M\vec{V}_c$ и $K_Z = I_Z\omega$: количество движения равно произведению массы (величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении) на скорость; кинетический момент равен произведению момента инерции (величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении) на угловую скорость.

Теорема об изменении главного момента количеств движения системы (теорема моментов).

Теорема моментов для одной материальной точки будет справедлива для каждой из точек системы. Следовательно, если рассмотреть точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для нее будет

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{m}_0(m_k\vec{V}_k)\right] = \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

где $\overline{F_k^e}$ и F_k^i - равнодействующие всех внешних и внутренних сил, действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы и складывая их почленно, получим:

$$\frac{d}{dt}\left[\Sigma\vec{m}_0(m_k\vec{V}_k)\right] = \Sigma\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \Sigma\vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю. Тогда найдем окончательно:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \Sigma\vec{m}_0(\vec{F}_k^e).$$

Полученное уравнение выражает следующую теорему моментов для системы: производная по времени от главного момента количеств движения системы относительно некоторого неподвижного центра, равна сумме моментов всех внешних сил системы относительно того же центра.

Проектируя обе части равенства на неподвижные оси $Oxyz$, получим:

$$\frac{dK_X}{dt} = \sum m_X(\overline{F_k^e}), \frac{dK_Y}{dt} = \sum m_Y(\overline{F_k^e}), \frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z(\overline{F_k^e}),$$

Уравнения выражают теорему моментов относительно любой неподвижной оси.

В кинематике было показано, что движение твердого тела в общем случае слагается из поступательного движения вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг этого полюса. Если за полюс выбрать центр масс, то поступательная часть движения тела может быть изучена с помощью теоремы о движении центра масс, а вращательная - с помощью теоремы моментов.

Практическая ценность теоремы моментов состоит еще в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения, позволяет при изучении вращательного движения системы исключать из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

Закон сохранения главного момента количеств движения.

Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия.

1) Пусть сумма моментов относительно центра O всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^e) = 0.$$

Тогда из уравнения $\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum\vec{m}_0(\vec{F}_k^e)$ следует, что при этом $\vec{K}_0 = const$. Таким образом, *если сумма моментов относительно данного центра всех* *приложенных к системе внешних сил равна нулю, то главный, момент количеств движения системы относительно этого центра будет численно и по направлению постоянен.*

2) Пусть внешние силы, действующие на систему, таковы, что сумма их моментов относительно некоторой неподвижной оси *Oz* равна нулю:

$\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0$.

Тогда из уравнения $\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_Z(\vec{F}_k^e)$ следует, что при этом K_z = const. Таким образом, *если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной.*

Эти результаты выражают собою *закон сохранения главного момента количеств движения системы.* Из них следует, что внутренние силы изменить главный момент количеств движения системы не могут.

Случай вращающейся системы.

Рассмотрим систему, вращающуюся вокруг неподвижной (или проходящей через центр масс) оси *Oz*. Тогда $K_Z = I_Z\omega$. Если в этом случае $\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0$, то

$I_Z\omega = const.$

Отсюда приходим к следующим выводам.

а) Если система *неизменяема* (абсолютно твердое тело), то $I_z = const$ и, следовательно, $\omega = const$, т. е. твердое тело, закрепленное на оси, вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью.

б) Если система *изменяема,* то под действием внутренних (или внешних) сил отдельные ее точки могут удаляться от оси, что вызывает увеличение I_Z, или приближаться к оси, что приведет к уменьшению I_Z. Но поскольку $I_Z\omega = const$, то при увеличении момента инерции угловая скорость системы будет уменьшаться, а при уменьшении момента инерции - увеличиваться. Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость вращения системы, так как постоянство K_z не означает вообще постоянства ω.

Рассмотрим некоторые примеры:

а) *Опыты с платформой Жуковского.* Для демонстрации закона сохранения момента количеств движения удобно пользоваться простым прибором, называемым «платформой Жуковского». Это круглая горизонтальная платформа на шариковых опорных подшипниках, которая может с малым трением вращаться вокруг вертикальной оси z. Для человека, стоящего на такой платформе,

$\sum m_Z(\vec{F}_k^e) = 0.$

и, следовательно, $I_Z\omega = const$. Если человек, разведя руки в стороны, сообщит себе толчком вращение вокруг вертикальной оси, а затем опустит руки, то величина I_Z уменьшится и, следовательно, угловая скорость вращения возрастет. Таким способом увеличения угловой скорости вращения широко пользуются в балете, при прыжках в воздухе (сальто) и т. п.

Далее, человек, стоящий на платформе неподвижно ($K_z=0$), может повернуться в любую сторону, вращая вытянутую горизонтально руку в противоположном направлении. Угловая скорость вращения человека при этом будет такой, чтобы в сумме величина K_z системы осталась равной нулю.

б) *Раскачивание качелей*. Давлением ног (сила внутренняя) человек, стоящий на качелях, раскачать их не может. Сделать это можно следующим образом. Когда качели находятся в левом верхнем положении A_0, человек приседает. При прохождении через вертикаль он быстро выпрямляется. Тогда массы приближаются к оси вращения *z*, величина I_Z уменьшается, и угловая скорость ω скачком возрастает. Это увеличение ω приводит в конечном счете к тому, что качели поднимутся выше начального уровня A_0. В правом верхнем положении, когда $\omega = 0$, человек опять приседает (на величине ω это, очевидно, не скажется); при прохождении через вертикаль он снова выпрямляется и т.д. В результате размахи качелей будут возрастать.

в) *Реактивный момент винта.* Воздушный винт, установленный на вертолете, не только отбрасывает воздух вниз, но и сообщает отбрасываемой массе вращение. Суммарный момент количеств движения отбрасываемой массы воздуха и вертолета должен при этом остаться равным нулю, так как система вначале была неподвижна, а силы взаимодействия между винтом и средой внутренние. Поэтому вертолет начинает вращаться в сторону, противоположную направлению вращения винта. Действующий при этом на вертолет вращающий момент называют *реактивным моментом.*

Чтобы предотвратить реактивное вращение корпуса одновинтового вертолета, на его хвостовой части устанавливают соответствующий рулевой винт. У многовинтового вертолета винты делают вращающимися в разные стороны.

§ 6. Кинетическая энергия системы.

Кинетическая энергия системы.

Кинетической энергией системы называется скалярная величина T, равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы

$$T = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного и вращательного движения системы, поэтому теоремой об изменении кинетической энергии особенно часто пользуются при решении задач.

Если система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия равна, очевидно, сумме кинетических энергий этих тел:

$$T = \sum T_k.$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина.

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в разных случаях движения.

1. *Поступательное движение*. В этом случае все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости движения центра масс. То есть, для любой точки $V_k = V_C$

$$T_{ПОСТ} = \sum \frac{m_k V_C^2}{2} = \frac{1}{2}(\sum m_k)V_C^2$$

или

$$T_{ПОСТ} = \frac{1}{2} M V_C^2.$$

Таким образом, *кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.* От направления движения значение *T* не зависит.

2. *Вращательное движение*. Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси *Oz* (см. рис.36), то скорость любой его точки $V_k = \omega h_k$, где h_k - расстояние точки от оси вращения, а ω- угловая скорость тела. Подставляя это значение и вынося общие множители за скобку, получим:

$$T_{BP} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}(\sum m_k h_k^2)\omega^2.$$

Величина, стоящая в скобке, представляет собою момент инерции тела относительно оси z. Таким образом, окончательно найдем:

$$T_{BP} = \frac{1}{2} I_Z \omega^2,$$

т. е. *кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.* От направления вращения значение *T* не зависит.

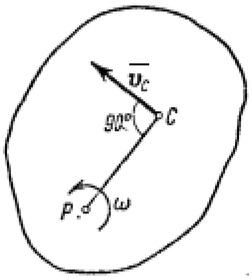


Рис.36

При вращении тела вокруг неподвижной точки кинетическая энергия определяется как (рис.37)

$$T = \frac{1}{2}[I_x(\omega\cos\alpha)^2 + I_y(\omega\cos\beta)^2 + I_z(\omega\cos\gamma)^2]$$

или, окончательно,

$$T = \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2),$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно главных осей инерции x_1, y_1, z_1 в неподвижной точке O ; ω_x , ω_y , ω_z – проекции вектора мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ на эти оси.

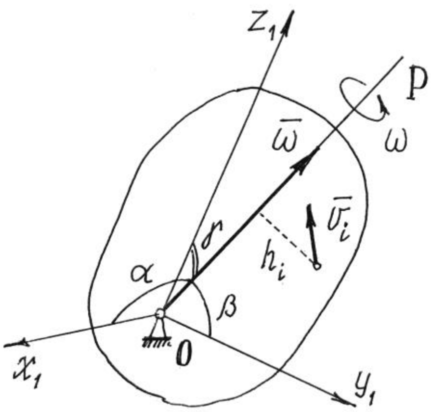


Рис.37

3. *Плоскопараллельное движение.* При этом движении скорости всех точек тела в каждый момент времени распределены так, как если бы тело вращалось вокруг оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через мгновенный центр скоростей P (рис.36). Следовательно

$$T_{ПЛОСК} = \frac{1}{2} I_P \omega^2 ,$$

где I_P - момент инерции тела относительно названной выше оси, ω- угловая скорость тела. Величина I_P в формуле будет переменной, так как положение центра P при движении тела все время меняется. Введем вместо I_P постоянный момент инерции I_C, относительно оси, проходящей через центр масс C тела. По теореме Гюйгенса $I_P = I_C + Md^2$, где $d=PC$. Подставим это выражение для I_P. Учитывая, что точка P - мгновенный центр скоростей, и, следовательно, $\omega d = \omega \cdot PC = V_C$, где V_C - скорость центра масс C, окончательно найдем:

$$T_{ПЛОСК} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 .$$

Следовательно, при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг центра масс.

4) Для самого *общего случая движения* материальной системы кинетическую энергию помогает вычислить *теорема Кенига.*

Рассмотрим движение материальной системы как сумму двух движений (рис.38). Переносного – поступательного движения вместе с центром масс C и относительного – движения относительно поступательно движущихся вместе с центром масс осей x_1, y_1, z_1. Тогда скорость точек $\vec{V}_i = \vec{V}_{ei} + \vec{V}_{ri}$. Но переносное движение – поступательное. Поэтому переносные скорости всех точек равны, равны $\vec{V}_c$. Значит, $\vec{V}_i = \vec{V}_c + \vec{V}_{ri}$ и кинетическая энергия будет

$$T = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum m_i (\vec{V}_c + \vec{V}_{ri})^2 = \frac{1}{2}\sum m_i (V_c^2 + 2\vec{V}_c \cdot \vec{V}_{ri} + V_{ri}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i V_c^2 + \sum m_i \vec{V}_c \cdot \vec{V}_{ri} + \frac{1}{2}\sum m_i V_{ri}^2 = \frac{1}{2} M V_c^2 + \vec{V}_c \cdot \sum m_i \vec{V}_{ri} + T_r.$$

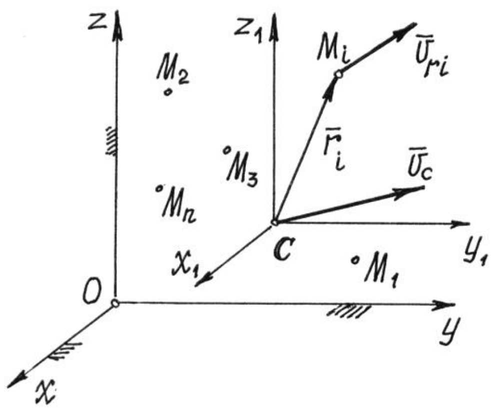


Рис.38

По определению центра масс его радиус-вектор в подвижной системе $\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} = 0$ (центр масс находится в начале координат), значит, и $\sum m_i \vec{r}_i = 0$. Производная по времени от этой суммы также равна нулю:

$$\frac{d}{dt}\sum m_i \vec{r}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum m_i \vec{V}_{ri} = 0.$$

Поэтому, окончательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + T_r. \tag{10}$$

Кинетическая энергия материальной системы равна сумме кинетической энергии при поступательном движении вместе с центром масс и кинетической энергии ее при движении относительно координатных осей, поступательно движущихся вместе с центром масс.

В общем случае движения тела, которое можно рассматривать как сумму двух движений (переносного – поступательного вместе с центром масс *C* и относительного – вращения вокруг точки *C*), по теореме Кенига (10) получим

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2),$$

где I_x, I_y, I_z – главные центральные оси инерции тела.

Некоторые случаи вычисления работы.

1) *Работа сил тяжести, действующих на систему.* Работа силы тяжести, действующей на частицу весом p_k, будет равна $p_k(z_{kO} - z_{k1})$, где z_{kO}

и z_{k1} - координаты, определяющие начальное и конечное положение частицы. Тогда сумма работ всех сил тяжести, действующих на систему, будет равна

$$A = \sum p_k z_{k0} - \sum p_k z_{k1} = P(z_{C0} - z_{C1}) = \pm P h_C,$$

где P - вес системы, h_C - вертикальное перемещение центра тяжести (или центра масс). Следовательно, *работа сил тяжести, действующих на систему, вычисляется как работа их равнодействующей P на перемещении центра тяжести (или центра масс) системы.*

2) *Работа сил, приложенных к вращающемуся телу.* Элементарная работа приложенной к телу силы F (рис.39) будет равна

$$dA = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi,$$

так как $ds = hd\varphi$, где $d\varphi$ - угол поворота тела.

Но, как легко видеть, $F_\tau h = m_Z(\overline{F})$. Будем называть величину $M_Z = m_Z(\overline{F})$ *вращающим моментом.* Тогда получим: $dA = M_Z d\varphi$.

Следовательно, в рассматриваемом случае *элементарная работа равна произведению вращающего момента на элементарный угол поворота.* Формула справедлива и при действии нескольких сил, если считать $M_Z = m_Z(\overline{F_k})$.

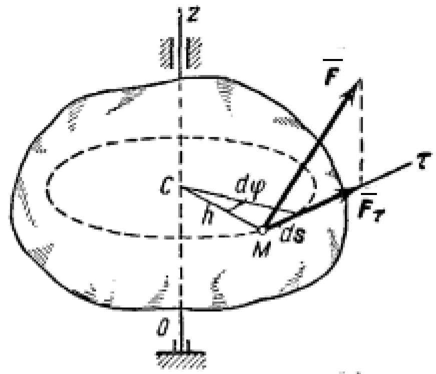


Рис.39

При повороте на конечный угол φ_1 работа будет равна

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_Z d\varphi,$$

а в случае постоянного момента $(M_Z = const)$

$$A = M_Z \varphi_1.$$

Если на тело действует пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной к оси *Oz,* то *Mz* будет, очевидно, означать момент этой пары.

Укажем еще, как в данном случае определяется мощность

$$W = \frac{dA}{dt} = M_Z \frac{d\phi}{dt} = M_Z \omega.$$

Следовательно, при действии сил на вращающееся тело *мощность равна произведению вращающего момента на угловую скорость тела.* При той же самой мощности вращающий момент будет тем больше, чем меньше угловая скорость.

3) *Работа сил трения, действующих на катящееся тело*. На колесо радиуса R (рис.40), катящееся по некоторой плоскости (поверхности) без скольжения, действует сила трения F , препятствующая скольжению точки касания B вдоль плоскости. Элементарная работа этой силы $dA = -F_{TP} ds_B$. Но точка B в данном случае является мгновенным центром скоростей и $V_B = 0$. Так как $ds_B = V_B dt$, то $ds_B = 0$ и для каждого элементарного перемещения $dA = 0$.

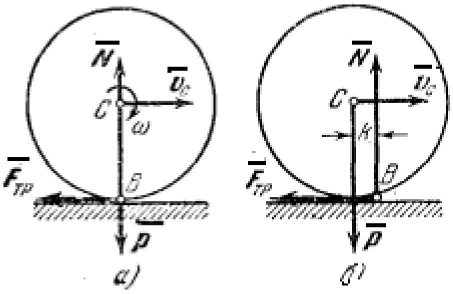


Рис.40

Следовательно, *при качении без скольжения, работа силы трения, препятствующей скольжению, на любом перемещении тела равна нулю.* По той же причине в этом случае равна нулю и работа нормальной реакции *N*, если считать тела недеформируемыми и силу *N* приложенной в точке *B* (как на рис.40,*а)*.

Сопротивление качению, возникающее вследствие деформации поверхностей (рис.40,б), создает пару $(\vec{N}, \vec{P})$, момент которой $M = kN$, где k-коэффициент трения качения. Тогда учитывая, что при качении угол поворота колеса $d\varphi = \dfrac{ds_R}{R}$, получим:

$$dA^{КАЧ} = -kNd\varphi = -\frac{k}{R} N ds_C,$$

где ds_C - элементарное перемещение центра C колеса.

Если N= const, то полная работа сил сопротивления качению будет равна

$$A^{КАЧ} = -kNd\varphi_1 = -\frac{k}{R} N s_C$$

Так как величина k / R мала, то при наличии других сопротивлений сопротивлением качению можно в первом приближении пренебрегать.

Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Если рассмотреть какую-нибудь точку системы с массой m_k, имеющую скорость v_k, то для этой точки будет

$$d(\frac{m_k V_k^2}{2}) = dA_k^e + dA_k^i,$$

где dA_k^e и dA_k^i - элементарные работы действующих на точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для каждой из точек системы и складывая их почленно, получим

$$d(\sum \frac{m_k V_k^2}{2}) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i,$$

или

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i. \qquad (11)$$

Равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме.

Если полученное выражение отнести к элементарному промежутку времени, в течение которого произошло рассматриваемое перемещение, можно получить вторую формулировку для дифференциальной формы теоремы: производная по времени от кинетической энергии механической системы равна сумме мощностей всех внешних (N^e) и внутренних (N^i) сил, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = N^e + N^i.$$

Дифференциальными формами теоремы об изменении кинетической энергии можно воспользоваться для составления дифференциальных уравнений движения, но это делается достаточно редко, потому что есть более удобные приемы.

Проинтегрировав обе части равенства (11) в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна T_0, в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1, будем иметь

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии в конечном виде: *изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.*

В отличие от предыдущих теорем, внутренние силы в уравнениях не исключаются. В самом деле, если $\vec{F}_{12}^i$ и $\vec{F}_{21}^i$ - силы взаимодействия между точками B_1 и B_2 системы (см. рис.41), то $\vec{F}_{12}^i + \vec{F}_{21}^i = 0$. Но при этом точка B_1, может перемещаться по направлению к B_2, а точка B_2 - по направлению к B_1. Работа каждой из сил будет тогда положительной и сумма работ нулем не будет. Примером может служить явление отката. Внутренние силы (силы давления), действующие и на снаряд и на откатывающиеся части, совершают здесь положительную работу. Сумма этих работ, не равная нулю, и изменяет кинетическую энергию системы от величины $T_0 = 0$ в начале выстрела до величины $T_1 = T_{CHAP} + T_{OTK}$ конце.

Другой пример: две точки, соединенные пружиной. При изменении расстояния между точками упругие силы, приложенные к точкам, будут совершать работу. Но если система состоит из абсолютно твердых тел и связи между ними неизменяемые, не упругие, идеальные, то работа внутренних сил будет равна нулю и их можно не учитывать и вообще не показывать на расчетной схеме.

Рассмотрим два важных частных случая.

1) *Неизменяемая система. Неизменяемой* будем называть систему, в которой расстояния между точками приложения внутренних сил при движении системы не изменяются. В частности, такой системой является абсолютно твердое тело или нерастяжимая нить.

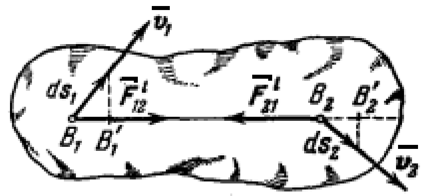


Рис.41

Пусть две точки B_1 и B_2 неизменяемой системы (рис.41), действующие друг на друга с силами $\vec{F}^i_{12}$ и $\vec{F}^i_{21}$ ($\vec{F}^i_{12} = -\vec{F}^i_{21}$) имеют в данный момент скорости $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Тогда за промежуток времени dt эти точки совершат элементарные перемещения $ds_1 = v_1 dt$ и $ds_2 = v_2 dt$, направленные вдоль векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Но так как отрезок $B_1 B_2$ является неизменяемым, то по известной теореме кинематики проекции векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$,а, следовательно, и перемещений ds_1 и ds_2 на направление отрезка $B_1 B_2$ будут равны друг другу, т.е. $B_1 B'_1 = B_2 B'_2$. Тогда элементарные работы сил $\vec{F}^i_{12}$ и $\vec{F}^i_{21}$ будут одинаковы по модулю и противоположны по знаку и в сумме дадут нуль. Этот результат справедлив для всех внутренних сил при любом перемещении системы.

Отсюда заключаем, что *для неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю* и уравнения принимают вид

$dT = \sum dA^e_k$ или $T_1 - T_0 = \sum A^e_k$.

2) *Система с идеальными связями*. Рассмотрим систему, на которую наложены связи, не изменяющиеся со временем. Разделим все действующие на точки системы внешние и внутренние силы на *активные* и *реакции связей.* Тогда

$$dT = \sum dA^a_k + \sum dA^r_k ,$$

где dA^a_k - элементарная работа действующих на k-ю точку системы внешних и внутренних активных сил, а dA^r_k - элементарная работа реакций наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Как видим, изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных сил и реакций связей. Однако можно ввести понятие о таких «идеальных» механических системах, у которых наличие связей не влияет на изменение кинетической энергии системы при ее движении. Для таких связей должно, очевидно, выполняться условие:

$$\sum dA_k^r = 0.$$

Если для связей, не изменяющихся со временем, сумма работ всех реакций при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называют *идеальными.* Для механической системы, на которую наложены только не изменяющиеся со временем идеальные связи, будем, очевидно, иметь

$$dT = \sum dA_k^a \text{ или } T_1 - T_0 = \sum A_k^a.$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении, приложенных к системе внешних и внутренних *активных сил.*

Механическая система называется *консервативной* (энергия ее как бы законсервирована, не изменяется), если для нее имеет место интеграл энергии

$$E = T + \Pi = const \text{ или } \frac{dE}{dt} = 0. \qquad (12)$$

Это есть *закон сохранения механической энергии: при движении системы в потенциальном поле механическая энергия ее (сумма потенциальной и кинетической) все время остается неизменной, постоянной.*

Механическая система будет консервативной, если действующие на нее силы потенциальны, например сила тяжести, силы упругости. В консервативных механических системах с помощью интеграла энергии можно проводить проверку правильности составления дифференциальных уравнений движения. Если система консервативна, а условие (12) не выполняется, значит при составлении уравнений движения допущена ошибка.

Интегралом энергии можно воспользоваться для проверки правильности составления уравнений и другим способом, без вычисления производной. Для этого следует после проведения численного интегрирования уравнений движения вычислить значение полной механической энергии для двух различных моментов времени, например, начального и конечного. Если разница значений окажется сопоставимой с погрешностями вычислений, это будет свидетельствовать о правильности используемых уравнений.

Все предыдущие теоремы позволяли исключить из уравнений движения внутренние силы, но все внешние силы, в том числе и наперед неизвестные реакции внешних связей, в уравнениях сохранялись.

Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии состоит в том, что при не изменяющихся со временем идеальных связях она позволит исключить из уравнений движения *все* наперед неизвестные реакции связей.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.

Приложение общих теорем к динамике твердого тела

Принцип Даламбера.

Все методы решения задач динамики, которые мы до сих пор рассматривали, основываются на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов Ньютона, или же из общих теорем, являющихся следствиями этих законов. Однако, этот путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые принципами механики. В ряде случаев применение этих принципов позволяет, как мы увидим, найти более эффективные методы решения соответствующих задач. В этой главе будет рассмотрен один из общих принципов механики, называемый принципом Даламбера.

Пусть мы имеем систему, состоящих из n материальных точек. Выделим какую-нибудь из точек системы с массой m_k. Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$ (в которые входят и активные силы, и реакции связи) точка получает по отношению к инерционной системе отсчета некоторое ускорение $\vec{a}_k$.

Введем в рассмотрение величину

$$\vec{F}_k^u = -m_k \vec{a}_k,$$

имеющую размерность силы. Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют силой инерции точки(иногда даламберовой силой инерции).

Тогда оказывается, что движение точки обладает следующим общим свойством: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$ прибавить силу инерции $\vec{F}_k^u$, то полученная система сил будет уравновешенной, т.е. будет

$$\vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^u = 0.$$

Это выражение выражает принцип Даламбера для одной материальной точки. Нетрудно убедиться, что оно эквивалентно второму закону Ньютона и наоборот. В самом деле, второй закон Ньютона для рассматриваемой точки дает $m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i$. Перенося здесь член $m_k \vec{a}_k$ в правую часть равенства и придем к последнему соотношению.

Повторяя проделанные высшее рассуждения по отношению к каждой из точек системы, придем к следующему результату, выражающему принцип Даламбера для системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на ней внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применять все уравнения статики.*

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия; что делает единообразный подход к решению задач и обычно намного упрощает соответствующие расчёты. Кроме того, в соединении с принципом возможных перемещений, который будет рассмотрен в следующей главе, принцип Даламбера позволяет получить новый общий метод решения задач динамики.

Применяя принцип Даламбера, следует иметь в виду, что на точку механической системы, движение которой изучается, действуют только внешние и внутренние силы $\vec{F}_k^e$ и $\vec{F}_k^i$, возникающие в результате взаимодействия точек системы друг с другом и с телами, не входящими в систему; под действием этих сил точки системы и движутся с соответствующими ускорениями $\vec{a}_k$. Силы же инерции, о которых говорится в принципе Даламбера, на движущиеся точки не действуют (иначе, эти точки находились бы в покое или двигались без ускорений и тогда не было бы и самих сил инерции). Введение сил инерции - это лишь приём, позволяющий составлять уравнения динамики с помощью более простых методов статики.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра O равны нулю, причём по принципу отвердевания это справедливо для сил, действующих не только на твёрдое тело, но и на любую изменяемую систебму. Тогда на основании принципа Даламбера должно быть:

$$\left.\begin{aligned}&\sum(\overline{F_k^e}+\overline{F_k^i}+\overline{F_k^u})=0;\\&\sum[\overline{m}_0(\overline{F_k^e})+\overline{m_o}(\overline{F_k^u})]=0\end{aligned}\right\}$$

Введём обозначения:

$$\vec{R}^u=\sum\vec{F}_k^u \qquad \overline{M_o^u}=\sum\overline{m_0}(\overline{F_k^u}).$$

Величины $\vec{R}^u$ и $\vec{M}_0^u$ представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра O системы сил инерции. В результате, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, получим из равенств:

$$\vec{R}^u+\sum\vec{F}_k^e=0, \quad \sum\overline{m_o}(\overline{F_k^e})+\overline{M_o^u}=0. \tag{13}$$

Применение уравнений (13), вытекающих из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, т.к. эти уравнения не содержат внутренних сил.

В проекциях на оси координат эти равенства дают уравнения, аналогичные соответствующим уравнениям статики. Чтобы пользоваться этими уравнениями при решении задач, надо знать выражение главного вектора и главного момента сил инерций.

Главный вектор и главный момент сил инерции твёрдого тела.

Система сил инерции твёрдого тела можно заменить одной силой, равной $\vec{R}^{u}$ и приложенной в центре O, и парой с моментом, равным $\vec{M}_0^{u}$. Главный вектор системы сил, как известно, не зависит от центра приведения и может быть вычислен заранее. Т.к. $\vec{F}_k^{u} = -m_k \cdot \vec{a}_k$, то

$$\vec{R}^{u} = -\sum m_k \cdot \vec{a}_k = -M\vec{a}_c \tag{14}$$

Следовательно, *главный вектор сил инерции тела*, совершающего любое движение, равен произведению массы тела на ускорение его центра масс и направлен противоположно этому ускорению.

Прикладывается главный вектор к точке приведения, которую можно назначить в любом месте, т.е. он не зависит от выбора этой точки.

Если ускорение $\vec{a}_c$ разложить на касательное и нормальное, то вектор $\vec{R}^{u}$ разложиться на составляющие

$\vec{R}^{u} = -M \cdot \vec{a}_{c\tau}$, $\vec{R}^{u} = -M \cdot \vec{a}_{cn}$.

С определением главного момента сил инерции возникает немало сложностей. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Поступательное движение. В этом случае тело никакого вращения вокруг центра масс C не имеет. Отсюда заключаем, что $\sum \vec{m}_c(\vec{F}_k^{e}) = 0$, и равенство (13) даёт $\vec{M}_c^{u} = 0$.

Следовательно, при поступательном движении силы инерции твёрдого тела приводят к одной равнодействующей, равной $\vec{R}^{u}$ и проходящей через центр масс тела.

2. Плоскопараллельное движение. Пусть тело имеет плоскость симметрии и движется параллельно ей. Вследствие симметрии главный вектор и результирующая пара сил инерции, так же как и центр масс C тела, лежат в плоскости симметрии.

Тогда, помещая центр приведения в точке C, получим из равенства (13) $M_c^{u} = -\sum m_c(\vec{F}_k^{e})$. С другой стороны $\sum m_c(\vec{F}_k^{e}) = J_c \cdot \varepsilon$. Отсюда заключаем, что

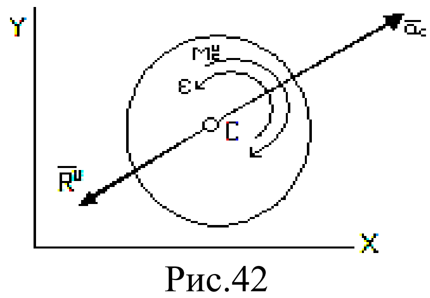


Рис.42

$$M_c^{u} = -I_c \cdot \varepsilon \tag{15}$$

Таким образом, в рассмотренном случае движение системы сил инерции приводится к результирующей силе, равной $\vec{R}^{u}$ [формула (14)] и приложенной в центре масс C тела (рис.42), и к лежащей в плоскости симметрии тела паре, момент которой определяется формулой (15). Знак минус в формуле показывает, что направление момента M_c^u противоположно направлению углового ускорения тела.

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела. Пусть опять тело имеет плоскость симметрии, а ось вращения CZ перпендикулярна к этой плоскости и проходит через центр масс тела. Тогда данный случай будет частным случаем предыдущего. Но при этом $\vec{a}_c = 0$, а следовательно, и $\vec{R}^u = 0$.

Таким образом, в рассмотренном случае система сил инерции приводится к данной паре, лежащей в плоскости, перпендикулярной к оси вращения тела, и имеющей момент

$$M_z^u = -I_z \cdot \varepsilon .$$

При решение задач по формулам (13) и (15) вычисляются модули соответствующих величин, а направление их указывают на чертеже.

Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики

Возможные перемещения. Классификация связей.

При изучении равновесия системы тел методами так называемой геометрической статики приходится рассматривать равновесие каждого из тел в отдельности, заменяя наложенные связи соответствующими наперед неизвестными реакциями. Когда число тел в системе велико, этот путь становится весьма громоздким и связан с необходимостью решать большое число уравнений со многими неизвестными.

Отличительная особенность метода, вытекающего из принципа возможных перемещений, состоит в том, что при его применении эффект действия связей учитывается не путем введения неизвестных наперед реакций, а путем рассмотрения перемещений, которые можно сообщить точкам системы, если вывести систему из занимаемого ею положения. Эти перемещения называют в механике возможными перемещениями.

Рассмотрим возможные перемещения точки M на стержне, прикрепленном к неподвижной поверхности шарниром O (рис.64,*а*). Конечно, стержень позволяет точке двигаться по сферической поверхности в любом направлении и на любое расстояние. Все эти перемещения возможны. Возможно, кстати, перемещение и вниз. Но такое перемещение не стоит называть возможным, потому что нарушается связь, стержень.

Кроме того, возможным перемещением будем называть только малое перемещение, настолько малую часть траектории, что ее можно заменить прямой, отрезком касательной.

Теперь можно сформулировать определение возможного перемещения.

Возможным перемещением δs *точки материальной системы будем называть ее бесконечно малое перемещение, допускаемое связями этой системы.*

Возможные перемещения точек системы должны удовлетворять двум условиям:

1) они должны быть бесконечно малыми, так как при конечных перемещениях система перейдет в другое положение, где условия равновесия могут быть другими;

2) они должны быть такими, чтобы при этом все наложенные на систему связи сохранялись, так как иначе мы изменим, вид рассматриваемой механической системы (система станет другой).

Например, для кривошипно-шатунного механизма, изображенного на рис.43 перемещение точек кривошипа OA в положение OA_1 нельзя рассматривать как возможное, так как в этом положении условия равновесия механизма под действием сил $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ будут уже другими. Точно так же нельзя считать возможным даже бесконечно малое перемещение точки B шатуна вдоль линии BD; оно было бы возможным, если в точке B вместо ползуна была бы качающаяся муфта, т.е. когда механизм был бы другим.

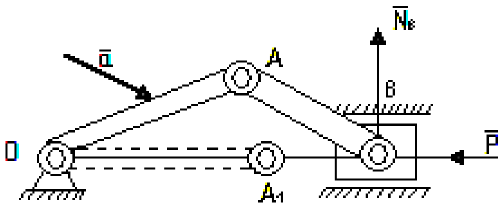


Рис. 43

Таким образом, возможным перемещением системы мы будем называть любую совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент всеми наложенными на систему связями. Возможное перемещение любой точки системы будем изображать элементарным вектором $\delta\bar{s}$, направленным в сторону перемещения.

В общем случае для точек и тел системы может существовать множество возможных различных перемещений (перемещения $\delta\bar{s}$ и $-\delta\bar{s}$ мы не считаем разными). Однако для каждой системы, в зависимости от характера наложенных на нее связей, можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений, что всякое другое возможное перемещение будет получаться как геометрическая сумма. Например, шарик, лежащий на какой-нибудь плоскости (или поверхности), можно переместить вдоль этой плоскости по множеству направлений. Однако любое его возможное перемещение $\delta\bar{s}$ можно получить как сумму двух перемещений $\delta\bar{s}_1$ и $\delta\bar{s}_2$ вдоль лежащих в этой плоскости взаимно перпендикулярных осей ($\delta\bar{s} = \delta\bar{s}_2 + \delta\bar{s}_2$).

Число независимых между собою возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Так, рассмотренный выше шарик на плоскости (или на поверхности), если его считать материальной точкой, имеет 2 степени свободы. У кривошипно-шатунного механизма будет, очевидно, одна степень свободы.

У свободной материальной точки – 3 степени свободы (независимыми будут 3 перемещения вдоль взаимно перпендикулярных осей). Свободное твердое тело имеет 6 степеней свободы (независимыми перемещениями будут: 3 поступательных перемещения вдоль осей координат и 3 вращательных вокруг этих осей).

К этому следует добавить несколько замечаний.

Первое. Само название таких перемещений показывает, что они только возможны, но не обязательны; что этих перемещений из данного положения системы может быть много; что среди них только одно есть действительное (Если связи – не стационарные, изменяются с течением времени, то действительное перемещение может не быть одним из возможных); что эти перемещения происходят не под действием сил, приложенных к системе, а, так сказать, по нашему желанию.

Второе. За счет малости таких перемещений направляются они по касательной к траектории и имеют, таким образом, направление, совпадающее с вектором скорости. Эту скорость в данном случае также называют *возможной скоростью*, а не действительной.

Третье. При наличии связей между точками материальной системы, возможные перемещения этих точек связаны между собой определенными зависимостями, уравнениями связей.

На рис.44 дано несколько примеров возможных перемещений точек некоторых материальных систем.

Из этих примеров следует, что возможным перемещением всего тела, вращающегося вокруг оси, является малый угол поворота $\delta\varphi$. И возможные перемещения точек его можно определить с помощью этого угла. Так, например, $\delta s_M = OM \cdot \delta\varphi$; $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$; $\delta s_B = OB \cdot \delta\varphi$ (рис.44, *а* и 44, *б*).

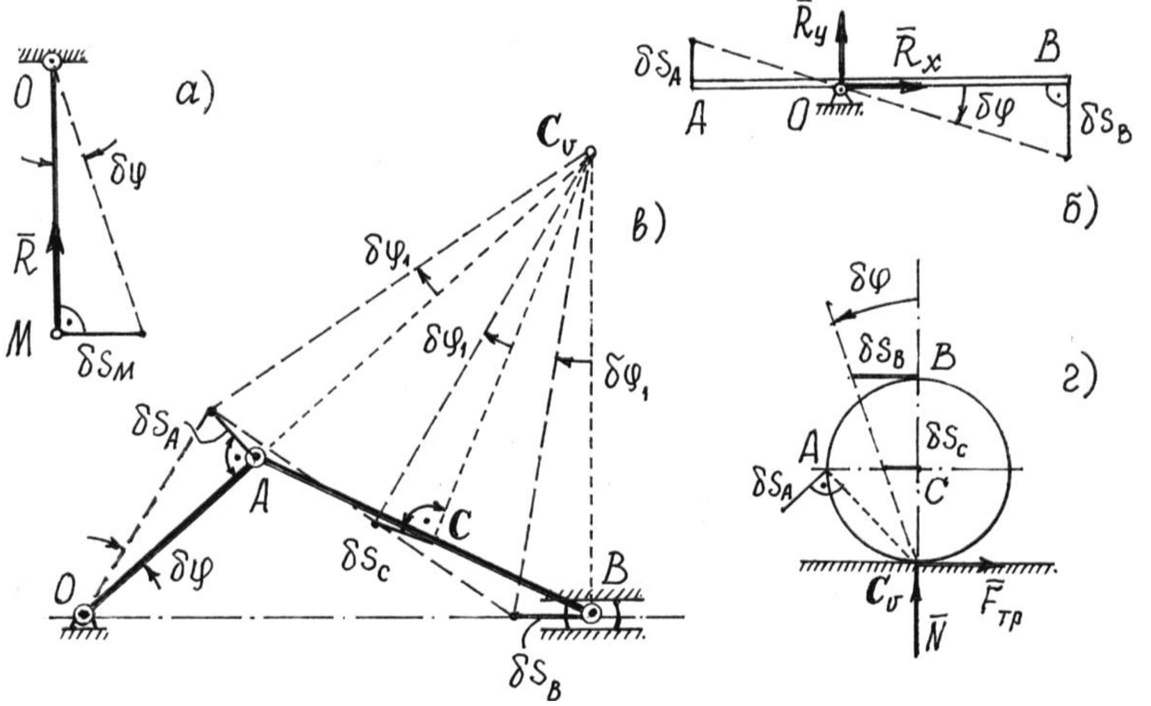


Рис.44

Так как направления возможных перемещений имеют направления скоростей, то перемещения точек звена *AB* (рис.44, *в*) определяются с помощью мгновенного центра скоростей C_v этого звена. А возможное перемещение всего тела при плоскопараллельном движении – есть поворот на малый угол $\delta\varphi_1$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Этот угол можно определить.

Так как $\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi$, то $\delta\varphi_1 = \dfrac{\delta s_A}{AC_\upsilon} = \dfrac{OA}{AC_\upsilon}\delta\varphi$, а перемещение ползуна *B*: $\delta s_B = BC_\upsilon \cdot \delta\varphi_1 = BC_\upsilon \dfrac{OA}{AC_\upsilon}\delta\varphi$ и точки *C*: $\delta s_C = CC_\upsilon \delta\varphi_1 = CC_\upsilon \dfrac{OA}{AC_\upsilon}\delta\varphi$. То есть перемещения всех точек механизма можно определить через одно возможное перемещение, перемещение звена *OA*, через угол $\delta\varphi$.

Аналогично, поворотом на малый угол $\delta\varphi$ вокруг мгновенного центра скоростей C_v, определяются возможные перемещения точек колеса, которое может катиться без скольжения по неподвижной прямой (рис.44, *г*).

Работу сил, приложенных к материальной системе, на возможном перемещении будем называть *возможной работой*.

Если рассмотреть различные типы материальных систем, можно обнаружить, что элементарная работа реакций многих связей на возможном перемещении окажется равной нулю. Такие связи, сумма возможных работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю, называются *идеальными связями.* К таким связям относятся, например, все связи без трения.

Связи, которые не изменяются со временем, называются *стационарными.*

Есть связи, которые называют или *удерживающими*, или *односторонними,* в зависимости от того препятствуют они перемещению точки во взаимно противоположных направлениях или только в одном.

У некоторых материальных систем встречаются и довольно сложные связи, ограничивающие или только положение системы, координаты ее точек, или еще и скорость их, производные от координат по времени. Первые называют *голономными*, геометрическими, связями; вторые – *неголономными,* кинематическими, неинтегрируемыми. Мы в дальнейшем будем рассматривать системы только с голономными связями.

Принцип возможных перемещений при равновесии материальной системы. Общее уравнение статики.

Пусть материальная система находится в равновесии. Силы, действующие на каждую ее точку, уравновешиваются. Если $\vec{F}_i$ – равнодействующая всех активных сил, приложенных к *i*-той точке, а $\vec{R}_i$ – реакция связей этой точки, то (рис.45)

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$$

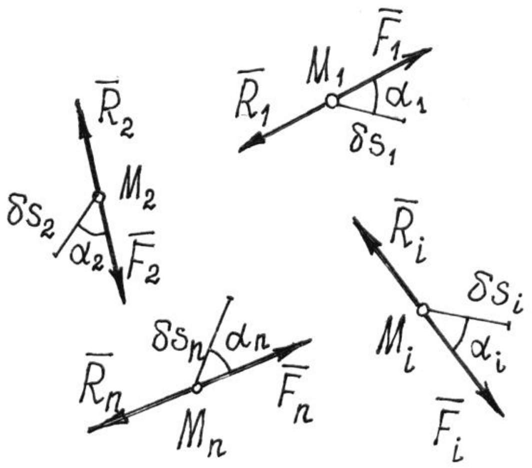


Рис.45

Дадим системе какое-нибудь возможное перемещение. Все точки ее получат перемещения δs_1, δs_2, δs_3,…, δs_n.

Затем вычислим работу всех сил на этих перемещениях.

Так как силы, приложенные к каждой точке уравновешиваются и $\vec{F}_i = -\vec{R}_i$, то сумма работ этих сил на перемещении δs_i будет равна нулю: $F_i \delta s_i \cos\alpha_i - R_i \delta s_i \cos\alpha_i = 0$. Значит и сумма работ всех сил, приложенных ко всем точкам, будет равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \delta s_i \cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} R_i \delta s_i \cos\alpha_i = 0.$$

Если связи идеальные, то вторая сумма всегда равна нулю. Значит,

$$\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i = 0. \tag{16}$$

Этот результат, *уравнение работ*, называют *общим уравнением статики.*

При равновесии материальной системы с идеальными и стационарными связями сумма работ всех активных, задаваемых, сил на любом возможном перемещении системы из положения равновесия равна нулю.

Конечно, если у системы есть неидеальные связи, например, с трением, или упругие, вроде пружины, то в уравнение работ надо добавить возможную работу реакций этих связей.

Принцип возможных перемещений можно записать в другой форме.

Если возможные перемещения точек определить с помощью возможных скоростей: $\delta s_i = \upsilon_i \delta t,$ где время δt - произвольная бесконечно малая величина, то уравнение работ (16) запишется так $\sum F_i \upsilon_i \delta t \cos\alpha_i = 0$, а, поделив его на δt получим

$$\sum F_i \upsilon_i \cos\alpha_i = 0, \tag{17}$$

где α_i – углы между направлениями сил и направлениями векторов возможных скоростей точек приложения сил.

Равенство (17) можно назвать *принципом возможных скоростей*, уравнением мощностей. Оно иногда бывает более удобным, так как используются конечные величины скоростей, а не бесконечно малые перемещения.

Этот принцип, общее уравнение статики, позволяет решать задачи на исследование равновесного состояния системы, в частности – находить неизвестные реакции связей. Естественно, при этом возникает вопрос: как же так, ведь реакции идеальных связей не входят в уравнение работ? Выход прост – надо сделать тело свободным, реакции отнести к разряду активных сил и затем назначать такие возможные перемещения, чтобы эти неизвестные силы совершали работу.

Общее уравнение статики – довольно эффективный метод и применять его, конечно, надо для исследования равновесия сложных систем; хотя и при решении обычных задач статики он оказывается тоже выгодным.

Принцип возможных перемещений при движении материальной системы. Общее уравнение динамики.

По принципу Даламбера материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил, можно рассматривать находящейся в равновесии, если ко всем точкам системы приложить их силы инерции. Значит можно воспользоваться и принципом возможных перемещений.

В уравнение работ (16) добавится еще сумма работ сил инерции точек на их возможных перемещениях:

$$\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos\beta_i = 0. \tag{18}$$

Или по принципу возможных скоростей (17):

$$\sum F_i \upsilon_i \cos\alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \upsilon_i \cos\beta_i = 0. \tag{19}$$

Эти уравнения называют *общим уравнением динамики*. Оно позволяет решать большой класс задач на исследование движения довольно сложных материальных систем.

Уравнения (18) и (19) показывают, что в любой фиксированный момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю при условии, что на систему наложены идеальные и удерживающие связи.

Силы инерции точек и твердых тел, составляющих систему, определять уже умеем.

Стоит подчеркнуть еще одно важное достоинство этого метода, общего уравнения динамики, – реакции связей (идеальных) исключаются при исследовании движения системы.

Иногда это уравнение можно использовать для исследования движения механических систем и в тех случаях, когда не все связи являются идеальными, например, когда имеются связи с трением. Для этого следует к активным силам добавить те составляющие реакций, которые обусловлены наличием сил трения.

Рассмотрим процедуру использования уравнения (18) для составления дифференциальных уравнений движения систем с двумя степенями свободы:

1. Изобразить механическую систему в произвольный момент времени.
2. Показать на рисунке активные силы и моменты, а также силы и моменты, соответствующие неидеальным связям (например, силы трения).
3. Определить главные векторы и главные моменты сил инерции.
4. Выбрать обобщенные координаты в числе, равном числу степеней свободы системы.
5. Дать виртуальное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом виртуальные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю.
6. Вычислить сумму элементарных работ всех сил и моментов (см. п. 2 и 3) на соответствующих виртуальных перемещениях и приравнять эту сумму нулю.
7. Повторить п. 4 - 6 для каждого независимого движения системы.

При применении общего уравнения динамики к системам с двумя и большим числом степеней свободы, в связи с громоздкостью выкладок, можно использовать следующие рекомендации:

1. Сделать предположение о направлении ускорений точек системы.
2. Направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений.
3. Определить знаки элементарных работ сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и избранными направлениями виртуальных перемещений точек системы.
4. Если искомые ускорения оказываются положительными, то сделанные предположения о направлениях ускорений подтверждаются, если отрицательными, то соответствующие ускорения направлены в другую сторону.

Обобщенные координаты

Обобщенными координатами мы будем называть параметры, которые определяют положение материальной системы.

Это могут быть обычные декартовы координаты точек, углы поворота, расстояния, площади, объемы и т.д.

Так на рис.46 положение балочки *AB* и всех ее точек вполне определяется углом φ.

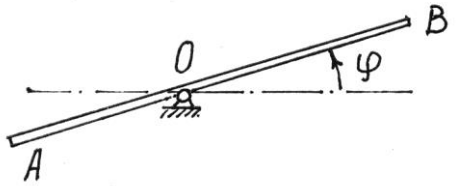


Рис.46

Положение точек кривошипно-шатунного механизма (рис.47) можно определить заданием угла поворота φ кривошипа или расстоянием s, определяющим положение ползуна *B* (при $0 < \varphi < \pi$).

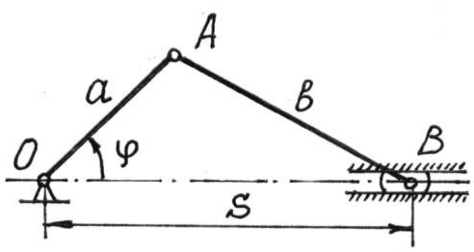


Рис.47

Положение сферического маятника (рис.48) определяется заданием двух параметров, углов φ_1 и φ_2.

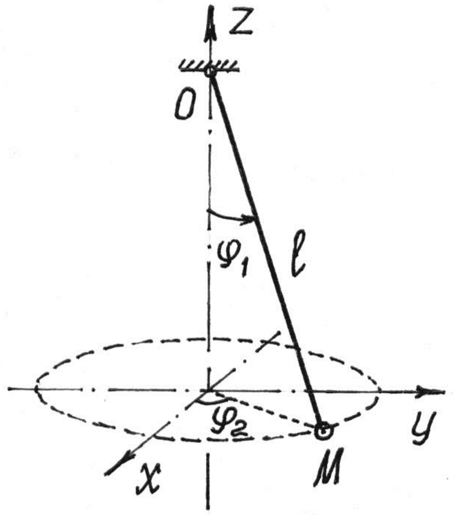


Рис.48

Минимальное количество независимых друг от друга обобщенных координат, которых достаточно, чтобы полностью и однозначно определить положение всех точек системы, называют *числом степеней свободы* этой системы.

Вообще для любой материальной системы можно назначить несколько обобщенных координат. Например, у кривошипно-шатунного механизма (рис.47) указаны две обобщенные координаты φ и s. Но это не значит, что у механизма две степени свободы, так как одну координату можно определить через другую:

$$s = a \cdot \cos\varphi + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \varphi}\,.$$

А вот у маятника (рис.48) две степени свободы, т.к. определяется его положение двумя независимыми обобщенными координатами. Кстати, если длина маятника изменяется, то для определения положения точки M потребуется еще один параметр – обобщенная координата l , длина нити. И у маятника станут три степени свободы.

Обобщенные координаты в общем случае будем обозначать буквой q.

Пусть материальная система имеет s степеней свободы. Положение ее определяется обобщенными координатами: $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k, \ldots, q_s$.

Нетрудно убедиться, что декартовы координаты n точек системы можно определить как функции обобщенных координат и времени:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t), \; (i = 1,2,3,\ldots,n). \end{aligned} \tag{20}$$

Обобщенные силы

Каждой обобщенной координате q_k можно вычислить соответствующую ей обобщенную силу Q_k.

Вычисление производится по такому правилу.

Чтобы определить обобщенную силу Q_k, соответствующую обобщенной координате q_k, надо дать этой координате приращение δq_k

(увеличить координату на эту величину), оставив все другие координаты неизменными, вычислить сумму работ всех сил, приложенных к системе, на соответствующих перемещениях точек и поделить ее на приращение координаты δq_k :

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k}\sum_{i=1}^{n} F_i \delta s_i \cos\alpha_i, \tag{21}$$

где – δs_i перемещение *i*-той точки системы, полученное за счет изменения *k*–той обобщенной координаты.

Обобщенная сила определяется с помощью элементарных работ. Поэтому эту силу можно вычислить иначе:

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k}\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\delta\vec{r}_i}{\delta q_k}.$$

И так как $\delta\vec{r}_i$ есть приращение радиуса-вектора $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t)$ за счет приращения координаты q_k при остальных неизменных координатах и времени *t*, отношение $\frac{\delta\vec{r}_i}{\delta q_k}$ можно определять как частную производную $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}$. Тогда

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right), \tag{22}$$

где координаты точек – функции обобщенных координат (20).

Если система консервативная, то есть движение происходит под действием сил потенциального поля, проекции которых $X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i},\ Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i},$ $Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}$, где $\Pi = \Pi(x_i, y_i, z_i)$, а координаты точек – функции обобщенных координат, то

$$Q_k = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}. \tag{23}$$

Обобщенная сила консервативной системы есть частная производная от потенциальной энергии по соответствующей обобщенной координате со знаком минус.

Конечно, при вычислении этой обобщенной силы потенциальную энергию следует определять как функцию обобщенных координат

$\Pi = \Pi(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s)$.

Замечания.

Первое. При вычислении обобщенных сил реакции идеальных связей не учитываются.

Второе. Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты. Так если размерность [q] – метр, то размерность

$[Q]$= Нм/м = Ньютон, если $[q]$ – радиан, то $[Q]$= Нм; если $[q]$ = м^2, то $[Q]=\dfrac{\text{Н}}{\text{м}}$ и т.п.

Уравнения равновесия Лагранжа

По определению (21) обобщенные силы $Q_k = \dfrac{1}{\delta q_k}\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i,$ k = 1,2,3,…,s, где s – число степеней свободы.

Если система находится в равновесии, то по принципу возможных перемещений (1) $\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i = 0$. Здесь δs_i – перемещения, допускаемые связями, возможные перемещения. Поэтому при равновесии материальной системы все ее обобщенные силы равны нулю:

$$Q_k = 0,\ (k=1,2,3,\dots,\ s). \tag{24}$$

Эти уравнения, *уравнения равновесия в обобщенных координатах* или *уравнения равновесия Лагранжа,* позволяют решать задачи статики еще одним методом.

Если система консервативная, то $Q_k = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k}.$ Значит, в положении равновесия $\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0$. То есть в положении равновесия такой материальной системы ее потенциальная энергия либо максимальна, либо минимальна, т.е. функция $\Pi(q)$ имеет экстремум.

Это очевидно из анализа простейшего примера (рис.49). Потенциальная энергия шарика в положении M_1 имеет минимум, в положении M_2 – максимум. Можно заметить, что в положении M_1 равновесие будет устойчивым; в положении M_2 – неустойчивым.

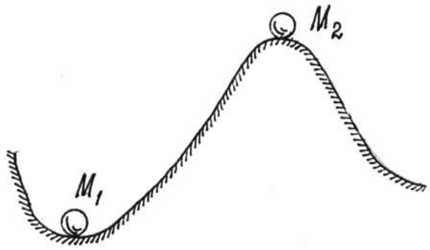


Рис.49

Равновесие считается устойчивым, если телу в этом положении сообщить малую скорость или сместить на малое расстояние и эти отклонения в дальнейшем не увеличатся.

Можно доказать (теорема Лагранжа-Дирихле), что если в положении равновесия консервативной системы ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Для консервативной системы с одной степенью свободы условие минимума потенциальной энергии, а значит и устойчивости положения равновесия, определяется, второй производной, ее значением в положении равновесия,

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0 \quad . \tag{25}$$

Обобщенные силы инерции.

По той же методике (22), по которой вычислялись обобщенные силы Q_k, соответствующие активным, задаваемым, силам, определяются и обобщенные силы S_k, соответствующие силам инерции точек системы:

$$S_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos\beta_i = \frac{1}{\delta q_k} \sum \vec{F}_i^{\text{ин}} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\delta \vec{r}_i}{\delta q_k} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{ин}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \tag{26}$$

И, так как $\vec{F}_i^{\text{ин}} = -m_i \vec{W}_i = -m_i \dfrac{d\vec{\upsilon}_i}{dt}$, то $S_k = -\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \dfrac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$. (27)

Немного математических преобразований.

Очевидно, $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_i \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \dfrac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \vec{\upsilon}_i \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$.

Отсюда $\dfrac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_i \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \vec{\upsilon}_i \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$. (28)

Так как $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t)$, а qk = qk(t), (k = 1,2,3,…, s), то

$$\vec{\upsilon}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \ldots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$ где $\dot{q}_k = \dfrac{dq_k}{dt}$.

Значит, частная производная скорости $\vec{\upsilon}_i$ по $\dot{q}_k$

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad . \tag{29}$$

Кроме того, в последнем члене можно поменять порядок дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{\upsilon}_i}{\partial q_k} \quad . \tag{30}$$

$$S_k = -\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_i \frac{\partial \vec{\upsilon}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \vec{\upsilon}_i \frac{\partial \vec{\upsilon}_i}{\partial q_k}\right] = -\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon_i^2}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \upsilon_i^2}{\partial q_k}\right].$$

Разделив последнюю сумму на две и, имея ввиду, что сумма производных равна производной от суммы, получим

$$S_k = -\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_k}, \tag{31}$$

где $T = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{m_i \upsilon_i^2}{2}$ – кинетическая энергия системы, $\dot{q}_k = \dfrac{dq_k}{dt}$ - обобщенная скорость.

Уравнения Лагранжа.

По определению (21) и (26) обобщенные силы

$$Q_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i; \; S_k = \frac{1}{\delta q_k} \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos\beta_i \quad .$$

Сумма их $Q_k + S_k = \frac{1}{\delta q_k}(\sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos\beta_i)$ или

$(Q_k + S_k)\delta q_k = \sum F_i \delta s_i \cos\alpha_i + \sum F_i^{\text{ин}} \delta s_i \cos\beta_i$.

Но на основании общего уравнения динамика (18), правая часть равенства равна нулю. И так как все δq_k (k = 1,2,3,…,s) отличны от нуля, то $Q_k + S_k = 0$. Подставив значение обобщенной силы инерции (31), получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = 1,2,3,\ldots,s). \tag{32}$$

Эти уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения в обобщенных координатах, уравнениями Лагранжа второго* рода или просто – *уравнениями Лагранжа.*

Количество этих уравнений равно числу степеней свободы материальной системы.

Если система консервативная и движется под действием сил потенциального поля, когда обобщенные силы $Q_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}$, уравнения Лагранжа можно составить по форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} = 0 \tag{33}$$

или $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1,2,3,\ldots,s), \tag{34}$$

где $L = T - \Pi$ называется *функцией Лагранжа* (предполагается, что потенциальная энергия П не зависит от обобщенных скоростей).

Нередко при исследовании движения материальных систем оказывается, что некоторые обобщенные координаты q_j не входят явно в функцию Лагранжа (или в T и П). Такие координаты называют *циклическими*. Уравнения Лагранжа, соответствующие этим координатам, получаются проще.

Так как $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$, то $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 0.$

Первый интеграл таких уравнений находится сразу. Он называется циклическим интегралом:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = C_j = \text{const}. \tag{35}$$

Дальнейшие исследования и преобразования уравнений Лагранжа составляют предмет специального раздела теоретической механики – «Аналитическая механика».

Уравнения Лагранжа обладают целым рядом достоинств в сравнении с другими способами исследования движения систем. Основные достоинства:

методика составления уравнений одинакова во всех задачах, реакции идеальных связей не учитываются при решении задач.
И еще одно – эти уравнения можно использовать для исследования не только механических, но и других физических систем (электрических, электромагнитных, оптических и др.).

Исследование положений равновесия механических систем

Условия равновесия механических систем.

Согласно принципу возможных перемещений (основному уравнению статики), для того, чтобы механическая система, на которую наложены идеальные, стационарные, удерживающие и голономные связи, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы в этой системе были равны нулю все обобщенные силы:

$$Q_j = 0, \quad j = 1,2,...,s, \tag{36}$$

где Q_j - обобщенная сила, соответствующая j - ой обобщенной координате;

s - число обобщенных координат в механической системе.

Если для исследуемой системы были составлены дифференциальные уравнения движения в форме уравнений Лагранжа II - го рода, то для определения возможных положений равновесия достаточно приравнять обобщенные силы нулю и решить полученные уравнения относительно обобщенных координат.

Если механическая система находится в равновесии в потенциальном силовом поле, то из уравнений (36) получаем следующие условия равновесия:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \; j = 1,2,..., s. \tag{37}$$

Следовательно, в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремальное значение. Не всякое равновесие, определяемое вышеприведенными формулами, может быть реализовано практически. В зависимости от поведения системы при отклонении от положения равновесия говорят об устойчивости или неустойчивости данного положения.

Устойчивость равновесия

Определение понятия устойчивости положения равновесия было дано в конце XIX века в работах русского ученого А. М. Ляпунова. Рассмотрим это определение.

Для упрощения выкладок условимся в дальнейшем обобщенные координаты q_1, q_2,..., q_s отсчитывать от положения равновесия системы:

$q_{j0} = 0$, где $j = 1, 2, ..., s$.

Положение равновесия называется устойчивым, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое другое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что в том случае, когда начальные значения обобщенных координат и скоростей не будут превышать δ:

$\left|q_{j0}\right| < \delta; \; \ldots; \left|\dot{q}_{j0}\right| < \delta;$

значения обобщенных координат и скоростей при дальнейшем движении системы не превысят ε

$\left|q_j(t)\right| < \varepsilon; \ldots; \ \left|\dot{q}_j(t)\right| < \varepsilon.$

Иными словами, положение равновесия системы $q_1 = q_2 = ... = q_s = 0$ называется **устойчивым**, если всегда можно найти такие достаточно малые начальные значения $\left|q_{j0}\right| < \delta \ldots; \ \left|\dot{q}_{j0}\right| < \delta$, при которых движение системы $q_j(t), \ \dot{q}_j(t)$ не будет выходить из любой заданной сколь угодно малой окрестности положения равновесия $\left|q_j(t)\right| < \varepsilon; \ \ldots \left|\dot{q}_j(t)\right| < \varepsilon$. Для системы с одной степенью свободы устойчивое движение системы можно наглядно изобразить в фазовой плоскости (рис.50). Для устойчивого положения равновесия движение изображающей точки, начинающееся в области $\left[-\delta; \delta\right]$, не будет в дальнейшем выходить за пределы области $\left[-\varepsilon; \varepsilon\right]$.

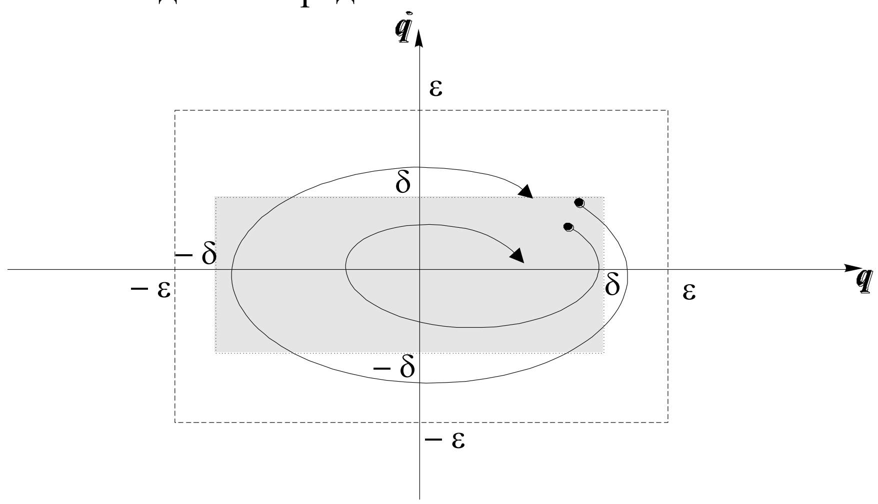


Рис.50

Положение равновесия называется ***асимптотически устойчивым***, если с течением времени система будет приближаться к положению равновесия, то есть

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_j(t) = 0, \quad j = 1,2,...s\,.$$

Определение условий устойчивости положения равновесия представляет собой достаточно сложную задачу, поэтому ограничимся простейшим случаем: исследованием устойчивости равновесия консервативных систем .

Достаточные условия устойчивости положений равновесия для таких систем определяются ***теоремой Лагранжа - Дирихле***: ***положение равновесия консервативной механической системы устойчиво, если в положении равновесия потенциальная энергия системы имеет изолированный минимум***.

Потенциальная энергия механической системы определяется с точностью до постоянной. Выберем эту постоянную так, чтобы в положении равновесия потенциальная энергия равнялась нулю:

$$\Pi(0) = 0\,.$$

Тогда для системы с одной степенью свободы достаточным условием существования изолированного минимума, наряду с необходимым условием (37), будет условие

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} > 0.$$

Так как в положении равновесия потенциальная энергия имеет изолированный минимум и $\Pi(0) = 0$, то в некоторой конечной окрестности этого положения

$$\Pi(q) > 0.$$

Функции, имеющие постоянный знак и равные нулю только при нулевых значениях всех своих аргументов, называются знакоопределенными. Следовательно, для того, чтобы положение равновесия механической системы было устойчивым необходимо и достаточно, чтобы в окрестности этого положения потенциальная энергия была положительно определенной функцией обобщенных координат.

Для линейных систем и для систем, которые можно свести к линейным при малых отклонениях от положения равновесия (линеаризовать), потенциальную энергию можно представить в виде квадратичной формы обобщенных координат

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij} q_i q_j \tag{38}$$

где c_{ij} - обобщенные коэффициенты жесткости.

Обобщенные коэффициенты c_{ij} являются постоянными числами, которые могут быть определены непосредственно из разложения потенциальной энергии в ряд или по значениям вторых производных от потенциальной энергии по обобщенным координатам в положении равновесия:

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \tag{39}$$

Из формулы (39) следует, что обобщенные коэффициенты жесткости симметричны относительно индексов

$$c_{ij} = c_{ji}.$$

Для того, чтобы выполнялись достаточные условия устойчивости положения равновесия, потенциальная энергия должна быть положительно определенной квадратичной формой своих обобщенных координат.

В математике существует ***критерий Сильвестра***, дающий необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичных форм: ***квадратичная форма (38) будет положительно определенной, если определитель, составленный из ее коэффициентов, и все его главные диагональные миноры будут положительными, т.е. если коэффициенты*** c_{ij} ***будут удовлетворять условиям***

$$D_1 = c_{11} > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

. . . . .

$$D_s = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & c_{2s} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ c_{s1} & c_{s2} & . & . & c_{ss} \end{vmatrix} > 0,$$

В частности, для линейной системы с двумя степенями свободы потенциальная энергия и условия критерия Сильвестра будут иметь вид

$$\Pi = \frac{1}{2}(c_{11}\, q_1^2 + c_{12}\, q_1\, q_2 + c_{21}\, q_2\, q_1 + c_{22}\, q_2^2\,)$$

$$\Delta_1 = c_{11} > 0,$$

$$\Delta_2 = c_{11}\, c_{22} - c_{12}\, c_{21} > 0.$$

Аналогичным образом можно провести исследование положений относительного равновесия, если вместо потенциальной энергии ввести в рассмотрение потенциальную энергию приведенной системы.

Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела

Тело *H* массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси *z* с постоянной угловой скоростью ω_0; при этом в точке *O* желоба *AB* тела *H* на расстоянии *AO* от точки *A*, отсчитываемом вдоль желоба, закреплена материальная точка *K* массой m_2. В некоторый момент времени ($t=0$) на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t=\tau$ действие пары сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела *H* в момент времени $t=\tau$.

Тело *H* вращается по инерции с угловой скоростью ω_τ.

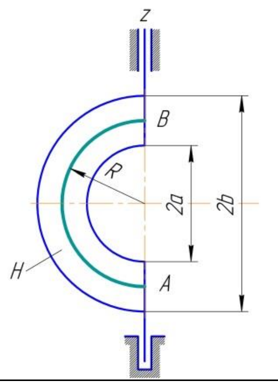
В некоторый момент времени $t_1 = 0$ (t_1 – новое начало отсчета времени) точка *K* (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки О вдоль желоба *AB* (в направлении к *B*) по закону $OK = s = s(t_1)$.

Определить угловую скорость ω_T тела *H* при $t_1 = T$.

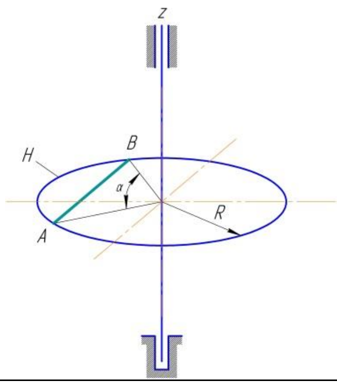
Тело *H* рассматривать как однородную пластинку, имеющую форму, показанную на рисунках. Необходимые для решения данные приведены в таблице.

№ вар.	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, рад/с	a, м	b, м	R, м	α, град	AO, м	$M_z = M_z(t)$ Н·м	τ, с	$OK = s = s(t_1)$ м	T, с
1	46	20	-2	1	1,5	1,2	-	$\pi R/6$	$-26t^2$	3	$(5\pi R/12)t_1$	1
2	52	20	-1	-	-	2	120	$\sqrt{3}/2$	101	5	$\sqrt{3}t_1^2$	1
3	94	40	0	2	-	-	-	0	$-120t$	4	$(\sqrt{2}/4)t_1^2$	2
4	70	30	-3	-	-	1	30	0,4	$21t$	2	$0,6t_1$	2
5	80	46	1,5	2	1,5	-	-	0	$15\sqrt{t}$	4	$0,5t_1$	2,5
6	160	60	-1,25	1,5	-	2,5	-	$\pi a/6$	$-700t$	$\sqrt{3}$	$(5\pi a/18)t_1^2$	$\sqrt{3}$
7	200	160	-3	1,6	1	0,8	-	0	968	1	$(\pi R/2)t_1^2$	1
8	40	16	0	1,2	-	2	-	$\pi a/2$	$240\sqrt{t}$	4	$(\pi a/4)t_1$	2
9	140	50	4	1,2	-	0,4	45	$\pi R/4$	$-29t$	3	$(3\pi R/4)t_1^2$	1
10	160	80	3	$\sqrt{2}$	2	-	-	$\sqrt{2}/2$	$-90\sqrt{t}$	4	$(\sqrt{2}/4)t_1^2$	1
11	40	16	-4	2	-	-	15	0	$40t$	2	$0,4t_1^2$	2
12	36	3	-5	1	-	2	-	0	$50t^2$	3	$(\pi a/3)t_1$	2
13	50	10	3	1	-	-	-	0,5	$-27\sqrt{t}$	1	$0,3t_1$	2
14	100	50	1	-	-	1	-	0	$120t$	1	$0,5t_1$	3
15	84	20	-6	1	-	2	-	0	$330t^2$	2	$(\pi a/2)t_1^2$	1
16	28	5	-3	1	1,2	-	30	0,4	74	2	$0,3t_1^2$	$\sqrt{2}$
17	68	32	-1	-	-	1,6	30	0,6	$69t$	4	$0,6t_1$	2
18	92	50	5	2	3	0,8	-	$\pi R/2$	324	3	$(\pi R/8)t_1^2$	2
19	160	100	2	1,5	-	-	-	0	$-135t$	2	$(\pi a/4)t_1^2$	1
20	200	140	1	1	-	1,2	-	$\pi a/6$	$-14t^2$	3	$(\pi a/12)t_1^2$	2
21	150	80	-8	-	-	1	-	$\sqrt{2}/2$	$75\sqrt{t}$	1	$(\sqrt{2}/16)t_1^2$	2
22	76	20	-5	1,6	1,2	0,6	-	$\pi R/2$	163	4	$(\pi R/2)t_1^2$	1
23	140	40	3	$\sqrt{2}$	1	-	-	$\sqrt{3}/2$	-210	2	$(\sqrt{3}/2)t_1$	1
24	80	50	-5	0,6	-	-	60	0,2	$27t^2$	2	$0,4t_1$	2
25	48	18	-3	-	-	0,5	-	0	$20t$	2	$(\pi R/6)t_1^2$	2
26	96	54	-4	1,5	-	2	-	$\pi a/6$	$1170\sqrt{t}$	1	$(\pi a/2)t_1^2$	1
27	38	10	0	1	-	-	60	0	$-25t$	2	t_1^2	1
28	26	14	-1	0,6	-	-	-	0,1	$5,6t$	3	$0,4t_1$	1
29	18	10	8	0,6	-	0,6	-	0	$-6,3\sqrt{t}$	4	$(5\pi R/6)t_1$	1
30	30	10	0	1,6	1,2	-	-	1,6	$652t$	2	$0,2t_1^2$	2

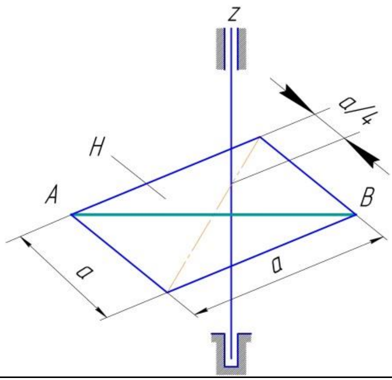
1



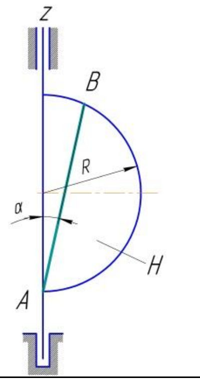
2



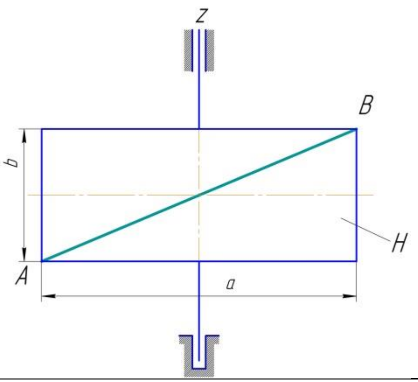
3



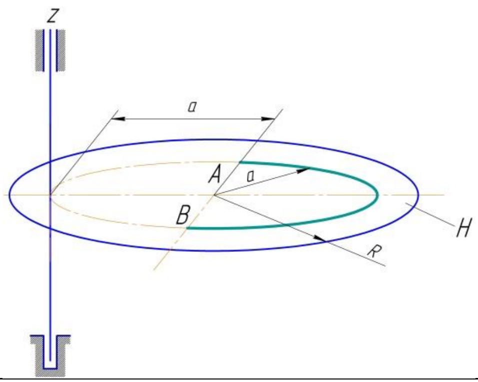
4



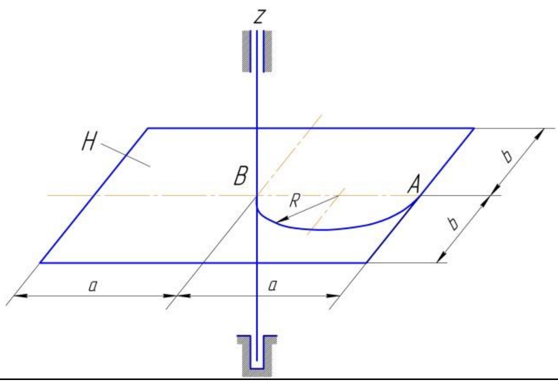
5



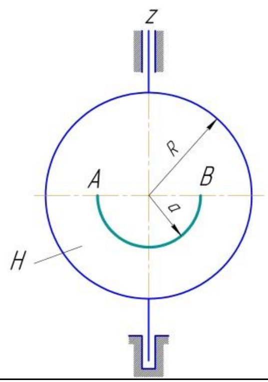
6



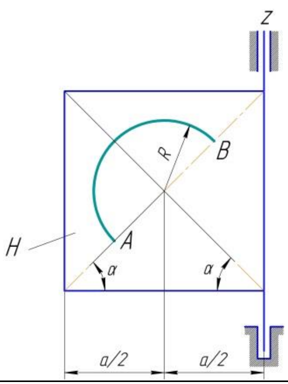
7



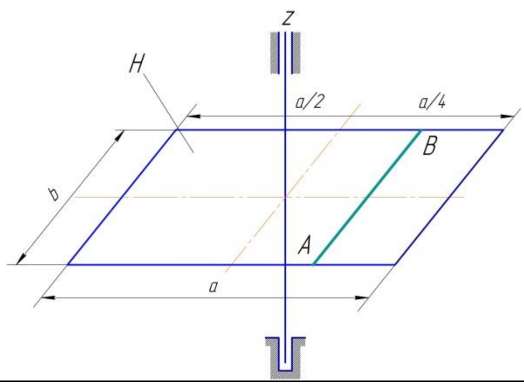
8



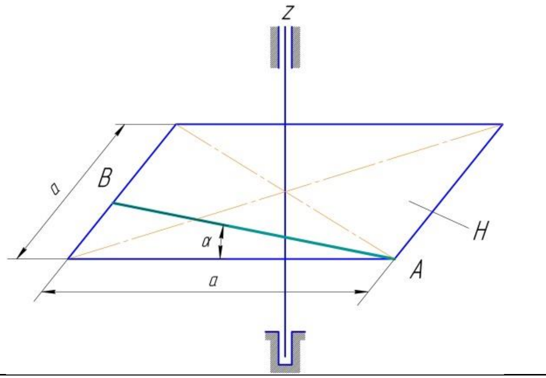
9



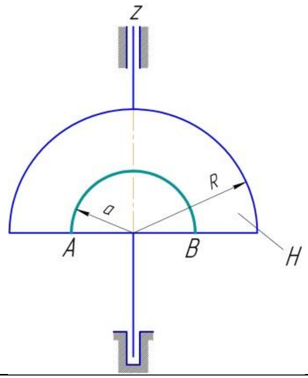
10



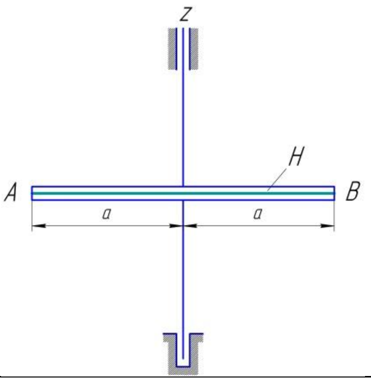
11



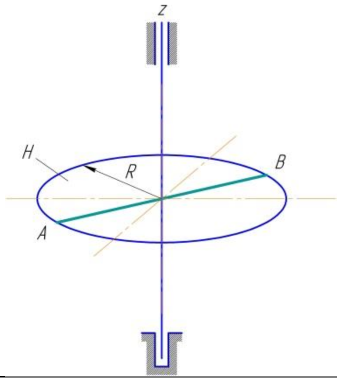
12



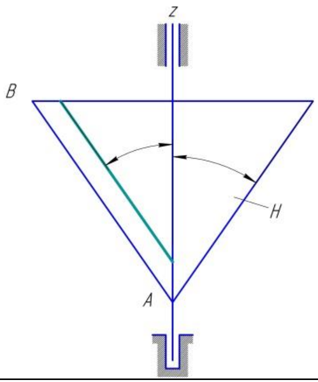
13



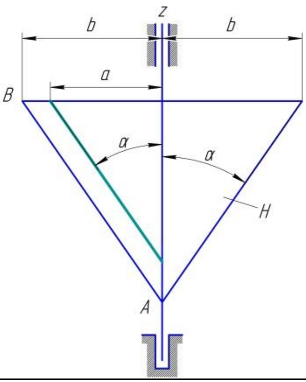
14



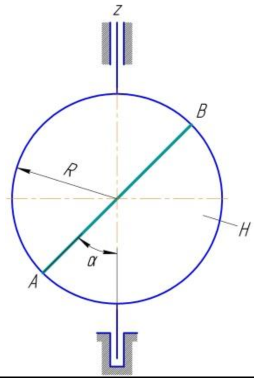
15



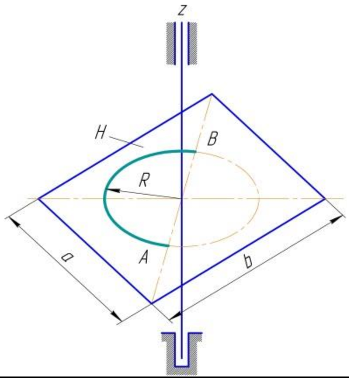
16



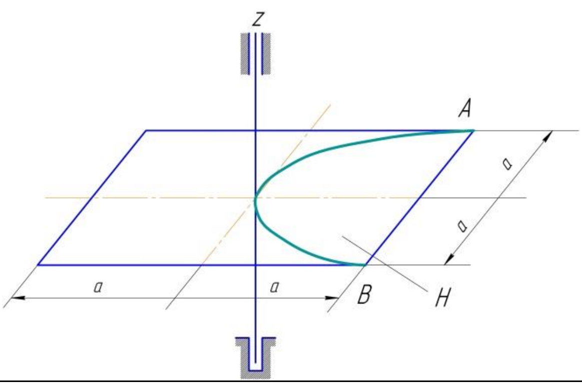
17



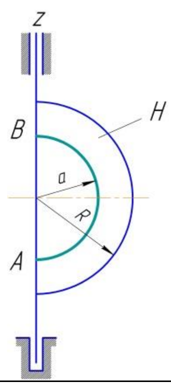
18

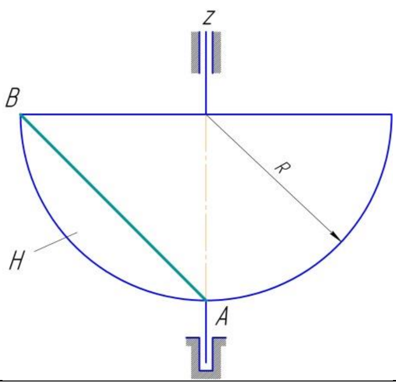
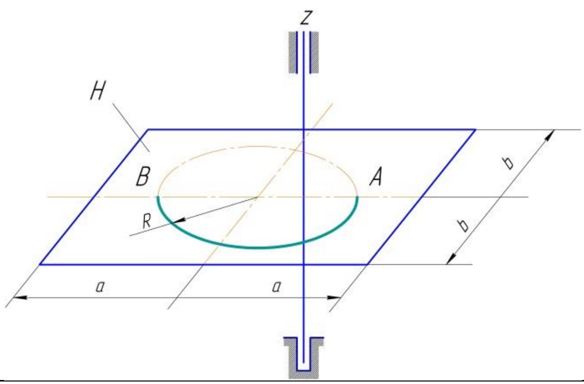
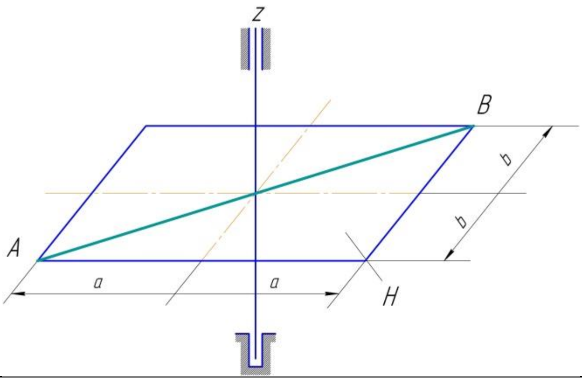
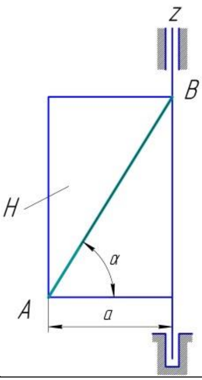
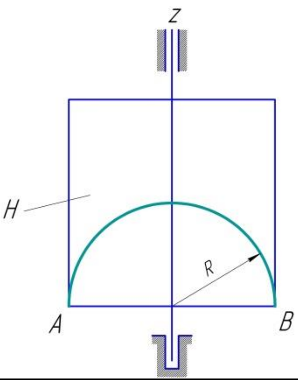
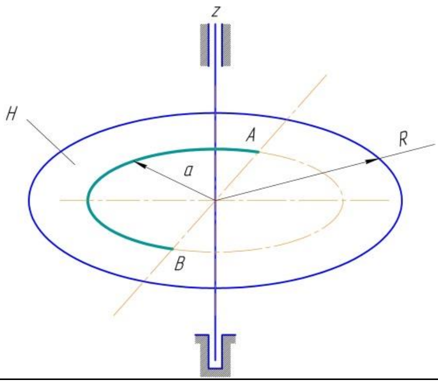
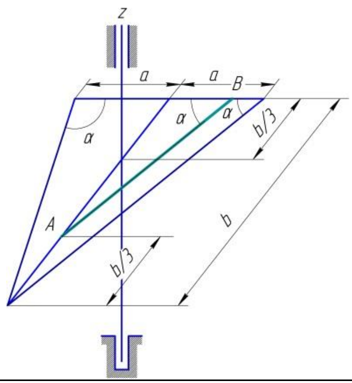
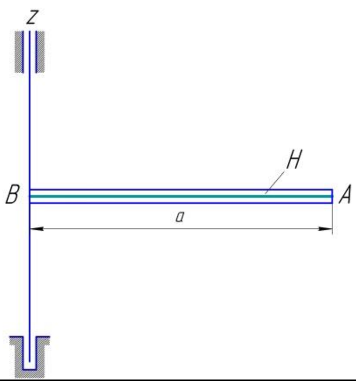
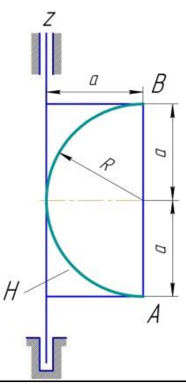
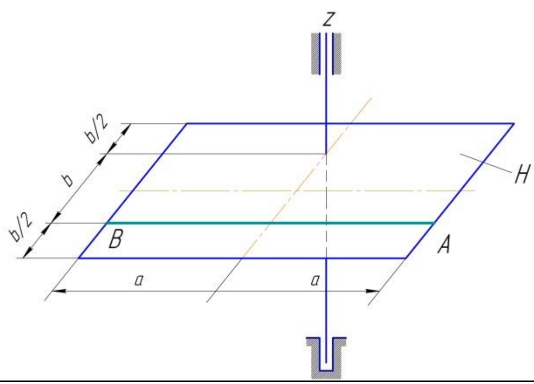


19



20



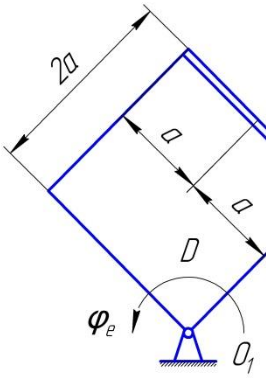
21	22
	
23	24
	
25	26
	
27	28
	
29	30
	

Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

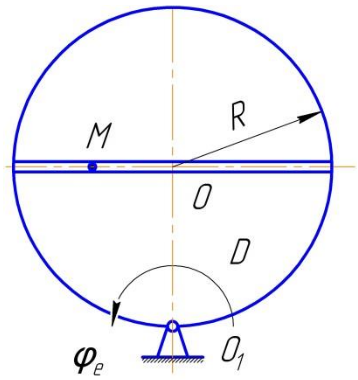
Точка М движется относительно тела D. По заданным уравнениям относительного движения точки М и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М. Схемы механизмов показаны на рисунках, а необходимые для расчета данные приведены в таблице.

№ вар.	Уравнение относительного движения точки М $OM = S_r(t)$, *см*	Уравнение движения тела		t_1, с	R, см	a, см	α, град	Дополни-тельные данные
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, *рад*	$x_e = x_e(t)$, *см*					
1	$18\sin(\pi t/4)$	$3t^3 - 2t^2$	-	2/3	-	25	-	
2	$20\sin \pi t$	$0{,}5t^2 + 3t$	-	5/3	20	-	-	
3	$6t^3$	$5t + 0{,}1t^2$	-	2	-	30	-	
4	$10\sin(\pi t/6)$	$0{,}8t^2$	-	1	-	-	60	
5	$40\pi\cos(\pi t/6)$	$6t - t^3$	-	2	30	-	-	
6	-	-	$4t + 0{,}27t^3$	10/3	15	-	-	$\varphi_r = 0{,}15\pi t^3$
7	$20\cos 2\pi t$	$0{,}4t^2$	-	3/8	-	40	60	
8	$6(t + 0{,}5t^2)$	$2t^3 - 10t$	-	2	-	-	30	
9	$10(1 + \sin 2\pi t)$	$3t + 1{,}5t^2$	-	1/8	-	-	-	
10	$20\pi\cos(\pi t/4)$	$1{,}5t - 2t^2$	-	4/3	20	20	-	
11	$25\sin(\pi t/3)$	$4t^2 - t$	-	4	-	25	-	
12	$15\pi t^3/8$	$7t - 5t^2$	-	2	30	30	-	
13	$120\pi t^2$	$9t^2 - 3t$	-	1/3	40	-	-	
14	$3 + 14\sin\pi t$	$6t - 9t^2$	-	2/3	-	-	30	
15	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	$0{,}5t^3 + 2t$	-	2	-	60	45	
16	$20\sin\pi t$	$3t - 0{,}6t^2$	-	1/3	-	20	-	
17	$8t^3 + 2t$	t^2	-	1	-	$4\sqrt{5}$	-	
18	$10t + t^3$	$4t - t^2$	-	2	-	-	60	
19	$6t + 4t^3$	$3t + t^2$	-	2	40	-	-	
20	$30\pi\cos(\pi t/6)$	$3t + 2t^2$	-	3	60	-	-	
21	$25\pi(t + t^2)$	$3t - 2t^2$	-	1/2	25	-	-	
22	$10\pi\sin(\pi t/4)$	$2t - 0{,}6t^2$	-	2/3	30	-	-	
23	$6\pi t^2$	-	-	1	18	-	-	$\varphi = \pi t^3/6$; $O_1O = O_2A = 20\,см$
24	$75\pi(0{,}1t + 0{,}3t^3)$	$3t - 0{,}2t^2$	-	1	30	-	-	
25	$15\sin(\pi t/3)$	$3t - 0{,}1t^2$	-	5	-	-	-	
26	$8\cos(\pi t/2)$	$-2\pi t^2$	-	3/2	-	-	45	
27	-	-	$25t^2$	2	75	-	-	$\varphi_r = 5\pi t^3/48$
28	$2{,}5\pi t^2$	$t^3 - 2t$	-	2	40	-	-	
29	$\pi t^3/4$	-	-	2	30	-	-	$\varphi = \pi t^3/8$; $O_1O = O_2A = 40\,см$
30	$4\pi t^2$	-	$t^3 + t$	2	48	-	-	

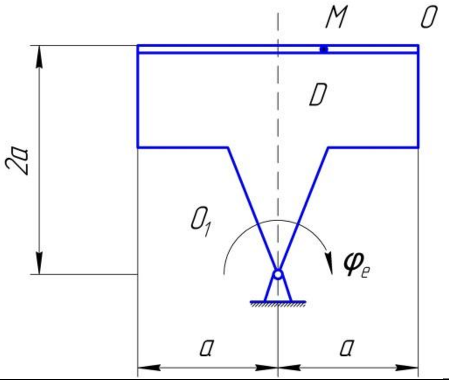
1



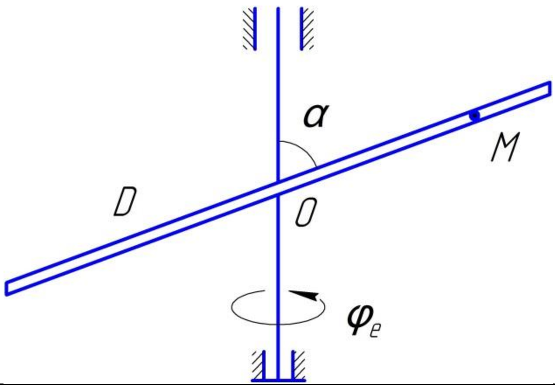
2



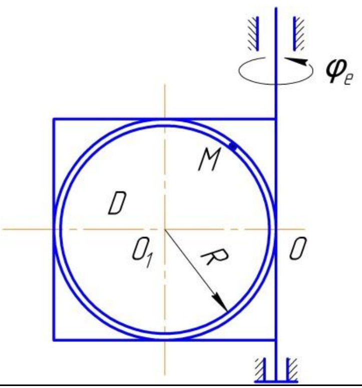
3



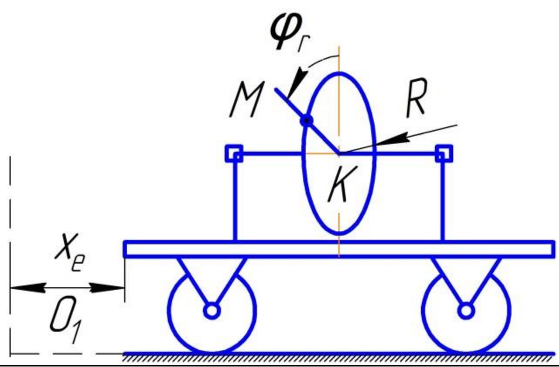
4



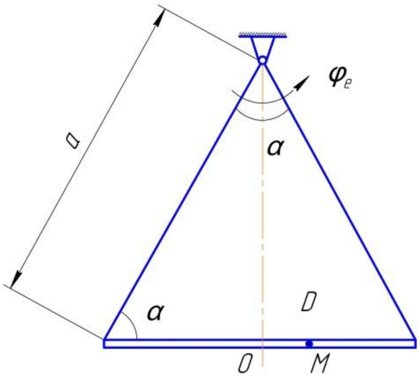
5



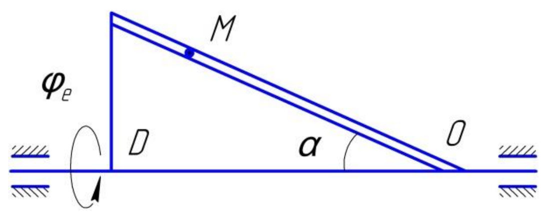
6



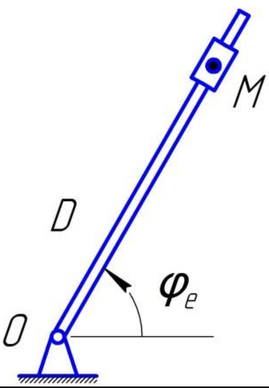
7



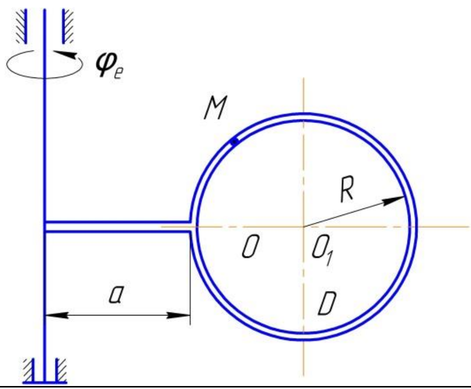
8



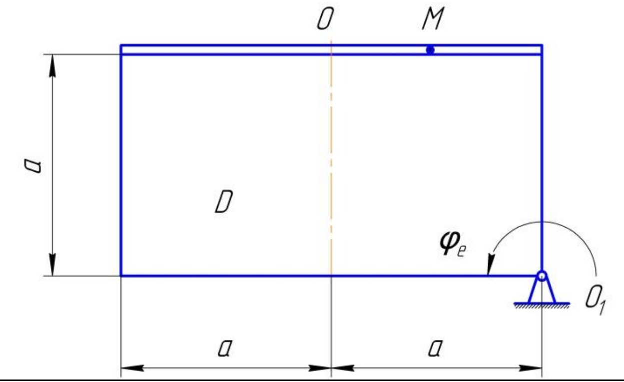
9



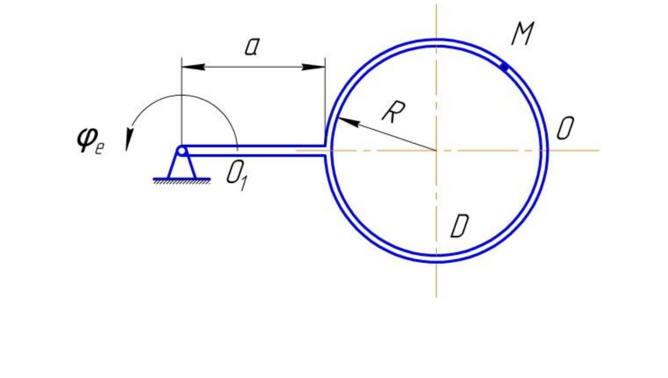
10



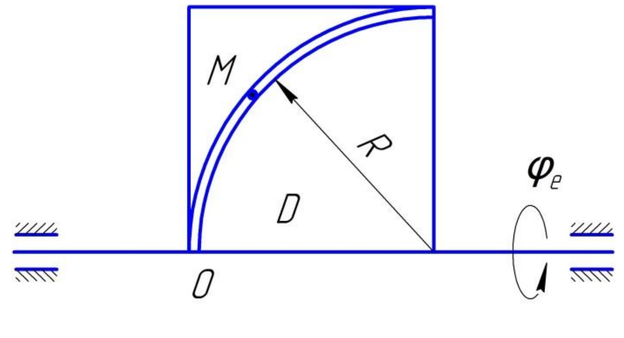
11



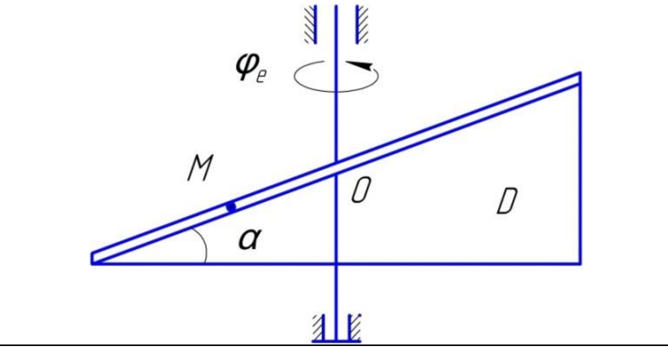
12



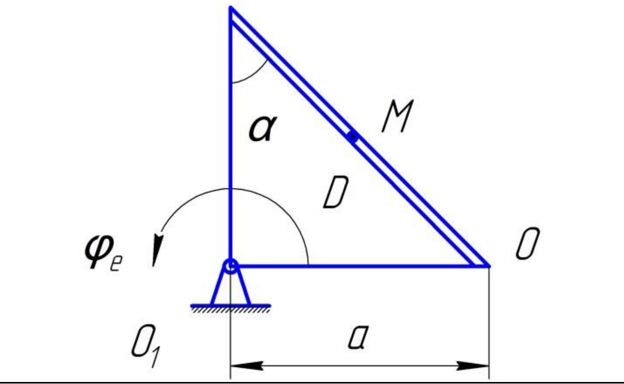
13



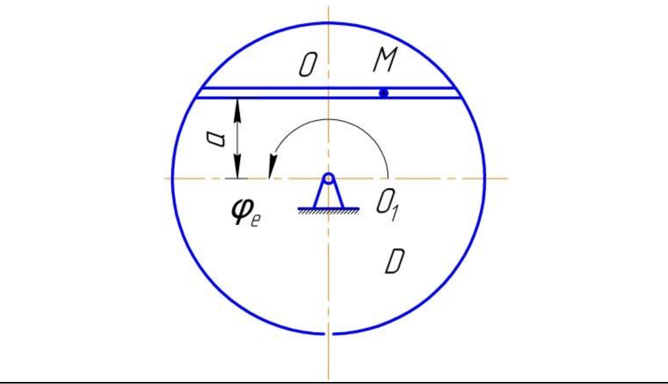
14



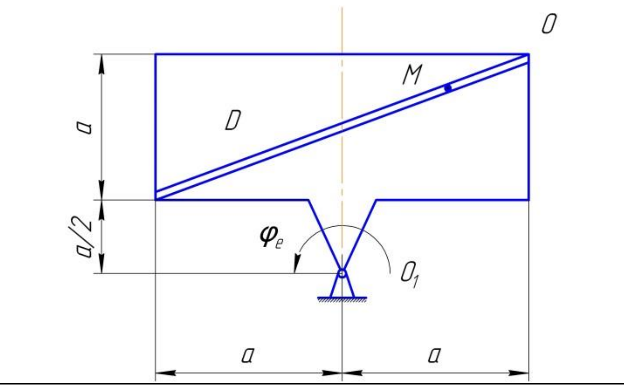
15



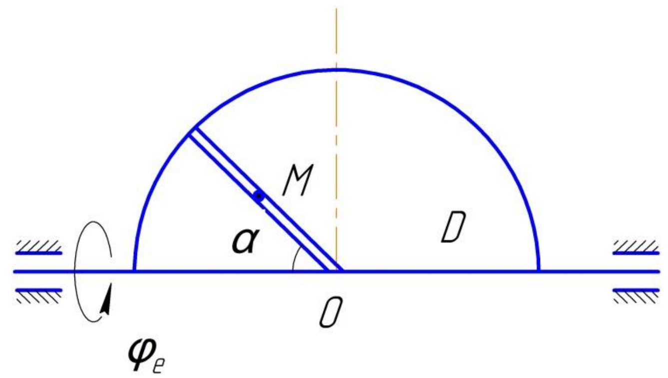
16



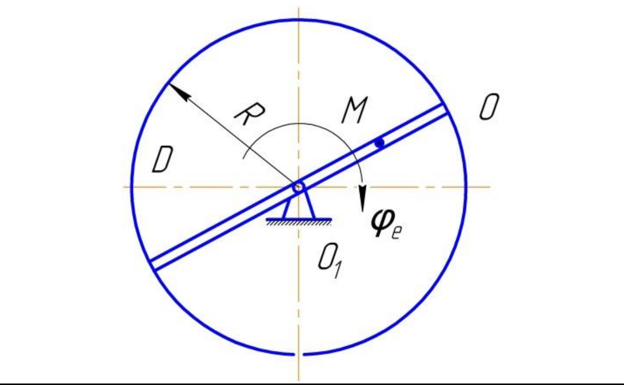
17



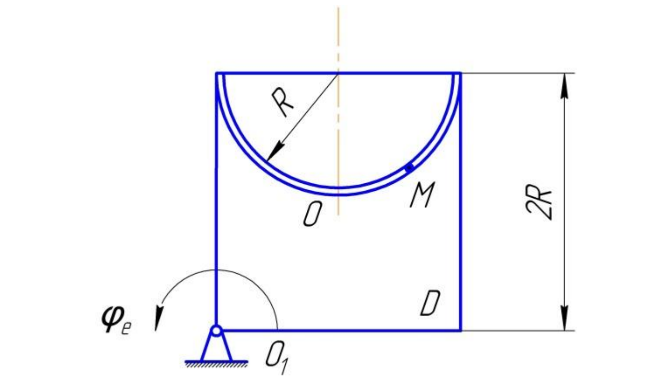
18



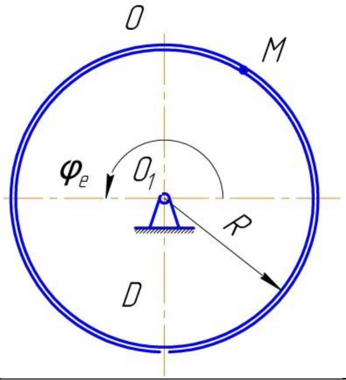
19



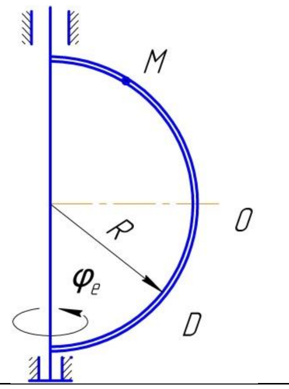
20



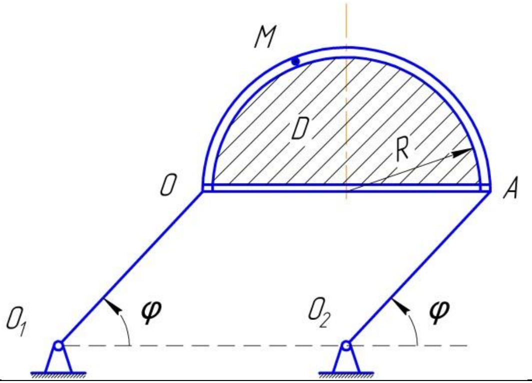
21



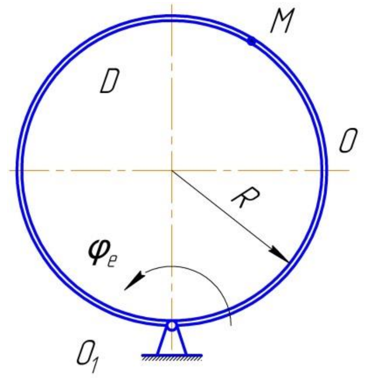
22



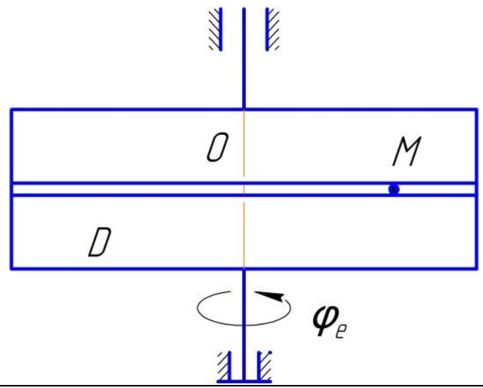
23



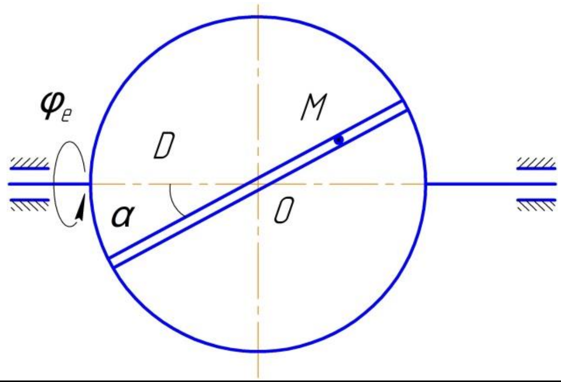
24



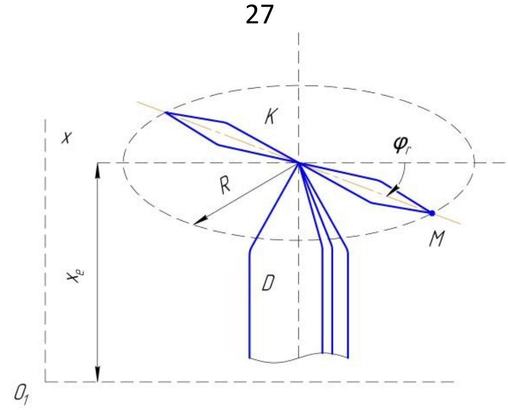
25



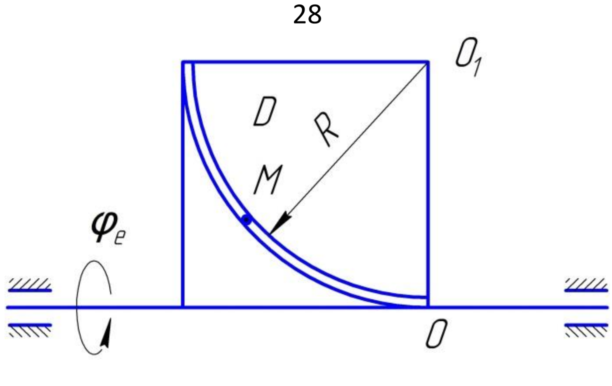
26



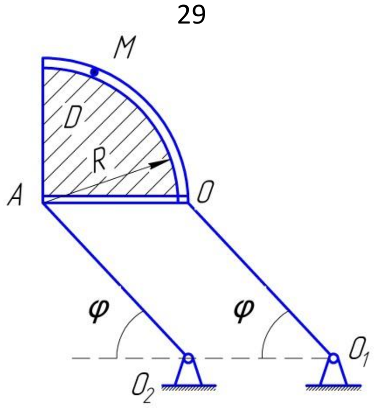
27



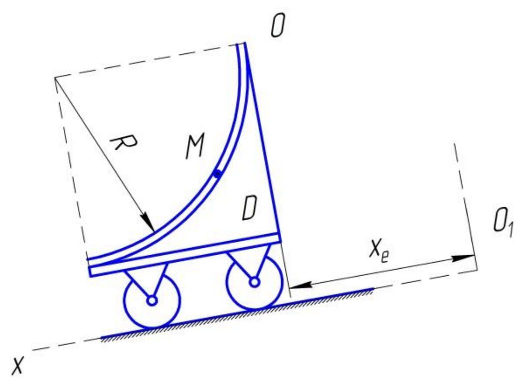
28



29



30



Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

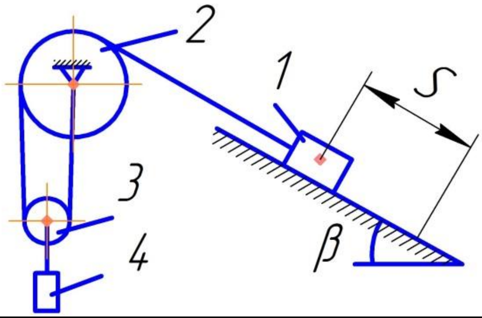
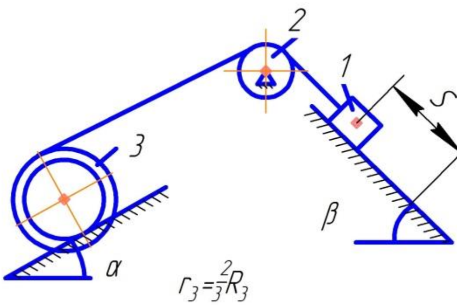
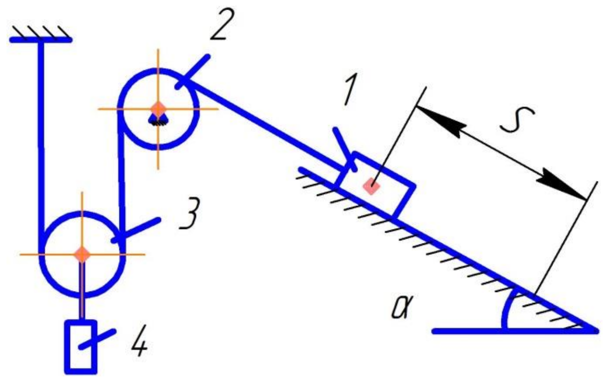
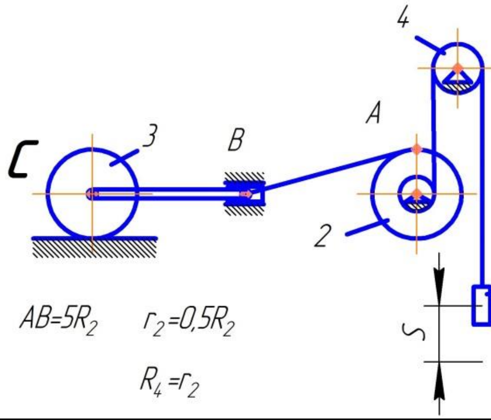
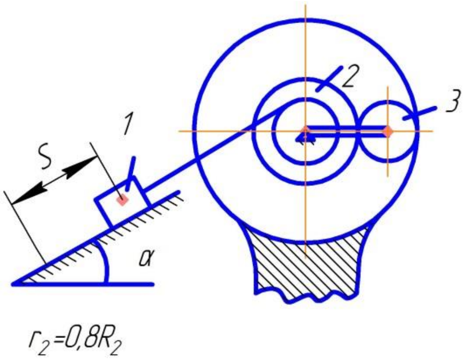
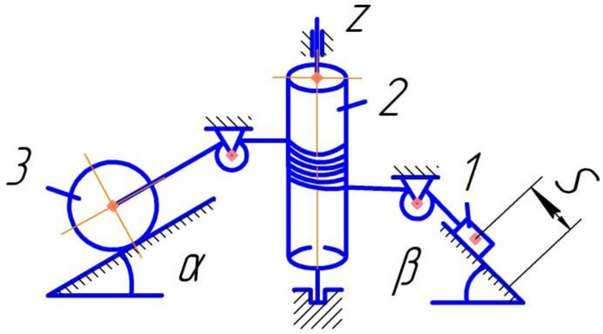
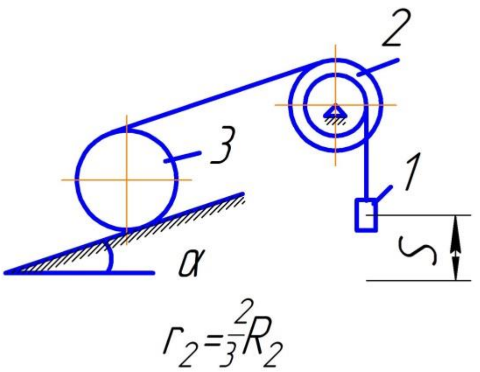
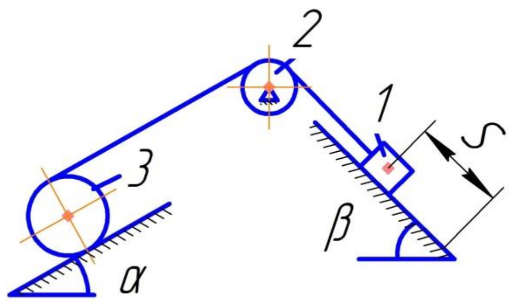
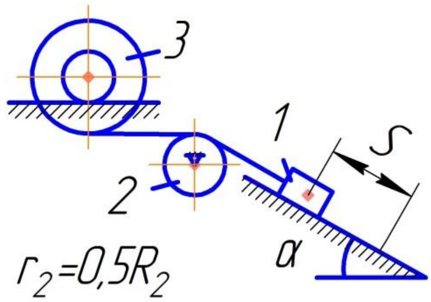
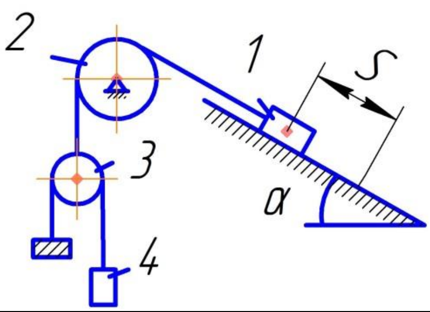
Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рисунках. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 – радиусы больших и малых окружностей; i_{2x}, $i_{3\xi}$ – радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β – углы наклона плоскостей к горизонту; f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения.

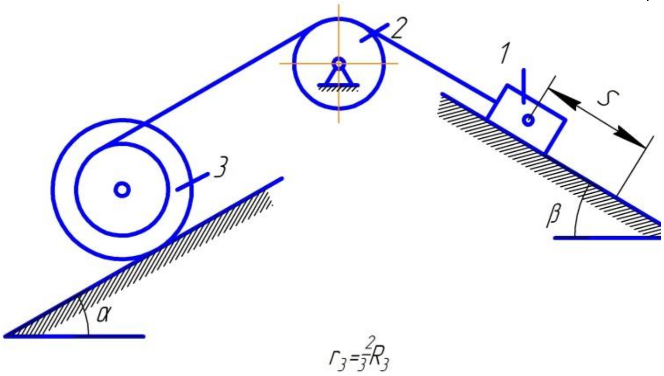
Необходимые для решения данные приведены в таблице. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

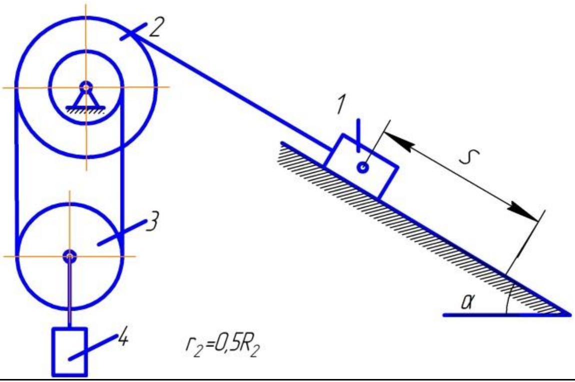
№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	$i_{3\xi}$	α	β	f	δ, см	s, м	Примечание
	кг				см		см		град					
1	m	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	-	-	-	-	-	60	0,12	-	2	
2	m	$1/2m$	$1/3m$	-	-	30	-	20	30	45	0,18	0,15	2	
3	m	m	$1/10m$	m	-	-	-	-	45	-	0,09	-	2	
4	m	$2m$	$30m$	m	20	40	18	-	-	-	-	0,25	$0{,}1\pi$	Массами звеньев *AB*, *BC* и ползуна *B* пренебречь
5	m	$2m$	m	-	20	15	18	-	60	-	0,15	-	$0{,}28\pi$	Массой водила пренебречь
6	m	$2m$	m	-	-	28	-	-	30	45	0,08	0,25	1,5	
7	m	$2m$	$2m$	-	16	25	14	-	30	-	-	0,15	2	
8	m	$1/3m$	$1/3m$	-	-	30	-	-	30	45	0,10	0,22	1,75	
9	m	$3m$	$2m$	-	-	30	-	20	30	-	0,15	0,20	1,5	
10	m	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	-	-	-	-	60	-	0,15	-	3	
11	m	$1/2m$	$1/4m$	-	-	30	-	25	30	45	0,18	0,23	2,5	
12	m	$1/2m$	$1/5m$	m	30	-	20	-	30	-	0,13	-	2,5	
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	-	30	-	-	0,18	2	
14	m	$1/2m$	$4m$	$4m$	-	25	-	-	-	-	-	0,17	2	Массы каждого из четырех колес одинаковы
15	m	$1/2m$	$3m$	$1/2m$	20	15	18	-	60	-	-	0,23	1,5	
16	m	$1/10m$	$1/20m$	$1/10m$	10	12	-	-	-	-	-	-	$0{,}05\pi$	Массой водила пренебречь
17	m	$1/4m$	$1/5m$	$1/10m$	20	-	15	-	60	-	0,12	-	$0{,}16\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
18	m	$2m$	m	-	35	15	32	-	60	-	0,13	-	$0{,}2\pi$	Массой водила пренебречь
19	m	$1/3m$	$1/10m$	m	24	-	20	-	60	-	0,05	-	1,5	
20	m	$2m$	$15m$	-	20	15	16	-	30	-	0,12	0,19	$0{,}2\pi$	Массами звеньев *AB*, *BC* и ползуна *B* пренебречь
21	m	m	$2m$	-	20	20	16	-	30	45	0,18	0,30	1,2	
22	m	$1/2m$	$1/4m$	-	20	10	-	-	60	-	0,15	-	$0{,}1\pi$	Массой водила пренебречь
23	m	m	$1/10m$	$4/5m$	20	-	18	-	30	-	0,13	-	1	
24	m	$3m$	$18m$	-	20	30	18	-	-	-	-	0,50	$0{,}08\pi$	Массами звеньев *AB*, *BC* и ползуна *B* пренебречь
25	m	$1/3m$	$1/4m$	-	16	20	-	-	-	-	-	-	$0{,}04\pi$	Массой водила пренебречь
26	m	$1/2m$	m	$1/3m$	30	-	20	-	-	-	-	-	$0{,}6\pi$	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
27	m	m	$3m$	$1/2m$	20	20	16	-	30	-	-	0,22	2	
28	m	m	$4m$	-	20	-	14	-	60	-	0,09	-	$0{,}1\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
29	m	$1/4m$	$1/8m$	-	-	35	-	-	15	30	0,17	0,18	2,4	
30	m	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	-	0,10	-	2	

1	2
	
3	**4**
	
5	**6**
	
7	**8**
	
9	**10**
	

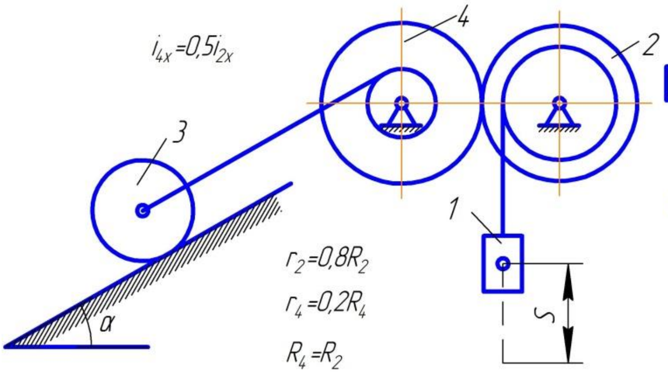
11



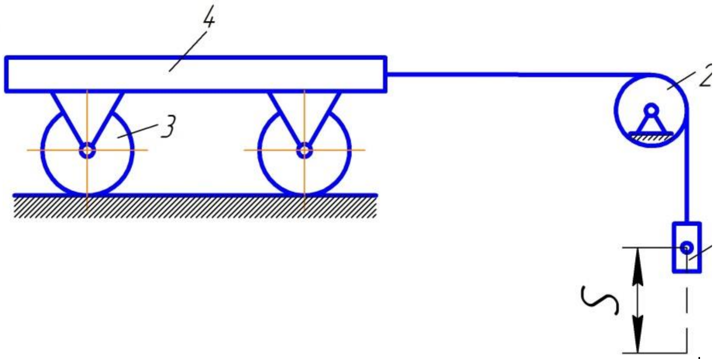
12



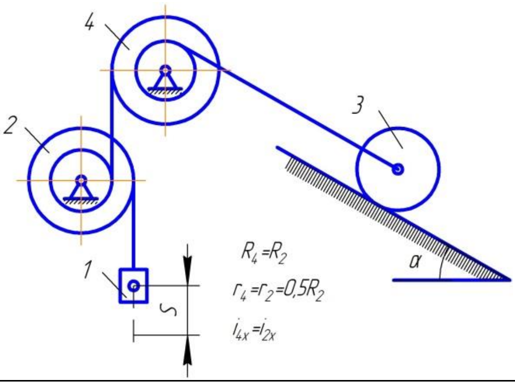
13



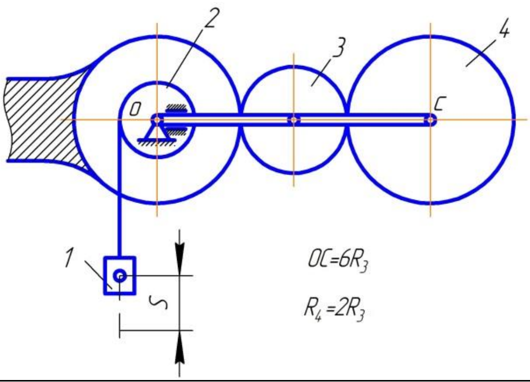
14



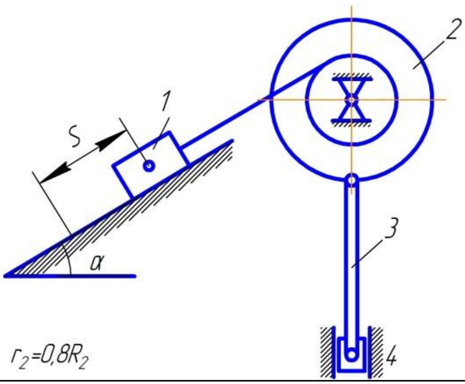
15



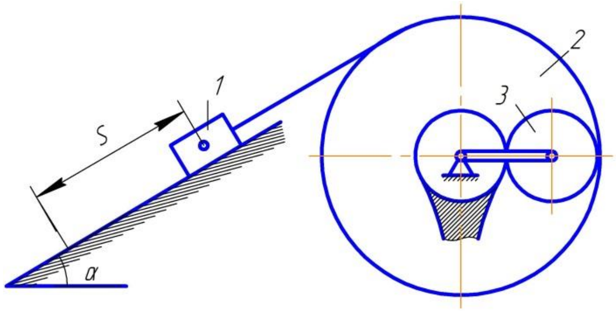
16



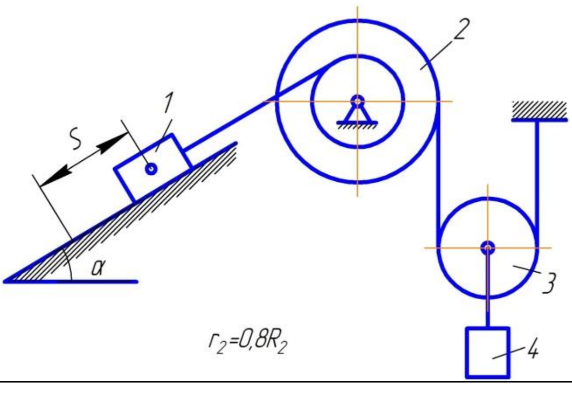
17



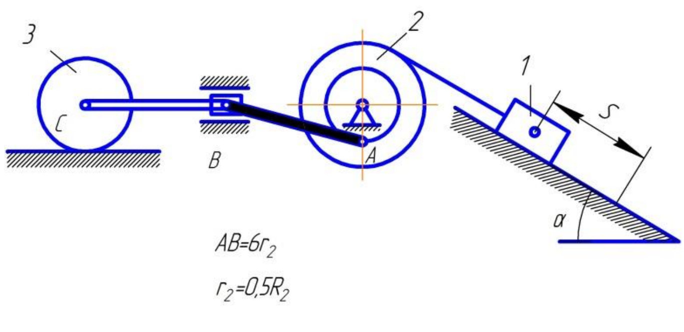
18



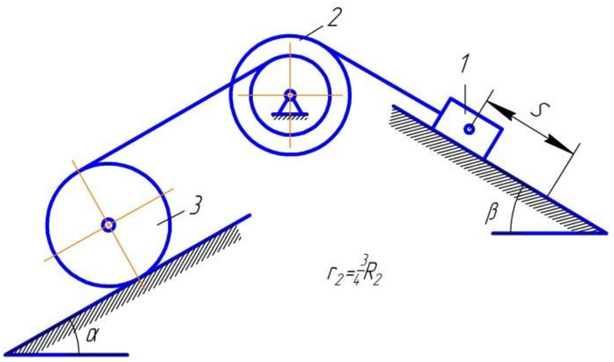
19



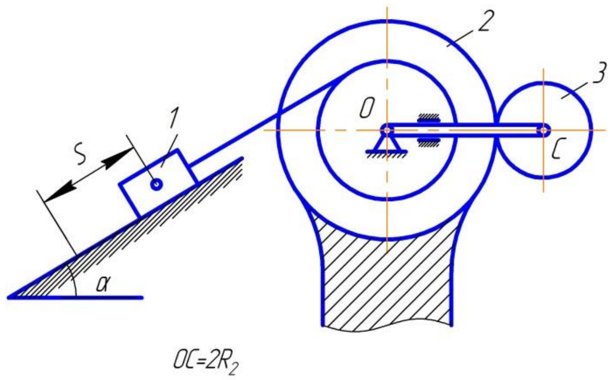
20



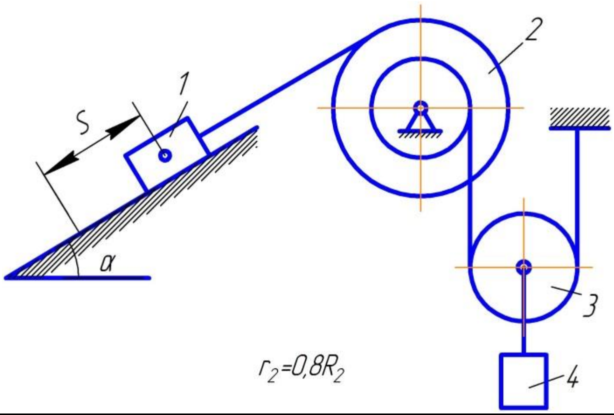
21



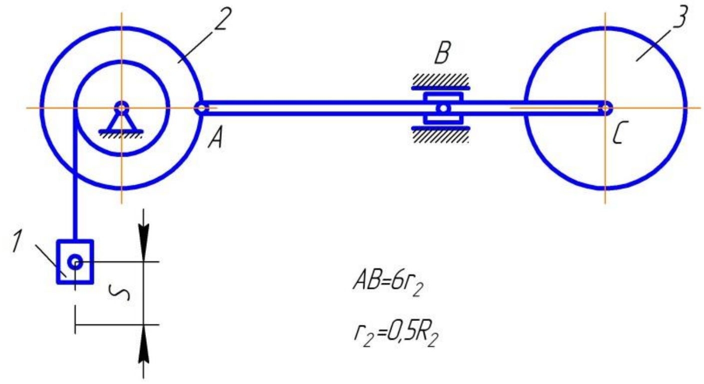
22



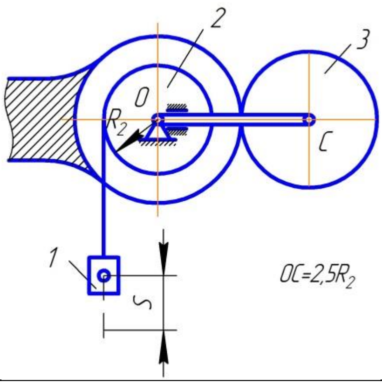
23



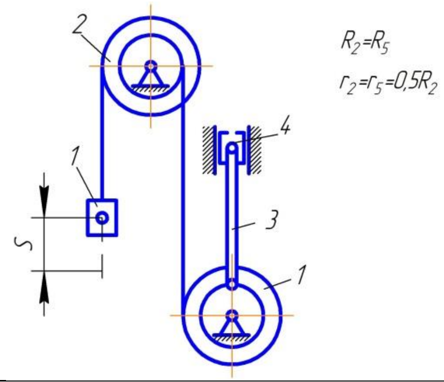
24



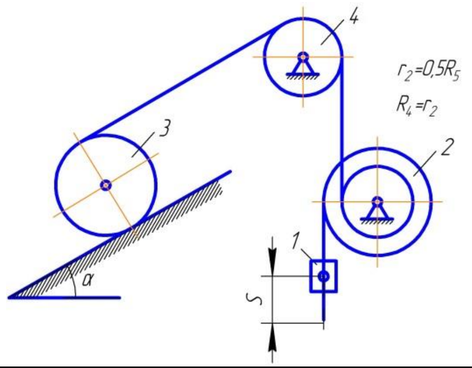
25



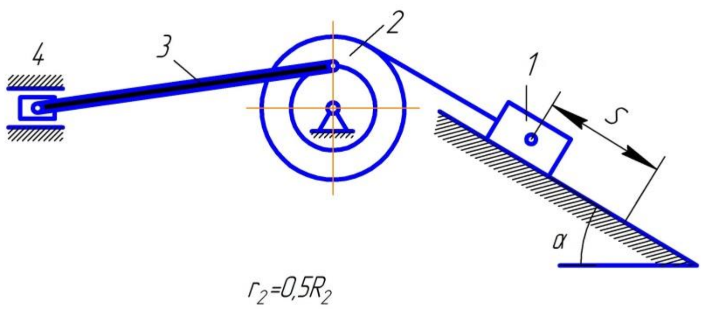
26



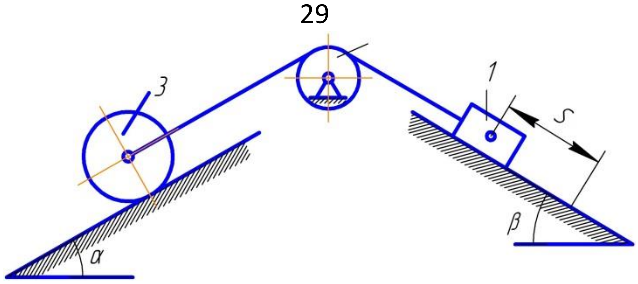
27



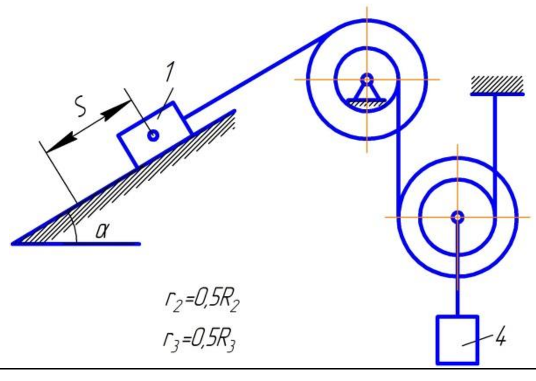
28



29



30



Исследование относительного движения материальной точки

Шарик *М*, рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу движущегося тела *А*. Найти уравнение относительного движения этого шарика $x = f(t)$, приняв за начало отсчета точку *О*.

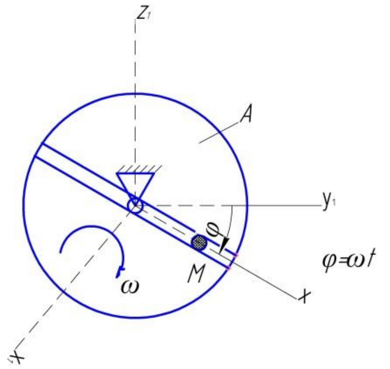
Тело *А* равномерно вращается вокруг неподвижной оси (в вариантах 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 20, 23, 26 и 30 ось вращения z_1 вертикальна, в вариантах 1, 12, 15 и 25 ось вращения x_1 горизонтальна). В вариантах 5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 28 и 29 тело *А* движется поступательно, параллельно вертикальной плоскости $y_1O_1z_1$.

Найти также координату x и давление шарика на стенку канала при заданном значении $t = t_1$. Данные, необходимые для выполнения задания, приведены в таблице.

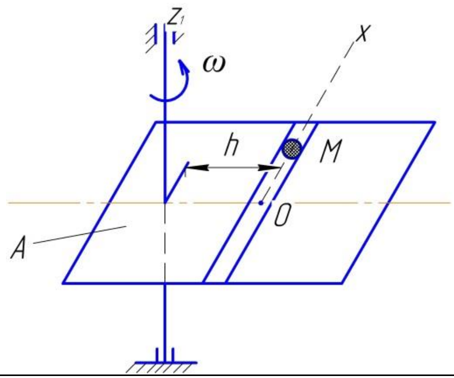
В задании приняты следующие обозначения: m – масса шарика *М*; ω – постоянная угловая скорость тела А (в вариантах 1, 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 20, 23, 25, 26, 30) или кривошипов O_1B и O_2C (в вариантах 6, 17, 22); с – коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик *М*; l_0 – длина недеформированной пружины; f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала; x_0, $\dot{x}_0$ – начальная координата и проекция начальной скорости на ось x.

№ вар.	α, град	m, кг	ω, рад/с	Начальные данные		t_1, с	c, Н/м	l_0, м	Уравнение движения тела A, м	r, h, м	f
				x_0, м	$\dot{x}_0$, м/с						
1	-	0,04	2π	0	0,4	0,5	-	-	-	-	0
2	-	0,03	3π	0	0,2	0,4	-	-	-	0,15	0
3	45	0,01	π	0,5	0	0,2	-	-	-	-	0
4	-	0,07	3π	0,2	-0,8	0,1	0,36	0,15	-	-	0
5	60	0,05	-	0,6	0	0,2	-	-	$y_1 = 0{,}6 - 2t^3$	-	0
6	-	0,03	6π	0,5	0	0,2	-	-	-	0,10	0
7	-	0,04	π	0,3	0	0,2	-	-	-	0,20	0
8	30	0,06	-	0,8	0	0,1	-	-	$z_1 = 0{,}1\cos 2\pi t$	-	0
9	30	0,02	-	0,4	0	0,1	0,20	0,20	$y_1 = 4t^3$	-	0
10	60	0,04	4π	0,4	0	0,1	-	-	-	0,20	0
11	30	0,02	3π	0	0	0,4	-	-	-	-	0
12	-	0,06	4π	0,05	0	0,1	0,20	0,10	-	-	0
13	-	0,07	-	0	0,5	0,2	-	-	$z_1 = 5 - 10t^2$	-	0,1
14	-	0,03	2π	0,5	0	0,1	-	-	-	0,20	0,2
15	-	0,02	4π	0,5	0	1,0	-	-	-	-	0
16	45	0,01	-	1,0	2,0	0,1	-	-	$y_1 = 0{,}06t^3$	-	0
17	-	0,01	2π	0	4,0	0,2	-	-	-	0,20	0
18	40	0,01	-	0,6	0	0,1	-	-	$y_1 = 0{,}1\sin \pi t$	-	0
19	-	0,06	-	0,4	-0,8	0,1	0,40	0,20	$y_1 = 8t - t^3$	-	0
20	-	0,02	8π	0,1	0	0,2	0,20	0,10	-	-	0
21	30	0,06	-	0,5	0,1	0,1	-	-	$y_1 = 2 + t^2$	-	0,2
22	-	0,02	3π	0,1	3,0	0,1	-	-	-	0,10	0
23	-	0,03	5π	-0,5	-0,1	0,2	-	-	-	-	0
24	60	0,02	-	0	0,2	0,2	-	-	$y_1 = 0{,}1\cos 1{,}5\pi t$	-	0
25	-	0,04	π	0,1	-0,4	0,1	0,20	0,20	-	-	0
26	-	0,08	3π	0,2	0,3	0,1	0,20	0,10	-	-	0
27	75	0,01	-	1,0	0,6	0,3	-	-	$z_1 = 0{,}1\sin 0{,}5\pi t$	-	0
28	-	0,04	-	0,8	0	0,3	-	-	$y_1 = 8 - 5t^3$	-	0,1
29	60	0,08	-	0,4	1,0	0,1	0,20	0,20	$y_1 = 8 + t^3$	-	0
30	50	0,04	$\pi/2$	0	0,5	0,2	-	-	-	0,50	0

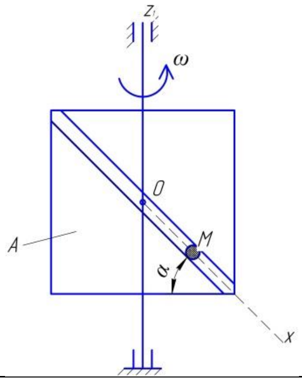
1



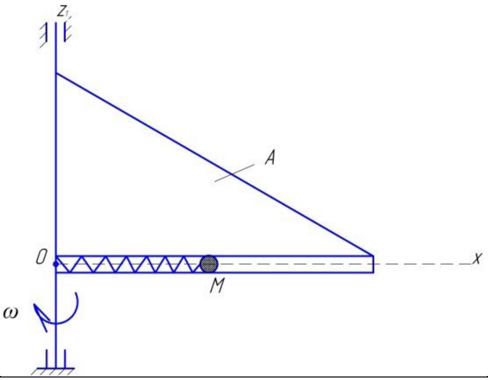
2



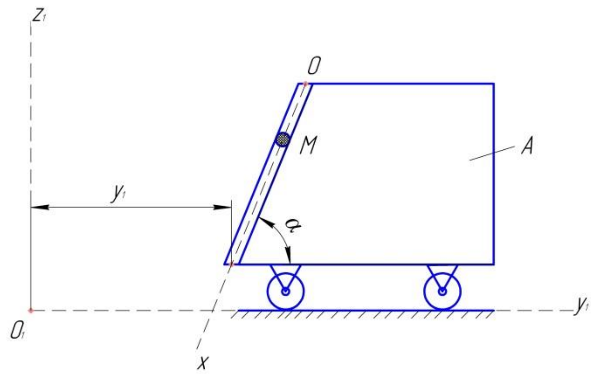
3



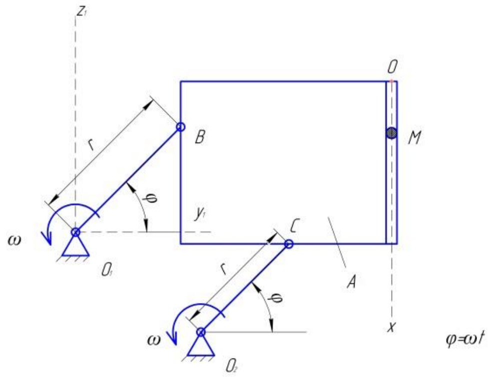
4



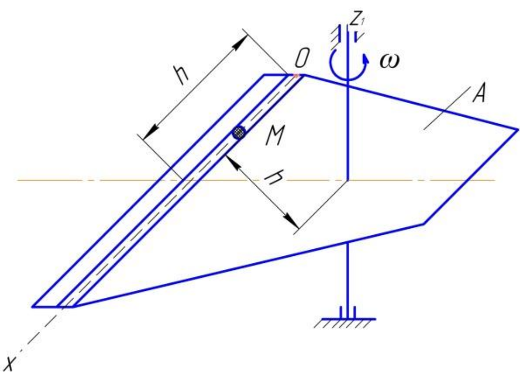
5



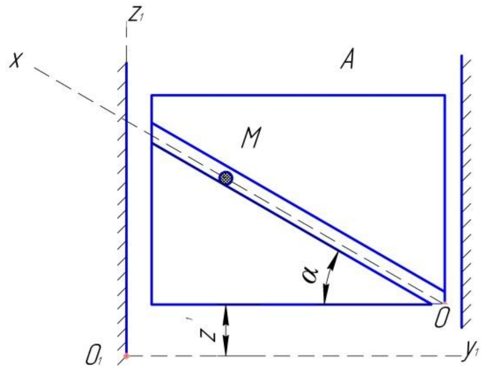
6



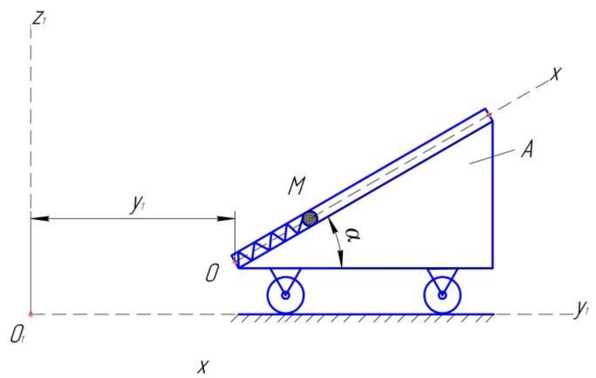
7



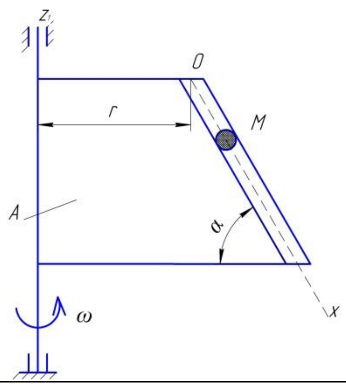
8



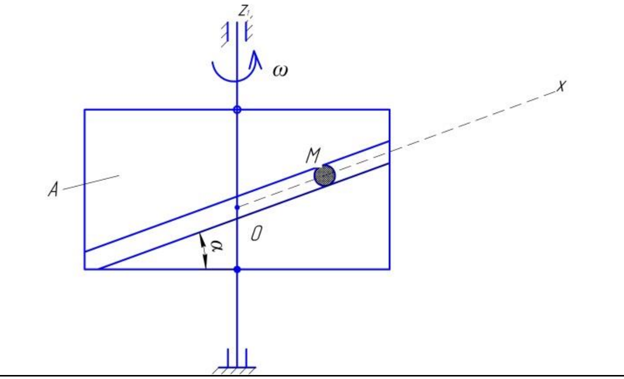
9



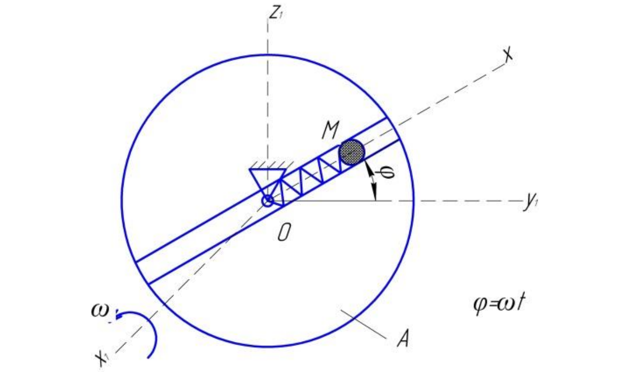
10



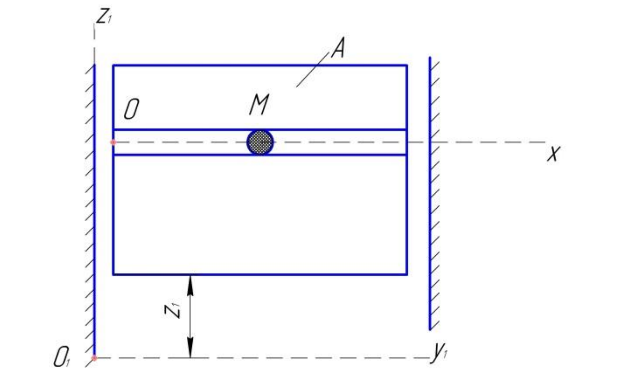
11



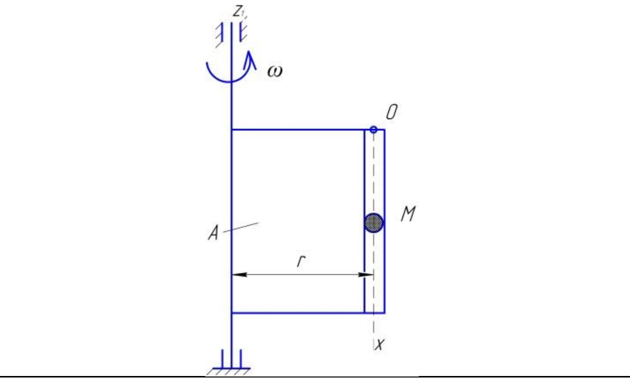
12



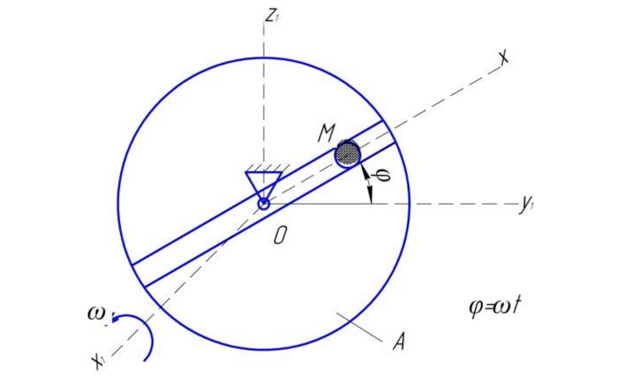
13



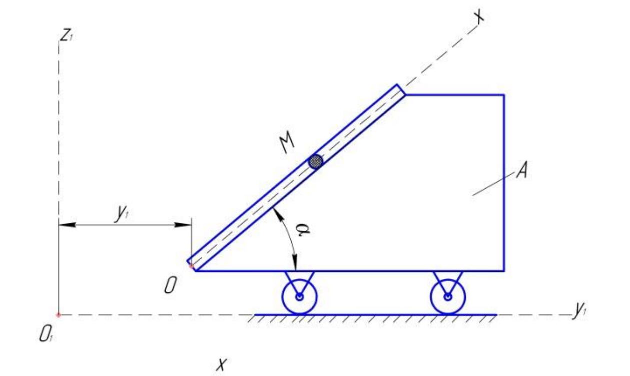
14



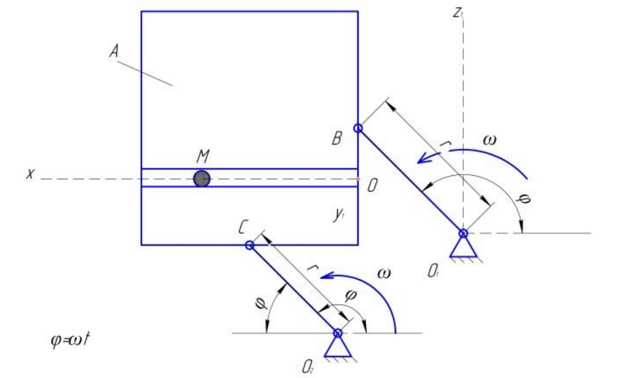
15



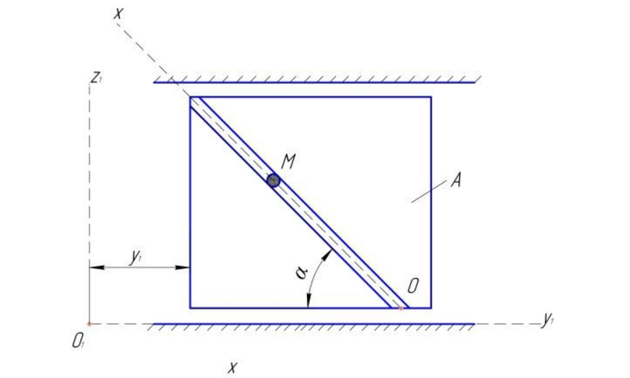
16



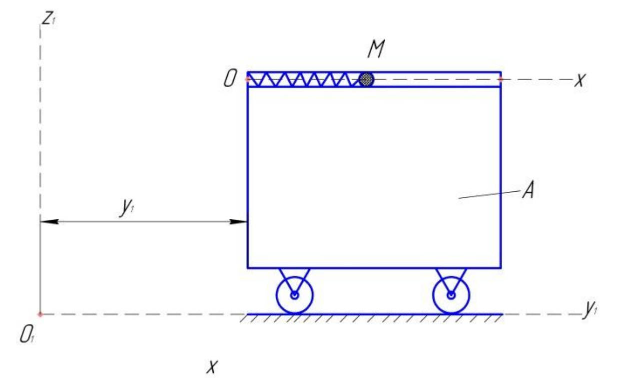
17



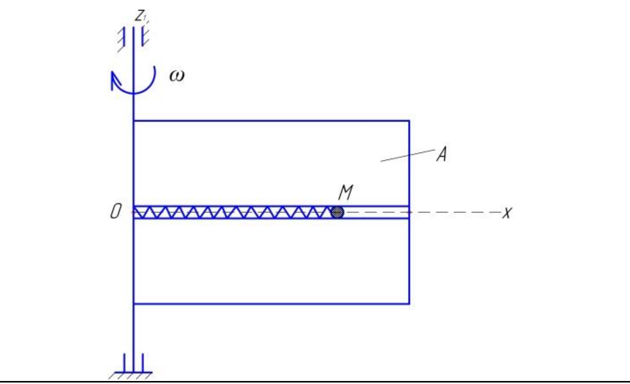
18



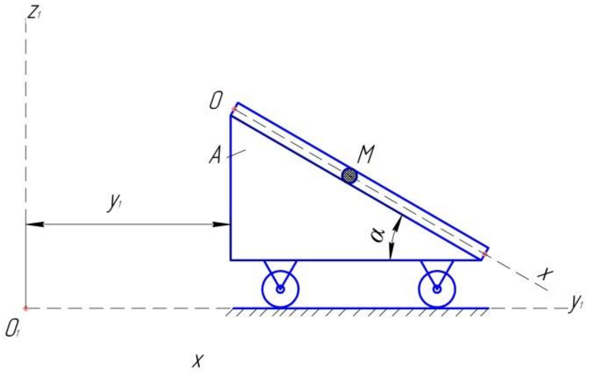
19



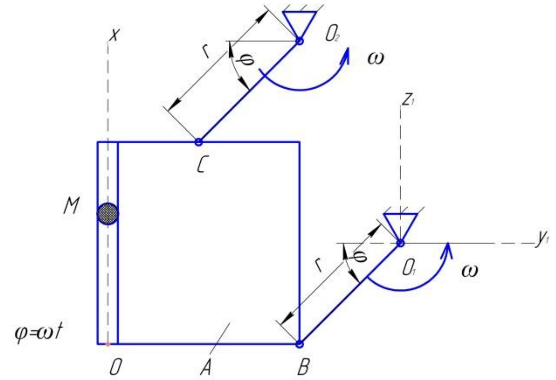
20



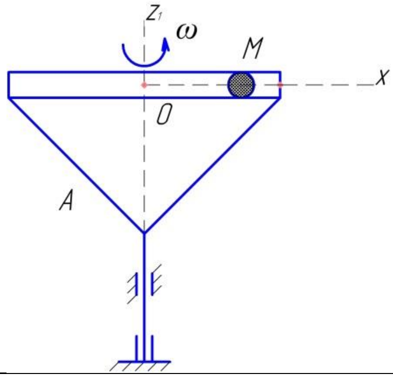
21



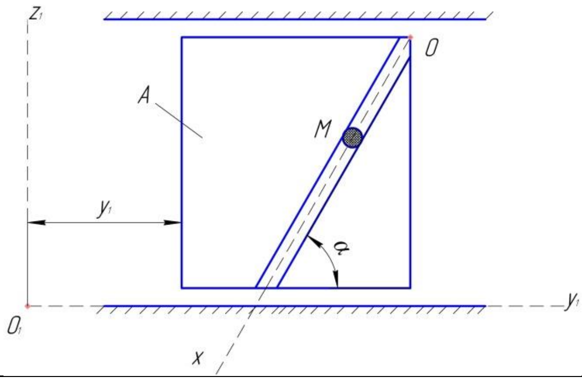
22



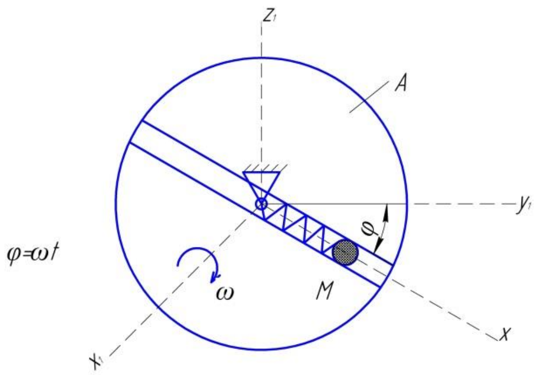
23



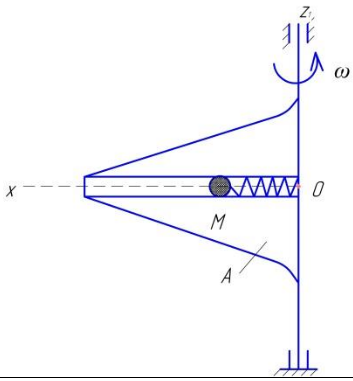
24



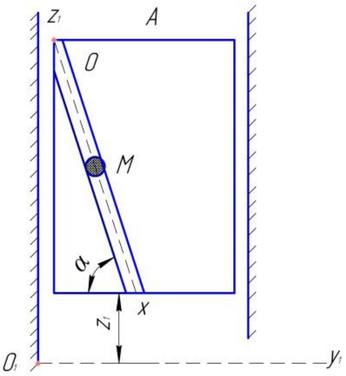
25



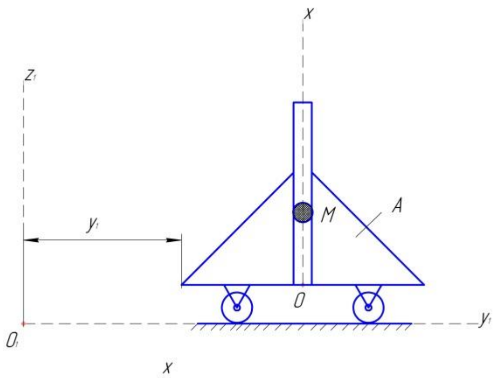
26



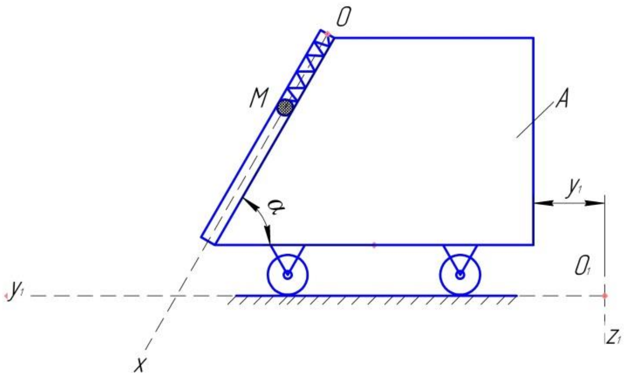
27



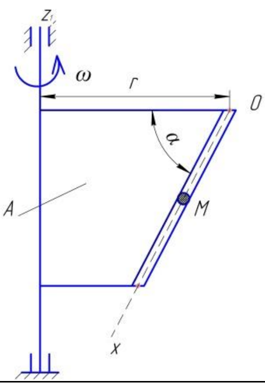
28



29



30



Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

По заданным уравнениям движения точки М установить вид её траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в таблице.

Номер варианта	Уравнения движения		t_1, с
	$x = x(t),\ см$	$y = y(t),\ см$	
1	$-t^2+2$	$-2t$	1
2	$5\cos^2(\pi t/3)+3$	$5\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-0{,}5\cos(\pi t^2/3)+3$	$0{,}5\sin(\pi t^2/3)-1$	1/2
4	$2t+2$	$-2/(t+1)$	1
5	$3\sin(\pi t/3)$	$-4\cos(\pi t/3)+4$	1/2
6	$5t^2+1$	$-10t$	1
7	$4t^2-t+1$	$5t^2-5t/4-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	2
9	$-4/(t+2)$	$4t+8$	1
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1/2
11	$-9t^2$	$5-3t$	1/2
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	2
13	$8\cos(\pi t^2/3)$	$-8\sin(\pi t^2/3)$	2
14	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	1
15	$6\cos(\pi t/3)$	$-5\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	1
17	$9\sin^2(\pi t/6)-5$	$-9\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	2
19	$-3t^2-4$	t	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	1
21	$4\sin(\pi t^2/6)-3$	$4\cos(\pi t^2/6)+1$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	1/3
23	$2-2t^2+t$	$4-5t^2+5t/2$	1
24	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1/2
25	$-6t$	$-2t^2-4$	2
26	$2\cos^2(\pi t/6)+2$	$-2\sin^2(\pi t/6)-5$	1
27	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	2
28	$-7t^2+2$	$-2t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	2
30	$5\cos(\pi t^2/3)-4$	$5\sin(\pi t^2/3)+1$	1

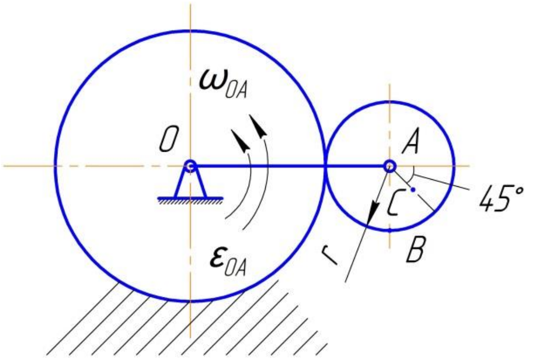
Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек *B* и *C*, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

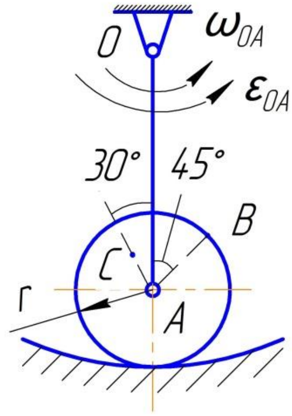
Схемы механизмов помещены на рисунках, а необходимые для расчета данные приведены в таблице.

№ вар.	Размеры, см				ω_{OA}, рад/с	ω_{I}, рад/с	ε_{OA}, рад/с^2	V_A, м/с	a_A, м/с^2
	OA	*r*	*AB*	*AC*					
1	40	15	-	8	3	-	2	-	-
2	30	15	-	8	4	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	2	-	8	-	-
5	25	-	-	20	2	-	1	-	-
6	40	15	-	6	3	2	0	-	-
7	35	-	75	60	2	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
10	25	-	80	20	2	-	2	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	3	-	4	-	-
14	45	15	-	8	1	10	0	-	-
15	40	15	-	8	2	-	1	-	-
16	55	20	-	-	4	-	5	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	5	-	6	-	-
19	20	15	-	10	2	3	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	4	-	8	-	-
22	35	-	60	40	2	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	1	-	3	-	-
25	20	-	70	20	2	-	2	-	-
26	20	15	-	10	3	4	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	4	-	1	-	-
29	12	-	35	15	2	-	6	-	-
30	40	-	-	20	2	-	10	-	-

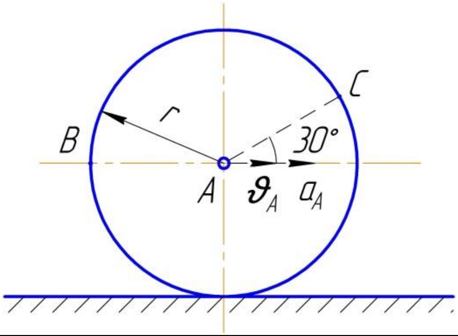
1



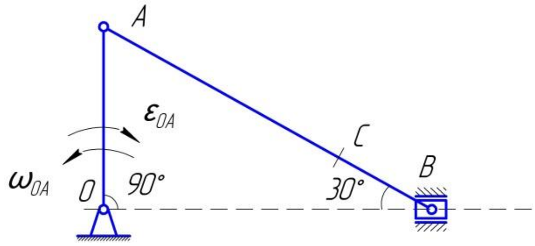
2



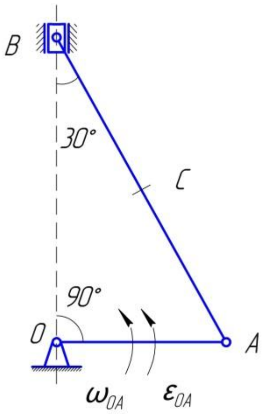
3



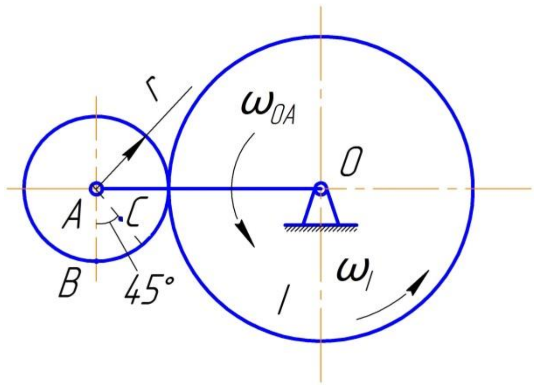
4



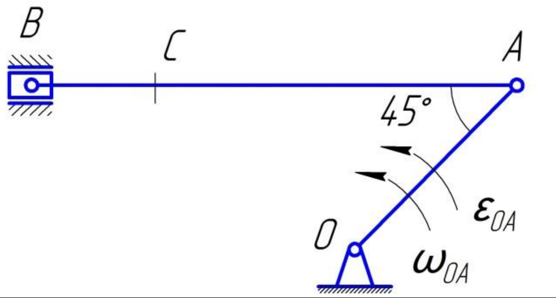
5



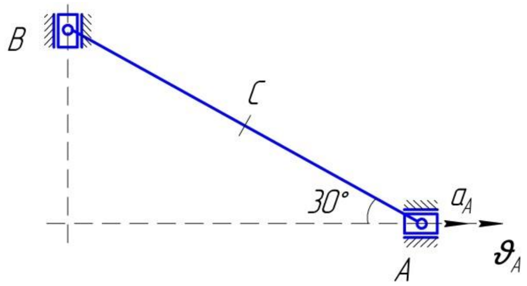
6



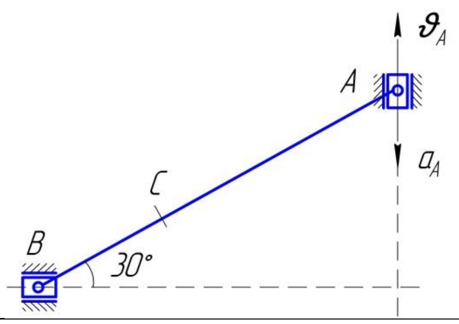
7



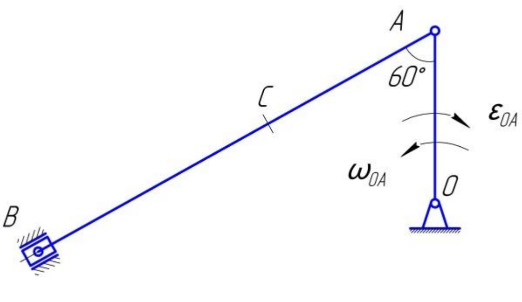
8



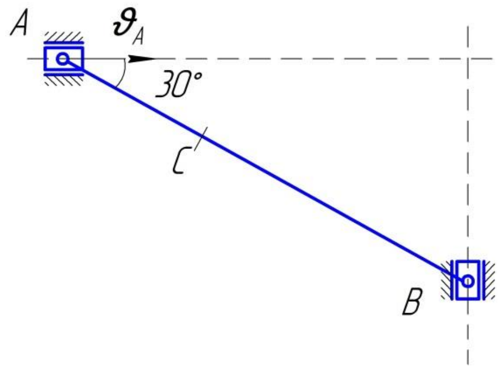
9



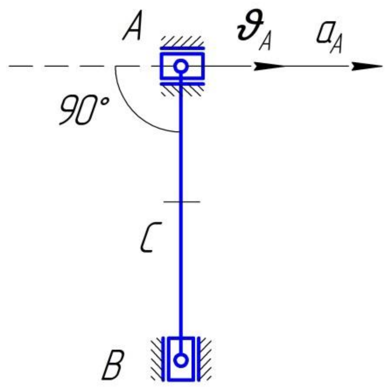
10



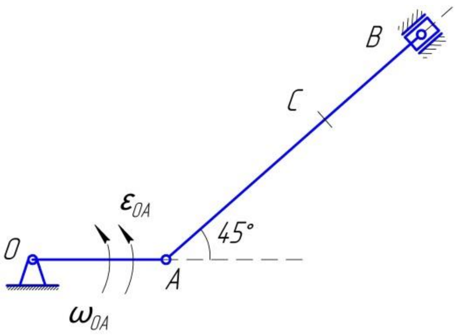
11



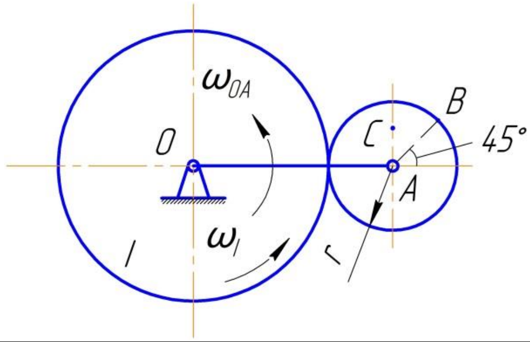
12



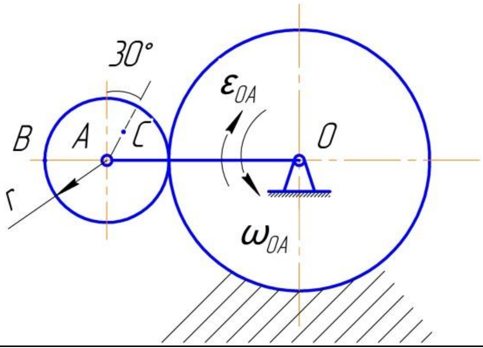
13



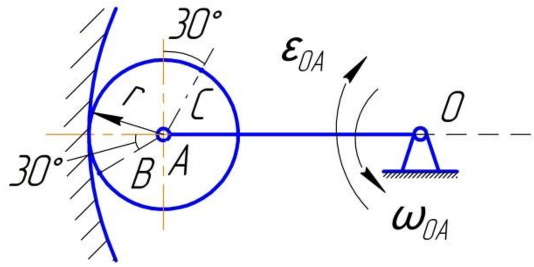
14



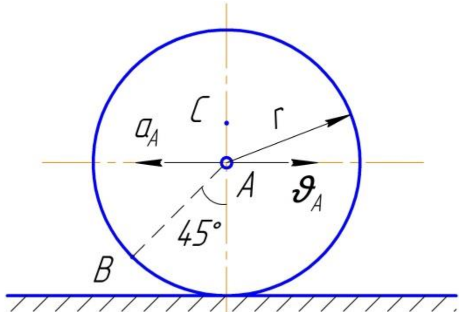
15



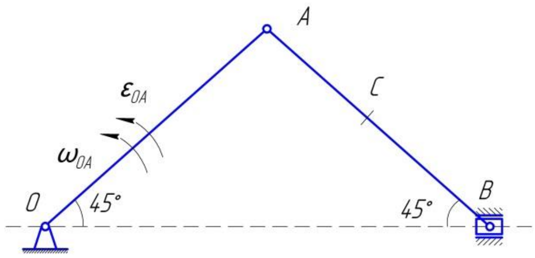
16



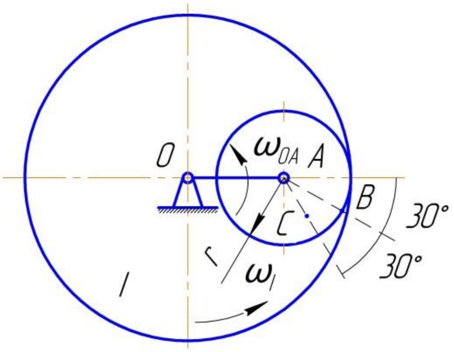
17



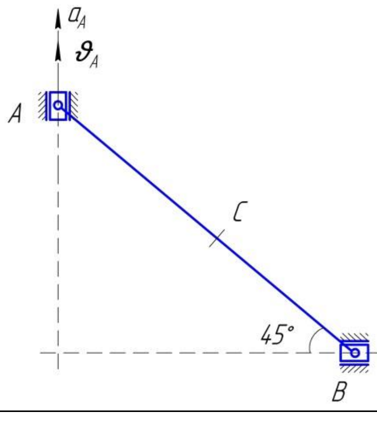
18



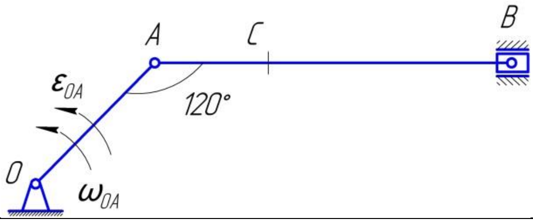
19



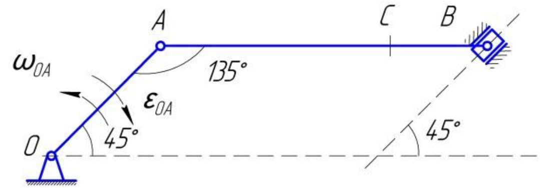
20



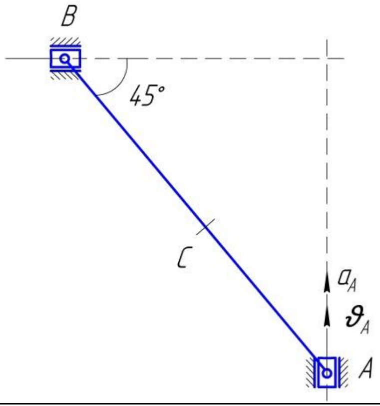
21



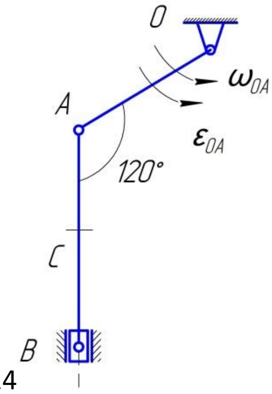
22



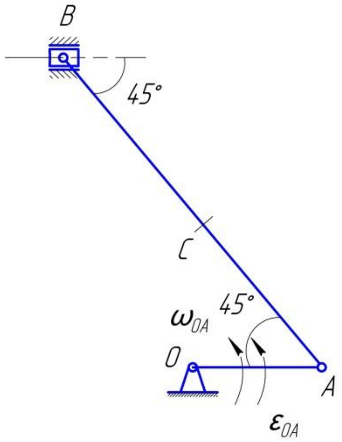
23



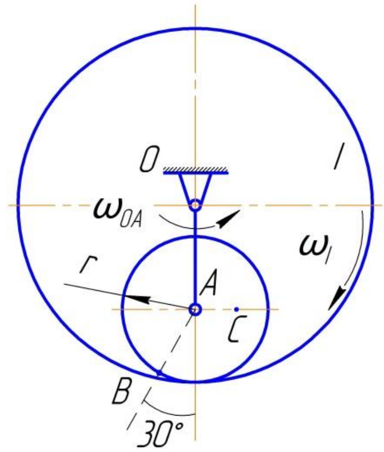
24



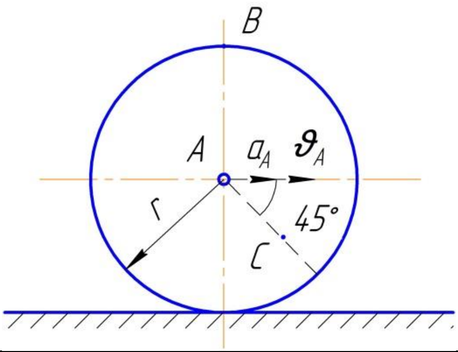
25



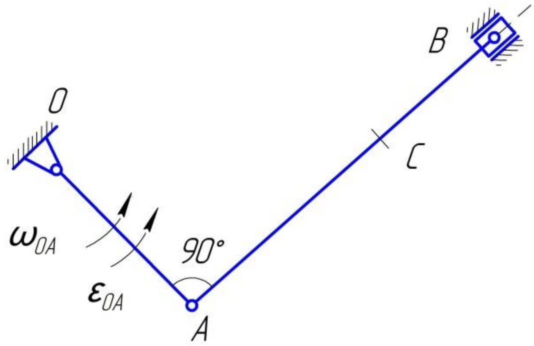
26



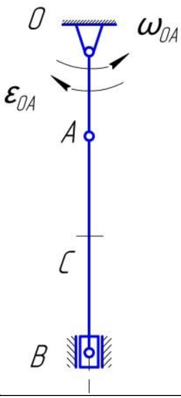
27



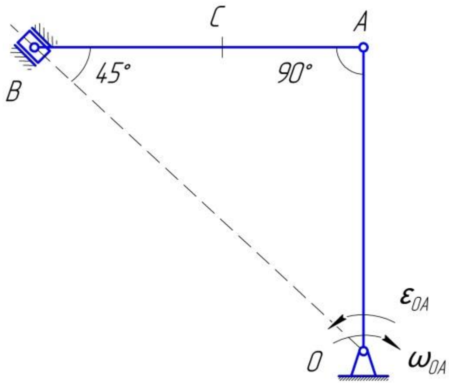
28



29



30

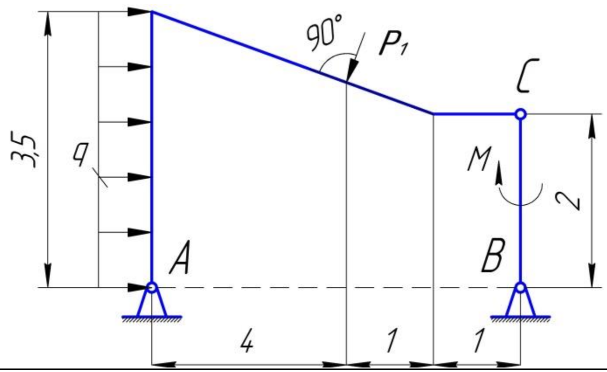


Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

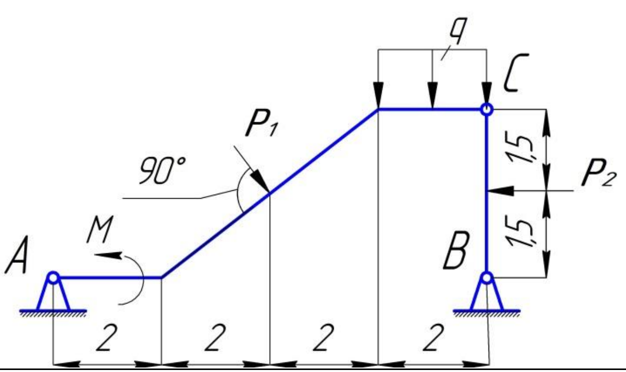
Конструкция состоит из двух частей. Установить при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции, указанной в таблице 1, наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения С. На рисунках показан первый способ соединения – с помощью шарнира С. Второй способ соединения – с помощью скользящей заделки, схемы которой показаны в таблице 2.

№ вар.	P_1	P_2	М, кН · м	q, кН / м	Исследуемая реакция
	кН				
1	8	-	22	3,4	X_A
2	12	10	14	3,6	R_A
3	13	9	26	3,8	R_B
4	14	-	18	4,0	M_A
5	17	-	30	3,0	R_A
6	8	8	25	2,5	M_A
7	3	7	20	2,0	R_B
8	12	6	15	1,5	M_A
9	17	-	10	1,0	X_A
10	19	-	5	2,2	R_A
11	15	5	7	2,1	R_D
12	8	4	9	2,0	R_B
13	17	6	11	2,2	R_A
14	13	-	13	2,4	M_A
15	19	8	15	2,6	M_B
16	3	10	20	0,4	R_B
17	4	12	24	0,6	R_A
18	5	10	22	0,8	M_B
19	6	9	20	1,0	M_B
20	7	8	18	1,2	R_B
21	8	7	16	1,4	R_A
22	9	6	25	1,6	R_A
23	10	5	20	1,8	R_A
24	11	4	15	2,0	M_A
25	12	6	10	2,2	R_B
26	13	8	12	2,4	R_B
27	14	7	14	2,6	X_A
28	12	9	16	2,8	R_A
29	4	10	18	3,0	M_A
30	2	12	20	3,2	M_B

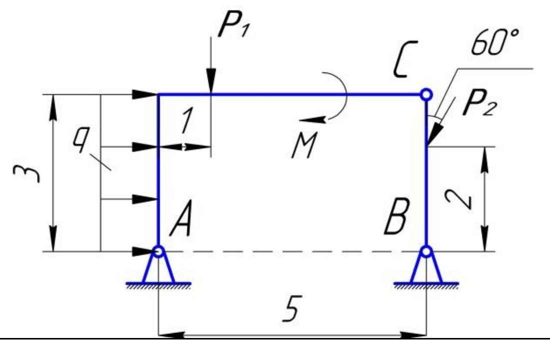
1



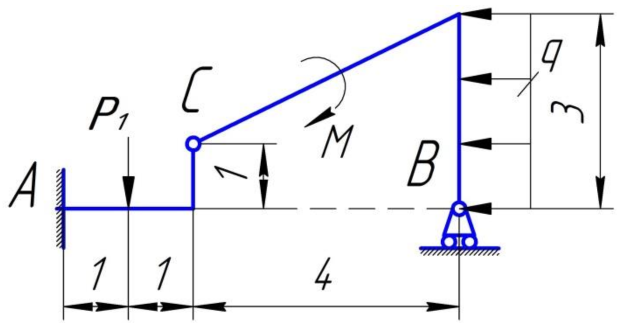
2



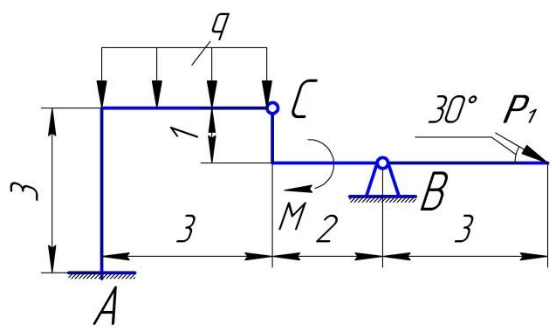
3



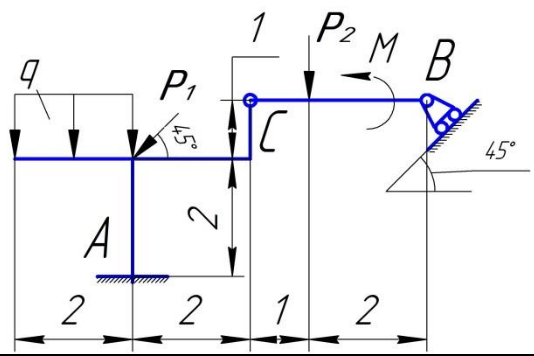
4



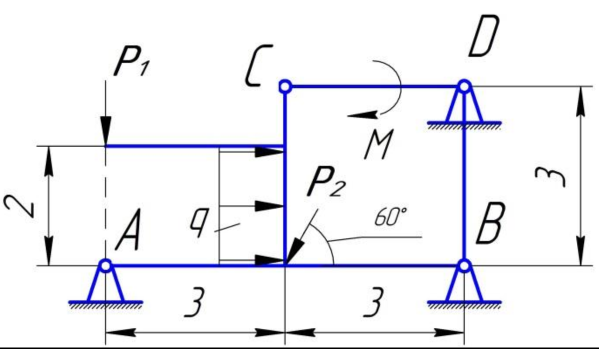
5



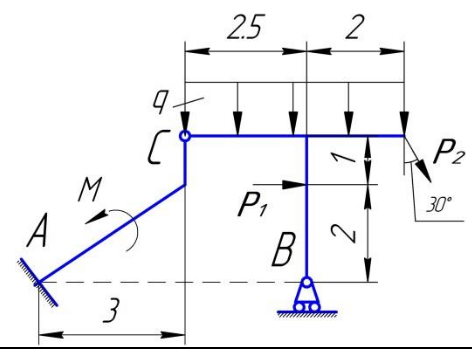
6



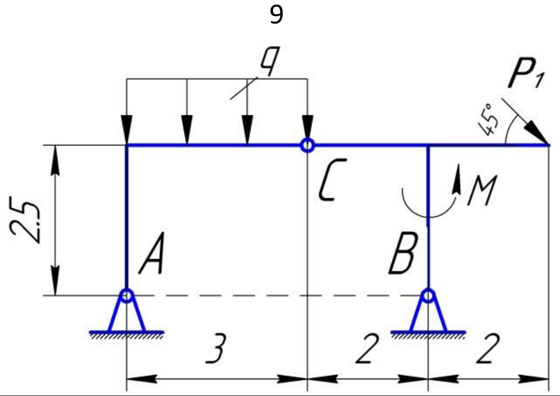
7



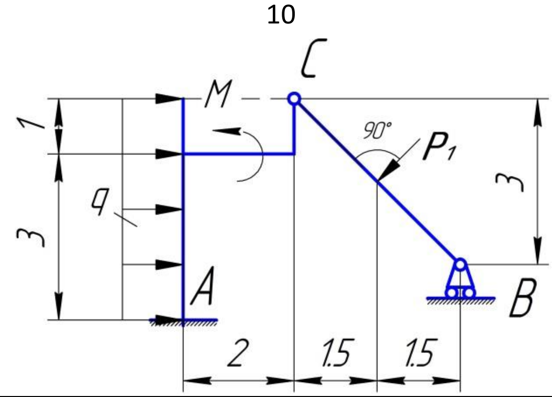
8



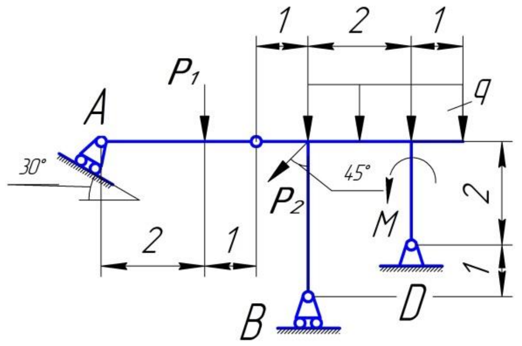
9



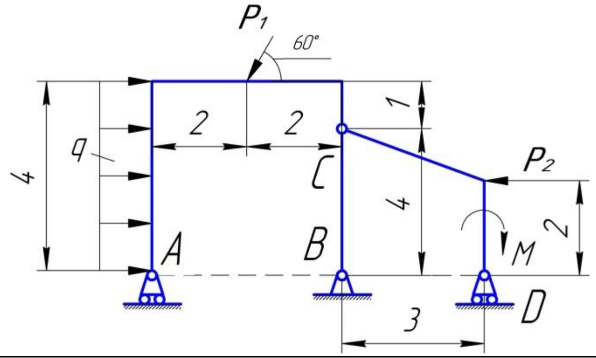
10



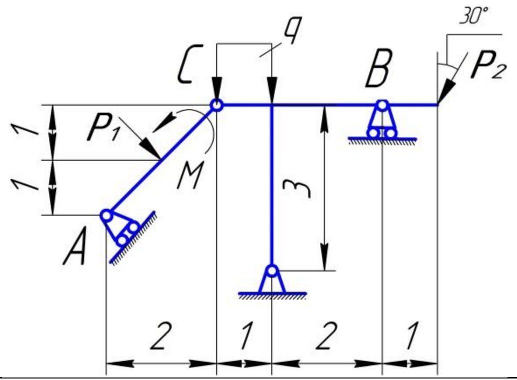
11



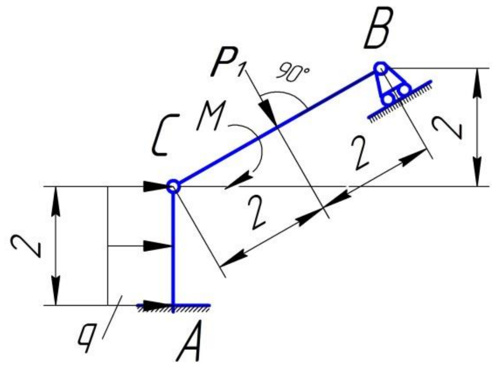
12



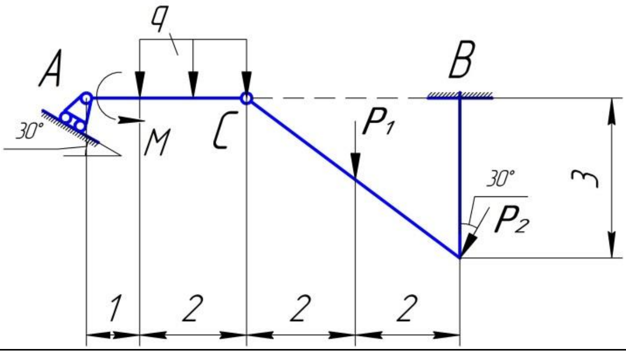
13



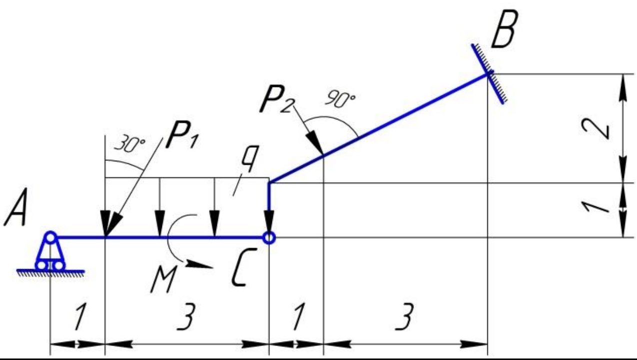
14



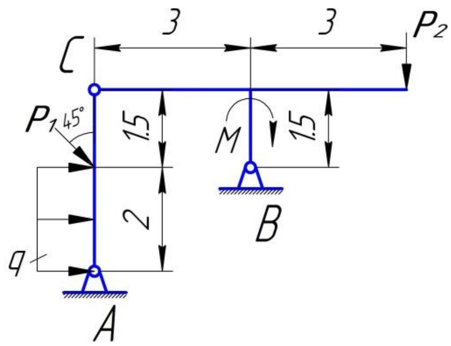
15



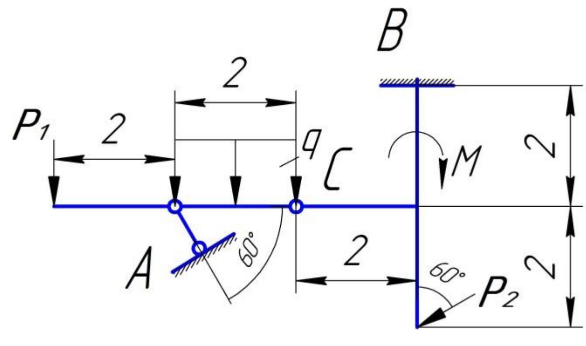
16



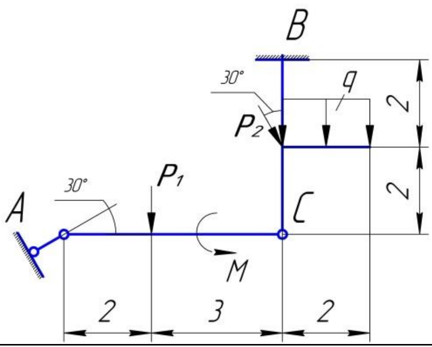
17



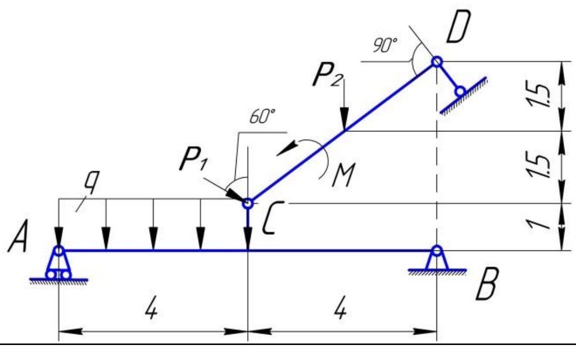
18



19



20



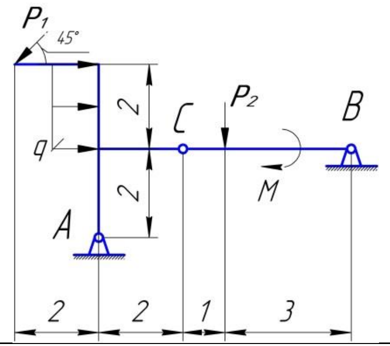
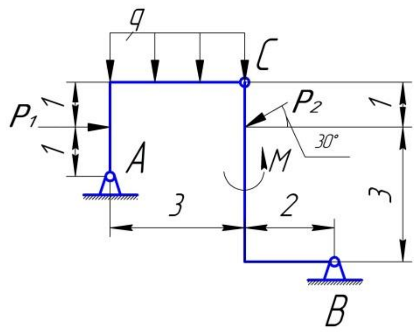
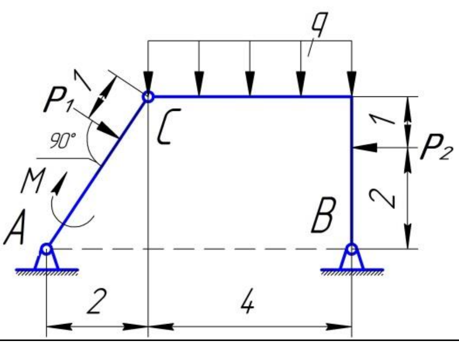
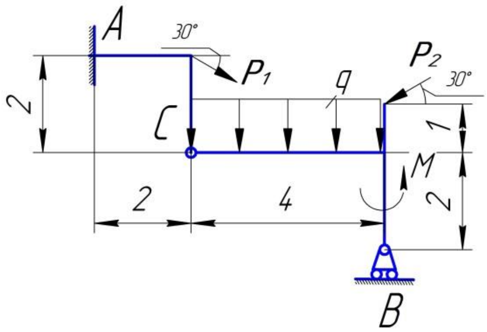
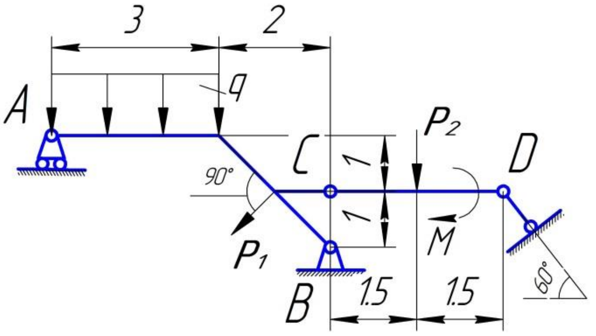
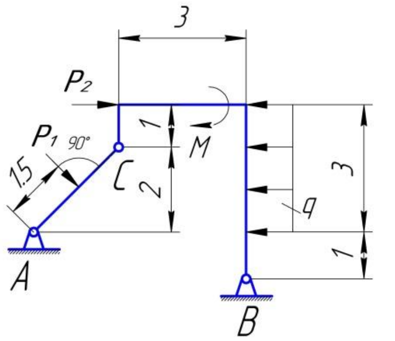
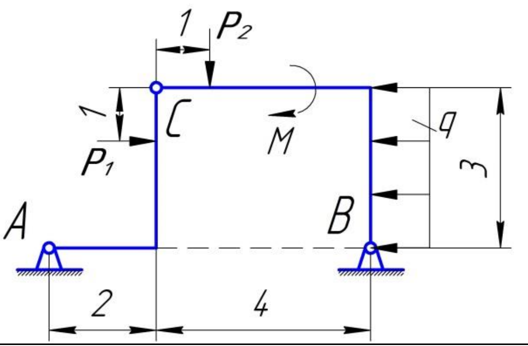
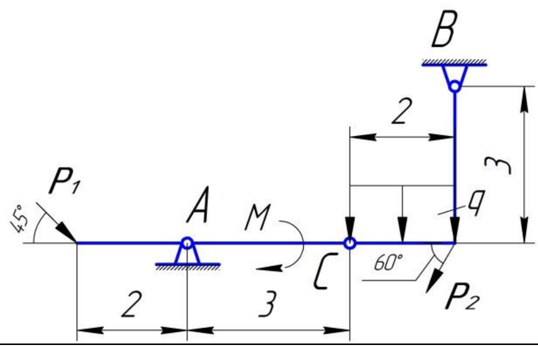
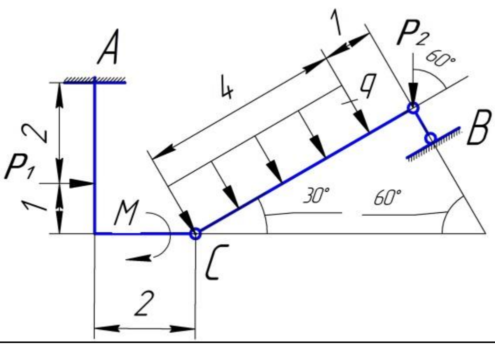
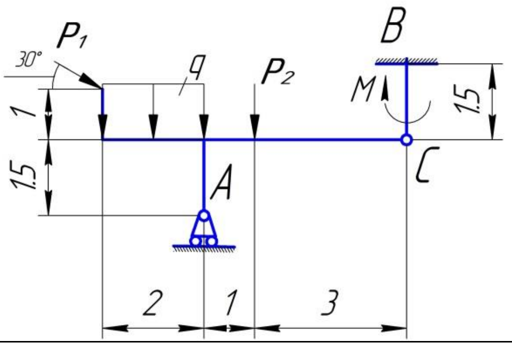
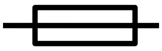
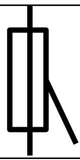
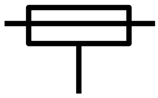
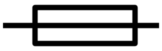
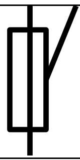
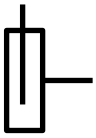
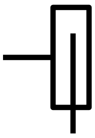
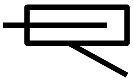
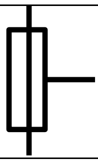
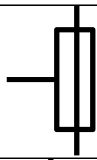
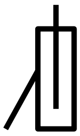
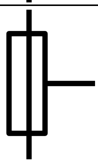
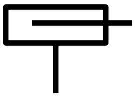
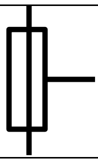
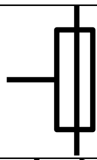
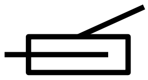
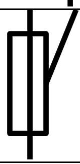
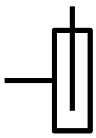
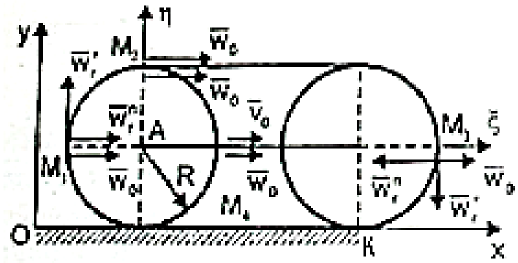
21	22
	
23	**24**
	
25	**26**
	
27	**28**
	
29	**30**
	

Таблица 2

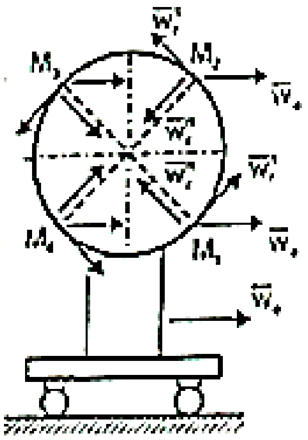
№ вар.	Вид скользящей заделки	№ вар.	Вид скользящей заделки	№ вар.	Вид скользящей заделки
1		11		21	
2		12		22	
3		13		23	
4		14		24	
5		15		25	
6		16		26	
7		17		27	
8		18		28	
9		19		29	
10		20		30	

Сложное движение точки

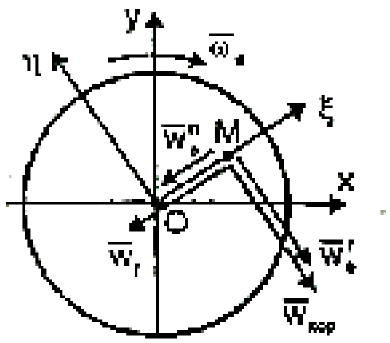
Задача 23.4: Найти скорости и ускорения точек M_1, M_2, M_3 и M_4 гусеницы трактора, движущегося без скольжения по прямолинейному участку пути со скоростью v_0 и ускорением w_0; радиусы колес трактора равны R; скольжением гусеницы по ободу колес пренебречь.



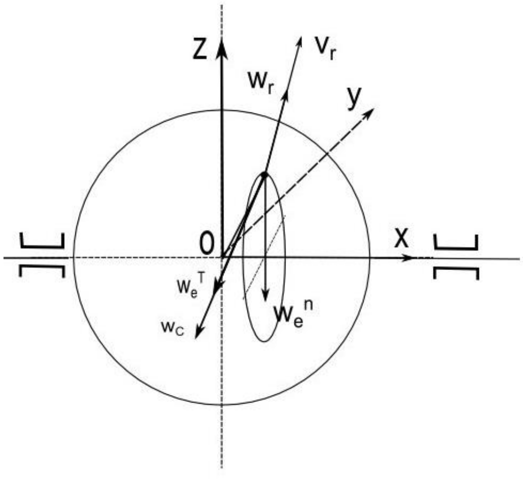
Задача 23.8: Тележка, на которой установлен мотор, движется по горизонтали вправо с постоянным ускорением $w = 0.4$ м/с^2. Мотор вращается по закону $\varphi = \frac{1}{2}t^2$. Определить абсолютное ускорение в момент t=1 с четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 ротора, отстоящих от оси ротора на расстоянии $l = 0.2\sqrt{2}$ м и занимающих в этот момент положение, указанное на рисунке.



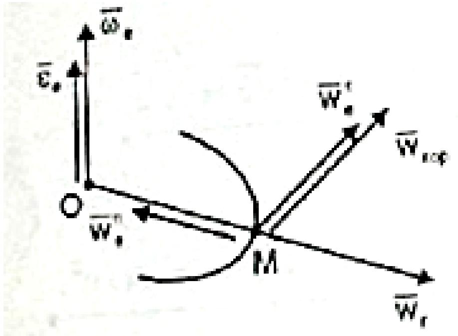
Задача 23.14: Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска, по часовой стрелке равноускоренно с угловым ускорением 1 рад/с^2; в момент t=0 угловая скорость его равна нулю. По одному из диаметров диска колеблется точка M так, что ее координата $\xi=\sin \pi t$ м, причем t — в секундах. Определить в момент $t= 1\frac{2}{3}$ с проекции абсолютного ускорения точки M на оси ξ, η, связанные с диском.



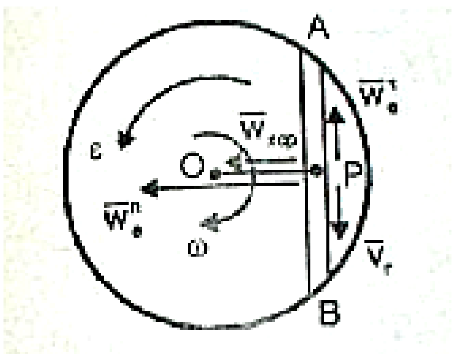
Задача 23.27: По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM = 4t^2$ см. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60°. Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент t=1 с.



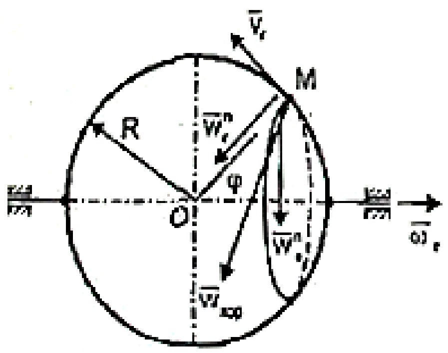
Задача 23.31: Шайба M движется по горизонтальному стержню OA, так что $OM = 0.5t^2$ см. В то же время стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точки O, по закону $\varphi = t^2 + t$. Определить радиальную и трансверсальную составляющие абсолютной скорости и абсолютного ускорения шайбы в момент $t = 2c$.



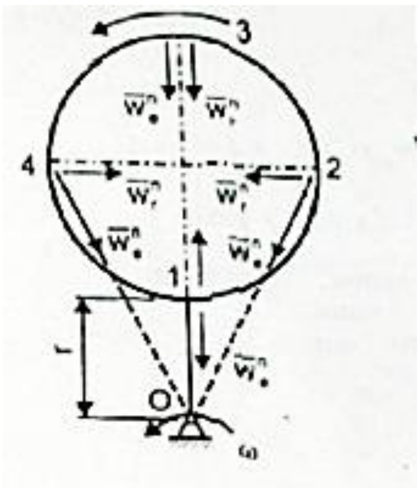
Задача 23.36: Шарик P движется со скоростью $1{,}2\frac{м}{с}$ от A до B по хорде AB диска, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Найти абсолютное ускорение шарика, когда он находится на кратчайшем расстоянии от центра диска, равном 30см. В этот момент угловая скорость диска равна $3\frac{рад}{с}$, угловое замедление равно $8\frac{рад}{с^2}$.



Задача 23.41: По ободу диска радиуса R, вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω, движется с постоянной по модулю скоростью υ точка М. Найдём абсолютное ускорение точки М как функцию угла φ, составленного радиус-вектором точки с осью вращения диска.



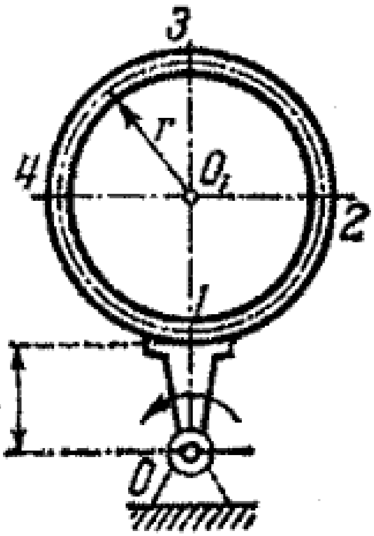
Задача 23.47: Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом АВ, и притом так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки с постоянной относительной скоростью u.Вал АВ вращается по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от А к В. Угловая скорость вала ω постоянна. Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках 1,2,3 и 4.



Задача 23.48: По условиям предыдущей задачи(23.47), измененным лишь в том отношении, что плоскость оси кольца теперь перпендикулярна оси угла АВ, определить те же величины в двух случаях:

1)переносное и относительно движение одного направления

2)составляющие движения противоположны по направлению

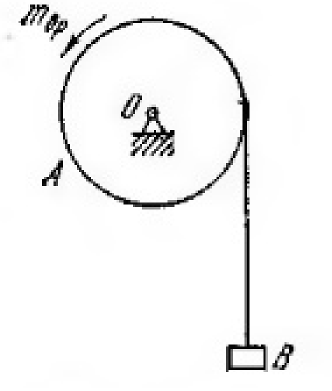


Теорема об изменении кинетического момента

Задача 37.6: Для быстрого торможения больших маховиков применяется электрический тормоз, состоящий из двух диаметрально расположенных полюсов, несущий на себе обмотку, питаемую постоянным током. Токи, индуцируемые в массе маховика при его движении мимо полюсов, создают тормозящий момент M_1, пропорциональный скорости υ на ободе маховика: $M_1 = k\upsilon$, где k - коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров маховика. Момент M_2 от трения в подшипниках можно считать постоянным; диаметр маховика D, момент инерции его относительно оси вращения J. Найти, через какой промежуток времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью ω_0.

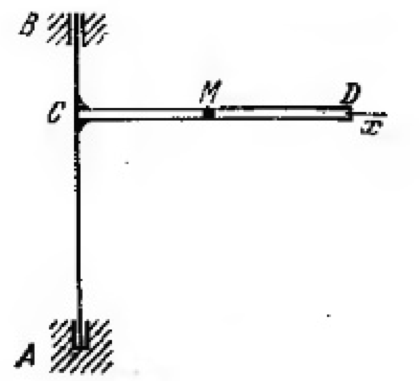
Задача 37.8: Решить предыдущую задачу в предположении, что момент сил сопротивления M_1 пропорционален угловой скорости вращения твёрдого тела: $M_1 = \alpha \cdot \omega$.

Задача 37.43: При пуске в ход электрической лебёдки к барабану A приложен вращающий момент $m_{вр}$, пропорциональный времени, причём $m_{вр} = at$, где a - постоянная. Груз B массы M_1, поднимается посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и массы M_2. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебёдка находилась в покое.



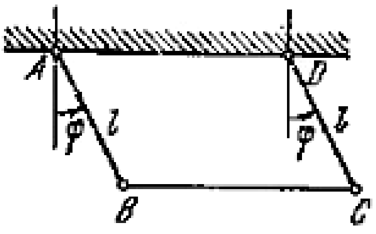
Задача 37.54: Решить предыдущую задачу в предположении, что все люди двигаются в сторону вращения платформы. Радиус платформы R, ее масса в четыре раза больше массы каждого из людей и равномерно распределена по всей ее площади. Выяснить также, чему должна быть равна относительная линейная скорость u для того, чтобы платформа перестала вращаться.

Задача 37.56: Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB. Внутри трубки на расстоянии $MC=a$ от оси находится шарик M. В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0. Определить угловую скорость ω трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J, L — ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы m.

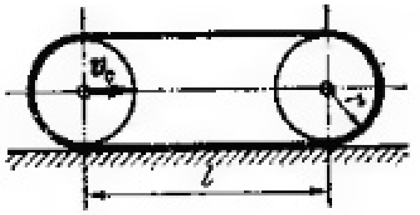


Теорема об изменении кинетической энергии

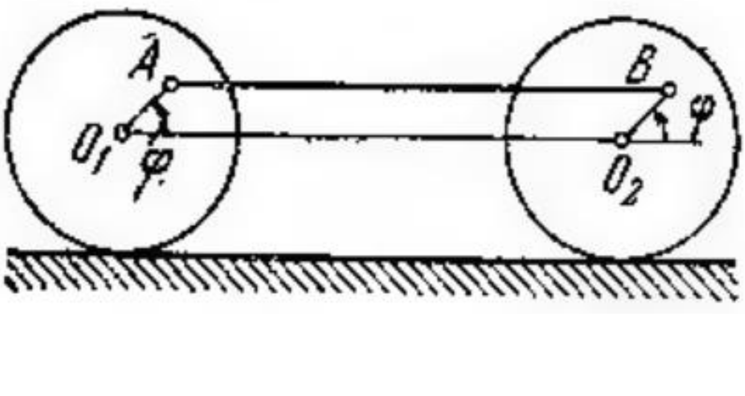
Задача 38.1: Вычислить кинетическую энергию плоского механизма, состоящего из трех стержней AB, BC и CD, прикрепленных цилиндрическими шарнирами A и D к потолку и соединенных между собой шарнирами B и C. Масса каждого из стержней AB и CD длины l равна M_1, масса стержня BC равна M_2, причем $BC=AD$. Стержни AB и DC вращаются с угловой скоростью ω.



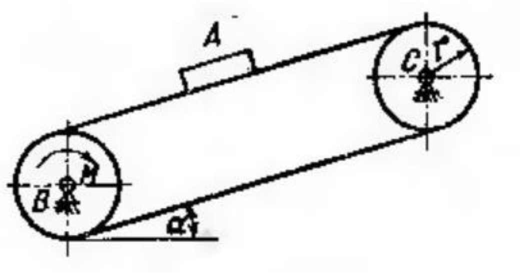
Задача 38.4: Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v_0. Расстояние между осями колес равно l, радиусы колес равны r, масса одного погонного метра гусеничной цепи равна γ.



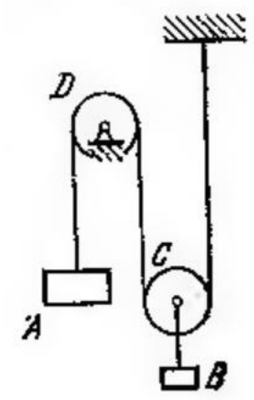
Задача 38.10: Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из двух колес, соединенных паровозным спарником AB и стержнем O_1O_2, если оси колес движутся со скоростью v_0. Масса каждого колеса равна M_1. Спарник AB и соединительный стержень O_1O_2 имеют одинаковую массу M_2. Масса колес равномерно распределена по их ободам; $O_1A=O_2B=r/2$, где r — радиус колеса. Колеса катятся без скольжения по прямолинейному рельсу.



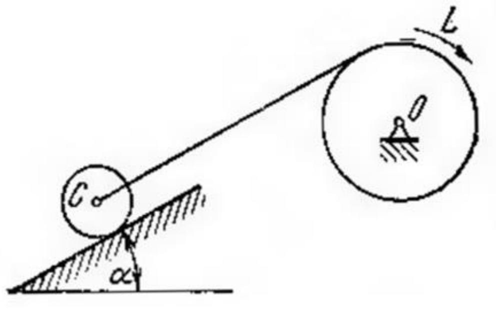
Задача 38.20: Транспортер приводится в движение из состояния покоя приводом, присоединенным к нижнему шкиву B. Привод сообщает этому шкиву постоянный вращающий момент M. Определить скорость ленты транспортера v в зависимости от ее перемещения s, если масса поднимаемого груза A равна M_1, а шкивы B и C радиуса r и массы M_2 каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортера, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам отсутствует.



Задача 38.30: Груз A массы M_1, опускаясь вниз, при помощи троса, перекинутого через неподвижный блок D, поднимает вверх груз B массы M_2, прикрепленный к оси подвижного блока C. Блоки C и D считать однородными сплошными дисками массы M_3 каждый. Определить скорость груза A в момент, когда он опустится на высоту h. Массой троса, проскальзыванием по ободам блоков и силами сопротивления пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

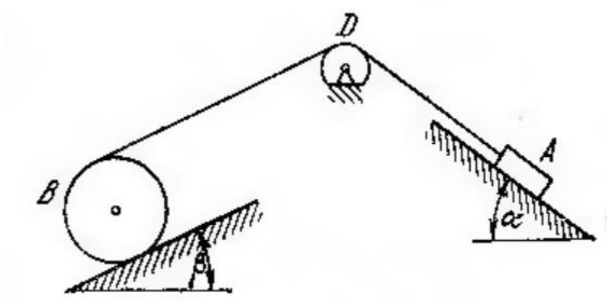


Задача 38.40: К барабану ворота радиуса r_1 и массы m_1 приложен постоянный вращающий момент L. К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось C колеса массы m_2. Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса и трением пренебречь.

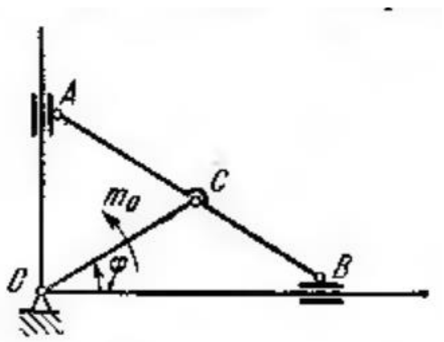


Задача 38.45: К грузу A массы M_1 прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок D массы M_2 и намотанная на боковую поверхность цилиндрического катка B массы M_3. Радиус катка B равен r. При движении груза A вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок D, а каток B катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β.

Определить скорость груза A в зависимости от пройденного им пути s, если в начальный момент система находилась в покое. Блок D и каток B считать однородными круглыми цилиндрами. Коэффициенты трения скольжения и качения соответственно равны f и f_k. Массой нити пренебречь.



Задача 38.48: Механизм эллипсографа, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение посредством постоянного вращающего момента m_0, приложенного к кривошипу OC. В начальный момент при φ=0 механизм находился в покое. Найти угловую скорость кривошипа OC в момент, когда он сделал четверть оборота. Дано: M — масса стержня AB, $m_A = m_B = m$ — массы ползунов A и B, $OC = AC = BC = l$; массой кривошипа OC и силами сопротивления пренебречь.



Вращательное движение

Задача 13.5: Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые $5c$ он совершает 12,5 оборота. Какова его угловая скорость по истечению этих 5с?

Задача 13.6: Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10мин после начала движения оно имеет угловую скорость, равную $4\pi \frac{рад}{c}$. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10мин ?

Задача 13.8: С момента выключения мотора пропеллер самолёта, вращавшийся с угловой скоростью, равной $40\pi\left(\frac{рад}{c}\right)$, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

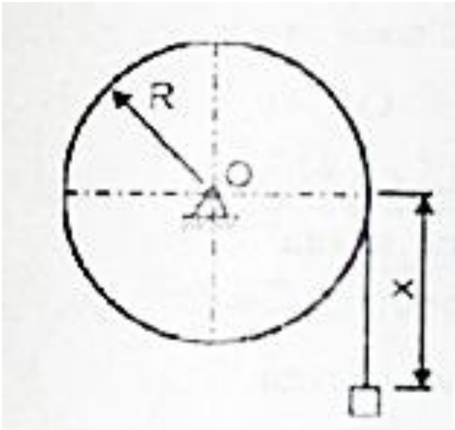
Задача 13.12: Определить скорость υ и ускорение w точки, находящейся на поверхности Земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси; широта Ленинграда $60°$, радиус Земли 6370км.

Задача 13.13: Маховое колесо радиуса 0,5м вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна $2\frac{м}{c}$. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

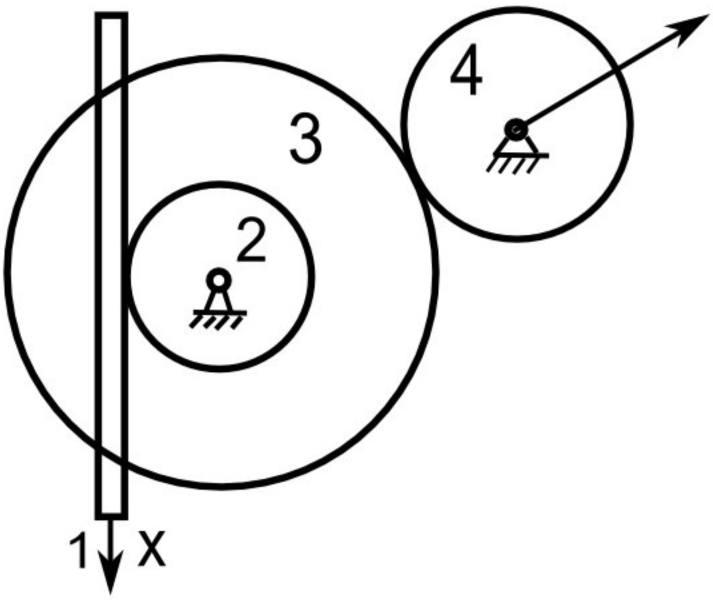
Задача 13.14: Точка A шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью $50\frac{\text{см}}{\text{с}}$, а некоторая точка B, взятая на одном радиусе с точкой A, движется со скоростью $10\frac{\text{см}}{\text{с}}$; расстояние $AB = 20\text{см}$. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.

Задача 13.15: Маховое колесо радиуса $R = 2\text{м}$ вращается равноускоренно из состояния покоя; через $t = 10c$ точки, лежащей на ободе, обладают линейной скоростью $\upsilon = 100\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти скорость, нормальное и касательное ускорение точек обода колеса для момента $t = 15c$.

Задача 13.18: Вал радиуса $R = 10\text{см}$ приводится во вращение гирей P, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где x - расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t - время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t.



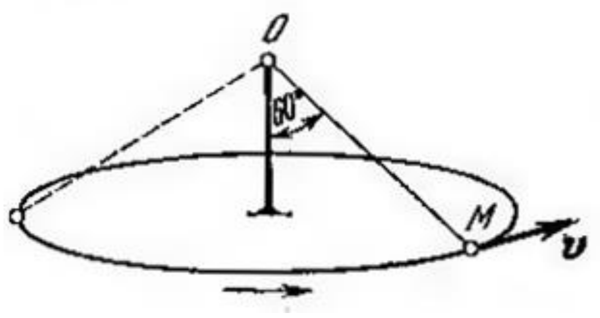
Задача 14.4: В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного шрифта 1 передаётся шестерне 2, на оси которой укреплено зубчатое колесо 3, сцепляющееся с шестерней 4, несущей стрелку. Определить угловую скорость стрелки, если движение шрифта задано уравнением $x = a \cdot \sin kt$ и радиусы зубчатых колёс соответственно равны r_2, r_3, r_4.



Динамика точки

Задача 26.1: В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280кг. В первые 10 с он проходит 35м.Найти натяжение каната на котором висит лифт.

Задача 26.9: Груз М массы 0,102 подвешенный на нити длины 30см в неподвижной точке О, представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60.Определить скорость υ груза и натяжение Т нити



Задача 26.11: В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50Н, при ускоренном -51 Н. Найти ускорение кабины.

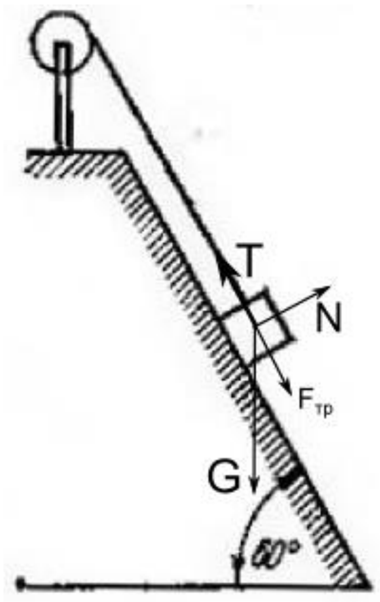
Задача 26.16: Движение материальной точки массы 0,2 кг выражается уравнениями

$x = 3\cos\pi t$ см,

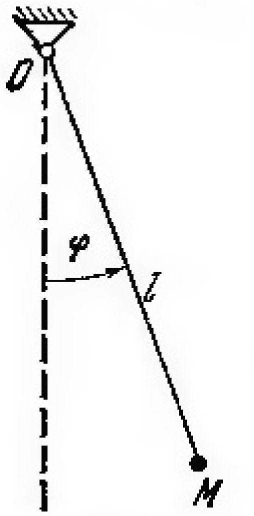
$y = 4\sin\pi t$ см. Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от её координат.

Задача 26.17: Шарик, масса которого равна 100г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением $x = 4,9t - 2,45(1 - e^{-2t})$, где x- в метрах, t- в секундах, ось Ох направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха R и выразить её как функцию скорости шарика. Определим скорость и ускорение.

Задача 26.26: Груз массы M=600 кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60 с горизонтом. Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен 0,2. Ворот радиуса 0,2 м вращается по закону $\varphi = 0,4t^3$.Найти натяжение троса, как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.



Задача 26.28: Груз M веса 10 Н подвешен к тросу длины l=2м и совершает вместе с россом колебания согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\pi l$ где φ-угол отклонения троса от вертикали в радианах, t-время в секундах. Определить натяжения T_1 и T_2 троса в верхнем и нижнем положение груза



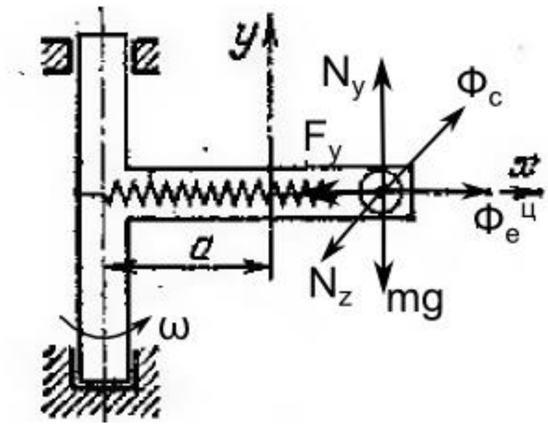
Задача 27.9: Найти наибольшую скорость падения шара массы 10 кг и радиуса r=8см, принимая, что сопротивление воздуха равно $R = k\sigma\upsilon^2$, где υ-скорость движения, σ-площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения, и k-численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0,24 $H \cdot c^2 / м^4$

Задача 27.16: На какую высоту H и за какое время T поднимается тело веса p, брошенное вертикально вверх со скоростью υ_0, если сопротивление воздуха может быть выражено формулой $k^2 p\upsilon^2$, где υ-величина скорости тела?

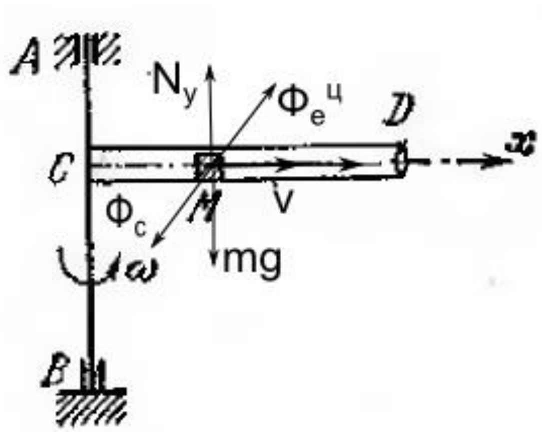
Задача 27.17: Тело массы 2кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости υ м/с равно 0,4υ Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения

Динамика относительного движения

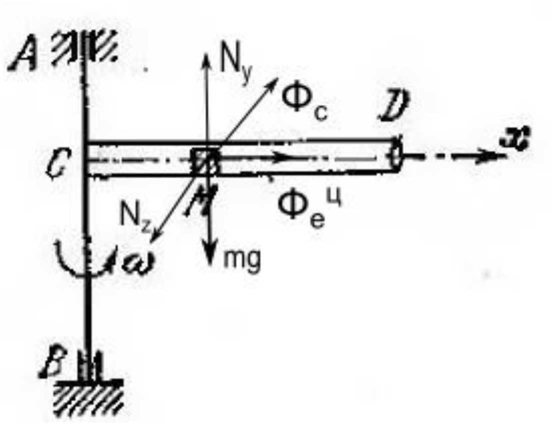
Задача 33.9: Шарик массы m, прикреплённой к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c, находится в положении равновесия в трубке на расстоянии a от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образующая с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.



Задача 33.10: Горизонтальная труба CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело M. Определить скорость υ тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент $\upsilon = 0, x = x_0$, длина трубки равна L. Трением пренебречь.



Задача 33.12: В условиях задачи 33.10 составить дифференциальное уравнение движения тела в трубке, если коэффициент трения скольжения между телом и трубкой равен f.

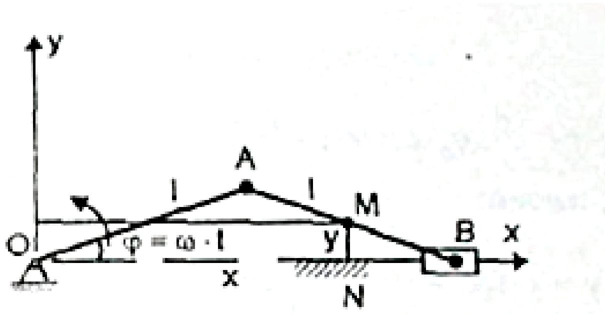


Задача 33.13: Кольцо движется по гладкому стержню AB, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец A, делая один оборот в секунду; длина стержня $1м$; в момент $t = 0$ кольцо находилось на расстоянии 60см от конца A и имело скорость равную нулю. Определить момент t_1, когда кольцо сойдёт со стержня.

Кинематика точки

Задача 10.4: По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

Задача 10.12: Кривошип OAвращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\frac{рад}{c}$. Длина $OA = AB = 80 см$. Найти уравнения движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B, если в начальный момент ползун находится в крайнем правом положении; оси координат указаны на рисунке.



Задача 11.3: Точка описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям $x = 2Cost$, $y = 4Cos2t$ (x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Определить величину и направление скорости точки, когда она находится на оси Оу.

Задача 11.5: Движение точки задано уравнениями $x = \upsilon_0 t \cdot \cos\alpha_0, y = \upsilon_0 t \cdot \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2$, причём ось Ox горизонтальна, ось Oy направлена по вертикали вверх, υ_0, g и $a_0 < \frac{\pi}{2}$-величины постоянные. Найти: 1). Траекторию точки, 2). Координаты наивысшего её положения, 3). Проекции скорости на координатные оси в тот момент, когда точка находится на оси Ox.

Задача 11.15: Точка М движется по окружности согласно уравнениям

$$r = 2aCos\frac{kt}{2}, \qquad \varphi = \frac{kt}{2}$$

(r, φ — полярные координаты). Найти проекции скорости точки М на оси полярной системы координат, уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки M_1.

Задача 12.13: Движение точки задано уравнениями

$$x = 10Cos\frac{2\pi t}{5}, \qquad y = 10Sin\frac{2\pi t}{5}$$

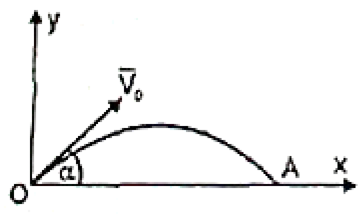
(x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Найти траекторию точки, величину и направление скорости, а также величину и направление ускорения.

Задача 12.16: Найти радиус кривизны при $x = y = 0$ траектории точки, описывающей фигуру Лиссажу согласно уравнениям $x = -w\sin 2\omega t$, $y = -w\sin \omega t$

Задача 12.21: Движение снаряда задано уравнениями

$$x = \upsilon_0 t\cos a_0, y = \upsilon_0 t\sin a_0 - 1/2gt^2$$

Где υ_0 и a_0 - постоянные величины. Найти радиус кривизны траектории при t=0 и в момент падения на землю.



Задача 12.26: Движение точки задано в полярных координатах уравнениями $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$, где a и k –заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки как функции её радиус-вектора r.

Задача 12.28: Построить траекторию движения точки, годограф скорости и определить радиус кривизны траектории в начальный момент, если точка движется согласно уравнениям

$$x = 4t$$
$$y = t^3$$

(t- в секундах, x и y – в сантиметрах)

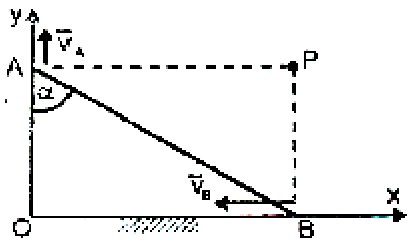
Задача 12.32: Точка M движется по винтовой линии. Уравнения движения её в цилиндрической системе координат имеют вид

$$r = a$$
$$\varphi = kt$$
$$z = vt$$

Найти проекции ускорения точки на оси цилиндрической системы координат, касательную и нормальную составляющие ускорения и радиус кривизны винтовой линии

Плоское движение

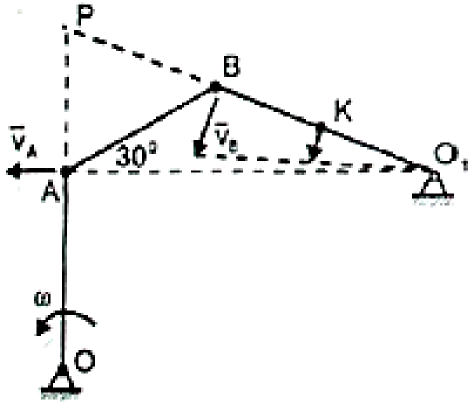
Задача 16.7: Стержень *AB* длины 1 м движется, опираясь все время своими концами на две взаимно перпендикулярные прямые *Ox* и *Oy*. Найти координаты *x* и *y* мгновенного центра скоростей в тот момент, когда угол *OAB*=60°.



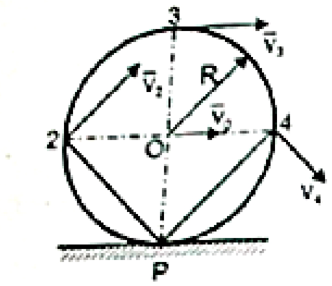
Задача 16.11: Стержень *AB* длины 0,5 м движется в плоскости рисунка. Скорость υ_A (υ_A =2 м/с) образует угол 45° с осью *x*, совмещенной со стержнем. Скорость υ_B точки *B* образует угол 60° с осью *x*. Найти модуль скорости точки *B* и угловую скорость стержня.

Задача 16.15: В кривошипном механизме длина кривошипа *OA*=40 см, длина шатуна *AB*=2 м; кривошип вращается равномерно с угловой скоростью, равной 6π рад/с. Найти угловую скорость ω шатуна и скорость средней его точки *M* при четырех положениях кривошипа, для которых угол *AOB* соответственно равен 0, π/2, π, 3π/2.

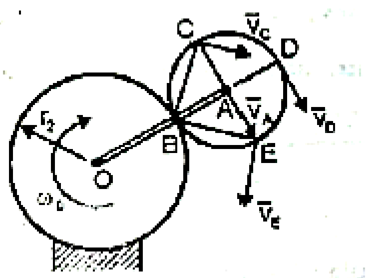
Задача 16.17: Определить скорость точки *K* четырехзвенного механизма $OABO_1$ в положении, указанном на рисунке, если звено *OA* длины 20 см имеет в данный момент угловую скорость 2 рад/с. Точка *K* расположена в середине стержня BO_1.



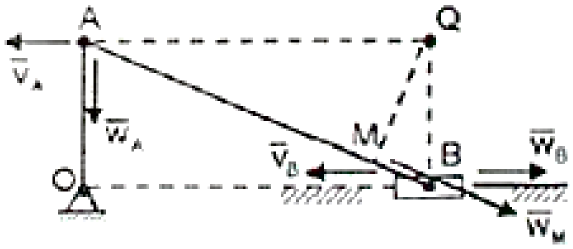
Задача 16.31: Колесо радиуса R=0,5 м катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна υ_0=10 м/с. Найти скорости концов M_1, M_2, M_3 и M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса. Определить его угловую скорость.



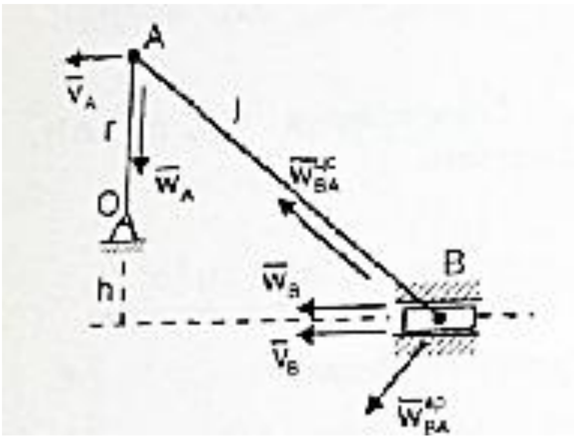
Задача 16.35: Кривошип *OA*, вращаясь с угловой скоростью ω_0=2,5 рад/с вокруг оси *O* неподвижного колеса радиуса r_2=15 см, приводит в движение насаженную на его конец *A* шестеренку радиуса r_1=5 см. Определить величину и направление скоростей точек *A*, *B*, *C*, *D* и *E* подвижной шестеренки, если $CE \perp BD$.



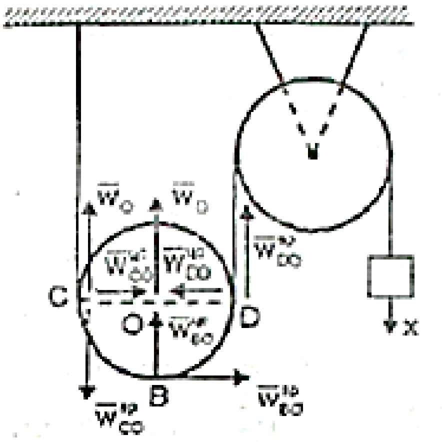
Задача 18.9: Длина шатуна АВ кривошипно-ползунного механизма в два раза больше длины кривошипа ОА. Определить положение точки шатуна АВ, ускорение которой направлено вдоль шатуна АВ, ускорение которой направлено вдоль шатуна, в момент, когда кривошип перпендикулярен направляющей ползуна, кривошип ОА вращается равномерно



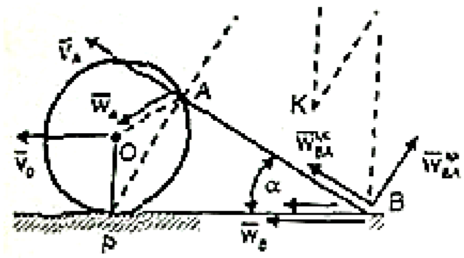
Задача 18.12: Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна центрального кривошипного механизма, а также скорость и ускорение ползуна В при 1)горизонтальном правом и 2)вертикальном верхнем положении кривошипа ОА, если последний вращается вокруг конца О с постоянной угловой скоростью ω_0, причем даны: OA=r, AB=l, расстояние оси О кривошипа от линии движения ползуна OC=h



Задача 18.25: Подвижный блок1 и неподвижный блок 2 соединены нерастяжимой нитью. Груз К, прикрепленный к концу этой нити, опускается вертикально вниз по закону $x = 2t^2$ м.Определить ускорение точек С,В и Д, лежащих на ободе подвижного блока 1,в момент t=0.5 с в положении, указанном на рисунке, если $OB \perp CD$, а радиус подвижного блока 1 равен 0.2 м

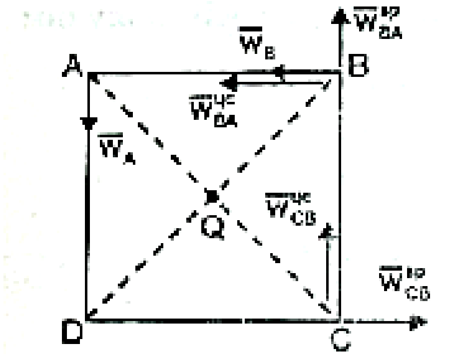


Задача 18.27: Колесо радиуса R катится без скольжения по плоскости. Центр О колеса движется с постоянной скоростью v_0. В точке А с ним шарнирно соединен стержень АВ длины $l = 3R$. Другой конец стержня скользит по плоскости. В положении, указанном на рисунке, определить угловую скорость и угловое ускорение стержня АВ, а также линейные скорость и ускорение его точки В.



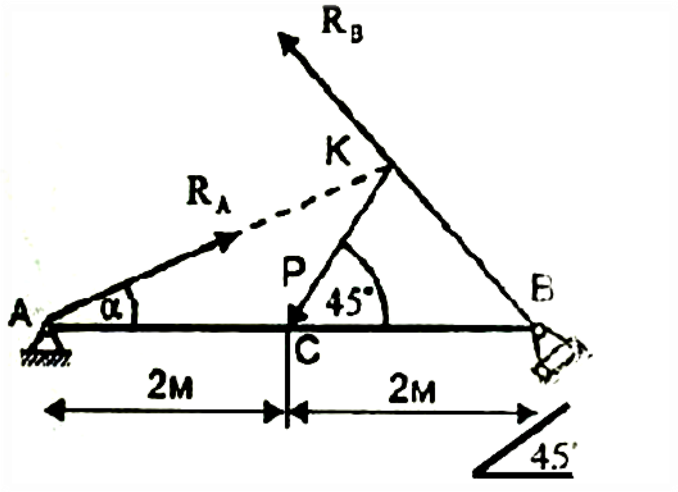
Задача 18.37: Квадрат ABCD со стороною а совершает плоское движение в плоскости рисунка. Найти положение

Мгновенного центра ускорений и ускорений вершин его C и D,если известно, что в данный момент ускорения двух вершин A и B одинаковы по величине и равны 10 $см/с^2$.Направление ускорений точек A и B совпадает со сторонами квадрата, как указано на рисунке.

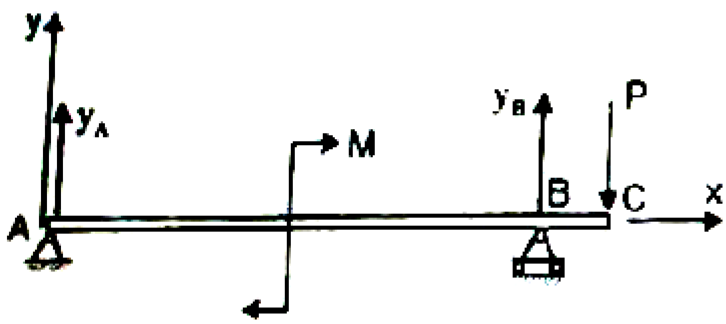


Плоская статика

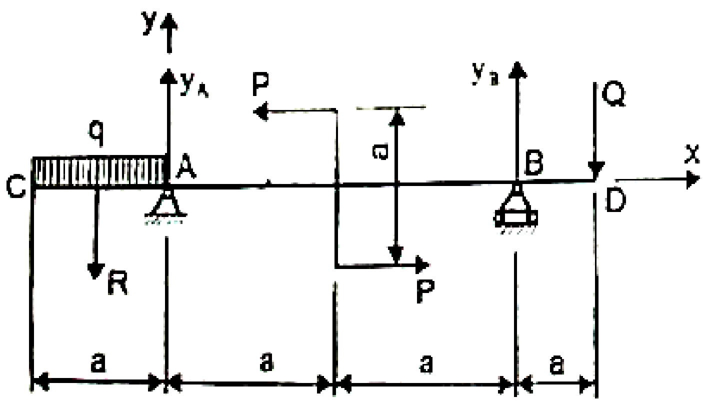
Задача 2.30: Балка AB шарнирно закреплена на опоре A; у конца B она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила P = 2 кН. Определить реакции опор, взяв размеры с рисунков и пренебрегая весом балки.



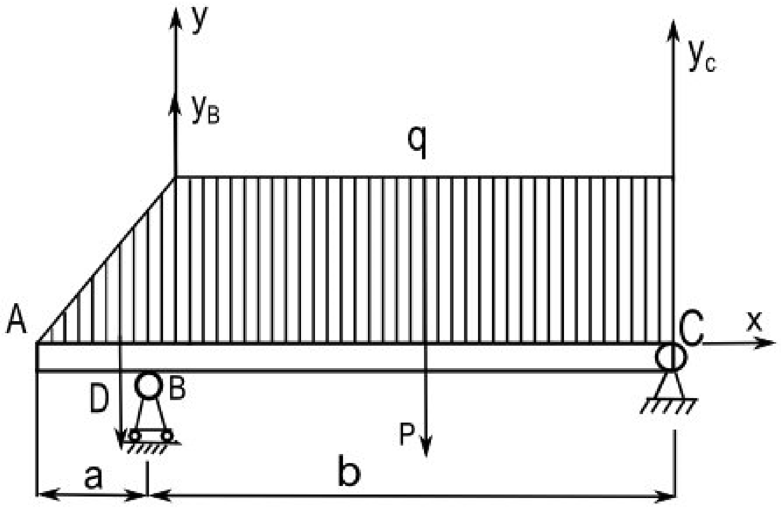
Задача 3.15: На консольную горизонтальную балку действует пара сил с моментом M=6 кН·м, а в точке C вертикальная нагрузка P=2 кН. Длина пролета балки AB=3,5 м, вынос консоли BC=0,5 м. Определить реакции опор.



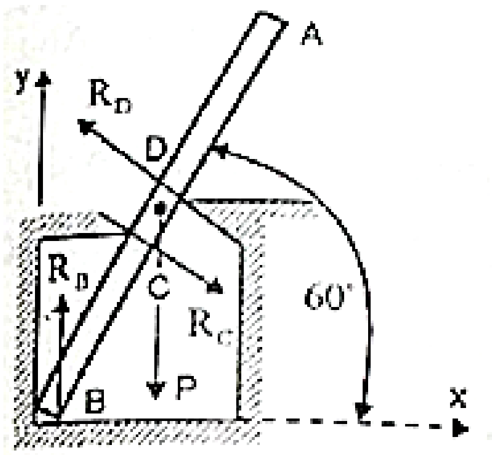
Задача 3.16: На двухконсульную горизонтальную балку действует пара сил (P, P), на левую консоль, равномерно распределённая нагрузка интенсивности q, а в точку D правой консоли вертикальная нагрузка Q. Определить реакции опор, если $P = 1$ кН, $Q = 2$ кН, $q = 2$ кН, $a = 0{,}8$ м.



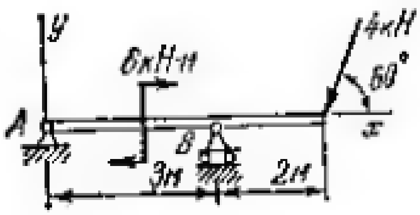
Задача 3.19: Горизонтальная балка АС, опертая в точках В и С, несет между опорами В и С равномерно распределенную нагрузку интенсивности q Н/м; на участке АВ интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля. Найти реакции опор В и С, пренебрегая весом балки.



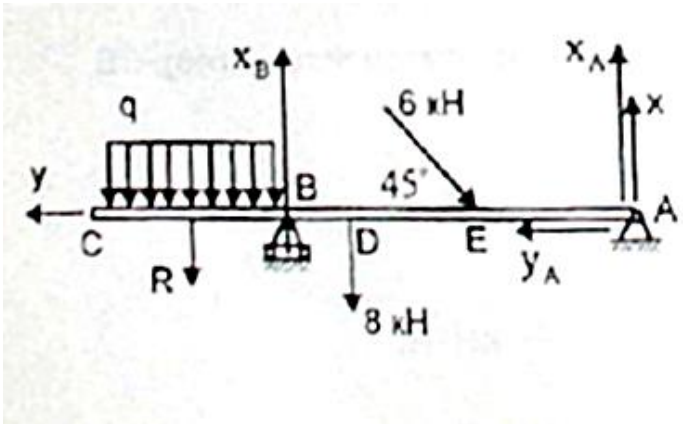
Задача 4.8: Однородная балка AB веса 200 H опирается на гадкий горизонтальный пол в точке B под углом $60°$ и, кроме того, поддерживается двумя опорами C и D. Определить реакции опор в точках B, C и D, если длина $AB = 3м$, $CB = 0{,}5м$, $BD = 1м$.



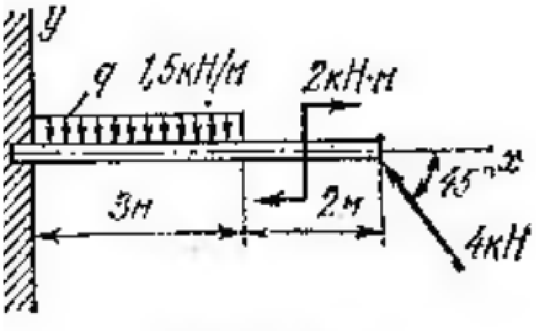
Задача 4.25: Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке.



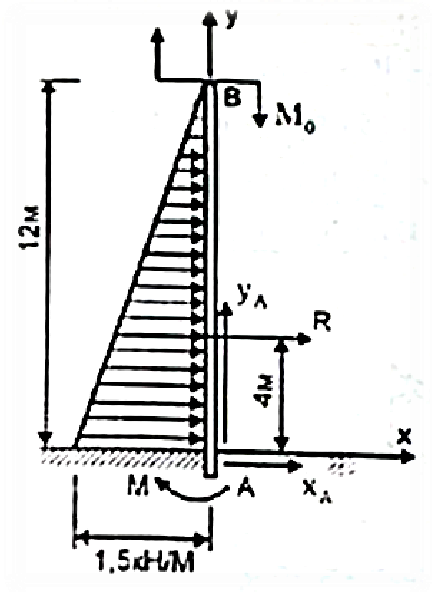
Задача 4.26: Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределённой нагрузки. Интенсивность распределённой нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке.



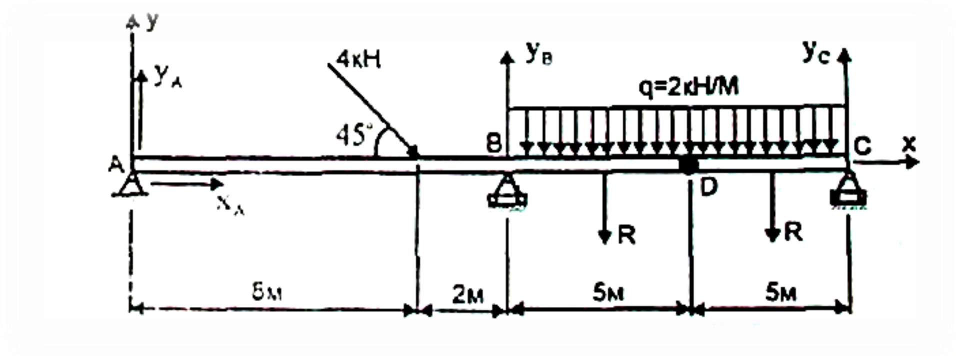
Задача 4.28: Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.



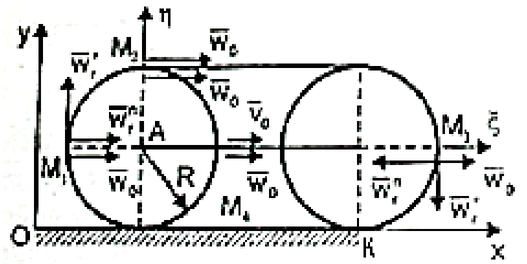
Задача 4.30: Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника.



Задача 4.33: Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.



Задача 23.4: Найти скорости и ускорения точек M_1, M_2, M_3 и M_4 гусеницы трактора, движущегося без скольжения по прямолинейному участку пути со скоростью v_0 и ускорением w_0; радиусы колес трактора равны R; скольжением гусеницы по ободу колес пренебречь.



Определение скоростей:

Если скольжение гусеницы по ободу колес отсутствует, то К – мгновенный центр скоростей колес, и угловые скорости колес будут:

$$\omega = \frac{v_0}{R}$$

$$v_1 = \omega \cdot M_1 K = v_0 \sqrt{2}$$

Следовательно $v_1 = v_3 = v_0\sqrt{2}$

Верхняя ветвь гусеницы движется поступательно, поэтому $v_2 = v_m$ и $v_2 = 2v_0$

Нижняя ветвь неподвижна, т.е.

$$v_4 = 0$$

Определение ускорений:

Ускорение точки M_1 определим, используя теорему о сложении ускорений при плоском движении.

$$\bar{w}^n_M + \bar{w}^\tau_M = \bar{w}_0 + \bar{w}^n_{AM} + \bar{w}^\tau_{AM}$$, где

$$w^n{}_M = \frac{v_1{}^2}{M_1 K} = \frac{2v_0{}^2}{R\sqrt{2}}$$

$$w^n_{MA} = \omega^2 \cdot R = \frac{v_0{}^2}{R^2} R = \frac{v_0{}^2}{R}$$

Проектируем векторное уравнение на оси x и y, получим систему двух уравнений:

$$w^n_M = w_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{v_0{}^2}{R}\frac{\sqrt{2}}{2} - w^\tau_{MA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$w^\tau_M = w_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + w^n_{MA}\frac{\sqrt{2}}{2} + w^\tau_{MA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Из (1): $w^\tau_{MA} = w_0 + \frac{v_0{}^2}{R} - \frac{2v_0{}^2}{R} = a - \frac{v_0{}^2}{R}$

Подставляя в (2):

$$w^\tau_M = w_0 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{v_0{}^2\sqrt{2}}{2R} + \left(w_0 - \frac{v_0{}^2}{R}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$, тогда

$$w_{M_1} = \sqrt{(w^\tau_M)^2 + (w^n_M)^2} = \sqrt{w_0{}^2 + \left(w_0 + \frac{v_0{}^2}{R}\right)^2}$$

Дифференцируя $v_2 = 2v_0$ и $v_4 = 0$, соответственно получим

$w_{M_2} = 2w_0$ и $w_{M_4} = 0$

Напишем векторное уравнение для точки M_3

$$\bar{w}_M^n + \bar{w}_M^\tau = \bar{w}_0 + \bar{w}_{BM}^n + \bar{w}_{BM}^\tau$$

Проектируя на оси x и y

$$w_M^n = -w_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + w_{BM}^n \frac{\sqrt{2}}{2} - w_{BM}^\tau \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

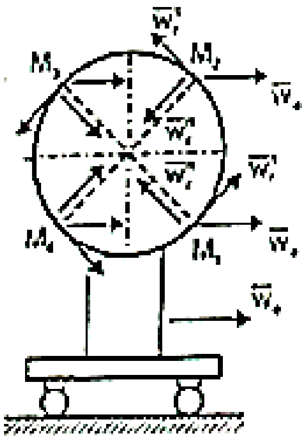
$$w_M^\tau = w_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - w_{BM}^n \frac{\sqrt{2}}{2} + w_{BM}^\tau \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$, откуда получим

$$w_{M_3} = \sqrt{w_0{}^2 + \left(w_0 - \frac{v_0{}^2}{R}\right)^2}$$

Ответ: $v_1 = v_3 = v_0\sqrt{2}$, $v_2 = 2v_0$, $v_4 = 0$

$w_{M_1} = \sqrt{w_0{}^2 + \left(w_0 + \frac{v_0{}^2}{R}\right)^2}$, $w_2 = 2w_0$, $w_{M_3} = \sqrt{w_0{}^2 + \left(w_0 - \frac{v_0{}^2}{R}\right)^2}$, $w_{M_4} = 0$

Задача 23.8: Тележка, на которой установлен мотор, движется по горизонтали вправо с постоянным ускорением $w = 0.4$ м/с^2. Мотор вращается по закону $\varphi = \frac{1}{2}t^2$. Определить абсолютное ускорение в момент t=1 с четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 ротора, отстоящих от оси ротора на расстоянии $l = 0.2\sqrt{2}$ м и занимающих в этот момент положение, указанное на рисунке.



$$OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4 = l = 0.2\sqrt{2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t \quad c^{-1}$$

$$v = \omega l = 0.2t$$

Используем теорему о сложении ускорений:

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_n + \bar{w}_\tau \quad (1)$$

$$w_n = \omega^2 \cdot l = 0.2\sqrt{2} \text{ м}/c^2$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0.2\sqrt{2} \text{ м}/c^2$$

1 положение: Спроектируем (1) на ось x и y, получим

$$w_x = w_0 - w_n Cos45 + w_\tau Cos45$$

$$w_y = w_n Sin45 + w_\tau Sin45$$

$$w_x = 0.4 - 0.2\sqrt{2}Cos45 + 0.2\sqrt{2}Cos45 = 0.4 \text{ м}/c^2$$

$$w_y = 0.2\sqrt{2}Sin45 + 0.2\sqrt{2}Sin45 = 0.4 \text{ м}/c^2$$

$$w_1 = \sqrt{w_{1x}^2 + w_{1y}^2} = 0.4\sqrt{2} \text{ м}/c^2$$

2 положение: Сумма векторов будет равна нулю

$$w_x = w_0 - w_n Cos45 - w_\tau Cos45$$

$$w_x = 0.4 - 0.2\sqrt{2}Cos45 - 0.2\sqrt{2}Cos45 = 0$$

$$w_y = w_\tau Cos45 - w_n Cos45 = 0$$

$$w_2 = \sqrt{w_{1x}^2 + w_{1y}^2} = 0$$

3 положение: Спроектируем (1) на ось x и y, получим

$$w_x = w_0 - w_n Cos45 + w_\tau Cos45$$

$$w_y = w_n Sin45 + w_\tau Sin45$$

$w_x = 0.4 - 0.2\sqrt{2}Cos45 + 0.2\sqrt{2}Cos45 = 0.4$ м/c^2

$w_y = 0.2\sqrt{2}Sin45 + 0.2\sqrt{2}Sin45 = 0.4$ м/c^2

$w_3 = \sqrt{w_{1x}^2 + w_{1y}^2} = 0.4\sqrt{2}$ м/c^2

4 положение:

$w_x = w_0 + w_n Cos45 + w_\tau Cos45$

$w_y = w_n Cos45 - w_\tau Cos45$

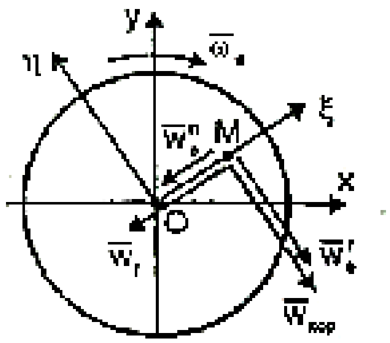
$w_x = 0.4 + 0.2\sqrt{2}Cos45 + 0.2\sqrt{2}Cos45 = 0.8$ м/c^2

$w_y = 0.2\sqrt{2}Sin45 - 0.2\sqrt{2}Sin45 = 0$

$w_4 = \sqrt{w_{1x}^2 + w_{1y}^2} = 0.8$ м/c^2

Ответ: $w_1 = w_3 = 0.4\sqrt{2}$ м/c^2, $w_2 = 0$, $w_4 = 0.8$ м/c^2

Задача 23.14: Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска, по часовой стрелке равноускоренно с угловым ускорением 1 рад/с^2; в момент t=0 угловая скорость его равна нулю. По одному из диаметров диска колеблется точка M так, что ее координата $\xi=\sin \pi t$ м, причем t — в секундах. Определить в момент $t= 1\frac{2}{3}$ с проекции абсолютного ускорения точки M на оси ξ, η, связанные с диском.



Ответ: $w_\xi = 10{,}95$ м/с^2, $w_\eta = -4{,}37$ м/с^2.

Решение:

$$\omega_0 = 0,$$
$$\xi = \sin \pi t,$$
$$\upsilon_r = \dot{\xi} = \pi \cos \pi t,$$
$$w_r = \ddot{\xi} = -\pi^2 \sin \pi t.$$

В момент времени $t= 1\frac{2}{3}$:

$$\xi = \sin \frac{5\pi}{3} = -0{,}866 \text{ м.}$$

Относительная скорость:

$$\upsilon_r = \pi \cos \frac{5\pi}{3} = 1{,}57 \text{ м/с.}$$

Относительное ускорение:

$$w_r = -\pi^2 \sin \frac{5\pi}{3} = -8{,}538 \text{ м/с}^2.$$

$$\omega = \varepsilon t - t = \frac{5}{3} \text{ рад/с.}$$

Переносные нормальное и тангенциальное ускорения:

$$w_e^n = \omega^2 \cdot \xi = \frac{25}{9} \cdot 0{,}866 = 2{,}405 \text{ м/с}^2,$$

$$w_e^\tau = \varepsilon \cdot \xi = 1 \cdot 0{,}866 = 0{,}866 \text{ м/с}^2.$$

Кориолисово ускорение:

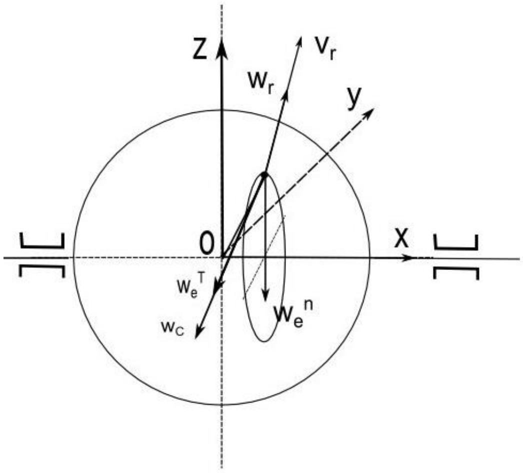
$$w_c = 2\omega_e \cdot \upsilon_r = 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 1{,}57 = 5{,}23 \text{ м/с}^2,$$

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e^n + \vec{w}_e^\tau + \vec{w}_c$$

$$w_\eta = w_e^\tau - w_c = 0{,}866 - 5{,}23 = -4{,}364 \text{ м/с}^2,$$

$$w_\xi = w_r + w_e^n = 8{,}538 + 2{,}405 = 10{,}943 \text{ м/с}^2.$$

Задача 23.27: По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM = 4t^2$ см. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60°. Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент t=1 с.



Относительное движение:
Скорость точки M в относительном движении

$$v_r = \frac{d(OM)}{dt} = 8t$$

при $t = 1$с, $v_{r1} = 8$ см/c^2

Переносное движение:

т.к. переносное движение является вращательным, то ускорение состоит из w_e^n и w_e^τ

при $t = 1$, $\omega = 2\ c^{-1}$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2\ c^{-2}$$

$$w_e^n = \omega^2 \cdot OM \cdot Sin60$$

$$w_e^n = 8\sqrt{3} \text{ см/}c^2$$

$$w_e^\tau = \varepsilon \cdot OM \cdot Sin60$$

$$w_e^\tau = 4\sqrt{3} \text{ см/}c^2$$

Кориолисово ускорение

$$w_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$$

$$w_c = 2\omega \cdot v_{r1} \cdot Sin60 = 16\sqrt{3} \text{ см/}c^2$$

Найдем проекции абсолютного ускорения на оси координат

$$w_x = w_r \cdot \cos 60 = 8 \cdot 0.5 = 4 \text{ см/}c^2$$

$$w_y = w_e^\tau + w_c = 4\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ см/}c^2$$

$$w_z = w_r \cdot Sin60 - w_e^n = 8\frac{\sqrt{3}}{2} - 8\sqrt{3} = -4\sqrt{3} \text{ см/}c^2$$

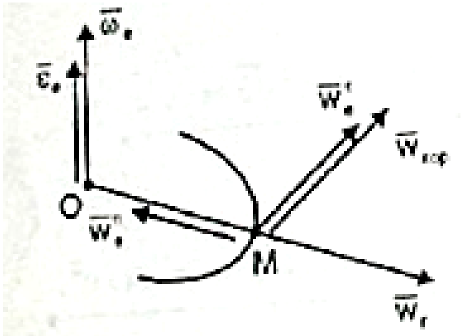
Абсолютное ускорение

$$w_M = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

$$w_M = \sqrt{16 + 400 \cdot 3 + 16 \cdot 3} = 35.56 \text{ см/}c^2$$

Ответ: $w_M = 35.56 \text{ см/}c^2$

Задача 23.31: Шайба M движется по горизонтальному стержню OA, так что $OM = 0.5t^2$ см. В то же время стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точки O, по закону $\varphi = t^2 + t$. Определить радиальную и трансверсальную составляющие абсолютной скорости и абсолютного ускорения шайбы в момент $t = 2c$.



Если $y = OM = 0.5 \cdot t^2$ см, то

$$\dot{y} = \upsilon_r = t\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$$

$$\ddot{y} = w_r = 1\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$\omega = \dot{\varphi} = (2t+1)\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$\varepsilon_e = \ddot{\varphi} = 2\,\frac{рад}{c^2}$$

$$\overline{w}_M = \overline{w}_r + \overline{w}_e + \overline{w}_{\text{кор}}$$

При $t = 2c$

$$w^{n}_{e} = OM \cdot \omega^{2}_{e} = 50\,\frac{\text{см}}{\text{с}^{2}}$$

$$w_{e}^{\tau} = OM \cdot \varepsilon_{e} = 4\,\frac{\text{см}}{\text{с}^{2}}$$

$$w_{кор} = 2\omega_{e}\upsilon_{r} = 20\,\frac{\text{см}}{\text{с}^{2}}$$

$$\upsilon_{r} = 2\,\frac{\text{см}}{\text{с}} = 0{,}02\,\frac{м}{с}$$

$$\upsilon_{\varphi} = 2 \cdot 5 = 10\,\frac{см}{с} = 0{,}1\,\frac{м}{с}$$

$$w_{r} = -(50-1) = -49\,\frac{\text{см}}{\text{с}} = -0{,}49\,\frac{м}{с^{2}}$$

$$w_{\varphi} = w_{e}^{t} + \mathrm{w}_{\text{кор}} = 4 + 20 = 24\,\frac{\text{см}}{\text{с}^{2}} = 0{,}24\,\frac{м}{с^{2}}$$

Ответ:

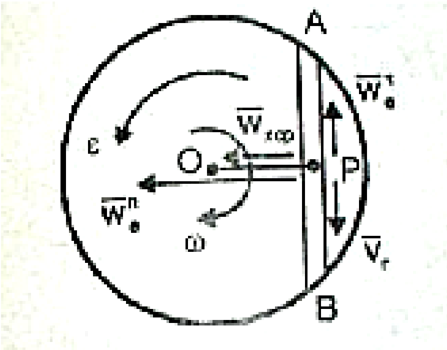
$$\upsilon_{r} = 0{,}02\,\frac{м}{с}$$

$$\upsilon_{\varphi} = 0{,}1\,\frac{м}{с}$$

$$w_{r} = -0{,}49\,\frac{м}{с^{2}}$$

$$w_{\varphi} = 0{,}24\,\frac{м}{с^{2}}$$

Задача 23.36: Шарик P движется со скоростью $1{,}2\frac{м}{с}$ от А до В по хорде AB диска, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Найти абсолютное ускорение шарика, когда он находится на кратчайшем расстоянии от центра диска, равном 30см. В этот момент угловая скорость диска равна $3\frac{рад}{с}$, угловое замедление равно $8\frac{рад}{с^2}$.



$$\overline{w} = \overline{w}_e^n + \overline{w}_e^\tau + \overline{w}_{кор}$$

$$\overline{w}_e^n = OP \cdot \omega_e^2 = 30 \cdot 9 = 270\frac{см}{с^2} = 2{,}7\frac{м}{с^2}$$

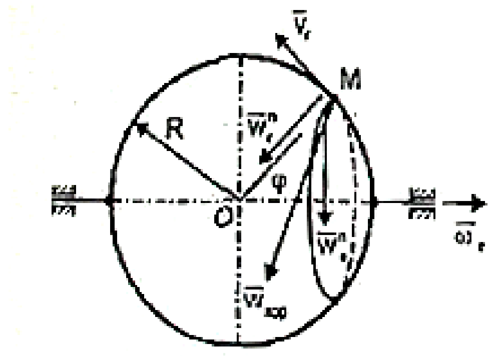
$$\overline{w}_e^\tau = OP \cdot \varepsilon_e = 30 \cdot 8 = 240\frac{см}{с^2} = 2{,}4\frac{м}{с^2}$$

$$\overline{w}_{кор} = 2 \cdot \omega_e \cdot w_r = 2 \cdot 3 \cdot 1.2 = 7.2\frac{м}{с^2}$$

$$W = \sqrt{\left(w_e^n + w_{кор}\right)^2 + \left(w_e^\tau\right)^2} = 10.18\frac{см}{с^2}$$

Ответ: $W = 10.18\frac{см}{с^2}$

Задача 23.41: По ободу диска радиуса R, вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω, движется с постоянной по модулю скоростью υ точка М. Найдём абсолютное ускорение точки М как функцию угла φ, составленного радиус-вектором точки с осью вращения диска.



$$W_A = \overline{w}_r^n + \overline{w}_e^n + \overline{\mathrm{w}}_{\text{кор}}$$

$$w_r^n = \frac{\upsilon^2}{R}$$

$$w_e^n = \omega^2 \cdot R \cdot \sin\varphi$$

$$\mathrm{w}_{\text{кор}} = 2\omega \cdot \upsilon \cdot \cos\varphi$$

$$w_x = w_r^n \cdot \cos\varphi = \frac{\upsilon^2 \cdot \cos\varphi}{R}$$

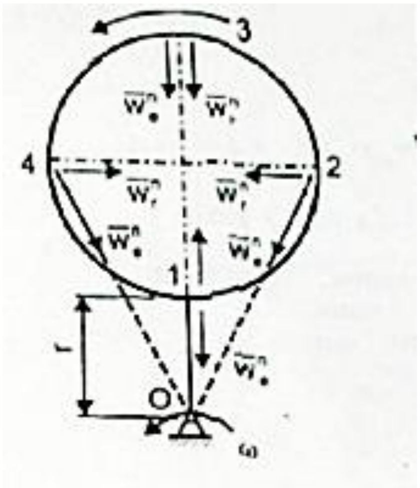
$$w_y = w_r^n \cdot \sin\varphi + w_e^n = \left(\frac{\upsilon^2}{R} + \omega^2 R\right) \cdot \sin\varphi$$

$$w_z = \mathrm{w}_{\text{кор}} = 2\omega \cdot \upsilon \cdot \cos\varphi$$

$$W_A = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\frac{\upsilon^4}{R^2} + \omega^4 \cdot R^2 \cdot (\sin\varphi)^2 + 2\omega^2 \cdot v^2 \left(1 + (\cos\varphi)^2\right)}$$

Ответ: $W_A = \sqrt{\frac{\upsilon^4}{R^2} + \omega^4 \cdot R^2 \cdot (\sin\varphi)^2 + 2\omega^2 \cdot v^2 \left(1 + (\cos\varphi)^2\right)}$

Задача 23.47: Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом AB, и притом так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки с постоянной относительной скоростью u.Вал AB вращается по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от A к B. Угловая скорость вала ω постоянна. Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках 1,2,3 и 4.



$$\bar{w} = \bar{w}_e^n + \bar{w}_c + \bar{w}_r^n$$

$$\bar{w}_e^n = r\omega^2$$

$$w_c = 0$$

$$w_r^n = \frac{u^2}{r}$$

$$w = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}$$

$2) w_c : 2u\square\omega$

$$w_r^n = u^2 / r$$

$$w_e^n = 2\omega^2 r$$

$$\bar{w}_c \perp \bar{w}_r^n \perp \bar{w}_e^n$$

$$w = \sqrt{w_c^2 + w_r^{n2} + w_e^{n2}} = \sqrt{4u^2\omega^2 + u^n / r^2 + 4\omega^4 r^2} =$$

$$= \frac{u^2}{r} + 2\omega^2 r$$

3) $w_c = 0 \quad w^n{}_r = \dfrac{u^2}{r} \quad w^n{}_e = 3r\omega^2$

$$w = w_r^n + w_e^n = \frac{u^2}{r} + 3r\omega^2$$

$$w_n = 2\omega \square n \quad w_r^n = \frac{u^2}{r} \quad w_e^n = 2\omega^2 r$$

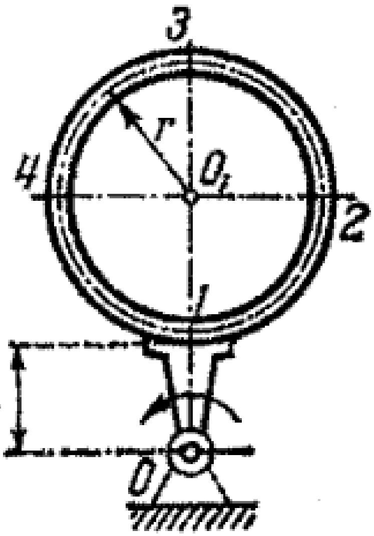
$$w = \sqrt{w_k^2 + (w_r^n)^2 + (w_e^n)^2} = \sqrt{4u^2\omega^2 + \frac{u^4}{r^2} + 4\omega^4 r^2} =$$

$$= \frac{u^2}{r} + 2\omega^2 r$$

Задача 23.48: По условиям предыдущей задачи(23.47), измененным лишь в том отношении, что плоскость оси кольца теперь перпендикулярна оси угла АВ, определить те же величины в двух случаях:

1)переносное и относительно движение одного направления

2)составляющие движения противоположны по направлению



1)

$$W_{a1} = W_{a1y} = W_{пер} - W_{отн} - W_k = \omega^2 r - \frac{u^2}{r} - 2u\omega;$$

$$W_{a3} = W_{a3y} = W_{пер3} + W_{отн} + W_к = 3\omega^2 r + \frac{u^2}{r} + 2u\omega$$

$$W_{a2x} = -W_{a4x} = W_{пер2}\frac{r}{\sqrt{(2r)^2 + r^2}} + W_{отн} + W_к = \omega^2 r + \frac{u^2}{r} + 2u\omega$$

$$W_{a2y} = W_{a4y} = W_{пер2}\frac{2r}{r\sqrt{5}} = 2\omega^2 r$$

$$W_{a2} = W_{a4} = \sqrt{W_{a2x}^2 + W_{a2y}^2} = \sqrt{(\frac{u^2}{r} + 2\omega u + \omega^2 r)^2 + 4\omega^4 r^2}$$

2)

$$W_{a1} = W_{a1y} = W_{пер1} - W_{отн} + W_k = \omega^2 r - \frac{u^2}{r} + 2u\omega;$$

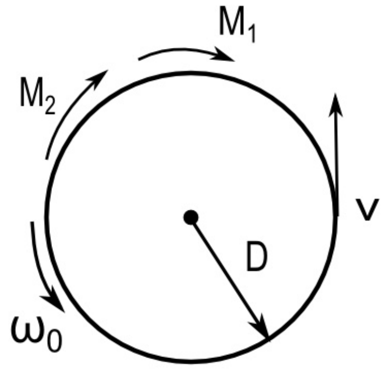
$$W_{a3} = W_{a3y} = W_{пер3} + W_{отн} - W_к = 3\omega^2 r + \frac{u^2}{r} - 2u\omega$$

$$W_{a2x} = -W_{a4x} = W_{пер2} \frac{r}{\sqrt{(2r)^2 + r^2}} + W_{отн} - W_к = \omega^2 r + \frac{u^2}{r} - 2u\omega$$

$$W_{a2y} = W_{a4y} = W_{пер2} \frac{2r}{r\sqrt{5}} = 2\omega^2 r$$

$$W_{a2} = W_{a4} = \sqrt{W_{a2x}^2 + W_{a2y}^2} = \sqrt{(\frac{u^2}{r} - 2\omega u + \omega^2 r)^2 + 4\omega^4 r^2}$$

Задача 37.6: Для быстрого торможения больших маховиков применяется электрический тормоз, состоящий из двух диаметрально расположенных полюсов, несущий на себе обмотку, питаемую постоянным током. Токи, индуцируемые в массе маховика при его движении мимо полюсов, создают тормозящий момент M_1, пропорциональный скорости υ на ободе маховика: $M_1 = k\upsilon$, где k- коэффициент, зависящий от магнитного потока и размеров маховика. Момент M_2 от трения в подшипниках можно считать постоянным; диаметр маховика D, момент инерции его относительно оси вращения J. Найти, через какой промежуток времени остановится маховик, вращающийся с угловой скоростью ω_0.



Дифференциальное уравнение вращения

$$J\frac{d\omega}{dt} = -k\upsilon - M_2 \text{ или}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = -k\omega\cdot\frac{D}{2} - M_2, \text{ или}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{k\omega D}{2J} - \frac{M_2}{J}$$

Разделяя переменные, получим

$$-\int_{\omega_0}^{0}\frac{d\omega}{\frac{k\omega D}{2J}+\frac{M_2}{J}} = \int_0^T dt \Rightarrow -\frac{2J}{kD}\ln\left(\frac{kD}{2J}\omega + \frac{M_2}{J}\right)\Bigg|_{\omega_0}^{0} = T$$

$$-\frac{2J}{kD}\ln\frac{M_2}{J} + \frac{2J}{kD}\left(\frac{kD}{2J}\omega_0 + \frac{M_2}{J}\right) = T \text{ или}$$

$$\frac{2J}{kD}\ln\frac{\frac{kD}{2J}\omega_0 + \frac{M_2}{J}}{\frac{M_2}{J}} = T \text{ или}$$

$$T = \frac{2J}{kD}\ln(1+\frac{kD\omega_0}{2M_2})$$

Ответ: $T = \frac{2J}{kD}\ln(1+\frac{kD\omega_0}{2M_2})$

Задача 37.8: Решить предыдущую задачу в предположении, что момент сил сопротивления M_1 пропорционален угловой скорости вращения твёрдого тела: $M_1 = \alpha \cdot \omega$.

Дифференциальное уравнение вращательного движения имеет вид

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{M-\alpha\omega} = \frac{1}{J}\int_0^t dt$$

Откуда

$$-\frac{1}{\alpha}\ln(M-\alpha\omega) + \alpha\ln M = \frac{1}{J}$$

Или

$$\left[\ln M + \ln(M-\alpha\omega)\right] = -\frac{\alpha t}{J}$$

Или

$$\ln\frac{M-\alpha\omega}{M} = -\frac{\alpha t}{J},$$

Тогда

$$e^{-\frac{\alpha t}{J}} = \frac{M-\alpha\omega}{M}$$

Или

$$M e^{-\frac{\alpha t}{J}} = M - \alpha\omega$$

Или

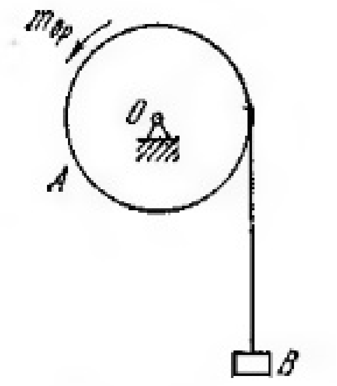
$$\alpha\omega = M - M e^{-\frac{\alpha t}{J}}$$

Окончательно получаем, что

$$\omega = \frac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{J}}\right)$$

Ответ: $\omega = \dfrac{M}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{J}}\right)$

Задача 37.43: При пуске в ход электрической лебёдки к барабану A приложен вращающий момент $m_{вр}$, пропорциональный времени, причём $m_{вр} = at$, где a - постоянная. Груз B массы M_1, поднимается посредством каната, навитого на барабан A радиуса r и массы M_2. Определить угловую скорость барабана, считая его сплошным цилиндром. В начальный момент лебёдка находилась в покое.



Дифференциальное уравнение вращения барабана лебёдки:

$$J\frac{d\omega}{dt} = -M_1 g \cdot r + at$$

Т.к.

$$J = \frac{M_2 r^2}{2}$$

То уравнение примет вид:

$$\frac{M_2 r^2}{2} \cdot \frac{d\omega}{dt} = -M_1 gr + at$$

Разделим переменные

$$\frac{M_2 r^2}{2} d\omega = -M_1 grdt + atdt$$

Интегрируем, используя начальные условия

$$\frac{M_2 r^2}{2}\int_0^{\omega} d\omega = -M_1 gr\int_0^t dt + a\int_0^t tdt$$

Получим

$$\frac{M_2 r^2}{2}\omega = -M_1 grt + \frac{at^2}{2}$$

Откуда

$$\omega = \frac{(at - 2M_1 gr)t}{M_2 r^2}$$

Ответ: $\omega = \dfrac{(at - 2M_1 gr)t}{M_2 r^2}$

Задача 37.54: Решить предыдущую задачу в предположении, что все люди двигаются в сторону вращения платформы. Радиус платформы *R*, ее масса в четыре раза больше массы каждого из людей и равномерно распределена по всей ее площади. Выяснить также, чему должна быть равна относительная линейная скорость *u* для того, чтобы платформа перестала вращаться.

Ответ: $\omega_1 = \omega_0 - \frac{8}{9}\frac{u}{R}$, $u = \frac{8}{9}R\omega_0$.

Решение:

В новых условиях имеем:

$$K = J\omega + 2mR(\omega R + u) + 2m\frac{R}{2}\left(\omega\frac{R}{2} + 2u\right) = \frac{4mR^2}{2}\omega + 2mR^2\omega + 2m\omega\left(\frac{R}{2}\right)^2 +$$

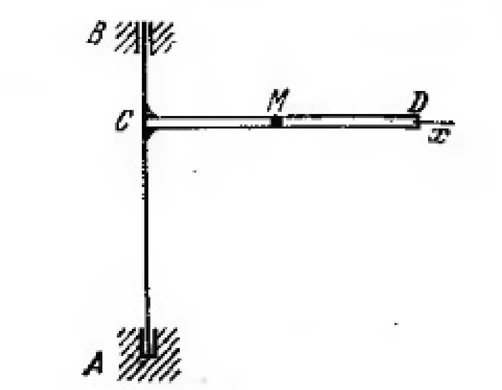
$$+ 4mRu = K_0 = \frac{4m}{2}R^2\omega_0 + 2m\omega_0 R^2 + 2m\omega_0\frac{R^2}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{9}{2}2m\omega R^2 + 4mRu = \frac{9}{2}m\omega_0 R^2 \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{8}{9}\frac{u}{R} \Rightarrow$$

для обнуления ω получаем:

$$u = \frac{9}{8}\omega_0 R.$$

Задача 37.56: Горизонтальная трубка *CD* может свободно вращаться вокруг вертикальной оси *AB*. Внутри трубки на расстоянии *MC=a* от оси находится шарик *M*. В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0. Определить угловую скорость ω трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен *J*, *L* — ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы *m*.



Решение:

Воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения системы (трубка *CD*, вал *AB*, шарик *M*) относительно неподвижной оси *Az*. Т.к. все силы либо пересекают ось *Az*, либо ей параллельны, то $\frac{dK_{Az}}{dt} = 0$.

Следовательно, $K_{Az} = const$.

Имеет место закон сохранения главного момента количеств движения системы в проекции на ось *Az*. Выпишем выражение для K_{Az}, выбрав положительным направление по дуговой стрелке угловой скорости ω:

$$K_{Az} = K_{Az}^{трубки} + K_{Az}^{(M)},$$

$$K_{Az}^{трубки} = J\omega,$$

$$K_{Az}^{(M)} = Пp_{Az}\left[CM \times m(\vec{\upsilon}_e + \vec{\upsilon}_r)\right] = Пp_{Az} CM \times m\vec{\upsilon}_e + Пp_{Az} CM \times m\vec{\upsilon}_r =$$
$$= CM \cdot m \cdot \omega \cdot CM + 0 = m\omega \cdot x^2,$$

Т.к. $CM \times m\vec{\upsilon}_r = \vec{0}$, $CM = x$.

Поэтому

$$K_{Az} = J\omega + m\omega \cdot x^2 = \omega(J + mx^2).$$

Т.к. $K_{Az} = const$, то приравняем значение этой величины в начальный момент, когда *x=a*, и в конечный момент, когда *x=L*:

$$\omega_0(J + ma^2) = \omega_1(J + mL^2).$$

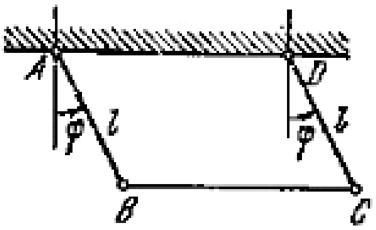
Поэтому угловая скорость трубки в момент вылета из нее шарика равна

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{J + ma^2}{J + mL^2}.$$

Угловая скорость уменьшается при увеличении момент инерции системы относительно оси *Az*.

Ответ: $\omega = \dfrac{J + ma^2}{J + mL^2}\omega_0$.

Задача 38.1: Вычислить кинетическую энергию плоского механизма, состоящего из трех стержней *AB*, *BC* и *CD*, прикрепленных цилиндрическими шарнирами *A* и *D* к потолку и соединенных между собой шарнирами *B* и *C*. Масса каждого из стержней *AB* и *CD* длины l равна M_1, масса стержня *BC* равна M_2, причем *BC*=*AD*. Стержни *AB* и *DC* вращаются с угловой скоростью ω.



Ответ: $T = \dfrac{2M_1 + 3M_2}{6} l^2 \omega^2.$

Решение:

$$T = 2T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{AX} \omega^2,$$

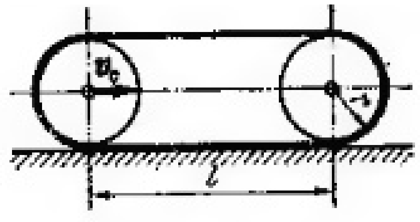
$$J_{AX} = \frac{M_1 l^2}{3},$$

$$\upsilon = \omega \cdot AB = \omega l,$$

$$T_2 = \frac{M_2 \upsilon}{2} = \frac{M_2 \omega^2 l^2}{2},$$

$$T = \frac{M_1 \omega^2 l}{3} + \frac{M_2 \omega^2 l^2}{2} = \frac{2M_1 + 3M_2}{6} \omega^2 l^2.$$

Задача 38.4: Вычислить кинетическую энергию гусеницы трактора, движущегося со скоростью v_0. Расстояние между осями колес равно l, радиусы колес равны r, масса одного погонного метра гусеничной цепи равна γ.



Решение:

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии частей полукольца-1, полукольца-2, верхней части гусеницы-3 (кинетической энергии нижней части гусеницы не будет, т.к. она все время находится на земле).

Значит, $T = T_1 + T_2 + T_3$, причем сумму T_1 и T_2 можно записать как $T_{1,2}$ – энергия кольца.

$T_{1,2} = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$ - кольцо совершает плоскопараллельное движение, где $m = \gamma \cdot 2\pi r$, $2\pi r$ – длина окружности.

$$J = mr^2 = \gamma \cdot 2\pi r^2 r = \gamma \cdot 2\pi r^3.$$

$$\omega = \frac{\upsilon_0}{r}.$$

Тогда, $T_{1,2} = \frac{1}{2}\gamma \cdot 2\pi r \cdot \upsilon_0^2 + \frac{1}{2}\gamma\omega^2 2\pi r^3 \frac{\upsilon_0^2}{r^2} = 2\pi\gamma r \cdot \upsilon_0^2$,

$T_3 = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2}\gamma \cdot l \cdot 4\upsilon_0^2 = 2\gamma \cdot l\upsilon_0^2$ - поступательное движение.

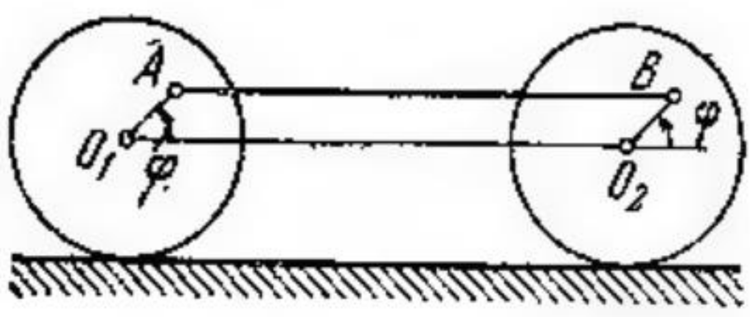
$\upsilon = 2\upsilon_0$ - по теореме о мгновенном центре скоростей,

$m = \gamma \cdot l$, где l – расстояние между осями.

Тогда, $T = 2\pi\gamma \cdot r\upsilon_0^2 + 2\gamma \cdot l \cdot \upsilon_0^2 = 2\gamma \cdot \upsilon_0^2(\pi r + l)$.

Ответ: $T = 2\gamma(l + \pi r)\upsilon_0^2$.

Задача 38.10: Вычислить кинетическую энергию системы, состоящей из двух колес, соединенных паровозным спарником *AB* и стержнем O_1O_2, если оси колес движутся со скоростью v_0. Масса каждого колеса равна M_1. Спарник *AB* и соединительный стержень O_1O_2 имеют одинаковую массу M_2. Масса колес равномерно распределена по их ободам; $O_1A=O_2B=r/2$, где r — радиус колеса. Колеса катятся без скольжения по прямолинейному рельсу.



Решение:

Кинетическая энергия системы

$$T = 2T_{колеса} + T_{O_1O_2} + T_{AB}.$$

Т.к. колеса катятся без проскальзывания, то мгновенный центр скоростей каждого колеса находится в точке касания с рельсом. Отсюда находим угловую скорость каждого из колес: $\omega = \dfrac{\upsilon_0}{r}$.

$$T_{колеса} = \frac{1}{2}M_1\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}J_{O_1z}\omega^2 = \frac{1}{2}M_1\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}M_1r^2\left(\frac{\upsilon_0}{r}\right)^2 = M_1\upsilon_0^2.$$

Кинетическая энергия стержня O_1O_2, движущегося поступательно со скоростью υ_0, равна

$$T_{O_1O_2} = \frac{1}{2}M_2\upsilon_0^2.$$

Спарник *AB* движется также поступательно. Поэтому

$$T_{AB} = \frac{1}{2}M_2\upsilon_A^2 = \frac{1}{2}M_2(\omega\cdot PA)^2 = \frac{1}{2}M_2\omega^2\left[r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - 2r\cdot\frac{r}{2}\cos(90^\circ + \varphi)\right] =$$

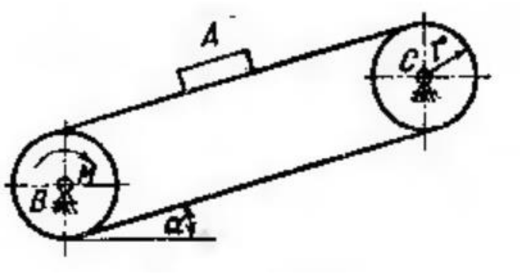
$$= \frac{1}{2}M_2\left(\frac{\upsilon_0}{r}\right)^2\cdot r^2\left(\frac{5}{4} + \sin\varphi\right) = \frac{1}{2}M_2\upsilon_0^2\left(\frac{5}{4} + \sin\varphi\right).$$

Суммарная кинетическая энергия

$$T = 2M_1\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}M_2\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}M_2\upsilon_0^2\left(\frac{5}{4} + \sin\varphi\right) = \frac{\upsilon_0^2}{8}[16M_1 + M_2(9 + 4\sin\varphi)].$$

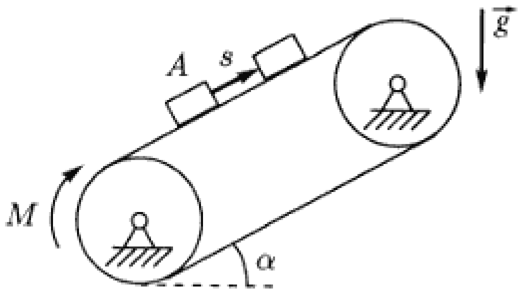
Ответ: $T = \dfrac{\upsilon_0^2}{8}[16M_1 + M_2(9 + 4\sin\varphi)].$

Задача 38.20: Транспортер приводится в движение из состояния покоя приводом, присоединенным к нижнему шкиву B. Привод сообщает этому шкиву постоянный вращающий момент M. Определить скорость ленты транспортера v в зависимости от ее перемещения s, если масса поднимаемого груза A равна M_1, а шкивы B и C радиуса r и массы M_2 каждый представляют собой однородные круглые цилиндры. Лента транспортера, массой которой следует пренебречь, образует с горизонтом угол α. Скольжение ленты по шкивам отсутствует.



Пусть груз A вместе с лентой транспортера прошел расстояние s, тогда он поднялся на высоту

$$h = s \cdot Sin\alpha$$



и сила тяжести совершит отрицательную работу

$$A_1 = -M_1 g \cdot s \cdot Sin\alpha$$

Кроме того, совершит работу (положительную) момент M, т.е.:

$$A_M = M_\varphi = M\frac{s}{r}$$

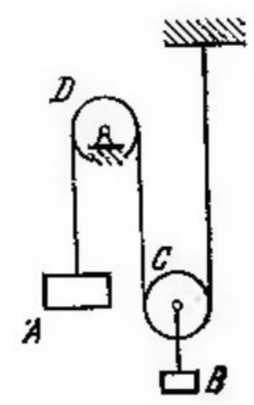
Осталось применить теорему об изменении кинетической энергии:

$$M_1\frac{v^2}{2} + 2\cdot\frac{M_2 r^2}{2}\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 = M\frac{s}{r} - M_1 g \cdot s \cdot Sin\alpha$$

$$v = \sqrt{\frac{2s\left(M - M_1 grSin\alpha\right)}{r\left(M_1 + M_2\right)}}$$

Ответ: $v = \sqrt{\frac{2s\left(M - M_1 grSin\alpha\right)}{r\left(M_1 + M_2\right)}}$

Задача 38.30: Груз A массы M_1, опускаясь вниз, при помощи троса, перекинутого через неподвижный блок D, поднимает вверх груз B массы M_2, прикрепленный к оси подвижного блока C. Блоки C и D считать однородными сплошными дисками массы M_3 каждый. Определить скорость груза A в момент, когда он опустится на высоту h. Массой троса, проскальзыванием по ободам блоков и силами сопротивления пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



Чтобы найти скорость, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$dT = \sum dA_i$$

Найдем кинетическую энергию

$$T = T_A + T_C + T_B + T_D$$

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2}$$

$$T_D = \frac{I_A \omega_B^2}{2} = \frac{M_3 r_D^2}{4}\left(\frac{v}{r_D}\right)^2 = \frac{M_3 v^2}{4}$$

$$T_C = \frac{M_3 v^2}{2\cdot 4} + \frac{I_3 \omega_c^2}{2} = \frac{M_3 v^2}{8} + \frac{M_3 r_c^2}{4}\left(\frac{v}{2r_c}\right)^2 = \frac{M_3 v^2}{8} + \frac{M_3 v^2}{16} = \frac{3M_3 v^2}{16}$$

$$T_B = \frac{M_2 v^2}{2\cdot 4} = \frac{M_2 v^2}{8}$$

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_2 v^2}{8} + \frac{3M_3 v^2}{16} + \frac{M_3 v^2}{4} = v^2\left(\frac{8M_1 + 7M_3 + 2M_2}{16}\right)$$

Найдем работу

$$A = A_A + A_C + A_B + A_D$$

$$A_A = M_1 gh$$

$$A_D = 0$$

$$A_c = -M_3 g\frac{h}{2}$$

$$A_B = -M_2 g\frac{h}{2}$$

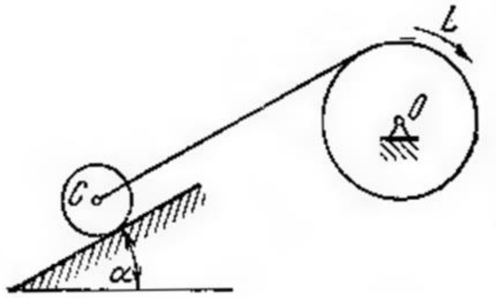
$$A = M_1 gh - M_2 g\frac{h}{2} - M_3 g\frac{h}{2} = gh\left(M_1 - \frac{M_2}{2} - \frac{M_3}{2}\right)$$

$$v^2\frac{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}{16} = gh\frac{2M_1 - M_2 - M_3}{2}$$

$$v = 2\sqrt{2gh\frac{2M_1 - M_2 - M_3}{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}}$$

Ответ: $v = 2\sqrt{2gh\frac{2M_1 - M_2 - M_3}{8M_1 + 2M_2 + 7M_3}}$

Задача 38.40: К барабану ворота радиуса r_1 и массы m_1 приложен постоянный вращающий момент L. К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось C колеса массы m_2. Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса и трением пренебречь.



Чтобы найти угловую скорость, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_i$$

Найдем кинетическую энергию

$T_0 = 0$, т.к. $v_0 = 0$

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{m_1 r_1^2 \omega_1^2}{2 \cdot 2} = \frac{m_1 r_1^2 \omega_1^2}{4}$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_{c2}\omega_2^2}{2}$$

$$v_2 = \omega_1 r_1$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2}$$

$$T_2 = \frac{m_2 \omega_1^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_1^2}{4}\frac{\omega_1^2 r_1^2}{r_2^2} = \frac{3}{4} m_2 \omega_1^2 r_1^2$$

$$T = \frac{\omega_1^2 r_1^2}{4}\left(m_1 + 3m_2\right)$$

Найдем работу

$$\sum A_i = L \cdot \varphi - m_2 g Sin\alpha \cdot \varphi r_1 = \left(L - m_2 g Sin\alpha \cdot r_1\right)\varphi$$

$\varphi = n \cdot 2\pi$, т.к. один оборот равен 2π

$$\sum A_i = 2\pi n\left(L - m_2 g Sin\alpha \cdot r_1\right)$$

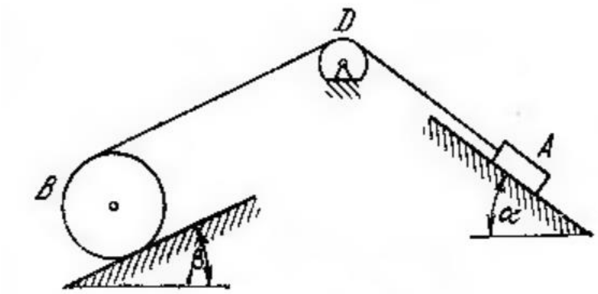
Получим

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{8\pi n\left(L - m_2 g r_1 Sin\alpha\right)}{r_1^2\left(m_1 + 3m_2\right)}} = \frac{2}{r_1}\sqrt{\frac{2\pi n\left(L - m_2 g r_1 Sin\alpha\right)}{m_1 + 3m_2}}$$

Ответ: $\omega_1 = \frac{2}{r_1}\sqrt{\frac{2\pi n\left(L - m_2 g r_1 Sin\alpha\right)}{m_1 + 3m_2}}$

Задача 38.45: К грузу A массы M_1 прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок D массы M_2 и намотанная на боковую поверхность цилиндрического катка B массы M_3. Радиус катка B равен r. При движении груза A вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок D, а каток B катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β.

Определить скорость груза A в зависимости от пройденного им пути s, если в начальный момент система находилась в покое. Блок D и каток B считать однородными круглыми цилиндрами. Коэффициенты трения скольжения и качения соответственно равны f и f_k. Массой нити пренебречь.



Чтобы найти скорость груза A, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_i$$

Найдем кинетическую энергию

$$T_0 = 0$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{M_1 v^2}{2}$$

$$T_2 = \frac{\frac{M_2 R^2}{2} \cdot \frac{v^2}{R^2}}{2} = \frac{M_2 v^2}{4}$$

$$T_3 = \frac{M_3 \frac{v^2}{4}}{2} + \frac{M_3 \frac{R^2}{2} \cdot \frac{v^2}{4R^2}}{2} = \frac{M_3 v^2}{8} + \frac{M_3 v^2}{16} = \frac{3M_3 v^2}{16}$$

$$T = \frac{v_1^{\;2}}{2}\left(M_1 + \frac{M_2}{2} + \frac{3M_3}{8}\right)$$

Найдем работу

$$A = M_1 sgSin\alpha - M_1 gsfSin\alpha - M_c\varphi - M_3 g\frac{s}{2}Sin\beta$$

$$M_c = M_3 g f_k Cos\beta$$

$$\varphi = \frac{s}{2r}$$

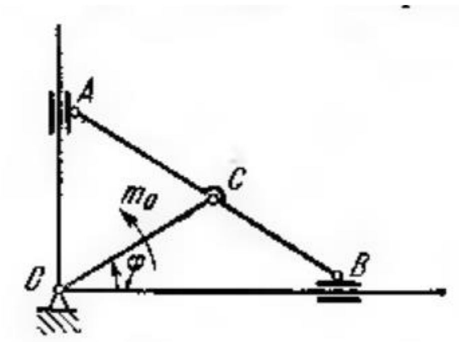
$$A = \left(M_1\left(Sin\alpha - fCos\alpha\right) - M_3 Sin\frac{\beta}{2} - M_3\frac{f_k}{2r}Cos\beta\right)sg$$

Подставим найденные значения в формулу $T - T_0 = \sum A_i$, получим

$$v = \sqrt{\frac{2\left(M_1\left(Sin\alpha - fCos\alpha\right) - M_3 Sin\frac{\beta}{2} - M_3\frac{f_k}{2r}Cos\beta\right)sg}{\frac{M_2}{2} + M_1 + \frac{3M_3}{8}}}$$

Ответ: $$v = \sqrt{\frac{2\left(M_1\left(Sin\alpha - fCos\alpha\right) - M_3 Sin\frac{\beta}{2} - M_3\frac{f_k}{2r}Cos\beta\right)sg}{\frac{M_2}{2} + M_1 + \frac{3M_3}{8}}}$$

Задача 38.48: Механизм эллипсографа, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение посредством постоянного вращающего момента m_0, приложенного к кривошипу OC. В начальный момент при φ=0 механизм находился в покое. Найти угловую скорость кривошипа OC в момент, когда он сделал четверть оборота. Дано: M — масса стержня AB, $m_A = m_B = m$ — массы ползунов A и B, $OC = AC = BC = l$; массой кривошипа OC и силами сопротивления пренебречь.



$$\varphi = \frac{2\pi}{4}$$

$$v_c = \omega \cdot l$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_c}{CP} = \frac{\omega l}{l} = \omega$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot PB = 2v_c = 2\omega l$$

$$v_A = 0$$

Чтобы найти угловую скорость, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_i$$

Найдем кинетическую энергию

$$T_0 = 0$$

$$T = T_A + T_B + T_{AB}$$

$$T_A = 0$$

$$T_B = \frac{m_B v_B^{\ 2}}{2} = \frac{4ml^2\omega^2}{2} = 2ml^2\omega^2$$

$$T_{AB} = T^{вр} + T^{пост} = \frac{I_c \omega_{AB}^{\ 2}}{2} + \frac{Mv_c^2}{2} = \frac{Ml^2}{12 \cdot 2}\omega^2 + \frac{Ml^2\omega^2}{2} = \frac{2}{3}Ml^2\omega^2$$

$$T = 2\omega^2 l^2 \left(m + \frac{M}{3}\right)$$

Найдем работу

$$\sum A_i = m_0 \varphi = m_0 \frac{\pi}{2}$$

Подставим найденные значения в формулу $T - T_0 = \sum A_i$, получим

$$2\omega^2 l^2 \left(m + \frac{M}{3}\right) = m_0 \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\pi m_0}{m + \frac{M}{3}}}$$

Ответ: $\omega = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\pi m_0}{m + \frac{M}{3}}}$

Задача 13.5: Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые $5c$ он совершает 12,5 оборота. Какова его угловая скорость по истечению этих 5с?

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = 2\pi n$$

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{4\pi n}{t^2}$$

$$\omega = \varepsilon t = \frac{4\pi n t}{t^2} = \frac{4\pi n}{t} = \frac{4\pi 12.5}{5} = 10\pi\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$$

Ответ: $\omega = 10\pi\left(\frac{рад}{c}\right)$

Задача 13.6: Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через $10мин$ после начала движения оно имеет угловую скорость, равную $4\pi \dfrac{рад}{c}$. Сколько оборотов сделало колесо за эти $10мин$?

$$\omega = \beta t \Rightarrow \beta = \frac{\omega}{t}$$

$$\varphi = \frac{\beta t^2}{2} = \frac{\omega t}{2}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t}{4\pi}$$

$$N = \frac{4\pi \cdot 600}{4\pi} = 600$$

Ответ: колесо сделает 600 оборотов.

Задача 13.8: С момента выключения мотора пропеллер самолёта, вращавшийся с угловой скоростью, равной $40\pi\left(\frac{рад}{с}\right)$, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

Уравнения равнозамедленного движения имеют вид:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \varepsilon t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases}$$

При остановке пропеллера $\omega = 0$ и, считая $\varphi_0 = 0$, уравнение можно записать в виде

$$\begin{cases} \omega_0 = \varepsilon t \\ \varphi = \omega_0 t - \dfrac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим t и подставим во второе

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon}$$

$$\varphi = \omega_0 \frac{\omega_0}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon\left(\dfrac{\omega_0}{\varepsilon}\right)^2}{2} = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{2\varphi}$$

По условиям задачи

$$\omega_0 = 40\pi$$

$$\varphi = 2\pi \cdot 80$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{(40\pi)^2}{2 \cdot 2\pi \cdot 80} = 5\pi\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)$$

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{40\pi}{5\pi} = 8с$$

Ответ: $t = 8с$

Задача 13.12: Определить скорость υ и ускорение w точки, находящейся на поверхности Земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси; широта Ленинграда $60°$, радиус Земли $6370 км$.

$$NM = \frac{R}{2}$$

$$\upsilon_M = \omega \cdot NM = 0.00007272 \cdot 3185000 = 232 \frac{м}{с}$$

$$w = w^n = \frac{\upsilon^2}{p} = \frac{(232)^2}{3185000} = 0.0169 \frac{м}{с^2}$$

Ответ:

$$\upsilon = 232 \frac{м}{с}$$

$$w = 0.0169 \frac{м}{с^2}$$

Задача 13.13: Маховое колесо радиуса 0,5м вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна $2\frac{м}{с}$. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

$$\upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{R}$$

$$\varphi = \omega t$$

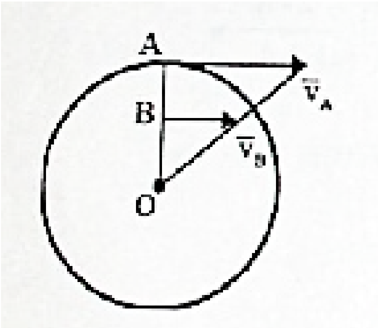
$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{\upsilon t}{2\pi R}$$

$$n = \frac{2 \cdot 60}{2 \cdot 3.14 \cdot 0.5} = 38.2\frac{\text{об}}{мин}$$

Ответ:

$$n = 38.2\frac{\text{об}}{мин}$$

Задача 13.14: Точка A шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью $50\frac{\text{см}}{\text{с}}$, а некоторая точка B, взятая на одном радиусе с точкой A, движется со скоростью $10\frac{\text{см}}{\text{с}}$; расстояние $AB = 20\text{см}$. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.



$$\omega = \frac{\upsilon_A}{0.5d} = \frac{\upsilon_B}{0.5d - 20} \quad \text{или}$$

$$0.5d\,\upsilon_B = 0.5d\,\upsilon_A - 20\upsilon_A$$

Подставляя численные значения

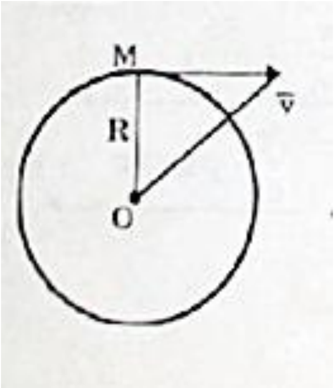
$$0.5 \cdot 10d = 0.5 \cdot 50d - 20 \cdot 50$$
$$5d = 25d - 1000$$
$$1000 = 20d$$
$$d = \frac{1000}{20} = 50\text{см}$$

Угловая скорость вращения шкива

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{0.5 \cdot 50} = \frac{50}{25} = 2c^{-1}$$

Ответ: $\omega = 2\frac{\text{рад}}{\text{с}}, d = 50\text{см}$

Задача 13.15: Маховое колесо радиуса $R = 2$м вращается равноускоренно из состояния покоя; через $t = 10c$ точки, лежащей на ободе, обладают линейной скоростью $\upsilon = 100\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти скорость, нормальное и касательное ускорение точек обода колеса для момента $t = 15c$.



$$\omega = \varepsilon t + \omega_0$$

$$\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega = \varepsilon t$$

$$\omega = \frac{\upsilon}{R}$$

$$\frac{\upsilon}{R} = \varepsilon t$$

$$\varepsilon = \frac{\upsilon}{Rt} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = const$$

$$\omega = \varepsilon t = 5 \cdot 15 = 75\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

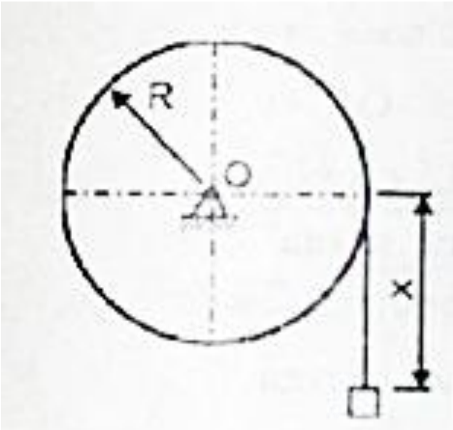
$$\upsilon = \omega R = 75 \cdot 2 = 150\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$W_N = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{150^2}{2} = 11250\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$W_\tau = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Ответ: $\upsilon = 150\frac{м}{c}, W_N = 11250\frac{\text{м}}{\text{с}^2}, W_\tau = 10\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Задача 13.18: Вал радиуса $R = 10$см приводится во вращение гирей P, привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x = 100t^2$, где x - расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t - время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t.



$$x = 100t^2$$

$$\dot{x} = 200t\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$$

$$\ddot{x} = 200\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R} = \frac{200t}{10} = 20t\,\frac{рад}{с}$$

$$\varepsilon = \frac{\ddot{x}}{R} = 20\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$w = \sqrt{(w_N)^2 + (w_T)^2}$$

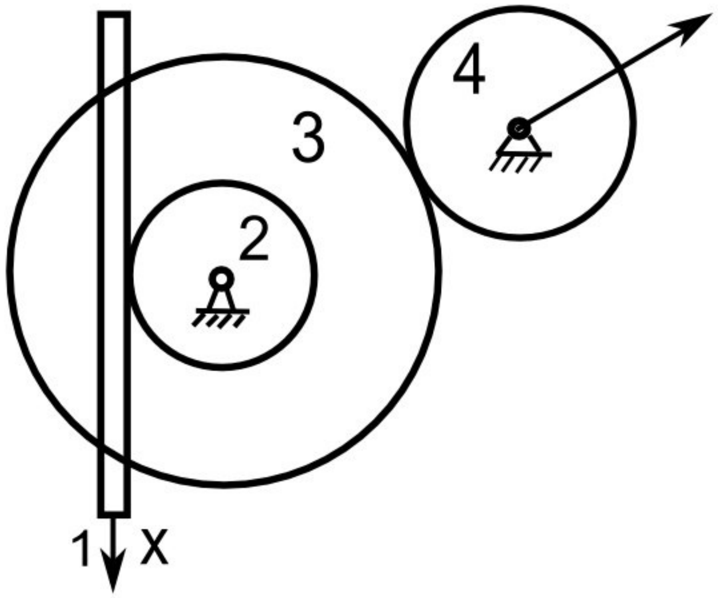
$$w_N = \omega^2 R = 400t^2 \cdot 10 = 4000t^2$$

$$w_T = \varepsilon R = 20 \cdot 10 = 200\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$W = \sqrt{16000000t^4 + 40000} = 200\sqrt{1 + 400t^4}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$$

Ответ: $\omega = 20t\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}, \varepsilon = 20\,\frac{рад}{с^2}, W = 200\sqrt{1 + 400t^2}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$

Задача 14.4: В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного шрифта 1 передаётся шестерне 2, на оси которой укреплено зубчатое колесо 3, сцепляющееся с шестерней 4, несущей стрелку. Определить угловую скорость стрелки, если движение шрифта задано уравнением $x = a \cdot \sin kt$ и радиусы зубчатых колёс соответственно равны r_2, r_3, r_4.



$$\dot{x} = ak \cdot \cos(kt)$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{r_2} = \frac{ak \cdot \cos(kt)}{r_2}$$

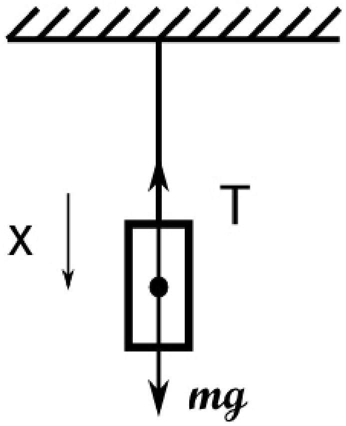
$$\omega_2 \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4$$

Откуда

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 \cdot r_3}{r_4} = \frac{ak \cdot \cos(kt)}{r_2} \cdot \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_3}{r_2 \cdot r_4} \cdot ak \cdot \cos(kt)$$

Ответ: $\omega_4 = \dfrac{r_3}{r_2 \cdot r_4} ak \cdot \cos(kt)$

Задача 26.1: В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280кг. В первые 10 с он проходит 35м.Найти натяжение каната на котором висит лифт.



Пройденный путь $H = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$,но $\upsilon_0 = 0$ т.е. $H = \frac{at^2}{2}$ отсюда $a = \frac{2H}{t^2}$

$$a = \frac{2 \cdot 35}{10^2} = 0,7 м / с^2$$

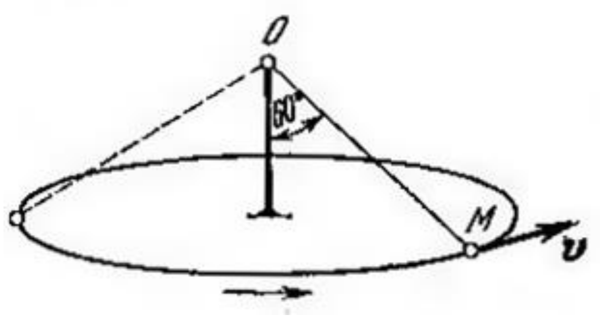
ускорение движения лифта

Сила действующая на лифт $F = mg$, $F = F_H + ma$

$$F_H = F - ma = mg - ma = m(g - a)$$

$$F_H = 280 \cdot (9,8 \cdot 0,7) = 2548H$$

Задача 26.9: Груз М массы 0,102 подвешенный на нити длины 30см в неподвижной точке О, представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60.Определить скорость υ груза и натяжение Т нити



$$m\bar{a} = \bar{T} + \bar{G}$$

$$ma_\tau = 0, a_\tau = \ddot{S} \to \ddot{S} = 0, отсюда, \upsilon = \dot{S} = const$$

$$ma_n = T\sin a, a_n = \frac{S^2}{R}; R = l\sin a$$

$$\frac{ms^2}{R} = T\sin a; \frac{m\upsilon^2}{l\sin a} = l\sin a$$

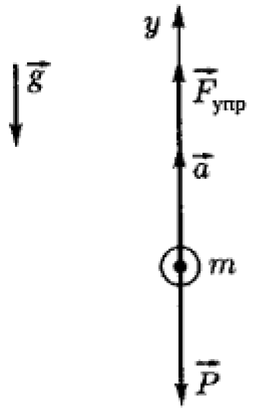
$$\upsilon = \sqrt{\frac{Tl}{m}}\sin a$$

$$0 = T\sin a \to T = \frac{G}{\sin a} = \frac{mg}{\sin a}$$

$$\upsilon = \frac{0,102 \cdot 9,81}{0,5} = 24$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,3}{0,102} \cdot 0,86} = 2,1м / с$$

Задача 26.11: В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50Н, при ускоренном -51 Н. Найти ускорение кабины.



Уравнение динамики на ось y:

$$ma = F_{упр} - P$$

Если a=0(равномерное движение), то

$$0 = F_{упр} - P \rightarrow P = F_{упр} = 50H$$

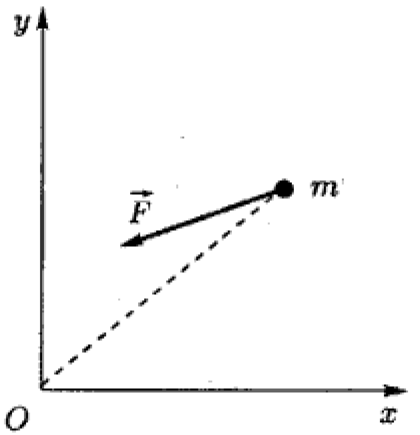
Тогда

$$a = \frac{F_{упр} - P}{m} = g\,\frac{F_{упр} - P}{P} = g\,\frac{51-50}{50} = 9.8 \cdot \frac{1}{50} = 0{,}196 м/с^2$$

Задача 26.16: Движение материальной точки массы 0,2 кг выражается уравнениями

$x = 3\cos \pi t$ см,

$y = 4\sin \pi t$ см. Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от её координат.



$m\ddot{x} = F_x$

$m\ddot{y} = F_y \to F_x = -m \cdot 3(2\pi)^2 \cos 2\pi t = -0,0789x,$

$F_y = -m \cdot 4\pi^2 \sin \pi t = -0,0197y$

Задача 26.17: Шарик, масса которого равна 100г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением $x = 4,9t - 2,45(1 - e^{-2t})$

Где x- в метрах, t- в секундах, ось Ox направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха R и выразить её как функцию скорости шарика

Определим скорость и ускорение

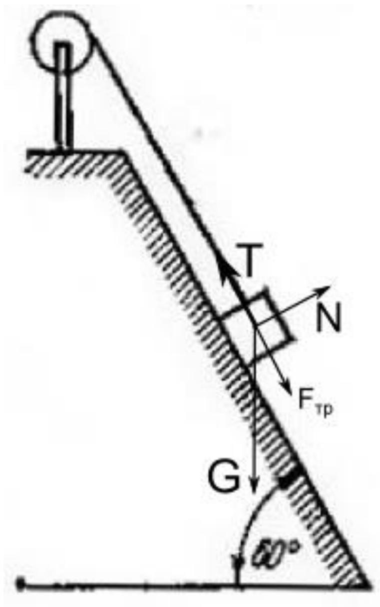
$$\upsilon = \dot{x} = 4,9 - 4,9e^{-2t} = 4,9(1 - e^{-2t})\,м/с$$
$$a = \ddot{x} = \dot{\upsilon} = 9,8e^{-2t}\,м/с^2$$

По 2 закону Ньютона

$\bar{F} + \bar{R} = m\bar{a}$ и в проекции на ось X

$$ma = F - R; R = F - ma = mg - ma$$
$$R = m(g - a)$$
$$R = 0,1(9,8 - 9,8e^{-2t}) = 0,98(1 - e^{-2t}) = 0,2$$

Задача 26.26: Груз массы M=600 кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60 с горизонтом. Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен 0,2. Ворот радиуса 0,2 м вращается по закону $\varphi = 0,4t^3$.Найти натяжение троса, как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.



Уравнение движения груза в проекциях на декартовы оси Oxy согласно 2-му закону Ньютона

$$\begin{cases} M\ddot{x} = T - P\sin 60 - F_{тр} \\ 0 = N - P\cos 60 \end{cases}$$

Следовательно, сила трения

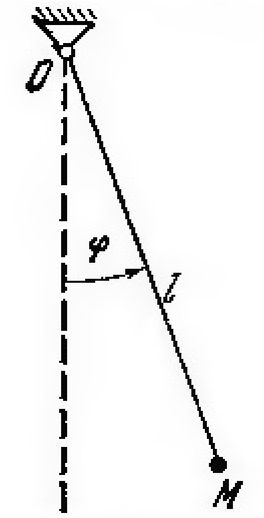
$$F_{Тр} = fN = fP\cos 60$$

Из условия задачи следует, что $x = r\varphi \rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\varphi}$

Следовательно, натяжение троса

$$T = M\ddot{x} + P\sin 60 + F_{Тр} = Mr\ddot{\varphi} + P\sin 60 + fP\cos 60 =$$
$$= Mr \cdot 2,4t + Mg\sin 60 + fMg\cos 60 = (288t + 5680)H$$
$$T(t = 2) = 6256H$$

Задача 26.28: Груз М веса 10 Н подвешен к тросу длины l=2м и совершает вместе с россом колебания согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{6}\sin 2\pi l$ где φ-угол отклонения троса от вертикали в радианах, t-время в секундах. Определить натяжения T_1 и T_2 троса в верхнем и нижнем положение груза



$$ma_n = T - P\cos\varphi, a_n = \omega^2 l$$

$$T = ma_n + P\cos\varphi = \frac{P}{g} l \frac{\pi^4}{9}\cos^2 2\pi t + P\cos\varphi$$

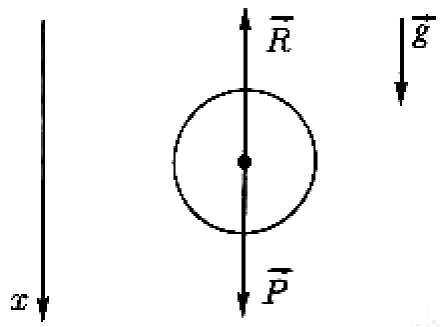
$$T_{\min} = T, когда \varphi = \frac{\pi}{6}; \sin 2\pi t = 1; \cos 2\pi t = 0$$

$$T_{\min} = P\cos\varphi = P\cos\frac{\pi}{6} = 8,66H$$

$$T_{\max} = T, когда, \varphi = 0; \sin 2\pi t = 1; \cos 2\pi t = 1$$

$$T_{\max} = \frac{P}{g} l \frac{\pi^4}{9} + P\cos\varphi = 32,1H$$

Задача 27.9: Найти наибольшую скорость падения шара массы 10 кг и радиуса r=8см, принимая, что сопротивление воздуха равно $R = k\sigma\upsilon^2$, где υ-скорость движения, σ-площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения, и k-численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение 0,24 $H \cdot c^2 / м^4$



Уравнение движения центра шара: $m\ddot{x} = P - R$, где P=mg, $R = k\sigma\upsilon^2 = k\pi r^2\upsilon^2$

Следовательно,

$$\ddot{x} = g - \frac{k\pi r^2}{m}\upsilon^2, \dot{\upsilon} = g - \frac{k\pi r^2}{m}\upsilon^2$$

$\upsilon_{\max}$ при $\dot{\upsilon} = 0$:

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{gm}{k\pi r^2}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 10}{0,24 \cdot \pi \cdot 0,08^2}} = 142,5 м/с$$

Задача 27.16: На какую высоту H и за какое время T поднимается тело веса p, брошенное вертикально вверх со скоростью υ_0, если сопротивление воздуха может быть выражено формулой $k^2 p\upsilon^2$, где υ-величина скорости тела?

$$m\ddot{\chi} = -mg - k^2 p\upsilon^2$$

$$\ddot{\chi} = -gk^2 p\upsilon^2$$

$$\ddot{\chi} = -g(1 + k^2 \dot{\chi}^2)$$

$$\dot{\chi} = \upsilon$$

$$\dot{\upsilon} = -g(1 + k^2\upsilon^2)$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -g(1 + k^2\upsilon^2)$$

$$\frac{d(k\upsilon)}{k(1 + k^2\upsilon^2)} = -gdt \rightarrow \frac{1}{k} arctgk\upsilon = -gt + C_1$$

$$\upsilon(0) = \upsilon_0 \rightarrow e_1 = \frac{1}{k} arctgk\upsilon$$

$$t = T; \upsilon = 0 \rightarrow e_1 = \frac{1}{k}(0 - arctgk\upsilon_0)$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{kg} arctgk\upsilon_0$$

$$\frac{dx}{dt} = -g(1 + k^2\upsilon^2)$$

$$\frac{\upsilon d\upsilon}{1 + k^2\upsilon^2} = -gdx \rightarrow \ln|1 + k^2\upsilon^2| = -2gxk^2 + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2k^2}\ln(1 + k^2\upsilon_0^2)$$

$$\frac{1}{2k^2}\ln(\frac{1 + k^2\upsilon_0^2}{1 + k^2\upsilon_0^2}) = -gx \rightarrow = \frac{1}{2k^2 g}\ln(\frac{1 + k^2\upsilon_0^2}{1 + k^2\upsilon_0^2})$$

Задача 27.17: Тело массы 2кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости υ м/с равно 0,4υ Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения

$$m\ddot{x} = -mg - 0,4\dot{x}$$

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = -\frac{1}{5}(5g + \upsilon_x)$$

$$\frac{d\upsilon_x}{5g + \upsilon_x} = -\frac{dt}{5}$$

$$\ln(5g + \upsilon_x) = -\frac{t}{5} + C_1$$

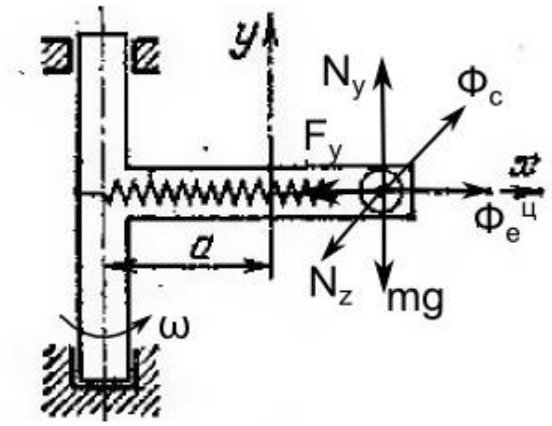
$$t = 0, C_1 = \ln(5g + \upsilon_0)$$

$$\ln(\frac{5g + \upsilon_x}{5g + \upsilon_0}) = -\frac{t}{5}$$

$$\ln\frac{5g}{5g + \upsilon_0} = -\frac{t}{5}$$

$$t = -5\ln\frac{5g}{5g + \upsilon_0} = -5\ln\frac{50}{50 + 20} = 1,7c$$

Задача 33.9: Шарик массы m, прикреплённой к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c, находится в положении равновесия в трубке на расстоянии a от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образующая с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω.



Уравнение движения вдоль оси x должно быть написано с учётом двух сил: силы упругости $\vec{F}_{упр} = -c \cdot x$ и силы инерции $\Phi_{nx} = m\omega^2(a+x)$

Тогда уравнение относительного движения по оси x:

$$m\ddot{x} = -cx + m\omega^2(a+x) \Rightarrow \ddot{x} + x\left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) = \omega^2 a$$

1. Пусть $\frac{c}{m} > \omega^2 \Rightarrow x(t) = A\sin k_0 t + B\cos k_0 t + \frac{\omega^2}{k_0^2}a$, где $k_0^2 = \frac{c}{m} - \omega^2$

Используя начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, получим

$$A = 0, B = -\frac{\omega^2}{k_0^2}a\text{, т.е. } x(t) = \frac{\omega^2}{k_0^2}a(1-\cos k_0 t = 2\frac{\omega^2 a}{k_0^2}\sin\frac{k_0 t}{2}.$$

2. Пусть $\frac{c}{m} < \omega^2$, следовательно, обозначая $k_1^2 = \omega^2 - \frac{c}{m}$, получим:

$$\ddot{x} - k_1^2 x = \omega^2 a \Rightarrow x(t) = A\exp\{k_1 t\} + B\exp\{-k_1 t\} - \frac{\omega^2 a}{2k_1^2}$$

Используя начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, получим:

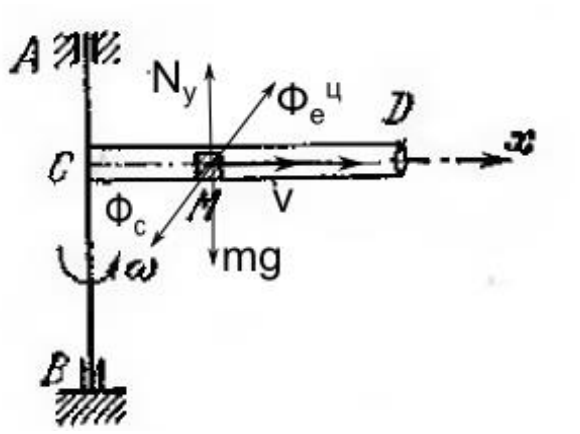
$$0 = A + B - \frac{\omega^2 a}{k_1^2}; 0 = (A-B)k_1 \Rightarrow A = B, A = \frac{\omega^2 a}{2k_1^2} = B,$$

Т.е. $x(t) = \frac{\omega^2 a}{k_1^2}\left(\frac{\exp\{k_1 t\} + \exp\{-k_1 t\}}{2} - 1\right)$

Ответ: $x(t) = \frac{\omega^2}{k_0^2}a(1-\cos k_0 t = 2\frac{\omega^2 a}{k_0^2}\sin\frac{k_0 t}{2}.$

$$x(t) = \frac{\omega^2 a}{k_1^2}\left(\frac{\exp\{k_1 t\} + \exp\{-k_1 t\}}{2} - 1\right).$$

Задача 33.10: Горизонтальная труба CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело M. Определить скорость υ тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент $\upsilon = 0, x = x_0$, длина трубки равна L. Трением пренебречь.



$$mw = -m w_e = m\omega^2 x$$

$$w = \omega^2 x$$

$$\frac{d\upsilon}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \omega^2 x$$

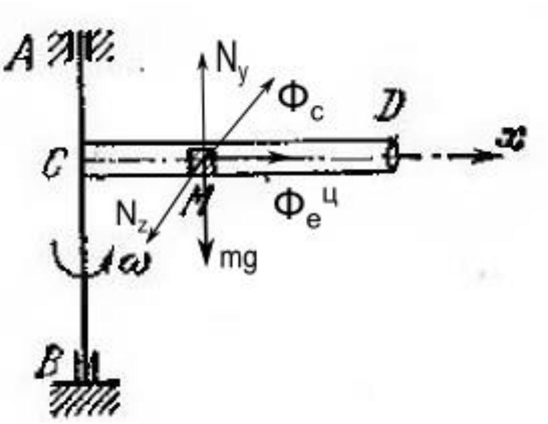
$$\int_0^{\upsilon} \upsilon d\upsilon = \omega^2 \int_{x_0}^{L} x dx$$

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \omega^2 \left(\frac{L^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right)$$

$$\upsilon = \omega\sqrt{L^2 - x_0^2}$$

Ответ: $\upsilon = \omega\sqrt{L^2 - x_0^2}$

Задача 33.12: В условиях задачи 33.10 составить дифференциальное уравнение движения тела в трубке, если коэффициент трения скольжения между телом и трубкой равен f.



$F_{тр} = f \cdot N$, где $\overline{N} = \sqrt{\overline{N}_1^2 + \overline{N}_2^2}$, поэтому

$$F_{тр} = f\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \omega_{пер}^2 \cdot xm \pm f\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$y: m \cdot 0 = N_1 - P$$
$$z: m \cdot 0 = -N_2 + F_{кор}^{ин}$$

$$N_1 = mg$$
$$N_2 = -2m \cdot \omega_{пер} \cdot \upsilon_{отн}$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x \pm f\sqrt{m^2 g^2 + 4m^2 \omega^2 \dot{x}^2}$$

Сократим всё уравнение на массу

$$\ddot{x} = \omega^2 x \pm f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2}$$

Ответ: $\ddot{x} = \omega^2 x \pm f\sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2}$, верхнему знаку соответствует $\dot{x} < 0$, нижнему $\dot{x} > 0$.

Задача 33.13: Кольцо движется по гладкому стержню AB, который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец A, делая один оборот в секунду; длина стержня $1м$; в момент $t=0$ кольцо находилось на расстоянии 60см от конца A и имело скорость равную нулю. Определить момент t_1, когда кольцо сойдёт со стержня.

Применяя результат, полученный в задаче 33.11:

$$T=\frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{L}{x_0}+\sqrt{\frac{L^2}{x_0^2}-1}\right);$$

где $\omega=\frac{2\pi}{1}=2\pi c^{-1}, L=1$м, $x_0=0.6$м.

Получим:

$$T=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{0.6}+\sqrt{\frac{1}{0.36}-1}\right)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{10}{6}+\sqrt{\frac{100}{36}-1}\right)=\frac{1}{2\pi}\ln 3=0.175c$$

Ответ: $T=\frac{1}{2\pi}\ln 3=0.175c$

Задача 10.4: По заданным уравнениям движения точки найти уравнение ее траектории, а также указать закон движения точки по траектории, отсчитывая расстояние от начального положения точки.

1) $x = 3t^2$, $y = 4t^2$

Выразим t^2 и подставим во второе уравнение

$$t^2 = \frac{x}{3}$$

$$y = \frac{4x}{9}$$

Уравнением траектории точки является полупрямая $4x - 3y = 0$,
закон движения точки по траектории

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = 5t^2$$

2) $x = 3S\,\mathrm{int}$, $y = 3Cost$

Возводим уравнения в квадрат и суммируем

$$x^2 + y^2 = 9$$

Уравнение траектории точки является окружность с радиусом $R = 3$
закон движения точки по траектории

$s = \omega R$; $\omega = t$

$$s = 3t$$

3) $x = a \cdot Cos^2 t$, $y = a \cdot Sin^2 t$

Складываем уравнения

$$x + y = a$$

Уравнением траектории точки является отрезок прямой $x + y - a = 0$, при $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$,

закон движения точки по траектории

$$s = \sqrt{a^2 Cos^4 t + a^2 Sin^4 t} = a\sqrt{2} Sin^2 t$$

4) $x = 5Cos5t^2$, $y = 5Sin5t^2$

Возводим уравнения в квадрат и суммируем

$$x^2 + y^2 = 25$$

Уравнение траектории точки является окружность с радиусом $R = 5$
закон движения точки по траектории

$s = \frac{\varepsilon t^2}{2} \cdot R$; $\varepsilon = 10t$

$$s = 5t^3 R = 25t^3$$

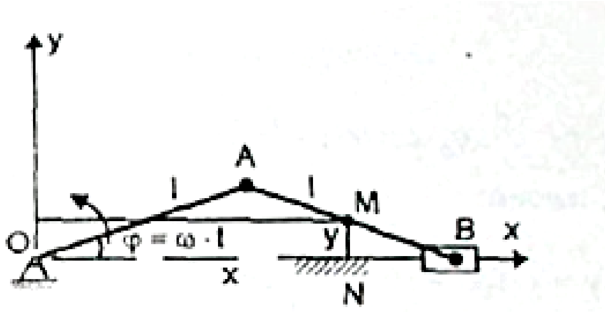
Ответ: 1) $4x - 3y = 0$; $s = \sqrt{x^2 + y^2} = 5t^2$

2) $x^2 + y^2 = 9$; $s = 3t$

3) $x + y - a = 0$, при $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$; $s = a\sqrt{2} Sin^2 t$

4) $x^2 + y^2 = 25$; $s = 25t^3$

Задача 10.12: Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\dfrac{рад}{c}$. Длина $OA = AB = 80 см$. Найти уравнения движения и траекторию средней точки M шатуна, а также уравнение движения ползуна B, если в начальный момент ползун находится в крайнем правом положении; оси координат указаны на рисунке.



$$x = OA \cdot \cos\varphi + \frac{OA}{2}\cos\varphi = \frac{3}{2}\cdot OA \cdot \cos\varphi = 1.5 \cdot OA \cdot Cos\omega t$$

$$y = \frac{OA}{2}\sin\varphi = \frac{OA}{2}\sin\omega t$$

Следовательно, закон движения точки M будет задан в виде:

$$x = 120\cos 10t, y = 40\sin 10t$$

Определим траекторию точки M

$$\left(\frac{x}{120}\right)^2 = (\cos 10t)^2, \left(\frac{y}{40}\right)^2 = (\sin 10t)^2$$

$\dfrac{x^2}{120^2} + \dfrac{y^2}{40^2} = 1$ - эллипс

Уравнение движения ползуна B

$$x = 2 \cdot OA \cdot \cos\omega t = 160 \cdot Cos 10t$$

Ответ: 1). $X = 120\cos 10t, Y = 40\sin 10t$

2). Траекторией точки M является эллипс $\dfrac{x^2}{120^2} + \dfrac{y^2}{40^2} = 1$

3). Уравнение движения ползуна B $x = 160\cos 10t$.

Задача 11.3: Точка описывает фигуру Лиссажу согласно уравнениям $x = 2Cost$, $y = 4Cos2t$ (x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Определить величину и направление скорости точки, когда она находится на оси Oy.

Ответ: 1) $v = 2$ см/с

$\cos(v, x) = -1$.

2) $v = 2$ см/с

$\cos(v, x) = 1$.

Решение:

Когда точка находится на оси Oy, то $x = 0$ или $2Cost = 0$, $Cost = 0$

$$v_x = \dot{x} = -2\sin t = -2\sqrt{1 - Cos^2 t} = \pm 2$$

$$v_y = \dot{y} = -8\sin 2t = -4S\,\text{int} \cdot Cost = 0\,;$$

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = \sqrt{4+0} = 2 \text{ см/с}$$

$$\cos(v, x) = \frac{v_x}{\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}} = \frac{\pm 2}{2} = \pm 1\,.$$

Задача 11.5: Движение точки задано уравнениями $x = \upsilon_0 t \cdot \cos\alpha_0, y = \upsilon_0 t \cdot \sin\alpha_0 - \frac{1}{2} g t^2$, причём ось Ox горизонтальна, ось Oy направлена по вертикали вверх, υ_0, g и $a_0 < \frac{\pi}{2}$ -величины постоянные. Найти: 1). Траекторию точки, 2). Координаты наивысшего её положения, 3). Проекции скорости на координатные оси в тот момент, когда точка находится на оси Ox.

$$x = \upsilon_0 t \cos\alpha_0, y = \upsilon_0 t \sin\alpha_0 - g \frac{t^2}{2}$$

Выразим время t из двух уравнений системы

$$t = \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha_0}$$

1). Найдём траекторию точки

Из 1 уравнения: $t = \frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha_0}$

Из 2 уравнения: $t = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha_0}{g} \pm \sqrt{\frac{\upsilon_0^2 (\sin\alpha_0)^2}{g^2} - \frac{2y}{g}}$ приравнивая правые части, будем иметь

$$\frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha_0} = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha_0}{g} \pm \sqrt{\frac{\upsilon_0^2 \sin\alpha_0}{g^2} - \frac{2y}{g}}$$

-уединив радикал и возведя обе части в квадрат, получаем

$$\left(\frac{x}{\upsilon_0 \cos\alpha_0} - \frac{\upsilon_0 \sin\alpha_0}{g}\right)^2 = \left(\pm\sqrt{\frac{\upsilon_0^2 \sin\alpha_0}{g^2} - \frac{2y}{g}}\right)^2$$

откуда получаем

$$\frac{x^2}{\upsilon_0^2 (\cos\alpha_0)^2} - 2\frac{x \cdot \upsilon_0 \cdot \sin\alpha_0}{\upsilon_0 \cos\alpha_0 \cdot g} + \frac{\upsilon_0^2 \cdot (\sin\alpha_0)^2}{g^2} = \frac{\upsilon_0^2 \cdot (\sin\alpha_0)^2}{g^2} - \frac{2Y}{g}$$

Откуда $y = x \cdot tg\,\alpha_0 - \frac{g x^2}{2\upsilon_0^2 (\cos\alpha_0)^2}$ - парабола

Координаты наивысшего её положения

$$\frac{d\varphi}{dx} = tq\,\alpha_0 - \frac{g x^2}{\upsilon_0^2 (\cos\alpha_0)^2} = 0$$

Отсюда $x = \frac{\upsilon_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g}$ или $x = \frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{2g} = \frac{\upsilon_0}{2g}\sin 2\alpha_0$

Подставляя в формулу траектории точки получим,

$$Y_{MAX} = \frac{\upsilon_0}{2g}\left(\sin\alpha_0\right)^2$$

Проекции скорости на оси координат:

При $t = 0$

$$\upsilon_X = \frac{dx}{dt} = \upsilon_0 \cos\alpha_0$$

$$\upsilon_Y = \frac{dy}{dt} = \upsilon_0 \sin\alpha_0$$

При $t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha_0}{g}$

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha_0$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha_0 - g\cdot\frac{2\upsilon_0 \sin\alpha_0}{g} = \upsilon_0 \sin\alpha_0 - 2\upsilon_0 \sin\alpha_0 = -\upsilon_0 \sin\alpha_0$$

Ответ: 1). Парабола $y = xtg\,\alpha_0 - \frac{g}{2\upsilon_0^2\left(\cos\alpha_0\right)^2}x^2$

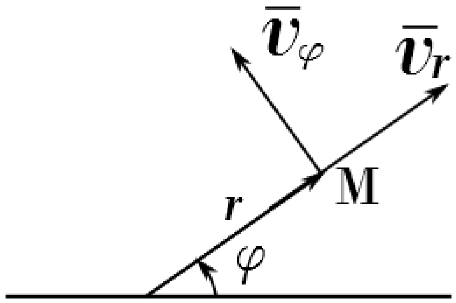
2). $x = \frac{\upsilon_0^2}{2g}\times\sin 2\alpha_0, y = \frac{\upsilon_0^2}{2g}\left(\sin\alpha_0\right)^2$

3). $\upsilon_X = x_0\cos\alpha_0, \upsilon_Y = \pm\upsilon_0\sin\alpha_0$, причём верхний знак соответствует начальному моменту времени, а нижний - моменту $t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha_0}{g}$.

Задача 11.15: Точка М движется по окружности согласно уравнениям

$r = 2aCos\frac{kt}{2}$, $\varphi = \frac{kt}{2}$

(r, φ — полярные координаты). Найти проекции скорости точки М на оси полярной системы координат, уравнения движения точки M_1, описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки M_1.



Ответ: 1) $v_r = -akSin\frac{kt}{2}$

$v_\varphi = akCos\frac{kt}{2}$,

2) $r_1 = ak$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt$

3) $v_{r1} = 0$

$v_{\varphi 1} = ak^2$

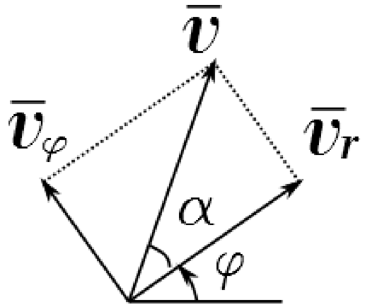
Решение:

1) Проекции скорости точки М на оси полярной системы координат:

$$v_r = \dot{r} = -akSin\frac{kt}{2}$$

$$v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = \frac{k}{2} \cdot 2aCos\frac{kt}{2} = akCos\frac{kt}{2},$$

2) Уравнения движения точки M_1:



$$r_1 = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\varphi}^2} = \sqrt{k^2a^2Sin^2\frac{kt}{2} + k^2a^2Cos^2\frac{kt}{2}} = ak$$

$$\alpha = arctg\frac{v_\varphi}{v_r} = arctg\left(-\frac{\text{a}\,kCos\frac{kt}{2}}{\text{a}\,kSin\frac{kt}{2}}\right) = arctg\left(-ctg\frac{kt}{2}\right)$$

$\alpha = \frac{kt}{2} + \frac{\pi}{2}$, тогда $\varphi_1 = \varphi + \frac{kt}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + kt$

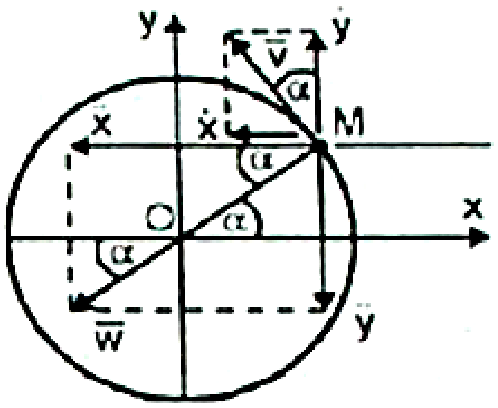
3) Проекции скорости точки M_1:

$v_{r1} = \dot{r}_1 = 0$

$v_{\varphi 1} = r_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = ak \cdot k = ak^2$

Задача 12.13: Движение точки задано уравнениями $x = 10Cos\frac{2\pi t}{5}$, $y = 10Sin\frac{2\pi t}{5}$

(x, y — в сантиметрах, t — в секундах). Найти траекторию точки, величину и направление скорости, а также величину и направление ускорения.



Нахождение траектории:
Возводим в квадрат и суммируем

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{100} = 1,$$

Траекторией точки является окружность $x^2 + y^2 = 100$ с радиусом $R = 10$
Определение скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{20\pi}{5}Sin\frac{2\pi t}{5} = -4\pi Sin\frac{2\pi t}{5}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 4\pi Cos\frac{2\pi t}{5}$$

Возводим в квадрат и суммируем, получим

$v_x{}^2 + v_y{}^2 = 16\pi^2$, тогда

$v = \sqrt{16\pi^2} = 4\pi$ см/с

При $t = 0$

$v_x = 0$, $v_y = 4\pi$

При $t = 1$

$v_x = -4\pi Sin\frac{2\pi}{5} = -4\pi Sin72^o$, $v_y = 4\pi Cos72^o$

Скорость направлена по касательной в сторону перехода от оси Ох к Оу.
Нахождение ускорения:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(4\pi)}{dt} = 0$$

$$w_\eta = \frac{v^2}{R} = \frac{16\pi^2}{10} = 1.6\pi^2 \text{ см}/c^2$$

$w = 1.6\pi^2$ см$/c^2$

Ускорение направленно к центру.

Ответ: Окружность $x^2 + y^2 = 100$, $v = 4\pi$ см/с, $w = 1.6\pi^2$ см$/c^2$

Задача 12.16: Найти радиус кривизны при $x = y = 0$ траектории точки, описывающей фигуру Лиссажу согласно уравнениям $x = -w\sin 2\omega t$, $y = -w\sin\omega t$

Ответ: $\rho = \infty$

$x = -\alpha\sin 2\omega t$

$y = -\alpha\sin\omega t$

$x = y = 0$

$\rho - ?$

$x = y = 0$

$t = 0 \to t = 0$

$\omega^n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho} = \rho = \dfrac{\upsilon^2}{\omega_n}$

$\upsilon = \sqrt{x^2 + y^2 =}\alpha\omega\sqrt{4\cos^2 2\omega t + \cos^2\omega t}$

$\upsilon(0) = \alpha\omega\sqrt{5}$

$\omega = \sqrt{x^2 + y^2} = \alpha\omega\sqrt{16\sin^2 2\omega t + \sin^2\omega t}$

$\omega(0) = 0$

$\omega^\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt} = -\alpha\omega\dfrac{\cos\omega t\sin\omega t + 8\cos 2\omega\sin\omega t}{\sqrt{\cos^2 t\omega + 4\cos^2 2\omega t}}$

$\omega^\tau(0) = 0$

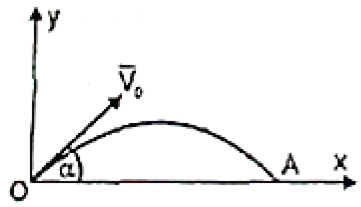
$\omega^n = \sqrt{\omega^2 - (\omega^\tau)^2} = 0$

$\rho = \dfrac{\alpha\omega\sqrt{5}}{0} = \infty$

Задача 12.21: Движение снаряда задано уравнениями

$x = \upsilon_0 t \cos a_0$, $y = \upsilon_0 t \sin a_0 - 1/2gt^2$

Где υ_0 и a_0 - постоянные величины. Найти радиус кривизны траектории при t=0 и в момент падения на землю.



Момент падения: $y = 0$

$$\upsilon_0 t \sin a_0 - \frac{1}{2} gt^2 = 0$$

$$\upsilon_0 \sin a_0 = \frac{9}{2} t \to t = \frac{2\upsilon_0 \sin a_0}{g}$$

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos a_0$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin a_0 - gt$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_0 - 2gt\upsilon_0 \sin a_0 + g^2 t^2}$$

$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y - g$$

$$\omega = g$$

$$\upsilon(0) = \upsilon_0$$

$$\upsilon(\frac{2\upsilon_0 \sin a_0}{g}) =$$

$$= \sqrt{\upsilon^2{}_0 - 4\upsilon^2{}_0 \sin^2 a_0 + \upsilon^2{}_0 \sin^2}$$

$$\omega^\tau(0) = \frac{1}{2\upsilon_0}(-2g\upsilon_0 \sin a_0) = -g \sin a$$

$$\omega^\tau(\frac{2\upsilon_0 \sin a_0}{g}) = \frac{1}{2\upsilon_0} \times (-2g\upsilon_0 \sin a_0 + 4g\upsilon_0 \sin a) =$$

$$= g \sin a_0$$

$$\omega_n = \sqrt{g^2 + g^2 \sin a_0} = g \cos a_0$$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{\omega_n} = \frac{\upsilon_0{}^2}{9 \cos a_0}$$

Задача 12.26: Движение точки задано в полярных координатах уравнениями $r = ae^{kt}$ и $\varphi = kt$, где a и k –заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки как функции её радиус-вектора r

$$\bar{r} = \bar{i}\cos\varphi + \bar{j}\sin\varphi$$

$$\bar{p} = -\bar{i}\sin\varphi + \bar{j}\cos\varphi$$

$$\dot{\bar{r}} = -\bar{i}\sin\varphi\dot{\varphi} + \bar{j}\cos\varphi\dot{\varphi} = \bar{p}\dot{\varphi}$$

$$\upsilon_r = \dot{r} = ake^{kt} = k2\upsilon_\varphi = r\dot{\varphi} = ae^{kt}k =$$

$$= kz$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_\varphi^2} = ak\sqrt{2}e^{kt} = 2k\sqrt{2}$$

$$\omega_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi} = ak^2e^{kt} - ae^{kt}k^2 = k^2r - k^2r = 0$$

$$\omega_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2ake^{kt}k = 2k^2r$$

$$\omega = 2k^2r$$

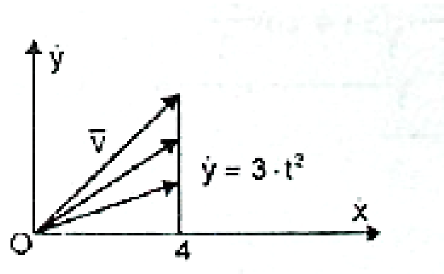
$$\omega^\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = ak^2\sqrt{2}e^{kt} = k^2r$$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = \frac{2r^2k^2}{\sqrt{2}k^2r} = r\sqrt{2}$$

Задача 12.28: Построить траекторию движения точки, годограф скорости и определить радиус кривизны траектории в начальный момент, если точка движется согласно уравнениям

$x = 4t$

$y = t^3$ (t- в секундах, x и y – в сантиметрах)



$$y = (\frac{x}{4})^3 = \frac{x^3}{64}$$

$$\dot{x} = 4$$

$$\dot{y} = 3t^2$$

$$\upsilon = \sqrt{4^2 + 9t^4} = 4 см/с$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = 6t = 0$$

$$\omega = 0$$

$$\omega^\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{16 + 9t^4}} 9 \cdot 4t^3 = 0$$

$$\omega_n = 0$$

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{\omega^n} = \infty$$

Задача 12.32: Точка М движется по винтовой линии. Уравнения движения её в цилиндрической системе координат имеют вид

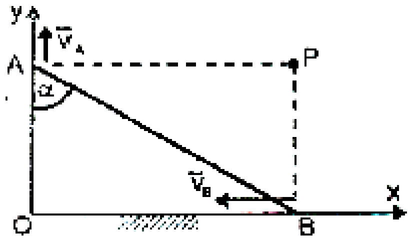
$$r = a$$
$$\varphi = kt$$
$$z = vt$$

Найти проекции ускорения точки на оси цилиндрической системы координат, касательную и нормальную составляющие ускорения и радиус кривизны винтовой линии

$$\upsilon_r = \dot{r} = 0$$
$$\upsilon_\varphi = r\dot{\varphi} = wk$$
$$\upsilon_z = \dot{z} = \upsilon$$
$$\omega = wk^2$$
$$\upsilon = \sqrt{w^2k^2 + \upsilon^2}$$
$$\rho = \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = \frac{w^2k^2 + \upsilon}{wk^2}$$

$$\omega_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0 - wk^2 = -wk^2$$
$$\omega_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$
$$\omega_z = 0$$
$$\omega^\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = 0$$
$$\omega^n = wk^2$$

Задача 16.7: Стержень *AB* длины 1 м движется, опираясь все время своими концами на две взаимно перпендикулярные прямые *Ox* и *Oy*. Найти координаты *x* и *y* мгновенного центра скоростей в тот момент, когда угол *OAB*=60°.



Ответ: *x*=0,866 м, *y*=0,5 м.

Решение:

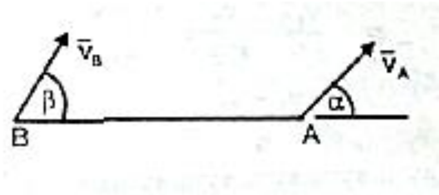
Покажем направления скоростей: $\upsilon_A \parallel Oy$, $\upsilon_B \parallel Ox$,

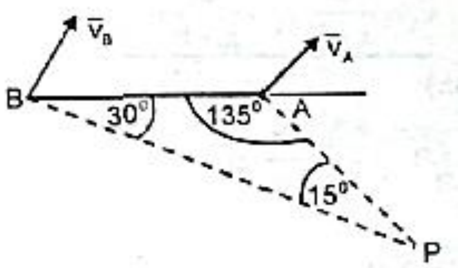
Тогда положение МЦС (точка *P*) можно определить, опуская перпендикуляры к скоростям υ_A и υ_B из точек *A* и *B*. Их пересечение дает точку *P* – МЦС.

$$x_P = AB \cdot \sin 60^\circ = 0{,}866 \text{ м},$$

$$y_P = AB \cdot \cos 60^\circ = 0{,}5 \text{ м}.$$

Задача 16.11: Стержень *AB* длины 0,5 м движется в плоскости рисунка. Скорость υ_A (υ_A=2 м/с) образует угол 45° с осью *x*, совмещенной со стержнем. Скорость υ_B точки *B* образует угол 60° с осью *x*. Найти модуль скорости точки *B* и угловую скорость стержня.





Ответ: $\upsilon_B = 2{,}82$ м/с, $\omega = 2{,}06$ рад/с.

Решение: Величину скорости υ_B можно определить с помощью МЦС, положение которого можно найти, опуская перпендикуляры к скоростям υ_B и υ_A. Их пересечение дает точку *P*, которая будет МЦС. Тогда,

$$\frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{\upsilon_B}{BP} \Rightarrow \upsilon_B = \frac{\upsilon_A}{AP} BP, \ \omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP}.$$

Величину мгновенных радиусов *BP* и *AP* можно найти по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{AP}{\sin 30^\circ} = \frac{BP}{\sin 135^\circ}$$

$$BP = \frac{AB}{\sin 15^\circ} \sin 135^\circ = 1{,}366 \text{ м},$$

$$AP = \frac{AB}{\sin 15^\circ} \sin 30^\circ = 0{,}966 \text{ м},$$

$$\upsilon_B = \frac{\upsilon_A}{0{,}966} \cdot 1{,}366 = 2{,}82 \text{ м/с},$$

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AP} = \frac{2}{0{,}966} = 2{,}06 \text{ рад/с}.$$

Задача 16.15: В кривошипном механизме длина кривошипа *OA*=40 см, длина шатуна *AB*=2 м; кривошип вращается равномерно с угловой скоростью, равной 6π рад/с. Найти угловую скорость ω шатуна и скорость средней его точки *M* при четырех положениях кривошипа, для которых угол *AOB* соответственно равен 0, π/2, π, 3π/2.

Ответ: I. $\omega = -\frac{6}{5}\pi$ рад/с, $\upsilon_M = 377$ см/с. II. $\omega = 0$, $\upsilon_M = 754$ см/с. III. $\omega = \frac{6}{5}\pi$ рад/с, $\upsilon_M = 377$ см/с. IV. $\omega = 0$, $\upsilon_M = 754$ см/с. Знак минус в выражении ω указывает, что шатун вращается в сторону, противоположную кривошипу.

Решение: Первое положение механизма. Точка *B* – МЦС для *AB*.

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AB} = \omega \cdot \frac{AO}{AB} = 6\pi \cdot \frac{40}{200} = \frac{6\pi}{5} \text{ рад/с.}$$

$$\upsilon_M = \omega_{AB} \cdot \frac{AB}{2} = 377 \text{ см/с.}$$

Второе положение механизма. *AB* движется поступательно.

$$\omega_{AB} = 0,$$

$$\upsilon_M = \upsilon_A = 6\pi \cdot 40 = 754 \text{ см/с.}$$

Третье положение механизма. Точка *B* – МЦС для *AB*.

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_A}{AB} = \frac{6\pi}{5} \text{ рад/с,}$$

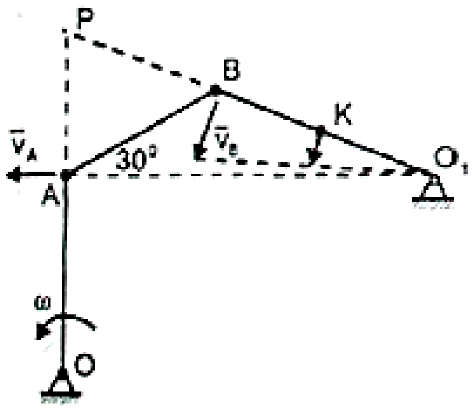
$$\upsilon_M = BM \cdot \omega_{AB} = 377 \text{ см/с.}$$

Четвертое положение механизма.

$$\omega_{AB} = 0,$$

$$\upsilon_M = \upsilon_A = 6\pi \cdot 40 = 754 \text{ см/с.}$$

Задача 16.17: Определить скорость точки *K* четырехзвенного механизма *OABO₁* в положении, указанном на рисунке, если звено *OA* длины 20 см имеет в данный момент угловую скорость 2 рад/с. Точка *K* расположена в середине стержня *BO₁*.



Ответ: 20 см/с.

Решение:

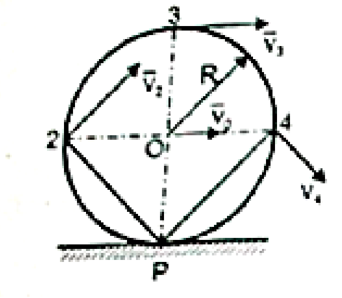
$$\upsilon_A \cos 30^\circ = \upsilon_B \cos 30^\circ,$$

$$\upsilon_B = 2\upsilon_K,$$

$$2\upsilon_K = \upsilon_A = \omega \cdot OA,$$

$$\upsilon_K = \frac{\omega \cdot OA}{2} = \frac{2}{2} \cdot 20 = 20 \text{ см/с}.$$

Задача 16.31: Колесо радиуса *R*=0,5 м катится без скольжения по прямолинейному участку пути; скорость центра его постоянна и равна υ_0=10 м/с. Найти скорости концов M_1, M_2, M_3 и M_4 вертикального и горизонтального диаметров колеса. Определить его угловую скорость.



Ответ: $\upsilon_1 = 0$, $\upsilon_2 = 14{,}14$ м/с, $\upsilon_3 = 20$ м/с, $\upsilon_4 = 14{,}14$ м/с, $\omega = 20$ рад/с.

Решение:

Т.к. колесо катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке M_1 и υ_{M_1}=0. Тогда скорости точек определятся:

$$\upsilon_{M_2} = \omega \cdot M_1M_2;$$

$$\upsilon_{M_3} = \omega \cdot M_1M_3;$$

$$\upsilon_{M_4} = \omega \cdot M_1M_4.$$

Расстояние $M_1M_2 = M_1M_4$ - гипотенуза равнобедренного треугольника M_1M_2O, где катеты M_1O и M_2O равны радиусу *R*=0,5 м. Тогда, $M_1M_2 = \sqrt{2} \cdot R = 0{,}707$ м.

$$M_1M_3 = 2R = 1 \text{м.}$$

Угловую скорость вращения колеса вокруг МЦС (точки M_1) определим, зная скорость υ_0:

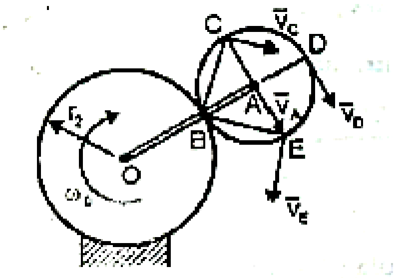
$$\omega = \frac{\upsilon_0}{\upsilon_{M_1}} = \frac{10}{0{,}5} = 20 \text{ рад/с.}$$

Тогда, $\upsilon_{M_2} = \upsilon_{M_4} = \omega \cdot M_1M_2 = 20 \cdot 0{,}707 = 14{,}14$ м/с;

$$\upsilon_{M_3} = \omega \cdot M_1M_3 = 20 \cdot 1 = 20 \text{ м/с.}$$

Т.к. в плоском движении угловая скорость не зависит от выбора полюса, то угловая скорость колеса равна $\omega = 20$ рад/с.

Задача 16.35: Кривошип *OA*, вращаясь с угловой скоростью ω_0=2,5 рад/с вокруг оси *O* неподвижного колеса радиуса r_2=15 см, приводит в движение насаженную на его конец *A* шестеренку радиуса r_1=5 см. Определить величину и направление скоростей точек *A, B, C, D* и *E* подвижной шестеренки, если $CE \perp BD$.



Ответ: $\upsilon_A = 50$ см/с, $\upsilon_B = 0$, $\upsilon_D = 100$ см/с, $\upsilon_C = \upsilon_E = 70{,}7$ см/с.

Решение: Зная угловую скорость вращения кривошипа, определим скорость в точке *A*:

$$\upsilon_A = \omega_0 \cdot OA = \omega_0 (r_2 + r_1) = 2{,}5 \cdot 20 = 50 \text{ м/с.}$$

Шестеренка 2 неподвижна. Следовательно, точка *B* – мгновенный центр скоростей и $\upsilon_B = 0$. Тогда, скорости точек:

$$\upsilon_C = \omega \cdot BC,\ \upsilon_D = \omega \cdot BD,\ \upsilon_E = \omega \cdot BE.$$

$$BC = BE = r_1 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} = 7{,}07 \text{ см;}$$

$$BD = 2 \cdot r_1 = 10 \text{ см.}$$

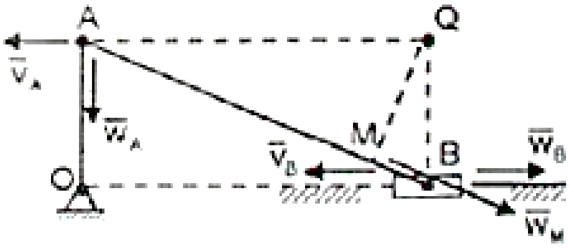
Угловую скорость ω определим, зная скорость υ_A:

$$\omega = \frac{\upsilon_A}{AB} = \frac{\upsilon_A}{r_1} = \frac{50}{5} = 10 \text{ рад/с.}$$

$$\upsilon_C = \upsilon_E = \omega \cdot BC = 10 \cdot 7{,}07 = 70{,}7 \text{ см/с,}$$

$$\upsilon_D = \upsilon_E = \omega \cdot BD = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см/с.}$$

Задача 18.9: Длина шатуна АВ кривошипно-ползунного механизма в два раза больше длины кривошипа ОА. Определить положение точки шатуна АВ, ускорение которой направлено вдоль шатуна АВ, ускорение которой направлено вдоль шатуна, в момент, когда кривошип перпендикулярен направляющей ползуна, кривошип ОА вращается равномерно



$$\bar{\upsilon}_A \parallel \bar{\upsilon}_B \to \omega_{AB} = 0$$

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A^{ц} + \bar{\omega}_{BA}^{вр}$$

$$-\omega_B = \omega_{BA}^{вр} \sin a$$

$$0 = -\omega_A^{ц} + \omega_{BA}^{вр} \cos a$$

$$\omega_A^{ц} = AO\omega^2$$

$$\omega_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$$

$$AO \cdot \omega = \varepsilon_{AB} \cdot AB \cdot \cos 30 \to \varepsilon_{AB} =$$

$$= \frac{OA \cdot \omega^2}{2OA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{3}}$$

$$\bar{\upsilon}_c = \bar{\omega}_A^{ц} + \bar{\omega}_{CA}^{вр}$$

$$\omega_A^{ц} = AO \cdot \omega^2$$

$$\omega_{CA}^{вр} = AC \cdot \varepsilon_{AB}$$

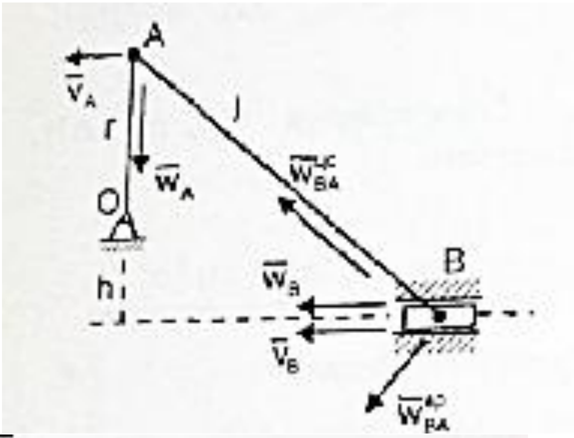
$$\omega_c = -\omega_A^{ц} \sin a$$

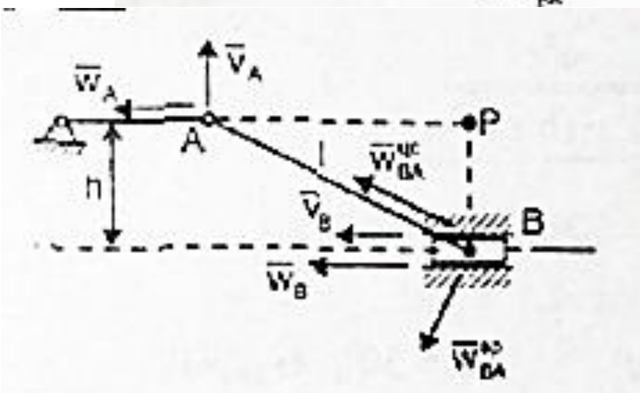
$$0 = \omega_{CA}^{вр} - \omega_A^{ц} \cos a$$

$$AC \cdot \varepsilon_{AB} = AO \cdot \omega^2 = \cos 30$$

$$AC \frac{\omega^2}{\sqrt{3}} = AO \frac{\omega^2}{2} \sqrt{3} \to AC = AO \frac{3}{2} = \frac{3AB}{4}$$

Задача 18.12: Определить угловую скорость и угловое ускорение шатуна центрального кривошипного механизма, а также скорость и ускорение ползуна В при 1)горизонтальном правом и 2)вертикальном верхнем положении кривошипа ОА, если последний вращается вокруг конца О с постоянной угловой скоростью ω_0, причем даны: OA=r, AB=l, расстояние оси О кривошипа от линии движения ползуна OC=h





$$\frac{\upsilon_A}{AP_{AB}} = \frac{\upsilon_B}{BP_{AB}} = \omega_{AB} \rightarrow \omega_{AB} = \frac{AO \cdot \omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{r\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}$$

$$\upsilon_B = \omega_{AB} BP_{AB} = \frac{r\omega_0}{\sqrt{l^2 - h^2}}$$

$$\bar{\omega}_B = \bar{\omega}_A^ц + \bar{\omega}_{вр}^ц + \bar{\omega}_{BA}^{вр}$$

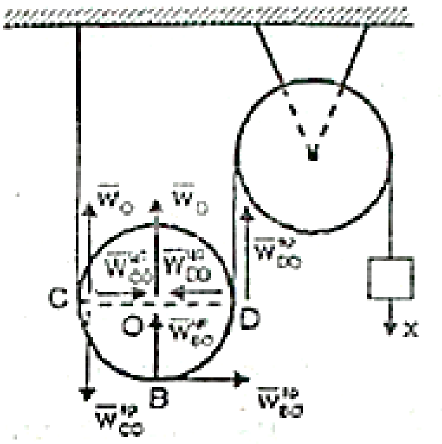
$$x: \omega_B = -\omega_A^ц - \omega_{BA}^ц \cos a - \omega_{BA}^{вр} \sin a$$

$$y: 0 = \omega_{BA}^ц \sin a - \omega_{BA}^{вр} \cos a$$

$$\omega_{AB}^ц \cdot AB \frac{h}{l} - \varepsilon_{AB} AB \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = 0 \rightarrow \varepsilon_{AB} = \frac{\omega_{AB}^2 h}{\sqrt{l^2 - h^2}} =$$

$$\omega_B = -\omega_0^2 r - \frac{r^2 \omega_0^2}{l^2 - h^2} l \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} - \frac{\omega_0^2 r^2 h}{(l^2 - h^2)^{1/2}} l \frac{h}{l}$$

Задача 18.25: Подвижный блок1 и неподвижный блок 2 соединены нерастяжимой нитью. Груз К, прикрепленный к концу этой нити, опускается вертикально вниз по закону $x = 2t^2$ м.Определить ускорение точек С,В и Д, лежащих на ободе подвижного блока 1,в момент t=0.5 с в положении, указанном на рисунке, если $OB \perp CD$, а радиус подвижного блока 1 равен 0.2 м



$$\upsilon_k = \dot{\chi} = 4t = 4 \cdot 0,5 = 2 м/с$$

$$\upsilon_0 = \upsilon_k$$

$$\omega_1 = \frac{\upsilon_к}{2r} = \frac{2}{2 \cdot 0 \cdot 2} = 5 рад/с$$

$$\omega_к = 4 м/с^2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega_к}{2r} = \frac{4}{2 \cdot 0 \cdot 2} = 10 рад/с^2$$

$$\omega_a = \varepsilon_1 r = 10 \cdot 0 \cdot 2 = 2 рад/с^2$$

$$\bar{\omega}_c = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_{CO}^{ц} + \bar{\omega}_{CO}^{вр}$$

$$\omega_{CX} = \omega_{co}^{ц} = \omega_1^2 r = 25 \cdot 0,2 = 5 м/с^2$$

$$\omega_{cy} = \omega_0 - \omega_{CO}^{вр} = 2 - 10 \cdot 0.2 = 0$$

$$\omega_c = 5 м/с^2$$

$$\omega_{Bx} = \omega_{BO}^{вр} = 10 \cdot 0.2 = 2 м/с^2$$

$$\omega_{BY} = 2 + 25 \cdot 0,2 = 7 м/с^2$$

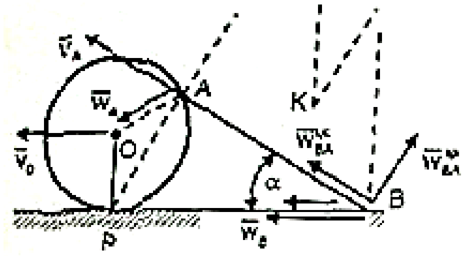
$$\omega_B \sqrt{49 + 4} = 7.28 м/с^2$$

$$\omega_{DX} = -\omega_{DO}^{ц} = -25 \cdot 0.2 = 5 м/с^2$$

$$\omega_{DY} = \omega_{Do}^{вр} + \omega_0 = 4 м/с^2$$

$$\omega_0 = 6.4 м/с^2$$

Задача 18.27: Колесо радиуса R катится без скольжения по плоскости. Центр O колеса движется с постоянной скоростью v_0. В точке A с ним шарнирно соединен стержень AB длины $l = 3R$. Другой конец стержня скользит по плоскости. В положении, указанном на рисунке, определить угловую скорость и угловое ускорение стержня AB, а также линейные скорость и ускорение его точки B.



Определение скорости точек и угловой скорости.

Мгновенный центр скоростей P – точка соприкосновения с неподвижной поверхностью, т.к. колесо катится без проскальзывания.

$$\omega = \frac{v_0}{R}$$

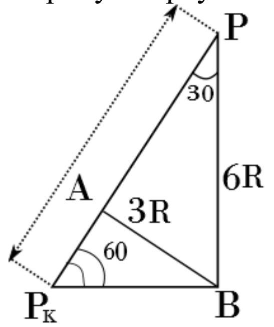
$$\frac{v_0}{OP} = \frac{v_A}{AP} = \omega$$

$$v_A = \frac{AP}{OP} v_0 = v_0\sqrt{3}$$

$$AP = 2Cos30 \cdot 2R\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$$

По условию $AB = 3R$

Нарисуем треугольник, из которого можно найти длины и окрестности



$$\frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_B}{BP_{AB}} = \omega_{AB}$$

$$v_B = \frac{BP_{AB}}{AP_{AB}} v_A = \frac{6R}{3R\sqrt{3}}\sqrt{3}v_0 = 2v_0$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{v_0\sqrt{3}}{3R\sqrt{3}} = \frac{v_0}{3R}$$

Определение ускорений.

$$\bar{w}_A = \bar{w}_0 + \bar{w}^{ц}_{AO} + \bar{w}^{вр}_{AO}$$

По условию задачи $v_0 = const$

$$w_0 = 0$$

$$\omega = \frac{v_0}{R} = const$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0$$

$$w^{ц}{}_{AO} = \omega^2 \cdot AO = \frac{v_0{}^2}{R^2} R = \frac{v_0{}^2}{R}$$

$$w^{вр}{}_{AO} = \varepsilon \cdot AO = 0$$

$$\bar{w}_A = \bar{w}^{ц}_{AO}$$

Так как $\varepsilon = 0$, то ускорения всех точек направлены к центру и пропорциональны расстоянию до центра.

$$\bar{w}_B = \bar{w}_A + \bar{w}^{ц}_{AB} + \bar{w}^{вр}_{AB}$$

$$w^{ц}{}_{AB} = \omega^2{}_{AB} \cdot AB = \frac{v_0{}^2}{9R^2} \cdot 3R = \frac{v_0{}^2}{3R}$$

спроектируем на оси координат Ox и Oy соответственно

$$w_B Cos\alpha = w_A Cos60 + w^{ц}{}_{AB} + 0$$

$$w_B Sin\alpha = w_A Sin60 + 0 - w^{вр}{}_{AB}$$

$$w_B = \left[\frac{v_0{}^2}{R} \cdot \frac{1}{2} + \frac{v_0{}^2}{3R}\right] \frac{1}{Cos30} = \frac{5\sqrt{3} v_0{}^2}{9R}$$

$$w^{вр}{}_{AB} = w_A Sin60 - w_B Sin\alpha$$

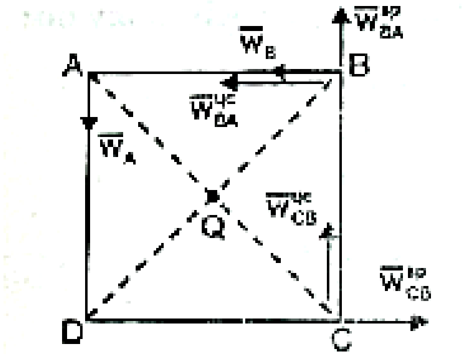
$$w^{вр}{}_{AB} = \frac{v_0{}^2}{R} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5 v_0{}^2 \sqrt{3}}{9R} = \frac{4 v_0{}^2 \sqrt{3}}{2R \cdot 9} = \frac{2 v_0{}^2 \sqrt{3}}{9R}$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{w^{вр}{}_{AB}}{AB} = \frac{2 v_0{}^2 \sqrt{3}}{27 R^2}$$

Ответ: $\omega_{AB} = \frac{v_0}{3R}$, $\varepsilon_{AB} = \frac{2 v_0{}^2 \sqrt{3}}{27 R^2}$, $v_B = 2 v_0$, $w_B = \frac{5\sqrt{3} v_0{}^2}{9R}$

Задача 18.37: Квадрат ABCD со стороною a совершает плоское движение в плоскости рисунка. Найти положение

Мгновенного центра ускорений и ускорений вершин его C и D,если известно, что в данный момент ускорения двух вершин A и B одинаковы по величине и равны 10 $см/с^2$.Направление ускорений точек A и B совпадает со сторонами квадрата, как указано на рисунке.



$a_B = a_A = 10 см/с^2$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}^n_{AB} + \bar{a}^T_{AB}$$

$$\bar{a}^n_{AB} \parallel AB; \bar{a}^T_{AB} \perp AB$$

$a_{AX} = 0 = -a_B + a^n_{AB} \rightarrow a^n_{AB} = 10 см/с^2$

$a_{ay} = -a_A = -a^n_{AB} \rightarrow a^T_{AB} = a_A = 10 см/с^2$

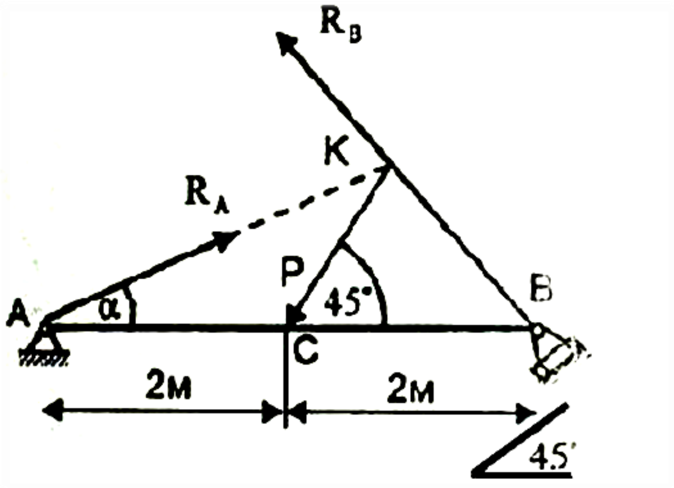
$a_{AB} = 10\sqrt{2}$

$\alpha = \arccos\frac{a_{AB}}{a_A} = 45$

$a_c = \frac{a_A}{p_A} \cdot p_D = \frac{a_A}{p_A} \cdot PC = a_A = 10 см/с^2$

Задача 2.30: Балка AB шарнирно закреплена на опоре A; у конца B она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила P = 2 кН. Определить реакции опор для случаев а и б, взяв размеры с рисунков и пренебрегая весом балки.

а) Запишем условия равновесия



$\sum x = 0 \quad X_A - P \cdot Cos45^o = 0$

$\sum y = 0 \quad Y_A - P \cdot Sin45^o + R_B = 0$

$\sum M_A = 0 \quad 4R_B - 2P \cdot Cos45^o = 0$

Выразим из последнего уравнения реакцию опоры R_B

$$R_B = \frac{2P \cdot Cos45^o}{4}$$

$$R_B = \frac{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.71\,\text{кН}$$

Найдем реакцию в опоре R_A

$$X_A = P \cdot Cos45^o$$

$$Y_A = P \cdot Sin45^o - R_B$$

$$X_A = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ \text{кН}$$

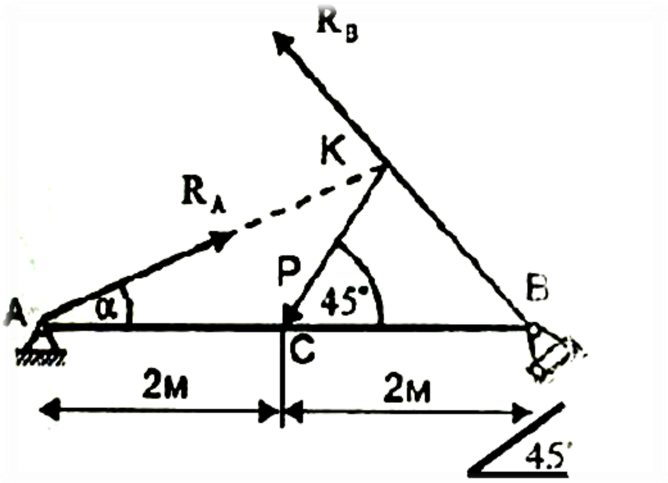
$$Y_A = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{кН}$$

$$R_A = \sqrt{X_A^{\ 2} + Y_A^{\ 2}}$$

$$R_A = \sqrt{2 + \frac{1}{2}} = 1.58\,\text{кН}$$

Ответ: $R_A = 1.58\,\text{кН}$, $R_B = 0.71\,\text{кН}$

б) Запишем условия равновесия



$\sum x = 0 \qquad X_A - P \cdot Cos45^o - R_B \cdot Cos45^o = 0$

$\sum y = 0 \qquad Y_A - P \cdot Sin45^o + R_B \cdot Cos45^o = 0$

$\sum M_A = 0 \qquad 4R_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2P \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

Выразим из последнего уравнения реакцию опоры R_B

$R_B = \frac{P}{2}$

$R_B = 1$ кН

Найдем реакцию в опоре R_A

$X_A = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ кН

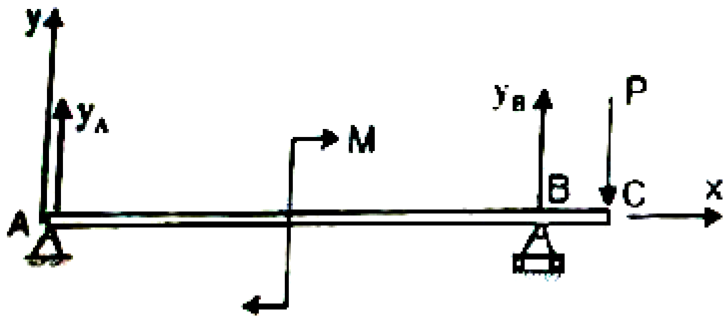
$Y_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(2-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ кН

$R_A = \sqrt{X_A{}^2 + Y_A{}^2}$

$R_A = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = 2.24$ кН

Ответ: $R_A = 2.24$ кН, $R_B = 1$ кН

Задача 3.15: На консольную горизонтальную балку действует пара сил с моментом M=6 кН·м, а в точке C вертикальная нагрузка P=2 кН. Длина пролета балки AB=3,5 м, вынос консоли BC=0,5 м. Определить реакции опор.



Ответ: R_A=2 кН - вниз, R_B=4 кН - вверх.

Решение: Запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_X = R_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_Y = R_{Ay} + R_B - P = 0 \quad (2)$$

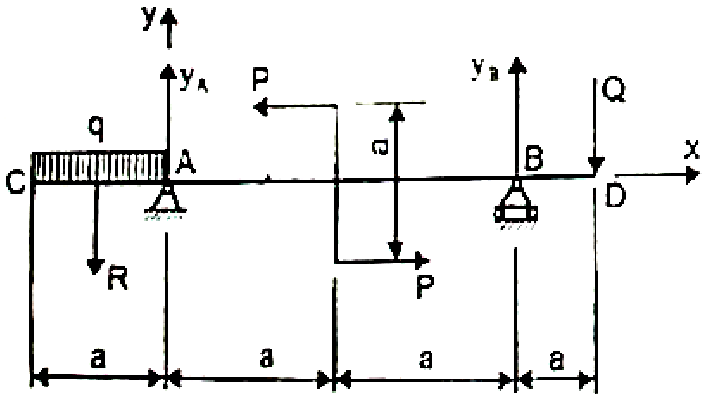
$$\sum M_B = -R_{Ay} \cdot AB - M - P \cdot BC = 0 \quad (3)$$

Из (1) $\Rightarrow R_{\text{Ax}} = 0$

Из (3) $\Rightarrow R_{Ay} = \dfrac{-M - P \cdot BC}{AB} = \dfrac{-6 - 2 \cdot 0{,}5}{3{,}5} = -2$ кН – составляющая реакции направлена вниз, поскольку ее модуль меньше нуля.

Из (2) $\Rightarrow R_B = P - R_{Ay} = 2 - (-2) = 4$ кН.

Задача 3.16: На двухконсульную горизонтальную балку действует пара сил (P, P), на левую консоль, равномерно распределённая нагрузка интенсивности q, а в точку D правой консоли вертикальная нагрузка Q. Определить реакции опор, если $P=1$ кН, $Q=2$ кН, $q=2$ кН, $a=0{,}8$ м.



Запишем условия равновесия

$$\sum F_X = R_{AX} = 0$$
$$\sum F_Y = -q \cdot a + R_{AY} + R_B - Q = 0$$
$$\sum M_A = q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + P \cdot a + R_B \cdot 2a - Q \cdot 3a = 0$$

Из третьего условия равновесия найдём R_B

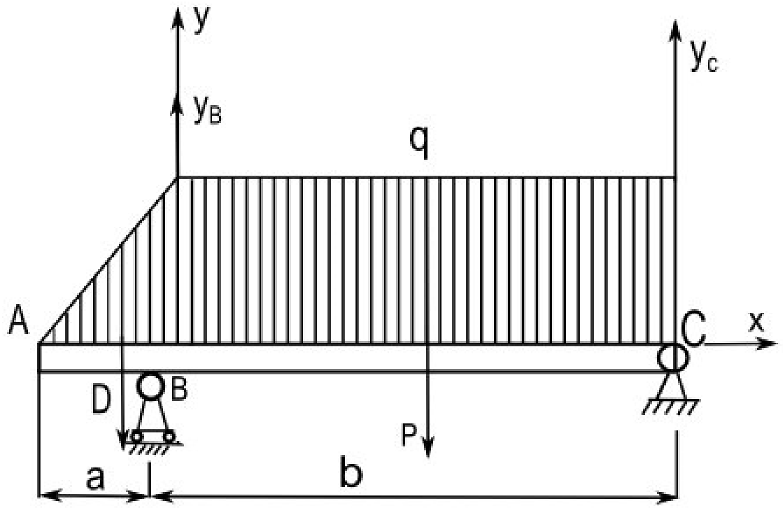
$$R_B = \frac{Q \cdot 3a - P \cdot a - q \cdot \dfrac{a^2}{2}}{2a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 0{,}8 - 1 \cdot 0{,}8 - 2 \cdot \dfrac{0{,}8^2}{2}}{2 \cdot 0{,}8} = 2{,}1 \text{кН}$$

Из условия для $\sum F_Y$

$$R_{AY} = Q + q \cdot a - R_B = 2 + 2 \cdot 0.8 - 2.1 = 1 \text{кН}$$

Ответ: $R_A = 1.5$ кН, $R_B = 2.1$ кН

Задача 3.19: Горизонтальная балка АС, опертая в точках В и С, несет между опорами В и С равномерно распределенную нагрузку интенсивности q Н/м; на участке АВ интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля. Найти реакции опор В и С, пренебрегая весом балки.



Распишем интенсивность нагрузки на участках АВ и ВС соответственно Q_1 и Q_2

$$Q_1 = \int_0^a q(1-\frac{x}{a})dx = \frac{qa}{2}$$

$$Q_2 = q\int_0^b dx = qb$$

Найдем условия равновесия

$$\sum Y = 0 \qquad R_B + R_c - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$\sum X = 0 \qquad X_c = 0$$

$$\sum \text{M}_c = 0 \quad Q_2 \cdot \frac{b}{2} - R_B \cdot b + Q_1 \cdot (b + \frac{a}{3}) = 0$$

Выразим из последнего уравнения реакцию опоры R_B

$$R_B = \frac{0.5 \cdot Q_2 \cdot b + Q_1(b + \frac{a}{3})}{b}$$

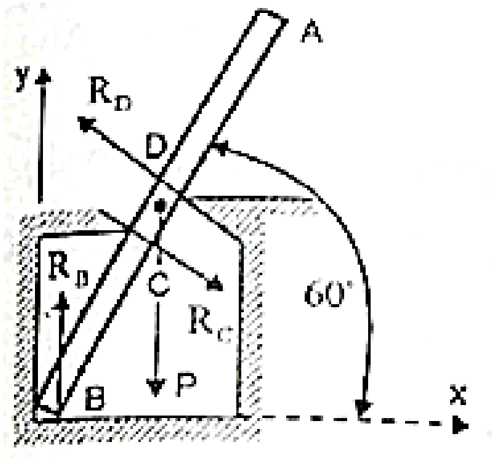
$$R_B = \frac{q}{6}(3a + 3b + \frac{a^2}{b}) \text{ Н}$$

$$R_c = Q_1 + Q_2 - R_B$$

$$R_c = \frac{qa}{2} + qb - \frac{q}{6}(3a + 3b + \frac{a^2}{b}) = \frac{q}{6}(3b - \frac{a^2}{b}) \text{ Н}$$

Ответ: $R_B = \frac{q}{6}(3a + 3b + \frac{a^2}{b})$ Н, $R_c = \frac{q}{6}(3b - \frac{a^2}{b})$ Н

Задача 4.8: Однородная балка AB веса 200 H опирается на гадкий горизонтальный пол в точке B под углом $60°$ и, кроме того, поддерживается двумя опорами C и D. Определить реакции опор в точках B, C и D, если длина $AB = 3м$, $CB = 0{,}5м$, $BD = 1м$.



Запишем условия равновесия:

$$\sum F_X = R_C \cdot \cos 30° - R_D \cdot \cos 30° = 0$$
$$\sum F_Y = -R_C \cdot \sin 30° + R_D \cdot \sin 30° + R_B - P = 0$$
$$\sum M_C = -R_C \cdot BC + R_D \cdot BD - P \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 60° = 0$$

Из первого условия равновесия получаем, что

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R_C - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot R_D = 0$$
$$R_C = R_D$$

Из условия для $\sum M_C$ получаем, что

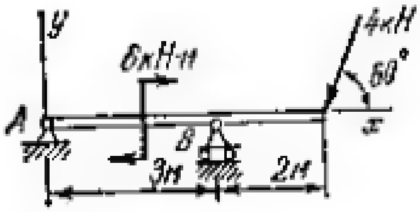
$$R_D \cdot 1 - R_C \cdot 0.5 - 200 \cdot \frac{3}{4} = 0$$
$$R_D = R_C = 300H$$

По второму условию получаем, что

$$R_B - P = 0$$
$$R_B = P = 200H$$

Ответ: $R_B = 200$ Н, $R_C = 300$ Н, $R_D = 300$ Н.

Задача 4.25: Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке.



Запишем условия равновесия

$$\sum F_X = R_{AX} - P \cdot \cos 60° = 0$$
$$\sum F_Y = R_{AY} + R_B - P \cdot \sin 60° = 0$$
$$\sum M_A = -M + R_B \cdot AB - P \cdot \sin 60° \cdot AC = 0$$

Из первого условия равновесия получаем, что

$$R_{AX} = P \cdot \cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2\,\text{кН}$$

Из третьего условия равновесия получаем, что

$$R_B = \frac{P \cdot \sin 60° \cdot AC + M}{AB} = \frac{4 \cdot \sin 60° \cdot 5 + 6}{3} = 7.78\,\text{кН}$$

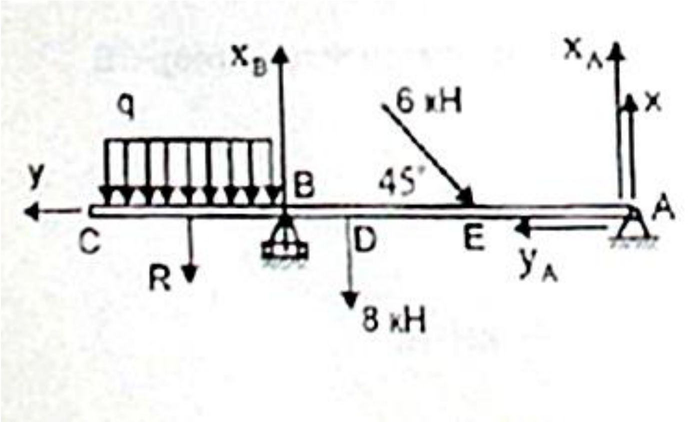
Из второго условия получаем

$$R_{AY} = P \cdot \sin 60° - R_D = 4 \cdot \sin 60° - 7.78 = -4.82\,\text{кН}$$

Так как $R_{AY} < 0$, следовательно, R_{AY} направлено вниз.

Ответ: $R_{AX} = 2.6$ кН, $R_{AY} = -4.32$ кН, $R_B = 7.78$ кН

Задача 4.26: Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределённой нагрузки. Интенсивность распределённой нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке.



Запишем условия равновесия

$$\sum F_X = X_A + R_B - F_1 - Q - F_2 \cdot \sin 45° = 0$$
$$\sum F_Y = Y_A - F_2 \cdot \cos 45° = 0$$
$$\sum M_A = Q \cdot 5 - R_B \cdot 4 + F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot \sin 45° = 0$$

Из второго условия равновесия получаем, что

$$Y_A = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = 4.2 \text{ кН}$$

По второму условию равновесия получаем, что

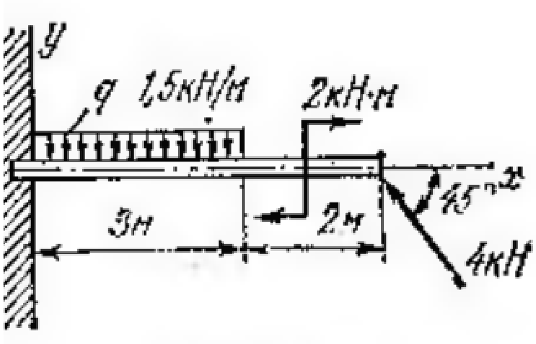
$$R_B = \frac{1}{4}(5Q + 3F_1 + 2F_2 \sin 45°) = \frac{30 + 24 + 12\frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{54 + 6\sqrt{2}}{4} = \frac{27 + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{31.2}{2} = 15.6$$
кН

Из условия для $\sum F_X$ получаем, что

$$X_A = F_1 + Q + F_2 \sin 45° - R_B = 8 + 6 + 6\frac{\sqrt{2}}{2} - 15.6 = -1.6 + 4.2 = 2.6 \text{ кН}$$

Ответ: $X_A = 2.6$ кН, $Y_A = 4.2$ кН, $R_B = 15.6$ кН

Задача 4.28: Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.



Запишем уравнения равновесия

$\sum F_X = X_A - \mathrm{P} \cdot Cos45 = 0$

$\sum F_Y = Y_A + \mathrm{P} \cdot Sin45 - q \cdot 3 = 0$

$\sum \mathrm{M}_A = \mathrm{M}_A - q \cdot 3 \cdot 1.5 - \mathrm{M} + 5\mathrm{P} \cdot Sin45 = 0$

Из уравнения для $\sum F_X$ найдем X_A

$X_A = \mathrm{P} \cdot Cos45 = 4Cos45 \approx 2.8$ кН

Из уравнения для $\sum F_Y$ найдем Y_A

$Y_A = 3q - \mathrm{P} \cdot Sin45$

$Y_A = 3 \cdot 1.5 - 4Sin45 \approx 1.7$ кН

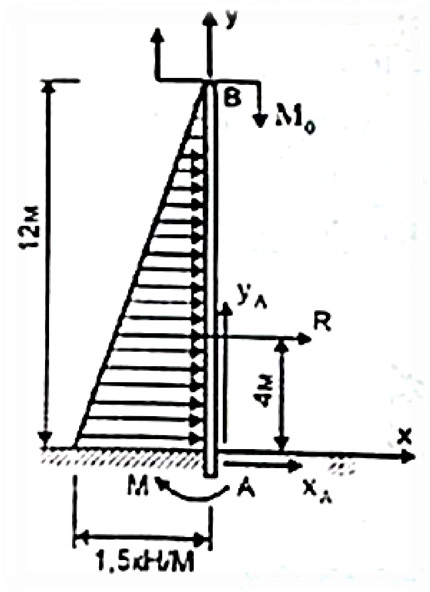
Из уравнения для $\sum \mathrm{M}_A$ найдем M_A

$\mathrm{M}_A = q \cdot 3 \cdot 1.5 + \mathrm{M} - 5\mathrm{P} \cdot Sin45$

$\mathrm{M}_A = 1.5 \cdot 3 \cdot 1.5 + 2 - 5 \cdot 4 \cdot Sin45 \approx -5.35$ кН

Ответ: $X = 2.8$ кН, $Y = 1.7$ Н, $\mathrm{M}_A = -5.35$ кН·м

Задача 4.30: Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника.



$$Q = \frac{12}{2} \cdot 1.5 = 9$$

Найдем условия равновесия

$$\sum X = 0 \quad Q + X = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad Y = 0$$

$$\sum \text{M}_c = 0 \quad \text{M}_R - \text{M} - \frac{12}{3} Q = 0$$

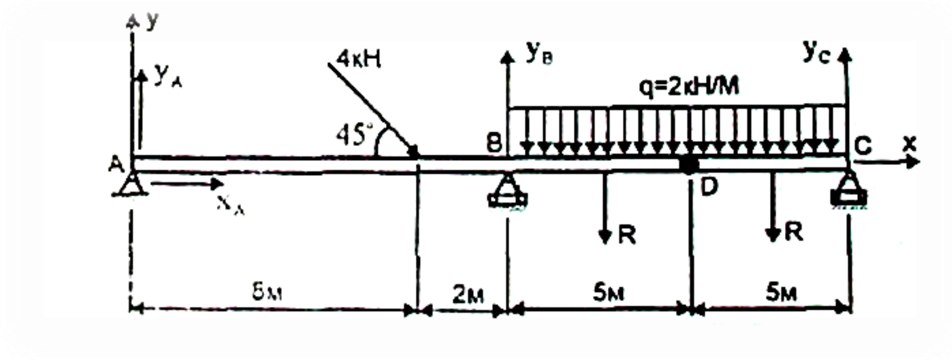
$$X = -Q = -9 \text{ кН}$$

$$Y = 0$$

$$\text{M}_R = \text{M} + 4Q = 4 + 36 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Ответ: $X = -9$ кН, $Y = 0$, $\text{M}_R = 40$ кН $\cdot$ м

Задача 4.33: Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.



Рассмотрим первую часть составной балки; раскладывая реакции в шарнире D на составляющим

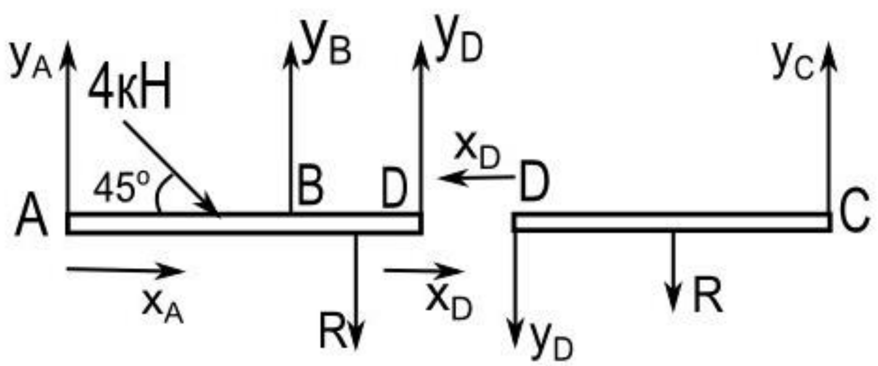
Запишем уравнения равновесия

$$\sum F_X = -X_D = 0$$

$$\sum F_Y = Y_D + R_C - q\cdot 5 = 0$$

$$\sum \mathrm{M}_c = -Y_D\cdot 5 + q\cdot 5\cdot 2.5 = 0$$

$$X_D = 0$$



Из уравнения для $\sum \mathrm{M}_c$ найдем Y_D

$$Y_D = \frac{q\cdot 5\cdot 2.5}{5} = \frac{2\cdot 5\cdot 2.5}{5} = 5\,\text{кН}$$

Из уравнения для $\sum F_Y$ найдем R_C

$$R_C = q\cdot 5 - Y_D = 2\cdot 5 - 5 = 5\,\text{кН}$$

Рассмотрим вторую часть составной балки, подставляя найденные компоненты реакции X_D и Y_D шарнира D

Запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_X = X_A + \mathrm{P}\cdot Cos45 + X_D = 0$$

$$\sum F_Y = Y_A - \mathrm{P}\cdot Sin45 + R_B - q\cdot 5 - Y_D = 0$$

$$\sum \mathrm{M}_A = -\mathrm{P}\cdot 8\cdot Sin45 + R_B\cdot 10 - q\cdot 5\cdot 12.5 - Y_D\cdot 15 = 0$$

Из уравнения для $\sum F_X$ найдем X_A

$$X_A = -\mathrm{P}\cdot Cos45 - X_D$$

$$X_A = -4\cdot Cos45 - 0 \approx -2.8\,\text{кН}$$

Из уравнения для $\sum M_A$ найдем R_B

$$R_B = \frac{Y_D \cdot 15 + q \cdot 5 \cdot 12.5 + P \cdot Sin45 \cdot 8}{10}$$

$$R_B = \frac{5 \cdot 15 + 2 \cdot 5 \cdot 12.5 + P \cdot Sin45 \cdot 8}{10} \approx 22.2 \text{ кН}$$

Из уравнения для $\sum F_Y$ найдем Y_A

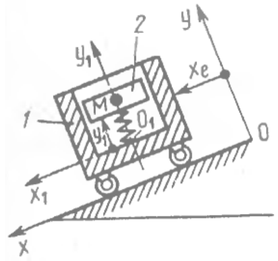
$$Y_A = P \cdot Sin45 - R_B + q \cdot 5 + Y_D$$

$$Y_A = 4 \cdot Sin45 - 22.2 + 2 \cdot 5 + 5 \approx -4.4 \text{ кН}$$

Ответ: $X_A = -2.8$ кН, $Y_A = -4.4$ кН, $R_B = 22.2$ кН, $R_C = 5$ кН, $X_D = 0$, $Y_D = 5$ кН.

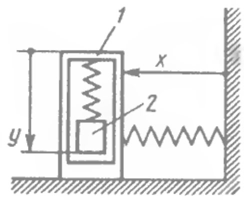
Вариант 3

1. Тележка 1 движется по наклонной плоскости по закону $x_e = 0.5t^2$. Внутри тележки движется ползун 2 по закону y_1 = 1+ 0.05sin(0.25πt). Определить абсолютную скорость точки М ползуна 2 в момент времени t = 0.1 с.



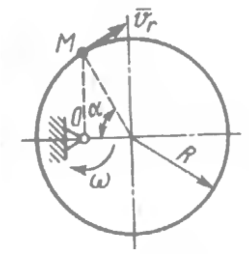
- 0.107
- 0.851
- 1
- 0.426

2. Тело 1 движется по закону x = sin πt. Тело 2 движется относительно тела 1 по закону y= sin(π+πt). Найти абсолютную скорость тела 2 при t = 1 c.



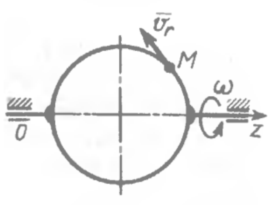
- 8.88
- 2.22
- 4.44
- 3.33

3. Диск радиуса R = 0.04 м вращается вокруг точки О в плоскости чертежа с угловой скоростью ω= 0.5t. По ободу диска движется точка М с постоянной относительной скоростью v_r = 0.3м/с. Определить абсолютную скорость точки М в момент времени t = =2с, если угол $\alpha = 60^0$.



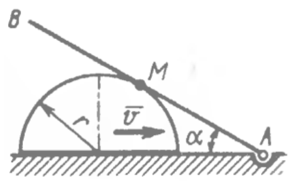
- 0.339
- 0.684
- 0.382
- 0.257

4. Диск вращается вокруг оси Oz. По его ободу движется точка М с постоянной относительной скоростью v_r = 9 м/с. Определить переносную скорость точки М в момент, когда ее абсолютная скорость равна 15 м/с.



- 7
- 12
- 6
- 5

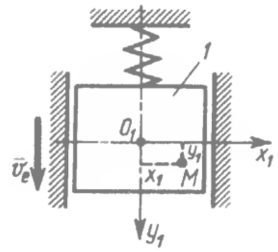
5. Тело 1, имеющее форму полуцилиндра, скользит по горизонтальной плоскости со скоростью v= 2 м/с, поворачивая шарнирно закрепленный в точке а стержень АВ. Определить относительную скорость точки касания М, если угол $\alpha = 30^0$.



- 0.173
- 0.346
- 0.26
- 0.124

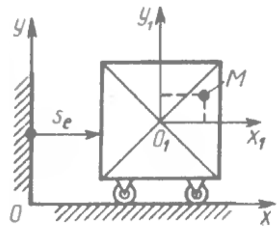
6. Пластина 1 совершает колебания со скоростью v_e = (π/2) sin(π/4)t. По пластине движется точка М согласно уравнениям x_1 =0.2 t^2. и y_1 =0.3t. Определить абсолютное ускорение точки М через 3с после начала движения.

- 0.738
- 0.479
- 0.958
- 1.392



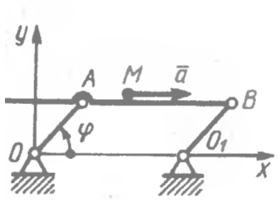
7. Тележка движется по закону s_e = 0.5 t^3. По тележке в плоскости чертежа движется точка М согласно уравнениям x_1 =0.3t и y_1 =0.1 t^2. Определить абсолютное ускорение точки М в момент времени t = 1с.

- 3.86
- 1.93
- 3.01
- 6.03



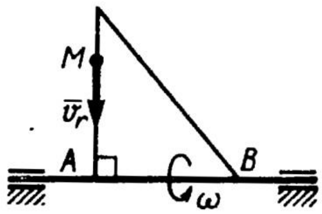
8. По стержню АВ шарнирного параллелограмма ОАВO_1 движется точка М с ускорением a = cos t. Стержень ОА длиной 2м вращается согласно уравнению φ= t. Определить модуль абсолютного ускорения точки М в момент времени t= π.

- 0
- 2
- 1
- 0.5



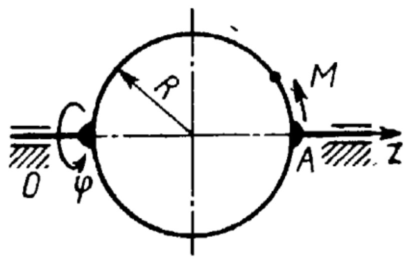
9. По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны АВ с угловой скоростью $\omega = 8\,рад/с$, движется точка М с относительной скоростью $\upsilon_r = 4\,м/с$. Определить модуль ускорения Кориолиса точки М.

- 8
- 64
- 7
- 4



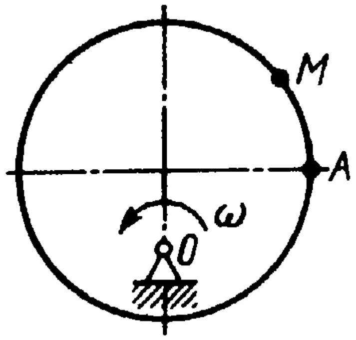
10. Диск вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 4\sin 0,25\pi t$. По ободу диска движется точка М согласно уравнению $AM = 0,25\pi R t^2$. Определить ускорение Кориолиса точки М в момент времени $t = 1с$, если радиус $R = 0,4\,м$.

- 1.89
- 1.98
- 1.1
- 1



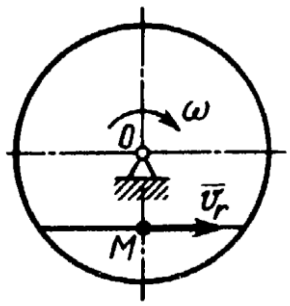
11. Диск-эксцентрик равномерно вращается в плоскости чертежа. По его ободу движется точка М по закону $AM = 4t^2$. Чему должна равняться угловая скорость диска ω, для того чтобы ускорение Кориолиса точки М в момент времени $t = 1c$ было равно $24\ м/c^2$?

- 1
- 1.5
- 2
- 2.5



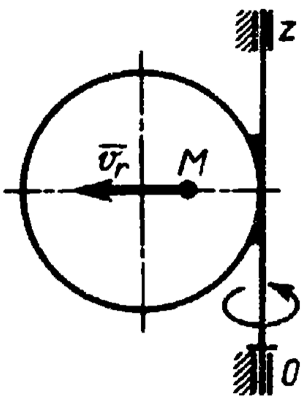
12. Точка М движется с относительной скоростью $\upsilon_r = 0,5t$ по хорде диска, вращающегося вокруг оси О, перпендикулярной плоскости диска, с угловой скоростью $\omega = 0,5\,рад/c$. Определить абсолютное ускорение точки М в момент времени $t = 2c$, если расстояние $OM = 0,02\,м$.

- 4.88
- 3.65
- 2.37
- 1.11



13. По диаметру диска, вращающегося вокруг оси Oz, движется точка М с относительной скоростью $\upsilon_r = 4t^3$. Определить модуль относительного ускорения точки М в момент времени $t = 1c$.

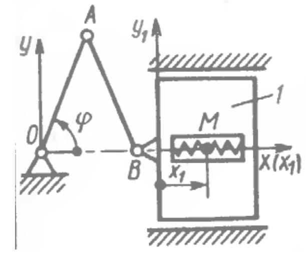
- 12
- 111
- 113
- 5



Вариант 4

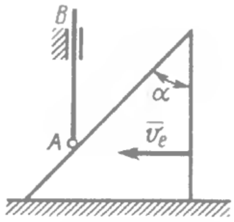
1. Кривошип OA вращается по закону φ = πt/3. заданы длины стержней OA = AB = 0.25 м. Относительное движение точки M по ползуну 1 задано уравнением x_1 = 0.3+ +0.1sin(π/6)t. Определить модуль абсолютной скорости точки M в момент времени t = 1 с.

- 0.107
- 0.851
- 1
- 0.41



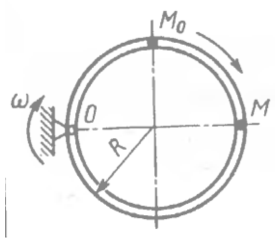
2. По грани призмы движущейся со скоростью $\vec{v}_e$, скользит конец стержня AB. При каком угле α в градусах абсолютная скорость точки A будет равна скорости призмы $\vec{v}_e$?

- 45
- 30
- 60
- 75



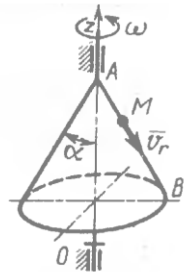
3. Кольцо вращается вокруг оси O, перпендикулярной плоскости чертежа, с постоянной угловой скоростью ω = 4 рад/с. Находящийся в кольце шарик M движется по закону M_0 M = 0.1t. Определить абсолютную скорость шарика в указанном на чертеже положении, если радиус R= 0.1 м.

- 0.33
- 0.75
- 0.5
- 0.25



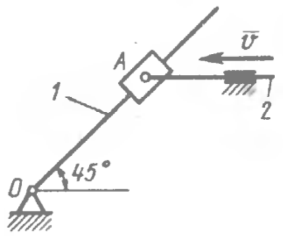
4. Конус вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω= 3 рад/с. По его образующей с постоянной скоростью v_r = 4 м/с движется точка M в направлении от A к B. Определить модуль абсолютной скорости этой точки в положении, когда расстояние AM=2 м, если угол $\alpha = 30^0$.

- 7
- 2.23
- 2.25
- 5

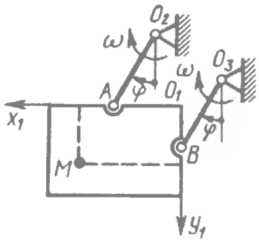


5. Стержень 2 кулисного механизма движется со скоростью = 1 м/с. Для указанного положения механизма определить угловую скорость кулисы 1, если расстояние OA= 1м.

- 0.471
- 0.346
- 1.414
- 0.707



6. Пластина приводится в движение двумя кривошипами АO_2=ВO_3=1м,вращающимися с постоянной угловой скоростью ω= 2π. По пластине движется точка М согласно уравнениям x_1 = 0.2 t^3 и y_1 =0.3t^2 . Определить абсолютное ускорение точки М в момент времени t= 1с, если угол φ=30^0 .

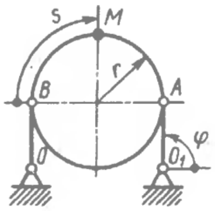


- 19.15
- 54.2
- 38.3
- 27.08

7. Относительное движение точки М определяется уравнениями $x_r = e^t$ и y_r = 2sin t, а переносное поступательное движение- уравнениями $x_e = e^{-t}$; y_e = 2cos t. Оси абсолютной и относительной систем координат параллельны. Определить модуль абсолютного ускорения точки М в момент времени t=0.

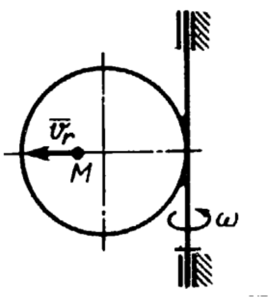
- 2.83
- 1.93
- 4.76
- 6.03

8. Звено O_1А вращается согласно уравнению φ= 2t. По ободу диска радиуса r= 0.5 м движется точка М по закону s= 2rt. Определить модуль абсолютного ускорения точки М в момент времени t= 0.25π.



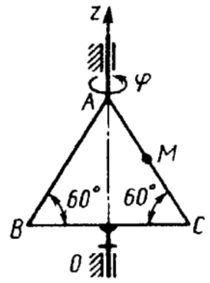
- 4
- 2
- 3
- 0.5

9. По диаметру диска, вращающегося вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 2t$, движется точка М с относительной скоростью $\upsilon_r = 4t$. Определить модуль ускорения Кориолиса точки М в момент времени $t = 2c$.



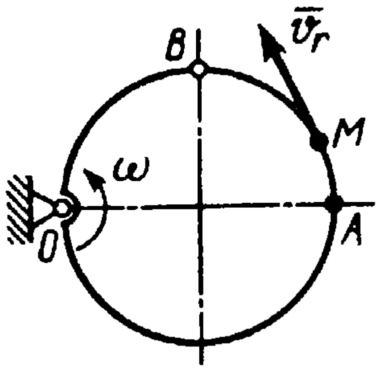
- 8
- 64
- 128
- 256

10. Пластина ABC вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 5t^2$, а по ее стороне AC движется точка M согласно уравнению $AM = 4t^3$. Определить ускорение Кориолиса точки M в момент времени $t = 0,5c$.



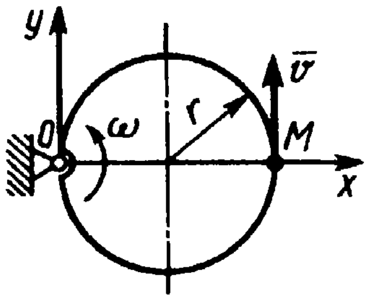
- o 15
- o 11
- o 10
- o 3

11. По ободу диска, вращающегося в плоскости чертежа с угловой скоростью $\omega = 2\,рад/с$, движется точка M с относительной скоростью $\upsilon_r = 0,2\,м/с$. Изменится ли модуль ускорения Кориолиса точки M при переходе ее из A в B?



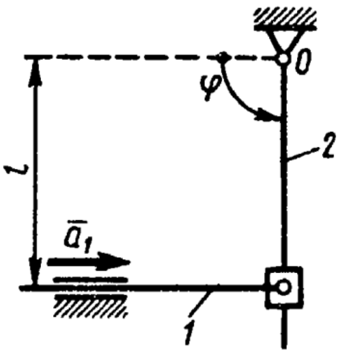
- o Да;
- o Нет;

12. Кольцо радиуса $r = 0,5\,м$ вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 4\,рад/с$ в плоскости чертежа. По кольцу перемещается точка M с постоянной скоростью $\upsilon = 2\,м/с$. Определить модуль абсолютного ускорения точки M в указанном положении.



- o 25
- o 20
- o 40
- o 30

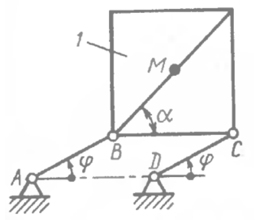
13. Стержень 1 кулисного механизма движется с постоянным ускорением $a_1 = 2\,м/с^2$. Определить угловое ускорение кулисы 2 в данном положении механизма, если угол $\varphi = 90^o$ и расстояние $l = 0,5\,м$.



- o 3
- o 41
- o 4
- o 13

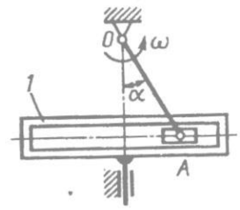
Вариант 5

1. Определить абсолютную скорость точки М в момент времени t = 1 с, если ее движение по квадратной пластине 1 задано уравнением BM = $0.1t^2$. Кривошипы AB=CD=0.5м вращаются по закону φ = 0.25πt.



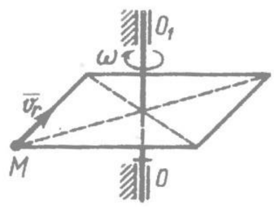
- 0.107
- 0.851
- 0.438
- 0.41

2. Кривошип OA = 0.2 м вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω = 2 рад/с и приводит в движение кулису 1, движущуюся поступательно. Найти скорость кулисы при угле $\alpha = 30^0$.



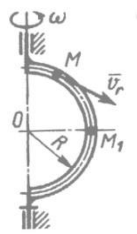
- 0.1
- 0.2
- 0.4
- 0.3

3. Квадратная плита вращается вокруг оси OO_1 с угловой скоростью ω= 3 рад/с. Вдоль стороны плиты движется точка M с постоянной скоростью v_r= 4м/с. Определить абсолютную скорость точки M в указанном на рисунке положении, если стороны квадрата равны 6 м.



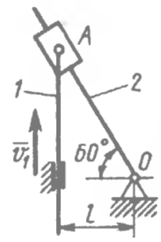
- 8.8
- 12.4
- 35
- 17.5

4. В трубке, имеющей форму полуокружности движется шарик M с постоянной скоростью v_r = 3 м/с. Определить модуль абсолютной скорости шарика в положении M_1, если трубка вращается с угловой скоростью ω= 3 рад/с, а радиус R= 1м.



- 6.36
- 8.48
- 4.24
- 5.33

5. Стержень 1 кулисного механизма движется со скоростью v_1 = 1 м/с. Для указанного положения механизма определить угловую скорость кулисы 2, если расстояние l = 40см.



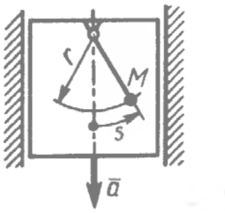
- 1.09
- 3.97
- 1.25
- 2.19

6. Тележка движется по горизонтальной оси. В данный момент времени ускорение тележки a_e = 2 м/c^2 . По тележке движется точка М согласно уравнениям x_1 = 0.3t^2 и y_1 =0.5t^2 . Определить абсолютное ускорение точки М.

- 2.78
- 4.56
- 6.40
- 1.39

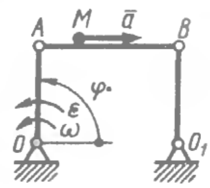
7. Точка М маятника движется по окружности радиуса r= 0.1 м, согласно уравнению s= 0.01 sin 10t, в лифте, опускающимся с постоянным ускорением a = 0.1 м/c^2 . Определить модуль абсолютного ускорения точки М в момент времени, когда координата s= 0.

- 0.1
- 0
- 0.01
- 0.05



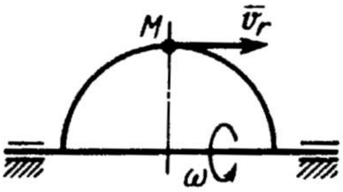
8. По стержню АВ шарнирного параллелограмма ОАВO_1 движется точка М с ускорением a =0.4м/c^2 . Определить модуль абсолютного ускорения точки М в момент времени, когда угол φ=0.5π, угловая скорость стержня ОА длиной 0.1м равна ω= 4 рад/с, а угловое ускорение ε= 0.4 рад/c^2 .

- 2.83
- 1.93
- 0.82
- 1.64



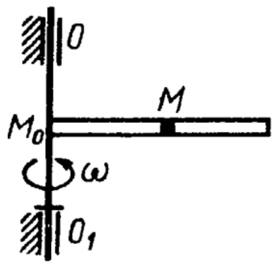
9. По ободу полукруга, вращающегося вокруг диаметра с угловой скоростью $\omega = 4\,рад/с$, движется точка М с относительной скоростью $\overline{\upsilon_r}$. Определить модуль ускорения Кориолиса точки М в указанном положении.

- 5
- 1
- 0
- 0.02



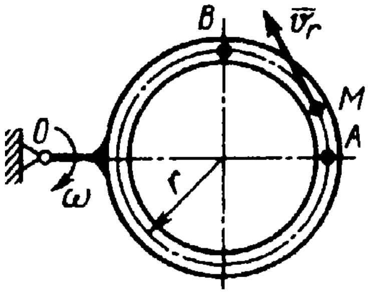
10. Трубка вращается вокруг оси OO_1 с угловой скоростью $\omega = 1{,}5\,рад/с$. Шарик М движется вдоль трубки по закону $M_0M = 4t$. Найти модуль ускорения Кориолиса шарика.

- 2
- 12
- 13
- 42



11. По кольцу радиуса $r = 0,5 м$, вращающемуся в плоскости чертежа вокруг оси О с угловой скоростью $\omega = const$, движется точка М со скоростью $\upsilon_r = const$. Изменится ли модуль ускорения Кориолиса точки М при переходе ее из А и В?

- Да;
- Нет;

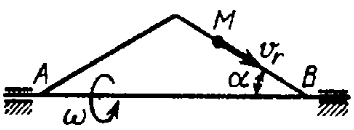


12. Точка М движется с постоянной скоростью $\upsilon = 1 м/с$ от начала координат по стержню, вращающемуся в плоскости Оxy с постоянной угловой скоростью $\omega = 2\, рад/с$. Определить модуль ускорения точки М, когда расстояние $OM = 0,5 м$.

- 4.47
- 5.62
- 8.61
- 2.22

13. По стороне треугольника, вращающегося вокруг стороны АВ с постоянной угловой скоростью $\omega = 4\, рад/с$, движется точка М с относительной скоростью $\overline{\upsilon_r}$. В момент времени, когда расстояние $MB = 0,5 м$, определить модуль переносного ускорения точки М, если угол $\alpha = 30^o$.

- 2
- 8
- 7
- 4



Вариант 3

1. Заданы уравнения движения точки $x = 3t$, $y = t^2$. Определить расстояние точки от начала координат в момент времени $t = 2c$.

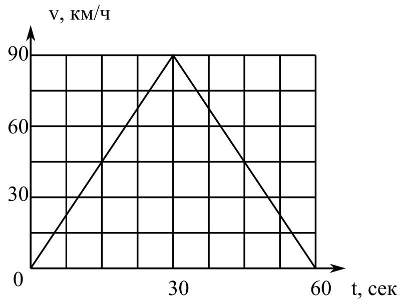
- 7.21
- 3.42
- 12.7
- 9

2. Заданы уравнения движения точки $x = \sin t$, $y = \cos t$. Определить ближайший момент времени, когда радиус-вектор точки, проведенный из начала координат, образует угол 45^o с осью Ox.

- 1.44
- 0.5
- 0.785
- 1

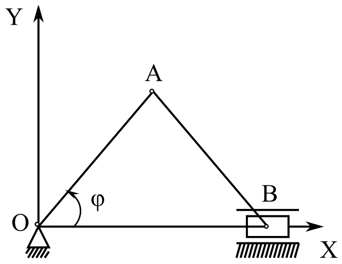
3. Дан график скорости движения точки $v = f(t)$. Определить пройденный путь в момент времени $t = 60c$.

- 180
- 60
- 2700
- 750



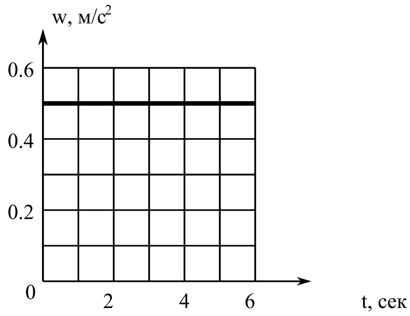
4. Положение кривошипа определяется углом $\varphi = 0{,}5t$. Определить скорости ползуна в момент времени $t = 4c$, если $OA = AB = 1{,}5м$.

- 0
- -2.72
- -1.36
- 1.36



5. Точка движется по прямой. Дан график ускорения $w = f(t)$. Определить скорость точки в момент времени $t = 6c$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.

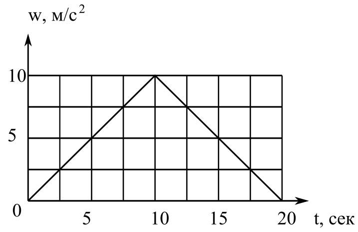
- 1
- 2
- 3
- 4



6. Самолет при посадке касается посадочной полосы с горизонтальной скоростью $180 км/ч$. После пробега $1000 м$ самолет останавливается. Определить модуль среднего замедления самолета.

- 2.5
- 1.25
- 3
- 5

7. Дан график ускорения $w = f(t)$ прямолинейно движущейся точки. Определить скорость точки в момент времени $t = 20 c$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.



- 200
- 100
- 150
- 0

8. Даны проекции скорости на координатные оси $v_x = 3t$, $v_y = 2t^2$, $v_z = t^3$. Определить модуль ускорения в момент времени $t = 1 c$.

- -.583
- 0
- 11.66
- 5.83

9. Даны уравнения движения точки $x = \cos \pi t$, $y = \sin \pi t$. Определить модуль ускорения в момент времени $t = 1 c$.

- 3.29
- 9.87
- 1.54
- 5.76

10. Ускорение прямолинейного движения точки $w = t$. Определить скорость точки в момент времени $t = 3$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 2 м/с$.

- 19.5
- 4.875
- 6.5
- 3.25

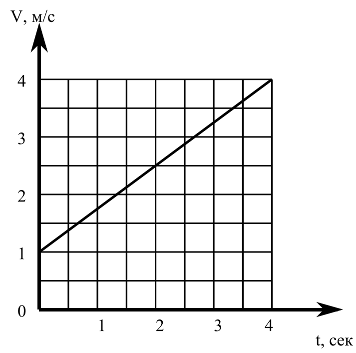
11. Точка движется по траектории согласно уравнению $s = 0{,}5t^2 + 4t$. Определить, в какой момент времени скорость точки достигнет $10 м/с$.

- 12
- 3
- 1
- 6

12. Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$. Определить момент времени t, когда криволинейная координата точки $s = 7 м$, если при $t_0 = 0$, $s_0 = 0$. Точка движется в положительном направлении координаты s.

- 4.66
- 6.25
- 2.33
- 1.14

13. Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки. Определить касательное ускорение точки.



- 1.5
- 1
- 0.75
- 0.25

14. Скорость точки в декартовых координатах задана выражением $\bar{v} = 1{,}5\bar{i} + 1{,}5t\bar{j} + 0{,}5t^2\bar{k}$. Определить касательное ускорение точки в момент времени $t = 2c$.

- 1.09
- 2.18
- 4.36
- 6.54

15. По окружности движется точка согласно уравнению $s = 5t - 0{,}4t^2$. Определить время t, когда нормальное ускорение $w_n = 0$.

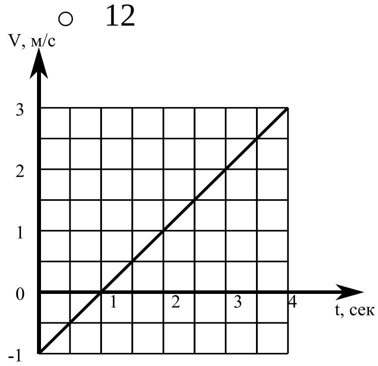
- 3.25
- 4.45
- 5.55
- 6.25

16. Дано уравнение движения точки по траектории $s = 5t$. Определить радиус кривизны траектории, когда нормальное ускорение точки $w_n = 3м/c^2$.

- 8.33
- 4.16
- 6.64
- 10.34

17. Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки по окружности радиуса $8м$. Определить момент времени t, когда нормальное ускорение точки $w_n = 0{,}5м/c^2$.

- 3
- 6
- 9
- 12



18. По окружности, радиус которой $r = 7м$, движется точка согласно уравнению $s = 0{,}3t^2$. Определить время, когда нормальное ускорение точки $w_n = 1{,}5 м/c^2$.

- 2.70
- 1.80
- 0.9
- 5.40

19. Точка движется по криволинейной траектории с касательным ускорением $w_\tau = 1{,}4 м/с^2$. Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее полное ускорение $w = 2{,}6 м/с^2$.

- 6.57
- 4.89
- 2.19
- 1.32

20. Точка движется по окружности, радиус которой $r = 200 м$, с касательным ускорением $2 м/с^2$. Определить угол в градусах между векторами скорости и полного ускорения и момент времени, когда ее скорость $v = 10 м/с$.

- 30
- 45
- 5
- 14

21. По окружности радиуса $r = 6 м$ движется точка со скоростью $v = 3t$. Определить угол в градусах между ускорением и скоростью точки в момент времени $t = 1 с$.

- 13.3
- 26.6
- 56.2
- 45.2

22. Задан закон движения точки по траектории: $s = 0{,}5t^2$. Определить угол в градусах между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени $t_1 = 3 с$, когда радиус кривизны $\rho = 4 м$.

- 0
- 30
- 56
- 66

23. Определить трансверсальную скорость точки, если полная скорость равна 20 м/с, а радиальная скорость 10 м/с.

- 1.73
- 17.3
- 15
- 30

24. Даны уравнения движения точки в полярной системе координат $\varphi = 2t, r = t^2$. Определить модуль скорости точки в момент времени t_1=2с.

- 89.4
- 8.94
- 11.6
- 10.6

Вариант 4

1. Заданы уравнения движения точки $x = \cos t$, $y = 2\sin t$. Определить расстояние от точки до начала координат в момент времени $t = 2{,}5c$.

- 3.14
- 0
- 5
- 1.44

2. Заданы уравнения движения точки $x = 2t$, $y = 1 - 2\sin 0{,}1t$. Определить ближайший момент времени, когда точка пересечет ось Ox.

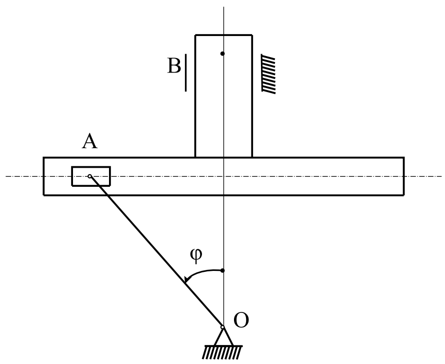
- 6.28
- 5.24
- 1.44
- 3.14

3. Даны уравнения движения точки $x = t^2$, $y = \sin \pi t$, $z = \cos \pi t$. Определить модуль скорости точки в момент времени $t = 1c$.

- 7.44
- 3.72
- 1.86
- 3.14

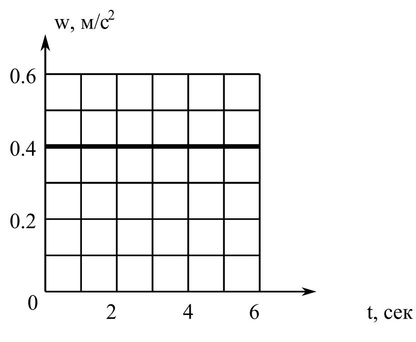
4. Определить скорости точки B в момент времени $t = 6c$, если расстояние $OA = 0{,}1м$, а угол $\varphi = 6t$.

- 1.19
- 5.95
- 0
- 0.595



5. Точка движется по прямой. Дан график ускорения $w = f(t)$. Определить путь, пройденный за промежуток времени от $t_0 = 0$ до $t_1 = 5c$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.

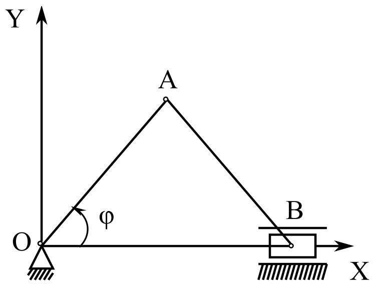
- 2
- 6
- 4
- 5



6. Сколько секунд должен работать двигатель, который сообщает ракете ускорение $3g$, чтобы скорость ракеты в прямолинейном движении возросла с 3 до $5 км/с$?

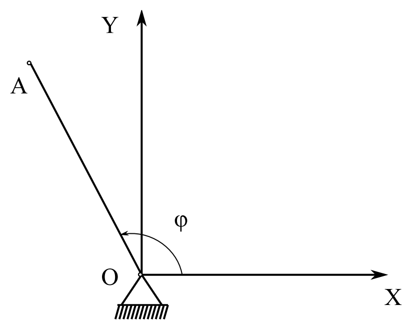
- 360.0
- 136.0
- 68.0
- 34.0

7. Определить ускорение точки B в момент времени, когда угол $\varphi = 60^o$, если длина $OA = AB = 20 см$, а закон изменения угла $\varphi = 3t$.



- 3.6
- 1.8
- -1.8
- -3.6

8. Положение кривошипа OA определяется углом $\varphi = 2t$. Определить проекцию ускорения w_x точки A в момент времени $t = 1с$, если длина $OA = 1м$.



- 0
- 3.32
- 1.66
- 0.83

9. Дано ускорение точки $\bar{a} = 2t\bar{i} + t^2\bar{j}$. Определить угол в градусах между вектором $\bar{a}$ и осью Ox в момент времени $t = 1с$.
- 6.65
- 13.3
- 26.6
- 45.7

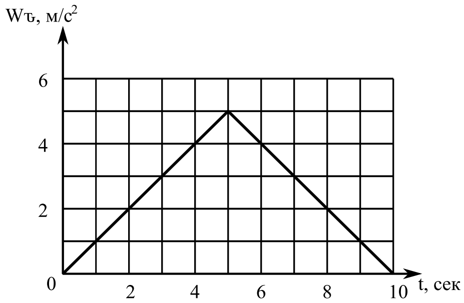
10. Даны уравнения движения точки: $x = 8 - t^2$, $y = t^2 - \cos t$. Определить проекцию ускорения w_y в момент времени, когда координата $x = 0$.
- 1.05
- 2.10
- -3.25
- 5.60

11. Точка движется по заданной траектории со скоростью $v = 5 м/с$. Определить криволинейную координату s точки в момент времени $t = 18с$, если при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 26м$.
- 29
- 58
- 116
- 66

12. Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 3t^2$, $y = 4t^2$. Определить момент времени t, когда криволинейная координата точки $s = 110м$, если при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$ и точка движется в положительном направлении координаты s.

- 4.69
- 9.38
- 14.2
- 6.36

13. Дан график изменения касательного ускорения $w_\tau = f(t)$. Определить модуль скорости в момент времени $t_1 = 10с$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.



- 5
- 10
- 20
- 25

14. Проекция скорости точки во время движения определяются выражениями: $v_x = 0{,}2t^2$, $v_y = 3м/с$. Определить касательное ускорение в момент времени $t = 2{,}5с$.

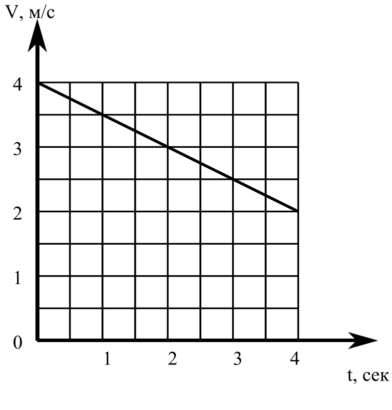
- 0.385
- 0.77
- 1.54
- 3.08

15. Определить радиус закругления трассы бобслея, если при скорости спуска $120км/ч$ нормальное ускорение саней $w_n = 2g$.

- 28.3
- 56.6
- 66.2
- 82.3

16. Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки по окружности радиуса $5м$. Определить нормальное ускорение точки в момент времени $3с$.

- 0.75
- 1.0
- 1.25
- 2.5



17. Самолет летит по круговой траектории, радиус которой $r = 10 км$. Определить скорость самолета в $км/ч$, если его нормальное ускорение $w_n = 6{,}25 м/с^2$.

- 300
- 600
- 900
- 1200

18. Дано уравнение движения точки по траектории $s = 0{,}6t^2$. Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ее координата $s = 30м$ и радиус кривизны траектории $\rho = 15м$.

- 1.20
- 2.40
- 3.60
- 4.80

19. Определить нормальное ускорение точки в момент времени, когда ускорение точки $w = 1{,}5м/с^2$, а угол между векторами ускорения и точки равен 65^o.

- 5.44
- -5.44
- 3.36
- 1.36

20. Ускорение точки $w = 1м/с^2$. Векторы ускорения и скорости образуют угол в 45^o. Определить скорость в $км/ч$, если радиус кривизны траектории $\rho = 300м$.

- 24.2
- 36.2
- 52.4
- 65.5

21. Точка движется по окружности радиуса $r = 9м$. Определить скорость точки в момент времени, когда касательное ускорение $w_\tau = 2м/с^2$, а вектор полного ускорения $\overline{w}$ образует угол 70^o с касательной к траектории.

- 2.56
- 3.89
- 5.23
- 7.03

22. Точка движется по окружности радиуса $r = 2м$. Нормальное ускорение точки меняется согласно закону $w_n = 2t^2$. Определить угол в градусах между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени $t = 1с$.

- 15
- 30
- 45
- 60

23. Даны уравнения движения точки в полярных координатах $\varphi = t, r = t^2$. Определить полярный радиус точки в момент времени, когда угол $\varphi = 180^\circ$.

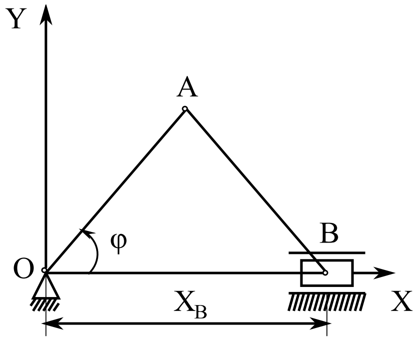
- 9.87
- 10
- 19.8
- 0.13

24. Даны уравнения движения точки в полярных координатах $\varphi = t, r = 0.5t^2$. Определить радиальную скорость точки в момент времени, когда угол φ=2.25рад.

- 15
- 1.5
- 0.15
- 150

Вариант 5

1. Положение кривошипа определяется углом (рад) $\varphi = 0{,}2t$. Найти координату ползуна x_B в момент времени $t = 3c$, если длины звеньев $OA = AB = 0{,}5м$.



- 0.825
- 8.25
- 4.5
- 10

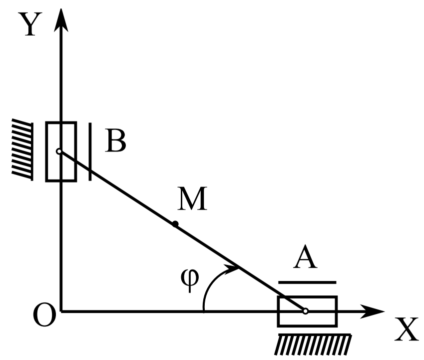
2. Заданы уравнения движения точки $x = 2t$, $y = t$. Определить время, когда расстояние от точки до начала координат достигнет $10м$.

- 8.94
- 4.47
- 5.96
- 2.98

3. Скорость движения точки $\bar{v} = 2t\bar{i} + 3\bar{j}$. Определить угол в градусах между вектором скорости и осью Ox в момент времени $t = 4c$.

- 20.6
- 5.15
- 60
- 30

4. Положение линейки AB определяется углом $\varphi = 0{,}5t$. Определить в $см/с$ проекцию скорости точки M на ось Ox в момент времени $t = 2c$, если расстояние $BM = 0{,}2м$.



- 8.41
- -8.41
- 16.82
- 0

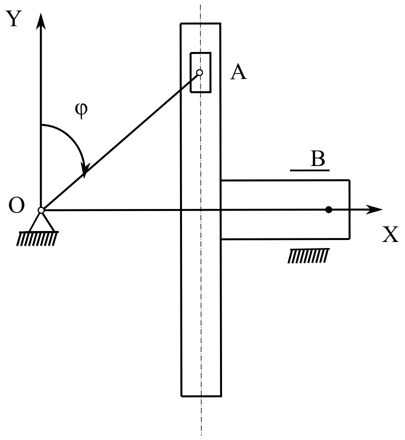
5. Точка движется по прямой с ускорением $w = 0{,}5м/с^2$. Определить, за какое время будет пройдено расстояние $9м$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.

- 6
- 4.5
- 18
- 9

6. Точка движется по прямой с постоянным ускорением $w = 0{,}3 м/с^2$. Определить начальную скорость, если через $6с$ скорость точки стала равной $3 м/с$.

- 1.2
- 0.9
- 0.09
- 0.12

7. Определить ускорение точки B в момент времени $t = 5с$, если длина кривошипа $OA = 20 см$, а закон изменения угла $\varphi = 4t$.



- -2.19
- 2.19
- 6.57
- 0

8. Скорость точки $\bar{v} = 0{,}9t\bar{i} + t^2\bar{j}$. Определить модуль ускорения точки в момент времени $t = 1{,}5с$.

- 6.29
- 3.13
- -3.13
- 0

9. Дано уравнение траектории точки $x = 0{,}1y^2$. Закон движения точки в направлении оси Oy выражается уравнением $y = t^2$. Определить компоненту ускорения w_x в момент времени $t = 2с$.

- 4.8
- 3.6
- 1.2
- 9.8

10. Даны уравнения движения точки: $x = 0{,}01t^3$, $y = 200 - 10t$. Определить ускорение в момент времени, когда точка пересекает ось Ox.

- 9.8
- 3.6
- 1.2
- 0

11. Точка движется по кривой со скоростью $\dot{s} = 0{,}5t$. Определить ее координату в момент времени $t = 10$, если при $t_0 = 0$ координата точки $s_0 = 0$.

- 5
- 25
- 45
- 10

12. Скорость точки задана уравнением $v = 0{,}2t$. Определить криволинейную координату s точки в момент времени $t = 10c$, если при $t_0 = 0$ координата $s_0 = 0$.

- 5
- 35
- 25
- 10

13. Точка движется с постоянным касательным ускорением $w_\tau = 0{,}5 м/с^2$. Определить криволинейную координату точки в момент времени $t = 4c$, если при $t_0 = 0$ скорость точки $v_0 = 0$, координата $s_0 = 0$.

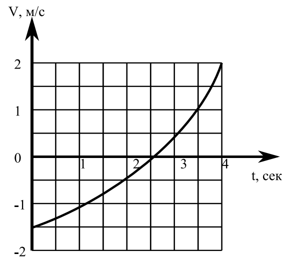
- 2
- 4
- 6
- 8

14. Касательное ускорение точки $w_\tau = 0{,}2t$. Определить момент времени t, когда скорость точки достигнет $10 м/с$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 2 м/с$.

- 8.94
- 4.47
- 1.49
- 0.87

15. Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки по окружности радиуса R. Найти время t, при котором нормальное ускорение $w_n = 0$.

- 1.5
- 2.0
- 2.5
- 3.0



16. Автомобиль движется по горизонтальной дороге с постоянной скоростью $v = 90 км/ч$. Определить радиус закругления дороги в момент времени, когда нормальное ускорение центра автомобиля $w_n = 2{,}5 м/с^2$.

- 150
- 200
- 250
- 300

17. Дано уравнение движения точки по траектории: $s = 0{,}1t^2 + 0{,}2t$. Определить ее нормальное ускорение в момент времени $t = 6c$. В положении, занимаемом точкой в этот момент времени, радиус кривизны траектории $\rho = 0{,}6 м$.

- 1.63
- -3.27
- 3.27
- 0

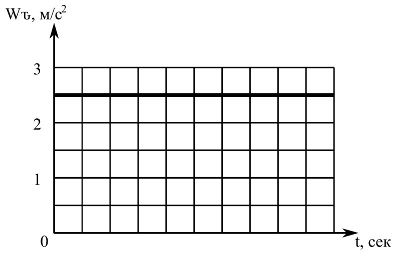
18. Точка движется по окружности, радиус которой $r = 30 см$, со скоростью $v = \ln t$. Определить нормальное ускорение точки в момент времени $t = 12c$.

- 10.3
- -10.3
- 20.6
- -20.6

19. Точка движется по окружности. Определить радиус окружности, если в момент времени, когда скорость $v = 10\text{м}/\text{с}$, вектор ускорения и вектор скорости, равный по модулю $1{,}2\text{м}/\text{с}$, образуют угол 30^o.

- 83.5
- 36
- 167
- 214

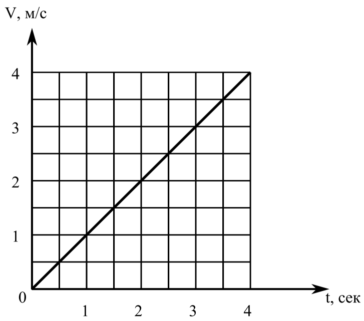
20. Дан график касательного ускорения $w_\tau = w_\tau(t)$ движения точки по окружности радиуса 9м. Определить полное ускорение в момент времени $t = 2\text{с}$, если при $t_0 = 0$ скорость точки $v_0 = 0$.



- 1.24
- 2.67
- 3.74
- 4.48

21. Дан график скорости $v = v(t)$ движения по окружности радиуса 8м. Определить полное ускорение в момент времени $t = 4\text{с}$.

- 2.24
- 3.56
- 5.45
- 6.82



22. Точка движется по окружности радиуса $r = 200м$ из состояния покоя с постоянным касательным ускорением $w_\tau = 1м/c^2$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 20c$.

- 2.24
- 4.48
- 5.88
- 6.42

23. Даны уравнения движения точки в полярных координатах $\varphi = 2\sin t, r = t^2$. Определить полярный угол φ в момент времени, когда полярый радиус равен 4м.

- 18.2
- 20.3
- 1.82
- 182

24. Даны уравнения движения точки в полярных координатах $\varphi = 0.5t^2, r = 0.5t$. Определить трансверсальную скорость точки в см/с в момент времени t_1, когда полярный радиус r = 2м.

- 4
- 8
- 16
- 32

Вариант 3

1. Ротор электродвигателя, начав вращаться равноускоренно, сделал за первые 5 с 100 оборотов. Определить угловое ускорение ротора.

- 50.3
- 41.6
- 36
- 25

2. Угловая скорость тела изменяется согласно закону ω = $2-8t^2$. Определить время t остановки тела.

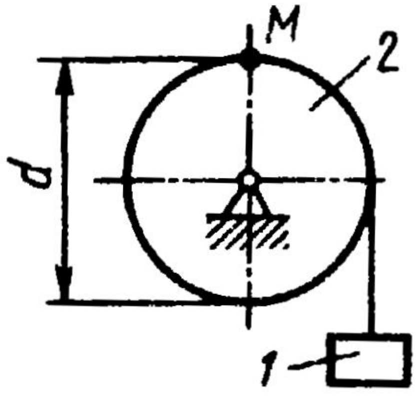
- 1
- 1.5
- 2
- 0.5

3. Деталь вращается вокруг неподвижной оси согласно закону φ = $2\pi\cos\pi t^2$. Определить угол φ поворота детали в момент времени t = 2 с.

- 3
- -4.56
- 6.28
- 9.32

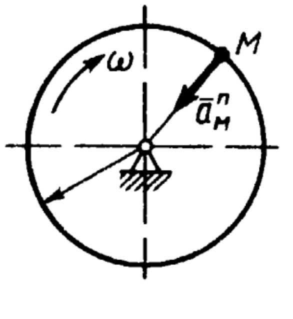
4. Груз 1 поднимается с помощью лебедки, барабан 2 которой вращается согласно закону $\varphi=5+t^3$. Определить скорость точки М барабана в момент времени $t=1c$, если диаметр $d=0,6\,м$.

- 6
- 2.4
- 5.6
- 1.8



5. Нормальное ускорение точки М диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно $6,4\,м/c^2$. Определить угловую скорость ω этого диска, если его радиус $R=0,4\,м$.

- 4
- 8
- 12.8
- 2.6

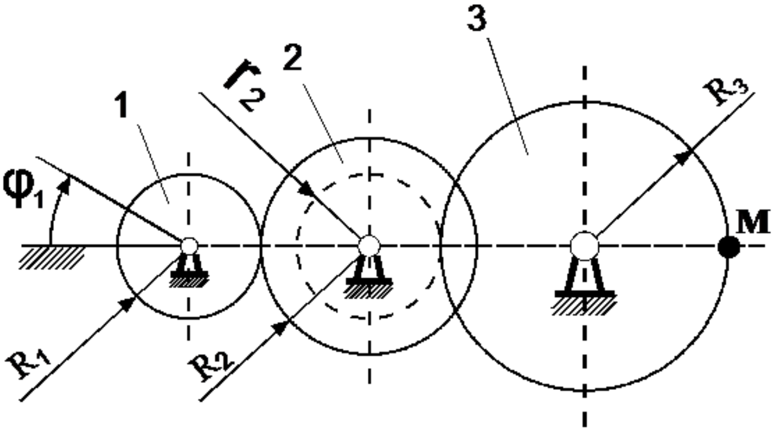


6. Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 1 + t$. Определить ускорение точки этого тела на расстоянии $r = 0,2\,м$ от оси вращения в момент времени $t = 1с$.

- 0.825
- 8.25
- 82.5
- 825

7. Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1 = 4t^2$. Определить скорость точки М колеса 3 в момент времени $t = 2с$, если радиусы колес $R_1 = 0,4\,м$, $R_2 = 0,8\,м$, $r_2 = 0,4\,м$, $R_3 = 1\,м$.

- 2.2
- 4
- 3.2
- 6

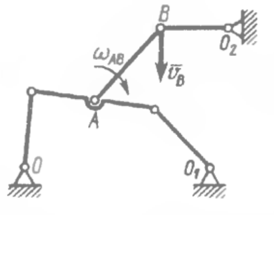


8. Зубчатое колесо 3 вращается равнопеременно с угловым ускорением $\varepsilon_3 = 8\,рад/с^2$. Определить путь, пройденный грузом 1 за промежуток времени $t = 3с$, если радиусы $R_2 = 0,8\,м$, $R_3 = 0,6\,м$, $r = 0,4\,м$. Груз 1 в начале движения находился в покое.

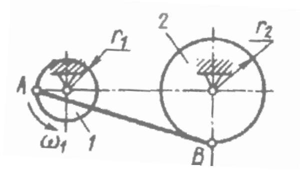
- 10.8
- 5.4
- 2.7
- 6

9. В данный момент времени скорость точки В равна 20 м/с, а угловая скорость звена АВ равна 10 рад/с. Определить расстояние от точки В до мгновенного центра скоростей звена АВ.

- 10
- 0.2
- 0.1
- 2

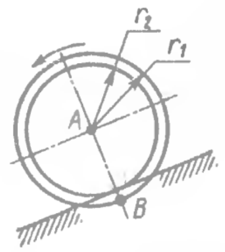


10. Шкив 1 радиуса $r_1 = 0.2$ м и диск 2 радиуса r_2=0.5м шарнирно соединены штангой АВ. Для положения, показанного на рисунке определить расстояние от точки В до мгновенного центра скоростей штанги.



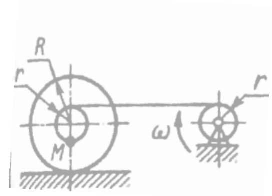
- 0.5
- 0.05
- 0.2
- 0.02

11. Скорость центра А ступенчатого колеса $v_A = 2$ м/с, радиусы $r_1 = 0.6$ м, r_2=0.5м. Определить скорость точки В.



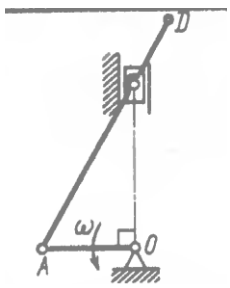
- 0.4
- 0.3
- 0.2
- 1.2

12. Угловая скорость барабана $\omega = 1$ рад/с. Определить скорость точки М ступенчатого катка, катящегося без скольжения, если радиусы r = 0.1 м, R=0.3 м.



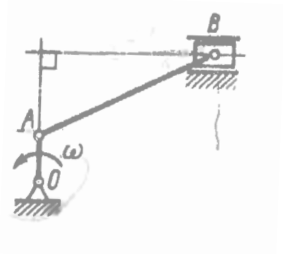
- 0.15
- 0.35
- 0.05
- 0.5

13. Определить угловую скорость кривошипа ОА кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если скорость точки D шатуна v_D =1 м/с, длина кривошипа ОА=0.1 м.



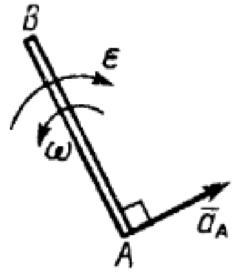
- 0.1
- 10
- 0.5
- 2

14. Определить угловую скорость кривошипа ОА в указанном положении, если скорость ползуна v_B = 2 м/с, а длина кривошипа ОА = 0.1 м.



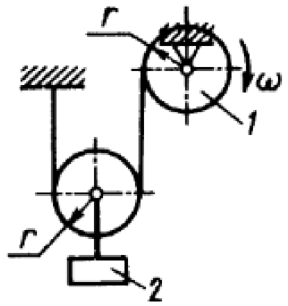
- 2
- 20
- 10
- 1

15. Стержень АВ движется в плоскости. Ускорение точки А в данный момент времени w_A = $1\,м/с^2$, угловая скорость ω = 2 рад/с, угловое ускорение $\varepsilon = 2 рад/с^2$. Определить ускорение точки В стержня, если длина АВ = 1 м.



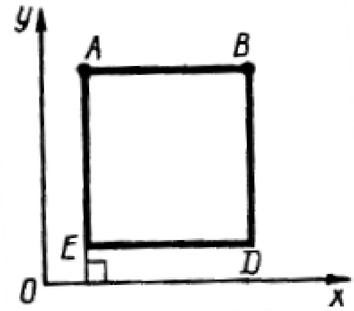
- 9
- 13
- 5
- 2

16. Барабан 1 вращается по закону $\varphi = 0{,}1t^2$. Определить ускорение груза 2, если радиус r = 0.2 м.



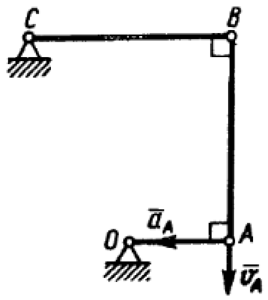
- 2.43
- 5.23
- 1.01
- 0.02

17. Квадратная пластина ABDE движется в плоскости $0xy$. Определить угловое ускорение пластины в указанном положении, если длина АВ = 0.5 м, а проекции ускорений точек А и В на ось 0y соответственно равны $w_{Ay} = 3\ м/с^2$, $w_{By} = 6\ м/с^2$.



- 6
- 2.46
- 14
- 4

18. В указанном на рисунке положении шарнирного четырехзвенника скорость и ускорение точки А кривошипа ОА равны: $v_A = 2$ м/с, w_A = 40 м/с$^{2.}$ Определить угловое ускорение звена ВС, если длины звеньев АВ = ВС = 0.5 м.



- 0
- 25
- 10
- 14

Вариант 4

1. Частота вращения маховика за время t_1 = 10 с уменьшилась в 3 раза и стала равной 30 об/мин. Определить угловое ускорение вала, если он вращался равнозамедленно.

- 0.328
- -0.628
- -1.212
- -1

2. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону φ = $4+2t^3$. Определить угловое ускорение тела в момент времени, когда угловая скорость ω = 6 рад/с.

- 6
- 12
- 4
- 18

3. При пуске ротор электродвигателя вращается согласно закону φ = $\pi t+\pi e^{-t}$. Определить угловую скорость ротора в момент времени t = 2 с.

- 2.72
- 4
- 6.58
- 3.88

4. Тело вращается равнопеременно с угловым ускорением $\varepsilon = 5\, рад/с^2$. Определить скорость точки на расстоянии $r = 0,2\, м$ от оси вращения в момент времени $t = 2\, с$, при $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 0$.

- 0
- 2
- 1
- 5

5. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2t^3$. В момент времени $t = 2\, с$ определить касательное ускорение точки тела на расстоянии от оси вращения $r = 0,2\, м$.

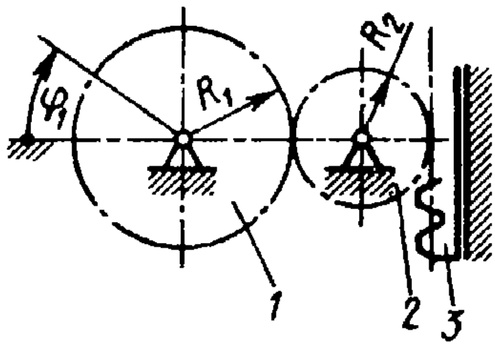
- 2.4
- 5.6
- 8.1
- 4.8

6. Тело вращается согласно закону $\varphi = 1+4t$. Определить ускорение точки тела на расстоянии $r = 0,2\, м$ от оси вращения.

- 64
- 32
- 6.4
- 3.2

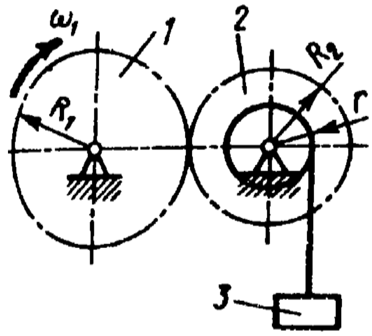
7. Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1 = 4t^2$. Определить ускорение рейки 3, если радиусы зубчатых колес $R_1 = 0,8\,м$, $R_2 = 0,4\,м$.

- 32
- 6.4
- 3.2
- 8



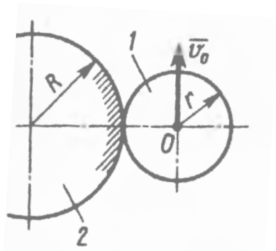
8. Угловая скорость зубчатого колеса 1 изменяется по закону $\omega_1 = 2t^2$. Определить ускорение груза 3 в момент времени $t = 2\,c$, если радиусы шестерен $R_1 = 1\,м$, $R_2 = 0,8\,м$ и радиус барабана $r = 0,4\,м$.

- 4
- 2.8
- 1.4
- 1



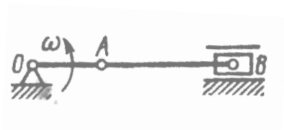
9. Цилиндр 1 радиуса r = 13см котится по неподвижному цилиндру 2 радиуса R = 20 см. Определить расстояние от центра цилиндра O до его мгновенного центра скоростей.

- 0.2
- 0.13
- 1.3
- 2



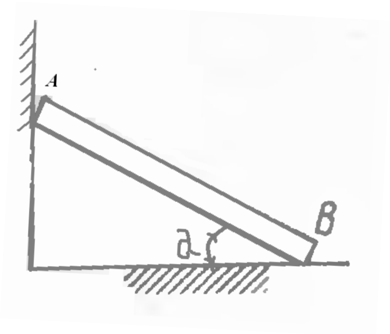
10. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω. Определить расстояние от точки A до мгновенного центра скоростей шатуна AB, если длина кривошипа OA=80мм, а длина шатуна AB=160мм.

- 0.8
- 0.08
- 1.6
- 0.16



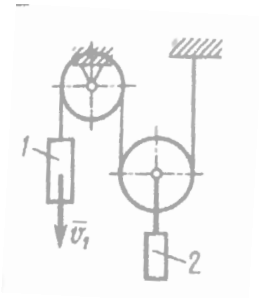
11. Брусок AB скользит, опираясь концами на стену и пол. При каком угле α в градусах скорость конца A будет в 2 раза больше скорости конца B?

- 2.65
- 4.95
- 49.5
- 26.5



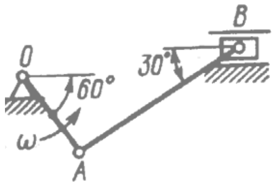
12. Скорость груза 1 $v_1 = 0.5$ м/с. Определить скорость груза 2.

- 1
- 0.5
- 0.25
- 2



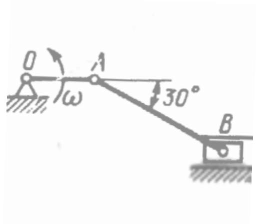
13. Определить угловую скорость шатуна AB кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка A имеет скорость 3 м/с. Длина шатуна AB= 1 м.

- 1.73
- 17.3
- 0.1
- 0.17



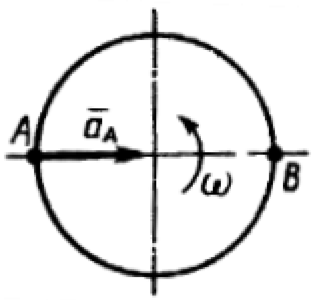
14. Определить угловую скорость шатуна AB кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка A имеет скорость v_A=3 м/с, а длина шатуна AB = 3м.

- 1.5
- 11.5
- 1.15
- 1.5

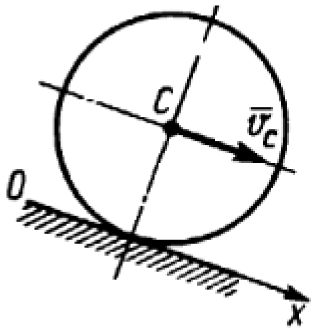


15. Тело находится в плоскопараллельном движении. Найти ускорение точки B, если ускорение точки A равно 3 м/с^2, угловое ускорение ε = 0, расстояние AB = 0.5 м.

- 2.5
- 4
- 10
- 7.56

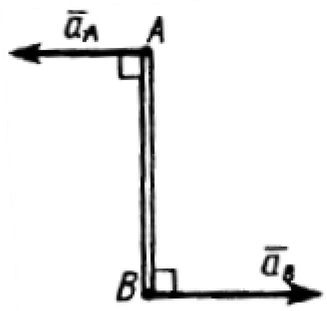


16. Скорость центра С колеса, катящегося без скольжения, постоянна. Какой угол в градусах с осью Ох составляет вектор ускорение точки, являющейся мгновенным центром скоростей колеса



- 90
- 30
- 45
- 60

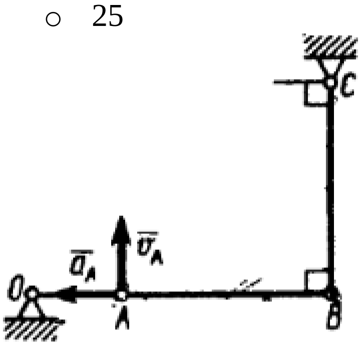
17. Стержень АВ длиной 50 см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки А и В стержня имеют ускорения $w_A = 2\, м/с^2$ и $w_B = 3\ м/с^2$. Определить угловое ускорение стержня.



- 18
- 10
- 4
- 8

18. В указанном на рисунке положении шарнирного четырехзвенника скорость и ускорение точки А кривошипа ОА равны: $v_A = 2$ м/с, w_A = 20 м/с$^{2.}$ Определить ускорение точки В шатуна АВ, если длины АВ = ВС = 0.8 м.

- 40
- 15
- 32
- 25



Вариант 5

1. Угловая скорость маховика изменяется согласно закону ω = $\pi(6t - t^2)$. Определить время t > 0 остановки маховика.

- 7
- 3
- 4
- 6

2. Тело вращается неподвижной оси согласно закону φ = $t^3 + 2$. Определить угловую скорость тела в момент времени, когда угол поворота φ = 10 рад.

- 12
- 9
- 6
- 20

3. При вращении ротора угловая скорость меняется согласно закону $\omega = 6\pi(4t + e^{-0,01t}\sin \pi t)$. Определить угловое ускорение при $t = 100$ с.

- 97.2
- 124.74
- 89.99
- 72.36

4. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = t^2$. Определить скорость точки тела на расстоянии $r = 0,5$ м от оси вращения в момент времени, когда угол поворота $\varphi = 25$ рад.

- 25
- 0.1
- 5
- 0.5

5. Угловая скорость тела изменяется по закону $\omega = 2t^3$. Определить касательное ускорение точки этого тела на расстоянии $r = 0,2\,м$ от оси вращения в момент времени $t = 2\,c$.

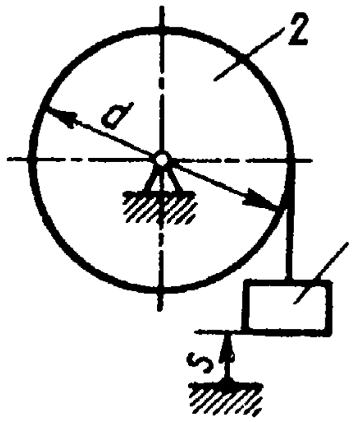
- 48
- 4.8
- 0.48
- 4

6. В данный момент времени ротор электродвигателя вращается с угловой скоростью $\omega = 3\pi$ и угловым ускорением $\varepsilon = 8\pi$. Определить ускорение точки ротора на расстоянии $0,04\,м$ от оси вращения.

- 6.28
- 3.69
- 5.12
- 8.67

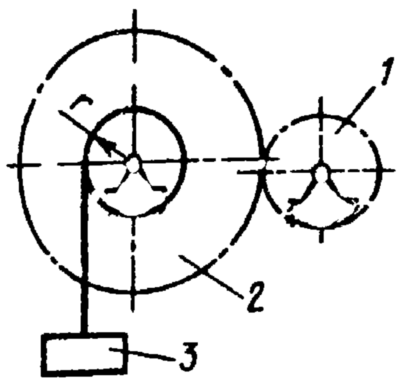
7. Груз 1 поднимается с помощью лебедки 2. Закон движения груза имеет вид: $s = 7 + 5t^2$, где s – в см. Определить угловую скорость барабана в момент времени $t = 3c$, если его диаметр $d = 50 см$.

- 1.2
- 6
- 10
- 2



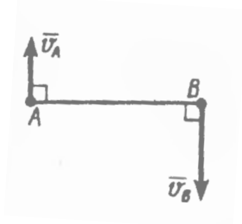
8. Какой должна быть частота вращения (об/мин) n_1, шестерни 1, чтобы тело 3 двигалось с постоянной скоростью $\upsilon = 90 см/с$, если числа зубьев шестерен $z_1 = 26$, $z_2 = 78$ и радиус барабана $r = 10 см$?

- 138
- 565
- 258
- 92



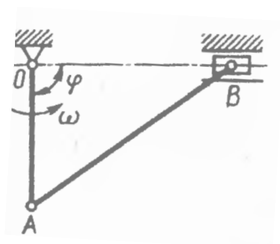
9. Стержень АВ длиной 60 см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки А и В стержня имеют скорости $v_A = 4$ м/с, $v_B = 2$ м/с. Определить расстояние от точки А до мгновенного центра скоростей.

- 0.4
- 0.6
- 0.2
- 0.3



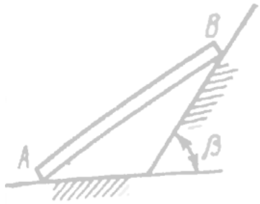
10. Кривошип ОА механизма, вращаясь равномерно, образует в данный момент времени с направлением ОВ угол $\varphi = 90^\circ$. Определить расстояние от мгновенного центра скоростей шатуна АВ до ползуна В.

- 0.5AB
- 2AB
- 0
- ∞



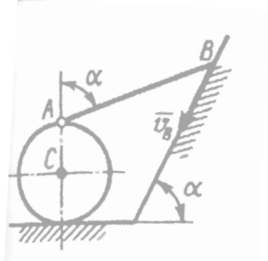
11. Брусок АВ скользит, опираясь концами на горизонтальную и наклонную плоскости. При каком значении в градусах угла между бруском и горизонтальной плоскостью модули скоростей его концов будут одинаковыми, если угол $\beta = 60^\circ$.

- 30
- 90
- 45
- 120



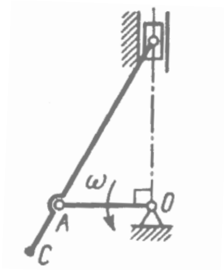
12. Конец В стержня АВ скользит со скоростью $v_B = 1$ м/с по наклонной плоскости. Другой конец А шарнирно связан с роликом, который катится без скольжения. Определить скорость центра С ролика, ели угол $\alpha = 60^\circ$.

- 5
- 0.5
- 1
- 2



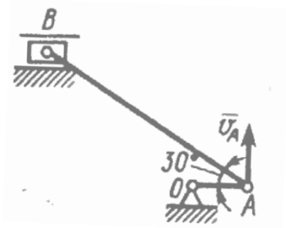
13. Определить угловую скорость кривошипа ОА в указанном положении, если скорость точки С шатуна v_c =4м/с, длина кривошипа ОА=0.2

- 20
- 40
- 0.4
- 0.2



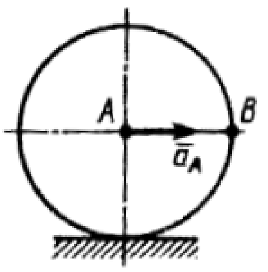
14. Определить угловую скорость шатуна АВ кривошипно-ползунного механизма в указанном положении, если точка А имеет скорость v_A =3 м/с, а длина шатуна АВ = 1м.

- 3.46
- 3
- 1
- 1.46



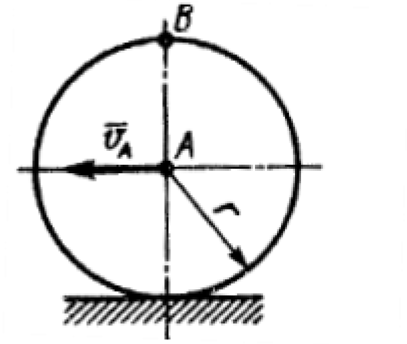
15. Колесо катится без скольжения. Определить ускорение точки В колеса в тот момент, когда скорость точки А равна нулю, а ускорение $w_A = 2\, м/с^2$.

- 1.68
- 2
- 3
- 2.83



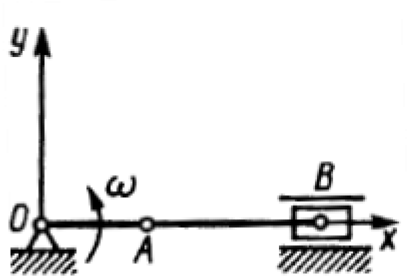
16. Колесо радиуса r = 0.1 м катится без скольжения. Определить ускорение точки B, если центр колеса A перемещается с постоянной скоростью $v_A = 2$ м/с.

- 14
- 40
- 54.33
- 35



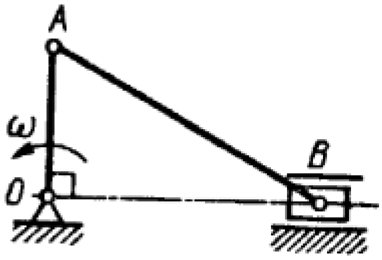
17. Кривошип OA равномерно вращается с угловой скоростью ω = 10 рад/с. Определить угловое ускорение шатуна AB, если в данный момент времени механизм занимает положение, показанное на рисунке

- 25
- 10
- 0
- 5



18. Определить ускорение ползуна B кривошипно-ползунного механизма в данном положении, если угловая скорость кривошипа ω = 1 рад/с = const; длины звеньев OA = 3 м; AB = 0.5 м.

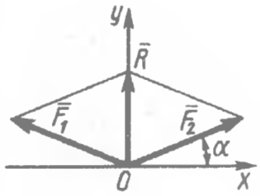
- 0.225
- 1.42
- 0.114
- 0.06



Вариант 3

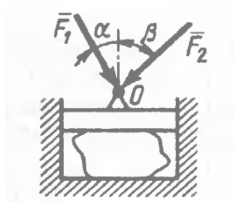
1. Равнодействующая $\vec{R}$ двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 15H$ направлена по оси Оу и равна модулю 10Н. Определить в градусах угол a, образованный вектором силы F_1 с положительным направлением оси Ох.

- 19.5
- 56.3
- 9.24
- 2



2. На пресс в точке О действуют силы $F_1 = 5H$ и $F_2 = 7H$. Линии действия которых находятся в плоскости чертежа. Определить модуль вертикальной силы, сжимающей материал, если заданы углы $\alpha = 30^0$, β= 45^0.

- 19.5
- 9.28
- 44.1
- 0.402



3. Плоская система трех сходящихся сил $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$ находятся в равновесии. Заданы модули сил $F_1 = 3H$ и $F_2 = 2H$, а также углы, образованные векторами сил $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ с положительным направлением горизонтальной оси Ох, соответственно равные $a_1 = 15^0$ и $a_2 = 45^0$. Определить модуль силы $\vec{F_3}$.

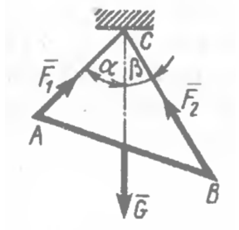
- 4.62
- 4.84
- 3.22
- 7.35

4. Известны проекции на оси координат R_x=18Н и R_y=24Н равнодействующей $\vec{R}$ плоской системы сходящихся сил с, $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$, а также проекции сил $\vec{F_2}$ и $\vec{F_3}$ на эти же оси: $F_{2x} = -9H$, $F_{2y} = -7$, $F_{3x} = 12H$, $F_{3y} = 0H$. Определить модуль силы $\vec{F_1}$.

- 4.62
- 3.61
- 34.4
- 7.35

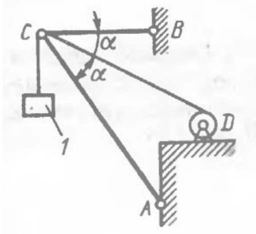
5. Определить вес балки АВ, если известны силы натяжения веревок F_1=120Н и F_2=80 Н. заданы углы $\alpha = 45^0$ и β= 30^0 между вертикалью и веревками АС и ВС соответственно.

- 10
- 154
- 7.76
- 17.32



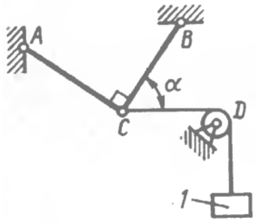
6. Определить реакцию стержня AC, удерживающего в равновесии груз 1 весом 14 Н с помощью цепи, намотанной на барабан D и перекинутой через блок C, если угол $\alpha = 30^0$.

- 10
- -24.8
- -24.2
- 17.32



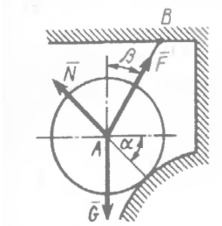
7. Два стержня AC и BC соединены шарнирно в точке C, к которой через блок D подвешен груз 1 весом 12 Н. Определить реакцию стержня BC, если угол $\alpha = 60^0$.

- -6
- 8.76
- -9.24
- 10.33



8. Цилиндр весом $\vec{G}$ удерживается в равновесии с помощью веревки AB. Нормальная реакция опорной поверхности N=40 Н. Определить натяжение веревки $\vec{F}$, если известны углы $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$.

- 40
- 56.6
- 23.1
- 80

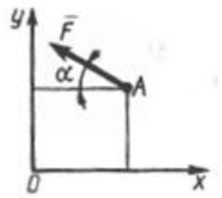


9. Вес однородной горизонтальной балки AB равен 180 Н. Задан угол $\alpha = 45^0$. Определить реакцию шарнира A.

- 90
- 86.6
- 127
- 143

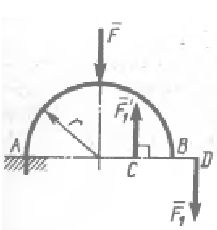
10. Сила F = 420 Н, приложенная к точке A, лежит в плоскости Oxy. Определить момент силы относительно точки O, если координаты $x_A = 0,2$ м, $y_A = 0,3$ м и угол $\alpha = 30^\circ$.

- 151
- 155
- 176
- 132



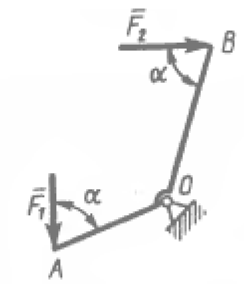
11. На арку AB действует пара сил $(\overline{F_1}, \overline{F_1'})$ и сила $\overline{F}$. Определить сумму их моментов относительно точки A, если силы F = 4 Н, F_1 = 2 Н, радиус r = 2 м, плечо CD = 1.5 м.

- -10.3
- -8.7
- -12.4
- -11.0

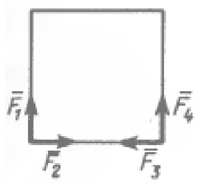


12. На рычаг, имеющий неподвижную ось О, действуют силы $F_1 = 6$ Н и $\overline{F_2}$. Определить модуль силы $\overline{F_2}$, при которой рычаг находится в покое, если угол $\alpha = 70^\circ$, длин АО = 0.3 м, ВО = 0.4 м.

- 5.5
- 4.5
- 6.3
- 5.2

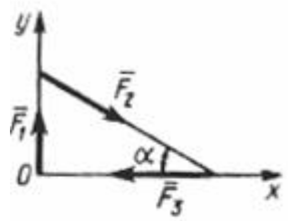


13. К вершинам квадрата приложены четыре силы $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$ Н. Определить модуль равнодействующей этой системы сил.



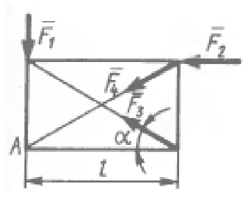
- 2.0
- 3.5
- 4.0
- 1.0

14. К вершинам прямоугольного треугольника приложены силы $F_1 =$ 3 Н, $F_2 = 6$ Н, $F_3 =$ 14 Н. Определить значение угла α в градусах, при котором главный вектор данной системы сил параллелен оси Ох.



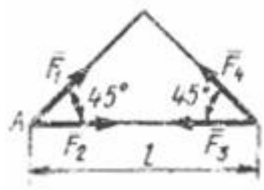
- 40.0
- 50.0
- 60.0
- 30.0

15. К прямоугольнику приложены силы $F_1 =$ 4 Н, $F_2 = 5$ Н, $F_3 =$ 8 Н, $F_4 = 2$ Н. Определить главный момент заданной системы сил относительно точки А, если расстояние l = 1 м, угол $\alpha = 30^\circ$.



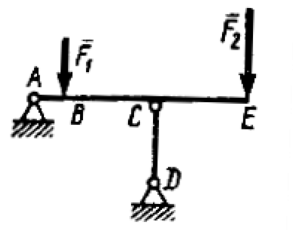
- 7.34
- 6.89
- 8.33
- 5.72

16. На каком кратчайшем расстоянии от точки А проходит линия действия равнодействующей системы сил, если $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 1$Н, расстояние l = 0.1 м?



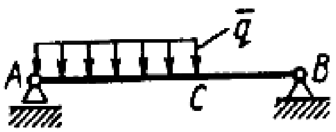
- 0.04
- 0.06
- 0.05
- 0.07

17. Балка AE шарнирно закреплена в точке A и опирается на вертикальный стержень CD. Определить в кН усилие. В стержне CD, если длина AB = 1 м, BC = CE = 2 м, а силы F_1 = 2 кН и F_2 = 4 кН вертикальны.



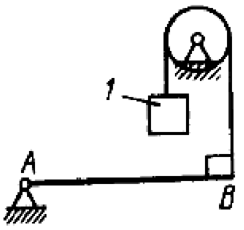
- 4
- 1.701
- 7.33
- 3.33

18. Какой должна быть длина участка AC с действующей на него распределенной нагрузкой интенсивностью q = 5 кН/м, для того чтобы реакция опоры B была равна 10 кН, если длина балки AB = 9 м?



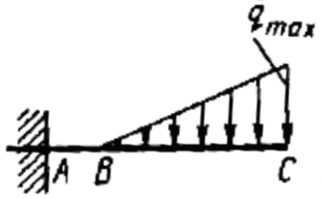
- 4
- 3
- 7
- 6

19. Определить вес груза 1, необходимый для того, чтобы однородная балка AB весом 340 Н в положении равновесия была горизонтальна.



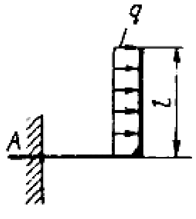
- 170
- 200
- 165
- 160

20. Определить интенсивность q_{max} распределенной нагрузки, при которой момент в заделке A равен 270 Н/м, если размеры AB = 1 м, AC= 4 м.



- 60
- 70
- 100
- 75

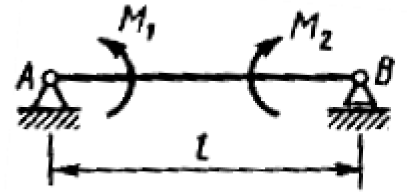
21. При какой интенсивности распределенной нагрузки q момент пары, возникающей в заделке. M_A = 300 Н · м, если расстояние l = 1 м?



- 125
- 400
- 350
- 325

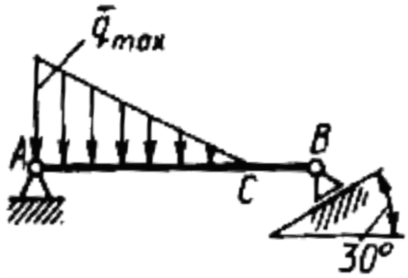
22. На балку, длина которой l = 3 м, действуют пары сил с моментами M_1 = 2 кН· м и M_2 = 8 кН· м. Определить в кН модуль реакции опоры В.

- 3.1
- 4.6
- 2.0
- 4.0



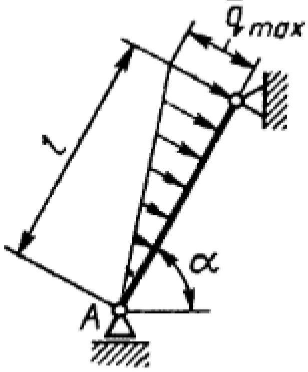
23. Определить интенсивность q_{max} распределенной нагрузки, при которой реакция шарнира В равна 346 Н, если размеры АВ = 8 м, АС = 6 м.

- 225
- 400
- 450
- 325



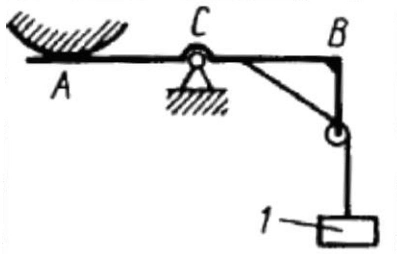
24. Определить реакцию опоры А, если длина балки l = 0.3 м, интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 20 Н/м, угол α = 60° .

- 4.5
- 5.6
- 2.0
- 7.8



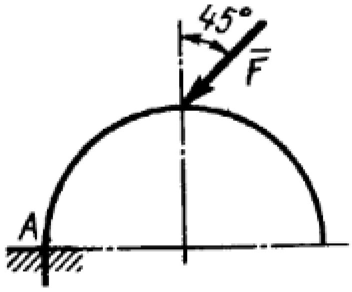
25. Определить горизонтальную составляющую реакции опоры С горизонтальной балки АВ, если к ней подвешен груз 1 весом 18 кН.

- 0
- 54
- 35
- 106



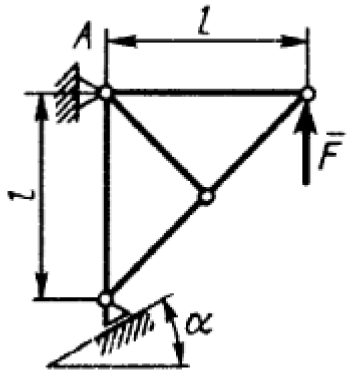
26. Арка, имеющая форму полуокружности, жестко заделана в точке А. Определить момент в заделке, если сила F = 100 Н.

- 75
- 100
- 0
- -100



27. На ферму действует вертикальная сила F. При каком значении в градусах угла α реакция опоры $R_A = 2F$?

- 45
- 60
- 90
- 30

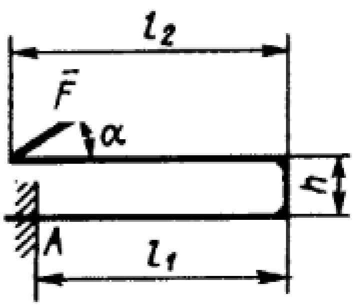


28. Консольная балка нагружена парами сил с моментами M_1 = 1790 Н· м и M_2 = 2135 Н· м. Определить момент в заделке.

- 480
- -345
- -480
- 246

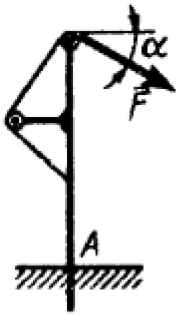
29. Определить в кН· м момент в заделке А, если сила F = 80 кН, угол α = 30° , расстояния l_1 = 1.8 м, l_2 = 2 м, h = 0.4 м.

- -34.2
- 35.7
- 25
- 30



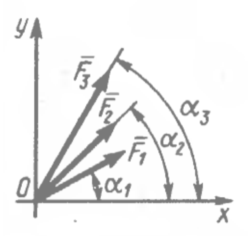
30. Определить в кН вертикальную составляющую реакции заделки А консольной балки, если сила натяжения троса F = 10 кН и угол $\alpha = 30^{\circ}$.

- 0
- 5
- 10
- 2.5



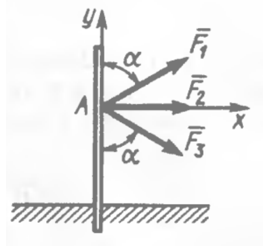
Вариант 4

1. Определить модуль равнодействующей сходящихся сил $F_1 = 10H$, $F_2 = 15H$ и $F_3 = 20H$, если известны углы, образованные векторами этих сил с осью Ox: $a_1 = 30^0$, $a_2 = 45^0$ и $a_3 = 60^0$.



- 19.5
- 56.3
- 44.1
- 2

2. К столбу в точке А приложена плоская система сходящихся сил $F_1 = F_2 = F_3 = 10H$. Определить сумму проекций заданных сил на ось Ax, если угол $\alpha = 60^0$.



- 27.3
- 9.28
- 44.1
- 0.402

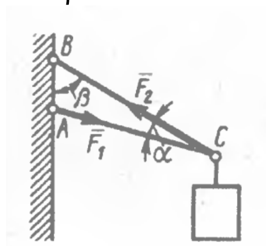
3. Задана проекция R_x=5 Н равнодействующей двух сходящихся сил $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ на горизонтальную ось Ox. Проекция силы $\vec{F_1}$ на эту же ось $F_{1x} = 7H$. Определить алгебраическое значение проекции на ось Ox силы $\vec{F_2}$.

- -2
- 2
- 12
- -12

4. Определить в градусах угол между вектором равнодействующей $\vec{R}$ системы сил (Н) $\vec{F_1}$ =3 $\vec{i}$ +2 $\vec{j}$ и $\vec{F_2}$ =5 $\vec{i}$ +7 $\vec{j}$ и положительным направлением оси Oy.

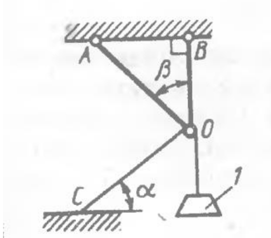
- 4.62
- 3.61
- 34.4
- 7.35

5. Груз удерживается в равновесии двумя стержнями АС и ВС, шарнирно соединенными в точках А. В и С. Стержень ВС растянут силой F_2=45 Н, а стрежень АС сжат силой F_1=17 Н. Определить вес груза, если заданы углы α =15^0 и β= 60^0.



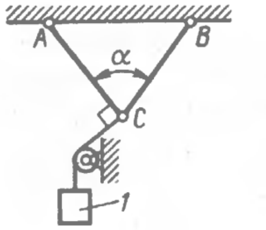
- 10
- 18.1
- 7.76
- 17.32

6. Груз 1 весом 20 Н, подвешенный на канате, удерживается в равновесии двумя стержнями ОА и ОВ, расположенными в вертикальной плоскости. Другой конец каната закреплен в точке С. Определить реакцию стержня ОА, если углы $\alpha = 40^0$, β= 45^0 .



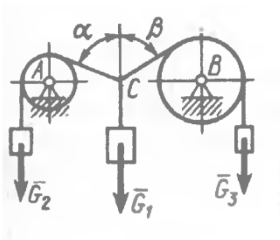
- 10
- -24.8
- -24.2
- -21.7

7. Груз 1 весом 6 Н удерживается в равновесии двумя стержнями Аси ВС равной длины, соединенными шарнирно в точке С. Определить реакцию стержня АС, если угол $\alpha = 60^0$, усилие в стержне ВС равно 6.94 Н.



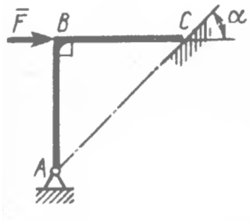
- -6
- 8.76
- -9.24
- -3.45

8. Грузи весом $\overrightarrow{G_1}$, $\overrightarrow{G_2}$ и $\overrightarrow{G_3}$ находятся в равновесии. Известны вес груза G_2 =55 Н и углы $\alpha = 75^0$, β= 60^0 . Определить вес груза $\overrightarrow{G_3}$.



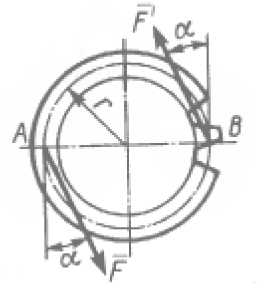
- 40
- 56.6
- 61.3
- 80

9. Изогнутый стержень АВС прикреплен к полу посредством шарнира А, а другой его конец С свободно опирается на гладкую поверхность, образующую угол $\alpha = 45^0$. Определить реакцию шарнира А, если на стержень действует сила F=10Н.



- 5
- 7.07
- 8.8
- 10

10. На зубчатое колесо действует пара сил. Определить момент этой пары, если силы $F = F' = 100$ Н действует на точки А и В, расположенные на окружности радиуса r = 0.04 м, и образуют угол $\alpha = 20^\circ$ с касательными к этой окружности.

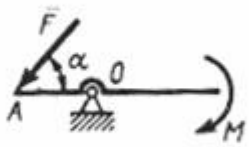


- 6.43
- 7.52
- 5.54
- 8.46

11. В одной плоскости расположены три пары сил. Определить момент пары сил M_3, при котором эта система находится в равновесии, если моменты $M_1 = 510\,\text{Н} \cdot \text{м}$, $M_2 = 120$ $\text{Н} \cdot \text{м}$.

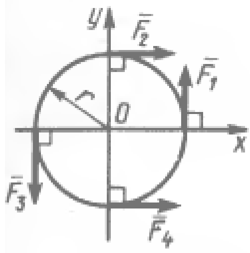
- 450
- 340
- 390
- 520

12. На рычаг с неподвижной осью O действуют пара сил с моментом M = 3 $\text{Н} \cdot \text{м}$ и сила $\overline{F}$. Определить модуль силы $\overline{F}$, при которой рычаг находится в равновесии, если угол $\alpha = 45^\circ$, длина AO = 0.3 м.



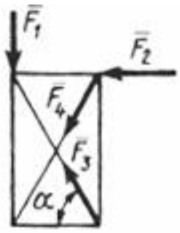
- 14.1
- 15.1
- 13.4
- 16.5

13. За центр приведения данной системы сил выбрана точка, расположенная на оси Oy, в которой главный момент равен нулю. Определить ординату этой точки, если $F_1 = F_2 = F_3 = 1$ Н, $F_4 = 2$ Н, радиус r = 1 м.



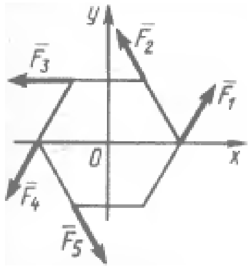
- -0.5
- -1.0
- -2.0
- -1.5

14. К прямоугольнику приложены четыре силы по 10 Н каждая. Определить модуль главного вектора заданной системы сил, если угол $\alpha = 60^\circ$.



- 23.5
- 22.4
- 24.3
- 20.8

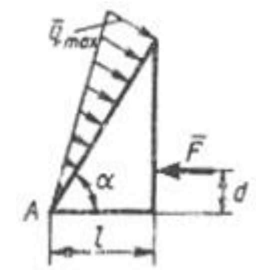
15. К правильному шестиугольнику приложены пять равных по модулю сил. Определить в градусах угол между главным вектором этой системы сил и осью Ox.



- 200
- 220
- 190
- 180

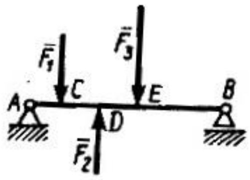
16. На каком расстоянии d нужно приложить силу $F = 100$ Н, для того чтобы линия действия равнодействующей этой силы и распределенной нагрузки интенсивностью $q_{\max}$ = 3 Н/м прошла через точку А, если расстояние l = 10 м, угол $\alpha = 60^{\circ}$?

- 3.0
- 4.0
- 5.0
- 6.0



17. На балку AB действуют вертикальные силы F_1 = 1 кН, F_2 = 2 кН и F_3 = 3 кН. Определить в кН реакцию опоры B, если расстояния AC = CD = DE = 1 м, BE = 2 м.

- 1.2
- 2
- 3.1
- 0.4

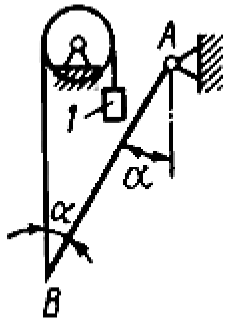


18. Определить реакцию опоры C, если интенсивность распределенной нагрузки $q_{\max}$ = 120 Н/м, размеры AB = 4.5 м, BC = 1.5 м.

- 100
- 70
- 135
- 121.23

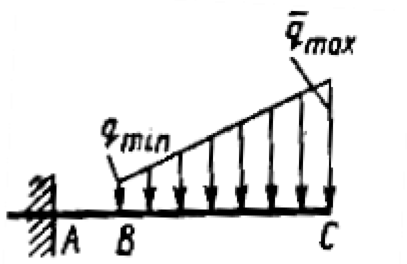
19. Вес однородной балки AB равен 140 Н. Определить вес груза 1, необходимый для того, чтобы балка AB находилась в равновесии в указанном положении.

- 45
- 94
- 70
- 100



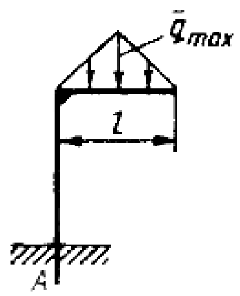
20. Определить момент в заделке А, если интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 30 Н/м, q_{min} =10 Н/м, а размеры АВ = 2 м, ВС = 6 м.

- 250
- 100
- 132
- 660



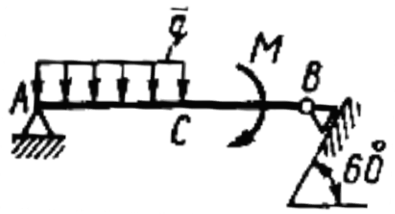
21. Определить расстояние l, при котором реакция в заделке R_A = 2 Н, если интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 1 Н/м.

- 2.2
- 4.0
- 3.1
- 6.9



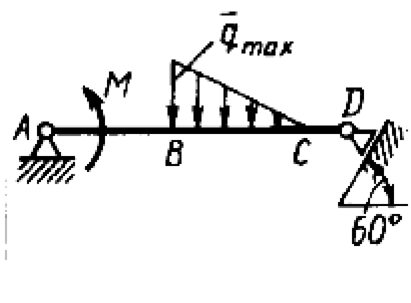
22. Определить момент М пары сил, при котором реакция опоры В равна 250 Н, если интенсивность распределенной нагрузки q = 150 Н/м, размеры АС = СВ = 2 м.

- 200
- 100
- 155
- 325



23. Определить реакцию опоры D в кН, если момент пары сил М = 13 кН· м, интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 8 кН/м, размеры АВ = ВС = 3 м, CD = 1 м.

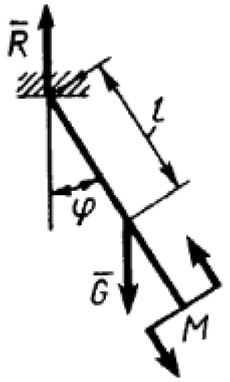
- 12.6
- 9
- 8.46
- 10



24. Маятник находится в равновесии под действием пары сил с моментом M = 0.5 Н· м

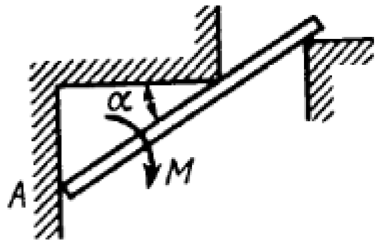
и второй пары силы, образованной весом $\overline{G}$ и опорной реакцией $\overline{R}$. Найти значение угла φ в градусах, если G = 10 Н и расстояние l = 0.1 м.

- 45
- 30
- 15
- 60



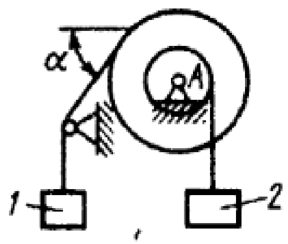
25. Стержень удерживается под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Определить реакцию опоры A, если момент пары M = 25 кН· м.

- 25
- 50
- 10
- 0



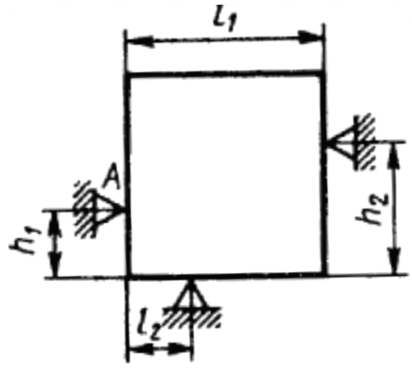
26. Грузы 1 и 2 висят на канатах, намотанных на ступенчатый барабан. Определить в кН горизонтальную составляющую реакции шарнира A, если угол $\alpha = 60^\circ$, вес груза 1 равен 30 кН. Система находится в равновесии.

- 15.0
- 34.2
- 23
- 0



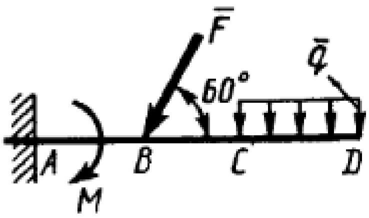
27. Однородная квадратная пластина весом 1 Н закреплена в вертикальной плоскости на трех опорах. Определить реакцию опоры A, если размеры $l_1 = 0.3$ м, $l_2 = 0.1$ м, $h_1 = 0.1$ м, $h_2 = 0.2$ м.

- 0.75
- 1.14
- 0.50
- 1



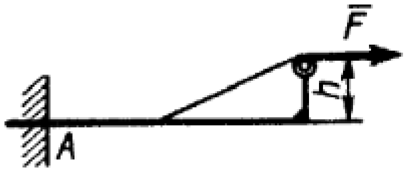
28. К балке AD приложена пара сил с моментом M = 200 Н· м, распределенная нагрузка интенсивностью q = 20 Н/м и сила $\overline{F}$. Какой должна быть эта сила, для того чтобы момент в заделке A равнялся 650 Н· м, если размеры AB = BC = CD = 2 м?

- -321
- 144
- -144
- 248



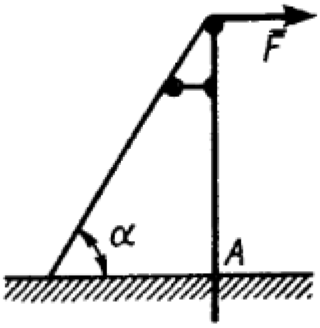
29. Определить в кН· м момент в заделке A консольной балки, если сила натяжения троса F = 50 кН и расстояние h = 0.5 м

- -23
- 25
- 14.8
- -14.8



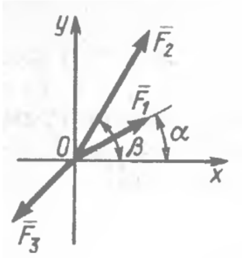
30. Определить в кН вертикальную составляющую реакции заделки A консольной балки, если сила натяжения троса F = 4 кН и угол α = 60° .

- 4
- 5.54
- 2
- 3.46



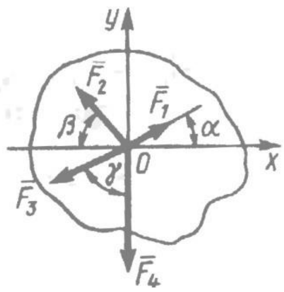
Вариант 5

1. Какую по модулю силу $\overrightarrow{F_3}$ надо приложить к сходящимся силам $F_1 = 2H$ и $F_2 = 4H$, образующим с осью Ох углы $a = 30^0$ и β=60^0, чтобы равнодействующая этих трех сил равнялась нулю?



- 19.5
- 6.62
- 44.1
- 2

2. На твердое тело в точке О действует плоская система сходящихся сил $F_1 = 1H$,$F_2 = 2H$, $F_3 = 3H$, $F_4 = 4H$. Определить сумму проекций заданных сил на ось Оу, если заданы углы $\alpha = 30^0$, β= 45^0, ϒ= 60^0.



- 27.3
- 9.28
- -3.22
- 0.402

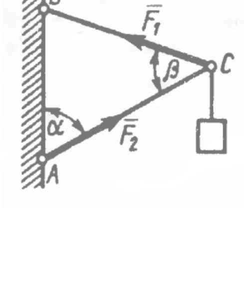
3. Определить модуль равнодействующей сходящихся сил $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, если известны их проекции на декартовы оси координат $F_{1x} = 3H$, $F_{1y} = 6H$, $F_{2x} = 5H$, $F_{2y} = 4H$.

- 4.62
- 12.8
- 3.22
- 7.35

4. Определить, находится ли плоская система трех сходящихся сил в равновесии, если известны проекции сил на оси координат: $F_{1x} = 10H$; $F_{1y} = 2H$; $F_{2x} = -4H$; $F_{2y} = 3H$; $F_{3x} = -6H$; $F_{3y} = -5H$.

- Нет
- Да

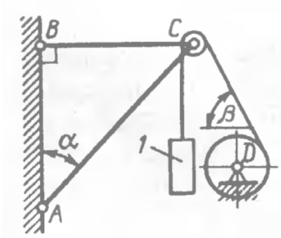
5. Шарнирный трехзвенник АВС удерживает в равновесии груз, подвешенный к шарнирному болту С. Под действием груза стержень АС сжат силой F_2=25 Н. заданы углы $\alpha = 60^0$ и β= 45^0. Считая стержни АС и ВС невесомыми, определить усилие в стержне ВС.



- 10
- 18.1
- 48.3
- 17.32

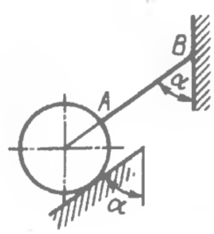
6. Груз 1 весом 10 Н подвешен с помощью каната, перекинутого через блок C и намотанного на барабан лебедки D. Определить усилие в стержне AC, если углы $\alpha = 45^0$, β= 60^0

- o -26.4
- o -24.8
- o -24.2
- o -21.7



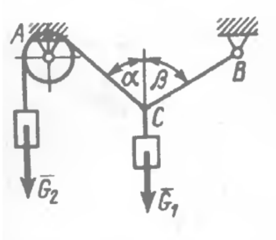
7. Однородный шар весом 12 Н удерживается в равновесии на гладкой наклонной плоскости с помощью веревки AB. Определить давление шара на плоскость, если угол $\alpha = 60^0$.

- o 6
- o 8.76
- o 9.24
- o 10.4



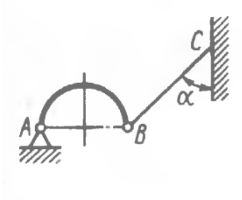
8. Два груза весом $\vec{G_1}$, и $\vec{G_2}$ находятся в равновесии. Определить натяжение веревки BC, если известны вес груза G_2 =90 Н и углы $\alpha = 45^0$, β=60^0.

- o 73.5
- o 56.6
- o 61.3
- o 80



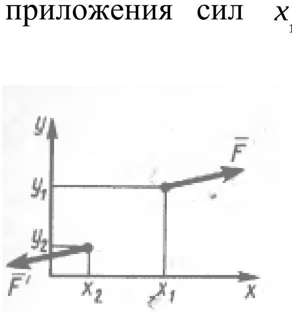
9. Один конец A криволинейного бруса AB весом 5 Н закреплен в шарнире A, а к другому концу B привязана веревка BC. Определить реакцию шарнира A, если угол $\alpha = 45^0$.

- o 5
- o 2.5
- o 3.54
- o 4.33

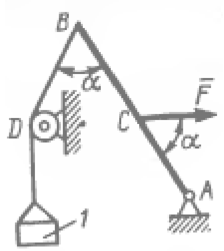


10. Определить момент пары сил $(\overline{F}, \overline{F'})$, если силы заданы проекциями $F_x = -F_x' = 7,5$ Н, $F_y = -F_y' = 2,5$ Н и даны координаты точек приложения сил $x_1 = 0,1$ м, $y_1 = 0,15$ м, $x_2 = 0,015$ м, $y_2 = 0,02$ м.

- o -0.634
- o -0.845
- o -0.762
- o -0.598

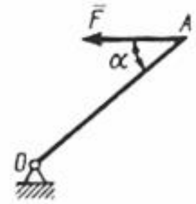


11. К стержню AB, закрепленному в шарнире A, привязана веревка BD с грузом 1. Определить силу $\overline{F}$, необходимую для того, чтобы удержать стержень в равновесии, если угол $\alpha = 60^{\circ}$, вес груза 2 Н, расстояние AC = BC.



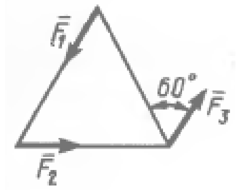
- 4.0
- 3.5
- 5.0
- 5.5

12. Однородный стрежень OA, находящийся в вертикальной плоскости, шарнирно закреплен в точке O. Определить модуль горизонтальной силы $\overline{F}$, при которой стержень находится в равновесии, если угол $\alpha = 45^{\circ}$, вес стержня 5 Н.



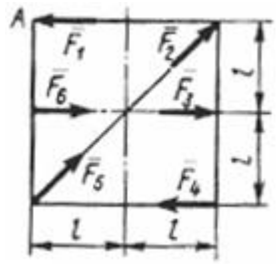
- 2.3
- 1.5
- 4.5
- 2.5

13. К вершинам равностороннего треугольника приложены силы $F_1 = F_2 = F_3 = 1$ Н. Определить модуль равнодействующей системе сил.



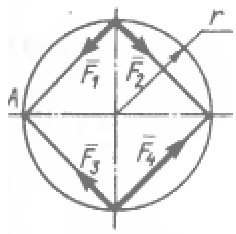
- 1.0
- 2.0
- 3.0
- 4.0

14. К квадрату приложены шесть сил по 6 Н каждая. Определить главный момент заданной плоской системы сил относительно точки A, если расстояние l = 0.5 м.



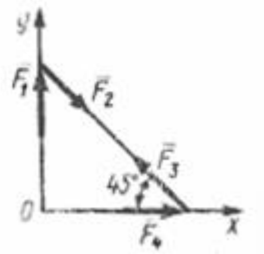
- 8.48
- 6.44
- 9.34
- 7.76

15. Задана плоская система сил $F_1 = F_2 = F_3 = 2$ Н, $F_4 = 10$ Н. Определить главный момент этой системы сил относительно точки A, если радиус r = 1 м.



- 10.3
- 11.3
- 12.6
- 9.4

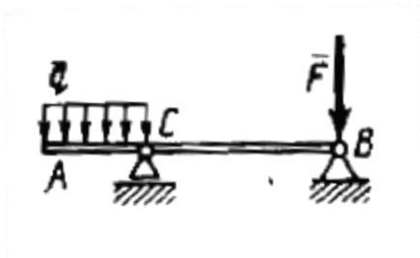
16. Какой угол в градусах с осью Ox составляет равнодействующая системы сил, если $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$?



- 50.0
- 55.0
- 45.0
- 65.0

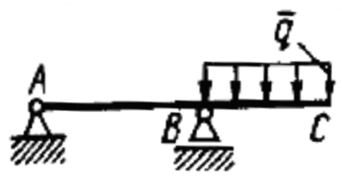
17. На балку AB действуют вертикальная сила F = 5 кН и распределенная нагрузка интенсивностью q = 4 кН/м. Определить в кН реакцию опоры A, если длины AB = 6 м,

AC = BC.



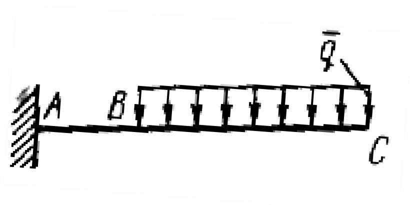
- 3
- 4.2
- 1.6
- 2

18. Определить реакцию опоры B, если интенсивность распределенной нагрузки q = 40 Н/м, размеры балки AB = 4 м, BC = 2 м.



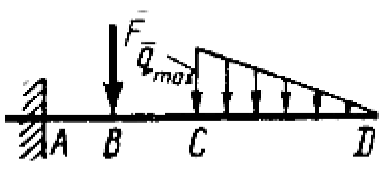
- 85
- 150
- 100
- 110

19. Определить интенсивность нагрузки q, при которой момент в заделке A равен 400 Н · м, если размеры AB = 2 м, BC = 4 м.



- 25
- 100
- 50
- 66.66

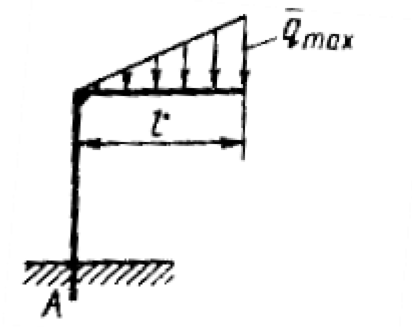
20. Определить модуль силы $\overline{F}$, при которой момент в заделке A равен 300 Н · м, если интенсивность распределенной нагрузки $q_{\max}$ = 20 Н/м, а размеры AB = 1 м, BC = 2м, CD = 3 м.



- 180
- 200
- 40
- 220

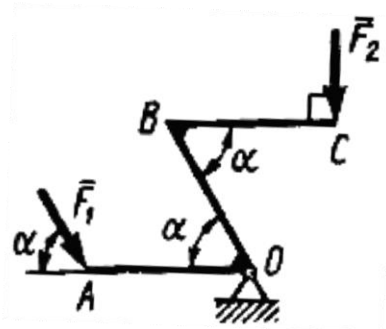
21. Определить длину l кронштейна, при которой момент в заделке M_A = 3 Н · м, если интенсивность распределенной нагрузки q_{max} = 1 Н/м.

- 6
- 2
- 4.1
- 3



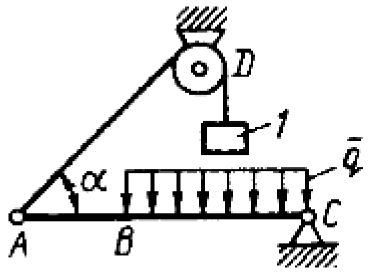
22. На рычаг действуют силы F_1 = 50 Н и $\overline{F_2}$. Определить в кН силу F_2, при которой рычаг в указанном положении находится в равновесии, если угол α = 60° , а длины АО = 3 м, ОВ = ВС = 4 м.

- 65
- 55.4
- 70
- 34.3



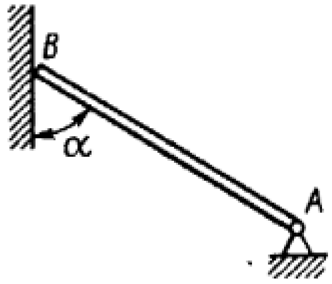
23. Балка АС закреплена в шарнире С и поддерживается в горизонтальном положении веревкой АD, перекинутой через блок. Определить интенсивность распределенной нагрузки q, если длины ВС = 5 м, АС = 8 м, угол α = 45° , а вес груза l равен 20 Н.

- 6
- 7.34
- 9.05
- 5



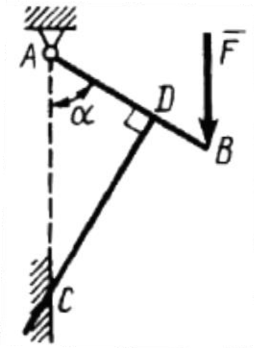
24. Конец В однородного бруса весом 100 кН, закрепленного в шарнире А, опирается на гладкую стену. Определить в кН давление бруса на стену, если угол α = 60° .

- 86.6
- 73
- 56.9
- 50



25. Балка AB опирается на стержень CD. Определить реакцию стержня CD, если длины AB = 2 м, BD = 1/3 AB, сила F = 4 Н, угол α = 60° .

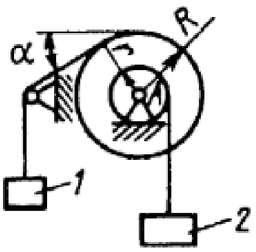
- 3.14
- 2.0
- 5.20
- 4.44



26. Грузы 1 и 2 висят на канатах, намотанных на ступенчатый барабан. Определить в кН вертикальную составляющую реакции шарнира A, если радиус R = 2r, угол α = 30° ,

вес груза 1 равен 20 кН. Система находится в равновесии.

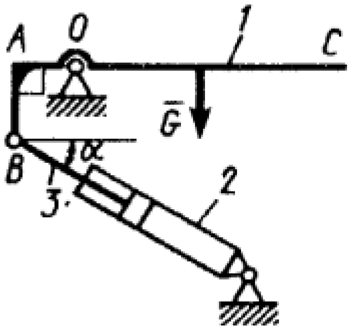
- 50.0
- 25.4
- 75.0
- 40



27. Лестница 1 весом G = 2 кН удерживается в горизонтальном положении с помощью силового гидроцилиндра 2. Определить в кН силу, действующую на шток 3 гидроцилиндра, если момент силы $M_0(\overline{G}) = 2$ кН· м, угол α = 30° , расстояние AO = AB =

= 0.5 м.

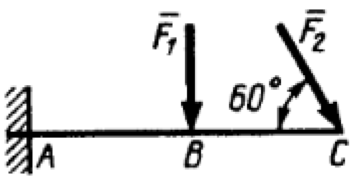
- 2.93
- 4
- 3
- 4.32



28. Определить момент в заделке A, если F_1 = 50 Н, F_2 = 100 Н, размеры AB = BC =

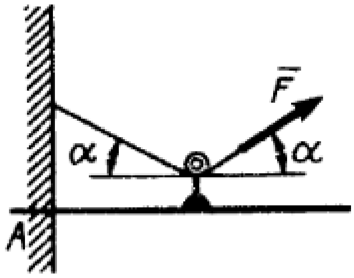
= 2 м.

- 320
- -226
- 446
- -446



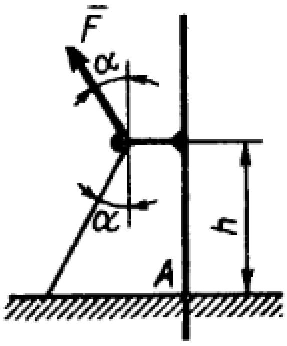
29. Определить в кН горизонтальную составляющую реакции в заделке А консольной балки, если сила натяжение троса F = 25 кН, угол $\alpha = 30^\circ$.

- 25
- 50
- 20.3
- 0



30. Определить в кН· м момент в заделке А консольной балки, если сила натяжения троса F = 4 кН, расстояние h = 3 м, угол $\alpha = 30^\circ$.

- 120
- 45
- 86
- -90



Вариант 3

1. Деталь массой m= 0.5кг скользит вниз по лотку. Под каким углом к горизонтальной плоскости должен располагаться лоток, для того чтобы деталь двигалась с ускорением a =2 м/c^2? Угол выразить в градусах.

- 11.8
- 15
- 9.8
- 27.6

2. Материальная точка массой m= 12 кг движется по прямой со скоростью $v = e^{0,1t}$. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку в момент времени t=50с.

- 203
- 178
- 120
- 154

3. Материальная точка массой m= 6 кг движется в горизонтальной плоскости Oxy с ускорением $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Определить модуль силы. Действующей на нее в плоскости движения.

- 6
- 30
- 42
- 36

4. Материальная точка массой m= 16 кг движется по окружности радиуса R= 9м со скоростью v = 0.8 м/с. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на главную нормаль к траектории.

- 3.63
- 1.97
- 1.14
- 1.81

5. Материальная точка массой m= 1 кг движется по окружности радиуса r= 2м со скоростью v = 2t. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке, в момент времени t= 1 с.

- 1.19
- 2.38
- 4.76
- 5.31

6. Тело движется вниз по наклонной шероховатой плоскости, которая образует с горизонтом угол 40°. Определить ускорение тела, если коэффициент трения скольжения f = 0.3.

- 5.34
- 4.05
- 3.05
- 6.42

7. Тело массой m = 20 кг падает по вертикали, сила сопротивления воздуха $R = 0,04v^2$. Определить максимальную скорость падения тела.

- 60
- 90
- 100
- 70

8. Материальная точка массой m = 900 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы F =270t, которая направлена по той же прямой. Определить скорость точки в момент времени t = 10 с, если при t_o = 0 скорость v_o = 10 м/с.

- 43
- 25
- 35
- 50

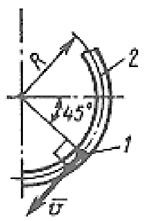
9. Определить путь, пройденный материальной точкой массой m по оси Ox за время t = 1 с, если она движется под действием силы F_x = 12 mt^2. В момент времени t_o = 0 координата x_0 = 3 м, скорость v_{x0} = 6 м/с.

- 10
- 40
- 20
- 30

10. На материальную точку массой m = 20 кг, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления R = $0,2v^2$. За сколько секунд скорость точки уменьшиться с 10 до 5 м/с?

- 20
- 10
- 40
- 30

11. Материальная точка 1 массой m = 30 кг движется в вертикальной плоскости по трубке 2, изогнутой по дуге окружности радиуса R = 12 м. Определить касательное ускорение точки в указанном положении.



- 6.94
- 5.44
- 7.25
- 8.65

12. Материальная точка m = 5 кг движется по криволинейной траектории под действием силы, проекция которой на касательную F_τ = 7 Н, на нормаль F_n =0.1t^2. Определить модуль ускорения точки в момент времени t = 12 с.

- 4.50
- 2.40
- 6.30
- 3.20

13. Материальная точка массой m = 18 кг движется в горизонтальной плоскости по криволинейной траектории под действием силы F = 25 Н. Определить радиус кривизны траектории в момент времени, когда скорость точки v = 4 м/с, а векторы скорости и силы образуют между собой угол 55°.

- 14.1
- 13.7
- 15.6
- 12.1

14. Материальная точка массой m = 16 кг движется в плоскости по криволинейной траектории под действием равнодействующей силы F = 0.3t. Определить скорость точки в момент времени t = 20 с, когда радиус кривизны траектории ρ = 12 м и угол между векторами силы и скорости $\alpha = 50^\circ$.

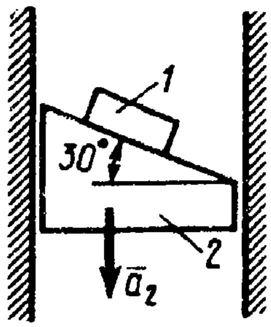
- 3.23
- 2.58
- 6.44
- 1.86

15. Материальная точка массой m = 15 кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы F = 0.5t. Определить скорость точки в момент времени t = 30 с, если сила образует постоянный угол 50° с вектором скорости.

- 9.54
- 10.34
- 8.45
- 12.87

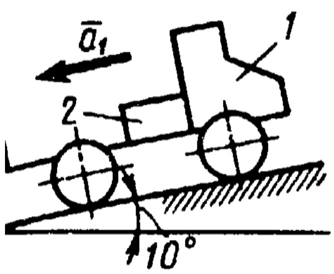
16. Груз 1 массой $m_1 = 1 кг$ спускается вниз по наклонной плоскости тела 2. Тело 2 движется в вертикальных направляющих вниз с ускорением $a_2 = 2 м/с^2$. Определить силу давления груза 1 на тело 2.

- 9.67
- 3.33
- 6.76
- 1



17. Грузовой автомобиль 1 движется на подъеме с постоянным замедлением $a_1 = 2 м/с^2$. Определить силу давления груза 2 массой 200 кг на переднюю стенку кузова автомобиля.

- 69.3
- 59.3
- 88
- 112.4



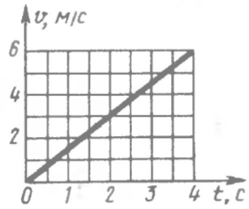
Вариант 4

1. Точка массой m= 14 кг движется по горизонтальной оси Ох с ускорением a_x = ln t. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении движения в момент времени t=5с.

- 29.7
- 22.5
- 11.3
- 27.6

2. Скорость движения точки массой m= 24 кг по прямой задана графиком функции $v = v$ (t). Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку.

- 12
- 18
- 36
- 24



3. Материальная точка массой m движется в плоскости Оху согласно уравнениям x=bt, y=ct, гдеb и c- постоянные Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке.

- m|c-b|
- m(c+b)
- 0 о
- m $\sqrt{c^2 + b^2}$

4. Движение материальной точки массой m= 8 кг происходит в горизонтальной плоскости Оху согласно уравнениям x=0.05t^3 и y=0.3t^2. Определить модуль равнодействующей приложенных к точке сил в момент времени t= 4с.

- 7.82
- 14.1
- 10.7
- 16.4

5. Материальная точка массой m=22 кг движется по окружности радиуса R= 10 м согласно уравнению s= 0.3t^2. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку, в момент времени t= 5с.

- 32.4
- 16.3
- 23.8
- 26.7

6. Материальная точка массой m = 9 кг движется в пространстве под действием силы $\overline{F} = 5\overline{i} + 6\overline{j} + 7\overline{k}$. Определить модуль ускорения точки.

- 2.33
- 4.45
- 0.34
- 1.17

7. На материальную точку массой m = 200 кг, которая находится на горизонтальной поверхности, действует вертикальная подъемная сила F = $10t^2$. Определить время t, при котором начнется движение точки.

- 14.0
- 13.0
- 15.4
- 10.3

8. Материальная точка массой m = 25 кг начала движение из состояния покоя по горизонтальной прямой под действием силы F =20t, которая направлена по той же прямой. Определить путь, пройденный точкой за 4 с.

- 9.34
- 10.44
- 7.76
- 8.53

9. Материальная точка массой m = 0.2 кг движется вдоль оси Ох под действием силы F_x = -0.4t. Определить скорость точки в момент t = 2 с, если ее начальная скорость v_{xo} = 6 м/с.

- 3
- 2
- 5
- 7

10. На материальную точку массой m = 250 кг, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления $R = 5v^2$. Определить скорость точки в момент t = 6 с, если при t_o = 0 ее скорость v_o = 20 м/с

- 5.88
- 4.63
- 8.24
- 7.55

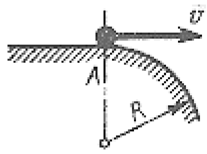
11. Внутри гладкой трубки, изогнутой по окружности радиуса R = 2 м, в горизонтальной плоскости из состояния покоя движется материальная точка массой m = 42 кг под действием силы F = 21 Н. Определить горизонтальную составляющую реакции трубки в момент времени t = 7 с, если направление силы совпадает с вектором скорости.

- 422
- 345
- 257
- 547

12. Материальная точка массой m = 2 кг движется по криволинейной траектории под действием силы $\overline{F} = 3\overline{\tau} + 4\overline{n}$. Определить модуль ускорения точки.

- 3.4
- 5.3
- 7.5
- 2.5

13. Тело движется по горизонтальной поверхности и в точке А отрывается от нее. Определить минимальную скорость тела в момент отрыва, если радиус R = 6 м.



- 5.45
- 6.23
- 7.67
- 3.44

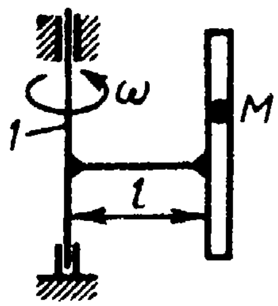
14. Материальная точка массой m = 11 кг движется по криволинейной траектории под действием равнодействующей силы F = 20 Н. Определить скорость точки в момент времени, когда радиус кривизны траектории ρ = 15 м и угол между силой и вектором скорости равен 35°.

- 3.96
- 4.98
- 7.33
- 9.14

15. Материальная точка массой m = 14 кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости. Определить путь, пройденной точкой за время t = 5 с после начала движения, если на неё действует сила F = 24 Н которая образует постоянный угол 45° с касательной к траектории точки.

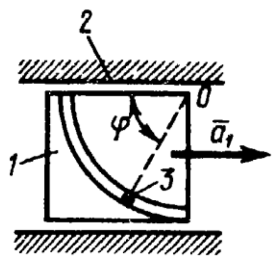
- 16.7
- 15.2
- 12.6
- 13.4

16. Шарик М массой $m = 0,2 кг$ движется со скоростью $\upsilon = 19,62 м/с$ относительно вертикальной трубки, которая на расстоянии $l = 0,5 м$ прикреплена к вертикальному валу 1. Вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 5 рад/с$. Определить переносную силу инерции шарика.



- 7.5
- 2.5
- 5
- 3.5

17. Тело 1 движется по прямолинейным направляющим 2. Внутри тела имеется канал в форме дуги окружности, по которому перемещается шарик 3 массой m. Определить ускорение a_1 тела 1, если при угле $\varphi = 60^o$ шарик находится в состоянии относительного покоя.



- 69.3
- 5.66
- 88
- 112.4

Вариант 5

1. Трактор двигаясь с ускорением a=1 м/c^2 по горизонтальному участку пути, перемещает нагруженные сани массой 0.6 т. Определить силу тяги на крюке, если коэффициент трения скольжения саней f = 0.04.

- 600
- 624
- 835
- 952

2. Тело массой m= 50кг, подвешенное на тросе, поднимается вертикально с ускорением w =0.5 м/c^2 . Определить силу натяжения троса.

- 500
- 516
- 465
- 250

3. Материальная точка массой m= 7 кг движется в горизонтальной плоскости Оху со скоростью $\vec{v}$= 0.4t$\vec{i}$ +0.5t$\vec{j}$. Определить модуль силы, действующей на нее в плоскости движения.

- 7
- 3.32
- 4.48
- 6.3

4. Движение материальной точки массой m=9 кг в плоскости Оху определяется радиус-вектором $\vec{r}$= $0.6t^2\,\vec{i}$ + $0.5t^2\,\vec{j}$. Определить модуль равнодействующей всех сил, приложенных к точке.

- 7
- 14.1
- 18
- 16.4

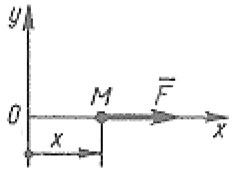
5. Материальная точка массой m= 20 кг движется по окружности радиуса R= 6 м согласно уравнению s= ln t. Определить проекцию равнодействующей сил приложенных к точке. На нормаль к траектории в момент времени t= 0.5 с.

- 12.4
- 16.3
- 13.3
- 26.7

6. Моторная лодка массой m = 200 кг после остановки мотора движется прямолинейно, преодолевая сопротивления воды. Силы сопротивления $R = 4v^2$. Определить модуль ускорения точки.

- -1.1
- -2.4
- -0.5
- -6.6

7. Материальная точка М массой m движется по горизонтальной оси Ox под действием силы F = 2m(x + 1). Определить ускорение точки в момент времени, когда ее координата x = 0.5 м.



- 2
- 3
- 4
- 5

8. Материальная точка массой m = 100 кг движется по горизонтальной прямой под действием силы F =10t, которая направлена по той же прямой. Определить время, за которое скорость точки увеличится с 5 до 25 м/с.

- 30
- 20
- 40
- 50

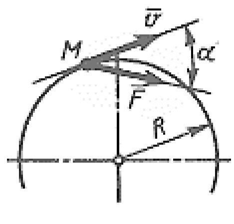
9. Тело массой m = 12 кг начала из состояния покоя движется по горизонтальной прямой под действием силы F =0.6t, которая направлена по той же прямой. Определить путь, пройденный телом по истечении 10 с после начала движения.

- 9.34
- 5.63
- 8.33
- 10.46

10. Материальная точка массой m = 4 кг движется по горизонтальной прямой. Через сколько секунд скорость точки уменьшится в 10 раз, если сила сопротивления $R = 0,8v$?

- 12.3
- 11.5
- 10.3
- 8.5

11. Материальная точка М массой m = 8 кг движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса с Определить угол α в градусах между силой $\overline{F}$ и скоростью $\bar{v}$ в момент времени, когда скорость точки v = 3 м/с, а касательное ускорение $a_\tau = 0,5 м/c^2$.



- 55
- 45
- 35
- 60

12. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы, тангенциальная составляющая которой F_τ = 0.2t, а нормальная составляющая F_n = 8 Н. Определить массу точки, если в момент времени t = 10 с её ускорение w = 0.7 м/c^2.

- 54.4
- 30.8
- 36.3
- 29.5

13. На горизонтальном диске на расстоянии 2 м от его вертикальной оси вращения находится тело. Определить угловую скорость равномерного вращения диска, превышение которой приведет к скольжению тела по диску, если коэффициент трения скольжения f = 0.3.

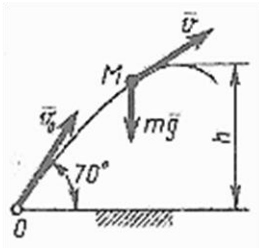
- 2.23
- 4.45
- 1.21
- 0.77

14. Космическая станция движется по круговой орбите радиуса R = $7 \cdot 10^6$ м вокруг Земли. Определить скорость станции в км/с, если масса Земли равна $5,976 \cdot 10^{24}$ кг, гравитационная постоянная равна $6,672 \cdot 10^{-11} H \cdot м^2 / кг^2$.

- 7.55
- 5.23
- 8.89
- 10.34

15. Материальная точка М движется в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Определить максимальную высоту подъема h в км, если в начальный момент скорость $v_0 = 600$ точки м/с.

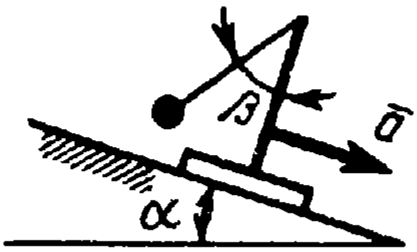
- 16.2
- 14.4
- 18.3
- 13.8



16. Локомотив массой $m = 8 \cdot 10^4 \, кг$ движется по рельсам, проложенным по экватору с востока на запад, со скоростью 20 м/с. Определить модуль кориолисовой силы инерции локомотива, если угловая скорость Земли $\omega = 0,0000729 \, рад / с$

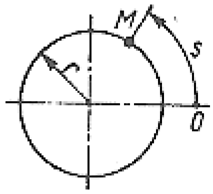
- 7.9
- 360
- 233
- 64
- 90
- 0
- 30
- 45

17. Штатив с математическим маятником движется по наклонной плоскости вниз с ускорением $a = g \sin\alpha$. Определить угол β в положении относительного покоя шарика, если угол $\alpha = 10^o$.



Вариант 4

1. Движение материальной точки М массой m = 0.5 кг происходит по окружности радиуса r = 0.5 м согласно уравнению s = 0.5 t^2. Определить момент количества движения этой точки относительно центра окружности в момент времени t = 1 с.

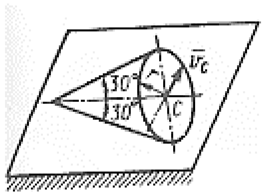


- 1.45
- 0.25
- 2.25
- 3.55

2. Материальная точка массой m = 1 кг движется по закону: x = 2t, y = t^3, z = t^4. Определить момент количества движения этой точки относительно Oy в момент времени t = 2 с.

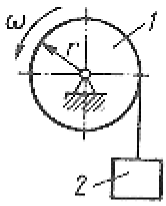
- -87
- -96
- -43
- -56

3. Конус катится по неподвижной плоскости без скольжения. Скорость центра основания конуса v_c = 0.9 м/с, радиус r = 30 см. Определить модуль кинетического момента конуса относительно мгновенной оси вращения, если его момент инерции относительно этой оси равен 0.3 кг · $м^2$.



- 1.04
- 2.56
- 6.64
- 4.23

4. Цилиндр 1 вращается с угловой скоростью ω = 20 рад/с. Его момент инерции относительно оси вращения I = 2 кг · $м^2$, радиус r = 0.5 м. Груз 2 имеет массу m_2 = 1 кг. Определить кинетический момент механической системы относительно оси вращения.



- 45
- 34
- 65
- 76

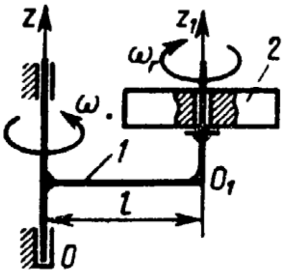
5. Спортсмен, прыгая с трамплина в воду, делает в воздухе сальто. В момент отрыва от трамплина он сообщает себе угловую скорость $\omega_0 = 1,5\, рад/с$ вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр масс. При этом момент инерции спортсмена относительно оси вращения $I_0 = 13,5\, кг \cdot м^2$. Определить угловую скорость спортсмена, когда он во время полета, поджимая руки и ноги, уменьшил момент инерции $I = 5,4\, кг \cdot м^2$.

- 3.75
- 2.25
- 5
- 1.5

6. Внутренними силами системы маховик 2 массой 20 кг, центральный момент инерции которого $I_{z1} = 1 кг \cdot м^2$, раскручивается до относительной угловой скорости $\omega_r = 40\, рад/с$.

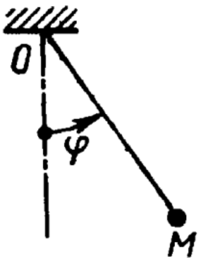
Определить угловую скорость ω держателя 1, если его момент инерции $I_z = 4 кг \cdot м^2$, размер $l = 1 м$.

- 3
- 5.8
- 2
- 1.6



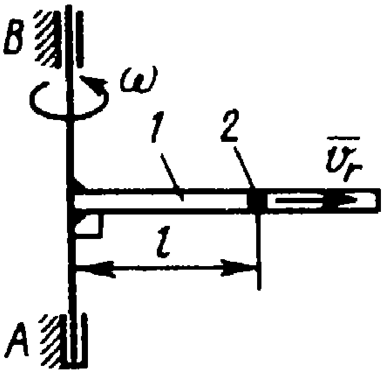
7. Материальная точка М массой $m = 0,5 кг$ прикреплена к гибкой нити длиной $OM = 2 м$ и совершает вместе с нитью колебания в вертикальной плоскости согласно уравнению $\varphi = (\pi / 6) \sin 2\pi t$. Определить кинетическую энергию материальной точки в нижнем ее положении.

- 1.4
- 10.8
- 5.4
- 2.4



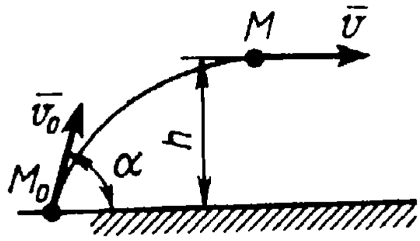
8. Трубка 1 вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 2 рад / с$ вокруг оси АВ. Внутри трубки движется шарик 2 массой $m_2 = 0,5 кг$. Определить кинетическую энергию шарика в момент, когда он, находясь на расстоянии $l = 0,5 м$ от оси, имеет относительную скорость $\upsilon_r = 0,2 м / с$.

- 6.32
- 1.54
- 0.26
- 2

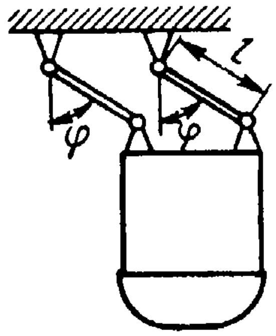


9. Материальная точка массой m брошена с поверхности Земли под углом $\alpha = 60^o$ к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 30\,м/с$. Определить наибольшую высоту h подъема точки.

- o 25.7
- o 3
- o 34.4
- o 42



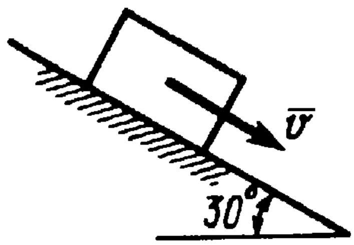
10. Кабина качелей подвешена на двух стержнях длиной $l = 0,5\,м$. Определить скорость кабины при прохождении ею нижнего положения, если в начальный момент стержни были отклонены на угол $\varphi = 60^o$ и отпущены без начальной скорости.



- o 1.5
- o 2.3
- o 2.21
- o 0.6

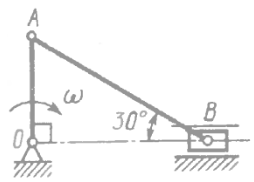
11. По наклонной плоскости спускается без начальной скорости груз массой m. Какую скорость $\overline{\upsilon}$ будет иметь груз, пройдя путь, равный 4 м от начала движения, если коэффициент трения скольжения между грузом и наклонной плоскостью равен 0.15?

- o 5.39
- o 6.27
- o 12.39
- o 2.42



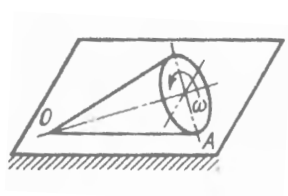
12. Для указанного положения механизма определить кинетическую энергию шатуна AB массой m= 1 кг, если кривошип OA длиной 0.5 м вращается вокруг оси O с угловой скоростью ω= 2 рад/с.

- o 0.5
- o 5
- o 1
- o 2



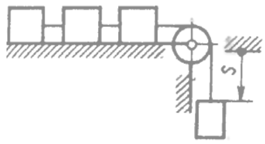
13. Прямой круговой конус катится без скольжения по горизонтальной плоскости, имея угловую скорость ω = 5 рад/с во вращательном движении вокруг мгновенной оси вращения. Момент инерции конуса относительно оси OA равен 0.04 кгм^2. Определить кинетическую энергию конуса.

- o 0.5
- o 1
- o 0.4
- o 4



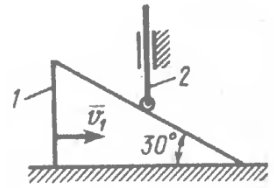
14. Четыре груза массой m = 1 кг каждый, соединенные гибкой нитью, переброшенной через неподвижный невесомый блок, движутся согласно закону $s = 1.5t^2$. Определить кинетическую энергию системы грузов в момент времени t = 2 с.

- o 28
- o 72
- o 3
- o 4.5



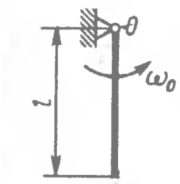
15. Призма 1 массой $m_1 = 5$ кг движется по горизонтальной плоскости со скоростью $v_1 = 1$ м/с. Масса толкателя 2 равна 1 кг. Определить кинетическую энергию механизма.

- o 26.7
- o 2.67
- o 2.76
- o 27.6



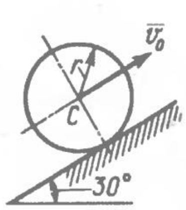
16. Какую начальную угловую скорость ω_0 надо сообщить однородному стержню длиной l = 3м, чтобы он, вращаясь вокруг горизонтальной оси O, сделал пол-оборота?

- o 5.72
- o 4.43
- o 3.72
- o 4



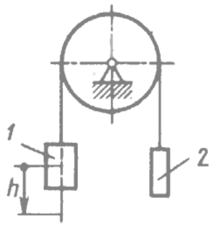
17. Однородный диск массой m и радиуса r катится без скольжения по наклонной плоскости вверх. В начальный момент времени скорость центра диска $v_0 = 4$ м/с. Определить путь, пройденный центром C диска до остановки.

- o 24.5
- o 2.45
- o 0.245
- o 4.25



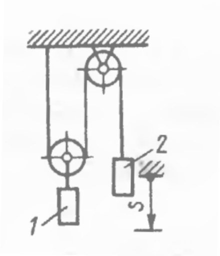
18. Грузы 1 и 2 массой m_1 = 2 кг и m_2 = 1 кг подвешены к концам гибкой нити, перекинутой через блок. Определить скорость груза 1 в момент времени, когда он опустился на высоту h = 3м. Движение грузов начинается из состояния покоя.

- o 5.57
- o 4.43
- o 9
- o 4



19. Определить скорость груза 2 в момент времени, когда он опустился вниз на расстоянии s = 4 м, если массы грузов m_1 = 2 кг, m_2 = 4 кг. Система тел вначале находилась в покое.

- o 2.67
- o 26.7
- o 7.23
- o 0.723

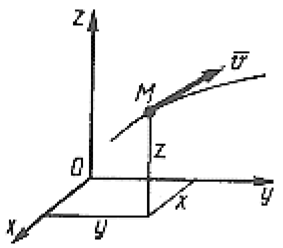


Вариант 5

1. Определить момент количества движения материальной точки массой m = 1 кг относительно начала координат в положении, когда её координаты x = y = 1 м и проекции скорости $v_x = v_y = 1$ м/с.

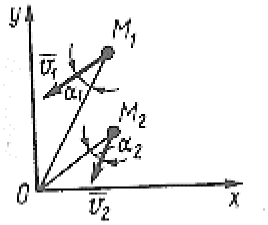
- 1
- 3
- 2
- 0

2. Материальная точка M массой m = 0.5 кг движется по кривой. Даны координаты точки x = y = z = 1 м и проекции скорости $v_x = 1$ м/с, $v_y = 2$ м/с, $v_z = 4$ м/с. Определить момент количества движения этой точки относительно оси Ox.



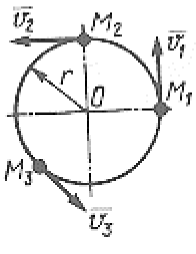
- 1
- 2
- 3
- 4

3. В плоскости Oxy движутся материальные точки M_1 и M_2, массы которых $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ кг. Определить кинетический момент данной системы материальных точек относительно точки O в положении, когда скорости $v_1 = 2v_2 = 4$ м/с, расстояния $OM_1 = 2\,OM_2 = 4$ м и углы $\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$.



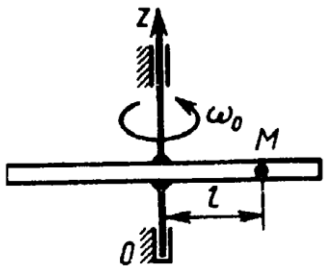
- 5
- 6
- 7
- 9

4. Материальные точки M_1, M_2, M_3, массы которых $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ кг, движутся по окружности радиуса r = 0.5 м. Определить кинетический момент системы материальных точек относительно центра O окружности, если их скорости $v_1 = 2$ м/с, $v_2 = 4$ м/с, $v_3 = 6$ м/с.



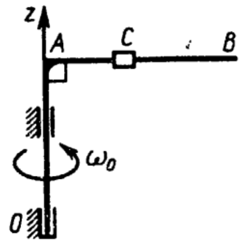
- 15
- 12
- 16
- 10

5. Трубка вращается вокруг вертикальной оси Oz, ее момент инерции $I_z = 0,075 кг \cdot м^2$. По трубке под действием внутренних сил системы движется шарик M массой $m = 0,1 кг$. Когда шарик находится на оси Oz, угловая скорость $\omega_0 = 4 рад/с$. При каком расстоянии l угловая скорость равно 3 рад/с?



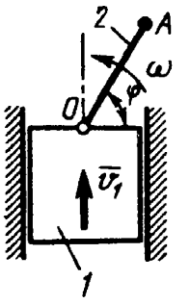
- 2.5
- 1.5
- 0.5
- 2

6. По стержню AB движется ползун C согласно закону $AC = 0,2 + 1,2t$. Ползун считать материальной точкой массой $m = 1 кг$. Момент инерции вала OA со стержнем $I_z = 2,5 кг \cdot м^2$. Определить угловую скорость вала в момент времени $t = 1 с$, если начальная угловая скорость $\omega_0 = 10 рад/с$.



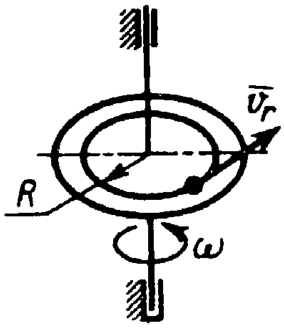
- 5.7
- 3.4
- 7.2
- 5.8

7. Тело 1 движется вертикально вверх со скоростью $\upsilon_1 = 1 м/с$. К стержню 2 длиной $OA = 0,2 м$, который вращается вокруг горизонтальной оси O с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 рад/с$, прикреплен точечный груз A массой 0.1 кг. Определить кинетическую энергию груза при $\varphi = 60^o$.



- 2
- 0.35
- 3.6
- 0

8. По горизонтальной платформе на неизменном расстоянии $R = 1 м$ от оси вращения с относительной скоростью $\upsilon_r = 3 м/с$ перемещается материальная точка массой $m = 0,2 кг$. Найти ее кинетическую энергию, если платформа вращается с угловой скоростью $\omega = 2 рад/с$.

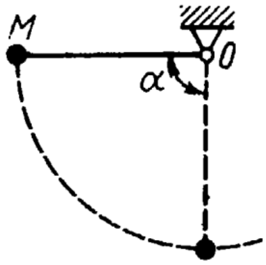


- 2.5
- 0.2
- 1.5
- 3

9. Тело массой $m = 2\,кг$ от толчка поднимается по наклонной плоскости с начальной скоростью $\upsilon_0 = 2\,м/с$. Определить работу силы тяжести на пути, пройденном телом до остановки.

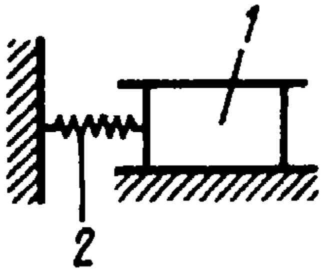
- 0
- -14
- -2
- -4

10. Материальная точка М массой m, подвешенная на нити длиной $OM = 0,4\,м$ к неподвижной точке О, отведена на угол $\alpha = 90^o$ от положения равновесия и отпущена без начальной скорости. Определить скорость этой точки во время ее прохождения через положение равновесия.



- 1.4
- 2.8
- 3.4
- -2.2

11. К ползуну 1 массой $m = 1\,кг$ прикреплена пружина 2. Пружину сжимают из свободного состояния на величину 0.1 м, после чего груз отпускают без начальной скорости. Определить жесткость пружины, если груз, пройдя путь, равный 0.1 м, приобретает скорость 1 м/с.

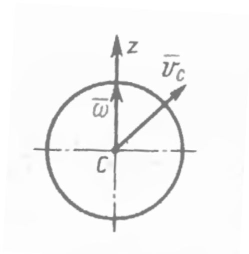


- 100
- 200
- 500
- 1000

12. Частота вращения рабочего колеса вентилятора равна 90 об/мин. Определить кинетическую энергию колеса, если его момент инерции относительно оси вращения равен 2.2 кг*м3.

- 9.77
- 0.97
- 97.7
- 90

13. Шар массой 5 кг свободно движется в пространстве: скорость $\bar{v}_C$ центра С шара равна 4 м/с, а его угловая скорость $\bar{\omega}$ вращения вокруг мгновенной оси Cz равна 10 рад/с. Определить кинетическую энергию шара, если его момент инерции относительно оси Cz равен 0.5 кгм^2.



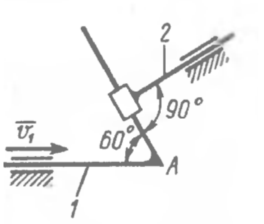
- 20
- 2
- 65
- 35

14. Чему равна кинетическая энергия зубчатой передачи двух цилиндрических колес с числом зубьев $z_2 = 2z_1$, если их момент инерции относительно осей вращения $I_2 = 2I_1 = 2êã \cdot ì^{2}$, а угловая скорость колеса 1 равна 10 рад/с.

- 25
- 50
- 75
- 100

15. Стержень 1 массой $m_1 = 4$ кг, изогнутый в точке А под углом в 60 градусов, движется в горизонтальных направлениях со скоростью $v_1 = 1$ м/с и приводит в движение стержень 2 массой $m_2 = 2$ кг. Стержни соединены между собой втулкой. Определить кинетическую энергию системы стержней.

- 2.75
- 2.25
- 5
- 8

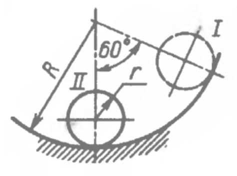


16. Однородный диск радиуса 0.4 м может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку его обода. Какую начальную угловую скорость надо сообщить диску, чтобы он повернулся на четверть оборота?

- 57.2
- 5.72
- 0.4
- 0.2

17. Тонкое кольцо радиуса r = 0.1 м катится без скольжения из состояния покоя I по внутренней поверхности горизонтального цилиндра радиуса R = 0.6 м. Определить скорость центра кольца в нижнем положении II.

- 1.57
- 15.7
- 1.43
- 14.3

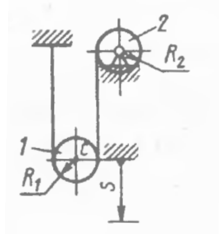


18. Через неподвижный блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы массой 2 и 4 кг. Определить ускорения грузов.

- 6
- 6.63
- 3.27
- 60

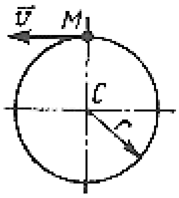
19. Одинаковые блоки 1 и 2 массой $m_1 = m_2$ и радиусами $R_1 = R_2$, представляющие собой однородные диски, начинают движение из состояния покоя под действием силы тяжести. Определить скорость центра С блока 1 после того, как он опустился вниз на расстояние s = 1м.

- 2.37
- 2
- 4.37
- 4



Вариант 3

1. Материальная точка M массой m = 1 кг движется равномерно по окружности со скоростью v = 4 м/с. Определить момент количества движения этой точки относительно центра C окружности радиуса r = 0.5 м.

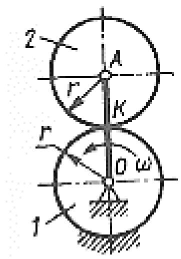


- 1
- 3
- 2
- 5

2. Скорость материальная точки массой m = 1 кг определяется выражением $\bar{v} = 2t\bar{i} + 4t\bar{j} + 5\bar{k}$. Определить модуль количества момента движения точки относительно начала координат в момент времени t = 2 с, когда её координаты x = 2 м, y = 3 м, z = 3 м.

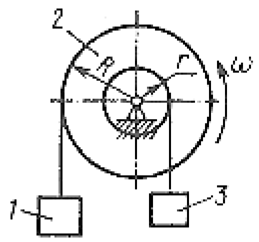
- 10
- 20
- 30
- 40

3. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω = 6 рад/с. Колесо 2 катится по неподвижному колесу 1. Определить кинетический момент колеса 2 относительно его мгновенного центра скоростей K, если радиус r = 0.15 м. Колесо 2 считать однородным диском массой m = 3 кг.



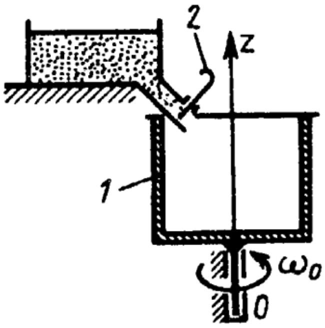
- 3.45
- 1.22
- 2.45
- 4.65

4. На барабан 2, момент инерции которого относительно оси вращения I = 0.05 кг $\cdot$ м^2, намотаны нити, к которым прикреплены грузы 1 и 3 массой $m_1 = 2m_3$ = 2 кг. Определить кинетический момент системы тел относительно оси вращения, если угловая скорость ω = 8 рад/с, радиусы R = 2r = 20 см.



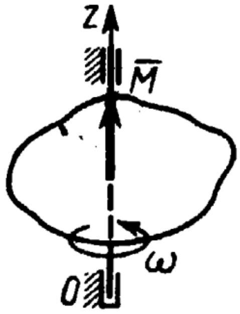
- 1.12
- 3.44
- 2.57
- 4.76

5. Резервуар 1, момент инерции которого относительно вертикальной оси Oz равен $1 кг \cdot м^2$, вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 18\, рад/с$. После открытия задвижки 2 он заполняется сыпучим материалом. Определить угловую скорость заполненного резервуара, если его момент инерции равен $3 кг \cdot м^2$.



- 9
- 1
- 2
- 6

6. Тело вращается вокруг вертикальной оси Oz под действием пары сил с моментом $M = 16t$. Определить момент инерции тела относительно оси Oz, если известно, что в момент времени $t = 3с$ угловая скорость $\omega = 2\, рад/с$. При $t = 0$ тело находилось в покое.

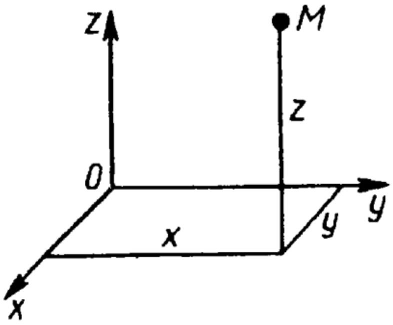


- 12
- 36
- 24
- 4

7. Груз массой $m = 5 кг$, подвешенный к вертикальной пружине, совершает свободные колебания по закону $y = 0{,}1\sin(14t + 1{,}5\pi)$. Определить наибольшее значение кинетической энергии груза.

- 2.5
- 4.9
- 5.4
- 6.4

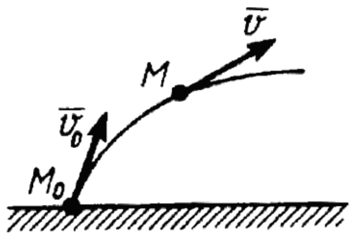
8. Материальная точка М массой $m = 0{,}2 кг$ находится в поле силы тяжести на высоте $z = 10\, м$. Определить потенциальную энергию материальной точки, если при $z = 0$ потенциальная энергия ее равна нулю.



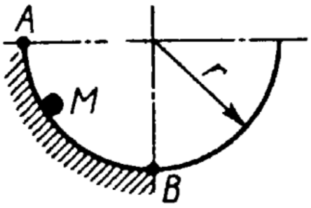
- 19.6
- 15.2
- 11.8
- 7.8

9. Материальная точка массой $m = 0,5 кг$ брошена с поверхности Земли с начальной скоростью $\upsilon_0 = 20 м/с$ и в положении М имеет скорость $\upsilon = 12 м/с$. Определить работу силы тяжести при перемещении точки из положения M_0 в положении М.

- -64
- 8
- 64
- -2



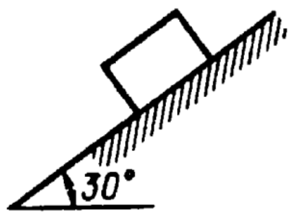
10. Материальная точка М массой m движется под действием силы тяжести во внутренней поверхности полуцилиндра радиуса $r = 0,2 м$. Определить скорость материальной точки в точке B поверхности, если ее скорость в точке А равна нулю.



- 1.98
- 11.5
- 6.56
- 0.032

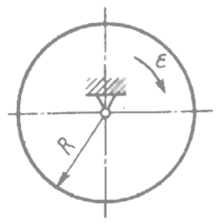
11. По наклонной плоскости спускается без начальной скорости тело массой $m = 1 кг$. Определить кинетическую энергию тела в момент времени, когда оно прошло путь, равный 3 м, если коэффициент трения скольжения между телом и наклонной плоскостью $f = 0,2$.

- 2.18
- 5.32
- 16.33
- 9.62



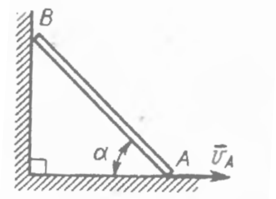
12. Однородный диск массой m=30 кг радиуса R=1 м начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно с постоянным ускорением ε = 2 рад/с^2. Определить кинетическую энергию диска в момент времени t = 2 с после начала движения.

- 120
- 60
- 30
- 90



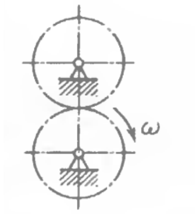
13. Однородный стержень АВ длиной 2 м и массой m = 6 кг при своем движении скользит концами А и В по горизонтальной и вертикальной плоскостям. Определить кинетическую энергию стержня в момент времени, когда угол $\alpha = 45^\circ$ и скорость точки А равна 1 м/с

- 1
- 3
- 2
- 6



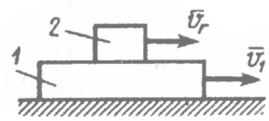
14. Определить кинетическую энергию системы, состоящей из двух одинаковых зубчатых колес массой m = 1 кг каждый, вращающихся с угловой скоростью ω = 10 рад/с. Радиус инерции колеса относительно оси вращения равен 0.2 м.

- 1
- 2
- 4
- 0



15. Пластина 1 массой 40 кг движется поступательно и прямолинейно со скоростью $v_1 = 1$ м/с. Тело 2 массой 10 кг движется по отношению к пластине поступательно со скоростью $v_r = 0.4$ м/с. Определить кинетическую энергию системы тел, если векторы $\bar{v}_1$ и v_r параллельны.

- 28.8
- 29.8
- 30.8
- 32.2

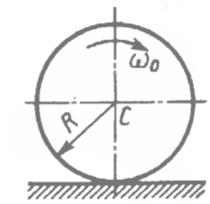


16. Телу с вертикальной неподвижной осью вращения сообщена угловая скорость ω_0=2.24 рад/с. Момент инерции тела относительно оси вращения I = 8 кг*м^2. На какой угол повернется тело до остановки, если на него действует постоянный момент трения подшипников M=1 Н*м?

- 20
- 20.1
- 20.01
- 20.2

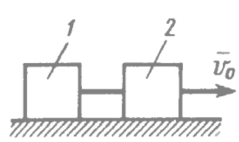
17. Тонкостенный цилиндр массой m и радиуса R=0.5 м катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Определить путь, пройденный центром C цилиндра до остановки, если в начальный момент времени угловая скорость цилиндра 4 рад/с. Коэффициент трения качения $\delta = 0.01$м.

- 2.04
- 20.4
- 10.2
- 1.02



18. Грузы 1 и 2 одинаковой массой m, соединенные между собой гибкой нитью, движутся по горизонтальной плоскости, имея начальную скорость v_0 = 2 м/с. Определить коэффициент трения скольжения, если тела останавливаются, пройдя путь, равный 4м.

- $5.10 \cdot 10^{-2}$
- $5.10 \cdot 10^{-3}$
- $5.10 \cdot 10^{-7}$
- $5.10 \cdot 10^{-4}$



19. Движение шкива 2 ременной передачи начинается из состояния покоя под действием постоянного момента М = 0.5 Н*м. После трех оборотов одинаковые по массе и размеру шкивы 1 и 2 имеют угловую скорость 2 рад/с. Определить момент инерции одного шкива относительно его оси вращения.

- 23.6
- 2.36
- 2.64
- 2.6