

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра функционального анализа и теории функций

С.Я. Новиков, М.А. Лихобабенко

ФРЕЙМЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

*Допущено УМО по классическому университетскому
образованию в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся
по направлению 010100 Математика
и специальности 010701 Фундаментальная
математика и механика*

Самара
Издательство «Самарский университет»
2013

УДК 517.51
ББК 22.1
Н73

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. Т. П. Лукашенко,
д-р физ.-мат. наук, проф. С. В. Асташкин

Новиков, С. Я.

Н 73 Фреймы конечномерных пространств : учебное пособие / С. Я. Новиков, М. А. Лихобабенко. - Самара: Изд-во «Самарский университет», 2013. - 52 с.
ISBN 978-5-86465-576-4

В пособии изложены основы теории фреймов (каркасов) конечномерных евклидовых (унитарных) пространств. Базовые понятия иллюстрируются примерами и упражнениями. Наряду с широкоизвестными результатами приводятся оригинальные результаты авторов.

Освоивший материал пособия читатель подготовлен к самостоятельным исследованиям и применениям фреймов в прикладных задачах.

Предназначено для студентов высших учебных заведений специальности «Фундаментальная математика и механика» и направления «Математика».

УДК 517.51
ББК 22.1

ISBN 978-5-86465-576-4

© Новиков С. Я., Лихобабенко М. А., 2013
© Самарский государственный университет, 2013
© Оформление. Издательство «Самарский университет», 2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Глава 1. Фреймы в конечномерных пространствах	5
1.1. Определение фрейма	5
1.2. Фреймы и операторы	9
1.3. Фреймы и операция свертки	24
Глава 2. Конструкция фреймов Парсеваля — Стеклова в конечномерных пространствах	31
2.1. Конструкция равномерных фреймов Парсеваля — Стеклова	31
2.2. Конструкция фреймов Парсеваля — Стеклова с заданными нормами	39
2.3. ϵ -почти фреймы Парсеваля — Стеклова	45
Список литературы	50

ПРЕДИСЛОВИЕ

Фреймы (каркасы) активно проникают в разные области математики. Являясь естественным обобщением базиса Рисса, они предоставляют исследователю новые возможности. В математической литературе России нет пособия для первоначального знакомства с этими объектами. В известных монографиях И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова, М.А. Скопиной «Теория всплесков», И. Добеши «Десять лекций по вейвлетам» и С. Малла «Вейвлеты в обработке сигналов», предлагаемых профессионалам, уделено внимание фреймам в бесконечномерных функциональных пространствах, но практически нет материала о фреймах конечномерных пространств.

Ставшая широко цитируемой в англоязычной литературе монография О. Христensen (O. Christensen) о фреймах не переведена на русский язык.

Данное пособие частично ликвидирует существующий пробел. В нем содержится необходимый минимум, после освоения которого можно приступать к чтению статей и решению задач. Основное внимание в пособии уделено фреймам Парсеваля — Стеклова (такое название предложил акад. В.С. Владимиров), которые ближе других по своим свойствам к ортонормированным базисам и потому наиболее известны в приложениях.

От читателя не требуется специальной подготовки. Пособие вполне доступно студентам старших курсов, магистрам и аспирантам и может использоваться как в базовых, так и в специальных курсах.

Глава 1

Фреймы в конечномерных пространствах

1.1. Определение фрейма

В первой главе мы рассматриваем N -мерные евклидовы (унитарные) пространства над полем вещественных или комплексных чисел, которые будем обозначать $\ell_N^2(\mathbb{R})$ или $\ell_N^2(\mathbb{C})$ соответственно. Если выбор числового поля не влияет на формулировки результатов и определений, то будем использовать обозначение ℓ_N^2 . В пространстве ℓ_N^2 вводим скалярное произведение и норму следующим образом:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^N x_k \bar{y}_k,$$
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ — элементы из ℓ_N^2 .

Напомним, что система векторов $E = (e_1, \dots, e_N)$ пространства ℓ_N^2 называется базисом пространства ℓ_N^2 , если она состоит из линейно независимых векторов и любой вектор x из ℓ_N^2 может быть единственным образом представлен в виде некоторой линейной комбинации

$$x = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k, \quad (1.1)$$

где α_k — скалярные коэффициенты.

Базис $E = (e_1, \dots, e_N)$ называется ортонормированным, если

$$\langle e_k, e_j \rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j, \\ 1, & \text{если } k = j. \end{cases}$$

Заметим, что для ортонормированного базиса равенство (1.1) принимает вид

$$x = \sum_{k=1}^N \langle x, e_k \rangle e_k$$

в силу того, что

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^N \langle \alpha_j e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^N \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \alpha_k.$$

Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$, $M \geq N$, векторов пространства ℓ_N^2 называется *полной*, если $\ell_N^2 = \text{span}(\{\varphi_k\}_{k=1}^M)$, т. е. произвольный вектор $x \in \ell_N^2$ может быть представлен линейной комбинацией векторов этой системы: $x = \sum_{k=1}^M \alpha_k \varphi_k$.

Введем понятие фрейма [1-3].

Пусть M и N — натуральные числа, причем $M \geq N$, и пусть J — конечное или бесконечное множество индексов.

Определение 1.1.1. Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ из ℓ_N^2 называется *фреймом для пространства ℓ_N^2* , если существуют положительные числа A и B такие, что

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{k \in J} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad (1.2)$$

для всех x из ℓ_N^2 .

Числа A и B называются соответственно нижней и верхней границами фрейма. Они определяются неоднозначно, так как верхнюю границу B можно увеличивать, а нижнюю границу A — уменьшать. Поэтому инфимум по множеству всех верхних границ — это оптимальная верхняя граница фрейма, а супремум по множеству всех нижних границ — оптимальная нижняя граница фрейма.

Если фрейм состоит из M элементов, то правое неравенство в (1.2) выполняется в силу неравенства Коши — Буняковского:

$$\sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2 \right) \|x\|^2 \quad (1.3)$$

для всех x из ℓ_N^2 , верхняя граница при этом (обычно далекая от оптимальной) равна $\sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2$.

Для выполнения нижнего неравенства в (1.2) необходима полнота системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$: $\ell_N^2 = \text{span}(\{\varphi_k\}_{k=1}^M)$. Докажем это, используя равенство $(\text{span}(\{\varphi_k\}_{k=1}^M))^\perp = \{0\}$, эквивалентное полноте системы. Пусть x — произвольный элемент из $(\text{span}(\{\varphi_k\}_{k=1}^M))^\perp$. Тогда $\langle x, \varphi_k \rangle = 0$ для всех $k = 1, \dots, M$. Из (1.2) получаем, что $x = 0$ и $\text{span}(\{\varphi_k\}_{k=1}^M)^\perp = \{0\}$. Таким образом, доказана полнота системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$.

Верно ли обратное, т. е. образует ли полная система фрейм?

Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — полная система. Покажем, что $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм. В качестве верхней границы B возьмем $\sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2$. Найдем нижнюю границу A .

Рассмотрим отображение

$$x \in \ell_N^2 \mapsto \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2,$$

которое является непрерывным как суперпозиция непрерывных. Единичная сфера в конечномерном пространстве ℓ_N^2 — компакт, и непрерывная функция, определенная на компакте, достигает своего наибольшего и наименьшего значений, следовательно, найдется $y \in \ell_N^2$ с $\|y\| = 1$ такой, что

$$A := \sum_{k=1}^M |\langle y, \varphi_k \rangle|^2 = \min_{\{x \in \ell_N^2, \|x\|=1\}} \left\{ \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \right\}.$$

Неравенство $A > 0$ очевидно.

Возьмем произвольный элемент $x \in \ell_N^2$, отличный от нуля. Получаем, что

$$\sum_{k=1}^M \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \varphi_k \right\rangle \right|^2 \geq A$$

и

$$\sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \geq A \|x\|^2.$$

Тем самым мы показали, что выполняется (1.2), т. е. система $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является фреймом. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1.1. Система $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является фреймом для ℓ_N^2 тогда и только тогда, когда $\ell_N^2 = \text{span}\{\{\varphi_k\}_{k=1}^M\}$.

Данная теорема показывает, что фрейм в конечномерном пространстве — это другое определение полной системы. Отказ от требования линейной независимости элементов фрейма позволяет строить фреймы, количество элементов которых превышает размерность пространства. Отметим, что в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве ℓ^2 теорема 1.1.1 не имеет места: фрейм остается полной системой, но не каждая полная система образует фрейм.

Если оптимальная верхняя и нижняя границы совпадают, т. е. $A = B$, то фрейм называется жестким. Для жесткого фрейма соотношение (1.2) переходит в равенство

$$\sum_{k \in J} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = A \|x\|^2, \quad (1.4)$$

которое при $A = 1$ принимает форму равенства Парсеваля — Стеклова:

$$\sum_{k \in J} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad (1.5)$$

Фреймы, для которых выполнено (1.5), называют фреймами Парсеваля — Стеклова.

Определение 1.1.2. Фрейм $\{\varphi_k\}_{k \in J}$ называется равномерным, если существует число β такое, что $\|\varphi_k\| = \beta$ для любого $k \in J$.

Лемма 1.1.1. Ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^N$ в пространстве ℓ_N^2 является равномерным фреймом Парсеваля — Стеклова в пространстве ℓ_N^2 .

Доказательство. Так как $\{e_k\}_{k=1}^N$ — ортонормированный базис, то для любого вектора $x \in \ell_N^2$ верно равенство Парсевала — Стеклова

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^N |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Таким образом, получаем, что $\{e_k\}_{k=1}^N$ является фреймом Парсевала — Стеклова в пространстве $x \in \ell_N^2$. $\blacktriangle$

Верно и частичное обращение этого утверждения.

Лемма 1.1.2. Если $\{e_k\}_{k=1}^M$ — фрейм Парсевала — Стеклова и $\|e_k\| = 1$ для всех $k = 1, \dots, M$, то $M = N$, и $\{e_k\}_{k=1}^N$ образует ортонормированный базис в пространстве ℓ_N^2 .

Доказательство. 1. Предположим, что $x \in (\overline{\text{span}}\{e_k\})^\perp$. Это означает, что $x \perp e_k$, и, используя условие, получаем

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^M |\langle x, e_k \rangle|^2 = 0.$$

Следовательно, $x = 0$, и, таким образом, полнота системы доказана.

2. По условию леммы 1.1.2 $\|e_k\| = 1$ для всех $k = 1, \dots, M$, т. е.

$$1 = \|e_k\|^2 = \sum_{j=1}^M |\langle e_j, e_k \rangle|^2 = \sum_{k \neq j} |\langle e_j, e_k \rangle|^2 + 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \neq j} |\langle e_j, e_k \rangle|^2 = 0,$$

и отсюда следует, что $\langle e_j, e_k \rangle = 0$ для любого $j \neq k$. Получаем $e_k \perp e_j$ и, следовательно, $\{e_k\}_{k=1}^N$ образуют ортонормированный базис в пространстве ℓ_N^2 . $\blacktriangle$

Пример 1.1.1.

Рассмотрим пространство $\ell_2^2(\mathbb{R})$ и систему векторов

$$\varphi_1 = \{0; 1\},$$

$$\varphi_2 = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right\},$$

$$\varphi_3 = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Выясним, является ли эта система фреймом в пространстве $\ell_2^2(\mathbb{R})$. Для этого проверим выполнение неравенств (1.2). Возьмем произвольный вектор $x = \{x_1; x_2\}$.

$$\sum_{k=1}^3 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = x_2^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 = 3\|x\|^2.$$

Таким образом, получили, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^3$ — жесткий фрейм с границей $A = \frac{3}{2}$. Фрейм, рассмотренный в этом примере, по понятным причинам называют «Мерседес-Бенц»-фреймом.

Пример 1.1.2.

Рассмотрим пространство $\ell_3^2(\mathbb{R})$ и систему векторов

$$\varphi_1 = \{2; -3; 1\},$$

$$\varphi_2 = \{2; 3; 1\},$$

$$\varphi_3 = \{2; 0; -2\}.$$

Выясним, является ли эта система фреймом в пространстве $\ell_3^2(\mathbb{R})$. Для этого проверим выполнение неравенств (1.2). Возьмем произвольный вектор $x = \{x_1; x_2; x_3\}$.

$$\sum_{k=1}^3 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = (2x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + (2x_1 + 3x_2 + x_3)^2 + (2x_1 - 2x_3)^2 = 12x_1^2 + 18x_2^2 + 6x_3^2.$$

Таким образом, получаем

$$6\|x\|^2 \leq \sum_{k=1}^3 |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq 18\|x\|^2.$$

Из определения (1.1.1) следует, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^3$ — фрейм с границами $A = 6$ и $B = 18$.

Конечно, можно было стандартным способом проверить линейную независимость векторов. Иногда (особенно при больших значениях N) предложенный способ проверки полноты системы может оказаться предпочтительнее.

Упражнение 1.1.1. Построить примеры фреймов, жестких фреймов в пространствах $\ell_N^2(\mathbb{C})$ и $\ell_N^2(\mathbb{R})$ при различных N .

1.2. Фреймы и операторы

В данном параграфе определим четыре оператора, связанные с фреймом $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$: оператор синтеза, оператор анализа, фреймовый оператор и оператор (матрицу) Грама. Сформулируем ряд лемм [3–6], описывающих их свойства.

Линейное отображение

$$F: x \mapsto \{\langle x, \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M, \quad F: \ell_N^2 \rightarrow \ell_M^2$$

называют *оператором анализа*.

Лемма 1.2.1. Оператор анализа F является инъекцией.

Доказательство. Пусть $F\vec{x} = 0$, тогда $\|F\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = 0$, следовательно, $x \perp \varphi_k$ для всех k . Так как $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм, образует полную систему, то $x = 0$. Таким образом, мы показали, что ядро оператора F тривиально, и, следовательно, оператор анализа F — инъекция. $\blacktriangle$

Линейное отображение

$$F^*: \{a_k\}_{k=1}^M \rightarrow \sum_{k=1}^M a_k \varphi_k, \quad F^*: \ell_M^2 \rightarrow \ell_N^2$$

называют *оператором синтеза*.

Упражнение 1.2.1. Докажите, что оператор F^* является сопряженным оператором для F , т. е. $\langle Fx, y \rangle = \langle x, F^*y \rangle, x \in \ell_N^2, y \in \ell_M^2$.

Лемма 1.2.2. Оператор синтеза F^* является сюръекцией.

Доказательство. По теореме 1.1.1 фрейм $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является полной системой, следовательно, $x = \sum_{k=1}^M c_k \varphi_k$ для некоторого набора $\{c_k\}$. Остается заметить, что $x = F^*\{\{c_k\}_{k=1}^M\}$. $\blacktriangle$

Если запишем оператор анализа F в матричном виде, то получим $M \times N$ — матрицу, строки которой образуют фрейм, а в матрице оператора F^* столбцы являются векторами фрейма в стандартном базисе.

Композиция F и F^* определяет фреймовый оператор

$$S : \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2 : Sx = F^*Fx = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Рассмотрим его подробнее:

$$\langle Sx, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, x \right\rangle = \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2, \quad x \in \ell_N^2.$$

Следовательно, (1.2) можно переписать следующим образом:

$$A \langle x, x \rangle \leq \langle Sx, x \rangle \leq B \langle x, x \rangle \quad \text{или} \quad AI_N \leq S \leq BI_N,$$

здесь имеется в виду стандартная частичная упорядоченность самосопряженных операторов.

Таким образом, определение жесткого фрейма можно записать равенством:

$$S = AI_N \quad \text{или} \quad Sx = Ax, \quad x \in \ell_N^2,$$

или так:

$$Ax = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, \quad x \in \ell_N^2,$$

$$x = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Обозначив $\tilde{\varphi}_k := \frac{\varphi_k}{A}$, получим

$$x = \sum_{k=1}^M \langle x, \tilde{\varphi}_k \rangle \varphi_k. \quad (1.6)$$

Упражнение 1.2.2. Постройте фреймовый оператор для фреймов из примеров 1.1.1 и 1.1.2.

Следующая теорема обобщает (1.6) на произвольные фреймы.

Теорема 1.2.1. Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм в пространстве ℓ_N^2 , и S его фреймовый оператор.

Тогда справедливы следующие три утверждения:

- 1) оператор S — самосопряженный и обратимый;
- 2) для любого x из ℓ_N^2 справедливо представление

$$x = \sum_{k=1}^M \langle x, \bar{\varphi}_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \bar{\varphi}_k$$

где $\bar{\varphi}_k = S^{-1}\varphi_k$ — канонический дуальный фрейм;

- 3) если $x = \sum_{k=1}^M c_k \varphi_k$, то справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^M |c_k|^2 = \sum_{k=1}^M |\langle x, S^{-1}\varphi_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^M |c_k - \langle x, S^{-1}\varphi_k \rangle|^2.$$

Другими словами, фреймовые коэффициенты $\{\langle x, \bar{\varphi}_k \rangle\}$ имеют минимальную ℓ_2 -норму среди всех коэффициентов $\{c_k\}$, которые представляют заданный элемент.

Доказательство. 1. Докажем, что фреймовый оператор S является инъекцией. Для этого покажем, что ядро фреймового оператора состоит из нуля.

Пусть $Sx = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k = 0$. С одной стороны, $\langle Sx, x \rangle = 0$, с другой стороны,

$$0 = \langle Sx, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, x \right\rangle = \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \geq A \|x\|^2.$$

Отсюда следует, что $\|x\| = 0$, следовательно, фреймовый оператор S — инъекция.

Теперь покажем, что фреймовый оператор — сюръекция.

Заметим, что $\ell_M^2 = \text{Ker } F^* \oplus (\text{Ker } F^*)^\perp = \text{Ker } F^* \oplus \text{Im } F$, и если x из пространства ℓ_M^2 , то он представим в виде $x = x_1 + x_2$, где x_1 из $\text{Ker } F^*$, а x_2 из $\text{Im } F$.

Возьмем y из пространства ℓ_N^2 . Существуют коэффициенты $\{c_k\}$ из ℓ_M^2 такие, что $F^*\{c_k\} = y$. Так как $\{c_k\}$ из ℓ_M^2 , то $\{c_k\} = \{c'_k\} + \{c''_k\}$, где $\{c'_k\} \in \text{Ker } F^*$ и $\{c''_k\} \in \text{Im } F$. Получаем

$$y = F^*\{c_k\} = 0 + F^*\{c''_k\} = F^*Fz = Sz.$$

Следовательно, фреймовый оператор S является сюръекцией, и, таким образом, S — обратимый.

Покажем, что фреймовый оператор самосопряженный, то есть $S^* = S$.

По определению $S = F^*F$. Найдем сопряженный оператор S^* :

$$S^* = (F^*F)^* = F^*F^{**} = F^*F = S.$$

2. Для произвольного x имеем:

$$x = SS^{-1}x = F^*FS^{-1}x = F^*\{\langle S^{-1}x, \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M = \sum_{k=1}^M \langle S^{-1}x, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

Если запишем $x = S^{-1}Sx$, то получим:

$$x = S^{-1} \left(\sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle S^{-1} \varphi_k$$

и 2) доказано.

3. По условию нам дано $x = \sum_{k=1}^M c_k \varphi_k$.

Возьмем следующий набор коэффициентов:

$$\{c_k\}_{k=1}^M = \{c_k\}_{k=1}^M - \{\langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M + \{\langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M.$$

Имеем

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^M (c_k - \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle + \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle) \varphi_k = \\ &= \sum_{k=1}^M (c_k - \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle) \varphi_k + \sum_{k=1}^M \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle \varphi_k = \\ &= \sum_{k=1}^M (c_k - \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle) \varphi_k + x. \end{aligned}$$

Получаем, что $(c_k - \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle) \varphi_k = 0$, следовательно,

$$\{c_k - \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle\} \in \text{Ker } F^*.$$

Для сопряженного оператора верно равенство $\text{Ker } F^* = (\text{Im } F)^\perp$. Следовательно,

$$\{\langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M \in \text{Im } F = (\text{Ker } F^*)^\perp.$$

Таким образом, $\{c_k\}_{k=1}^M - \{\langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M \perp \{\langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle\}_{k=1}^M$.

Применяем теорему Пифагора

$$\sum_{k=1}^M |c_k|^2 = \sum_{k=1}^M |\langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^M |c_k - \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle|^2.$$

▲

Почему $\{S^{-1} \varphi_k\}_{k=1}^M$ образуют фрейм?

Следствие 1.2.1. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ является базисом для ℓ_N^2 . Тогда существует единственное семейство $\{g_k\}_{k=1}^N$ из ℓ_N^2 такое, что

$$x = \sum_{k=1}^N \langle x, g_k \rangle \varphi_k, \quad \forall x \in \ell_N^2. \quad (1.7)$$

В терминах фреймного оператора $\{g_k\}_{k=1}^N = \{S^{-1} \varphi_k\}_{k=1}^N$, и, кроме того, $\langle \varphi_i, g_k \rangle = \delta_{i,k}$.

Доказательство. Существование семейства $\{g_k\}_{k=1}^N$, удовлетворяющего равенству (1.7), следует из теоремы 1.2.1 (доказать единственность набора $\{g_k\}_{k=1}^N$ самостоятельно). Так как равенство (1.7) верно для любого x из ℓ_N^2 , то возьмем $x := \varphi_i$ для фиксированного i и, используя, что $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ — базис, получаем $\langle \varphi_i, g_k \rangle = \delta_{i,k}$ для всех $k = 1, 2, \dots, N$. ▲

Теорема 1.2.2. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является фреймом в конечномерном векторном пространстве ℓ_N^2 . Тогда существуют коэффициенты $\{d_k\}_{k=1}^M \in \mathbb{C}^M$ такие, что $x = \sum_{k=1}^M d_k \varphi_k$ и

$$\sum_{k=1}^M |d_k| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^M |c_k| : x = \sum_{k=1}^M c_k \varphi_k \right\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in \ell_N^2$. Для него найдутся коэффициенты $\{c_k\}_{k=1}^M$ такие, что $x = \sum_{k=1}^M c_k \varphi_k$. Пусть $r := \sum_{k=1}^M |c_k|$.

Мы хотим найти минимальную l_1 -норму для этих коэффициентов. Ограничим свой поиск среди коэффициентов $\{d_k\}_{k=1}^M$ на компакте:

$$\mathcal{M} := \left\{ \{d_k\}_{k=1}^M \in \mathbb{C}^M : |d_k| \leq r, k = 1, 2, \dots, M \right\}.$$

$\mathcal{M}$ — компакт как замкнутое, ограниченное множество в конечномерном пространстве. Более того, мы можем сузить поиск до множества

$$\left\{ \{d_k\}_{k=1}^M \in \mathcal{M} : x = \sum_{k=1}^M d_k \varphi_k \right\},$$

которое также является компактом. Остается доказать непрерывность функции: $\Phi: \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{R}; \Phi\{d_k\}_{k=1}^M := \sum_{k=1}^M |d_k|$. ▲

Есть важное различие между теоремой 1.2.1 и теоремой 1.2.2. В теореме 1.2.1 доказано не только существование, но и единственность фреймовых коэффициентов, минимизирующих l_2 -норму. В теореме 1.2.2 доказано только существование коэффициентов, минимизирующих l_1 -норму.

В силу теоремы 1.1.1, любая конечная последовательность векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является фреймом в своей линейной оболочке. Если $\text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M \neq \ell_N^2$, то ортогональную проекцию на $\text{span}\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ можно выразить через $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$.

Теорема 1.2.3. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм подпространства W векторного пространства V . Тогда ортогональная проекция P на W :

$$Px = \sum_{k=1}^M \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle \varphi_k. \quad (1.8)$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для определенного равенством (1.8) оператора P имеем: $Px = x$ для $x \in W$, и $Px = 0$ для $x \in W^\perp$. Первое равенство следует из теоремы 1.2.1, а второе — из равенства $S^{-1}(W) = W$. ▲

Пример 1.2.1.

Пусть $\{e_k\}_{k=1}^2$ — ортонормированный базис в пространстве ℓ_2^2 . Пусть $\varphi_1 = e_1$, $\varphi_2 = e_1 - e_2$, $\varphi_3 = e_1 + e_2$. Тогда $\{\varphi_k\}_{k=1}^3$ — фрейм для ℓ_2^2 . Используя определение фреймового оператора, получим, что

$$Se_1 = \langle e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 - e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle (e_1 + e_2) = e_1 + e_1 - e_2 + e_1 + e_2 = 3e_1;$$

$$Se_2 = \langle e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 - e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle e_2, e_1 + e_2 \rangle (e_1 + e_2) = -e_1 + e_2 + e_1 + e_2 = 2e_2.$$

Следовательно, $S^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1$, $S^{-1}e_2 = \frac{1}{2}e_2$, и канонический дуальный фрейм $\{\varphi_k\}_{k=1}^3 = \{S^{-1}\varphi_k\}_{k=1}^3 = \{\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\}$.

Таким образом, каждый вектор x из ℓ_2^2 можно представить в следующем виде:

$$x = \sum_{k=1}^3 \langle x, S^{-1}\varphi_k \rangle \varphi_k = \frac{1}{3} \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2 \rangle (e_1 - e_2) + \langle x, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \rangle (e_1 + e_2).$$

Если к ортонормированному базису $\{e_k\}_{k=1}^N$ в ℓ_N^2 добавить конечный набор векторов, то получим фрейм для ℓ_N^2 .

Если $\{g_k\}_{k=1}^N$ — семейство векторов из ℓ_N^2 таких, что

$$R := \left(\sum_{k=1}^N \|e_k - g_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1,$$

то $\{g_k\}_{k=1}^N$ также является базисом (вообще говоря, не ортонормированным) для ℓ_N^2 . Действительно, для набора скаляров $\{c_k\}_{k=1}^N$ имеем:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^N c_k g_k \right\| &\geq \left\| \sum_{k=1}^N c_k e_k \right\| - \left\| \sum_{k=1}^N c_k (g_k - e_k) \right\| \geq \\ &\geq \left(\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^N \|g_k - e_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (1 - R) \left(\sum_{k=1}^N |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Проведенные преобразования показывают, что набор векторов $\{g_k\}_{k=1}^N$ линейно независим, а количество векторов совпадает с размерностью пространства.

Определение 1.2.1. Говорят, что фреймы $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ и $\{\psi_k\}_{k=1}^M$ в ℓ_N^2 эквивалентны, если существует обратимый оператор L на ℓ_N^2 , для которого $L\varphi_k = \psi_k$ для $k = 1, \dots, M$; они унитарно эквивалентны, если L может быть выбран унитарным.

Теорема 1.2.4. Для произвольного фрейма $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ фрейм $\{S^{-1/2}\varphi_k\}_{k=1}^M$ является фреймом Парсеваля — Стеклова. Таким образом, каждый фрейм эквивалентен фрейму Парсеваля — Стеклова.

Доказательство. Через $S^{-1/2}$ обозначим положительный квадратный корень положительного самосопряженного оператора S^{-1} [8, с. 72]. Для каждого x из ℓ_N^2 верно представление

$$x = S^{-1/2} S S^{-1/2} x = \sum_{k=1}^M \langle S^{-1/2} x, \varphi_k \rangle S^{-1/2} \varphi_k = \sum_{k=1}^M \langle x, S^{-1/2} \varphi_k \rangle S^{-1/2} \varphi_k.$$

Таким образом, получаем, что $\{S^{-1/2} \varphi_k\}_{k=1}^M$ является фреймом Парсеваля — Стеклова. ▲

Векторы-столбцы канонического двойного фрейма определяются равенством $\tilde{\varphi}_k = S^{-1} \varphi_k$, из которого следует, что транспонированные векторы-строки $\tilde{\varphi}_k^* = \varphi_k^* S^{-1}$. Располагая их в виде матрицы, получим равенство для оператора анализа канонического двойного фрейма $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} = F S^{-1}.$$

Задача. Показать, что канонический двойный фрейм имеет фреймовые границы B^{-1} и A^{-1} соответственно. Как связан оператор S с фреймовым оператором фрейма $\tilde{F}$?

Для векторов u, v из ℓ_N^2 определим оператор тензорного произведения $u \otimes v : \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2$ равенством $(u \otimes v)x = \langle x, v \rangle u$, $x \in \ell_N^2$.

В некоторых задачах оказывается полезным такое представление фреймового оператора S :

$$Sf = F^* F f = \sum_{k=1}^M \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^M (\varphi_k \otimes \varphi_k) f, \quad f \in \ell_N^2.$$

Из теоремы 1.2.1 мы получаем, что для каждого x из ℓ_N^2 справедливо фреймовое разложение:

$$x = \sum_{k=1}^M \langle x, S^{-1} \varphi_k \rangle \varphi_k. \quad (1.9)$$

Так как фрейм состоит из, возможно, линейно зависимых элементов, то фреймовое разложение не единственное, то есть наряду с (1.9) можно получать и другие представления вида

$$x = \sum_{k=1}^M a_k \varphi_k.$$

Возможность получать различные представления для одного и того же вектора (сигнала) имеет определенную ценность в обработке сигналов, в частности, в борьбе с шумами.

В равенстве (1.9) участвует обратный оператор S^{-1} , нахождение которого в пространствах с большим N представляет трудную задачу. Если в качестве фрейма взять фрейм Парсеваля — Стеклова, то такой задачи не возникает, т. к. справедлива следующая лемма:

Лемма 1.2.3. Набор векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является фреймом Парсеваля — Стеклова в пространстве ℓ_N^2 тогда и только тогда, когда фреймовый оператор является единичным: $Sx = Ix$ для $x \in \ell_N^2$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм Парсеваля — Стеклова. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} \langle Sx, x \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, x \right\rangle = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, x \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = \|x\|^2 = \langle Ix, x \rangle \end{aligned}$$

для всех x из ℓ_N^2 . Отсюда следует, что $S = I$.

Обратно для произвольной системы векторов $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ определяем

$$Sx = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

для всех x из ℓ_N^2 . Тогда

$$\begin{aligned} \langle Sx, x \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, x \right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, x \rangle = \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что $S = I$, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = \|x\|^2,$$

которое является определением фрейма Парсеваля — Стеклова. ▲

Таким образом, фреймы Парсеваля — Стеклова являются наиболее удобными для приложений, а равенство $S = I$ позволяет упростить вычисления канонического дуального фрейма и фреймовое представление:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_k &= \varphi_k, \\ x &= \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k. \end{aligned}$$

В теореме 1.2.5 показана связь между собственными значениями фреймового оператора и нормами элементов фрейма.

Теорема 1.2.5. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм в пространстве ℓ_N^2 . Пусть $\{g_j\}_{j=1}^N$ — собственные векторы фреймового оператора S , соответствующие собственным значениям фреймового оператора $\{\lambda_k\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

- 1) $\sum_{k=1}^M |\langle \varphi_k, g_j \rangle|^2 = \lambda_j$ для всех $1 \leq j \leq N$;
- 2) $\sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2 = \text{След } S = \sum_{j=1}^N \lambda_j$, для фрейма Парсеваля — Стеклова верно равенство $\sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2 = N$;
- 3) для равномерного фрейма Парсеваля — Стеклова $\|\varphi_k\|^2 = \frac{N}{M}$ для всех $1 \leq k \leq M$.

Доказательство. 1. Так как по теореме 1.2.1 оператор S самосопряженный, то его собственные векторы $\{g_j\}_{j=1}^N$, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_k\}$, образуют ортонормированный базис. Следовательно, произвольный элемент пространства ℓ_N^2 может быть представлен в виде

$$x = \sum_{k=1}^N \langle x, g_k \rangle g_k \quad \text{и} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^N |\langle x, g_k \rangle|^2.$$

С одной стороны, по определению фреймового оператора

$$Sx := \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

с другой стороны,

$$Sx = \sum_{j=1}^N \langle x, g_j \rangle Sg_j = \sum_{j=1}^N \lambda_j \langle x, g_j \rangle g_j.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \langle Sx, x \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, x \right\rangle = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, x \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^N \lambda_j \langle x, g_j \rangle g_j, x \right\rangle = \sum_{j=1}^N \lambda_j |\langle x, g_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Теперь зафиксируем k и вместо x подставим g_k :

$$\begin{aligned} \langle Sg_k, g_k \rangle &= \sum_{j=1}^M |\langle g_k, \varphi_j \rangle|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^N \lambda_j \langle g_k, g_j \rangle g_j, g_k \right\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j |\langle g_k, g_j \rangle|^2 = \lambda_k. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $\sum_{j=1}^M |\langle g_k, \varphi_j \rangle|^2 = \lambda_k, \quad k = 1, \dots, N$.

2. Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^N |\langle \varphi_k, g_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M |\langle \varphi_k, g_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^N \lambda_j = \text{tr} S$$

(для фрейма Парсеваля — Стеклова $\sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = \|x\|^2$. Данное равенство справедливо для любого x , следовательно, можем вместо x подставить g_j при фиксированном j).

Имеем

$$\sum_{k=1}^M |\langle g_j, \varphi_k \rangle|^2 = \|g_j\|^2 = 1 = \lambda_j \quad \text{для любого } j = \overline{1, N}.$$

Тогда $\sum_{j=1}^N \lambda_j = \sum_{j=1}^N 1 = N = \sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2$.

3. Используя то, что фрейм равномерный, т. е. с одинаковыми нормами, получаем

$$M\|\varphi_k\|^2 = N \Rightarrow \|\varphi_k\|^2 = \frac{N}{M}, \quad k = 1, \dots, M.$$

Таким образом, чем больше по объему фрейм, тем меньше будет норма его элементов. Если же $\|\varphi_k\|^2 = 1$ для всех $k = 1, \dots, M$, то количество элементов во фрейме равно размерности пространства и по лемме 1.1.2 он образует ортонормированный базис в пространстве ℓ_N^2 . $\blacktriangle$

Упражнение 1.2.3. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм в пространстве ℓ_N^2 , а B — его оптимальная верхняя граница. Докажите, что

$$B \leq \sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2 \leq NB.$$

Упражнение 1.2.4. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является жестким нормированным фреймом в пространстве ℓ_N^2 . Докажите, что фреймовая граница $A \geq 1$ и $A = 1$ тогда и только тогда, когда $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является ортонормированным базисом.

По теореме 1.2.1 для каждого элемента $x \in \ell_N^2$ можем найти коэффициенты $\{(x, \varphi_k)\}_{k=1}^M$ такие, что:

$$x = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle S^{-1} \varphi_k = S^{-1} F^* \{(x, \varphi_k)\}_{k=1}^M.$$

В этой формуле участвует обратный фреймовый оператор, найти матрицу которого бывает непросто.

Поэтому рассмотрим несколько известных вычислительных алгоритмов, обходящих эту проблему. Начнем с так называемого **фреймового алгоритма**.

Лемма 1.2.4. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является фреймом в пространстве ℓ_N^2 с границами A и B . Для каждого $x \in \ell_N^2$ определена последовательность $\{g_k\}_{k=0}^\infty$:

$$g_0 = 0, \quad g_k = g_{k-1} + \frac{2}{A+B} S(x - g_{k-1}), \quad k \geq 1.$$

Тогда

$$\|x - g_k\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A} \right)^k \|x\|.$$

Доказательство. Пусть I — тождественный оператор в пространстве ℓ_N^2 . Рассмотрим следующее скалярное произведение:

$$\langle (I - \frac{2}{A+B} S)x, x \rangle = \|x\|^2 - \frac{2}{A+B} \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \frac{2A}{A+B} \|x\|^2 = \frac{B-A}{B+A} \|x\|^2.$$

Соответственно

$$-\frac{B-A}{B+A} \|x\|^2 \leq \langle (I - \frac{2}{A+B} S)x, x \rangle.$$

И, значит,

$$|\langle (I - \frac{2}{A+B} S)x, x \rangle| \leq \frac{B-A}{B+A} \|x\|^2.$$

Воспользуемся определением последовательности $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} x - g_k &= x - g_{k-1} - \frac{2}{A+B} S(x - g_{k-1}) = \left(I - \frac{2}{A+B} S\right) (x - g_{k-1}) = \left(I - \frac{2}{A+B} S\right)^2 \times \\ &\times (x - g_{k-2}) = \left(I - \frac{2}{A+B} S\right)^k (x - g_0). \end{aligned}$$

Теперь оценим норму этой разности:

$$\|x - g_k\| = \|(I - \frac{2}{A+B} S)^k (x - g_0)\| \leq \|I - \frac{2}{A+B} S\|^k \|x - g_0\| \leq \left(\frac{B-A}{B+A}\right)^k \|x\|.$$

▲

В этом алгоритме нам необходимо знать лишь границы фрейма. Гарантия быстрой сходимости тоже зависит от них. Если B намного больше A , то сходимость будет медленнее. Но существуют другие алгоритмы, которые гарантируют более быструю сходимость. Вот, например, метод Чебышева:

Теорема 1.2.6. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм в пространстве ℓ_N^2 с границами A и B и пусть

$$\rho := \frac{B-A}{B+A}, \quad \sigma := \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}.$$

Для каждого $x \in \ell_N^2$ определена последовательность $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ из ℓ_N^2 и последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$g_0 = 0, \lambda_1 = 2, \quad g_1 = \frac{2}{A+B} S f,$$

$$\lambda_k = \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{4} \lambda_{k-1}}, \quad g_k = \lambda_k \left(g_{k-1} - g_{k-2} + \frac{2}{A+B} S(f - g_{k-1}) \right) + g_{k-2}, \quad \text{для } k \geq 2.$$

Тогда

$$\|f - g_k\| \leq \frac{2\sigma^k}{1 + \sigma^{2k}} \|f\|.$$

Алгоритм Чебышева гарантирует быструю сходимость фреймового алгоритма даже при B намного большем, чем A . Знание фреймовых границ является также необходимым для построения алгоритма Чебышева.

В теореме 1.2.7 описаны необходимые и достаточные условия на оператор S , чтобы он был фреймовым. Собственные значения оператора S расположим в порядке убывания: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$; нормы элементов фрейма обозначим через a_k и также расположим в порядке убывания, т. е. $\|\varphi_k\| = a_k$ и $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_M$.

Теорема 1.2.7. Оператор $S: \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2$ является фреймовым оператором для фрейма $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ такого, что $\|\varphi_k\| = a_k$ для всех $k = 1, \dots, M$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) оператор S положительный;
- 2) все собственные значения оператора S строго положительны;
- 3) $\sum_{k=1}^N \lambda_k = \sum_{k=1}^M a_k$;

4) для любого $p: 1 \leq p \leq N-1$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^p a_k \leq \sum_{k=1}^p \lambda_k.$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма из [7].

Лемма 1.2.5. Пусть $S: \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2$ положительный оператор ранга N , $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ — собственные значения S и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N > 0$, $\{e_k\}_{k=1}^N$ — ортонормированные собственные векторы S . Если c — положительное число, такое, что $\lambda_k \geq c \geq \lambda_{k+1}$ для каждого $1 \leq k \leq N-1$, то существует единичный вектор $u \in \text{span}\{e_k, e_{k+1}\}$ такой, что $S - c(u \otimes u)$ положительный и $\text{rank}(S - c(u \otimes u)) = N-1$.

Доказательство. Если S — самосопряженный оператор конечного ранга и $\|S\| = \lambda_{\max} \leq c$, то наименьшее собственное значение можно задать следующим образом $\|(S+cI)^{-1}\|^{-1}$. Проверим, что это так. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ — собственные значения матрицы оператора S ; $\lambda_1 + c \geq \lambda_2 + c \geq \dots \geq \lambda_N + c$ — собственные значения оператора $S + Ic$ при условии, что $c \geq \lambda_{\max} > 0$, следовательно, собственными значениями для оператора $(S + Ic)^{-1}$ являются числа $\frac{1}{\lambda_1 + c}, \frac{1}{\lambda_2 + c}, \dots, \frac{1}{\lambda_N + c}$, причем $\frac{1}{\lambda_1 + c} \leq \frac{1}{\lambda_2 + c} \leq \dots \leq \frac{1}{\lambda_N + c}$. Таким образом, $\|(S + Ic)^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_N + c}$ и $\|(S + cI)^{-1}\|^{-1} = \lambda_N + c$, следовательно, наименьшее собственное значение λ_N равно $\|(S + cI)^{-1}\|^{-1} - c$.

Функция, задающая наименьшее собственное значение, непрерывна как композиция непрерывных функций на множестве самосопряженных операторов конечного ранга.

Возьмем $c \in [\lambda_{j+1}, \lambda_j]$ и пусть $S_u := S - c(u \otimes u)$, где u — произвольный единичный вектор из $\text{span}\{e_k, e_{k+1}\}$.

Покажем, что оператор S_u самосопряженный, как композиция самосопряженных операторов. Оператор S положительный, следовательно, самосопряженный. Осталось показать, что $c(u \otimes u)$ самосопряженный, т. е. выполнено условие

$$\langle c(u \otimes u)x, v \rangle = \langle x, c(u \otimes u)v \rangle \quad (1.10)$$

для всех x, v из ℓ_N^2 .

Распишем левую часть равенства (1.10)

$$\langle c(u \otimes u)x, v \rangle = \langle c \langle x, u \rangle u, v \rangle = \langle c \langle x, u \rangle u, v \rangle \quad (1.11)$$

и правую часть

$$\langle x, c(u \otimes u)v \rangle = \langle x, c \langle v, u \rangle u \rangle = \langle c \langle v, u \rangle u, x \rangle. \quad (1.12)$$

Получаем, что (1.11) = (1.12), следовательно, оператор $c(u \otimes u)$ самосопряженный. Таким образом, оператор S_u самосопряженный.

Запишем матрицу для оператора $S_u = S - c(u \otimes u)$.

Пусть $u = e_k$, тогда

$$S_{e_k} = S - c(e_k \otimes e_k) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k - c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Наименьшее собственное значение оператора $S - c(e_k \otimes e_k)$ будет равно $\lambda_k - c$ или λ_N . Так как по условию леммы $c \leq \lambda_k$, то $\lambda_k - c \geq 0$ и $\lambda_N \geq 0$.

Пусть теперь $u = e_{k+1}$, тогда

$$S_{e_{k+1}} = S - c(e_{k+1} \otimes e_{k+1}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{k+1} - c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}.$$

Так как $c \geq \lambda_{k+1}$ по условию леммы, то наименьшее собственное значение оператора $S_{e_{k+1}}$ равно $\lambda_{k+1} - c \leq 0$.

Следовательно, по теореме о промежуточном значении существует вектор u такой, что $\|u\| = 1$ и u из $\text{span}\{e_k, e_{k+1}\}$, а также наименьшее собственное значение оператора S_u обращается в ноль. Таким образом, положительных собственных значений у оператора S_u ровно $N - 1$, значит, $\text{rank } S_u = N - 1$ и S_u положительный.

▲

Доказательство теоремы 1.2.7. Докажем, что существуют единичные векторы $\{u_k\}_{k=1}^M$ такие, что S допускает представление в виде

$$Sx = \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=1}^M (\varphi_k \otimes \varphi_k)x = \sum_{k=1}^M (\sqrt{a_k}u_k \otimes \sqrt{a_k}u_k, \varphi_k)x, \quad (1.13)$$

где $\varphi_k := \sqrt{a_k}u_k$.

Доказывать будем методом математической индукции.

Если $k = 1$, то $\text{rank } S = 1$, и (1.13) выполнено для $k = N$, считая верным равенство для $k = N - 1$.

Рассмотрим ортонормированные собственные векторы $\{e_k\}_{k=1}^N$ и соответствующие им собственные значения $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ оператора S .

Первый случай. Если $\lambda_1 \geq a_1 \geq \lambda_N$, то существует номер l : $1 \leq l \leq N - 1$ такой, что $\lambda_l \geq a_1 \geq \lambda_{l+1}$, и мы можем применить лемму 1.2.5, согласно которой существует единичный вектор u из $\text{span}\{e_l, e_{l+1}\}$ такой, что $S - a_1(u \otimes u)$ ранга $N - 1$ и его собственные значения расположены в порядке убывания $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \tilde{\lambda}_l, \lambda_{l+2}, \dots, \lambda_N$, где $\tilde{\lambda}_l := \lambda_l + \lambda_{l+1} - a_1$.

Пусть $u_1 = u$. Проверим, что выполнено условие в) для оператора $S - a_1(u \otimes u)$ и последовательности чисел $a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_k$. Для $1 \leq r \leq l$ получаем:

$$a_2 + \dots + a_r \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{r-1} \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{r-1}.$$

Для $l+1 \leq r \leq N - 1$

$$a_1 + \dots + a_l + a_{l+1} + \dots + a_r \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_l + \lambda_{l+1} + \dots + \lambda_r,$$

следовательно,

$$a_2 + \dots + a_l + a_{l+1} + \dots + a_r \leq \lambda_1 + \dots + (\lambda_l + \lambda_{l+1} - a_1) + \dots + \lambda_r,$$

$$a_2 + \dots + a_r \leq \lambda_1 + \dots + \tilde{\lambda} + \dots + \lambda_r.$$

Так как оператор $S - a_1(u \otimes u)$ ранга $N - 1$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2.7, то по индукции получаем оставшиеся элементы при разложении S с помощью последовательности $\{a_k\}_{k=1}^M$. То есть

$$S - a_1(u_1 \otimes u_1) = \sum_{k=2}^M a_k(u_k \otimes u_k),$$

$$Sx = \sum_{k=1}^M a_k(u_k \otimes u_k)x = \sum_{k=1}^M (\sqrt{a_k}u_k \otimes \sqrt{a_k}u_k)x = \sum_{k=1}^M (\varphi_k \otimes \varphi_k)x,$$

где $\varphi_k := \sqrt{a_k}u_k$.

Таким образом, мы получили определение фреймового оператора.

Второй случай. Если $a_1 < \lambda_N$, то мы не можем применить лемму 1.2.5.

Пусть p — самое большое целое число такое, что $a_1 + \dots + a_p < \lambda_N$; для остальных чисел выполнено неравенство $a_{p+1} + \dots + a_M > \lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1}$ и $a_{p+1} \leq a_1 \leq \lambda_N \leq \lambda_{N-1}$ (слева слагаемых больше $M - p > N - 1$ или $1 \leq p \leq M - N$).

Пусть $u_k := e_N$ для $k = 1, \dots, p$. Оператор $S - \sum_{k=1}^p a_k(u_k \otimes u_k)$ имеет ранг, равный N , и его собственные значения расположены в порядке убывания $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N-1} \geq \tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda} := \lambda_N - \sum_{k=1}^p a_k$. Выберем p так, чтобы $a_{p+1} \geq \tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda}$ — наименьшее собственное значение оператора $S - \sum_{k=1}^p a_k(u_k \otimes u_k)$. Таким образом, оператор $S - \sum_{k=1}^p a_k(u_k \otimes u_k)$ и последовательность $a_{p+1}, \dots, a_M$ удовлетворяют условиям предыдущего случая. Мы доказали, что оператор S — фреймовый оператор для фрейма $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$.

Докажем теперь, что если оператор S — фреймовый оператор для фрейма $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ такого, что $\|\varphi_k\|^2 = a_k$ для всех $k = 1, \dots, M$, то оператор S положительный, и выполнены условия 3)–4).

Покажем, что S — положительный оператор, то есть $\langle Sx, x \rangle \geq 0$ для $x \in \ell_N^2$.

$$\begin{aligned} \langle Sx, x \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, x \right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^M \langle x, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, x \rangle = \sum_{k=1}^M |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Условие 3) доказано в теореме 1.2.5.

Осталось показать 4). Предположим, что 4) не выполняется, то есть существует p , $N - 1 \geq p \geq 1$: $\sum_{k=1}^p a_p > \sum_{k=1}^p \lambda_k$.

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^M a_k = \sum_{k=1}^p a_k + \sum_{k=p+1}^M a_k > \sum_{k=1}^p \lambda_k + \sum_{k=p+1}^M a_k \geq \sum_{k=1}^p \lambda_k + \sum_{k=p+1}^N \lambda_k = \sum_{k=1}^N \lambda_k.$$

Получили противоречие с 3), значит, наше предположение неверно, и 4) выполнено. $\blacktriangle$

Рассмотрим еще один оператор, связанный с фреймом, это оператор Грама.

Пусть $\{g_1, g_2, \dots, g_M\}$ — система векторов в пространстве ℓ_N^2 . Матрицей Грама системы векторов $\{g_1, g_2, \dots, g_M\}$ называется матрица $G = [g_{kj}]$ размера $M \times M$ с элементами $g_{kj} = \langle g_j, g_k \rangle$ для $k, j = 1, \dots, M$.

Лемма 1.2.6 ([8]). Пусть G — матрица Грама векторов $\{g_1, g_2, \dots, g_M\}$ размера $M \times M$.

Тогда

- 1) G положительно полуопределена;
- 2) для невырожденности матрицы G необходимо и достаточно, чтобы векторы $\{g_1, g_2, \dots, g_M\}$ были линейно независимы;
- 3) $\text{rang } G$ равен максимальному числу линейно независимых векторов в системе $\{g_1, g_2, \dots, g_M\}$.

Для фрейма $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ из пространства ℓ_N^2 определяем оператор Грама

$$G = FF^* \{\varphi_k\}_{k=1}^M = \left\{ \left\langle \sum_{k=1}^M a_k \varphi_k, \varphi_j \right\rangle \right\}_{j=1}^M,$$

действующий из пространства ℓ_M^2 в пространство ℓ_M^2 .

Оператору Грама фрейма $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ соответствует $M \times M$ матрица, состоящая из элементов вида $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \dots & \langle \varphi_1, \varphi_M \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & \dots & \langle \varphi_2, \varphi_M \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_M, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_M, \varphi_2 \rangle & \dots & \langle \varphi_M, \varphi_M \rangle \end{pmatrix}.$$

Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм Парсеваля — Стеклова с одинаковыми нормами, то на главной диагонали стоят элементы $\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle$, для $k = 1, 2, \dots, M$, равные $\|\varphi_k\|^2 = \frac{N}{M}$.

Теорема 1.2.8. Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ образует фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве ℓ_N^2 тогда и только тогда, когда оператор Грама G является (самосопряженным) проектором ранга N .

Доказательство. Необходимость. Покажем, что оператор G — самосопряженный проектор ранга N , т. е. $G^* = G$ и $G^2 = G$

$$G^*(FF^*)^* = F^{**}F^* = FF^* = G,$$

$$G^2 = FF^*(FF^*),$$

т. к. $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве ℓ_N^2 , то $F^*F = S = I$ (лемма 1.2.3), поэтому

$$G^2 = FF^* = G.$$

Таким образом, оператор Грама G является оператором ортогонального проектирования. Осталось показать, что ранг G равен N . По лемме 1.2.6 ранг матрицы G равен максимальному числу линейно независимых векторов в системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$. Любой фрейм в конечномерном пространстве содержит базис, поэтому максимальное число линейно независимых векторов в системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ будет равно размерности пространства, т. е. N .

Достаточность. Пусть теперь оператор Грама G — самосопряженный проектор ранга N , т. е. выполнены условия $G^* = G$ и $G^2 = G$. В силу того, что ранг G равен N , то система $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ является полной в ℓ_N^2 , и следовательно, фреймом. Так как $G^2 = FF^*FF^* = FF^*$, то $F(F^*F)F^* - FF^* = 0$. Отсюда получаем, что $F(F^*F - I)F^* = 0$ и $F^*F = I$.

Таким образом, по лемме 1.2.3 $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ образует фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве ℓ_N^2 . $\blacktriangle$

1.3. Фреймы и операция свертки

В данном параграфе мы исследуем устойчивость фреймов по отношению к операции свертки, которая является интересной для практических приложений. Операции классической обработки сигналов, такие как стационарное удаление шума, передача сигнала, упреждающее кодирование, выполняются с помощью линейных инвариантных относительно сдвига операторов, каждый из которых может быть представлен в виде свертки.

Немного изменим обозначения для упрощения вычислений, приведенных ниже. Заменим нумерацию координат вектора с $\{1, 2, \dots, N\}$ на $\{0, 1, \dots, N-1\}$, компоненты k -го вектора f_k будем записывать как $f_k(l)$, где $k = 1, 2, \dots, M$, $l = 0, 1, \dots, N-1$ и продолжим вектор f из пространства ℓ_N^2 на все целые числа, требуя, чтобы f был N -периодическим:

$$f(l + mN) = f(l), \quad l, m \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами, значение $f(l)$ зависит только от вычета l по модулю N и $\ell_N^2 = \ell^2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. В этих обозначениях скалярное произведение и норма в ℓ_N^2 есть

$$\langle f, g \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} f(l)\overline{g(l)},$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\sum_{l=0}^{N-1} |f(l)|^2 \right)^{1/2}.$$

Напомним определение и основные свойства дискретного преобразования Фурье.

Определение 1.3.1 ([9]). Пусть $f = (f(0), f(1), \dots, f(N-1)) \in \ell_N^2$. Для $m = 0, 1, \dots, N-1$ определим

$$\hat{f}(m) = \sum_{l=0}^{N-1} f(l)e^{-2\pi iml/N}.$$

Пусть

$$\hat{f} = (\hat{f}(0), \hat{f}(1), \dots, \hat{f}(N-1)).$$

Тогда $\hat{f} \in \ell_N^2$. Отображение $\cdot : \ell_N^2 \rightarrow \ell_N^2$, которое связывает f и $\hat{f}$, называется дискретным преобразованием Фурье.

Лемма 1.3.1 ([9]). Пусть $f = (f(0), \dots, f(N-1))$, $w = (w(0), \dots, w(N-1))$ из ℓ_N^2 . Тогда

1) (формула обращения преобразования Фурье)

$$f(m) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(l)e^{2\pi iml/N} \text{ для } m = 0, 1, \dots, N-1;$$

2) (равенство Парсеваля)

$$\langle f, w \rangle = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(l) \overline{\hat{w}(l)} = \frac{1}{N} \langle \hat{f}, \hat{w} \rangle;$$

3) (формула Планшереля)

$$\|f\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} |\hat{f}(l)|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{f}\|^2.$$

Следующая теорема показывает связь между фреймом и его дискретным преобразованием Фурье.

Теорема 1.3.1. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ образует фрейм с границами A и B в пространстве ℓ_N^2 тогда и только тогда, когда $\{\hat{\varphi}_k\}_{k=1}^M$ является фреймом с границами NA и NB в пространстве ℓ_N^2 .

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм с границами A и B , т. е.

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^M |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2,$$

для любого f из ℓ_N^2 .

Докажем, что $\{\hat{\varphi}_k\}_{k=1}^M$ — фрейм в пространстве ℓ_N^2 .

Рассмотрим $\sum_{k=1}^M |\langle f, \hat{\varphi}_k \rangle|^2$, используя теорему 1.3.1 и равенство $(\hat{f})^\vee = f$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M |\langle f, \hat{\varphi}_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, \varphi_k \rangle|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^M N^2 |\langle \hat{f}, \varphi_k \rangle|^2 = N^2 \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, \varphi_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Так как $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм с границами A и B , то, используя (1.2), получим:

$$N^2 \sum_{k=1}^M |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq BN^2 \|\hat{f}\|^2 = BN^2 \frac{1}{N} \|f\|^2 = BN \|f\|^2$$

и

$$N^2 \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, \varphi_k \rangle|^2 \geq AN^2 \|\hat{f}\|^2 = AN^2 \frac{1}{N} \|f\|^2 = AN \|f\|^2.$$

Таким образом, получаем, что

$$AN \|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^M |\langle f, \hat{\varphi}_k \rangle|^2 \leq BN \|f\|^2,$$

а это и есть определение фрейма, следовательно, $\{\hat{\varphi}_k\}_{k=1}^M$ — фрейм с границами NA и NB .

Докажем достаточность, используя следующие равенства:

$$(\hat{f})^\sim = f \text{ и } \langle \hat{f}, \hat{w} \rangle = \frac{1}{N} \langle f, w \rangle.$$

Пусть $\{\hat{\varphi}_k\}_{k=1}^M$ — фрейм с границами NA и NB в пространстве ℓ_N^2 , т. е. выполнены соотношения

$$AN\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^M |\langle f, \hat{\varphi}_k \rangle|^2 \leq BN\|f\|^2 \quad (1.14)$$

для любого $f \in \ell_N^2$.

Получаем, что

$$\sum_{k=1}^M |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^M |\langle (\hat{f})^\sim, (\hat{\varphi}_k)^\sim \rangle|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, \hat{\varphi}_k \rangle|^2.$$

Так как (1.14) выполнено для любого $f \in \ell_N^2$, то, с одной стороны,

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, \hat{\varphi}_k \rangle|^2 \leq \frac{1}{N^2} A\|\hat{f}\|^2 = \frac{1}{N^2} AN^2\|f\|^2 = A\|f\|^2, \quad (1.15)$$

а с другой —

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, \hat{\varphi}_k \rangle|^2 \geq \frac{1}{N^2} B\|\hat{f}\|^2 = \frac{1}{N^2} BN^2\|f\|^2 = B\|f\|^2. \quad (1.16)$$

Таким образом, объединяя (1.15) и (1.16), получаем

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^M |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$$

для каждого $f \in \ell_N^2$. Что и требовалось доказать. ▲

Для формулировки следующих результатов нам придется напомнить понятие свертки двух векторов.

Определение 1.3.2 ([9]). Для $f, w \in \ell_N^2$ сверткой $f * w \in \ell_N^2$ называется вектор с координатами

$$f * w(m) = \sum_{l=0}^{N-1} f(m-l)w(l), \text{ для } m=0, 1, \dots, N-1.$$

Напомним следующий классический результат.

Лемма 1.3.2 ([9]). Пусть $f, w \in \ell_N^2$. Тогда для каждого m

$$(f * w)(m) = \hat{f}(m)\hat{w}(m).$$

Таким образом, ДПФ преобразует операцию свертки в покомпонентное умножение.

Интересным является такой вопрос. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм для пространства ℓ_N^2 . Какими свойствами должен обладать вектор w для того, чтобы элементы $\{w * \varphi_k\}_{k=1}^M$ оставались фреймом в пространстве ℓ_N^2 ? Ответом является следующая теорема.

Теорема 1.3.2. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм для пространства ℓ_N^2 с границами A и B и пусть вектор w из ℓ_N^2 . Элементы $\{w * \varphi_k\}_{k=1}^M$ образуют фрейм в пространстве ℓ_N^2 тогда и только тогда, когда $\hat{w}(l) \neq 0$ для любого $l = 0, \dots, N-1$. В этом случае фрейм $\{w * \varphi_k\}_{k=1}^M$ имеет границы

$$A \min_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 \quad \text{и} \quad B \max_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2.$$

Доказательство ($\Rightarrow$). Пусть элементы $\{w * \varphi_k\}_{k=1}^M$ образуют фрейм в пространстве ℓ_N^2 . Тогда по теореме 1.3.1 система элементов $\{(w * \varphi_k)\}_{k=1}^M = \{\hat{w}(l) \cdot \hat{\varphi}_k(l)\}_{k=1}^M$ также образует фрейм в ℓ_N^2 . Запишем оператор синтеза для фрейма $\{\hat{w}(l) \cdot \hat{\varphi}_k(l)\}_{k=1}^M$

$$F^* = \begin{pmatrix} \hat{w}(1)\hat{\varphi}_1(1) & \hat{w}(1)\hat{\varphi}_2(1) & \dots & \hat{w}(1)\hat{\varphi}_M(1) \\ \hat{w}(2)\hat{\varphi}_1(2) & \hat{w}(2)\hat{\varphi}_2(2) & \dots & \hat{w}(2)\hat{\varphi}_M(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{w}(N)\hat{\varphi}_1(N) & \hat{w}(N)\hat{\varphi}_2(N) & \dots & \hat{w}(N)\hat{\varphi}_M(N) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что существует l такой, что $\hat{w}(l) = 0$, тогда система элементов $\{\hat{w}(l) \cdot \hat{\varphi}_k(l)\}_{k=1}^M$ не будет полной в пространстве ℓ_N^2 , а это противоречит тому, что она образует фрейм. Таким образом, мы получили противоречие и $\hat{w}(l) \neq 0$ для любого $l = 0, \dots, N-1$.

($\Leftarrow$). Распишем $\sum_{k=1}^M |\langle f, w * \varphi_k \rangle|^2$, используя леммы 1.3.1 и 1.3.2:

$$\sum_{k=1}^M |\langle f, w * \varphi_k \rangle|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, (w * \varphi_k) \rangle|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, \hat{w} \cdot \hat{\varphi}_k \rangle|^2. \quad (1.17)$$

Рассмотрим $\langle \hat{f}, \hat{w} \cdot \hat{\varphi}_k \rangle$:

$$\langle \hat{f}, \hat{w} \cdot \hat{\varphi}_k \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(l) \overline{\hat{w}(l) \hat{\varphi}_k(l)} = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(l) \overline{\hat{w}(l)} \overline{\hat{\varphi}_k(l)} = \langle \hat{f} \cdot \overline{\hat{w}(l)}, \hat{\varphi}_k \rangle. \quad (1.18)$$

Подставив (1.17) в (1.18), получим:

$$\sum_{k=1}^M |\langle f, w * \varphi_k \rangle|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f} \cdot \overline{\hat{w}(l)}, \hat{\varphi}_k \rangle|^2.$$

Используя теорему 1.3.1 и простое неравенство, справедливое для любых $a, b \in \ell_N^2$,

$$\|a\|^2 \min_{l=0, \dots, N-1} |b(l)|^2 \leq \|ab\| \leq \|a\|^2 \max_{l=0, \dots, N-1} |b(l)|^2,$$

получим:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f} \cdot \overline{\hat{w}(l)}, \hat{\varphi}_k \rangle|^2 \leq \frac{1}{N^2} \cdot NB \|\hat{f} \cdot \overline{\hat{w}(l)}\|^2 \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{N} B \|f\|^2 \max_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 = \frac{1}{N} B N \|f\|^2 \max_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 = \\ &= B \|f\|^2 \max_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M |\langle \hat{f}, \hat{w}(l) \rangle, \hat{\varphi}_k \rangle|^2 \geq \frac{1}{N^2} \cdot N A \|\hat{f} \hat{w}(l)\|^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{N} A \|\hat{f}\|^2 \min_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 = \frac{1}{N} A N \|f\|^2 \min_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 = \\ &= A \|f\|^2 \min_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Таким образом, объединяя (1.19) и (1.20), получаем:

$$A \|f\|^2 \min_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 \leq \sum_{k=1}^M |\langle f, w * \varphi_k \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \max_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2.$$

Так как, по условию теоремы, $\hat{w}(l) \neq 0$ для любого $l = 0, \dots, N-1$, то

$$A \min_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 > 0 \text{ и } B \max_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2 > 0,$$

следовательно, система векторов $\{w * \varphi_k\}_{k=1}^M$ образует фрейм. Числа $A \min_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2$ и $B \max_{l=0, \dots, N-1} |\hat{w}(l)|^2$ являются соответственно нижней и верхней границей фрейма. ▲

Из теоремы 1.3.2 можно получить следствие 1.3.1.

Следствие 1.3.1. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — жесткий фрейм с границей A для пространства ℓ_N^2 . Элементы $\{w * \varphi_k\}_{k=1}^M$ образуют фрейм Парсеваля — Стеклова тогда и только тогда, когда $|\hat{w}(l)| = \frac{1}{\sqrt{A}}$ для любого $l = 0, \dots, N-1$.

Упражнение 1.3.1. Докажите следствие 1.3.1.

Теорема 1.3.3 показывает устойчивость фреймов по отношению к действию операции свертки в конечномерных пространствах.

Теорема 1.3.3. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ и $\{\psi_j\}_{j=1}^L$ — фреймы в пространстве ℓ_N^2 с границами A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно. Свертка $\{\varphi_k * \psi_j\}_{j=1, k=1}^{L, M}$ образует фрейм в пространстве ℓ_N^2 из ML элементов с границами

$$A_3 = \min \{ A_1 \min_{l=1, \dots, N} \sum_{j=1}^L |\hat{\psi}_j(l)|^2, A_2 \min_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2 \}$$

и

$$B_3 = \{ B_1 \max_{l=1, \dots, N} \sum_{j=1}^L |\hat{\psi}_j(l)|^2, B_2 \max_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2 \}.$$

Доказательство. Свертку $\{\varphi_k * \psi_j\}_{j=1, k=1}^{j=L, k=M}$ будем рассматривать как

$$\{\varphi_1 * \psi_j\}_{j=1}^L \cup \{\varphi_2 * \psi_j\}_{j=1}^L \cup \dots \cup \{\varphi_M * \psi_j\}_{j=1}^L = \bigcup_{k=1}^M \{\varphi_k * \psi_j\}_{j=1}^L.$$

Распишем подробнее выражение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_k * \psi_j \rangle|^2 = \\ & = \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_1 * \psi_j \rangle|^2 + \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_2 * \psi_j \rangle|^2 + \dots + \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_M * \psi_j \rangle|^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Рассмотрим одну из сумм $\sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_k * \psi_j \rangle|^2$ при фиксированном k :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_k * \psi_j \rangle|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^L |\langle \hat{f}, (\varphi_k * \psi_j) \rangle|^2 = \\ & = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^L |\langle \hat{f}, \hat{\varphi}_k \hat{\psi}_j \rangle|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^L |\langle \hat{f} \hat{\varphi}_k, \hat{\psi}_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

По теореме 1.3.1, $\{\hat{\psi}_j\}_{j=1}^L$ — фрейм с границами NA_2 и NB_2 , поэтому

$$\frac{1}{N^2} NA_2 \|\hat{f} \hat{\varphi}_k\|^2 \leq \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_k * \psi_j \rangle|^2 \leq \frac{1}{N^2} NA_2 \|\hat{f} \hat{\varphi}_k\|^2. \quad (1.22)$$

Распишем подробнее левое неравенство, подставив (1.22) в (1.21),

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_k * \psi_j \rangle|^2 \geq \frac{A_2}{N} (\|\hat{f} \hat{\varphi}_1\|^2 + \|\hat{f} \hat{\varphi}_2\|^2 + \dots + \|\hat{f} \hat{\varphi}_M\|^2), \\ & \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_k * \psi_j \rangle|^2 \geq \frac{A_2}{N} \left(|\hat{f}(1)|^2 (|\hat{\varphi}_1(1)|^2 + |\hat{\varphi}_2(1)|^2 + \dots + |\hat{\varphi}_M(1)|^2) + \right. \\ & \quad \left. + |\hat{f}(2)|^2 (|\hat{\varphi}_1(2)|^2 + |\hat{\varphi}_2(2)|^2 + \dots + |\hat{\varphi}_M(2)|^2) + \dots \right. \\ & \quad \left. + |\hat{f}(N)|^2 (|\hat{\varphi}_1(N)|^2 + |\hat{\varphi}_2(N)|^2 + \dots + |\hat{\varphi}_M(N)|^2) \right) \geq \\ & \geq \frac{A_2}{N} \|\hat{f}\|^2 \min_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2 \geq A_2 \|f\|^2 \min_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2. \end{aligned}$$

Аналогично получаем правое неравенство

$$\sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_k * \psi_j \rangle|^2 \leq B_2 \|f\|^2 \max_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& A_2 \|f\|^2 \min_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2 \leq \\
& \leq \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^L |\langle f, \varphi_k * \psi_j \rangle|^2 \leq \\
& \leq B_2 \|f\|^2 \max_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k^2(l)|^2.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
& A_1 \|f\|^2 \min_{l=1, \dots, N} \sum_{j=1}^L |\hat{\psi}_j(l)|^2 \leq \\
& \leq \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M |\langle f, \psi_j * \varphi_k \rangle|^2 \leq \\
& \leq B_1 \|f\|^2 \max_{l=1, \dots, N} \sum_{j=1}^L |\hat{\psi}_j^2(l)|^2.
\end{aligned}$$

Так как $\{\hat{\varphi}_k\}_{k=1}^M$ и $\{\hat{\psi}_j\}_{j=1}^L$ — фреймы в пространстве ℓ_N^2 , то, в силу полноты системы, не существует l : $|\hat{\varphi}_k(l)| = 0$ для любого $k = 1, \dots, M$ и $|\hat{\psi}_j(l)| = 0$ для всех $j = 1, \dots, L$.

Поэтому $\min_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2$ и $\min_{l=1, \dots, N} \sum_{j=1}^L |\hat{\psi}_j(l)|^2$ больше нуля, и, следовательно, $\{\varphi_k * \psi_j\}_{j=1, k=1}^{LM}$ образует фрейм в пространстве ℓ_N^2 из ML элементов с границами

$$A_3 = \min\{A_1 \min_{l=1, \dots, N} \sum_{j=1}^L |\hat{\psi}_j(l)|^2, A_2 \min_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2\}$$

и

$$B_3 = \max\{B_1 \max_{l=1, \dots, N} \sum_{j=1}^L |\hat{\psi}_j(l)|^2, B_2 \max_{l=1, \dots, N} \sum_{k=1}^M |\hat{\varphi}_k(l)|^2\}.$$

▲

В статьях Б.И. Голубова [10] и А.М. Седлецкого [11] была изучена устойчивость полных систем функций относительно операции свертки в пространствах L^p , $1 \leq p < \infty$ на отрезках.

Глава 2

Конструкция фреймов Парсеваля — Стеклова в конечномерных пространствах

2.1. Конструкция равномерных фреймов Парсеваля — Стеклова

Вторая глава пособия посвящена в основном фреймам Парсеваля — Стеклова. Приведена общая схема построения равномерных фреймов Парсеваля — Стеклова в конечномерных евклидовых пространствах. Приводятся характеристики наборов вещественных чисел, которые являются нормами произвольных (т. е. неравномерных) фреймов Парсеваля — Стеклова, а также алгоритм построения фреймов Парсеваля — Стеклова для каждого такого набора.

Прежде чем перейти к конструкции равномерных фреймов Парсеваля — Стеклова, рассмотрим несколько способов построения фреймов Парсеваля — Стеклова с произвольными нормами.

Первый подход для построения фреймов Парсеваля — Стеклова основан на следующей лемме М.А. Наймарка [12; 13].

Теорема 2.1.1. *Для любого фрейма Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset H$ существует гильбертово пространство $H' \supset H$ и ортонормированный базис $\{e_k\} \subset H'$ такие, что $\varphi_k = P e_k$, где $P : H' \rightarrow H$ — ортогональный проектор.*

Теорема 2.1.1 описывает общий вид фреймов Парсеваля — Стеклова и показывает, что построение равномерных фреймов Парсеваля — Стеклова эквивалентно задаче описания проекторов, сохраняющих равенство норм.

Второй подход основан на выделении фрейма Парсеваля — Стеклова из ортогональной матрицы (см. ниже следствие 2.1.2). Вообще говоря, второй подход также не обеспечивает равенство норм для полученного фрейма Парсеваля — Стеклова. Остановимся на нем подробнее.

Рассмотрим прямоугольную $M \times N$ матрицу Λ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{M1} & \dots & \lambda_{MN} \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1.2 ([4]). Эквивалентны следующие условия:

1) существует число $A > 0$ такое, что для любого $\vec{c}$ из ℓ_N^2 выполняется неравенство:

$$A \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \leq \|\Lambda \vec{c}\|^2;$$

2) столбцы матрицы Λ образуют базис в своей линейной оболочке ℓ_M^2 ;

3) строки матрицы Λ образуют фрейм в пространстве ℓ_N^2 .

Доказательство. Обозначим столбцы $g_1, \dots, g_N$:

$$g_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i1} \\ \vdots \\ \lambda_{Mi} \end{pmatrix} \text{ для любого } i = 1, \dots, N;$$

$$\text{строки } \varphi_1, \dots, \varphi_M : \varphi_k = \begin{pmatrix} \lambda_{k1} \\ \vdots \\ \lambda_{kM} \end{pmatrix} \text{ для любого } k = 1, \dots, M.$$

Получаем, что

$$\Lambda \vec{c} = \Lambda \{c_i\}_{i=1}^N = \sum_{i=1}^N c_i g_i.$$

Тогда 1) можно записать в следующем виде:

$$A \sum_{i=1}^N |c_i|^2 \leq \|\Lambda \vec{c}\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^N c_i g_i \right\|^2.$$

Если $\left\| \sum_{i=1}^N c_i g_i \right\|^2 = 0$, то $\sum_{i=1}^N |c_i|^2 = 0$, следовательно, все $c_i = 0$. Получаем, что $\{g_i\}_{i=1}^N$ линейно независимы. Тогда $\{g_i\}_{i=1}^N$ образует базис в своей линейной оболочке.

Докажем, что из 1) следует 3).

Имеем

$$\Lambda \vec{c} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \vec{c} \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_M, \vec{c} \rangle \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$A \|\vec{c}\|^2 \leq \|\Lambda \vec{c}\|^2 = \sum_{k=1}^M |\langle \varphi_k, \vec{c} \rangle|^2.$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\sum_{k=1}^M |\langle \varphi_k, \vec{c} \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2 \|\vec{c}\|^2,$$

где $B = \sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2$. Таким образом, получаем определение фрейма для $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$.

▲

Следствие 2.1.1 ([4]). Строки матрицы Λ , рассматриваемые как векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_M$, образуют фрейм в пространстве ℓ_N^2 с границами A и B тогда и только тогда, когда

$$A \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^N c_k g_k \right\|^2 \leq B \sum_{k=1}^N |c_k|^2$$

для любого $\vec{c}$ из ℓ_N^2 .

Доказательство. Доказать самостоятельно.

Следствие 2.1.2 ([4]). Пусть Λ — унитарная матрица размерности $M \times M$. Тогда после удаления любых $M - N$ столбцов матрицы Λ строки оставшейся матрицы будут образовывать фрейм Парсеваля — Стеклова для пространства ℓ_N^2 .

Доказательство. Доказать самостоятельно.

В пространстве $\ell_N^2(\mathbb{C})$ такой универсальной матрицей является матрица дискретного преобразования Фурье. Зафиксируем произвольное $M \geq N$, $\omega := e^{\frac{2\pi i}{M}}$, где i — мнимая единица. Образует $M \times M$ матрицу:

$$W = \sqrt{\frac{1}{M}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{M-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{M-2} & \omega^{2(M-2)} & \dots & \omega^{(M-1)(M-2)} \\ 1 & \omega^{M-1} & \omega^{2(M-1)} & \dots & \omega^{(M-1)^2} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Столбцы и строки этой матрицы образуют ортонормированный базис пространства $\ell_M^2(\mathbb{C})$, называемый базисом Фурье.

Упражнение 2.1.1. Докажите, что столбцы и строки матрицы (2.1) образуют ортонормированный базис в пространстве $\ell_M^2(\mathbb{C})$.

Удаляя из этой матрицы произвольные $M - N$ столбцов, получим в оставшихся строках векторы $\varphi_0, \dots, \varphi_{M-1}$, которые образуют равномерный фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{C})$. Он обладает дополнительным свойством, например, устойчивостью к потерям: каждое его подмножество с количеством элементов, большим N , остается фреймом [4; 6].

Возникает естественный вопрос: будет ли равномерным фреймом Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ фрейм, элементы которого являются вещественными частями от фрейма Парсеваля — Стеклова $\varphi_0, \dots, \varphi_{M-1}$ в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{C})$.

Ответ на этот вопрос дают следующие предложения.

Предложение 2.1.1. Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{C})$, то $2M$ векторов $\{Re \varphi_k, Im \varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм для $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Возьмем $g \in \ell_N^2(\mathbb{R}) \subset \ell_N^2(\mathbb{C})$. Так как $\{\varphi_k\}$ — фрейм для $\ell_N^2(\mathbb{C})$, то $\varphi_k = p_k + iq_k$ и будем рассматривать g как элемент $\ell_N^2(\mathbb{C})$, тогда, по определению фрейма, должно выполняться

$$\begin{aligned} A\|g\| &\leq \sum_{k=1}^M |\langle g, \varphi_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^M |\langle g, p_k + iq_k \rangle|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^M |\langle g, p_k \rangle - i \langle g, q_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^M [\langle g, p_k \rangle^2 + \langle g, q_k \rangle^2] = \\ &= \sum_{k=1}^M \langle g, p_k \rangle^2 + \sum_{k=1}^M \langle g, q_k \rangle^2 \leq B\|g\|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $p_k = Re \varphi_k$, $q_k = Im \varphi_k$, получаем, что $\{Re \varphi_k, Im \varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм в $\ell_N^2(\mathbb{R})$ с теми же границами. $\blacktriangle$

Предложение 2.1.2. Каждый фрейм в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ является фреймом в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{C})$.

Доказательство. Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм для $\ell_N^2(\mathbb{R})$, то $f = \sum_{k=1}^M c_k \varphi_k$ для некоторого набора вещественных скаляров.

Если x из пространства $\ell_N^2(\mathbb{C})$, то $x = f + ig$, где $\{f, g\}$ из $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

Имеем

$$x = \sum_{k=1}^M c_k \varphi_k + i \sum_{k=1}^M d_k \varphi_k,$$

и полнота φ_k получена. ▲

Теорема 2.1.3. В пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ существует равномерный фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ с нормами, равными $\|\varphi_k\| = \sqrt{\frac{N}{M}}$ для любого $M \geq N$.

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие $M \times M$ матрицы отдельно для четного и нечетного числа M .

Пусть $M = 2k + 1$. В этом случае определяем матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{M-2} \\ \varphi_{M-1} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{M}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \cos 2\pi \frac{1}{M} & \cos 2\pi \frac{2}{M} & \dots & \cos 2\pi \frac{M-1}{M} \\ 0 & \sin 2\pi \frac{1}{M} & \sin 2\pi \frac{2}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{M-1}{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos 2\pi \frac{k}{M} & \cos 2\pi \frac{2k}{M} & \dots & \cos 2\pi \frac{k(M-1)}{M} \\ 0 & \sin 2\pi \frac{k}{M} & \sin 2\pi \frac{2k}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{k(M-1)}{M} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Докажем, что семейство $\{\varphi_k\}_{k=0}^{M-1}$ образует ортонормированный базис в пространстве $\ell_M^2(\mathbb{R})$.

Покажем сначала, что $\|\varphi_k\| = 1$ для всех $k = 0, \dots, M-1$.

Если $k = 0$, то $\|\varphi_k\|^2 = \frac{2}{M} \times \frac{M}{2} = 1$. Если $k = 2q - 1$, для $q = 1, \dots, k$, то

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|^2 &= \|\varphi_{2q-1}\|^2 = \frac{2}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \cos^2 2\pi \frac{ql}{M} = \frac{2}{M} \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{M-1} (1 + \cos 4\pi \frac{ql}{M}) = \\ &= \frac{2}{M} \left(\frac{M}{2} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{M-1} \cos 4\pi \frac{ql}{M} \right) = \frac{2}{M} \left(\frac{M}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{M-1} (\omega^{2q})^l \right) = \\ &= \frac{2}{M} \left(\frac{M}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - (\omega^{2q})^M}{1 - \omega^{2q}} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\omega = e^{\frac{2\pi i}{M}}$, $j^2 = -1$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - (\omega^{2q})^M}{1 - \omega^{2q}} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{\frac{2\pi i 2qM}{M}}}{1 - e^{\frac{2\pi i 2q}{M}}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \cos 4\pi q - j \sin 4\pi q}{1 - \cos \frac{4\pi q}{M} - j \sin \frac{4\pi q}{M}} \right) = \\ &= \frac{(1 - \cos 4\pi q)(1 - \cos \frac{4\pi q}{M})}{2 - 2 \cos \frac{4\pi q}{M}} = \frac{(1 - \cos 4\pi q)}{2} = \sin^2 2\pi q = 0 \text{ для } q = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $\|\varphi_{2q-1}\| = 1$ для всех $q = 1, \dots, k$.

Аналогично, если $k = 2q$, для всех $q = 1, \dots, k$.

$$\|\varphi_k\|^2 = \|\varphi_{2q}\|^2 = \frac{2}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sin^2 2\pi \frac{ql}{M} = \frac{2}{M} \left(\frac{M}{2} - \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{M-1} \cos 4\pi \frac{ql}{M} \right) = 1.$$

Таким образом, $\|\varphi_{2q}\|^2 = 1$ для всех $q = 1, \dots, k$.

Пусть $\omega = e^{\frac{2\pi i}{M}}$. Покажем, что $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0$ для $k \neq j$:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0, \varphi_{2q-1} \rangle &= \frac{2}{M\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{M-1} \cos 2\pi \frac{(2q-1)l}{M} = \frac{2}{M\sqrt{2}} \operatorname{Re} \sum_{l=0}^{M-1} (\omega^{2q-1})^l = 0; \\ \langle \varphi_0, \varphi_{2q} \rangle &= \frac{2}{M\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{M-1} \sin 2\pi \frac{2ql}{M} = \frac{2}{M\sqrt{2}} \operatorname{Im} \sum_{l=0}^{M-1} (\omega^{2q})^l = \\ &= \frac{2}{M\sqrt{2}} \operatorname{Im} \frac{1 - \omega^{2qM}}{1 - \omega^{2q}} = \frac{2}{M\sqrt{2}} \operatorname{Im} \frac{1 - e^{\frac{2\pi i 2qM}{M}}}{1 - e^{\frac{2\pi i 2q}{M}}} = \\ &= \frac{2}{M\sqrt{2}} \operatorname{Im} \frac{(1 - \cos 4\pi q + j \sin 4\pi q)(1 - \cos \frac{4\pi q}{M} + j \sin \frac{4\pi q}{M})}{2 - 2 \cos \frac{4\pi q}{M}} = \\ &= \frac{2}{M\sqrt{2}} \frac{\sin^2 2\pi q \sin \frac{4\pi q}{M}}{1 - \cos \frac{4\pi q}{M}} = 0; \\ \langle \varphi_{2q-1}, \varphi_{2q} \rangle &= \frac{2}{M} \sum_{l=1}^{M-1} \cos \frac{2\pi l(2q-1)}{M} \sin \frac{4\pi ql}{M} = \\ &= \frac{1}{M} \left[\sum_{l=1}^{M-1} \sin \frac{2\pi l(4q-1)}{M} + \sum_{l=1}^{M-1} \sin \frac{2\pi l}{M} \right] = \frac{1}{M} \operatorname{Im} \left[\sum_{l=1}^{M-1} (\omega^{4q+1})^l + \sum_{l=1}^{M-1} \omega^l \right] = \\ &= \frac{1}{M} \operatorname{Im} \left[\sum_{l=0}^{M-1} (\omega^{4q+1})^l + \sum_{l=0}^{M-1} \omega^l - 2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\langle \varphi_{2q-1}, \varphi_{2p-1} \rangle = 0$ и $\langle \varphi_{2q}, \varphi_{2p} \rangle = 0$.

Таким образом, мы показали, что матрица ортогональная. Транспонируем матрицу (2.2)

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_{M-2}^T \\ \varphi_{M-1}^T \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{M}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{1}{M} & \sin 2\pi \frac{1}{M} & \dots & \cos 2\pi \frac{k}{M} & \sin 2\pi \frac{k}{M} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{2}{M} & \sin 2\pi \frac{2}{M} & \dots & \cos 2\pi \frac{2k}{M} & \sin 2\pi \frac{2k}{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{M-1}{M} & \sin 2\pi \frac{M-1}{M} & \dots & \cos 2\pi \frac{k(M-1)}{M} & \sin 2\pi \frac{k(M-1)}{M} \end{pmatrix}.$$

Далее применяем универсальный метод построения фреймов Парсеваля — Стеклова следствия 2.1.2.

Если N нечетно, то удаляем последние $M - N$ столбцов и получаем, что строки образуют равномерный фрейм Парсеваля — Стеклова в $\ell_N^2(\mathbb{R})$. Проверим, что нормы будут одинаковыми.

Для $k = 0$, $\|\varphi_k^T\|^2 = \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2} \right) = \frac{N}{M}$.

Для $k = 1, \dots, M-1$,

$$\|\varphi_k^T\|^2 = \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin^2 2\pi \frac{li}{M} \right) =$$

$$= \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \left(\cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sin^2 2\pi \frac{li}{M} \right) \right) = \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2} \right) = \frac{N}{M}.$$

Если N четно, то удаляем первые $M - N$ столбцов и получаем, что строки образуют равномерный фрейм Парсеваля — Стеклова в $\ell_N^2(\mathbb{R})$. Проверим, что нормы будут одинаковые.

Для $k = 0$, $\|\varphi_k^T\|^2 = \frac{2}{M} \frac{N}{2} = \frac{N}{M}$.

Для $k = 1, \dots, M - 1$,

$$\begin{aligned} \|\varphi_k^T\|^2 &= \frac{2}{M} \left(\sum_{l=(M-N-1)/2}^{\frac{M-1}{2}} \cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sum_{l=(M-N-1)/2}^{\frac{M-1}{2}} \sin^2 2\pi \frac{li}{M} \right) = \\ &= \frac{2}{M} \sum_{l=(M-N-1)/2}^{\frac{M-1}{2}} \left(\cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sin^2 2\pi \frac{li}{M} \right) = \frac{2}{M} \frac{N}{2} = \frac{N}{M}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $M = 2k$. Определяем матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{M-2} \\ \varphi_{M-1} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{M}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \cos 2\pi \frac{1}{M} & \cos 2\pi \frac{2}{M} & \dots & \cos 2\pi \frac{M-1}{M} \\ 0 & \sin 2\pi \frac{1}{M} & \sin 2\pi \frac{2}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{M-1}{M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos 2\pi \frac{k-1}{M} & \cos 2\pi \frac{2(k-1)}{M} & \dots & \cos 2\pi \frac{(k-1)(M-1)}{M} \\ 0 & \sin 2\pi \frac{k-1}{M} & \sin 2\pi \frac{2(k-1)}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{(k-1)(M-1)}{M} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \dots & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Аналогично случаю $M = 2k + 1$ можно показать что семейство $\{\varphi_k\}_{k=0}^{M-1}$ образует ортонормированный базис в пространстве $\ell_M^2(\mathbb{R})$.

Покажем сначала, что $\|\varphi_k\| = 1$ для всех $k = 0, \dots, M - 1$.

Если $k = 0$ и $k = M - 1$, то $\|\varphi_k\|^2 = \frac{2}{M} \frac{M}{2} = 1$.

Если $k = 2q - 1$, $q = 1, \dots, k - 1$, то

$$\|\varphi_k\|^2 = \|\varphi_{2q-1}\|^2 = \frac{2}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \cos^2 2\pi \frac{ql}{M} = 1.$$

Аналогично, если $k = 2q$, $q = 1, \dots, k - 1$.

$$\|\varphi_k\|^2 = \|\varphi_{2q}\|^2 = \frac{2}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sin^2 2\pi \frac{ql}{M} = 1.$$

Несложно показать, что $\{\varphi_k\}$ попарно ортогональны для $k = 0, \dots, M - 1$, то есть

$$\langle \varphi_0, \varphi_{2q-1} \rangle = \frac{2}{M\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{M-1} \cos 2\pi \frac{(2q-1)l}{M} = 0;$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_{2q} \rangle = \frac{2}{M\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{M-1} \sin 2\pi \frac{2ql}{M} = 0;$$

$$\langle \varphi_{2q-1}, \varphi_{2q} \rangle = \frac{2}{M} \sum_{l=1}^{M-1} \cos \frac{2\pi l(2q-1)}{M} \sin \frac{4\pi ql}{M} = 0;$$

$$\langle \varphi_{2q-1}, \varphi_{2p-1} \rangle = 0 \text{ и } \langle \varphi_{2q}, \varphi_{2p} \rangle = 0.$$

Таким образом, данная матрица является ортогональной. Транспонируем матрицу (2.3)

$$\begin{pmatrix} \varphi_0^T \\ \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \vdots \\ \varphi_{M-2}^T \\ \varphi_{M-1}^T \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{M}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{1}{M} & \sin 2\pi \frac{1}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{(k-1)}{M} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{2}{M} & \sin 2\pi \frac{2}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{2(k-1)}{M} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \cos 2\pi \frac{M-1}{M} & \sin 2\pi \frac{M-1}{M} & \dots & \sin 2\pi \frac{(k-1)(M-1)}{M} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Аналогично предыдущему строим равномерный фрейм Парсеваля — Стеклова.

Если N нечетно, то удаляем последние $M - N$ столбцов и получаем, что строки образуют равномерный фрейм Парсеваля — Стеклова в $\ell_N^2(\mathbb{R})$. Проверим, что нормы будут одинаковые.

Для $k = 0$ имеем $\|\varphi_k^T\|^2 = \frac{2}{M}(\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2}) = \frac{N}{M}$.

Для $k = 1, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} \|\varphi_k^T\|^2 &= \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} \sin^2 2\pi \frac{li}{M} \right) = \\ &= \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\frac{N-1}{2}} (\cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sin^2 2\pi \frac{li}{M}) \right) = \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} + \frac{N-1}{2} \right) = \frac{N}{M}. \end{aligned}$$

Если N четно, то удаляем первый и $M - N - 1$ последних столбцов и получаем, что строки образуют равномерный фрейм Парсеваля — Стеклова в $\ell_N^2(\mathbb{R})$. Проверим, что нормы будут одинаковые.

Если $k = 0$, то $\|\varphi_k^T\|^2 = \frac{2}{M} \frac{N}{2} = \frac{N}{M}$.

Для $k = 1, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} \|\varphi_k^T\|^2 &= \frac{2}{M} \left(\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}} \cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}} \sin^2 2\pi \frac{li}{M} \right) = \\ &= \frac{2}{M} \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}} (\cos^2 2\pi \frac{li}{M} + \sin^2 2\pi \frac{li}{M}) = \frac{2}{M} \frac{N}{2} = \frac{N}{M}. \end{aligned}$$

Замечание. Описанные способы удаления столбцов из наших ортогональных матриц в доказательстве теоремы 2.1.3 не являются единственными. ▲

Пример 2.1.1.

1. Фрейм Парсеваля — Стеклова с одинаковыми нормами для $N = 3$ и $M = 5$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{1}{5} & \sin 2\pi \frac{1}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{2}{5} & \sin 2\pi \frac{2}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{3}{5} & \sin 2\pi \frac{3}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{4}{5} & \sin 2\pi \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Норма каждого вектора равна $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

2. Фрейм Парсеваля — Стеклова с одинаковыми нормами для $N = 4$ и $M = 7$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos 2\pi \frac{2}{7} & \sin 2\pi \frac{2}{7} & \cos 2\pi \frac{3}{7} & \sin 2\pi \frac{3}{7} \\ \cos 2\pi \frac{4}{7} & \sin 2\pi \frac{4}{7} & \cos 2\pi \frac{6}{7} & \sin 2\pi \frac{6}{7} \\ \cos 2\pi \frac{6}{7} & \sin 2\pi \frac{6}{7} & \cos 2\pi \frac{12}{7} & \sin 2\pi \frac{12}{7} \\ \cos 2\pi \frac{8}{7} & \sin 2\pi \frac{8}{7} & \cos 2\pi \frac{12}{7} & \sin 2\pi \frac{12}{7} \\ \cos 2\pi \frac{10}{7} & \sin 2\pi \frac{10}{7} & \cos 2\pi \frac{15}{7} & \sin 2\pi \frac{15}{7} \\ \cos 2\pi \frac{12}{7} & \sin 2\pi \frac{12}{7} & \cos 2\pi \frac{16}{7} & \sin 2\pi \frac{16}{7} \end{pmatrix}.$$

Норма каждого вектора равна $\sqrt{\frac{4}{7}}$.

Пример 2.1.2.

3. Фрейм Парсеваля — Стеклова с одинаковыми нормами для $N = 3$ и $M = 6$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{1}{6} & \sin 2\pi \frac{1}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{2}{6} & \sin 2\pi \frac{2}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{3}{6} & \sin 2\pi \frac{3}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{4}{6} & \sin 2\pi \frac{4}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{5}{6} & \sin 2\pi \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Норма каждого вектора равна $\sqrt{\frac{3}{6}}$.

4. Фрейм Парсеваля — Стеклова с одинаковыми нормами для $N = 4$ и $M = 6$:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{7}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos 2\pi \frac{1}{6} & \sin 2\pi \frac{1}{6} & \cos 2\pi \frac{2}{6} & \sin 2\pi \frac{2}{6} \\ \cos 2\pi \frac{2}{6} & \sin 2\pi \frac{2}{6} & \cos 2\pi \frac{4}{6} & \sin 2\pi \frac{4}{6} \\ \cos 2\pi \frac{3}{6} & \sin 2\pi \frac{3}{6} & \cos 2\pi \frac{6}{6} & \sin 2\pi \frac{6}{6} \\ \cos 2\pi \frac{4}{6} & \sin 2\pi \frac{4}{6} & \cos 2\pi \frac{8}{6} & \sin 2\pi \frac{8}{6} \\ \cos 2\pi \frac{5}{6} & \sin 2\pi \frac{5}{6} & \cos 2\pi \frac{10}{6} & \sin 2\pi \frac{10}{6} \\ \cos 2\pi \frac{6}{6} & \sin 2\pi \frac{6}{6} & \cos 2\pi \frac{12}{6} & \sin 2\pi \frac{12}{6} \end{pmatrix}.$$

Норма каждого вектора равна $\sqrt{\frac{4}{6}}$.

2.2. Конструкция фреймов Парсевала — Стеклова с заданными нормами

Конструкция, описанная в предыдущем параграфе, не обеспечивает равенства норм. Поэтому возникает задача выравнивания норм строк ортогональной матрицы после удаления некоторого количества столбцов. Такая задача может считаться классической и неявно рассматривалась в работах А.Н. Колмогорова [14] и Ю.В. Линника [15]. Общее решение задачи описания ортопроекторов, преобразующих ортонормированный базис в векторы одинаковой нормы, до сих пор неизвестно [6].

В серии работ P.G. Casazza, M. Leon [16–18] были приведены алгоритмы для решения задачи построения фреймов Парсевала — Стеклова с заданным набором норм в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{C})$. Мы опишем алгоритм для построения равномерных фреймов Парсевала — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

Теорема 2.2.1. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_M > 0$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. существует фрейм Парсевала — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ такой, что $\|\varphi_k\| = a_k$ для любого $k = 1, 2, \dots, M$;
2. для последовательности $\{a_k\}_{k=1}^M$ выполняются следующие условия:

$$a_k^2 \leq 1, \quad k = 1, \dots, M; \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^M a_k^2 = N.$$

Доказательство. Докажем, что из 1) следует 2). Так как $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ — фрейм Парсевала — Стеклова, то все собственные значения его фреймового оператора равны 1, и по теореме 1.2.5

$$\sum_{k=1}^M \|\varphi_k\|^2 = \sum_{j=1}^N \lambda_j = N.$$

Для любого фрейма Парсевала — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ пространства $\ell_N^2(\mathbb{R})$ найдутся пространство $\ell_M^2(\mathbb{R}) \supset \ell_N^2(\mathbb{R})$ и ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^M$ пространства $\ell_M^2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\varphi_k = P(e_k),$$

где P — оператор ортогонального проектирования из $\ell_M^2(\mathbb{R})$ в $\ell_N^2(\mathbb{R})$ [12]. Поэтому

$$\|P e_k\|^2 = \|\varphi_k\|^2 = a_k^2 \leq 1.$$

Теперь докажем, что из 2) следует 1).

Введем обозначение: группу ортогональных матриц пространства $\ell_M^2(\mathbb{R})$ будем обозначать $O(M)$, I_M — единичная матрица пространства $\ell_M^2(\mathbb{R})$.

Будем строить фрейм Парсевала — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ с заданными нормами $\|\varphi_k\| = a_k$ из ортогональной матрицы $O \in O(M)$, которая имеет вид:

$$O = \begin{pmatrix} R_N & 0 \\ 0 & R_{M-N} \end{pmatrix},$$

где $R_N \in O(N)$ и $R_{M-N} \in O(M - N)$.

Используя матрицу O и матрицу вращения Гивенса [8]

$$\theta(t, k, M) = \begin{pmatrix} I_{k-1, k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 0 & I_{M-k-1, M-k-1} & 0 \\ 0 & -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix},$$

вычисляем индуктивно матрицы $O^1, O^2, \dots, O^{M-1}$.

Матрица O^1 определяется соотношением $O^1 := \theta(t_1, 1, M)O$, где $t_1 := \arg(a_1 + i\sqrt{1-a_1^2})$ и i — мнимая единица.

Индексы l, k будут обозначать первые N элементов k -й строки и r, k — последние $M - N$ элементов k -й строки.

Таким образом,

$$\|O_{l,1}^1\|^2 = \|\cos t_1 O_{l,1}\|^2 = a_1^2 \text{ и } \|O_{r,1}^1\|^2 = \|\sin t_1 O_{r,1}\|^2 = 1 - a_1^2;$$

$$\|O_{l,M}^1\|^2 = \|\sin t_1 O_{l,1}\|^2 = 1 - a_1^2 \text{ и } \|O_{r,M}^1\|^2 = \|\cos t_1 O_{r,1}\|^2 = a_1^2,$$

нормы остальных строк не изменятся.

Рассмотрим два случая.

I случай: если $a_1^2 + a_2^2 \geq 1$, то t_2 — произвольное решение уравнения

$$\sin^2 t_2 = \frac{1 - a_2^2}{a_1^2},$$

и вычисляем

$$O^2 := \theta(t_2, 2, M)O^1,$$

$$\begin{aligned} \|O_{l,2}^2\|^2 &= \|\cos t_2 O_{l,2}^1 + \sin t_2 O_{l,M}^1\|^2 = \|\cos t_2 O_{l,2}^1\|^2 + \|\sin t_2 O_{l,M}^1\|^2 = \\ &= \cos^2 t_2 \|O_{l,2}^1\|^2 + \sin^2 t_2 \|O_{l,M}^1\|^2 = \cos^2 t_2 + \sin^2 t_2 (1 - a_1^2) = \\ &= 1 - a_1^2 \frac{1 - a_2^2}{a_1^2} = a_2^2; \end{aligned}$$

$$\|O_{r,2}^2\|^2 = \|\sin t_2 O_{r,M}^1\|^2 = \sin^2 t_2 \|O_{r,M}^1\|^2 = \frac{1 - a_2^2}{a_1^2} a_1^2 = 1 - a_2^2,$$

$$\begin{aligned} \|O_{l,M}^2\|^2 &= \|\sin t_2 O_{l,2}^1 + \cos t_2 O_{l,M}^1\|^2 = \sin^2 t_2 \|O_{l,2}^1\|^2 + \cos^2 t_2 \|O_{l,M}^1\|^2 = \\ &= \frac{1 - a_2^2}{a_1^2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 - 1}{a_1^2} (1 - a_1^2) = 2 - a_1^2 - a_2^2; \end{aligned}$$

$$\|O_{r,M}^2\|^2 = \|\cos t_2 O_{r,M}^1\|^2 = \cos^2 t_2 \|O_{r,M}^1\|^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 1}{a_1^2} a_1^2 = a_1^2 + a_2^2 - 1.$$

Таким образом, мы выравниваем норму второй строки (первых N элементов).

II случай: если $a_1^2 + a_2^2 < 1$, то t_2 — произвольное решение уравнения

$$\sin^2 t_2 = \frac{a_2^2}{1 - a_1^2},$$

и вычисляем

$$O^2 := \theta(t_2, M - 1, M)O^1.$$

При этом меняются только нормы $(M-1)$ -й и M -й строки.

$$\begin{aligned}
\|O_{i,M-1}^2\|^2 &= \|\sin t_2 O_{i,M}^1\|^2 = \sin^2 t_2 \|O_{i,M}^1\|^2 = \frac{a_2^2}{1-a_1^2}(1-a_1^2) = a_2^2, \\
\|O_{r,M-1}^2\|^2 &= \|\cos t_2 O_{r,M-1}^1 + \sin t_2 O_{r,M}^1\|^2 = \\
&= \cos^2 t_2 \|O_{r,M-1}^1\|^2 + \sin^2 t_2 \|O_{r,M}^1\|^2 = 1 - \frac{a_2^2}{1-a_1^2} + \frac{a_2^2}{1-a_1^2}(a_2^2) = \\
&= \frac{1-a_1^2-a_2^2+a_2^2a_2^2}{1-a_1^2} = 1-a_2^2; \\
\|O_{i,M}^2\|^2 &= \|\cos t_2 O_{i,M}^1\|^2 = \cos^2 t_2 \|O_{i,M}^1\|^2 = \\
&= (1 - \frac{a_2^2}{1-a_1^2})(1-a_1^2) = 1-a_1^2-a_2^2; \\
\|O_{r,M}^2\|^2 &= \|\sin t_2 O_{r,M-1}^1 + \cos t_2 O_{r,M}^1\|^2 = \\
&= \sin^2 t_2 \|O_{r,M-1}^1\|^2 + \cos^2 t_2 \|O_{r,M}^1\|^2 = \frac{a_2^2}{1-a_1^2} + (1 - \frac{a_2^2}{1-a_1^2})a_1^2 = \\
&= \frac{a_2^2 + a_1^2(1-a_1^2) - a_1^2a_2^2}{1-a_1^2} = a_1^2 + a_2^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, выравниваем норму $(M-1)$ -й строки (первых N элементов).

Действуя аналогично, получим:

I случай: если $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{m+l+2} \geq m+1$, то t_{m+l+2} находим как одно из решений уравнения

$$\sin^2 t_{m+l+2} = \frac{1 - a_{m+l+2}^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{m+l+1}^2 - m},$$

и вычисляем

$$O^{m+l+2} := \theta(t_{m+l+2}, m+2, M)O^{m+l+1}, \quad m := m+1.$$

Таким образом, мы выравниваем норму $(m+2)$ -й строки (первых N элементов).

II случай: если $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{m+l+2} < m+1$, то t_{m+l+2} находим как одно из решений уравнения

$$\sin^2 t_{m+l+2} = \frac{a_{m+l+2}^2}{m+1 - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_{m+l+1}^2},$$

и вычисляем

$$O^{m+l+2} := \theta(t_{m+l+2}, M-l-1, M)O^{m+l+1}, \quad l := l+1.$$

Таким образом, мы выравниваем норму $(M-l-1)$ -й строки (первых N элементов).

Аналогично строятся матрицы $O^1, O^2, \dots, O^{M-1}$.

Из $M \times M$ -матрицы O^{M-1} выделим прямоугольную $M \times N$ -матрицу, удаляя последние $M-N$ столбцов. Строки оставшейся матрицы образуют фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^M$ такой, что $\|\varphi_k\| = a_k$, $k = 1, 2, \dots, M$.

▲

Таким образом, используя данный алгоритм, мы можем строить равномерные фреймы Парсеваля — Стеклова произвольного объема.

Пример 2.2.1.

Опишем построение равномерного фрейма Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_2^2(\mathbb{R})$ из пяти векторов и единичной матрицы

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как было описано выше, итогом такого построения является система векторов одинаковой нормы, которая с необходимостью равна $\sqrt{\frac{2}{5}}$. Таким образом, числа $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Вычисляем t_1 и O_1 :

$$t_1 := \arg(\sqrt{\frac{2}{5}} + j\sqrt{1 - \frac{2}{5}}) = \arg(\sqrt{\frac{2}{5}} + j\sqrt{\frac{3}{5}}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos t_1 &= \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ и } \sin t_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}; \\ O_1 &:= \theta(t_1, 1, 5)O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ O_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как $c_1^2 + c_2^2 = \frac{4}{5} < 1$, то это второй случай, и

$$\begin{aligned} \cos t_2 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ и } \sin t_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}; \\ O_2 &:= \theta(t_2, 4, 5)O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{45}}{15} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{30}}{15} \end{pmatrix}$$

и $m := 0$, $l := 1$.

Так как $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \frac{6}{5} \geq 1$, то это первый случай, и

$$\cos t_3 = \frac{1}{2} \text{ и } \sin t_3 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$O_3 := \theta(t_3, 2, 5)O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{45}}{15} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{30}}{15} \end{pmatrix},$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{18}}{6} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{45}}{30} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix}$$

и $m := 1$, $l := 1$.

Так как $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = \frac{8}{5} < 2$, то это второй случай, и

$$\cos t_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } \sin t_4 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$O_4 := \theta(t_4, 3, 5)O_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{18}}{6} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{45}}{30} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{30}}{30} \end{pmatrix}.$$

$$O_4 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ -\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{18}}{6} & \frac{\sqrt{10}}{10} \\ -\frac{\sqrt{90}}{60} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{12}}{12} & \frac{\sqrt{60}}{60} \\ -\frac{\sqrt{90}}{15} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{60}}{15} \\ -\frac{\sqrt{90}}{60} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{12}}{12} & \frac{\sqrt{60}}{60} \end{pmatrix}$$

и $m := 1$, $l := 2$.

Таким образом, мы вычислили матрицу O_4 , в которой строки первых двух столбцов образуют равномерный фрейм Парсеваля — Стеклова из пяти элементов в пространстве $\mathbb{R}^2$ (норма каждого элемента равна $\sqrt{\frac{2}{5}}$.)

Пример 2.2.2.

Опишем построение равномерного фрейма Парсевала — Стеклова в пространстве $\ell_3(\mathbb{R})$ из семи векторов. Для построения будет использована матрица

$$O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Как было описано выше, итогом такого построения является система векторов одинаковой нормы, которая с необходимостью равна $\sqrt{\frac{3}{7}}$. Таким образом, числа $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

Вычисляем t_1 и O_1 :

$$t_1 := \arg(\sqrt{\frac{3}{7}} + j\sqrt{\frac{4}{7}}),$$

отсюда

$$\cos t_1 = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ и } \sin t_1 = \sqrt{\frac{4}{7}};$$

$$O_1 := \theta(t_1, 1, 7)O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{63}}{21} & \frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{2\sqrt{21}}{21} & -\frac{2\sqrt{42}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{21}}{14} & -\frac{\sqrt{21}}{14} & \frac{\sqrt{21}}{14} & -\frac{\sqrt{21}}{14} \end{pmatrix},$$

Так как $c_1^2 + c_2^2 = \frac{6}{7} < 1$, то это второй случай, и

$$\cos t_2 = \sqrt{\frac{1}{4}} \text{ и } \sin t_2 = \sqrt{\frac{3}{4}};$$

$$O_2 := \theta(t_2, 6, 7)O_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{63}}{21} & \frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{63}}{28} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{63}}{28} & \frac{\sqrt{63}}{28} & -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{63}}{28} \\ -\frac{\sqrt{21}}{21} & -\frac{\sqrt{42}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{21}}{28} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{28} & \frac{\sqrt{21}}{28} & \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{21}}{28} \end{pmatrix}$$

и $m := 0$, $l := 1$.

Так как $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \frac{9}{7} \geq 1$, то это первый случай, и

$$\cos t_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ и } \sin t_3 = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$O_3 := \theta(t_3, 2, 7)O_2,$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{63}}{21} & \frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} & \frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{7}}{7} \\ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63} & -\frac{\sqrt{18}}{18} - \frac{2\sqrt{7}}{21} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{126}}{84} & -\frac{\sqrt{36}}{12} - \frac{\sqrt{126}}{84} & \frac{\sqrt{126}}{84} & \frac{\sqrt{36}}{12} - \frac{\sqrt{126}}{84} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{7}}{7} & -\frac{\sqrt{126}}{21} & 0 & \frac{\sqrt{63}}{28} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{63}}{28} & \frac{\sqrt{63}}{28} & -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{63}}{28} \\ -\frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{7}}{21} & \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63} & -\frac{\sqrt{12}}{6} & \frac{\sqrt{63}}{84} & -\frac{\sqrt{18}}{12} - \frac{\sqrt{63}}{84} & \frac{\sqrt{63}}{84} & \frac{\sqrt{18}}{12} - \frac{\sqrt{63}}{84} \end{pmatrix}.$$

и $m := 1$, $l := 1$.

Матрицы O_4 , O_5 , O_6 вычисляются аналогично. Запишем получившийся равномерный фрейм Парсевала — Стеклова.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{63}}{21} \\ \frac{\sqrt{126}}{21} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63} \\ -\frac{\sqrt{18}}{18} - \frac{2\sqrt{7}}{21} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{15} + \frac{2\sqrt{30}}{25}(-\frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{7}}{21}) \\ -\frac{\sqrt{30}}{30} + \frac{2\sqrt{50}}{25}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63}) \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{6}}{15} \end{pmatrix}, \\ \varphi_4 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{2\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{50}}{25}(-\frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{7}}{21})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{30}}{15} + \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{10}}{5} - \frac{\sqrt{6}}{15}) \end{pmatrix}, \quad \varphi_5 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{15}}{5}(-\frac{\sqrt{18}}{9} - \frac{\sqrt{7}}{21}) \\ \frac{\sqrt{15}}{5}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{126}}{63}) \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}, \\ \varphi_6 &= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{7}}{7} \\ -\frac{\sqrt{14}}{7} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_7 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{2\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{2}}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{7}}{21})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{30}}{15} + \frac{\sqrt{2}}{5}(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{14}}{21})) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{10}}{5} - \frac{\sqrt{6}}{15}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Описанный алгоритм можно реализовать в системе компьютерной математики (СКМ) Maple, а также в программной среде Delphi. В работе [17] предлагается реализация в СКМ MATLAB.

Упражнение 2.2.1. Постройте равномерный фрейм Парсевала — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ из 6 векторов и в пространстве $\ell_N^3(\mathbb{R})$ из 5 векторов.

2.3. ε -почти фреймы Парсевала — Стеклова

Введем понятие ε -почти фрейма Парсевала — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

Зафиксируем ε на полуинтервале $[0, 1)$.

Определение 2.3.1 ([20]). Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ из $\ell_N^2(\mathbb{R})$ называется ε -почти фреймом Парсевала — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$, если существуют константы $A = 1 - \varepsilon$ и $B = 1 + \varepsilon$ такие, что

$$(1 - \varepsilon)\|x\|^2 \leq \sum_{k=1}^\infty |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq (1 + \varepsilon)\|x\|^2 \quad (2.4)$$

для любого $x \in \ell_N^2(\mathbb{R})$.

При $\varepsilon = 0$ равенство (2.4) принимает форму классического равенства Парсеваля — Стеклова.

Далее выясним, какой набор чисел является нормами фрейма Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$. Для этого нам понадобятся ряд определений и утверждений из [21].

Пусть определен оператор $A: H \rightarrow H$, где H — гильбертово пространство.

Определение 2.3.2. *Вполне непрерывный (компактный) оператор A называется ядерным, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}$.*

Определение 2.3.3. *Спектральным следом ядерного оператора A называется сумма его собственных значений λ_k , т. е. выражение $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$.*

Определение 2.3.4. *Матричным следом ядерного оператора A называется сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k) = \text{Tr } A$, где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H , причем сумма ряда не зависит от выбора базиса.*

Лемма 2.3.1. *Если A — ядерный положительный оператор в H , то его матричный и спектральный следы принимают конечные значения, и справедливо равенство*

$$\text{Tr } A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k),$$

т. е. матричный след оператора совпадает с его спектральным следом.

Теорема 2.3.1. *Пусть H — гильбертово пространство, R — его подпространство, т. е. $R \subset H$, $\dim R = r < \infty$, оператор $P: H \rightarrow R$ — оператор ортогонального проектирования. Тогда $\text{Tr } P = r$.*

Доказательство. Оператор ортогонального проектирования компактен, т. к. он переводит любое ограниченное подмножество $M \subset H$ в ограниченное подмножество конечномерного пространства R , т. е. в предкомпактное множество.

Так как $P^2 = P$, то $\sqrt{\lambda_k}$ совпадает с λ_k для всех k . Оператор P действует в конечномерном подпространстве, поэтому у него конечное число ненулевых собственных значений, равных 1, и их число равно размерности подпространства, на которое действует оператор P , т. е. $\dim R = r$.

Поэтому $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} = \sum_{k=1}^r \lambda_k = \sum_{k=1}^r 1 = r < \infty$ и, следовательно, P — ядерный оператор.

Так как

$$(Px, x) = (P^2x, x) = (P(Px), x) = (Px, P^*x) = (Px, Px) \geq 0,$$

то P — положительный оператор.

Следовательно, по лемме 2.3.1 его матричный и спектральный следы совпадают, т. е.

$$\text{Tr } P = \sum_{k=1}^{\infty} (Pe_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = r = \dim R;$$

$$\|P\|_{HS}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Pe_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (Pe_k, Pe_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \langle P^2 e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle P e_k, e_k \rangle = \dim R. \quad \blacktriangle$$

Теорема 2.3.2. Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ и $\|\varphi_k\| = a_k$ для $k = 1, 2, \dots$, то $a_k^2 \leq 1$ для $k = 1, 2, \dots$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = N$.

Доказательство. По теореме 2.1.1 любой фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\ell_N^2(\mathbb{R})$ можно получить из ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{R})$ с помощью оператора ортогонального проектирования $P : \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell_N^2(\mathbb{R})$, т. е. $\varphi_k = P e_k$ для $k = 1, 2, \dots$, поэтому

$$a_k^2 = \|\varphi_k\|^2 = \|P e_k\|^2 \leq \|e_k\|^2 = 1$$

для $k = 1, 2, \dots$

Вычислим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P e_k\|^2 = \|P\|_{HS}^2 = \dim \ell_N^2(\mathbb{R}) = N.$$

$\blacktriangle$

Теорема 2.3.2 показывает, что нормы фрейма Парсеваля — Стеклова, состоящего из бесконечного числа элементов, в $\ell_N^2(\mathbb{R})$ удовлетворяют тому же условию, что и нормы фрейма Парсеваля — Стеклова, состоящего из конечного числа элементов, в $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

Доказано частичное обращение этого результата.

Теорема 2.3.3. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что $a_k^2 \leq 1$ для $k = 1, 2, \dots$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = N$. Тогда существует $\varepsilon \in [0; 1]$, и для этого ε существует ε -почти фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ и $\|\varphi_k\|^2 = a_k^2$ для $k = 1, 2, \dots$

Доказательство. Сумму $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ представим в виде суммы N слагаемых $S_1, S_2, \dots, S_N$,

т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = S_1 + S_2 + \dots + S_N$, следующим образом.

К a_1^2 прибавляем a_2^2 , полученную сумму $a_1^2 + a_2^2$ сравниваем с 1. Если $a_1^2 + a_2^2 > 1$, то вычисляем погрешности $\delta_1 = a_1^2 + a_2^2 - 1$ и $\delta_2 = 1 - a_1^2$. Далее выбираем $\varepsilon_1 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и первое слагаемое для представления $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

$$S_1 = \begin{cases} a_1^2 + a_2^2, & \text{если } \varepsilon_1 = \delta_1, \\ a_1^2, & \text{если } \varepsilon_1 = \delta_2. \end{cases}$$

Если $a_1^2 + a_2^2 < 1$, то к данной сумме $a_1^2 + a_2^2$ прибавляем a_3^2 и снова сравниваем с единицей. То есть если $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 1$, то вычисляем погрешности $\delta_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 1$ и $\delta_2 = 1 - (a_1^2 + a_2^2)$. Далее выбираем $\varepsilon_1 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и первое слагаемое для представления $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

$$S_1 = \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, & \text{если } \varepsilon_1 = \delta_1, \\ a_1^2 + a_2^2, & \text{если } \varepsilon_1 = \delta_2 \end{cases} = \begin{cases} 1 + \varepsilon_1, & \text{если } \varepsilon_1 = \delta_1, \\ 1 - \varepsilon_1, & \text{если } \varepsilon_1 = \delta_2. \end{cases}$$

А если $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 < 1$, то к данной сумме прибавляем a_4 и снова сравниваем с 1. Процесс продолжаем до тех пор, пока не получим первое слагаемое S_1 для разложения $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$. Предположим, что $S_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 + \varepsilon_1$.

Далее аналогично получаем второе слагаемое для разложения $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$. То есть к a_4^2 прибавляем a_5^2 и результат $a_4^2 + a_5^2$ сравниваем с единицей до тех пор, пока не получим все N слагаемых $S_1, S_2, \dots, S_N$, равных $1 \pm \varepsilon_k$ для $k = 1, 2, \dots, N$.

Таким образом, мы из числовой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ выделяем конечные или бесконечные числовые подпоследовательности, из которых формируем $S_1, S_2, \dots, S_N$.

Элементы числовой подпоследовательности из S_1 умножаем на e_1 , элементы из S_2 — на e_2 , ..., элементы из S_N — на e_N . Таким образом, мы получаем бесконечный набор векторов $\varphi_1 = a_1 e_1, \varphi_2 = a_2 e_1, \varphi_3 = a_3 e_1, \varphi_4 = a_4 e_2, \dots$. Проверим, что данные векторы образуют ε -почти фрейм Парсеваля — Стеклова.

По определению ε -почти фрейма Парсеваля — Стеклова должны выполняться неравенства:

$$(1 - \varepsilon)\|x\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq (1 + \varepsilon)\|x\|^2$$

для любого $x \in \ell_N^2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим подробнее $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 &= |\langle x, \varphi_1 \rangle|^2 + |\langle x, \varphi_2 \rangle|^2 + |\langle x, \varphi_3 \rangle|^2 + \dots = \\ &= |\langle x, a_1 e_1 \rangle|^2 + |\langle x, a_2 e_1 \rangle|^2 + |\langle x, a_3 e_1 \rangle|^2 + |\langle x, a_4 e_2 \rangle|^2 + \dots = \\ &= a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_1^2 + a_3^2 x_1^2 + a_4^2 x_2^2 + \dots = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) x_1^2 + (a_4^2 + \dots) x_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Коэффициент перед первой координатой вектора x равняется S_1 , перед второй — S_2 , ... перед N -й — S_N .

Получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 = S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + \dots + S_N x_N^2, \quad (2.5)$$

где $S_k = 1 \pm \varepsilon_k$ для $k = 1, 2, \dots, N$.

Пусть $\varepsilon = \max_{1 \leq k \leq N} \{\varepsilon_k\}$. Используя оценки

$$\begin{cases} 1 + \varepsilon_k < 1 + \varepsilon, \\ 1 - \varepsilon_k < 1 + \varepsilon \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1 + \varepsilon_k > 1 - \varepsilon, \\ 1 - \varepsilon_k > 1 - \varepsilon \end{cases}$$

для (2.5), получим, с одной стороны,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \leq (1 + \varepsilon)\|x\|^2,$$

а с другой —

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|x\|^2.$$

Данные неравенства дают определение ε -почти фрейма Парсеваля — Стеклова для последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

Если $\varepsilon = 0$, то последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ является фреймом Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

▲

Пример 2.3.1.

Фрейм Парсеваля — Стеклова, состоящий из бесконечного числа элементов в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_N$ — стандартный ортонормированный базис. У элемента e_k на k -м месте стоит единица, а все остальные координаты равны нулю.

Тогда несложно проверить, что следующие элементы:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_1, & \varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, & \dots, & \varphi_N &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_N, \\ \varphi_{N+1} &= \frac{1}{\sqrt{4}} e_1, & \varphi_{N+2} &= \frac{1}{\sqrt{4}} e_2, & \dots, & \varphi_{2N} &= \frac{1}{\sqrt{4}} e_N, \\ &\vdots & & & & & \\ \varphi_{N+k} &= \frac{1}{\sqrt{2^k}} e_1, & \varphi_{N+2k} &= \frac{1}{\sqrt{2^k}} e_2, & \dots, & \varphi_{kN} &= \frac{1}{\sqrt{2^k}} e_N \\ &\vdots & & & & & \vdots \end{aligned}$$

образуют фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$, т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_k \rangle|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, \frac{1}{\sqrt{2^k}} e_1 \rangle \right|^2 + \dots + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle x, \frac{1}{\sqrt{2^k}} e_N \rangle \right|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_1^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_2^2 + \dots + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_N^2 = \|x\|^2, \end{aligned}$$

для всех $x \in \ell_N^2(\mathbb{R})$.

Список литературы

- [1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2004. 464 с.
- [2] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
- [3] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhauser, 2002. 440 p.
- [4] Драбкова Е.С., Новиков С.Я. Объем фрейма Парсеваля // Вестник Самарского государственного университета. Сер. Естественная. 2007. № 9/1(59). С. 91-107.
- [5] Casazza P.G., Leonhard N. Classes of Finite Equal Norm Parseval Frames // Contemp. Math. 2008. Vol. 451. P. 11-31.
- [6] Casazza P.G., Leonhard N. The known equal norm Parseval frames as of 2005.URL: <http://framerc.org/papers/ENPF2005.pdf>.
- [7] Kornelson K.A., Larson D.R. Rank-one decomposition of operators and construction of frames. Wavelets, frames and operator theory // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. Providence, RI. 2004. Vol. 345. P. 203-214.
- [8] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
- [9] Фрейзер М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры. М.: БИНОМ, 2008. 487 с.
- [10] Голубов Б.И. Об аппроксимации свертками и базисах из сдвигов функций // Analysis Mathematica. 2008. № 34. С. 9-28.
- [11] Седлецкий А.М. Аппроксимация свертками и первообразными // Математические заметки. 2006. Т. 79. Вып. 5. С. 756-766.
- [12] Кашин В.С., Куликова Т.Ю. Замечание об описании фреймов общего вида // Матем. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 941-945.
- [13] Наймарк М.А. Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1940. Т. 4. № 3. С. 277-318.
- [14] Колмогоров А.Н. К обоснованию метода наименьших квадратов // Успехи математических наук. 1946. Т. 1. Вып. 1. С. 57-70.
- [15] Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов. М.: Физматгиз, 1962. С. 352.

- [16] Casazza P.G., Leon M. Frames with a given frame operator.URL: www.math.missouri.edu/~pete.
- [17] Casazza P.G., Leon M. Existence and construction of finite tight frames // J. Concr. Appl. Math. 2006. Vol. 4. P. 277-289.
- [18] Casazza P.G. Custom Building Finite Frames // Contemporary Math. 2004. Vol. 345. P. 61-86.
- [19] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 572 с.
- [20] Bodmann B.G., Casazza P.G. When are frames close to equal-norm Parseval frames? URL: <http://framerc.org/papers/whenare.pdf>.
- [21] Садовничий В.А. Теория операторов: учеб. для вузов с углубленным изучением математики. М.: Дрофа, 2004. 384 с.

Учебное издание

Новиков Сергей Яковлевич,
Лихобабенко Мария Александровна

ФРЕЙМЫ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Учебное пособие

Редактор Т.И. Кузнецова.
Компьютерная верстка, макет М.А. Лихобабенко

Подписано в печать 22.03.2013. Формат 60 x 84/16.
Typeset by VTgX2_ε. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 100 экз. Заказ № 2310
Издательство «Самарский университет»,
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
Тел. 8(846)334-54-23
Отпечатано на УОП СамГУ