МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

Ю. К. Пономарев

Основы проектирования и конструирования

Электронное учебное пособие

САМАРА

2011

УДК 658.5.011.33

Автор: **Пономарев Юрий Константинович**

Рецензенты:
канд. техн. наук Зрелов В. А.,
канд. техн. наук Калакутский В. И

Пономарев, Ю. К. Основы проектирования и конструирования [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / Ю. К. Пономарев; Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). – Электрон. текстовые и граф. дан. (78 Мбайт). – Самара, 2011. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

Настоящее пособие составлено на основе курса лекций, читаемого автором по дисциплине «Основы проектирования и конструирования» для студентов факультета двигателей летательных аппаратов по специальности 080502 «Экономика и управление на предприятии (по отраслям)" и для подготовки бакалавров по направлению 080100.62 «Экономика». В пособии рассмотрены критерии выбора решений технической задачи, определено понятие конструирования и проектирования, изложены основы творческого труда. Дано определение технического задания, изложены методика его критического разбора и уточнения, общие требования к конечному результату и их осуществление на современном уровне техники. Приведено понятие основного и рабочего принципов конструирования, описан рабочий процесс конструирования: отправные точки зрения, анализ ошибок, разбивка задачи на части, возможные отклонения. Определена роль конструктора в процессе создания конструкции, дано сравнение методов индивидуальной и коллективной работы.

Поскольку дисциплина читается студентам, не знакомым с основами расчетов на прочность, даются краткие сведения из теоретической механики и сопротивления материалов.

Учебное пособие на протяжении 10 лет существует на кафедре **КиПДЛА** в электронной форме, постоянно совершенствуется и предлагается студентам для подготовки к экзаменам.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2011

Содержание

Предисловие составителя..... 6

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЕКТИРОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ..... 7

1. Классификация объектов проектирования и их параметров..... 7

2. Основные этапы и задачи проектирования..... 9

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА 17

1. Кинематика 18

1.1. Кинематика точки 18

1.2. Кинематика твердого тела 22

1.3. Плоскопараллельное движение твердого тела 24

1.4. Произвольное движение твердого тела 27

1.5. Сложное движение точки 27

2. Основные понятия и аксиомы механики 30

2.1. Основные понятия механики 30

2.2. Аксиомы механики 33

3. Статика 34

3.1. Основные законы и теоремы статики 34

3.2. Условия уравновешенности систем сил, приложенных к твердому телу 35

3.3. Решение задач статики 37

3.4. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела 42

3.5. Распределенные силы 43

3.6. Законы трения (законы Кулона) 44

4. Динамика материальной точки 45

4.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки 45

4.2. Первая и вторая задачи динамики 46

5. Общие теоремы динамики механической системы 48

5.1. Основные понятия и определения 48
5.2. Теорема о движении центра масс 50
5.3. Теорема об изменении количества движения 51
5.4. Теорема об изменении кинетического момента 54
5.5. Теорема об изменении кинетической энергии 56
6. Принцип Даламбера. Элементы аналитической механики 60
6.1. Принцип Даламбера 60
6.2. Классификация механических связей. Обобщенные координаты 62
6.3. Принцип возможных перемещений 65
6.4. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера - Лагранжа).. 66
6.5. Уравнения Лагранжа второго рода 67
Список литературы 69
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ 71
1. Основные понятия 72
1.1. Введение. Внешние и внутренние силы 72
1.2. Напряжения и деформации в точке 74
1.3. Основные понятия и допущения 75
2. Напряженно-деформированное состояние в точке 76
2.1. Виды напряженного состояния 76
2.2. Одноосное растяжение и сжатие 77
2.3. Чистый сдвиг 77
3. Центральное растяжение и сжатие 79
3.1. Продольная сила 79
3.2. Напряжения и деформации при растяжении или сжатии 80
3.3. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии 81
4. Кручение 82
4.1. Крутящий момент 82
4.2. Напряжения и деформации при кручении 82

4.3. Расчеты на прочность при кручении 84

5. Прямой изгиб 85

5.1. Изгибающий момент и поперечная сила 85

5.2. Напряжения и деформации при прямом чистом изгибе 88

5.3. Напряжения и деформации при прямом поперечном изгибе 90

5.4. Расчет на прочность при прямом изгибе 91

6. Сложное сопротивление 93

6.1. Косой изгиб 93

6.2. Внецентренное растяжение или сжатие 95

6.3. Изгиб с кручением 97

7. Устойчивость сжатых стержней 99

7.1. Критическая сила 99

7.2. Формула Эйлера 99

7.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы 101

7.4. Пределы применимости формулы Эйлера 101

7.5. Расчеты сжатых стержней на устойчивость 102

Список литературы 103

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ МЕТОДИКИ КОНСТРУИРОВАНИЯ 104

1. Различные возможности решения одной и той же задачи 105

2. Что такое конструирование ? 111

2.1. Постановка задачи 111

2.2. Данные, которые следует принимать во внимание 112

2.3. Проведение работы 114

2.4. Интуиция или логика 115

3. Основы творческой деятельности 117

4. Организующая систематизация 121

4.1. Основная система 123

4.2. Этапы проектирования и вспомогательные работы 126

4.3. Система проектирования в целом **128**

НАУКА И ИСКУССТВО ПРОЕКТИРОВАНИЯ 131

Процесс проектирования **132**

Этапы и методы **134**

Морфологический подход **145**

Оптимизация **149**

Надежность **151**

ИНЖЕНЕРНАЯ ПРОГРАММА СНИЖЕНИЯ СТОИМОСТИ СПРОЕКТИРОВАННОГО ИЗДЕЛИЯ 158

Введение **159**

Этапы инженерной программы снижения стоимости изделия **160**

Пример инженерной программы снижения стоимости изделия **162**

Назначение цены и граница рентабельности **164**

Политика назначения цен на новые изделия **166**

Линейное программирование **170**

Список литературы..... **177**

ПРЕДИСЛОВИЕ СОСТАВИТЕЛЯ

Научно-технический прогресс и уровень жизни народа теснейшим образом связаны с процессом создания и производства новых изделий и различных технических устройств, которые в общем виде принято называть новой техникой. В этой области в нашей стране занята творческим трудом огромная армия ученых и конструкторов. Сложность технических задач все время возрастает, и объем выполняемых работ увеличивается. Затраты труда и времени на проектные (исследовательские и конструкторские) работы очень велики и поэтому любые рациональные методы интенсификации этих работ принесли бы огромную пользу народному хозяйству, сэкономили бы значительные средства и ускорили технический прогресс и подъем уровня жизни народа.

Работы в этом направлении ведутся. Можно указать на создание и внедрение вычислительных машин, моделирующих устройств, машинизацию копировальных работ, специализацию и разделение труда, издание большого количества справочной и информационной литературы и т. п. Однако научной литературы, в которой были бы изложены основы общей методики конструирования, в России (да и в СССР) почти не издавалось (в некоторой степени эти вопросы затронуты в книге Е. Ференци «Конструирование приборов точной механики»).

Известна также книга проф. Ф. Ханзена (Konstruktionssystematik. Grundlagen fur eine allgemeine Konstruktionslehre. VEB Verlag Technik. Berlin) представляющая значительный интерес. К сожалению, этой книги нет в большинстве библиотек города. В ней автор анализирует творческий мыслительный процесс конструирования, разъясняет особенности этого процесса, излагает основы общей методики конструирования. Методика, предлагаемая проф. Ф. Ханзеном, не является законченной и оформленной системой. В ней предложены некоторые средства интенсификации и повышения качества конструкторских работ, поэтому мы приводим некоторые полезные для студентов выдержки из этой книги.

Третьей полезной книгой, являющейся также библиографической редкостью, является книга П. Хилла «Наука и искусство проектирования», М.: Мир, 1973. Основные положения указанной книги также приведены в настоящем учебном пособии.

Конечно, главным в вопросах проектирования и создания современных технических устройств и изделий является непрерывное развитие соответствующих областей науки и практическая работа по конструированию, изготовлению и изучению конкретных конструкций.

Надеемся, что приведенные в пособии сведения по основам проектирования и конструирования в совокупности с основами прочностных расчетов дадут возможность студентам—экономистам понять сущность данной области человеческой деятельности и осознанно осуществлять экономическую поддержку проектов по созданию новой техники.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОЕКТИРОВАНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Инженерная деятельность человека связана прежде всего с разработкой технических объектов — с их проектированием.

Проектирование *— это комплекс работ по изысканиям, исследованиям, расчетам и конструированию, имеющих целью получение всей необходимой документации для создания новых изделий или реализации новых процессов, удовлетворяющих заданным требованиям.*

1. КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ИХ ПАРАМЕТРОВ

Блочно-иерархический подход к проектированию сложных систем. Прогресс науки и техники неизбежно приводит к появлению все более сложных технических объектов — сложных систем, состоящих из большого количества взаимодействующих элементов. Разработка этих объектов занимает несколько лет и требует привлечения значительного числа специалистов. Такие сроки проектирования часто неприемлемы, так как оказываются соизмеримыми со временем морального износа.

Поэтому две противоречивые тенденции — усложнение систем и сокращение сроков проектирования — заставляют делать проектирование сложных систем с применением научной организации труда.

С этой целью применяется так называемый *блочно-иерархический подход* к проектированию сложных систем.

При блочно-иерархическом подходе процесс проектирования и представления о самом объекте расчленяется на уровни. На высшем уровне используется наименее детализированное представление, отражающее только самые общие черты и особенности проектируемой системы. На каждом новом последовательном уровне разработки степень подробности рассмотрения возрастает, при этом система рассматривается не в целом, а отдельными блоками. Такой подход позволяет на каждом уровне формулировать и решать задачи приемлемой сложности, поддающиеся уяснению и пониманию человеком и решению с помощью имеющихся средств проектирования. Разбиение на блоки должно быть таким, чтобы документация на блок любого уровня была обозрима и воспринимаема одним человеком.

Преимущества блочно-иерархического подхода состоят в том, что сложная задача большой размерности разбивается на последовательно решаемые задачи малой размерности.

Недостатки блочно-иерархического подхода вытекают из того обстоятельства, что на каждом уровне работа ведется с не до конца определенными объектами. Следовательно, решения принимаются в обстановке не-

полной информации, т. е. без строгого обоснования. Оптимальность может быть достигнута только на отдельных уровнях при ограничивающих условиях, вытекающих из природы блочно-иерархического подхода, т. е. не являющихся принципиально необходимыми. Однако в целом какой-либо удачной альтернативы блочно-иерархическому подходу нет, и приходится соглашаться на возможные отклонения от оптимальных вариантов.

В условиях блочно-иерархического проектирования на каждом уровне имеются свои представления о системе и элементах. То, что на более высоком k-м уровне называлось элементом, становится системой на следующем (k + 1)-м уровне. Часто элементы самого низшего из уровней, на которых ведется рассмотрение, называют базовыми элементами или компонентами.

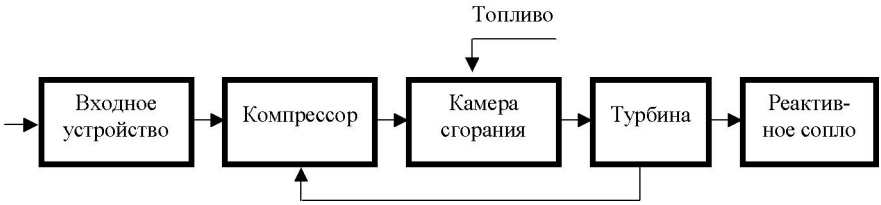
Большинство инженеров, участвующих в проектировании, имеют дело с системами и элементами некоторого уровня, проектируемые ими объекты непосредственно не всегда являются сложными системами, хотя, в конечном счете, многие из этих объектов входят в состав сложных систем.

Деление на иерархические уровни сложных систем в различных сластях техники.

Существующее по ЕСКД деление схем на **принципиальные, функциональные, структурные** отражает принципы блочно-иерархического проектирования.

Принципиальные схемы определяют полный набор базовых элементов и связей между ними и обычно дают детальное представление о принципах работы изделия.

Принципиальная схема газотурбинного двигателя



Функциональные схемы разъясняют протекание определенных процессов в изделии или его частях, т. е. дают представление о функционировании объекта с учетом только существенных факторов и функциональных частей.

Структурные схемы дают наиболее общее и наименее детализированное представление об объекте, определяя основные функциональные части изделия, их назначение и взаимосвязи.

Часто структурные схемы при проектировании несут в себе элементы функциональных и принципиальных схем.

По ЕСКД установлена иерархия изделий машиностроения, включающая уровни:

1) детали,
2) сборочные единицы,
3) комплексы,
4) комплекты (например, зубчатое колесо, вал, шпонка—детали, входящие в редуктор: редуктор — сборочная единица, которая в свою очередь является элементом станка; станок — сборочная единица более высокого иерархического уровня, станок может оказаться элементом комплекса станков — поточной линии).

Классификация параметров объектов проектирования. Параметр — величина, характеризующая свойства или режим работы объекта. Среди параметров объектов проектирования следует выделить ***показатели эффективности***, которые являются количественной оценкой степени соответствия объекта его целевому назначению.

Показатели эффективности делят на показатели: а) производительности; б) надежности; в) стоимости; г) массы; д) габаритов; е) точности. В зависимости от конкретных условий и типов систем те или иные из показателей играют главенствующую роль.

Термин «показатель эффективности» чаще всего используется на высших иерархических уровнях проектирования применительно к сложным системам.

Выходные параметры — показатели качества, но которым можно судить о правильности функционирования системы, т. е. это понятие аналогично понятию «показатель эффективности», но применяется к системам на любом иерархическом уровне.

Выходные параметры зависят как от свойств элементов, так и от особенностей связи элементов друг с другом, определяемой структурой (конфигурацией) системы. Каждый новый способ связи задает новую структуру и приводит к качественным изменениям в работе системы. К таким же изменениям в работе системы приводит и смена типа какого-либо элемента, если новый тип качественно отличен от предыдущего. Поэтому типы элементов целесообразно также относить к особенностям структуры системы.

Таким образом, задание структуры системы означает задание типов элементов и способа их связи друг с другом. Чаще всего множество вариантов структуры — счетное множество; переход от одного варианта к другому либо дискретно изменяет значения выходных параметров, либо приводит к таким качественным изменениям свойств системы, что нужно говорить вообще об изменении самого набора выходных параметров.

Если структура системы определена, то ее выходные параметры зависят только от параметров элементов и параметров внешних условий.

Внутренние параметры — это параметры элементов. Внешние параметры— это параметры внешней по отношению к объекту среды, ока-

зывающие влияние на его функционирование.

Иными словами, на каждом иерархическом уровне выходные параметры характеризуют свойства системы, а внутренние параметры — свойства элементов. Следует отметить, что при переходе к новому уровню рассмотрения внутренние параметры могут стать выходными, и наоборот.

Например, сопротивление резистора — внутренний параметр при проектировании принципиальной схемы радиоэлектронного устройства, но это же сопротивление будет выходным параметром при разработке самого резистора. Типичными примерами внешних параметров могут служить параметры входных сигналов, параметры нагрузки, влажность и температура окружающей среды, уровень радиации, величины помех и т. п.

Классификация объектов проектирования. Из блочно-иерархического подхода к проектированию следует деление объектов проектирования на системы и элементы.

По характеру математического описания функционирования объекты делят на дискретные и непрерывные.

Из приведенных ранее примеров вытекает также деление объектов на изделия и процессы.

Среди проектируемых процессов особо важное место занимают процессы *технологические.*

Кроме рассмотренных признаков деления объектов существуют и другие, известные за пределами курсов по проектированию. Например, системы и их элементы по физическим основам устройства и работы делят на *механические, гидравлические, пневматические, электрические, радиоэлектронные и др.*

Функционирование многих систем не может быть полностью описано в терминах какой-либо одной научно-технической дисциплины, в них важную роль играют процессы различной физической природы. *Эти системы будем называть системами с физически разнородными элементами.* Примерами таких систем могут служить электродвигатели, оптико-электронные устройства, теплообменные аппараты и др. При анализе подобных систем можно выделить отдельные подсистемы, например механическую, электрическую, тепловую и т. п. Так, в радиоэлектронной аппаратуре основной подсистемой является электрическая, именно с помощью электрических процессов реализуются полезные для человека функции, осуществляется переработка информации. Но помимо электрических процессов в элементах радиоэлектронных устройств происходят процессы тепловые, которые могут оказывать существенное влияние на протекание основных электрических процессов, что обусловливает необходимость исследования не только электрической, но и тепловой подсистемы. В ряде случаев оказывается допустимым автономный анализ разных подсистем одной системы, однако чаще требуется учет взаимообусловленности процессов разной природы. Так, внутренние параметры электрической подсистемы радиоэлек-

тронного устройства обычно существенно зависят от температуры и тем самым температура влияет на величины токов, напряжений и мощностей рассеяния в элементах. В свою очередь, рассеиваемая мощность влияет на температуру конструктивных элементов.

Во многих системах нельзя выделить одну главную подсистему (в гидроприводах и гидравлическая, и механическая подсистемы в равной мере являются основными). То же можно сказать о пневматической и тепловой подсистемах в системах кондиционирования воздуха, о химической, пневматической и механической подсистемах в снарядах и ракетах и т.д.

2. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ И ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Этапы проектирования. Проектирование сложных систем начинается с выработки ТЗ на проектирование и включает в себя этапы предварительного, эскизного и технического (рабочего) проектирования.

Этап предварительного проектирования, или этап научно-исследовательских работ (НИР), связан с поиском принципиальных возможностей построения системы, исследованием новых принципов, структур, технических средств, обоснованием наиболее общих решений; результатом является техническое предложение.

На *этапе эскизного проектирования*, или этапе опытно-конструкторских работ (ОКР), производится детальная проработка возможности построения системы; результатом является эскизный проект.

На этапе технического (рабочего) проектирования выполняется тщательная проработка всех схемных, конструкторских и технологических решений; результатом является технический проект.

При серийном производстве проектируемых изделий в процесс проектирования входит изготовление опытного образца, по результатам испытания которого вносятся все необходимые изменения в проектную документацию.

Часто к проектированию относят изготовление и эксплуатацию пробной серии, поскольку на этих этапах получают много полезной информации для улучшения проекта.

Структура технического задания и примеры параметров проектируемых объектов. Типичное содержание ТЗ на некоторый блок следующее: конкретные числовые требования к выходным параметрам; конкретные числовые данные, характеризующие диапазоны изменения внешних параметров; словесное (качественное) описание ограничений, требований и условий, непосредственно не поддающихся количественной оценке.

Внутренние параметры в ТЗ не упоминаются, их перечень и смысл выявляются после синтеза структуры схемы.

Основную часть ТЗ, как правило, составляют требования к выходным параметрам схемы. Величины, характеризующие эти требования, назы-

вают техническими требованиями ТТ).

Требуемые соотношения между выходными параметрами и техническими требованиями называют условиями работоспособности.

Условия работоспособности важны при проектировании, так как задача проектирования формулируется следующим образом: *разработать блок такой, в котором наилучшим образом выполняются все условия работоспособности во всем диапазоне изменения внешних параметров и при выполнении всех качественных требований ТЗ.*

Часто в ТЗ непосредственно входят или подразумеваются ограничения на многие внутренние параметры.

Пример ТЗ и проектирования простейшей системы.

Спроектировать систему перехода людей через канаву шириной 1,5 м в виде доски шириной не менее 15 см. Доска должна выдерживать вес человека до 100 кгс и при этом прогибаться не более чем на 2 см в середине пролета. При проектировании воспользоваться упрощенными формулами сопротивления материалов для расчета напряжений и деформаций.

Допускаемые напряжения для материала «дерево вдоль волокон» $[\sigma]$– 500 кгс/см^2;

модуль упругости $E = 0{,}1.10^6$ кгс/см^2.

Расчетная схема балки приведена на рис. 1.

Для того, чтобы определить основные геометрические размеры устройства, которое нам необходимо спроектировать в соответствии с техническим заданием, изобразим балку в виде невесомого бруса, опирающегося с одной стороны на шарнирно-подвижную (слева), а с другой стороны на шарнирно-неподвижную (справа) опоры.

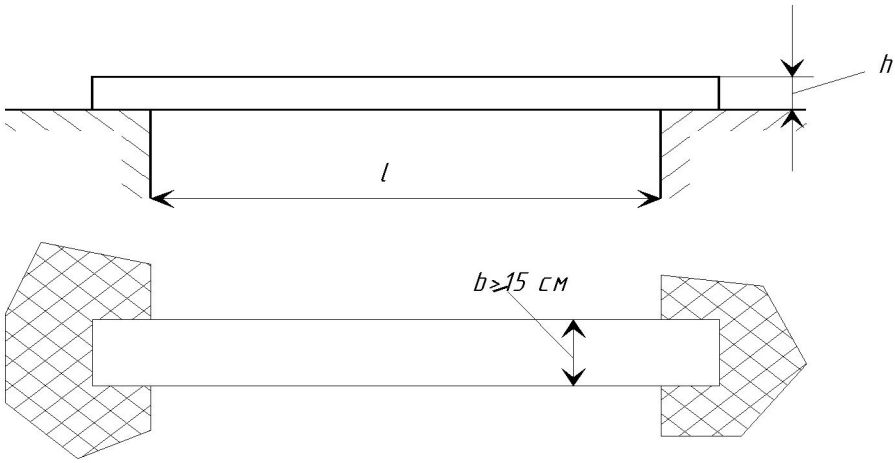
Приложим в середине пролета балки силу, численно равную весу человека P=100 кгс. В точках A и B балки будут действовать реакции опорных устройств R_A и R_B.

Для их определения необходимо воспользоваться уравнениями равновесия твердого тела, которые изучаются в дисциплине, которая называется «Теоретическая механика». Эти уравнения имеют следующий вид:

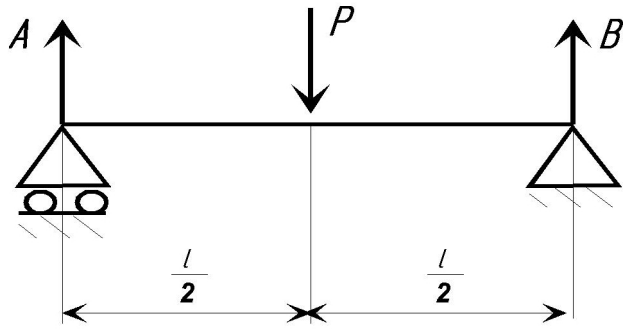
$$\sum F_y = R_a + R_b - P = 0;$$

$$\sum M_a = P \cdot 75 - R_b \cdot 150 = 0;$$

Согласно этим уравнениям суммы проекций всех сил, действующих на устройство, на ось Y и сумма моментов всех сил относительно любой точки должны быть равны нулю. Только в этом случае балка будет находиться в равновесии. Подставив исходные данные в уравнения равновесия, найдем:



Расчетная схема балки



Эпюра изгибающих моментов

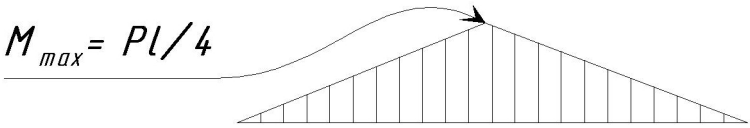


Рис. 1. Расчетная схема устройства и необходимые эпюры внутренних силовых факторов

$$R_b = \frac{75P}{150} = \frac{P}{2} = 50\text{кгс}$$

$$R_a = P - R_b = 100 - 50 = 50\text{кгс}$$

Для проведения прочностных расчетов воспользуемся некоторыми формулами «Сопротивления материалов», что нам предстоит изучить в дальнейшем. Так, максимальные напряжения в балке определяются из выражения:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \le [\sigma],$$

где M_{max}—максимальный изгибающий момент, W—момент сопротивления изгибу, а [σ]- допускаемое напряжение в балке при ее изгибе.

Величину максимального изгибающего момента в балке можно определить, построив график его изменения по длине балки (см. рис. 1). Методики построения таких графиков мы будем изучать в курсе «Сопротивления материалов».

Момент сопротивления изгибу определяется по формуле:

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Объединив две последних формулы, можно найти высоту балки:

$$h \ge \sqrt{\frac{6M_{\max}}{b[\sigma]}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 3750}{15 \cdot 500}} = 1{,}7\text{см};$$

Однако у нас в техническом задании на проектирование объекта есть еще одно условие: Прогиб балки не должен превышать величины 2 см.

Тогда, воспользовавшись выражением для определения прогиба балки под действием силы, приложенной посередине пролета, получим:

$$y = \frac{Pl^3}{48\,EJ} \le \left[y_{\text{доп}}\right] = 2\ см$$

Где момент инерции сечения балки

$$J = \frac{bh^3}{12}$$

Из этого выражения можно найти:

$$h \ge \sqrt[3]{\frac{Pl^3 \cdot 12}{2 \cdot 48 \cdot Eb}} = \sqrt[3]{28{,}1} \approx 3\text{см}$$

Таким образом, мы спроектировали объект в соответствии с техническим заданием на проектирование. Это — балка из дерева с параметрами: b=15 см; h=3 см; l=1,5+0,5=2 м.

Объект соответствует нормам прочности и проходит по требованиям жесткости: прогиб доски под весом G=100 кгс не превышает 2 см. Остается выпустить на объект чертеж в соответствии с полученными в ходе проектирования параметрами и указать технические требования по технологии изготовления объекта.

На рассмотренном примере ясно видны все этапы проектирования любого технического устройства:

а) выработка технического задания;

б) разработка принципиальной схемы устройства;

в) этап предварительных исследований, связанный с прочностными и жесткостными расчетами и оптимизацией параметров;

г) назначение окончательных параметров;

е) выпуск документации на окончательную конструкцию устройства с учетом отработанных условий на проектирование, ограничений на параметры и т.д.

А поскольку проведение расчетных работ невозможно без знания основ теоретической механики и сопротивления материалов, в следующих разделах настоящего курса лекций мы рассмотрим основные положения вышеуказанных дисциплин с учетом объемов, отводимых на изучение этого материала.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Основные обозначения

A — работа;

a — абсолютная величина ускорения, $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

$\vec{a}$ — ускорение, $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$;

a_x, a_y, a_z — компоненты ускорения в декартовой системе координат;

$\vec{a}^n$, $\vec{a}^\tau$ — нормальное и касательное ускорения;

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов;

$\vec{a} \times \vec{b}$ — векторное произведение векторов;

$\vec{F}$ — сила;

f_0 — статический коэффициент трения;

f — динамический коэффициент трения;

I_z — момент инерции относительно оси z;

$\vec{K}_P$ — момент количества движения относительно центра P, $\vec{K}_P = \vec{r} \times m\vec{v}$;

$\vec{M}$ — момент силы, момент пары сил;

m — масса материальной точки, масса тела;

$\vec{N}$ — сила нормального давления;

$\vec{Q}$ — количество движения (количество движения материальной точки: $\vec{Q} = m\vec{v}$);

$\vec{R}$ — главный вектор системы сил, $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$;

$\vec{R}^*$ — равнодействующая;

$\vec{r}_P$ — радиус-вектор, проведенный из точки P;

$\vec{S}$ — импульс силы;

T — кинетическая энергия, $T = \frac{1}{2}mv^2$;

t — время;

v — абсолютная величина скорости, $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$;

$\vec{v}$ — скорость, $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$;

v_x, v_y, v_z — компоненты скорости в декартовой системе координат;

x, y, z — декартовы координаты;

$\dot{x}$; $\ddot{x}$ — первая производная, $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$; вторая производная, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$;

Φ — сила инерции;

φ — угловая координата;

ω — угловая скорость;

ε — угловое ускорение.

1. Кинематика

Кинематика — раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения точки или тела вне зависимости от их массы и причин, вызывающих это движение.

1.1. Кинематика точки

Задать движение точки — значит задать правило, в соответствии с которым можно указать положение точки в каждый момент времени. Наиболее распространенными и удобными способами задания движения точки являются: векторный, координатный и естественный.

► **Векторный способ задания движения точки.** Положение точки M задается *радиусом-вектором* $\vec{r}_P(t)$, проведенным в нее из неподвижного центра (полюса) P (рис. 1). Радиус-вектор является векторной функцией скалярного аргумента — времени t, с течением времени конец вектора $\vec{r}_P$ описывает в пространстве кривую, которая называется *траекторией* точки.

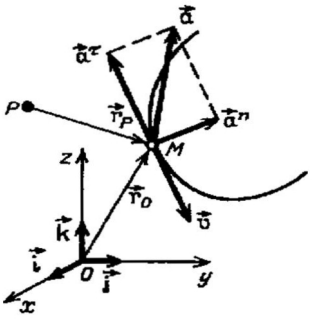


Рис. 1.

Наряду с радиусом-вектором кинематическое состояние точки M характеризуют векторы скорости $\vec{v}(t)$ и ускорения $\vec{a}(t)$.

Скорость точки $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}_P}{dt} = \dot{\vec{r}}_P$ — вектор производной по времени от радиуса-вектора, характеризует быстроту и направление изменения положения точки в пространстве. Вектор скорости направлен по касательной к траектории в точке M.

Ускорение точки $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}_P$ — вектор первой производной по времени от вектора скорости, или второй производной от радиуса-вектора. Ускорение удобно представить в виде суммы двух векторов $\vec{a}^{\tau}$ и $\vec{a}^{n}$, расположенных в плоскости, образуемой векторами $\vec{v}$ и $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^{n}.$$

Вектор $\vec{a}^{\tau}$ направлен параллельно $\vec{v}$ и называется *касательным* (тангенциальным) ускорением, а вектор $\vec{a}^{n}$ направлен перпендикулярно $\vec{a}^{\tau}$ в сторону вогнутости траектории и называется *нормальным* ускорением.

Величины a^{τ} и a^{n} можно найти по формулам

$$a^{\tau} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|v|} = \frac{d}{dt}|v|, \qquad a^{n} = \sqrt{a^2 - (a^{\tau})^2},$$

где $\vec{a} \cdot \vec{v}$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{v}$.

► **Координатный способ задания движения точки.** Положение точки в пространстве задается тремя функциями времени

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \tag{1}$$

где x, y, z — декартовы координаты точки M. Этот способ является другим представлением векторного, так как радиус-вектор $\vec{r}_0$, выходящий из начала координат, можно представить в виде векторной суммы

$$\vec{r}_0 = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы (орты), направленные вдоль координатных осей x, y, z (рис. 1).

Проекции скорости на оси координат v_x, v_y, v_z определяются дифференцированием по времени соответствующих функций (1):

$$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}, \qquad v_z = \dot{z}. \tag{2}$$

Вектор скорости находится в виде геометрической суммы трех векторов:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

а модуль скорости — по формуле

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \tag{3}$$

Проекции ускорения на оси координат a_x, a_y, a_z, ускорение $\vec{a}$, а также его модуль $|a|$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} &a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}, \\ &\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad |a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Значение касательного ускорения вычисляется при помощи выражения

$$a^\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \tag{5}$$

При $a^\tau > 0$ движение точки называется *ускоренным*, так как модуль скорости $|v|$ является в данный момент времени возрастающей функцией. При $a^\tau < 0$ движение называется *замедленным*.

► **Естественный способ задания движения точки.** Положение точки в пространстве определяется заданием:

а) траектории точки;

б) начала отсчета на траектории (точки O, от которой будет отсчитываться дуговая координата s);

в) положительного направления отсчета дуговой координаты;

г) закона движения точки $s = s(t)$ — зависимости ее дуговой координаты от времени.

Дуговая координата s — это длина дуги траектории, отсчитываемая от точки O до точки M. Если отсчет длины ведется в положительном направлении, то значение дуговой координаты положительно, а в противоположном случае — отрицательно.

Естественные оси координат наиболее удобны для изучения движения точки, заданного естественным способом. Сначала в точке M строится *соприкасающаяся окружность*, которая из всех мыслимых окружностей, проходящих через точку M, наиболее плотно смыкается с траекторией (рис. 2). Центр этой окружности называется *центром кривизны* траектории, а ее радиус ρ — *радиусом кривизны* траектории в точке M. Величина $k = 1/\rho$ называется *кривизной* траектории. На пологих участках траектории значения ρ больше, чем в точках искривленных участков, а k, наоборот, — меньше. Плоскость, в которой лежит соприкасающаяся окружность, называется *соприкасающейся плоскостью*, и часть траектории в окрестности точки M «практически» лежит в этой плоскости.

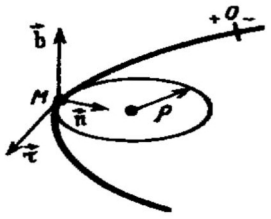


Рис. 2.

Естественными осями координат называются три взаимно перпендикулярные оси: касательная к траектории в точке M, направленная в сторону возрастания дуговой координаты s; *главная нормаль*, лежащая в соприкасающейся плоскости и направленная к центру кривизны; *бинормаль*, перпендикулярная соприкасающейся плоскости и направленная так, что если посмотреть навстречу ее положительному направлению, ближайший поворот от касательной оси к оси главной нормали кажется происходящим против хода часовой стрелки. Единичные векторы (орты) обозначаются соответственно $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ (рис. 2), они образуют правую тройку. По построению $\vec{v} \parallel \vec{\tau}$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Используя естественные оси координат, векторы скорости и ускорения точки M можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\vec{v} = v\vec{\tau}, \quad \vec{a} = \vec{a}^{\,\tau} + \vec{a}^{\,n} = a^{\tau}\vec{\tau} + a^{n}\vec{n}, \\ &v = \dot{s}, \qquad a^{\tau} = \dot{v} = \ddot{s}, \qquad a^{n} = v^2/\rho. \end{aligned} \tag{6}$$

Величина v называется алгебраическим значением скорости и может быть как меньше, так и больше нуля. При положительном значении v скорость точки направлена в сторону положительного отсчета дуговой координаты. Абсолютное значение v равно модулю скорости $|v|$. Аналогично a^{τ} называется алгебраическим значением

касательного ускорения, и, например, при $a^\tau < 0$ вектор $\vec{a}^\tau$ направлен в сторону отрицательного отсчета дуговой координаты.

При одинаковых знаках v и a^τ движение точки в рассматриваемый момент времени ускоренное, при разных — замедленное. Нормальное ускорение равно нулю при движении точки по прямолинейному участку траектории. Касательное ускорение точки равно нулю, когда при движении точки алгебраическое значение величины скорости остается постоянным.

Равнопеременным движением точки называется движение, при котором $a^\tau = a_0 = \text{const}$. В этом случае алгебраическое значение скорости и дуговая координата могут быть найдены по формулам

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a_0(t - t_0), \\ s &= s_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a_0(t - t_0)^2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Здесь v_0 и s_0 — алгебраическое значение скорости и дуговая координата, соответствующие моменту времени t_0.

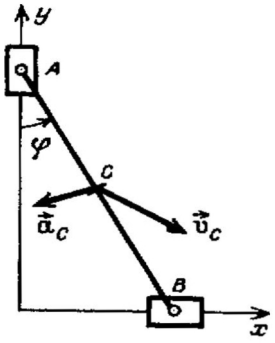


Рис. 3.

Равномерным называется такое движение точки, при котором $a^\tau = 0$.

В общем случае дуговая координата s и пройденный точкой путь D могут быть найдены по формулам:

$$s = \int_{t_0}^{t} v\,dt, \qquad D = \int_{t_0}^{t} |v|\,dt.$$

Отсюда видна разница между дуговой координатой и путем, пройденным точкой.

Пример. Линейка AB эллипсографа длиной $2l = 2$ м (рис. 3) движется так, что угол φ (в радианах) изменяется по закону $\varphi = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}$. При этом точка B линейки движется по горизонтальной прямой, а точка A — по вертикальной. Найти траекторию точки C, лежащей на середине линейки, а также ее скорость, ускорение и радиус кривизны траектории при $t = 1$ с.

Решение. Перейдем сначала к ранее рассмотренному координатному способу задания движения. Введем оси координат, как указано на рисунке, после чего найдем $x_C = l\sin\varphi$, $y_C = l\cos\varphi$. Возводя в квадрат правые и левые части уравнений движения и складывая их почленно, получим уравнение траектории

$$x_C^2 + y_C^2 = l^2,$$

откуда следует, что точка C движется по окружности радиуса l.

Воспользовавшись затем формулами (2) — (6) и учитывая, что моменту

времени $t = 1$ с соответствуют $\varphi = \pi/6$, $\dot{\varphi} = 1\,\text{с}^{-1}$, $\ddot{\varphi} = -1\,\text{с}^{-2}$, найдем

$$
\begin{aligned}
v_{Cx} &= \dot{x}_C = l\cos\varphi\,\dot{\varphi} = 0{,}87\ \text{м/с},\\
v_{Cy} &= \dot{y}_C = -l\sin\varphi\,\dot{\varphi} = -0{,}5\ \text{м/с},\\
|v_C| &= \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = 1\ \text{м/с},\\
a_{Cx} &= \dot{v}_{Cx} = l(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}) = -1{,}37\ \text{м/с}^2,\\
a_{Cy} &= \dot{v}_{Cy} = l(-\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\,\ddot{\varphi}) = -0{,}37\ \text{м/с}^2,\\
|a_C| &= \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 1{,}41\ \text{м/с}^2,\\
a_C^\tau &= \frac{v_{Cx}a_{Cx} + v_{Cy}a_{Cy}}{|v_C|} = -1{,}0\ \text{м/с}^2,\\
a_C^n &= \sqrt{a_C^2 - (a_C^\tau)^2} = 1{,}0\ \text{м/с}^2,\\
\rho &= \frac{v_C^2}{a_C^n} = 1{,}0\ \text{м},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

причем последний результат очевиден заранее, исходя из полученного уравнения траектории.

1.2. Кинематика твердого тела

Теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны (рис. 4).

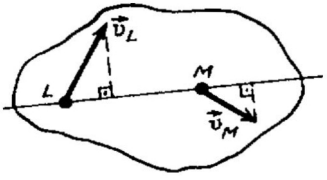


Рис. 4.

Эта теорема справедлива для произвольного движения тела и утверждает, что проекции должны быть равны и по величине, и по направлению.

Простейшие движения твердого тела: поступательное и вращение вокруг неподвижной оси.

► **Поступательное движение.** Движение твердого тела называется *поступательным*, если любая прямая, проведенная в нем, при движении остается параллельной своему первоначальному направлению. Свойства поступательного движения: траектории всех точек твердого тела при наложении совпадают, скорости и ускорения всех точек тела одинаковы в каждый момент времени:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}, \qquad \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a},$$

где A и B — любые точки.

► **Вращение вокруг неподвижной оси.** При *вращении твердого тела вокруг неподвижной оси*, называемой осью вращения, его точки, лежащие на оси, остаются неподвижными. Через ось проведем две плоскости — неподвижную и подвижную, в которой находится точка тела, скорость и ускорение которой необходимо найти. Двугранный угол φ между подвижной и неподвижной плоскостями называется углом поворота тела, он измеряется в радианах. Угол поворота

считают положительным, когда он отсчитывается от неподвижной плоскости к подвижной против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу положительному направлению оси вращения. Чтобы было известно положение тела (и каждой его точки) в любой момент времени, необходимо знать зависимость угла φ от времени t:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Это уравнение выражает *закон вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.*

Вместе с функцией $\varphi(t)$ ее первая и вторая производные по времени характеризуют кинематическое состояние твердого тела в рассматриваемый момент времени

$$\omega = \dot{\varphi}, \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi},$$

где ω — угловая скорость тела, ε — его угловое ускорение.

Траекторией произвольной точки M твердого тела является окружность, радиус которой R называется радиусом вращения точки. На рис. 5 эта окружность изображена со стороны положительного направления оси вращения. Знак ω указывает направление вращения: если он положителен, то вращение происходит против хода часовой стрелки. Угловую скорость и угловое ускорение удобно изображать при помощи дуговых стрелок с учетом их знаков. Если знаки ω и ε одинаковы, то говорят, что вращение ускоренное, если знаки разные — замедленное.

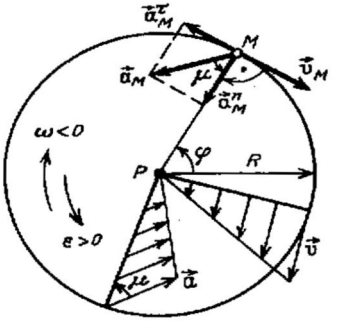


Рис. 5.

Вращение твердого тела называется *равнопеременным*, когда $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. В этом случае зависимости угла поворота и угловой скорости от времени даются формулами

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon_0(t - t_0),$$
$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(t - t_0)^2,$$

аналогичными формулам для равнопеременного движения точки (7).

Равномерное вращение твердого тела является частным случаем равнопеременного, когда $\varepsilon_0 = \text{const} = 0$.

В общем случае при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси модуль скорости точки M находится по формуле

$$v = |\omega| R, \tag{9}$$

при этом скорость направлена по касательной к окружности, т.е. перпендикулярно к радиусу, и ее направление согласовано с направлением дуговой стрелки ω. Величины касательного, нормального и полного ускорения можно найти по формулам, являющимся частными случаями формул (6):

$$a^\tau = |\varepsilon|R, \quad a^n = \omega^2 R, \quad |a| = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Вектор касательного ускорения $\vec{a}^\tau$ направлен по касательной к окружности, и его направление согласовано с направлением дуговой стрелки ε, вектор $\vec{a}^n$ направлен по радиусу R к центру окружности. Острый угол μ между $\vec{a}$ и R можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a^\tau}{a^n} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2},$$

при этом направление ближайшего поворота от $\vec{a}$ к R будет согласовано с направлением дуговой стрелки ε.

Величины ω, ε, μ, входящие в последние формулы, одинаковы для всех точек тела и характеризуют кинематическое состояние тела в целом.

Из формул следует, что векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ разных точек тела, лежащих на одном радиусе, параллельны между собой и линейно зависят от расстояния до оси вращения (рис. 5).

1.3. Плоскопараллельное движение твердого тела

► **Плоскопараллельным** называется такое движение твердого тела, при котором остается постоянным расстояние от любой его точки до некоторой неподвижной плоскости, которая называется основной.

Изучение плоскопараллельного движения сводится к исследованию движения плоской фигуры в ее плоскости. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси является частным случаем плоскопараллельного движения. 0Угол поворота плоской фигуры $\varphi(t)$ отсчитывается от некоторой неподвижной прямой до прямой, неизменно связанной с фигурой. Правило знаков для φ принимается такое же, как в случае вращения тела вокруг неподвижной оси.

Положение плоской фигуры полностью определено, если известны координаты некоторой ее точки (полюса, центра) P и угол поворота. Соотношения

$$x_P = x(t), \quad y_P = y(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

задающие три функциональные зависимости от времени, называются *уравнениями движения плоской фигуры*. Угловая скорость ω и угловое ускорение ε вводятся аналогично случаю вращения тела вокруг неподвижной оси: $\omega = \dot{\varphi}$, $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

► **Теорема о скоростях точек плоской фигуры**: скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме векторов скорости полюса $\vec{v}_P$ и скорости $\vec{v}_{BP}$, которую имела бы точка B при вращении фигуры вокруг неподвижного полюса P (рис. 6):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP}.$$

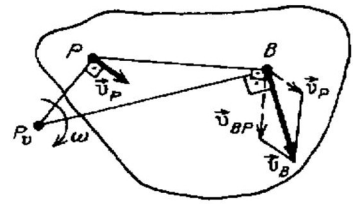


Рис. 6.

Скорость $\vec{v}_{BP}$ перпендикулярна отрезку BP, ее величина подсчитывается по формуле $v_{BP} = |\omega|BP$, а направление согласовано с направлением дуговой стрелки ω.

Точка P_v плоской фигуры, скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей*. Если эту точку принять в качестве полюса, скорость произвольной точки B плоской фигуры определится по формуле $\vec{v}_B = \vec{v}_{BP_v}$. Направление $\vec{v}_B$ будет согласовано с направлением дуговой стрелки угловой скорости, а ее модуль найдется из формулы $v_B = |\omega|BP_v$. Скорости точек плоской фигуры в рассматриваемый момент времени будут распределены так же, как в случае вращения фигуры вокруг неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Поэтому можно воспользоваться формулой (9) вращательного движения

$$|\omega| = \frac{v_B}{BP_v} = \frac{v_C}{CP_v} = \frac{v_D}{DP_v}.$$

На рис. 7 показаны варианты расположения мгновенного центра скоростей:

а) при качении без проскальзывания по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей находится в точке касания (рис. 7, *а*);

б) если $\vec{v}_B \parallel \vec{v}_C$ и $\vec{v}_B \perp BC$, то положение P_v определяется построением, показанным на рис. 7, *б*;

в) если $\vec{v}_B \parallel \vec{v}_C$ и отрезок BC не перпендикулярен $\vec{v}_B$, то мгновенного центра скоростей нет, $\omega = 0$, а скорости всех точек тела одинаковы в данный момент времени (рис. 7, *в*).

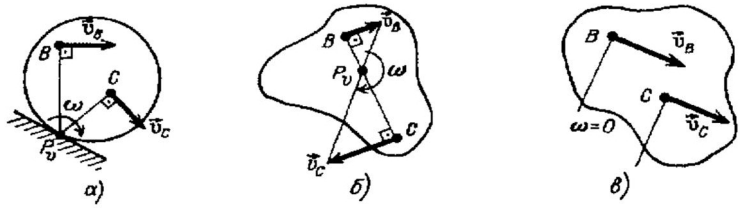


Рис. 7.

Пример. Найти в момент времени $t = 1$ с скорости точек A, B и C линейки эллипсографа, движение которого описано в примере из разд. 1.1.

Решение. Стержень AB совершает плоскопараллельное движение. Проводя перпендикуляры к направлениям скоростей точек A и B, найдем положение мгновенного центра скоростей P_v (рис. 8). Угловую скорость $\omega = \dot{\varphi} = 1\,\text{с}^{-1}$ изобразим дуговой стрелкой с учетом знака. Направим скорости точек A, B и C перпендикулярно прямым, соединяющим их с P_v, согласовав их направления с дуговой стрелкой угловой скорости. Величины скоростей найдем из соотношения

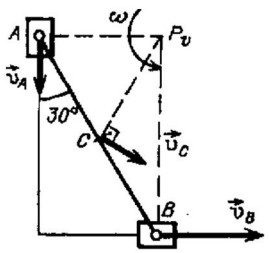


Рис. 8.

$$\omega = \frac{v_A}{AP_v} = \frac{v_B}{BP_v} = \frac{v_C}{CP_v},$$

откуда $v_A = v_C = 1{,}0$ м/с, $v_B = \sqrt{3} = 1{,}73$ м/с.

▶ **Теорема об ускорениях точек плоской фигуры**: ускорение любой точки B плоской фигуры равно геометрической сумме векторов ускорения полюса $\vec{a}_P$ и ускорения $\vec{a}_{BP}$, которое имела бы точка B при вращении фигуры вокруг неподвижного полюса P:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_P + \vec{a}_{BP} = \vec{a}_P + \vec{a}^{\tau}_{BP} + \vec{a}^{n}_{BP}. \qquad (10)$$

Модули векторов $\vec{a}^{\tau}_{BP}$ и $\vec{a}^{n}_{BP}$ и их ориентация на плоскости следующие: $\vec{a}^{n}_{BP} \parallel BP$ и направлен к полюсу P; $a^{n}_{BP} = \omega^2 BP$; $\vec{a}^{\tau}_{BP} \perp BP$ и согласован с направлением дуговой стрелки ε, $a^{\tau}_{BP} = |\varepsilon| BP$ (рис. 9).

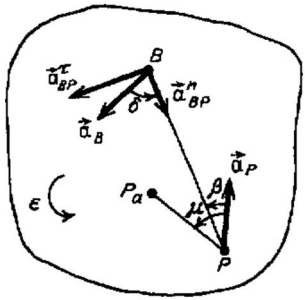


Рис. 9.

Если спроектировать векторное равенство (10) на два направления — параллельное BP и перпендикулярное BP, получится система двух скалярных уравнений

$$a_B \cos\delta = -a_P \cos\beta + \omega^2 BP,$$
$$a_B \sin\delta = -a_P \sin\beta + |\varepsilon| BP,$$

в которых фигурируют семь величин — a_B, a_P, δ, β, BP, ω, ε. Если пять из них известны, то оставшиеся две могут быть найдены путем решения системы.

Мгновенным центром ускорений плоской фигуры называется неизменно связанная с ней точка P_a, ускорение которой в рассматриваемый момент времени равно нулю. Картина распределения ускорений точек плоской фигуры такая же, как при ее вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через точку P_a.

1.4. Произвольное движение твердого тела

Скорость $\vec{v}_B$ и ускорение $\vec{a}_B$ любой точки твердого тела, совершающего произвольное движение, могут быть найдены, если в рассматриваемый момент времени известны: скорость $\vec{v}_P$ и ускорение $\vec{a}_P$ некоторой точки P тела, а также векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ тела. Соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PB}, \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_P + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{PB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{PB}). \end{aligned} \tag{11}$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ характеризуют кинематическое состояние тела в рассматриваемый момент времени. Можно показать, что они не зависят от выбора полюса P.

В случаях вращения тела вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении вектор $\vec{\omega}$ равен первой производной от угла поворота по времени и направлен перпендикулярно основной плоскости. При этом, если посмотреть навстречу вектору $\vec{\omega}$, вращение будет казаться происходящим против хода часовой стрелки. Вектор $\vec{\varepsilon}$ в этих случаях направлен параллельно вектору $\vec{\omega}$, если знаки $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ одинаковы. В противном случае $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ антипараллельны.

При произвольном движении малое перемещение тела удобно представить как совокупность его простейших движений, совершаемых одновременно, — малого поступательного перемещения вместе с полюсом P и малого поворота вокруг оси, проходящей через полюс.

Если $\vec{v}_P = 0$, что имеет место, например, при *сферическом движении*, формула для скорости (11) принимает вид *формулы Эйлера*

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PB}.$$

В этом случае распределение скоростей точек тела такое же, как при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через P параллельно вектору $\vec{\omega}$, поэтому она называется *мгновенной осью вращения*. Скорости всех точек тела, оказавшихся на этой оси в рассматриваемый момент времени, будут равны нулю, и малое перемещение тела можно рассматривать как поворот на малый угол вокруг мгновенной оси вращения.

1.5. Сложное движение точки

▶ **Основные понятия.** Часто за одной и той же точкой M следят два наблюдателя, один из них находится в основной системе координат $Oxyz$, которая считается неподвижной, другой — в подвижной системе координат $Px_1y_1z_1$, которая известным образом движется относительно неподвижной (рис. 10). В этом случае, если будет задан закон движения точки в подвижной системе координат, то тем самым

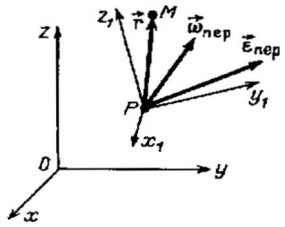


Рис. 10.

в любой момент времени будет задано положение точки и в неподвижной системе координат. Движение точки, заданное таким образом, называется *сложным* (составным) движением точки.

Описанный способ задания движения точки отличен от изученных ранее. Скорость точки и ее ускорение можно определить так: надлежащими преобразованиями перейти к одному из изученных способов задания движения точки и затем действовать соответствующим образом. Однако эту же задачу можно решить по-другому, опираясь на рассматриваемые ниже теоремы о скоростях и ускорениях при сложном движении точки.

Абсолютным движением точки M называется ее движение по отношению к неподвижной (абсолютной) системе координат. Траектория точки, ее скорость и ускорение называются соответственно *абсолютной траекторией, абсолютной скоростью* $\vec{v}_{\text{абс}}$ и *абсолютным ускорением* $\vec{a}_{\text{абс}}$.

Относительным движением точки M называется ее движение по отношению к подвижной системе координат. Траектория точки, ее скорость и ускорение по отношению к подвижной системе координат называются соответственно *относительной траекторией, относительной скоростью* $\vec{v}_{\text{отн}}$ и *относительным ускорением* $\vec{a}_{\text{отн}}$.

Переносным движением называется движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной. При этом движении подвижная система «переносит» вместе с собой множество неизменно связанных с ней точек.

Переносной скоростью $\vec{v}_{\text{пер}}$ и *переносным ускорением* $\vec{a}_{\text{пер}}$ называются скорость и ускорение той неизменно связанной с подвижной системой точки B, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M.

Если известны скорость $\vec{v}_P$ и ускорение $\vec{a}_P$ некоторой точки, принадлежащей подвижной системе, а также угловая скорость $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_{\text{пер}}$ подвижной системы, то $\vec{v}_B$ и $\vec{a}_B$ можно найти, пользуясь формулами (11):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{r},$$
$$\vec{a}_B = \vec{a}_P + \vec{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{\text{пер}} \times (\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{r}).$$

► **Основные теоремы.** *Теорема о скоростях при сложном движении точки*: вектор абсолютной скорости равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Теорема об ускорениях при сложном движении точки: вектор абсолютного ускорения равен геометрической сумме векторов относительного, переносного и *кориолисова* ускорений

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Вектор ускорения Кориолиса определяется формулой

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2(\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}}) \qquad (12)$$

и находится в соответствии с правилами вычисления векторного произведения.

При нахождении векторов $\vec{a}_{\text{отн}}$ и $\vec{a}_{\text{пер}}$ необходимо иметь в виду, что каждый из них может являться геометрической суммой нескольких составляющих, например касательного и нормального ускорений.

Пример. По линейке эллипсографа, движение которого описано в примере из разд. 1.1, движется точка M по закону $AM = 0{,}5\,t^2 - 2t + 2{,}5$. Определить ее скорость и ускорение в момент времени $t = 1$ с.

Решение. Найдем скорость и ускорение, пользуясь теоремами сложного движения точки. Введем подвижную систему координат, связав ее со стержнем AB. При таком выборе относительное движение точки M будет задано естественным способом. При $t = 1$ с она окажется в середине отрезка.

Относительные скорость и ускорение найдем, пользуясь формулами (6)

$$v_{\text{отн}} = \dot{L} = t - 2 = -1\ \text{м/с},$$
$$a^{\tau}_{\text{отн}} = \ddot{L} = 1\ \text{м/с}^2, \quad a^{n}_{\text{отн}} = v^2_{\text{отн}}/\rho_{\text{отн}} = 0, \quad (\text{так как } 1/\rho_{\text{отн}} = 0),$$

где использовано обозначение $L = AM$.

Изобразим на рис. 11 относительные скорость и ускорение с учетом знаков.

Переносными скоростью и ускорением точки M будут являться скорость и ускорение того пункта линейки эллипсографа, в котором точка окажется в момент $t = 1$ с. Этим пунктом будет являться точка C линейки, скорость и ускорение которой были найдены при решении примера, разобранного в разд. 1.1 (см. формулы (8)):

$$\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_C, \quad \vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_C.$$

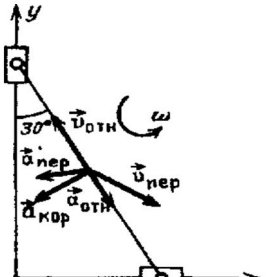


Рис. 11.

Найдем ускорение Кориолиса (12). Вектор угловой скорости подвижной системы координат направлен к наблюдателю перпендикулярно плоскости рисунка. Вектор $\vec{a}_{\text{кор}}$ располагается в плоскости рисунка перпендикулярно $\vec{v}_{\text{отн}}$ так, что если посмотреть навстречу $\vec{a}_{\text{кор}}$, поворот от $\vec{\omega}$ в ближайшую сторону к $\vec{v}_{\text{отн}}$ кажется происходящим против хода часовой стрелки (рис. 11). Модуль $\vec{a}_{\text{кор}}$ равен

$$|a_{\text{кор}}| = 2|\omega||v_{\text{отн}}|\sin 90^\circ = 2\ \text{м/с}^2.$$

Находим абсолютную скорость точки M

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Спроектируем обе части векторного равенства на оси x и y

$$v_{\text{абс}\,x} = v_{\text{отн}\,x} + v_{\text{пер}\,x} = -1\sin 30^\circ + 1\cos 30^\circ = 0{,}37\ \text{м/с},$$
$$v_{\text{абс}\,y} = v_{\text{отн}\,y} + v_{\text{пер}\,y} = 1\cos 30^\circ - 1\sin 30^\circ = 0{,}37\ \text{м/с},$$

откуда $v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{абс}\,x}^2 + v_{\text{абс}\,y}^2} = 0{,}52$ м/с.

Находим абсолютное ускорение точки M

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Спроектируем обе части последнего векторного соотношения на оси x и y с учетом формул (8)

$$a_{\text{абс}\,x} = 1\sin 30^\circ - 1{,}37 - 2\cos 30^\circ = -2{,}60\ \text{м/с}^2,$$
$$a_{\text{абс}\,y} = -1\cos 30^\circ - 0{,}37 - 2\sin 30^\circ = -2{,}24\ \text{м/с}^2.$$

Поэтому $a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс}\,x}^2 + a_{\text{абс}\,y}^2} = 3{,}43$ м/с^2.

При решении задач кинематики с помощью теорем сложного движения точки нахождение кинематических характеристик относительного и переносного движений можно начинать только после выбора подвижной системы координат. Поэтому вопрос о направлении ускорения Кориолиса лишен всякого смысла, пока не указаны неподвижная система, а также подвижная система и закон ее движения.

2. Основные понятия и аксиомы механики

2.1. Основные понятия механики

► **Механические системы. Силы.** *Механической системой* называется совокупность материальных точек, выделенных по некоторому признаку. Как правило, положение какой-либо точки, ее скорость и ускорение зависят от положений и скоростей остальных точек.

Несвободной механической системой называется такая система точек, на положения и скорости которых наложены ограничения. Материальные тела, которые осуществляют эти ограничения, называются *механическими связями*, наложенными на механическую систему. Соотношения, связывающие координаты, скорости точек системы и время, называются *уравнениями связей*. Материальная система называется *свободной* в случае отсутствия механических связей.

Абсолютно твердым телом (твердым телом, телом) называется совокупность материальных точек, взаимное положение которых не меняется.

При взаимодействии точек (тел) механической системы происходит изменение их кинематического состояния. Мерой такого взаимодействия является *сила*, изображаемая на рисунках в виде направленного прямолинейного отрезка. *Линией действия силы* называется прямая, вдоль которой направлен этот отрезок.

Совокупность сил, выделенных по какому-либо признаку, называется *системой сил* и обозначается $\{\vec{F}_i\}$.

Система сил называется *уравновешенной*, если, приложенная к свободному твердому телу, находящемуся в покое, она не выводит его из этого состояния.

Системы сил $\{\vec{F}_i\}$ и $\{\vec{G}_j\}$ называются *эквивалентными*, если, порознь приложенные к свободному твердому телу, они вызывают одинаковое изменение его кинематического состояния.

Равнодействующей системы сил, приложенных к твердому телу, называется сила, эквивалентная исходной системе сил.

Силы, с которыми механические связи действуют на точки системы, называются *силами реакций связей*. Силы, действующие на точки системы и не являющиеся силами реакций, называются *активными силами*.

► **Моменты сил.** *Моментом силы* $\vec{F}$ *относительно центра (точки)* P называется вектор $\vec{M}_P(\vec{F})$, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}_P$, проведенного из центра в точку приложения силы, на вектор силы: $\vec{M}_P(\vec{F}) = \vec{r}_P \times \vec{F}$ (рис. 12).

Модуль момента силы равен произведению модуля силы на величину ее плеча относительно центра. *Плечом силы* $\vec{F}$ относительно центра называется отрезок перпендикуляра PK, опущенного из центра на линию действия. Вектор $\vec{M}_P(\vec{F})$ перпендикулярен плоскости, в которой располагаются сила и центр, и направлен так, что если посмотреть ему навстречу, поворот силы вокруг центра кажется происходящим против хода часовой стрелки. Если силу перенести по линии действия, ее момент относительно того же центра не изменится.

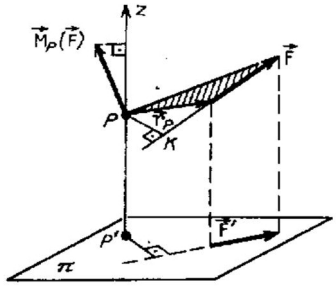


Рис. 12.

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно оси* z называется скалярная величина $M_z(\vec{F})$, равная проекции на эту ось вектора момента силы относительно любого центра, лежащего на этой оси. Для вычисления момента силы относительно оси необходимо:

1) провести любую плоскость π, перпендикулярную оси, и отметить точку P' их пересечения (рис. 12);

2) найти $\vec{F}'$ — проекцию силы на плоскость;

3) найти абсолютное значение момента вектора $\vec{F}'$ относительно центра P';

4) полученной величине присвоить знак, наблюдая за вращением $\vec{F}'$ вокруг P' со стороны положительного направления оси, при этом вращению против хода часовой стрелки будет соответствовать положительный знак.

Момент силы относительно оси не изменится, если силу перенести вдоль линии действия. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось находятся в одной плоскости; в этом случае линия действия силы либо параллельна оси, либо ее пересекает.

Момент силы $\vec{F}$ относительно начала системы координат O и моменты силы относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_O \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x(\vec{F})\,\vec{i} + M_y(\vec{F})\,\vec{j} + M_z(\vec{F})\,\vec{k};$$

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y, \quad M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z, \quad M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x,$$

где F_x, F_y, F_z — проекции силы на координатные оси, а x, y, z — координаты точки ее приложения.

Главным вектором системы сил $\{\vec{F}_k\}$ называется вектор $\vec{R}$, равный геометрической сумме всех сил системы:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k.$$

Главным моментом системы сил относительно центра P называется вектор $\vec{M}_P$, равный геометрической сумме векторов моментов всех сил системы относительно центра P:

$$\vec{M}_P = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_P(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_{kP} \times \vec{F}_k.$$

► **Парой сил** называется система двух сил $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, приложенных к одному твердому телу, которые равны по модулю, параллельны и направлены в противоположные стороны (рис. 13).

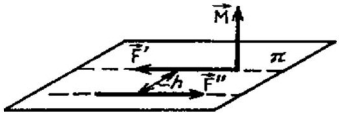


Рис. 13

Кратчайшее расстояние h между линиями действия сил пары называется *плечом пары*, а плоскость, в которой лежат силы, — *плоскостью действия пары*.

Свойства пары сил:

1. Главный вектор пары сил равен нулю.

2. Главный момент пары сил $\vec{M}(\vec{F}', \vec{F}'') = \vec{M}$ не зависит от выбора центра и называется *моментом пары сил*. Он равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы. Момент пары сил является мерой ее механического действия на твердое тело. Под действием пары сил свободное твердое тело, находившееся до того в покое, начинает вращаться вокруг оси, параллельной вектору момента пары сил.

2.2. Аксиомы механики

Основные аксиомы механики (*законы Галилея — Ньютона*) перечислены ниже.

► **1. Закон инерции** (*первый закон Ньютона*): если на свободную материальную точку не действуют силы, то она сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

► **2. Закон пропорциональности силы и ускорения** (*второй закон Ньютона*) записывается в виде векторного равенства

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

согласно которому сила, действующая на свободную точку, сообщает ей ускорение, вектор которого параллелен силе и пропорционален ее величине.

Масса точки m входит во второй закон скалярным коэффициентом пропорциональности. В механике масса полагается постоянной величиной, она является мерой инертности и гравитационных свойств материальной точки.

Системы отсчета, в которых выполняются первый и второй законы Ньютона, называются *инерциальными системами отсчета*. Если в некоторой системе отсчета эти законы не выполняются, то она называется *неинерциальной*.

► **3. Закон равенства действия и противодействия** (*третий закон Ньютона*): всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Силовые воздействия одних материальных тел на другие не бывают односторонними, они всегда взаимны. Силы не возникают сами по себе, а являются результатом контактного или пространственного взаимодействия тел. Появление силы, действующей на тело, предполагает наличие другого тела, на которое, в свою очередь, будет действовать сила со стороны первого тела. Закон утверждает, что эти силы равны по величине, противоположны по направлению и их линии действия совпадают.

► **4.** Система сил, приложенных к одной точке, имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, которая равна их геометрической сумме.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей системы сходящихся сил (является следствием четвертой аксиомы): момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольного центра равен геометрической сумме моментов сил системы относительно того же центра.

► **5.** Кинематическое состояние несвободной механической системы не изменяется, если отбросить механические связи, наложенные на систему, заменив их действие силами реакций связей.

3. Статика

3.1. Основные законы и теоремы статики

► **Задачами статики** являются:

1) преобразования систем сил в эквивалентные системы сил;

2) определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

► **Аксиомы статики.** Дополнительно к общим законам механики в статике присоединяют следующие аксиомы.

1. *Аксиома об уравновешенности двух сил, приложенных к твердому телу*: две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если силы направлены в разные стороны вдоль общей линии действия и модули их равны.

2. *Аксиома присоединения и исключения уравновешенных систем сил*: действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней добавить или из нее исключить уравновешенную систему сил.

Из последних двух аксиом следует, что силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии действия, при этом действие силы на тело не будет меняться.

3. *Аксиома о сохранении равновесия механической системы при наложении дополнительных механических связей*: если механическая система находится в состоянии равновесия, то оно сохранится, если на систему наложить дополнительную механическую связь. Отсюда, в частности, следует, что равновесие деформируемого тела, находящегося под действием некоторой системы сил, сохранится при его затвердевании, так как затвердевание тела эквивалентно наложению дополнительных механических связей на систему материальных точек, образующих деформируемое тело.

► **Основные теоремы статики.**

Можно доказать, что две пары сил эквивалентны в том случае, если их моменты равны. Это означает, что, не изменяя действия пары на твердое тело, ее можно переносить в любое место в плоскости ее действия, при этом пару можно поворачивать, менять величины сил и плеча, оставляя постоянным направление вращения и величину момента пары. Пару можно также переносить в другую плоскость, параллельную исходной плоскости действия пары. Таким образом, основной характеристикой пары является вектор ее момента, поэтому пару удобнее представлять этим вектором, а не двумя антипараллельными силами.

Теорема о результирующей паре сил: система пар, приложенных к твердому телу, эквивалентна одной паре сил, момент которой равен геометрической сумме моментов исходных пар.

Теорема о параллельном переносе силы: силу, не меняя ее действия на твердое тело, можно параллельно перенести в любую точку тела, добавив к нему при этом пару сил (эта пара называется присоединенной), момент которой равен моменту переносимой силы относительно той точки, куда сила переносится.

Теорема о приведении системы сил к центру: произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна одной силе, приложенной в наперед выбранном центре P, и одной паре сил. При этом сила равна главному вектору системы сил $\vec{R}$, а момент пары сил — главному моменту системы сил $\vec{M}_P$ относительно выбранного центра.

Теорема об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу: для того чтобы системы сил были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы у них были одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: если система сил имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, то ее момент относительно любого центра P равен геометрической сумме векторов моментов всех сил системы относительно того же центра:

$$\vec{M}_P(\vec{R}^*) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_P(\vec{F}_k).$$

Следствие: момент равнодействующей относительно произвольной оси равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно той же оси.

3.2. Условия уравновешенности систем сил, приложенных к твердому телу

► **Уравнения равновесия твердого тела.** Для того чтобы система сил, приложенных к твердому телу, была уравновешенной, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю ее главный вектор и главный момент относительно какого-либо центра

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0; \qquad \vec{M}_P = \sum \vec{M}_P(\vec{F}_k) = 0. \tag{1}$$

Условия уравновешенности системы сил, приложенных к твердому телу, в координатной форме получаются из векторных уравнений (1) и имеют вид системы шести уравнений

$$\begin{array}{lll} \sum F_{kx} = 0, & \sum F_{ky} = 0, & \sum F_{kz} = 0, \\ \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, & \sum M_y(\vec{F}_k) = 0, & \sum M_z(\vec{F}_k) = 0. \end{array} \tag{2}$$

Верхние три уравнения называются *уравнениями проекций* сил на координатные оси; они отражают тот факт, что при равновесии твердого тела алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных к телу, на каждую координатную ось должна быть равна нулю. Нижние три уравнения называются *уравнениями моментов* сил относительно координатных осей. Эти уравнения указывают на то, что при равновесии тела алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно каждой координатной оси должна быть равна нулю.

Система уравнений (2) называется *основной системой уравнений равновесия твердого тела*, находящегося под действием произвольной системы сил. Существуют другие формы системы уравнений равновесия, каждая из которых состоит из шести уравнений. При использовании таких систем приходится следить за выполнением условий, накладывающих ограничения на выбор осей, относительно которых вычисляются суммы моментов сил.

В каждой задаче о равновесии твердого тела или конструкции, состоящей из нескольких тел, кроме заданных величин, имеются величины, которые необходимо найти в процессе решения. Задача о равновесии называется *статически определимой*, если она решается до конца методами статики. В этом случае необходимо, чтобы число неизвестных не превышало числа уравнений равновесия. Задача называется *статически неопределимой*, если ее нельзя решить, пользуясь только уравнениями статики. Поэтому задача о равновесии одного тела, содержащая семь и более неизвестных, заведомо является статически неопределимой.

► **Частные случаи уравнений равновесия твердого тела.** В частных случаях расположения сил одно или несколько уравнений системы (2) могут обращаться в тождества. Например, если все силы перпендикулярны координатной оси z, в тождество обращается уравнение проекций на ось z, и число уравнений равновесия уменьшается в этом случае до пяти; если линии действия всех сил пересекают ось y, в тождество обращается уравнение моментов относительно оси y.

Ниже рассмотрены системы сил, равновесие которых описывается тремя уравнениями равновесия.

Система сил называется *сходящейся*, если линии действия сил пересекаются в одной точке. Выберем начало координат в этой точке. Уравнения моментов основной системы (2) обращаются в тождества, а оставшиеся три

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0$$

образуют систему уравнений равновесия.

Система сил называется *плоской*, если силы располагаются в одной плоскости. Направим координатные оси так, чтобы все силы оказались в плоскости xOy; в этом случае третье, четвертое и пятое уравнения основной системы (2) обращаются в тождества, оставшиеся три

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (3)$$

образуют систему уравнений равновесия плоской системы сил. Здесь уравнение моментов относительно оси z записано в иной, эквивалентной форме: в данном случае векторы моментов перпендикулярны плоскости действия сил, если центр расположен в той же плоскости. Поэтому можно рассматривать момент силы относительно центра как скалярную величину. В правой системе координат момент считается положительным, если сила стремится повернуться вокруг центра против хода часовой стрелки.

В случае плоской системы сил можно пользоваться другими формами уравнений равновесия. Одна из них:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum M_P(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_S(\vec{F}_k) = 0,$$

где P и S — любые точки плоскости, для которых отрезок PS неперпендикулярен оси x.

Еще одна форма уравнений равновесия:

$$\sum M_P(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_S(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_E(\vec{F}_k) = 0,$$

где P, S, E — любые точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

Совокупность сил называется *системой параллельных сил*, если линии действия сил параллельны. Ось z направим параллельно линиям действия. Первое, второе и шестое уравнения системы (2) обращаются в тождества, оставшиеся

$$\sum F_{kz} = 0, \quad \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0$$

образуют систему уравнений равновесия тела, находящегося под действием параллельных сил.

3.3. Решение задач статики

► **Общая схема решения задач о равновесии тела** (или конструкции, состоящей из нескольких тел) содержит несколько этапов. Необходимо:

1. Выбрать тело (или конструкцию), исследование равновесия которого позволит определить требуемые величины. Нарисовать *расчетную схему* — упрощенный рисунок, на который вынесены лишь

необходимые для решения линейные размеры и углы, а несущественные детали опущены.

2. Изобразить на схеме активные силы, заданные в условии задачи.

3. Если тело несвободно, отбросить наложенные на него механические связи, заменив их действие реакциями связей. После такой замены тело становится свободным.

4. Проверить выполнение необходимого условия статической определимости задачи: число неизвестных, появившихся на расчетной схеме, не должно превышать числа уравнений равновесия для рассматриваемой системы сил.

5. В случае выполнения этого условия составить систему уравнений равновесия, решить ее и исследовать полученные результаты.

При решении задачи желательно действовать строго по описанной схеме.

Опыт показывает, что наиболее часто ошибки допускаются при замене связей их реакциями. Остановимся подробнее на этом вопросе.

► **Правила расстановки сил реакций механических связей.** Каждая механическая связь представляет либо тело, либо механическое устройство, которое накладывает какие-либо ограничения на перемещение тела в пространстве. При этом, в зависимости от вида связи, некоторые перемещения запрещены, а некоторые — разрешены. Это обстоятельство позволяет заранее, не находя численных значений силовых факторов действия связи, указать на некоторые качественные особенности. Правило, которому необходимо следовать при замене связей силами реакций, заключается в следующем: реакция связи в общем случае может состоять из двух силовых факторов — силы, приложенной в точке наложения связи, и пары сил.

Если связь запрещает поступательное перемещение тела, появляется сила реакции, направление которой противоположно запрещенному перемещению. Если связь запрещает поворот тела, то возникает пара сил реакции связи, которая обеспечивает это запрещение, при этом вектор момента пары будет направлен вдоль оси запрещенного поворота.

► **Некоторые типы механических связей.**

1. *Идеально гибкая нерастяжимая невесомая нить.* На рис. 14 изображена нить, прикрепленная к твердому телу в точке B. Рассматриваемая связь наложена в точке B, в силу идеальной гибкости нити разрешен поворот тела вокруг любой оси, проходящей через эту точку. Это означает, что пары сил реакции не возникает.

Для этого типа связи разрешены малые поступательные перемещения тела, при которых точка B движется по поверхности сферы

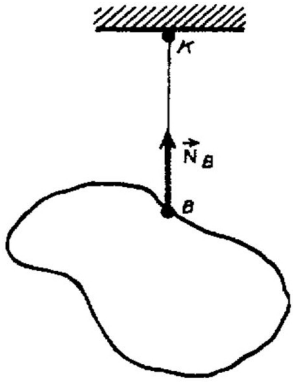


Рис. 14

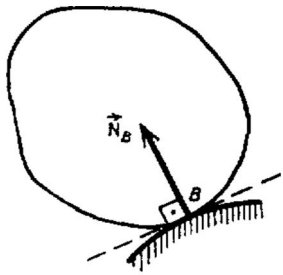


Рис. 15

радиуса BK с центром в точке K, поэтому в направлении разрешенных перемещений сила реакции возникнуть не может. Запрещено поступательное перемещение тела в направлении KB, так как нить нерастяжима. Это означает, что появляется сила реакции $\vec{N}_B$, приложенная к телу в точке B, направленная по прямой BK.

2. Аналогично направляются силы реакции, когда связь осуществляется посредством либо *свободного опирания двух тел*, поверхность одного из которых является абсолютно гладкой (рис. 15), либо *подвижного шарнира* (рис. 16).

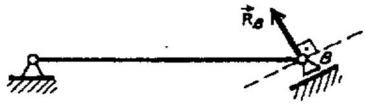


Рис. 16.

3. *Жесткая заделка.* Связь запрещает любое поступательное перемещение тела, поэтому возникает сила реакции связи $\vec{R}_B$, направление которой неизвестно. Ее обычно представляют тремя составляющими, параллельными координатным осям. Жесткая заделка запрещает поворот вокруг любой оси, проходящей через точку B, поэтому возникает пара сил реакции, момент которой $\vec{M}_B$ неизвестен ни по величине, ни по направлению. Обычно неизвестную пару заменяют эквивалентной системой трех пар, моменты которых направлены вдоль осей координат (рис. 17).

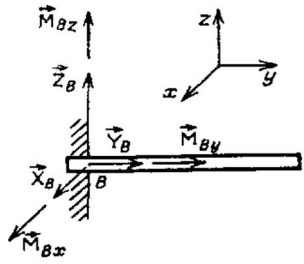


Рис. 17.

Если на тело наложено несколько связей, то каждая из них исследуется независимо от остальных связей и приложенных к телу сил.

Неизвестными в задачах статики могут быть не только реакции связей, но и углы, линейные размеры конструкций и др. параметры.

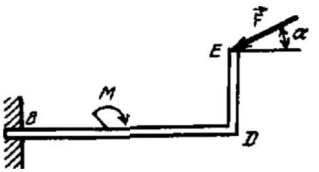


Рис. 18.

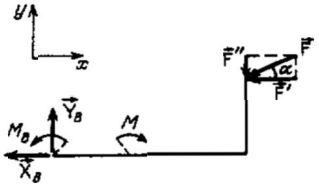


Рис. 19.

Пример 1. Найти реакцию жесткой заделки B изогнутой невесомой балки BDE (рис. 18), находящейся под действием силы $F = 20$ кН и пары сил с моментом $M = 2$ кНм при следующих данных: $\alpha = 30°$, $BD = 2$ м, $DE = 1$ м.

Решение. Будем следовать общей схеме решения задач о равновесии тела.

1. Реакция жесткой заделки B может быть найдена из исследования равновесия балки, поэтому в качестве твердого тела выбираем балку BDE. Отдельно рисуем расчетную схему (рис. 19).

2. Расставляем на схеме активные силовые факторы, действующие на балку, — силу $\vec{F}$ и пару сил $\vec{M}$, которую изображаем при помощи дуговой стрелки в направлении вращения пары (в рассматриваемом случае по ходу часовой стрелки).

3. Балка несвободна, так как на нее наложена связь — жесткая заделка в точке B. Делаем балку свободной: отбрасываем связь, заменяя ее реакцией связи. Реакция заделки состоит из силы $\vec{R}_B$, неизвестной ни по величине, ни по направлению, и пары сил с моментом M_B, неизвестным ни по величине, ни по направлению вращения.

Вводим систему координат xy, как показано на рисунке. Поскольку направление силы $\vec{R}_B$ неизвестно, представим ее двумя составляющими: $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$. Неизвестную пару сил реакции M_B изобразим дуговой стрелкой. Отметим, что не нужно гадать, куда на самом деле направлены составляющие и дуговая стрелка момента пары — все это выяснится после решения задачи. Например, на расчетной схеме $\vec{X}_B$ была нами направлена влево лишь потому, что при этом она оказалась заметнее на рисунке.

Заменим $\vec{F}$ эквивалентной системой сил, состоящей из двух составляющих $\vec{F}\,'$ и $\vec{F}\,''$, направленных параллельно координатным осям

$$\vec{F} = \vec{F}\,' + \vec{F}\,'', \quad F' = F\cos\alpha, \quad F'' = F\sin\alpha.$$

4. Теперь на расчетной схеме оказалась свободная балка, находящаяся под действием сил, расположенных в одной плоскости. В этом случае система уравнений равновесия состоит из трех уравнений. Количество неизвестных — X_B, Y_B, M_B — равно трем. Это означает, что количество неизвестных и количество уравнений совпадают и необходимые условия статической определимости задачи выполнены.

5. Воспользуемся основной формой уравнений равновесия для плоской системы сил (3), выбрав в качестве моментной точки центр B.

Основная опасность при составлении уравнений равновесия — возможность потери какой-либо силы, либо пары сил, поэтому рекомендуется выписать в строке все силы и все пары сил, приложенные к телу, а уравнения равновесия составлять под этой строкой.

Силы, пары сил	$\vec{X}_B$	$\vec{Y}_B$	M_B	$\vec{F}\,'$	$\vec{F}\,''$	M
$\sum F_{kx} =$	$-X_B +$	$0 +$	$0 -$	$F' +$	$0 +$	$0 = 0,$
$\sum F_{ky} =$	$0 +$	$Y_B +$	$0 +$	$0 -$	$F'' +$	$0 = 0,$
$\sum M_B(\vec{F}_k) =$	$0 +$	$0 +$	$M_B +$	$F'DE -$	$F''BD -$	$M = 0.$

Подставив исходные данные, найдем решение задачи

$$X_B = -17{,}1 \text{ кН}, \quad Y_B = 10 \text{ кН}, \quad M_B = 4{,}9 \text{ кНм}.$$

Знаки ответов говорят о том, что направление составляющей $\vec{X}_B$ противоположно указанному на расчетной схеме, а направления составляющей $\vec{Y}_B$ и дуговой стрелки M_B соответствуют изображенным.

На схеме (рис. 19) не рекомендуется зачеркивать и рисовать заново $\vec{X}_B$ с учетом знака ответа, так как при этом становятся невозможными проверка правильности составления уравнений равновесия и интерпретация результатов.

Сила реакции заделки $\vec{R}_B$ является геометрической суммой ортогональных составляющих $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, поэтому ее величина может быть найдена по формуле

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 19{,}8 \text{ кН}.$$

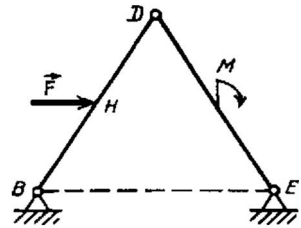


Рис. 20.

Пример 2. Конструкция, состоящая из двух невесомых стержней BD и DE, изображена на рис. 20. Стержни имеют одинаковую длину 4 м и соединены между собой и с основанием при помощи шарниров, причем $BE = BD$. Левый стержень BD в средней точке нагружен горизонтальной силой $F = 20$ кН, правый стержень DE нагружен парой сил $M = 10$ кНм. Определить опорные реакции и давление в промежуточном шарнире D.

Решение. Рассмотрим равновесие каждого стержня в отдельности, для чего расчленим конструкцию на две части — стержни BD и DE, расставим активные силы и реакции связей.

Расчетная схема задачи после описанных действий представлена на рис. 21, система координат — общая для обоих стержней. Сила $\vec{R}_D$, действующая на стержень BD со стороны стержня ED, представлена двумя составляющими $\vec{X}_D$ и $\vec{Y}_D$, сила $\vec{R}'_D$ действия стержня DB на стержень ED — составляющими $\vec{X}'_D$ и $\vec{Y}'_D$. Поскольку сила действия $\vec{R}_D$ и сила противодействия $\vec{R}'_D$ должны удовлетворять аксиоме действия-противодействия, то и их составляющие будут связаны соотношениями: $\vec{X}_D = -\vec{X}'_D$, $\vec{Y}_D = -\vec{Y}'_D$, т.е. составляющие равны и противоположно направлены, и это уже учтено на схеме. При этом алгебраические значения составляющих будут связаны соотношениями

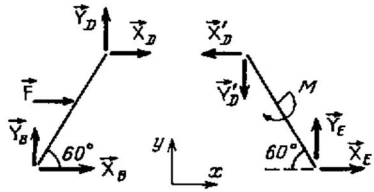


Рис. 21.

$$X_D = X'_D, \quad Y_D = Y'_D. \tag{4}$$

Количество неизвестных — X_B, Y_B, X_D, Y_D, X'_D, Y'_D, X_E, Y_E — равно восьми. Равновесие каждого стержня будет описываться тремя уравнениями равновесия; вместе с двумя уравнениями (4) они образуют систему 8 уравнений с 8 неизвестными (необходимые условия статической определимости задачи выполняются).

Ниже выписаны уравнения равновесия:

для стержня BD

$$\sum F_{kx} = X_B + X_D + F = 0,$$
$$\sum F_{ky} = Y_B + Y_D = 0,$$
$$\sum M_B(\vec{F}_k) = -Fa\sin 60° - X_D 2a \sin 60° + Y_D 2a \cos 60° = 0,$$

для стержня ED

$$\sum F_{kx} = -X'_D + X_E = 0,$$
$$\sum F_{ky} = -Y'_D + Y_E = 0,$$
$$\sum M_E(\vec{F}_k) = X'_D 2a \sin 60° + Y'_D 2a \cos 60° - M = 0.$$

Решив эту систему уравнений с учетом равенств (4), в итоге получим: $X_B = -16{,}44$ кН; $Y_B = -11{,}16$ кН; $X_D = X'_D = -3{,}56$ кН; $Y_D = Y'_D = 11{,}16$ кН; $X_E = -3{,}56$ кН; $Y_E = 11{,}16$ кН.

3.4. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела

► **Центр параллельных сил.** Пусть на точки твердого тела действует система параллельных сил $\{\vec{F}_k\}$. Силы могут поворачиваться вокруг точек их приложения, оставаясь параллельными. Можно доказать, что система имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, если главный вектор отличен от нуля. При этом линия действия $\vec{R}^*$ проходит всегда через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C независимо от ориентации сил. Эта точка называется *центром параллельных сил*, и ее положение в пространстве определяется радиусом-вектором $\vec{r}_C$:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_k \vec{r}_k}{\sum F_k},$$

здесь $\vec{r}_k$ — радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}_k$, а F_k — алгебраическое значение силы.

Координаты x_C, y_C, z_C центра параллельных сил можно определить по формулам

$$x_C = \frac{\sum F_k x_k}{\sum F_k}, \quad y_C = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k}, \quad z_C = \frac{\sum F_k z_k}{\sum F_k}.$$

► **Центром тяжести твердого тела** называют центр параллельных сил, представляющих силы тяжести материальных частиц, из которых состоит тело. Если тело находится на поверхности Земли и его размеры малы по сравнению с радиусом Земли, то можно считать, что линии действия сил тяжести параллельны, а их величины зависят лишь от объема материальных частиц, плотности материала и ускорения свободного падения g, одинакового для всех частиц.

Формулы для нахождения центра тяжести следуют из формул для нахождения центра параллельных сил

$$\vec{r}_C = \frac{\int\limits_V \gamma \vec{r}\, dV}{\int\limits_V \gamma\, dV}, \quad x_C = \frac{\int\limits_V \gamma x\, dV}{\int\limits_V \gamma\, dV}, \quad y_C = \frac{\int\limits_V \gamma y\, dV}{\int\limits_V \gamma\, dV}, \quad z_C = \frac{\int\limits_V \gamma z\, dV}{\int\limits_V \gamma\, dV},$$

где V — объем тела, $\gamma = \gamma(x, y, z)$ — удельный вес; $G = \int\limits_V \gamma\, dV$ — вес тела.

Аналогичные формулы имеют место для нахождения центра тяжести тела, имеющего форму поверхности или линии.

► **Способы нахождения центра тяжести.**

Симметричные тела. Если тело имеет плоскость (ось, центр) материальной симметрии, то его центр тяжести находится в этой плоскости (на оси, в центре).

Метод разбиения. Пусть тело составлено, например, из трех частей (рис. 22), для каждой из которых известен вес G_1, G_2, G_3 и положение центра тяжести $\vec{r}_{C_1}, \vec{r}_{C_2}, \vec{r}_{C_3}$. Радиус-вектор центра тяжести тела $\vec{r}_C$ и его координаты находятся по формулам

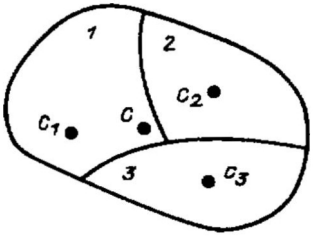


Рис. 22.

$$\vec{r}_C = \frac{G_1\vec{r}_{C_1} + G_2\vec{r}_{C_2} + G_3\vec{r}_{C_3}}{G_1+G_2+G_3}, \quad x_C = \frac{G_1x_{C_1} + G_2x_{C_2} + G_3x_{C_3}}{G_1+G_2+G_3},$$
$$y_C = \frac{G_1y_{C_1} + G_2y_{C_2} + G_3y_{C_3}}{G_1+G_2+G_3}, \quad z_C = \frac{G_1z_{C_1} + G_2z_{C_2} + G_3z_{C_3}}{G_1+G_2+G_3}. \qquad (5)$$

Метод отрицательных масс. Пусть теперь необходимо найти центр тяжести нового тела, составленного из частей *1* и *2* (его можно получить, вырезав из основного тела часть *3*). Решение можно получить либо по формулам (5), либо по формулам

$$\vec{r}'_C = \frac{G\vec{r}_C - G_3\vec{r}_{C_3}}{G-G_3}, \quad x'_C = \frac{Gx_C - G_3x_{C_3}}{G-G_3},$$
$$y'_C = \frac{Gy_C - G_3y_{C_3}}{G-G_3}, \quad z'_C = \frac{Gz_C - G_3z_{C_3}}{G-G_3},$$

где $G = G_1+G_2+G_3$ — вес тела, составленного из трех частей, а G_3 — вес вырезанной части, который в формулы входит с отрицательным знаком, что и послужило основанием для названия метода.

3.5. Распределенные силы

В практике часто встречаются случаи, когда к телу приложены не сосредоточенные силы, а нагрузки, распределенные по некоторому объему, поверхности или линии. Частный случай объемного распределения силы веса был рассмотрен в разд. 3.4. Векторная величина $\vec{q}$, характеризующая нагрузку, называется *интенсивностью нагрузки* и измеряется в Н/м^3, Н/м^2 или Н/м.

При решении задач статики распределенную нагрузку обычно заменяют более простой статически эквивалентной силой (системой сил).

1. *Равномерно распределенная нагрузка* интенсивности $\vec{q}$ (рис. 23) в плоской задаче статики имеет равнодействующую $\vec{Q} = \vec{q}\,BD$, линия

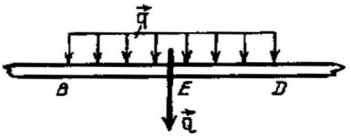


Рис. 23.

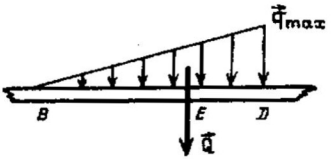


Рис. 24.

действия которой проходит через середину отрезка приложения нагрузки $BE = ED$.

2. *Линейно распределенная нагрузка* в плоских задачах статики (рис. 24) имеет равнодействующую $\vec{Q} = \frac{1}{2}\vec{q}_{\max} BD$, проходящую через точку E, причем $BE = \frac{2}{3}BD$.

3.6. Законы трения (законы Кулона)

▶ **Законы трения скольжения.** Рассмотрим тело веса G, находящееся в покое на негладкой горизонтальной плоскости (рис. 25). Попытка передвинуть тело, приложив к нему горизонтальную силу $\vec{F}$, не приводит к успеху до тех пор, пока величина силы не достигнет некоторого значения $\vec{F}^*$. Равнодействующая сил реакций опоры может быть представлена в виде двух составляющих — *силы нормального давления* $\vec{N}$ и *силы трения покоя* $\vec{F}_{\text{тр}}$. Уравнение проекций сил на горизонтальную ось дает $F_{\text{тр}} = F$.

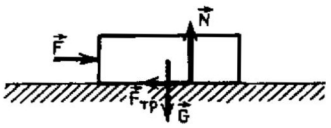


Рис. 25.

Опыт показывает, что F^* и N связаны соотношением *(закон Кулона)*

$$F^* = f_0 N,$$

где f_0 называется *статическим коэффициентом трения*; он зависит от материалов соприкасающихся тел и состояния их поверхностей.

Пока $F \leqslant F^*$, тело будет оставаться в покое. Если же к нему приложить силу, бóльшую чем F^*, то оно станет двигаться. При движении силу сопротивления можно найти, пользуясь формулой

$$F_{\text{тр}} = fN, \tag{6}$$

где f называется *динамическим коэффициентом трения*, а $F_{\text{тр}}$ — силой трения скольжения.

Отметим, что динамический коэффициент трения всегда меньше статического коэффициента трения: $f < f_0$.

▶ **Законы трения качения.** Рассмотрим диск радиуса R, покоящийся на негладкой горизонтальной плоскости (рис. 26). Попытка перекатить диск, приложив к его центру горизонтальную силу $\vec{F}$, не приведет к успеху, пока величина силы остается меньше предельного значения F^{**}.

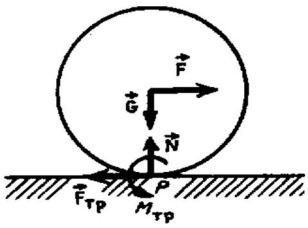


Рис. 26.

Силы реакции опоры, распределенные по малой поверхности вблизи точки контакта P, в соответствии с теоремой о приведении системы сил к центру могут быть заменены эквивалентной системой — силой нормального давления $\vec{N}$, силой трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$, приложенными в точке контакта P, а также парой сил трения качения с моментом $M_{\text{тр}}$.

При равновесии диска из уравнения моментов относительно центра P следует $FR = M_{\text{тр}}$. Опыт показывает, что F^{**} и N связаны соотношением $F^{**} = kN/R$, при этом

$$M^{**} = kN. \tag{7}$$

Размерный коэффициент k[см] называется *коэффициентом трения качения.*

Поверхность качения называют *абсолютно шероховатой*, когда $f \neq 0$ и $k = 0$.

Опыт показывает, что при прочих равных условиях F^{*} много больше F^{**}, поэтому в технике при необходимости уменьшить потери на трение стремятся заменить скольжение качением.

4. Динамика материальной точки

4.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Движение материальной точки по отношению к инерциальной системе отсчета описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j + \sum_{k=1}^{l} \vec{R}_k, \tag{1}$$

где m — масса точки, $\vec{a}$ — ее ускорение, в правой части равенства — геометрическая сумма всех сил, приложенных к точке. Причины возникновения каждой из сил могут быть различными. Здесь мы будем различать *силы активные* $\vec{F}_j$ и *силы реакций связей* $\vec{R}_k$. Активные

силы зависят от времени t, а также от положений и скоростей точек механической системы. К активным силам относятся, например, силы тяжести, упругости, вязкого трения, аэрогидродинамического сопротивления и т.п.

Силы реакций связей действуют на несвободную материальную точку, когда ее движение стеснено механическими связями. Эти силы можно определить лишь в процессе решения задачи динамики.

Выберем декартовы оси инерциальной системы отсчета x, y, z и, проектируя на них обе части векторного равенства (1), получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{jx} + \sum R_{kx},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{jy} + \sum R_{ky},$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{jz} + \sum R_{kz}.$$

Эти три уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых координатах.*

Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси координат имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{j\tau} + \sum R_{k\tau},$$
$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum F_{jn} + \sum R_{kn},$$
$$0 = \sum F_{jb} + \sum R_{kb}.$$

Здесь учтено, что $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$, $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, $a_b = 0$.

4.2. Первая и вторая задачи динамики

В уравнения движения (см. разд. 4.1) неизвестные могут входить как в левые, так и в правые части. В зависимости от этого задачи динамики делятся на два типа, которые рассмотрены ниже.

► **Первая задача динамики.** Задан закон движения и активные силы, необходимо найти силы реакций связей.

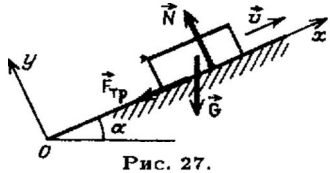


Рис. 27.

Пример 1. Груз веса G, которому в момент времени $t_0 = 0$ была сообщена некоторая начальная скорость, поднимается по наклонной шероховатой плоскости (рис. 27). Определить величины сил трения $F_{тр}$ и нормального давления N, действующих на тело, если известны коэффициент трения о плоскость f и угол наклона α.

Решение. Введем декартовы оси координат, совместив начало отсчета O с положением груза при $t = 0$. Изобразим груз в произвольном положении и действующие на него силы. Принимая груз за материальную точку, запишем для него второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}. \qquad (2)$$

Проектируя обе части векторного равенства (2) на ось y, имеем $0 = -G\cos\alpha + N$ (учтено, что ускорение груза параллельно оси x). Отсюда находим $N = G\cos\alpha$. Используя далее закон Кулона (уравнение (3) в гл. 3), получим силу трения $F_{\text{тр}} = Nf = G\cos\alpha\, f$.

▶ **Вторая задача динамики.** Заданы активные силы, уравнения механических связей, начальное положение точки и ее начальная скорость, необходимо найти закон движения точки и реакции связей.

Вторую задачу динамики рекомендуется решать последовательно в несколько этапов, перечисленных ниже.

1. Рисуют предполагаемую траекторию движения, на которой изображают материальную точку.
2. Рисуют силы, приложенные к точке.
3. Записывают второй закон Ньютона в векторной форме.
4. Выбирают удобную систему координат.
5. Записывают уравнения движения точки в проекциях либо на оси декартовой системы координат, либо на оси естественного трехгранника. В первом случае все активные силы необходимо выразить через t, x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, а во втором — через t, s, $\dot{s}$.
6. К полученным дифференциальным уравнениям добавляют начальные условия: значения координат и проекций скорости точки в начальный момент времени (они берутся из условия задачи с учетом введенной системы координат).
7. Поставленную задачу решают численно или аналитически методами, известными из курса высшей математики.

Указанные этапы решения рекомендуется выполнять, не меняя порядка их следования.

Пример 2. Дополнительно к условиям задачи примера 1 дано, что в момент времени t_* скорость груза стала равна половине начальной. Найти начальную скорость груза v_0 и путь D, пройденный им за время t_*.

Решение. Проектируем обе части векторного равенства (2) на ось x. Используя формулы $G = mg$ и $F_{\text{тр}} = G\,f\,\cos\alpha$, получим

$$\ddot{x} = -\,g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения и выражение для скорости груза даются формулами (подробности их получения опущены, а их правильность можно проверить путем дифференцирования)

$$x = -\tfrac{1}{2}g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2 + C_1 t + C_2,$$
$$\dot{x} = -\,g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + C_1.$$

Последние два соотношения должны быть справедливы в любой момент времени t, стало быть, и в начальный момент времени $t_0 = 0$, и в момент времени t_*,

т.е. соотношения будут удовлетворяться, если в них вместо t, x, dx/dt будут подставлены сначала значения $0, 0, v_0$, а затем t_*, D, $v_0/2$. После подстановок получим систему четырех уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= C_2, \\ v_0 &= C_1, \\ D &= -\tfrac{1}{2} g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)t_*^2 + C_1 t_* + C_2, \\ \tfrac{1}{2}v_0 &= -\,g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)t_* + C_1 \end{aligned}$$

с четырьмя неизвестными C_1, C_2, v_0, D, решая которую, найдем искомые величины

$$\begin{aligned} v_0 &= 2g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)t_*, \\ D &= \tfrac{3}{2} g\,(\sin\alpha + f\cos\alpha)t_*^2. \end{aligned}$$

5. Общие теоремы динамики механической системы

Довольно часто удается выделить важные особенности движения механической системы, не прибегая к интегрированию системы дифференциальных уравнений движения. Это достигается применением общих теорем динамики.

5.1. Основные понятия и определения

► **Внешние и внутренние силы.** Любая сила, действующая на точку механической системы, обязательно является либо активной силой, либо реакцией связи. Всю совокупность сил, действующих на точки системы, можно разделить на два класса иначе: на *внешние силы* $\vec{F}^{\,\mathrm{e}}$ и *внутренние силы* $\vec{F}^{\,\mathrm{i}}$ (индексы e и i — от латинских слов externus — внешний и internus — внутренний). Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек и тел, не входящих в состав рассматриваемой системы. Внутренними называются силы взаимодействия между точками и телами рассматриваемой системы.

Это разделение зависит от того, какие материальные точки и тела включены исследователем в рассматриваемую механическую систему. Если расширить состав системы, включив в нее дополнительно точки и тела, то некоторые силы, которые для прежней системы были внешними, для расширенной системы могут стать внутренними.

► **Свойства внутренних сил.** Поскольку эти силы являются силами взаимодействия между частями системы, они входят в полную систему внутренних сил «двойками», организованными в соответствии с аксиомой действия–противодействия. У каждой такой «двойки» сил

главный вектор и главный момент относительно произвольного центра равны нулю. Так как полная система внутренних сил состоит только из «двоек», то

1) главный вектор системы внутренних сил равен нулю,

2) главный момент системы внутренних сил относительно произвольной точки равен нулю.

Массой системы m называется арифметическая сумма масс m_k всех точек и тел, образующих систему:

$$m = \sum m_k.$$

► **Центром масс** (центром инерции) механической системы называется геометрическая точка C, радиус-вектор и координаты которой x_C, y_C, z_C определяются формулами

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{m}, \quad x_C = \frac{\sum m_k x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{m},$$

где $\vec{r}_k$, x_k, y_k, z_k — радиусы-векторы и координаты точек, образующих систему.

Для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают, в других случаях это разные геометрические точки.

Вместе с инерциальной системой отсчета часто рассматривают одновременно неинерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно. Ее оси координат $Cx^*y^*z^*$ (*оси Кёнига*) выбирают так, чтобы начало отсчета C постоянно совпадало с центром масс механической системы. В соответствии с определением центр масс неподвижен в осях Кёнига и находится в начале координат.

► **Моментом инерции** системы относительно оси z называется скалярная величина I_z, равная сумме произведений масс m_k всех точек системы на квадраты их расстояний h_k до оси:

$$I_z = \sum m_k h_k^2.$$

Если механической системой является твердое тело, для нахождения I_z можно воспользоваться формулой

$$I_z = \int\limits_V \rho(x^2 + y^2)dV,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность, а V — объем, занимаемый телом.

Момент инерции однородного диска массы m радиуса R относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр, подсчитывается по формуле

$$I_z = \tfrac{1}{2} m R^2. \qquad (1)$$

Теорема Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс:

$$I_z = I_{Cz} + md^2,$$

где I_z и I_{Cz} — моменты инерции относительно параллельных осей z и C_z, причем ось C_z проходит через центр масс, d — расстояние между осями, m — масса системы. Из теоремы следует, что $I_{Cz} < I_z$.

5.2. Теорема о движении центра масс

▶ **Формулировка теоремы:** центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка с массой m, равной массе системы под действием внешних сил, приложенных к системе:

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^{\,e}, \qquad (2)$$

где m — масса системы, а $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс.

Математическая запись теоремы (2) похожа на второй закон Ньютона. Дадим более подробное изложение теоремы. При движении системы ее центр масс C движется по некоторой траектории. Пусть, например, в момент времени t_0 он находится в положении B и имеет скорость $\vec{v}_{C0}$. Если теперь в момент времени t_0 в положение B поместить точку массы m, сообщить ей скорость $\vec{v}_{C0}$ и приложить к ней силы, равные внешним силам, действующим на систему, то, начиная с этого момента, точка будет двигаться вместе с центром масс системы, по одной и той же траектории, с одинаковой скоростью и одинаковым ускорением.

Из уравнения (2) можно получить дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{e}, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{e}, \quad m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^{e}.$$

▶ **Закон сохранения скорости центра масс механической системы:** если главный вектор внешних сил системы равен нулю, центр масс системы движется с постоянной скоростью, т.е. если $\sum \vec{F}_k^{\,e} = 0$, то $\vec{v}_C = \overrightarrow{\text{const}}$.

Отметим, что в этом случае постоянным является вектор скорости, а не только его модуль, поэтому центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно.

Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось остается постоянной. Например, если $\sum F_{kx} = 0$, то $v_{Cx} = \text{const}$.

Пример. По боковой грани призмы массы m_1, находящейся на гладкой горизонтальной плоскости, под действием силы веса скатывается однородный диск массы m_2 (рис. 28). Угол наклона боковой грани к основанию равен α. В начальный момент скорости призмы и диска равны нулю. Определить расстояние d_1, на которое сдвинется призма, когда центр диска переместится вдоль грани на расстояние d_2.

Решение. Включим в механическую систему два тела — призму и диск и расставим внешние силы — активные силы веса $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ и силу реакции $\vec{N}_1$ гладкой плоскости. Характерная особенность системы внешних сил заключается в том, что все они перпендикулярны горизонтальной оси, и поэтому сумма их проекций на эту ось равна нулю.

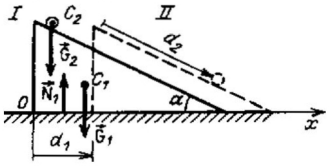


Рис. 28.

Направим ось x горизонтально слева направо с началом в точке O. На рис. 28 изобразим систему в двух положениях: начальном I и в тот момент времени, когда диск переместился по грани призмы на расстояние d_2 — II. Поскольку направление и величина перемещения призмы заранее неизвестны, то, особенно не гадая, изобразим положение II правее начального положения I.

Так как $\sum F^e_{kx} = 0$, из закона сохранения проекции скорости центра масс системы на ось x следует $v_{Cx} = \text{const}$. Так как в положении I все скорости были равны нулю, то $v_{Cx} = 0$. Отсюда следует, что $x_C = \text{const}$ или $x^I_C = x^{II}_C$. Пользуясь формулами для координат центра масс, перепишем последнее равенство так:

$$\frac{m_1 x^I_{C_1} + m_2 x^I_{C_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x^{II}_{C_1} + m_2 x^{II}_{C_2}}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Здесь $x^I_{C_1}$ и $x^I_{C_2}$ — координаты центров масс призмы и диска в положении I, а $x^{II}_{C_1}$ и $x^{II}_{C_2}$ — аналогичные величины в положении II.

Из рис. 28 видно, что $x^{II}_{C_1} = x^I_{C_1} + d_1$, $x^{II}_{C_2} = x^I_{C_2} + d_1 + d_2 \cos\alpha$. Подставляя эти соотношения в формулу (3), после алгебраических преобразований найдем $d_1 = -\dfrac{m_2 d_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2}$.

Знак полученного ответа говорит о том, что перемещение призмы направлено противоположно изображенному на рисунке.

5.3. Теорема об изменении количества движения

▶ **Количеством движения точки** массы m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, называется вектор

$$\vec{Q} = m\vec{v}.$$

Количеством движения механической системы называется главный вектор количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q} = \sum \vec{Q}_k.$$

Можно доказать, что количество движения системы равно количеству движения воображаемой материальной точки, имеющей массу системы и движущейся со скоростью центра масс: $\vec{Q} = m\vec{v}_C$.

► **Импульс силы.** Пусть к движущейся материальной точке приложена сила $\vec{F}$ (кроме нее к точке могут быть приложены и другие силы, но сейчас мы выделили только одну из них).

Элементарным импульсом силы $\vec{F}$ за элементарный промежуток времени dt называется вектор $d\vec{S}$:

$$d\vec{S} = \vec{F}\,dt.$$

Импульсом силы $\vec{F}$ за конечный промежуток времени от t_0 до t называется вектор $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} d\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt.$$

Проекции импульса силы на координатные оси могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \int_{t_0}^{t} F_x\,dt, \quad S_y = \int_{t_0}^{t} F_y\,dt, \quad S_z = \int_{t_0}^{t} F_z\,dt.$$

► **Разные формулировки теоремы о количестве движения.** *Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме*: производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил системы:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^{\,e}$$

или, по-другому: дифференциал количества движения системы равен геометрической сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на точки системы:

$$d\vec{Q} = \sum d\vec{S}_k^{\,e}.$$

Проектируя на оси координат (например, на ось x), получим

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{e} \quad \text{или} \quad dQ_x = \sum dS_{kx}^{e}.$$

Теорема об изменении количества движения в интегральной форме: изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил системы за тот же промежуток времени:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e,$$

где векторы $\vec{Q}$ и $\vec{Q}_0$ соответствуют моментам времени t и t_0, а $\vec{S}_k^e$ — импульсы внешних сил системы за промежуток времени от t_0 до t. В проекциях на координатные оси (например, на ось x)

$$Q_x - Q_{x0} = \sum S_{kx}^e.$$

При использовании теоремы применительно к одной материальной точке следует иметь в виду, что любая сила, приложенная к точке, является внешней.

► **Закон сохранения количества движения.**

Закон сохранения количества движения механической системы:

$$\text{если} \quad \sum \vec{F}_k^e = 0, \quad \text{то} \quad \vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}}.$$

Закон сохранения проекции количества движения на какую-либо ось (например, на ось x):

$$\text{если} \quad \sum F_{kx}^e = 0, \quad \text{то} \quad Q_x = \text{const}. \qquad (4)$$

Пример. По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v_0 движется прямоугольный параллелепипед массы m_1, на верхней грани которого покоятся две самоходные тележки с массами m_2 и m_3 (рис. 29). В некоторый момент времени тележки начинают двигаться навстречу друг другу, при этом законы их движения по отношению к параллелепипеду задаются функциями $d_2 = h_2 t^3$, $d_3 = h_3 t^3$. Найти зависимость скорости параллелепипеда от времени.

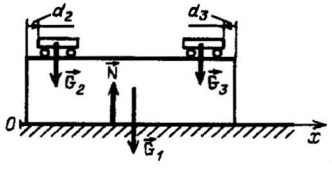


Рис. 29.

Решение. В систему включим три тела — параллелепипед и обе тележки. Изобразим внешние силы — активные силы веса $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$, а также реакцию плоскости $\vec{N}$. Все они вертикальны, и сумма их проекций на горизонталь равна нулю. Поэтому применим закон (4) о сохранении проекции количества движения системы на ось x — запишем Q_{x0} в момент времени t_0, затем Q_x в произвольный момент времени t и приравняем полученные величины:

$$Q_{x0} = m_1 v_0 + m_2 v_0 + m_3 v_0,$$

$$Q_x = m_1 v_1 + m_2 (v_1 + \dot{d}_2) + m_3 (v_1 - \dot{d}_3).$$

В последнем выражении скорости тележек подсчитывались в соответствии с теоремой о скоростях при сложном движении точки. После приравнивания правых частей равенств и проведения алгебраических выкладок получим

$$v_1 = v_0 - \frac{3t^2 (m_2 h_2 - m_3 h_3)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

5.4. Теорема об изменении кинетического момента

▶ **Момент количества движения и кинетический момент.**

Моментом количества движения материальной точки относительно неподвижного центра P называется вектор $\vec{K}_P$, равный векторному произведению радиуса-вектора, соединяющего центр с точкой, на количество движения точки:

$$\vec{K}_P = \vec{M}_P(\vec{Q}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Кинетическим моментом (главным моментом количества движения) механической системы относительно центра P называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно центра

$$\vec{K}_P = \sum \vec{K}_{Pj}.$$

Моментом количества движения точки относительно оси x называется величина K_x, равная проекции на эту ось момента количества движения точки относительно любого центра P, принадлежащего оси:

$$K_x = M_x(\vec{Q}).$$

Вычисляется K_x так же, как момент силы относительно оси.

Кинетическим моментом системы относительно оси x называется проекция на нее момента системы относительно любого центра P, принадлежащего оси:

$$K_x = \sum K_{jx}.$$

Аналитическое выражение для кинетического момента системы относительно оси x имеет вид

$$K_x = \sum m_j(y_j\dot{z}_j - \dot{y}_j z_j).$$

Формулы для K_y и K_z аналогичны приведенной.

Можно показать, что кинетический момент системы относительно центра P равен сумме момента количества движения центра масс относительно центра P и кинетического момента системы относительно центра масс C в ее относительном движении в системе Кёнига

$$\vec{K}_P = \vec{M}_P + \vec{K}^*_C.$$

Здесь $\vec{M}_P = \vec{M}_P(m\vec{v}_C)$, $\vec{K}^*_C$ — кинетический момент системы в ее движении по отношению к системе отсчета Кёнига.

Кинетический момент K_z твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси z с угловой скоростью ω, вычисляется по формуле

$$K_z = I_z\omega, \tag{5}$$

где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси z.

► **Теорема об изменении кинетического момента механической системы:** производная по времени от кинетического момента относительно любого неподвижного центра P равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{K}_P}{dt} = \sum \vec{M}_P(\vec{F}_j^e). \qquad (6)$$

Проектируя (6) на оси координат (например, на ось x), получим теорему об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}_j^e). \qquad (7)$$

Если эту теорему применить к изучению движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, получим *дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}_j^e),$$

где φ — угол поворота.

► **Закон сохранения кинетического момента:** если главный момент внешних сил системы относительно центра P равен нулю, то главный момент количеств движения относительно этого центра будет постоянным. Например,

$$\text{если} \quad \sum \vec{M}_P(\vec{F}_j^e) = 0, \quad \text{то} \quad \vec{K}_P = \overrightarrow{\text{const}}.$$

В правой части равенства располагается вектор-константа, т.е. и величина вектора, и его направление не зависят от времени.

Если сумма моментов внешних сил системы относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси остается постоянным. Например,

$$\text{если} \quad \sum M_x(\vec{F}_j^e) = 0, \quad \text{то} \quad K_x = \text{const}.$$

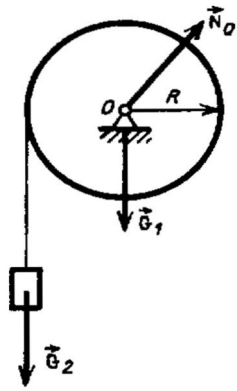


Рис. 30.

Пример. На однородный барабан веса G_1 и радиуса R намотана невесомая нить с грузом веса G_2 на конце (рис. 30). Определить ускорение груза, пренебрегая силами трения при вращении барабана.

Решение. Включим в систему барабан, груз и нить. Расставим внешние силы — активные силы веса $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ и силу реакции $\vec{N}_O$, проходящую через

ось вращения O. Направление силы $\vec{N}_O$ заранее неизвестно, поэтому рисуем ее произвольно. Пары сил трения в оси не возникает, что следует из условия задачи.

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения барабана (7):

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum M_O(\vec{F}_j^e). \tag{8}$$

Подсчитывая K_O как сумму кинетических моментов барабана и груза, с учетом (1), (5) и равенства $v_2 = \omega_1 R$ получим

$$K_O = v_2 R\left(\tfrac{1}{2}m_1 + M_2\right). \tag{9}$$

Вычислим сумму моментов внешних сил относительно оси

$$\sum M_O(\vec{F}_j^e) = m_2 g R. \tag{10}$$

Подставив правые части формул (9), (10) в выражение (8) и проведя дифференцирование, найдем

$$a_2 = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g.$$

5.5. Теорема об изменении кинетической энергии

▶ **Элементарная работа.** Рассмотрим точку B, перемещающуюся под действием системы сил. Малое перемещение точки вдоль траектории характеризуется вектором $d\vec{r}$ (рис. 31). Из системы выделим одну силу $\vec{F}$.

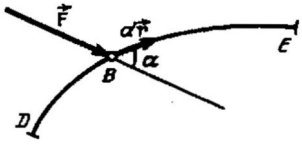


Рис. 31

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина dA, равная скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\alpha.$$

В координатной форме элементарная работа подсчитывается по формуле

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz,$$

где F_x, F_y, F_z, dx, dy, dz — координаты векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ соответственно.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на принятую форму записи, элементарная работа dA не обязательно является полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат.

Знак элементарной работы определяется косинусом угла α: она положительна для $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, отрицательна для $\pi/2 < \alpha \leqslant \pi$ и равна нулю при $\alpha = \pi/2$.

► **Вычисление элементарной работы в частных случаях.**

1. Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, находится по формуле

$$dA = \pm M_z(\vec{F})\, d\varphi.$$

2. Сумма элементарных работ сил пары, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении, может быть подсчитана так:

$$dA = \pm M\, d\varphi.$$

Здесь M — момент пары сил, $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела. Знак «плюс» берется при одинаковых направлениях дуговых стрелок момента пары и направления вращения, «минус» — при различных направлениях (плоскость действия пары предполагается параллельной основной плоскости).

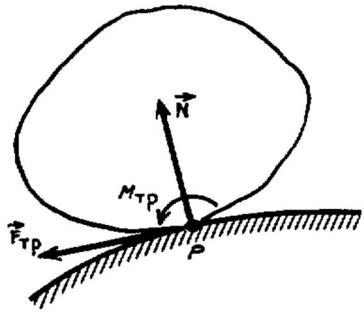


Рис. 32

3. При вычислении элементарных работ сил трения, приложенных к телу, катящемуся без проскальзывания, необходимо учесть, что в точке касания P (рис. 32) действуют: сила нормального давления $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и пара сил трения качения с моментом $M_{\text{тр}} = Nk$. Поскольку, в силу отсутствия проскальзывания, точка касания является мгновенным центром скоростей и ее скорость $\vec{v}_P$ равна нулю, то и $d\vec{r} = \vec{v}_P\, dt = 0$, откуда

$$dA_N = dA_{\text{тр}} = 0, \quad dA_M = -M_{\text{тр}}\, d\varphi = -Nk\, d\varphi.$$

4. Можно доказать, что сумма элементарных работ сил, приложенных к твердому телу, равна сумме элементарных работ статически эквивалентной системы сил. По теореме о приведении системы сил к заданному центру произвольную систему сил можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы $\vec{R}$, приложенной в наперед заданной точке P, и пары сил с моментом $\vec{M}_P$. Поэтому довольно часто вместо громоздкого подсчета суммы элементарных работ большого числа сил, приложенных к телу, подсчитывают сумму элементарных работ одной силы и одной пары.

Пример 1. Система элементарных сил тяжести твердого тела всегда имеет равнодействующую, равную весу тела G, приложенную в центре тяжести C. Поэтому сумма элементарных работ сил тяжести равна работе силы веса на перемещении центра тяжести тела.

Пример 2. Сумма элементарных работ внутренних сил, приложенных к точкам твердого тела, равна нулю, так как главный вектор и главный момент системы внутренних сил равны нулю.

▶ **Работа силы. Потенциальная сила.** *Работа силы* $\vec{F}$ на конечном перемещении точки по траектории DE (см. рис. 31) равна криволинейному интегралу

$$A = \int\limits_{DE} dA = \int\limits_{DE} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{DE} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Сила называется *потенциальной*, если ее работа не зависит от формы траектории, а зависит лишь от ее начальной и конечной точек.

Примером потенциальной силы является сила тяжести G, ее работа может быть подсчитана по формуле

$$A = -G(z - z_0).$$

Здесь ось z выбрана параллельно линии действия силы веса и направлена ей навстречу, $\vec{G}$ — сила веса, z_0, z — координаты начальной и конечной точек траектории.

▶ **Кинетическая энергия.** *Кинетической энергией точки* массы m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, называется скалярная величина T, определяемая формулой

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех ее точек:

$$T = \sum T_j = \sum \frac{m_j v_j^2}{2}.$$

Можно доказать, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии центра масс и кинетической энергии системы при ее относительном движении в системе отсчета Кёнига:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \sum \frac{m_j (v_j^*)^2}{2},$$

где $m = \sum m_j$, а v_j^* — относительные скорости точек.

▶ **Формулы для кинетической энергии твердого тела:**

а) при его поступательном движении: $T = \frac{1}{2} m v_C^2$,

б) при вращении вокруг неподвижной оси z: $T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$,

в) при плоскопараллельном движении: $T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$, где I_C — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной основной плоскости и проходящей через центр масс C.

▶ **Разные формулировки теоремы о кинетической энергии.**

Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ сил, приложенных к точкам системы, на их элементарных перемещениях

$$dT = \sum dA_j. \tag{11}$$

Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме: изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех сил, приложенных к точкам системы, на перемещениях этих точек

$$T - T_0 = \sum A_j.$$

Замечание. В отличие от трех ранее рассмотренных теорем динамики системы последняя теорема характеризуется следующими особенностями:

1) теорема об изменении кинетической энергии связывает не векторные величины, а скалярные;

2) в правую часть равенства входят работы всех сил, не только внешних, но и внутренних (возможно также разбиение суммы работ на сумму работ активных сил и сил реакций связей);

3) сумма работ внутренних сил, приложенных к точкам твердого тела, равна нулю.

Пример. Однородный диск под действием силы веса G скатывается без проскальзывания по идеально шероховатой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 33). Определить ускорение центра диска, величину силы трения и минимальное значение коэффициента трения f^*, при котором возможно качение без проскальзывания.

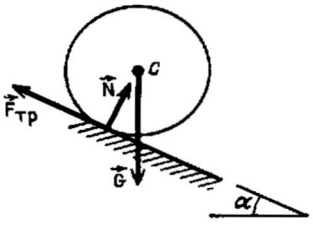


Рис. 33.

Решение. В качестве механической системы выберем диск и применим для исследования движения теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме (11). Подсчитывая кинетическую энергию диска, найдем

$$T = \tfrac{1}{2} m v_C^2 + \tfrac{1}{2} I_C \omega^2 = \tfrac{3}{4} m v_C^2.$$

Здесь учтено, что $I_C = \frac{1}{2} m r^2$ и $v_C = \omega r$. Так как исследуемая система является твердым телом, то $\sum dA^{\mathrm{i}} = 0$. Подсчитаем сумму элементарных работ внешних сил и, подставив найденные выражения для T и $\sum dA^{\mathrm{e}}$ в равенство (11), получим

$$d\left(\tfrac{3}{4} 3 m v_C^2\right) = mgr \sin\alpha \, d\varphi.$$

Поделив обе части равенства на dt с учетом кинематических соотношений $\dot{v}_C = a_C$, $\dot{\varphi} = \omega$, найдем

$$a_C = \tfrac{2}{3} g \sin\alpha. \tag{12}$$

Запишем формулировку теоремы о движении центра масс системы (2) применительно к рассматриваемой задаче

$$m\vec{a}_C = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Спроектируем полученное векторное равенство на две перпендикулярные оси, первая из которых параллельна нормальной силе реакции $\vec{N}$:

$$0 = -G\cos\alpha + N,$$
$$ma_C = G\sin\alpha - F_{\text{тр}}.$$

С учетом (12) находим решение этой системы: $F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}G\sin\alpha$, $N = G\cos\alpha$. Подставляя полученные величины в формулировку закона трения Кулона, определим минимальное значение коэффициента трения f^*, при котором возможно качение без проскальзывания: $f^* = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

6. Принцип Даламбера. Элементы аналитической механики

6.1. Принцип Даламбера

► **Силы инерции. Принцип Даламбера.** Пусть точка материальной системы движется под действием некоторой системы сил (эти силы могут быть разбиты либо на внешние и внутренние, либо на активные и силы реакций связей). Равнодействующую этой системы сходящихся сил обозначим $\vec{F}$.

Силой инерции точки называется векторная величина $\vec{\Phi}$, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно ускорению:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}.$$

Сила $\vec{\Phi}$ фиктивна, она не входит в число реальных сил, действующих на точку.

Принцип Даламбера: при движении механической системы (точки) любое ее состояние можно рассматривать как положение равновесия, если к реальным силам, действующим на каждую точку системы, добавить фиктивные силы инерции.

В соответствии с этим принципом, если к каждой точке системы добавить силу $\vec{\Phi}_j = -m_j\vec{a}_j$, то система сил, состоящая из реальных $\vec{F}_j$ и фиктивных $\vec{\Phi}_j$ сил, будет удовлетворять всем уравнением статики, т.е. главный вектор системы сил и ее главный момент относительно произвольного центра P будут равны нулю:

$$\sum \vec{F}_j + \sum \vec{\Phi}_j = 0,$$
$$\sum \vec{M}_P(\vec{F}_j) + \sum \vec{M}_P(\vec{\Phi}_j) = 0.$$

В координатной форме эти уравнения записываются так:

$$\sum F_{jx} + \sum \Phi_{jx} = 0, \qquad \sum M_x(\vec{F}_j) + \sum M_x(\vec{\Phi}_j) = 0,$$
$$\sum F_{jy} + \sum \Phi_{jy} = 0, \qquad \sum M_y(\vec{F}_j) + \sum M_y(\vec{\Phi}_j) = 0,$$
$$\sum F_{jz} + \sum \Phi_{jz} = 0, \qquad \sum M_z(\vec{F}_j) + \sum M_z(\vec{\Phi}_j) = 0.$$

Принцип Даламбера позволяет перенести методы решения задач статики на задачи динамики.

Пример 1. В кабине лифта, поднимающегося замедленно с ускорением a, находится груз веса G (рис. 34). Определить давление пола лифта на груз.

Решение. Примем груз за материальную точку и расставим реальные силы, действующие на него, — активную силу веса $\vec{G}$ и силу давления пола на груз $\vec{N}$. Добавим к этим силам фиктивную силу инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ (обратите внимание: сила $\vec{\Phi}$ на рисунке направлена не против перемещения лифта, а противоположно вектору ускорения).

Полученная система трех сил $\vec{G}$, $\vec{N}$, $\vec{\Phi}$ уравновешена в соответствии с принципом Даламбера. Линии действия всех сил направлены вдоль одной прямой, поэтому равновесие системы описывается одним уравнением $\sum F_z = 0$, остальные пять уравнений обращаются в тождества. Уравнение равновесия имеет вид

$$-G + N + \Phi = 0.$$

Подставляя вместо Φ модуль силы инерции ma (знак минус был учтен на рисунке), имеем $N = G(g-a)$. Видно, что сила давления пола меньше веса груза.

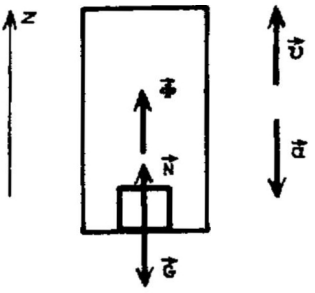


Рис. 34.

Система сил инерции может оказаться громоздкой в случаях большого количества материальных точек или распределенных масс. Пользуясь теоремой статики о приведении системы сил к центру, систему сил инерции $\vec{\Phi}_j$ можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы $\vec{\Phi}$, приложенной в наперед заданном центре P (она равна *главному вектору сил инерции* $\vec{\Phi} = \sum \vec{\Phi}_j$ и не зависит от выбора центра), и одной пары сил, момент которой $\vec{M}_P^{\text{и}}$ равен *главному моменту сил инерции* относительно центра: $\vec{M}_P^{\text{и}} = \sum \vec{M}_P(\vec{\Phi}_j)$.

Можно показать, что $\vec{\Phi}$ подсчитывается по формуле

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C,$$

где m — масса системы, $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс.

► **Выражения для главного момента сил инерции твердого тела и его проекций на координатные оси:**

1. При поступательном движении: $\vec{M}_C^{\text{и}} = 0$.

2. При вращении вокруг неподвижной оси z: $M_z^u = -I_z\varepsilon$.

3. При плоскопараллельном движении: $M_C^u = -I_C\varepsilon$.

Здесь ε — угловое ускорение тела, I_z и I_C — моменты инерции тела относительно оси z и оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основной плоскости (знаки «минус» в формулах означают, что направления углового ускорения и момента пары сил инерции противоположны).

Пример 2. Однородный диск радиуса r катится вверх без проскальзывания по дуге окружности радиуса R (рис. 35). Коэффициент трения качения равен k. Определить ускорение центра диска и силу давления диска на опору в тот момент, когда скорость центра диска равна v_0, а угол между вертикалью и прямой, соединяющей центры диска и дуги, равен α.

Решение. Ускорение центра диска состоит из двух составляющих a_C^τ и a_C^n, причем направление a_C^τ заранее неизвестно, а $a_C^n = v_0^2/(R-r)$. При отсутствии проскальзывания $a_C^\tau = \varepsilon r$, где ε — угловое ускорение диска.

Силы инерции диска приведем к центру масс, при этом силу инерции разложим на две составляющие $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}^\tau + \vec{\Phi}^n$, где $\vec{\Phi}^\tau = -m\vec{a}_C^\tau$ и $\vec{\Phi}^n = -m\vec{a}_C^n$. Величина момента пары сил инерции будет равна $M_C^u = I_C\varepsilon = mra_C^\tau/2$, соответствующую ему дуговую стрелку направим противоположно дуговой стрелке предполагаемого углового ускорения.

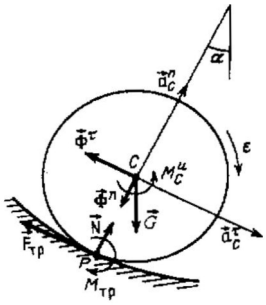


Рис. 35

Изображенная на рис. 35 система сил уравновешена в силу принципа Даламбера. Выпишем уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$F_{тр} + \Phi^\tau - G\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$N - \Phi^n - G\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

$$-M_{тр} + M_C^u + \Phi^\tau r - Gr\sin\alpha = 0. \qquad (3)$$

Здесь (1) — уравнение проекций на направление $\vec{F}_{тр}$, (2) — уравнение проекций на направление $\vec{N}$, (3) — уравнение моментов относительно центра P. Присоединив к этим уравнениям закон Кулона (см. гл. 3):

$$M_{тр} = kN,$$

получим окончательно систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными a_C^τ, N, $F_{тр}$, $M_{тр}$, решив которую, найдем:

$$a_C^\tau = \frac{2}{3r}\left[gr\sin\alpha + k\left(g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{R-r}\right)\right], \quad N = m\left(g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{R-r}\right).$$

6.2. Классификация механических связей. Обобщенные координаты

► **Классификация механических связей.** *Механическими связями* называются некоторые устройства (тела), накладывающие ограничения на положения и скорости точек механической системы. Эти ограничения выполняются всегда независимо от заданных сил и записываются в виде соотношений, называемых *уравнениями связей*.

Стационарными связями называются связи, не зависящие от времени; связи, зависящие от времени, называются *нестационарными*.

Связи, в уравнения которых входят координаты точек и время, называются *геометрическими*; связи называются *кинематическими* (дифференциальными), если в уравнения связей входят скорости, координаты точек и время.

Если кинематическую связь можно «заменить» эквивалентной геометрической, то она называется *кинематической интегрируемой*, в противном случае — *неинтегрируемой*.

Геометрические и кинематические интегрируемые связи называются *голономными*, а кинематические неинтегрируемые — *неголономными*. Механическая система называется голономной, если на нее наложены только голономные связи, и неголономной, если имеется хотя бы одна неголономная связь.

Связи называются *неосвобождающими*, если ограничения, накладываемые ими на положения точек, их скорости и время, могут быть записаны в форме равенств. *Освобождающие связи* записываются в форме неравенств.

► **Возможным (виртуальным) перемещением** точки механической системы называется любое допускаемое наложенными связями перемещение $\delta\vec{r}$ из положения, занимаемого точкой в данный момент времени (при построении таких перемещений надо мысленно остановить время, при этом нестационарные связи станут неподвижными, т.е. — стационарными). Возможные перемещения точка не совершает, но могла бы совершить, не нарушая связей в данный момент времени.

Возможным перемещением системы называется любая совокупность возможных перемещений точек системы $\delta\vec{r}_j$, допускаемых всеми наложенными на нее связями.

В качестве примера рассмотрим точку, на которую наложена нестационарная связь — плоскость, движущаяся поступательно со скоростью $\vec{v}$ (рис. 36). В соответствии с теоремой о сложном движении точки ее действительное перемещение $d\vec{r}$ равно геометрической сумме относительного $\delta\vec{r}$ и переносного, равного $\vec{v}\,dt$. На рисунке видна разница между действительным и возможным перемещениями точки.

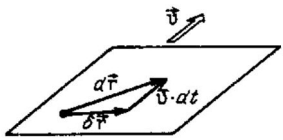


Рис. 36.

Для стационарных связей действительные перемещения точек находятся среди возможных.

Механическая система может иметь множество различных возможных перемещений. Однако для систем, состоящих из материальных твердых тел и конечного количества материальных точек, су-

ществует некоторое число независимых между собой возможных перемещений, через которые можно выразить любое другое возможное перемещение. Число независимых перемещений называется *числом степеней свободы механической системы.*

► **Обобщенными координатами** называются независимые между собой параметры, которые однозначно определяют положение каждой точки механической системы. В случае голономной системы число степеней свободы равно числу обобщенных координат, в случае неголономной системы число степеней свободы меньше числа обобщенных координат.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Свободная материальная точка в пространстве является системой с тремя степенями свободы.

2. Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Действительно, положение любой точки тела в пространстве можно определить, зная положение трех его точек B_1, B_2, B_3, не лежащих на одной прямой. Положение каждой из точек можно задать тремя параметрами, например, координатами x_j, y_j, z_j $(j = 1, 2, 3)$. Общее число координат равно девяти, но эти 9 чисел не могут задаваться произвольно, так как они связаны тремя уравнениями, согласно которым расстояния d_{12}, d_{23}, d_{31} между точками должны оставаться постоянными, поскольку они принадлежат твердому телу. Если, например, известны шесть координат x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x_3, то оставшиеся три z_2, y_3, z_3 могут быть найдены из уравнений связей.

3. Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, и в качестве обобщенной координаты можно выбрать угол поворота φ.

4. Твердое тело при плоскопараллельном движении имеет три степени свободы, в качестве обобщенных координат можно, например, выбрать угол поворота и две декартовы координаты какой-либо точки тела.

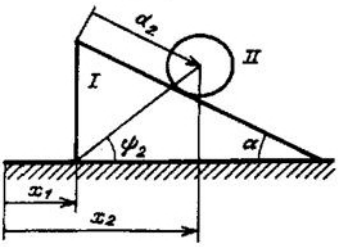


Рис. 37.

5. Твердое тело при поступательном движении имеет три степени свободы, в качестве обобщенных координат можно выбрать три декартовы координаты какой-либо точки тела.

6. Система, состоящая из призмы, положенной на плоскость, и диска, катящегося без проскальзывания по боковой грани призмы, имеет две степени свободы (рис. 37).

7. Система, состоящая из двух свободных точек, имеет шесть степеней свободы.

8. Механизм швейной машины, состоящий из большого числа твердых тел, имеет одну степень свободы.

9. Тонкий прямолинейный стержень на плоскости, который должен двигаться так, чтобы скорость его центра была параллельна оси стержня, имеет две степени свободы.

Из приведенных примеров механических систем лишь одна — последняя — была неголономной, остальные были голономными.

Вернемся снова к понятию обобщенных координат, взяв для иллюстрации систему из примера 6. Положение каждой точки диска и призмы будет известно, как только будут заданы значения величин, входящих в один из наборов, состоящих из двух параметров: (x_1, x_2), или (x_1, d_2), или (x_2, ψ_2), или (x_1, ψ_2), или $q_1 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2)$, $q_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2$ и т.д.

Подведем итоги: для рассматриваемой системы вариантов выбора обобщенных координат существует бесконечно много, но каждый фиксированный набор всегда содержит две независимые величины. Так как данная система голономна, число обобщенных координат равно двум, т.е. числу степеней свободы. Координаты называются обобщенными, поскольку они могут не иметь явно выраженного геометрического смысла, как, например, в случае координат q_1, q_2.

► **Идеальные связи.** Связи называются *идеальными*, если сумма работ их реакций $\vec{R}_j$ равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A_j^R = 0.$$

Примером системы с идеальными связями служит свободное твердое тело. Любой сложный механизм, состоящий из нескольких твердых тел, можно трактовать как механическую систему с идеальными связями, если тела соединены абсолютно жестко, при помощи идеальных шарниров (без трения), невесомыми нерастяжимыми идеально гибкими нитями. Кроме того, поверхности соприкосновения должны быть либо абсолютно гладкими, либо идеально шероховатыми, когда одно из тел катится по другому без проскальзывания.

6.3. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил $\vec{F}_j$ на любом возможном перемещении системы была равна нулю.

Математическая запись принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_j^F = 0.$$

Пример. Найти угол φ отклонения от вертикали оси тяжелого однородного стержня веса G, к нижнему концу которого B приложена горизонтальная сила F (рис. 38).

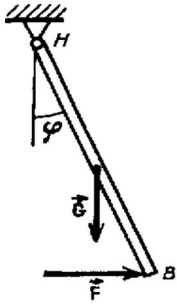


Рис. 38.

Решение. В механическую систему включим стержень, являющийся твердым телом. Пренебрегая трением в шарнире, заключаем, что связи, наложенные на систему, идеальные и к исследованию ее равновесия можно применить принцип возможных перемещений.

Из состояния равновесия, характеризуемого углом φ, сообщаем системе возможное перемещение — поворачиваем стержень на малый угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира H в сторону увеличения угла φ, подсчитываем сумму элементарных работ активных сил $\vec{G}$ и $\vec{F}$ и приравниваем ее нулю:

$$-GL\sin\varphi\,\delta\varphi + F2L\cos\varphi\,\delta\varphi = 0$$

(принимаем длину стержня равной $2L$), или после преобразований:

$$\delta\varphi\,(-GL\sin\varphi + F2L\cos\varphi) = 0.$$

Поскольку возможное перемещение $\delta\varphi$ произвольно, то для того, чтобы произведение было равно нулю, необходимо приравнять нулю выражение, заключенное в круглые скобки:

$$-GL\sin\varphi + F2L\cos\varphi = 0.$$

Отсюда находим искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg}(2F/G)$.

6.4. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера — Лагранжа)

Формулировка общего уравнения динамики: механическая система, на которую наложены идеальные связи, движется так, что в каждый момент времени сумма элементарных работ всех активных сил $\vec{F}_j$ и сил инерции $\vec{\Phi}_j$ на любом возможном перемещении системы равна нулю. Математическая формулировка принципа Даламбера — Лагранжа:

$$\sum \delta A_j^F + \sum \delta A_j^\Phi = 0.$$

Пример. По гладкой горизонтальной поверхности движется прямоугольный параллелепипед массы m_1, по его верхней идеально шероховатой поверхности катится однородный диск массы m_2 и радиуса r_2, к центру которого приложена постоянная горизонтальная сила $\vec{F}_2$ (рис. 39, *а*). Найти ускорения параллелепипеда a_1 и центра диска a_2.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из параллелепипеда и диска. Наложенные связи являются идеальными, и для изучения движения системы можно применить общее уравнение динамики. В качестве координат, определяющих положение системы, выберем абсолютную координату параллелепипеда x_1 и координату x_2, характеризующую положение диска по отношению к параллелепипеду.

Векторы ускорений параллелепипеда a_1 и центра диска a_2 горизонтальны, их величины $a_1 = \ddot{x}_1$, $a_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$, угловое ускорение диска $\varepsilon_2 = \ddot{x}_2/r_2$. Предполагаемые направления векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и соответствующее им направление дуговой стрелки ε_2 изображены на рис. 39, *б*. К активным силам $\vec{F}_2$, $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ ($\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ — силы

веса параллелепипеда и диска) добавим силы инерции $\vec{\Phi}_1 = -m_1\vec{a}_1$, $\vec{\Phi}_2 = -m_2\vec{a}_2$ и пару сил инерции с моментом $M_2^u = -I_{2C}\varepsilon_2$ (см. рис. 39, *б*).

Сообщим системе возможное перемещение, увеличив координаты x_1, x_2 на величины δx_1, δx_2. При этом диск повернется на угол $\delta\varphi_2 = \delta x_2/r_2$.

Подсчитаем сумму элементарных работ активных сил и сил инерции на возможном перемещении и приравняем ее нулю:

$$F_2(\delta x_1 + \delta x_2) - m_1 a_1\,\delta x_1 - \\ - m_2 a_2(\delta x_1 + \delta x_2) - I_{2C}\varepsilon_2\,\delta\varphi_2 = 0.$$

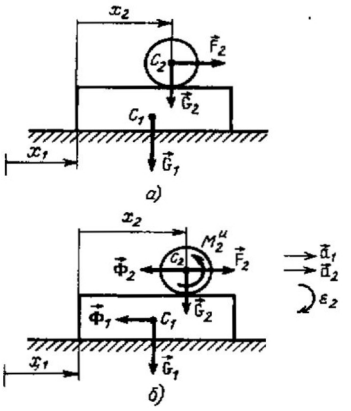


Рис. 39.

После преобразований получим

$$\delta x_1\left[F_2 - m_1\ddot{x}_1 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)\right] + \\ + \delta x_2\left[F_2 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - \tfrac{1}{2}m_2\ddot{x}_2\right] = 0. \quad (4)$$

Здесь возможные перемещения δx_1 и δx_2 могут принимать произвольные независимые между собой значения. Чтобы равенство нулю выполнялось всегда, необходимо, чтобы оба выражения, стоящие множителями при δx_1 и δx_2 и заключенные в квадратные скобки, были равны нулю. Таким образом, равенство (4) распадается на систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$F_2 - m_1\ddot{x}_1 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 0,$$
$$F_2 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - \tfrac{1}{2}m_2\ddot{x}_2 = 0.$$

Решая систему, найдем

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{F_2}{3m_1 + m_2}, \quad a_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{F_2(2m_1 + m_2)}{m_2(3m_1 + m_2)}. \quad (5)$$

6.5. Уравнения Лагранжа второго рода

Для описания движения голономной механической системы с n степенями свободы, на которую наложены идеальные связи, используют *уравнения Лагранжа второго рода*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (6)$$

Здесь q_j — *обобщенные координаты*, количество которых равно числу степеней свободы n, $\dot{q}_j$ — *обобщенные скорости*, равные производным по времени от обобщенных координат, T — кинетическая энергия системы, Q_j — *обобщенные силы*.

Величины T и Q_j должны быть представлены в виде функций обобщенных скоростей, обобщенных координат и времени:

$$T = T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t),$$
$$Q_j = Q_j(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t).$$

Обобщенные силы находятся из выражения для суммы элементарных работ активных сил $\vec{F}_i$ на возможном перемещении системы, преобразованного к виду

$$\sum \delta A_i^F = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j \, \delta q_j.$$

Количество обобщенных сил равно числу степеней свободы.

Физическая размерность обобщенной силы Q_j зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты q_j, так как размерность их произведения $Q_j \, \delta q_j$ должна совпадать с размерностью работы силы. По этой причине Q_j может не иметь явного физического смысла, отсюда и ее название — обобщенная сила.

После подстановки в (6) функций T и Q_j получается система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которую необходимо интегрировать с учетом начальных условий.

Пример. Чтобы наглядно проявились достоинства изложенной методики, составим в форме уравнений Лагранжа второго рода дифференциальные уравнения движения механической системы, рассмотренной в примере из разд. 6.4.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из параллелепипеда и диска. Наложенные связи являются голономными и идеальными, поэтому можно применять уравнения Лагранжа второго рода. Система имеет две степени свободы; в качестве обобщенных координат, определяющих ее положение, выберем абсолютные координаты параллелепипеда $q_1 = x_1$ и центра диска $q_2 = x_1 + x_2$ (см. рис. 39, *а*).

Запишем выражение кинетической энергии системы и приведем его к виду функции, зависящей от $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, q_1, q_2, t:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{I_{C2}\omega_2^2}{2} = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{q}_2^2}{2} + \frac{m_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2}{2}.$$

При проведении выкладок использована формула (1) из гл. 5 и кинематическое соотношение $\omega_2 = (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)/r_2$.

Из-за простой кинематики и удачного выбора обобщенных координат оказалось, что в выражение кинетической энергии не входят ни обобщенные координаты, ни время.

Вычислим обобщенные силы. Для этого подсчитаем сумму элементарных работ активных сил $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{F}_2$ на возможном перемещении системы, задаваемом вариациями δq_1, δq_2, направленными в сторону увеличения координат q_1 и q_2:

$$\sum \delta A_i^F = F_2 \, \delta q_2 = 0 \, \delta q_1 + F_2 \, \delta q_2.$$

Коэффициенты, стоящие при вариациях обобщенных координат, являются искомыми выражениями обобщенных сил, откуда

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = F_2.$$

Осталось записать систему уравнений движения (6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2.$$

С учетом найденных выражений T, Q_1 и Q_2 после соответствующих преобразований уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{q}_1 - \tfrac{1}{2}m_2(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) &= 0, \\ m_2\ddot{q}_2 + \tfrac{1}{2}m_2(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) &= F_2. \end{aligned} \qquad (7)$$

Решение системы (7) совпадает с решением (5) этой же задачи, полученным ранее иным способом.

В отличие от уравнений Лагранжа второго рода, общее уравнение динамики пригодно также для изучения неголономных систем, поэтому оно имеет более широкие возможности применения. В то же время применение уравнений (6) для исследования голономных систем более предпочтительно, так как оно требует меньшего количества простых действий.

Список литературы

Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. — М.: Высшая школа, 1968. — 419 с.

Айзерман М. А. Классическая механика. — М.: Наука, 1980. — 368 с.

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 1. Статика и кинематика. — М.: Наука, 1990. — 672 с.

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 2. Динамика. — М.: Наука, 1991. — 639 с.

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 3. Специальные главы механики. — М.: Наука, 1993. — 487 с.

Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1991 — 256 с.

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки. — М.: Наука, 1972. — 467 с.

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. 2. Динамика системы материальных точек. — М.: Наука, 1972. — 332 с.

Воронков И. М. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1964. — 596 с.

Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966. — 300 с.

Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1983. — 575 с.

Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции. — М.: Наука, 1987. — 320 с.

Список литературы

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. 1. Статика и кинематика. — М.: Наука, 1982. — 352 с.

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. 2. Динамика. — М.: Наука, 1983. — 640 с.

Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — 414 с.

Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986 — 448 с.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. / Под ред. Яблонского А.А. — М.: Высшая школа, 1985 — 368 с.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1995. — 416 с.

Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики, ч. 1. Статика. Кинематика. — М.: Высшая школа, 1984. — 343 с.

Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики, ч. 2. Динамика. — М.: Высшая школа, 1984. — 423 с.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Основные обозначения

A — площадь поперечного сечения;
D — диаметр стержня;
F — сила;
$F_{кр}$ — критическая сила;
G — модуль упругости второго рода;
I_p — полярный момент инерции стержня;
I_x, I_y — осевые моменты инерции стержня;
i — радиус инерции стержня;
k — кривизна оси стержня;
l — длина (стержня);
M_x, M_y — изгибающие моменты;
M_z — крутящий момент;
N — продольная сила;
n — коэффициент запаса;
Q_x, Q_y — поперечные силы;
q — распределенная вдоль оси нагрузка;
S_x, S_y — статические моменты плоской фигуры относительно осей x и y;
$S_x^{отс}$ — статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно оси x;
W_p — полярный момент сопротивления сечения;
W_x, W_y — осевые моменты сопротивления сечения;
x, y, z — прямоугольные декартовы координаты;
γ — угловая деформация;
ε — линейная деформация;
λ — гибкость стержня;
μ — коэффициент приведенной длины;
ν — коэффициент Пуассона;
σ — нормальное напряжение;
$\sigma_{кр}$ — критическое напряжение;
$[\sigma]$ — допускаемое нормальное напряжение;
τ — касательное напряжение;
$[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение;
φ — угол.

1. Основные понятия

1.1. Введение. Внешние и внутренние силы

► **Деформация, прочность и жесткость.** Сопротивление материалов представляет собой часть механики, в которой рассматриваются вопросы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Сопротивление материалов опирается на знания теоретической механики. Но если объектом теоретической механики является абсолютно твердое тело, то в сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые твердые тела.

На практике реальные части машин и сооружений подвергаются воздействию разного рода сил. Под действием этих сил происходит *деформация* тел, т.е. изменение взаимного расположения частиц материала. Если силы достаточно велики, возможно разрушение тела.

Способность тела воспринимать нагрузки без разрушения и больших деформаций называют соответственно *прочностью* и *жесткостью*.

Некоторые состояния равновесия тел и конструкций оказываются *неустойчивыми*, т.е. такими, при которых незначительные механические воздействия, как правило, случайного характера, могут привести к существенным отклонениям от этих состояний. Если же отклонения также невелики, то такие состояния равновесия называют *устойчивыми*.

► **Внешние силы.** К внешним силам, действующим на конструкцию, относятся активные силы (нагрузки) и реакции внешних связей. Различают несколько видов нагрузок.

Сосредоточенная сила, приложенная в точке. Ее вводят вместо реальных сил, действующих на небольшой участок поверхности элемента конструкции, размерами которого можно пренебречь.

Распределенные силы. Например, силы давления жидкости на дно сосуда относятся к распределенным по поверхности нагрузкам и измеряются в единицах $Н/м^2$, а силы веса — к нагрузке, распределенной по объему и измеряемой в $Н/м^3$. В ряде случаев вводят нагрузку, распределенную по линии, интенсивность которой измеряется в Н/м.

Одним из вариантов нагрузок является *сосредоточенный момент* (пара сил).

► **Внутренние силы в стержне.** Наиболее распространенным элементом конструкций является стержень, поэтому в сопротивлении материалов ему уделяют главное внимание.

Продольная ось и поперечное сечение — основные геометрические элементы стержня. Принимается, что поперечные сечения стержня

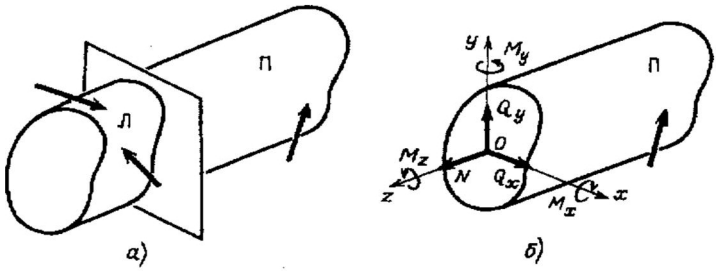


Рис. 1.

перпендикулярны продольной оси, а продольная ось проходит через центры тяжести поперечных сечений.

Внутренними силами стержня называют силы взаимодействия между его отдельными частями, возникающие под действием внешних сил (предполагается, что в отсутствие внешних сил внутренние силы равны нулю).

Рассмотрим стержень, находящийся в равновесии под действием некоторой системы внешних сил (рис. 1, *а*). Мысленно проведем произвольное поперечное сечение, которое делит стержень на две части $Л$ и $П$. На правую часть $П$ стержня со стороны левой части $Л$ действует система распределенных по поверхности поперечного сечения сил — внутренних сил по отношению к стержню в целом. Эту систему сил можно привести к главному вектору $\vec{R}$ и главному моменту $\vec{M}$, взяв центр тяжести сечения — точку O — в качестве центра приведения.

► **Внутренние силовые факторы.** Выберем систему координат, расположив оси x, y в поперечном сечении, а ось z перпендикулярно ему, и разложим $\vec{R}$ и $\vec{M}$ на составляющие по этим осям: Q_x, Q_y, N и M_x, M_y, M_z (рис. 1, *б*).

Эти шесть величин называются *внутренними силовыми факторами стержня (или внутренними усилиями)* в рассматриваемом сечении. Каждое из этих усилий имеет свое название, соответствующее его направлению или определенному виду деформации стержня, который вызывается этим усилием. Силы Q_x и Q_y называются *поперечными (перерезывающими)* силами, а N — *нормальной (продольной)* силой. Моменты M_x и M_y называются *изгибающими* моментами, а M_z — *крутящим* моментом.

► **Метод сечений.** Так как отсеченная часть стержня $П$ находится в равновесии, можно составить шесть уравнений статики для действующих на эту часть сил, из которых определяются все шесть вну-

тренних силовых факторов

$$\sum F_x = 0, \qquad \sum F_y = 0, \qquad \sum F_z = 0,$$
$$\sum m_x(\vec{F}) = 0, \qquad \sum m_y(\vec{F}) = 0, \qquad \sum m_z(\vec{F}) = 0.$$

Этот способ определения внутренних усилий называют *методом сечений*.

На основании закона действия и противодействия правая часть стержня действует на левую с такими же, но противоположно направленными усилиями, поэтому их можно также определить, исходя из равновесия части $Л$ стержня.

1.2. Напряжения и деформации в точке

▶ **Напряжения.** *Вектором напряжения* p называется интенсивность распределенных по сечению внутренних сил в некоторой точке сечения (рис. 2). Его составляющие, лежащие в плоскости сечения, называются *касательными напряжениями* τ_x, τ_y, а составляющая, перпендикулярная сечению, — *нормальным напряжением* σ. Напряжения измеряются в единицах Н/м^2 (Па) и зависят не только от выбора точки, но и от ориентации сечения (или площадки dA, рис. 2), проходящего через эту точку. Вся совокупность напряжений в заданной точке для разных площадок называется *напряженным состоянием* в этой точке.

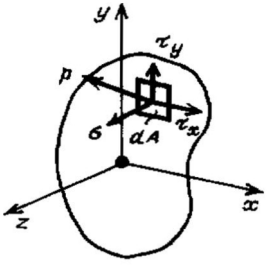


Рис. 2.

При известных напряжениях в сечении стержня его внутренние силовые факторы могут быть найдены по формулам

$$N = \int_A \sigma\, dA, \qquad Q_x = \int_A \tau_x\, dA, \qquad Q_y = \int_A \tau_y\, dA,$$
$$M_x = -\int_A \sigma y\, dA, \quad M_y = -\int_A \sigma x\, dA, \quad M_z = \int_A (\tau_y x - \tau_x y)\, dA, \tag{1}$$

где интегрирование распространено на всю площадь сечения A.

▶ **Деформации.** Рассмотрим произвольную точку K тела в начальном недеформированном состоянии и проведем через нее в направлении осей x и y два бесконечно малых отрезка длиной dx и dy (рис. 3).

Под действием нагрузки происходит деформация тела, точка K перемещается в точку K', отрезки dx и dy изменяют свою длину на величины Δx и Δy, а угол $\pi/2$ между ними изменяется на γ_{xy}.

Отношения

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{dy}$$

называются *линейными деформациями* в точке K в направлении осей x и y соответственно, а величина γ_{xy} — *угловой деформацией* (углом сдвига) в точке K между осями x и y. Вся совокупность линейных и угловых деформаций для различных направлений, проходящих через рассматриваемую точку, называется *деформированным состоянием* в этой точке.

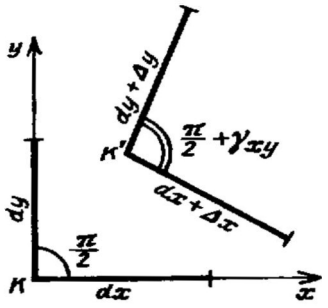


Рис. 3.

1.3. Основные понятия и допущения

► **Упругостью** называют свойство тела, выражающееся в однозначной зависимости между силами, действующими на тело, и его деформациями.В частности, упругое тело после снятия нагрузок возвращается в исходное состояние.

В некоторых случаях после снятия нагрузок исчезает лишь часть полной деформации, называемая *упругой*. Оставшаяся часть — так называемая *остаточная (пластическая)* деформация связана со свойством тела, которое называется *пластичностью*.

► **Основные допущения, принятые в сопротивлении материалов:**

1. Тела считаются сплошными (без пустот) и однородными, т.е. свойства материала тела в разных точках одинаковы.

2. Материал тела *изотропен*, т.е. его свойства по всем направлениям одинаковы. (В ряде случаев приходится отказываться от этого допущения для *анизотропных* тел, свойства материала которых в разных направлениях различаются. Например, свойства дерева в направлении вдоль волокон и поперек различны.)

3. Деформации тела в каждой точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке. Это свойство называют *линейной упругостью* или *законом Гука*.

4. Предполагается малость деформаций тела, а также малость перемещений его точек по сравнению с геометрическими размерами самого тела.

5. Справедлив *принцип независимости действия сил* (принцип суперпозиции), согласно которому какая-либо величина a, зависящая от действия нескольких сил, равна сумме величин a_i, найденных от каждой силы в отдельности. Этот принцип следует из допущений 3 и 4.

2. Напряженно-деформированное состояние в точке

2.1. Виды напряженного состояния

► **Главные напряжения и главные направления.** Анализ напряженного состояния в некоторой точке K тела удобно проводить, мысленно выделяя элементарный параллелепипед в окрестности этой точки и рассматривая напряжения, действующие на его грани. Ввиду малости параллелепипеда можно считать, что напряженное состояние во всех его точках одинаково (однородно) и совпадает с напряженным состоянием в исследуемой точке K. Изменяя ориентацию этого параллелепипеда, можно добиться того, чтобы все его грани были свободны от касательных напряжений. Соответствующие нормальные напряжения называются *главными напряжениями*, а их направления — *главными направлениями* в точке K.

Различают *линейное, плоское и объемное (одноосное, двухосное и трехосное)* напряженные состояния в точке в зависимости от того, испытывает ли параллелепипед, ориентированный по главным направлениям, растяжение (или сжатие) соответственно в одном, двух или трех взаимно перпендикулярных направлениях.

► **Плоское напряженное состояние. Закон парности.** В дальнейшем ввиду особой важности ограничимся случаем плоского напряженного состояния, при котором на двух противоположных гранях элементарного параллелепипеда напряжения отсутствуют. На остальных гранях в общем случае их ориентации действуют касательные и нормальные напряжения (рис. 4). Из однородности напряженного состояния параллелепипеда следует, что одноименные напряжения на противоположных гранях численно равны. Очевидно, что нормальные усилия на гранях параллелепипеда взаимно уравновешены. Касательные усилия на тех же гранях образуют две пары сил с моментами $(\tau_y\,dy\,dx)\,dz$ и $(\tau_z\,dz\,dx)\,dy$ противоположного направления, где dx, dy, dz — размеры параллелепипеда. Эти моменты должны быть уравновешены, откуда $\tau_z = \tau_y$.

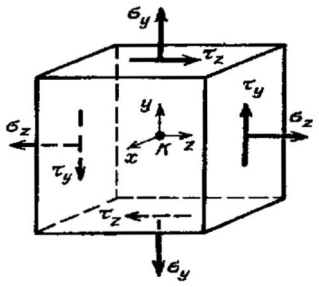


Рис. 4.

Последнее равенство выражает *закон парности касательных напряжений*: на любых взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и направлены так, что стре-

мятся вращать элемент в противоположные стороны (рис. 4). Сказанное позволяет ввести единое обозначение: $\tau = \tau_z = \tau_y$.

2.2. Одноосное растяжение и сжатие

► **Модуль упругости первого рода.** Рассмотрим элементарный параллелепипед в состоянии одноосного растяжения или сжатия, на двух противоположных гранях которого действуют только нормальные напряжения (рис. 5).

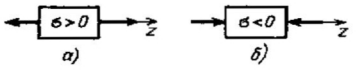


Рис. 5.

Правило знаков: растягивающие напряжения считаются положительными, а сжимающие — отрицательными.

В соответствии с законом Гука напряжение и линейная деформация в направлении оси z прямо пропорциональны:

$$\sigma = E\varepsilon_z. \tag{1}$$

Коэффициент пропорциональности E называется *модулем упругости первого рода* и имеет размерность напряжения, так как ε_z — безразмерная величина. При $\sigma > 0$ (растяжение) ε_z — также больше нуля, что соответствует удлинению параллелепипеда в направлении оси z. При $\sigma < 0$ (сжатие) имеем $\varepsilon_z < 0$, что соответствует укорочению параллелепипеда.

► **Коэффициент Пуассона.** Линейные деформации в направлении осей x и y из соображений симметрии равны между собой и также пропорциональны напряжению или, с учетом (1), деформации ε_z:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma}{E}. \tag{2}$$

Постоянный безразмерный коэффициент пропорциональности ν называется *коэффициентом Пуассона*, а знак минус учитывает разные знаки продольной ε_z и поперечных ε_x, ε_y деформаций. В частности, при $\sigma > 0$, $\varepsilon_z > 0$ величины ε_x, ε_y меньше нуля, т.е. поперечные размеры параллелепипеда уменьшаются.

Постоянные величины E и ν характеризуют упругие свойства конкретного материала, например для стали $E = 210$ ГПа, $\nu = 0{,}25 \div 0{,}3$.

2.3. Чистый сдвиг

► **Чистый сдвиг.** Рассмотрим частный вид плоского напряженного состояния, при котором на боковые грани элементарного параллелепипеда действуют только касательные напряжения τ (рис. 6, *а*). По

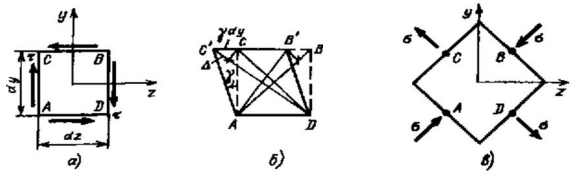


Рис. 6.

закону парности напряжения на соседних гранях одинаковы. Такой вид напряженного состояния называется *чистым сдвигом*.

Характер деформации параллелепипеда показан на рис. 6, *б*. Первоначально прямые углы между боковыми гранями изменяются на величину γ, называемую углом сдвига, а линейные деформации ε_x, ε_y, ε_z равны нулю.

► **Модуль сдвига.** Закон Гука в данном случае имеет вид

$$\tau = G\gamma. \tag{3}$$

Коэффициент пропорциональности G называют *модулем сдвига* или *модулем упругости второго рода*. Размерность модуля совпадает с размерностью напряжений.

Нетрудно видеть, что при $dy = dz$ диагональный отрезок AB параллелепипеда укорачивается, а отрезок CD удлиняется на одну и ту же величину $\Delta = \gamma\, dy \sin 45°$ (рис. 6, *б*), поэтому на другой элементарный параллелепипед, выделенный в окрестности той же точки и повернутый на угол 45° относительно первого, должны действовать соответствующие нормальные напряжения σ (рис. 6, *в*). Касательных напряжений здесь уже не будет, поэтому нормальные напряжения σ — главные напряжения, а их направления — главные направления для данного напряженного состояния.

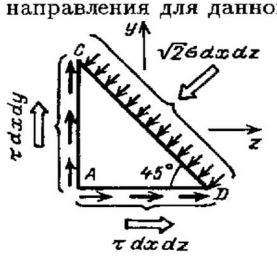


Рис. 7.

► **Связь между G, E и ν.** Рассмотрим элемент, образованный диагональным разрезом параллелепипеда (рис. 7). На его грани действуют силы, по величине равные $\tau\, dx\, dy$, $\tau\, dx\, dz$ и $\sigma\, dx\, dz/\cos 45°$.

Из равновесия этого элемента можно получить

$$\sigma = \tau. \tag{4}$$

С учетом (3), (4) деформация отрезка CD (рис. 6, *б*) равна $\varepsilon_{CD} = \Delta/CD = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\tau/G = \frac{1}{2}\sigma/G$.

С другой стороны, рассматривая состояние на рис. 6, *в* как комбинацию двух одноосных напряженных состояний (растяжения и

сжатия по перпендикулярным направлениям), из закона Гука (1), (2) получим $\varepsilon_{CD} = \dfrac{\sigma}{E} + \dfrac{\nu\sigma}{E}$. Отсюда $\dfrac{\sigma}{2G} = \dfrac{\sigma}{E} + \dfrac{\nu\sigma}{E}$ или $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

Таким образом, модуль сдвига G определяется через уже введенные постоянные E и ν.

3. Центральное растяжение и сжатие

3.1. Продольная сила

Центральным растяжением (сжатием) называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только продольная сила N, а все остальные внутренние усилия равны нулю.

Правило знаков: растягивающие продольные силы считаются положительными, а сжимающие — отрицательными.

Пример. На рис. 8, *а* показан стержень, нагруженный двумя силами F_1 и F_2, лежащими на его оси. Для определения продольной силы используем метод сечений (см. разд. 1.1). Проведем произвольное сечение I на участке «a» стержня и рассмотрим равновесие свободной отсеченной части (рис. 8, *б*). Действие отброшенной части заменим неизвестной силой N_1, считая ее положительной. Из уравнения равновесия этой отсеченной части в форме равенства нулю суммы проекций всех сил на ось z: $N_1 - F_1 = 0$ следует $N_1 = F_1 = 20$ кН. Аналогично для сечения II на участке «b» стержня получим (рис. 8, *в*) $N_2 + F_2 - F_1 = 0$, откуда $N_2 = F_1 - F_2 = -40$ кН.

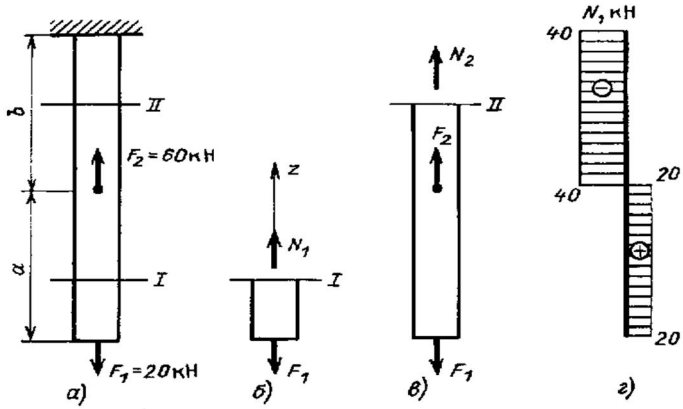


Рис. 8.

Таким образом, продольная сила на участках «a» и «b» стержня различна. Участок «a» стержня испытывает растяжение ($N > 0$), а участок «b» — сжатие ($N < 0$). При переходе от участка «a» к участку «b» сила N изменяется скачком на величину силы F_2.

Для иллюстрации характера изменения продольной силы вдоль стержня принято строить график функции $N(z)$, называемый *эпюрой* продольной силы. На этом графике указывают числовые значения продольной силы в характерных сечениях, а также их знаки. Для рассмотренного примера эпюра $N(z)$ показана на рис. 8, *г*.

3.2. Напряжения и деформации при растяжении или сжатии

► **Гипотеза плоских сечений.** Для определения напряжений при растяжении или сжатии примем *гипотезу плоских сечений*: поперечные сечения стержня после деформации остаются плоскими и перпендикулярными оси стержня. Опыт показывает, что эта гипотеза нарушается только для областей так называемых местных напряжений, в непосредственной близости от точек приложения внешних сил, или в местах резкого изменения площади поперечного сечения, где происходит так называемая *концентрация напряжений*. Их учет составляет особую задачу, нами не затрагиваемую.

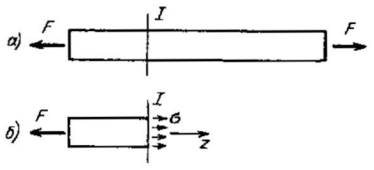


Рис. 9.

► **Формулы для напряжений и деформаций.** Рассмотрим стержень, растягиваемый двумя силами (рис. 9, *а*). В соответствии с гипотезой плоских сечений и постоянством продольной силы вдоль стержня ($N = F$), напряженное и деформированное состояние точек стержня вне окрестности концов однородно и нормальные напряжения по поперечному сечению распределены равномерно (рис. 9, *б*).

Из формулы (1) гл. 1 следует $N = \int_A \sigma\, dA = \sigma A$, отсюда

$$\sigma = \frac{N}{A}. \tag{1}$$

Формула (1) позволяет вычислять нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении или сжатии по известной продольной силе N и площади поперечного сечения A.

Выделенный из стержня элементарный параллелепипед находится в условиях одноосного растяжения (рис. 5, *а*). Его деформации определяются из закона Гука (см. разд. 2.2). В частности, продольная деформация

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}.$$

Суммируя удлинения малых элементов по всей длине стержня, получим его *абсолютное удлинение*

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon_z \, dz = \varepsilon_z l = \frac{Nl}{EA},$$

где l — длина стержня.

Величина EA называется *жесткостью сечения стержня при растяжении и сжатии.*

3.3. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

► **Допускаемое напряжение.** Для обеспечения прочности стержня, испытывающего растяжение или сжатие, необходимо ограничить максимальные напряжения этого стержня некоторым значением, называемым *допускаемым напряжением* $[\sigma]$. Его величина выбирается на основе устанавливаемого заранее для данного материала опасного значения напряжения с учетом коэффициента запаса. Для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, вводят два разных допускаемых напряжения $[\sigma^{\mathrm{p}}]$ и $[\sigma^{\mathrm{c}}]$.

► **Задачи расчета на прочность.** Таким образом, условие прочности в данном случае имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} \leqslant [\sigma].$$

Пользуясь им, можно решать следующие задачи:

1. По заданным нагрузкам, размерам сечения и величине допускаемого напряжения проверять прочность стержня.

2. По заданным нагрузкам и известной величине допускаемого напряжения определять размеры поперечного сечения:

$$A \geqslant \frac{|N|}{[\sigma]}.$$

3. По заданным размерам сечения и известной величине допускаемого напряжения определять величину допускаемой продольной силы:

$$N \leqslant [\sigma]A.$$

Пример. Для чугунного стержня (рис. 8, *а*) с площадью сечения $A = 5$ см^2 проверить условия прочности при $[\sigma^{\mathrm{p}}] = 30$ МПа, $[\sigma^{\mathrm{c}}] = 100$ МПа.

Решение. На участке «*a*» стержень испытывает растягивающее усилие $N_1 = 20$ кН (см. рис. 8, *г*), поэтому нормальное напряжение в сечениях на этом участке $\sigma_1 = N_1/A = 40$ МПа.

На участке «*b*», испытывающем сжатие, $N_2 = -40$ кН. Соответствующее напряжение $\sigma_2 = |N_2|/A = 80$ МПа.

Так как допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для чугуна различны, необходимо проверить два условия $\sigma_1 \leqslant [\sigma^{\mathrm{p}}]$ и $\sigma_2 \leqslant [\sigma^{\mathrm{c}}]$. Первое оказывается невыполненным, поэтому условие прочности в целом не соблюдено.

4. Кручение

4.1. Крутящий момент

Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только крутящий момент M_z, а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

Правило знаков: если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению крутящий момент направлен против хода часовой стрелки, он считается положительным.

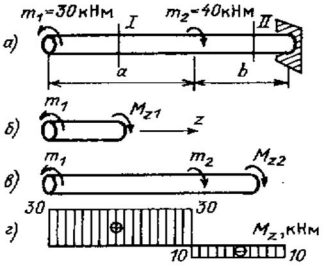


Рис. 10.

Пример. Рассмотрим стержень, нагруженный двумя моментами m_1 и m_2, плоскости действия которых перпендикулярны оси стержня (рис. 10, *а*). В соответствии с методом сечений проведем произвольное поперечное сечение I на участке «*a*» и рассмотрим равновесие свободной отсеченной части стержня (рис. 10, *б*). Действие отброшенной части заменим неизвестным крутящим моментом M_{z1}, выбрав его направление положительным. Из уравнения равновесия для отсеченной части в форме равенства нулю суммы моментов всех сил относительно оси z: $M_{z1} - m_1 = 0$ следует $M_{z1} = m_1 = 30$ кНм. Аналогично для сечения II будем иметь (рис. 10, *в*) $M_{z2} + m_2 - m_1 = 0$, откуда $M_{z2} = m_1 - m_2 = -10$ кНм.

На рис. 10, *г* дана эпюра крутящего момента, показывающая характер изменения величины M_z вдоль оси стержня. На границе участков «*a*» и «*b*» стержня крутящий момент претерпевает скачок на величину, равную моменту m_2.

4.2. Напряжения и деформации при кручении

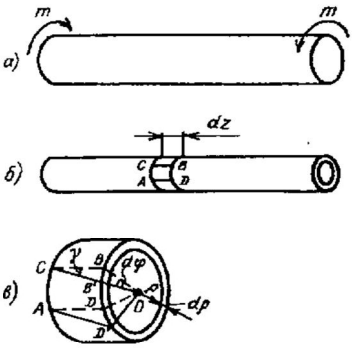


Рис. 11.

► **Напряженное состояние при кручении.** Ограничимся рассмотрением стержней с поперечным сечением в форме круга или кольца.

Для установления закона распределения напряжений по сечению примем допущение, подтверждаемое опытом, о том, что при кручении поперечные сечения стержня в результате деформации поворачиваются вокруг продольной оси как жесткие диски (кольца). Условия применимости этого допущения аналогичны условиям применимости гипотезы плоских сечений при растяжении или сжатии (см. разд. 3.2).

Рассмотрим стержень, испытывающий кручение под действием двух моментов, приложенных на его концах (рис. 11, *а*). Разобьем

его на соосные трубки (рис. 11, *б*) и выделим одну с внутренним радиусом ρ и бесконечно малой толщиной $d\rho$ (рис. 11, *в*).

В силу принятого допущения относительно характера деформирования стержня можно утверждать, что бесконечно малый элемент $ACBD$, выделенный из трубки (рис. 11, *в*), испытывает деформацию, соответствующую чистому сдвигу (см. разд. 2.3). Отсюда следует, что по боковым граням элемента действуют только касательные напряжения τ (см. рис. 6, *а*).

► **Полярный момент инерции.** Угол сдвига элемента $\gamma = BB'/dz = \rho\, d\varphi/dz$ (рис. 11, *в*), где $d\varphi/dz$ — *погонный угол закручивания* трубки или угол закручивания на единицу длины. Из формулы (3) гл. 2 (закон Гука) следует

$$\tau = G\gamma = G\rho\frac{d\varphi}{dz}. \qquad (1)$$

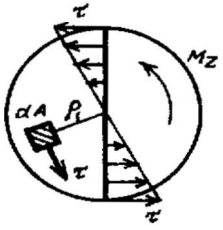


Рис. 12.

Величина погонного угла закручивания $d\varphi/dz$ одинакова для всех соосных трубок, из которых составлен стержень. Поэтому из формулы (1) вытекает, что касательные напряжения в поперечных сечениях стержня прямо пропорциональны расстоянию ρ до его оси (рис. 12).

Крутящий момент M_z может быть получен суммированием моментов всех распределенных по сечению напряжений относительно оси z:

$$M_z = \int\limits_A \tau\rho\, dA = GI_\text{р}\frac{d\varphi}{dz}, \quad \text{где} \quad I_\text{р} = \int\limits_A \rho^2\, dA. \qquad (2)$$

Интеграл по поверхности сечения $I_\text{р}$ называется *полярным моментом инерции сечения* и представляет собой геометрическую характеристику этого сечения.

Для круга диаметра D имеем $I_\text{р} = \frac{\pi}{32}D^4$.

Для кольца $I_\text{р} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$, где d и D — внутренний и внешний диаметры соответственно.

► **Касательные напряжения. Угол закручивания.** Используя (2), находим

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_\text{р}}. \qquad (3)$$

Подставляя это выражение в (1) для τ, получим основную формулу для касательных напряжений в поперечных сечениях стержня при кручении

$$\tau = \frac{M_z\rho}{I_\text{р}}. \qquad (4)$$

Угол закручивания всего стержня на рис. 11, *а*, т.е. угол взаимного поворота его крайних сечений, можно найти, зная погонный угол закручивания (3) и учитывая постоянство величины M_z вдоль оси стержня ($M_z = m$):

$$\Delta\varphi = \int_0^l \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z l}{GI_\text{p}},$$

где l — длина стержня.

Величина GI_p называется *жесткостью сечения при кручении.*

4.3. Расчеты на прочность при кручении

Значение наибольшего касательного напряжения при кручении находится из формулы (4) при $\rho = \rho_{\max}$:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_z|\rho_{\max}}{I_\text{p}} = \frac{|M_z|}{W_\text{p}}. \qquad (5)$$

Величина $W_\text{p} = I_\text{p}/\rho_{\max}$ называется *полярным моментом сопротивления сечения.*

Для круга $W_\text{p} = \frac{\pi}{16}D^3$.

Для кольца $W_\text{p} = \frac{\pi}{16}D^3(1 - d^4/D^4)$.

Условие прочности сводится к неравенству $\tau_{\max} = |M_z|/W_\text{p} \leqslant [\tau]$, где $[\tau]$ — допускаемое напряжение при кручении.

Как и при расчете на прочность при растяжении и сжатии, возможны следующие три вида задач, различающихся формой использования условия прочности.

1. Проверочный расчет: $|M_z|/W_\text{p} \leqslant [\tau]$.
2. Подбор сечения: $W_\text{p} \geqslant |M_z|/[\tau]$.
3. Определение допускаемой нагрузки: $|M_z| \leqslant [\tau]W_\text{p}$.

Пример. Для стального стержня кругового сечения (рис. 10, *а*) подобрать диаметр из условия прочности при $[\tau] = 100$ МПа.

Решение. Так как поперечное сечение постоянно вдоль стержня, опасными будут сечения на участке «*a*», где возникает максимальный крутящий момент $M_z = 30$ кНм (см. рис. 10, *г*).

Из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\text{p}} = \frac{16\,M_z}{\pi D^3} \leqslant [\tau]$$

находим $D \geqslant \sqrt[3]{16M_z/(\pi[\tau])} = 0{,}119$ м.

Округляя в бóльшую сторону, выбираем окончательно $D = 12$ см.

5. Прямой изгиб

5.1. Изгибающий момент и поперечная сила

► **Определения.** *Изгибом* называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_x и M_y и, быть может, поперечные силы Q_x и Q_y, а остальные внутренние силовые факторы (N и M_z) равны нулю.

В случае равенства нулю поперечных сил изгиб называют *чистым*, а при наличии поперечных сил имеем так называемый *поперечный изгиб*.

Будем рассматривать стержни, поперечные сечения которых имеют ось симметрии y. Если на такой стержень действует система внешних сил, лежащих в плоскости yz и направленных перпендикулярно продольной оси стержня (рис. 13), то в его поперечных сечениях возникнут только два внутренних силовых фактора — изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y. Такой изгиб называют *прямым* (о косом изгибе смотри разд. 6.1).

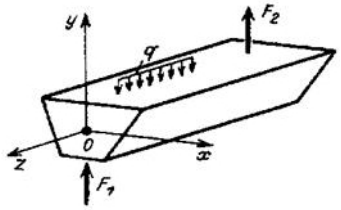


Рис. 13.

Правило знаков: изгибающий момент считается положительным, если он приводит к растяжению нижних волокон и сжатию верхних; поперечная сила положительна, если при воздействии на сечение справа она направлена вниз, а при воздействии слева — вверх.

Как уже отмечалось, внутренние силовые факторы стержня зависят от продольной координаты рассматриваемого сечения, т.е. являются функциями переменной z.

► **Дифференциальные уравнения равновесия стержня.** Рассмотрим стержень, на который действует распределенная вдоль его оси нагрузка q (рис. 14, *а*). Выделим двумя сечениями бесконечно малый элемент (рис. 14, *б*), действие отброшенных частей стержня заменим соответствующими внутренними усилиями, направления которых выбраны положительными.

Вычисляя сумму проекций всех сил на ось y и сумму моментов сил относительно точки O, составим соответствующие уравнения равновесия элемента

$$q\,dz + Q_y - (Q_y + dQ_y) = 0,$$
$$-M_x + (M_x + dM_x) - Q_y\,dz = 0.$$

Из них следуют соотношения

$$\frac{dQ_y}{dz} = q, \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y, \tag{1}$$

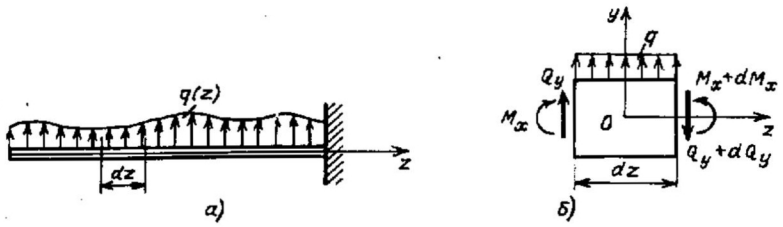


Рис. 14.

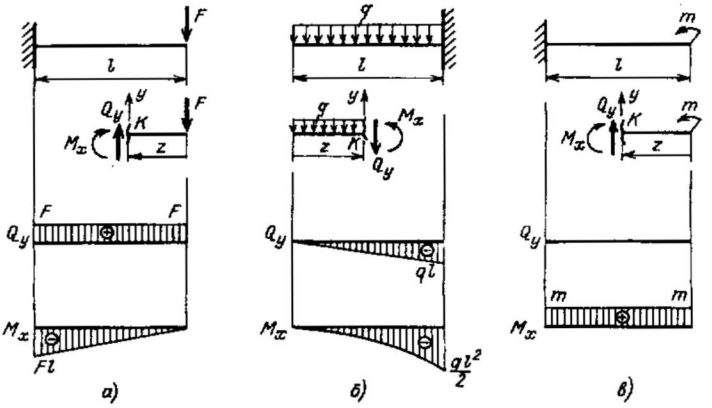


Рис. 15.

называемые *дифференциальными уравнениями равновесия стержня при изгибе*. Уравнения (1), которым должны удовлетворять функции $Q_y(z)$ и $M_x(z)$, часто используют при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, а также при проверке этого построения.

Стержни, работающие преимущественно на изгиб, принято называть *балками*.

► **Примеры построения эпюр.** Рассмотрим примеры построения эпюр $Q_y(z)$ и $M_x(z)$ для некоторых балок с использованием метода сечений.

На рис. 15, *а* показана консольная, т.е. с защемленным концом, балка, нагруженная сосредоточенной силой. В соответствии с методом сечений проведем произвольное поперечное сечение K, отстоящее на расстояние z от свободного конца балки, и рассмотрим равновесие свободной отсеченной части. Действие отброшенной части заменим неизвестными усилиями Q_y и M_x, считая их направления положительными. Вычисляя сумму проекций всех сил на ось y и сумму моментов сил относительно точки K, составим соответствующие уравнения равновесия

$$Q_y - F = 0, \quad -M_x - F_z = 0,$$

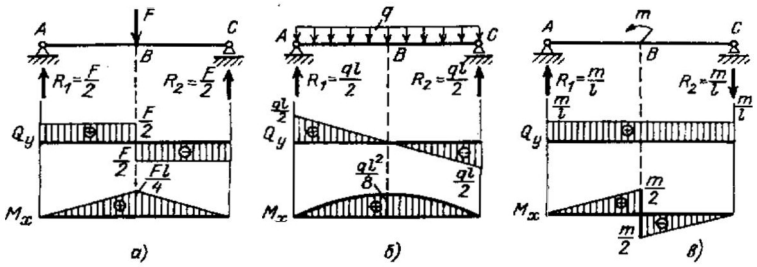


Рис. 16.

откуда получим $Q_y = F$, $M_x = -F_z$. Таким образом, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется прямо пропорционально расстоянию z, принимая значения 0 и $-Fl$ соответственно на свободном ($z = 0$) и защемленном ($z = l$) концах балки. На рис. 15, *а* даны соответствующие эпюры Q_y и M_x.

Та же процедура для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 15, *б*), дает

$$-qz - Q_y = 0, \quad \tfrac{1}{2}qz^2 + M_x = 0,$$

откуда $Q_y = -qz$, $M_x = -\frac{1}{2}qz^2$. В данном случае поперечная сила есть линейная функция z, а изгибающий момент зависит от z по закону квадратной параболы, чему соответствуют эпюры Q_y и M_x на рис. 15, *б*.

Аналогично для консольной балки, нагруженной моментом (рис. 15, *в*), получим $Q_y = 0$, $M_x = m$.

Для двухопорных балок (рис. 16), у которых нет свободных концов, необходимо предварительно найти опорные реакции из условий равновесия для балки в целом. После этого можно приступить к определению внутренних усилий аналогично предыдущему.

Для произвольного сечения на участке AB балки, нагруженной в центре ($AB = BC = l/2$) сосредоточенной силой F (рис. 16, *а*), получим: $Q_y = R_1 = F/2$, $M_x = R_1 z = Fz/2$, где z — расстояние от левого конца A. Для сечения на участке BC находим: $Q_y = R_1 - F = -F/2$, $M_x = R_1 z - F(z - l/2) = F(l - z)/2$. Соответствующие эпюры даны снизу на рис. 16, *а*.

Для балки на рис. 16, *б*: $Q_y = R_1 - qz = q(l/2 - z)$, $M_x = R_1 z - qz^2/2 = qz(l - z)/2$. Для середины балки имеем $M_x = ql^2/8$.

Для участка AB балки на рис. 16, *в*: $Q_y = R_1 = m/l$, $M_x = R_1 z = mz/l$, а для участка BC: $Q_y = R_1 = m/l$, $M_x = R_1 z - m = m(z/l - 1)$.

► **Особенности эпюр M_x и Q_y.** Кратко сформулируем качественные особенности эпюр, вытекающие из соотношений (1).

1. На участке балки, свободном от нагрузки ($q = 0$), величина Q_y постоянна, а M_x — линейная функция z.

2. На участке равномерно распределенной нагрузки ($q = \text{const}$), Q_y — линейная функция, а M_x — квадратичная (см. рис. 15, *б*, 16, *б*).

3. В точках приложения сосредоточенной силы величина Q_y претерпевает скачок на величину этой силы, а эпюра M_x имеет излом (рис. 16, *а*).

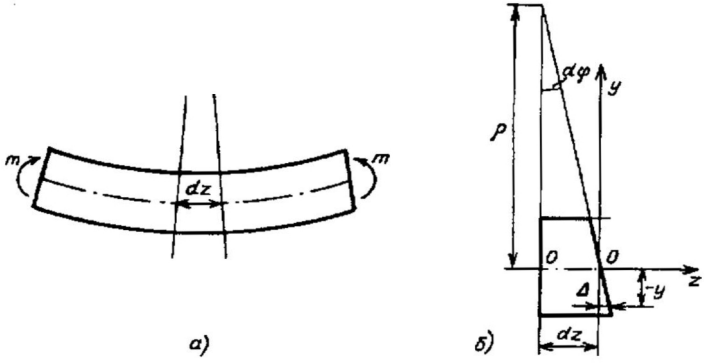


Рис. 17.

4. В точках приложения сосредоточенного момента величина M_x претерпевает скачок на величину этого момента (рис. 16, *в*).

В точках экстремумов функции M_x величина $Q_y = 0$ (рис. 16, *б*).

Знание качественных особенностей эпюр позволяет строить эпюры, не находя функциональных зависимостей $Q_y(z)$ и $M_x(z)$, а вычисляя значения Q_y и M_x только на границах характерных участков. Экстремальные значения M_x определяются после нахождения точек экстремума из условий $Q_y = 0$.

5.2. Напряжения и деформации при прямом чистом изгибе

► **Гипотезы чистого изгиба.** Рассмотрим стержень в состоянии чистого изгиба (рис. 17). В его поперечных сечениях возникает единственный, отличный от нуля силовой фактор — постоянный изгибающий момент $M_x = m$.

Будем использовать *гипотезу* плоских сечений*: плоские до деформации поперечные сечения стержня остаются после деформации плоскими и перпендикулярными деформированной продольной оси.

В соответствии с этой гипотезой два близких сечения поворачиваются относительно друг друга на угол $d\varphi$ (рис. 17, *б*). В результате такой деформации возникает *нейтральный слой*, продольные волокна которого $O - O$ не изменяют своей длины. В нижней части сечения продольные волокна удлиняются (а в верхней — укорачиваются) на величину $\Delta = -y\,d\varphi$. Продольная деформация волокна равна

* Аналогичная гипотеза использовалась в разд. 3.2.

$\varepsilon = \Delta/dz = -y\,d\varphi/(\rho\,d\varphi) = -y/\rho$, где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя.

Дополнительно к гипотезе плоских сечений предположим, что продольные волокна стержня не давят друг на друга. Отсюда следует, что они находятся в состоянии одноосного растяжения или сжатия (см. рис. 5).

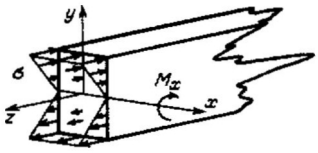


Рис. 18.

▶ **Кривизна оси. Формула для нормальных напряжений.** В соответствии с законом Гука имеем

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Ey}{\rho}. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что нормальные напряжения σ в поперечном сечении стержня изменяются прямо пропорционально расстоянию y от нейтрального слоя (рис. 18).

Используя формулы (1) гл. 1 и равенство нулю продольной силы, получим

$$N = \int\limits_A \sigma\,dA = -\frac{E}{\rho}\int\limits_A y\,dA = 0,$$

$$M_x = -\int\limits_A \sigma y\,dA = \frac{E}{\rho}\int\limits_A y^2\,dA.$$

Из первого равенства вытекает, что *нейтральная ось* x поперечного сечения проходит через центр тяжести, следовательно, величина ρ есть радиус кривизны изогнутой оси стержня. Из второго равенства выводим формулу, определяющую кривизну оси,

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad \text{где} \quad I_x = \int\limits_A y^2\,dA. \qquad (3)$$

Величина I_x называется *моментом инерции сечения относительно оси* x (см. часть «Теоретическая механика», разд. 5.1), а произведение EI_x — *жесткостью сечения при изгибе*.

Из (2), (3) получим основную формулу для нормальных напряжений стержня при прямом изгибе

$$\sigma = -\frac{M_x y}{I_x}, \qquad (4)$$

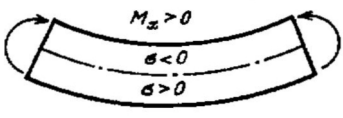


Рис. 19.

в которой знак «минус» необходим для согласования правила знаков величин σ и M_x. При $M_x > 0$ (рис. 19) верхние волокна сжимаются ($y > 0, \sigma < 0$), нижние растягиваются ($y < 0, \sigma > 0$); при $M_x < 0$ знаки напряжений в верхней и нижней частях сечения меняются на противоположные.

5.3. Напряжения и деформации при прямом поперечном изгибе

► **Касательные напряжения. Формула Журавского.** При прямом поперечном изгибе в сечениях стержня возникает не только изгибающий момент M_x, но и поперечная сила Q_y, связанная с касательными напряжениями в сечении формулой

$$Q_y = \int_A \tau_y \, dA.$$

Несмотря на наличие касательных напряжений, формулы (3), (4), полученные для чистого изгиба, применимы и в этом случае.

Для определения касательных напряжений рассмотрим балку на рис. 20, *а*. Вырежем из нее двумя близкими поперечными сечениями и одним продольным малый элемент (рис. 20, *б*). По его боковым граням действуют нормальные напряжения, вычисляемые по формуле (4). Так как изгибающий момент справа больше, чем слева, на величину dM_x, то и нормальное напряжение справа больше на величину $d\sigma = dM_x y / I_x$.

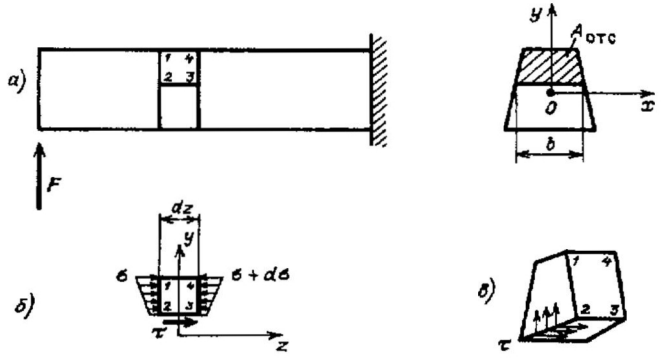


Рис. 20.

Для того чтобы элемент оставался в равновесии, к его нижней грани должны быть приложены касательные напряжения τ (рис. 20, *б*).

Примем допущение об их равномерном распределении по ширине поперечного сечения. Тогда из условия равновесия элемента в форме равенства нулю суммы проекций всех сил на ось z:

$$\tau b \, dz - \int_{A_{отс}} d\sigma \, dA = 0,$$

где интеграл распространен на отсеченную часть поперечного сечения стержня, следует

$$\tau = \frac{\int\limits_{A_{\text{отс}}} d\sigma\, dA}{b\, dz} = \frac{dM_x}{dz}\,\frac{\int\limits_{A_{\text{отс}}} y\, dA}{bI_x}.$$

Учитывая второе уравнение (1), для касательных напряжений получим *формулу Журавского*:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}, \quad \text{где} \quad S_x^{\text{отс}} = \int\limits_{A_{\text{отс}}} y\, dA. \tag{5}$$

Величина $S_x^{\text{отс}}$ называется *статическим моментом отсеченной части поперечного сечения относительно оси x*.

На основании закона парности касательных напряжений (см. разд. 2.1) формула (5) определяет также касательные напряжения в поперечном сечении стержня (рис. 20, *в*).

► **Сечение прямоугольной формы.** В частном случае сечения прямоугольной формы (рис. 21) имеем

$$I_x = \tfrac{1}{12} b h^3, \quad S_x^{\text{отс}} = y_C\, A_{\text{отс}} = \tfrac{1}{2} b \left(\tfrac{1}{4} h^2 - y^2\right).$$

Подставляя эти выражения в формулу (5), находим

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Видно, что величина τ меняется по высоте сечения по закону квадратной параболы, достигая максимального значения при $y = 0$ (т.е. на оси x):

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}. \tag{6}$$

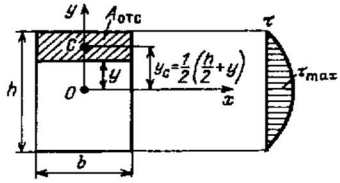


Рис. 21.

На рис. 21 показана эпюра касательных напряжений по высоте прямоугольного сечения.

5.4. Расчет на прочность при прямом изгибе

► **Максимальные напряжения.** Из формулы (4) следует, что наибольшие по модулю нормальные напряжения достигаются в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси x, при $|y| = y_{\max}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x| y_{\max}}{I_x} = \frac{|M_x|}{W_x}, \quad \text{где} \quad W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \tag{7}$$

Величина W_x называется *моментом сопротивления сечения при изгибе* (осевым моментом сопротивления).

Для сечения прямоугольной формы (рис. 21)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \quad \text{и} \quad \sigma_{\max} = \frac{6|M_x|}{bh^2}. \tag{8}$$

Сопоставим величины $\sigma_{\max}$ и $\tau_{\max}$ для балки прямоугольного сечения. По порядку величины $Q_y \sim F$ и $M_x \sim Fl$, где F — действующая на балку характерная сила, а l — длина балки. Тогда из (6), (8) получим

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} \sim \frac{h}{l} \ll 1.$$

Таким образом, касательные напряжения малы по сравнению с нормальными. Этот вывод справедлив и для стержней других форм поперечного сечения (исключение составляют тонкостенные стержни, когда возможно появление больших касательных напряжений).

► **Условия прочности балок.** Как правило, расчет на прочность для балок проводят по нормальным напряжениям с использованием условия прочности в форме

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leqslant [\sigma].$$

Если же материал стержня (например, дерево) плохо сопротивляется сдвиговым деформациям (срезу), то необходим расчет и по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_y|}{I_x} \left(\frac{S_x^{\text{отс}}}{b} \right)_{\max} \leqslant [\tau].$$

В случаях, когда материал, из которого изготовлен стержень, имеет различные допускаемые напряжения при растяжении $[\sigma^{\text{р}}]$ и сжатии $[\sigma^{\text{с}}]$, расчет на прочность проводят отдельно по растягивающим и сжимающим напряжениям:

$$\sigma^{\text{р}}_{\max} = \frac{|M_x| y^{\text{р}}_{\max}}{I_x} \leqslant [\sigma^{\text{р}}],$$

$$\sigma^{\text{с}}_{\max} = \frac{|M_x| y^{\text{с}}_{\max}}{I_x} \leqslant [\sigma^{\text{с}}],$$

где $y^{\text{р}}_{\max}$ и $y^{\text{с}}_{\max}$ — расстояния от оси x до наиболее удаленных от этой оси точек растянутой и сжатой частей поперечного сечения соответственно.

Как и при растяжении — сжатии или кручении, при расчете на прочность стержней, работающих на изгиб, решается какая-либо из трех задач:

1) проверочный расчет,
2) подбор сечения,
3) определение допускаемой нагрузки.

Все необходимые для расчета на прочность геометрические характеристики прокатных сечений (двутавр, швеллер и т.п.) приводятся в специальных таблицах, называемых сортаментом прокатной стали.

Пример. Для стальной двутавровой балки (№ 55) длиной $l = 3{,}2$ м (см. рис. 16, *б*) из условия прочности определить допускаемую нагрузку $[q]$ при $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. Опасным для рассматриваемой балки будет сечение в середине пролета, где возникнет максимальный изгибающий момент $M_x = ql^2/8$.

В сортаменте прокатной стали находим для двутавра момент сопротивления $W_x = 2000$ см^3.

Из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{ql^2}{8W_x} \leqslant [\sigma]$$

следует $q \leqslant 8W_x[\sigma]/l^2 = 250$ Н/м. Таким образом, $[q] = 250$ кН/м.

6. Сложное сопротивление

Сложным сопротивлением называются виды деформаций стержня, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает не менее двух отличных от нуля внутренних силовых факторов. Исключением является прямой поперечный изгиб, который рассматривается как простой вид деформации, несмотря на возникающие при этом два силовых фактора — изгибающий момент и поперечную силу, так как в подавляющем большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость ведутся без учета влияния поперечных сил, т.е. по одному силовому фактору — изгибающему моменту.

6.1. Косой изгиб

► **Определение.** При рассмотрении прямого поперечного изгиба предполагалось, что поперечное сечение симметрично относительно оси y. Оказывается, все результаты главы 5 справедливы и для сечения произвольной формы, если оси x и y являются *главными центральными осями инерции*, т.е. взаимно перпендикулярными осями, проходящими через центр тяжести сечения, для которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения. В дальнейшем в качестве осей x и y будут выбираться главные центральные оси.

Косым изгибом называется общий случай изгиба стержня (см. разд. 5.1), при котором в поперечном сечении возникают два изгибающих момента M_x и M_y и, быть может, поперечные силы Q_x, Q_y.

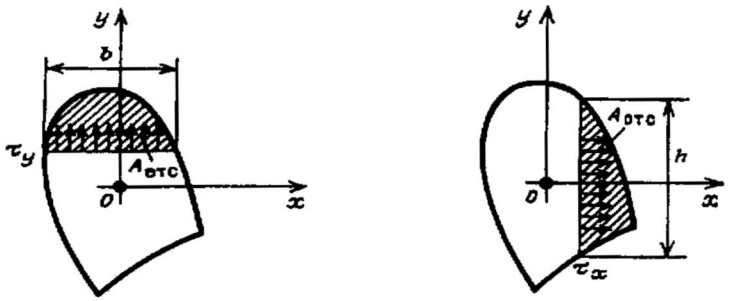


Рис. 22.

Пользуясь принципом независимости действия сил, можно определить нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения с координатами x, y по формуле

$$\sigma = -\frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y}, \tag{1}$$

которая является следствием формулы (4) гл. 5.

► **Нейтральная ось при косом изгибе.** Как и при прямом изгибе, в сечении существует нейтральная ось, в точках которой напряжения равны нулю. Ее уравнение

$$\frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = 0. \tag{2}$$

Перечислим некоторые свойства нейтральной оси при косом изгибе.

1. Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.

2. Нейтральная ось делит сечение на две части: в одной $\sigma > 0$, в другой $\sigma < 0$.

3. Нормальные напряжения в сечении изменяются прямо пропорционально расстоянию от нейтральной оси, достигая максимальных значений (по модулю) в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения.

Касательные напряжения в поперечном сечении (рис. 22) могут быть определены по формуле (5) гл. 5:

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x b}, \quad \tau_x = \frac{Q_x S_y^{отс}}{I_y h}.$$

Как и при прямом поперечном изгибе, касательные напряжения, как правило, играют второстепенную роль, поэтому условия прочности накладывают ограничения на максимальные нормальные напряжения.

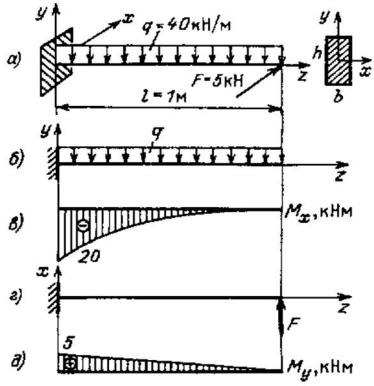


Рис. 23.

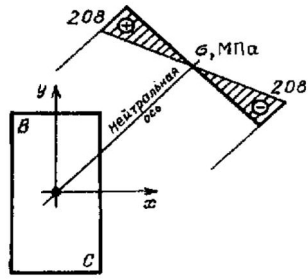


Рис. 24.

Пример. Вычислить максимальные нормальные напряжения в опасном сечении балки (рис. 23), испытывающей косой изгиб. Форма сечения — прямоугольная, $b = 6$ см, $h = 12$ см.

Решение. На рис. 23, *б*, *г* показаны схемы нагружения балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а на рис. 23, *в*, *д* — соответствующие эпюры изгибающих моментов M_x, M_y. Судя по эпюрам, опасным сечением является заделка, где $M_x = -20$ кНм, $M_y = 5$ кНм.

Для прямоугольного сечения $I_x = bh^3/12$, $I_y = hb^3/12$, и уравнение нейтральной оси (2) для опасного сечения принимает вид $-y + x = 0$.

Из расположения нейтральной линии (рис. 24) видно, что самыми опасными точками сечения являются точки B и C, как наиболее удаленные от нейтральной оси. Подставляя их координаты в (1), вычислим напряжения в этих точках

$$\sigma_B = -\frac{M_x y_B}{I_x} - \frac{M_y x_B}{I_y} = 208 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = -\frac{M_x y_C}{I_x} - \frac{M_y x_C}{I_y} = -208 \text{ МПа}.$$

На рис. 24 изображена эпюра σ, характеризующая изменение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном нейтральной оси.

6.2. Внецентренное растяжение или сжатие

► **Внецентренным растяжением или сжатием** называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечном сечении возникают продольная сила N и изгибающие моменты M_x, M_y (и, быть может, поперечные силы Q_x, Q_y).

Продольная сила и изгибающие моменты могут рассматриваться как результат воздействия на стержень внецентренно приложенной силы $F = N$ (рис. 25). Именно поэтому такой вид сложного сопротивления называют внецентренным растяжением или сжатием.

Изгибающие моменты связаны с координатами точки приложения силы F соотношениями $M_x = -Fy_F$, $M_y = -Fx_F$. Поэтому из (1), формулы (1) гл. 3 и принципа независимости действия сил для нормальных напряжений в произвольной точке любого поперечного сечения с координатами x, y получим

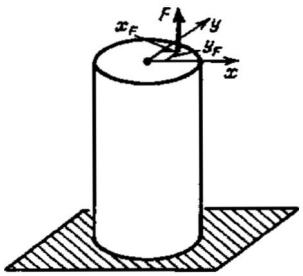


Рис. 25.

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = \\ = F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y}{I_x} + \frac{x_F x}{I_y}\right). \quad (3)$$

► **Нейтральная ось при внецентренном растяжении или сжатии.** Уравнение нейтральной оси поперечного сечения, в точках которой напряжения равны нулю, имеет в данном случае вид

$$\frac{1}{A} + \frac{y_F y}{I_x} + \frac{x_F x}{I_y} = 0. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что нейтральная ось не проходит через центр тяжести сечения. Остальные свойства такие же, как и при косом изгибе. Дополнительно укажем еще одно свойство нейтральной оси при внецентренном растяжении или сжатии: нейтральная ось не пересекает той четверти сечения, в которой приложена сила F.

► **Ядро сечения.** Положение нейтральной оси, как видно из уравнения (4), зависит от координат точки приложения силы F. Если точка приложения силы F располагается достаточно близко к центру тяжести сечения, в области, которая называется *ядром сечения*, то нейтральная ось проходит за пределами поперечного сечения, т.е. все точки сечения испытывают нормальные напряжения одного знака. На рис. 26 показаны ядра для прямоугольного и кругового сечений.

Условия прочности при внецентренном растяжении или сжатии имеют вид ограничений на максимальные нормальные напряжения.

Пример. Вычислить максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения при $b = 6$ см, $h = 12$ см (рис. 27). Точка K приложения силы $F = 144$ кН имеет координаты $x_F = -1$ см, $y_F = 6$ см (рис. 27, *б*).

Решение. Вычислим геометрические характеристики сечения:

$$A = bh = 72\,\text{см}^2,$$
$$I_x = bh^3/12 = 864\,\text{см}^4,$$
$$I_y = hb^3/12 = 216\,\text{см}^4.$$

Уравнение нейтральной оси (4) принимает вид $1 + y/2 - x/3 = 0$. Из ее расположения (рис. 27, *б*) видно, что B и C — наиболее напряженные точки

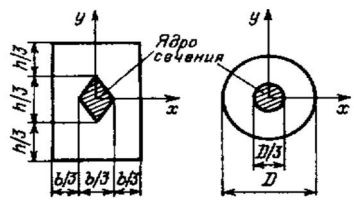


Рис. 26.

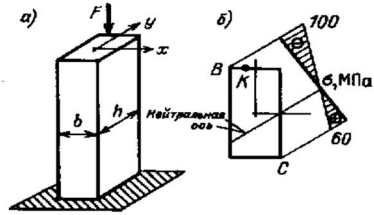


Рис. 27.

сечения. Подставляя в (3) их координаты, находим напряжения этих точках (силу F следует взять со знаком «минус», так как ее направление противоположно показанному на рис. 25):

$$\sigma_B = -F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y_B}{I_x} + \frac{x_F x_B}{I_y}\right) = -100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = -F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y_C}{I_x} + \frac{x_F x_C}{I_y}\right) = 60 \text{ МПа}.$$

На рис. 27, *б* построена эпюра σ, показывающая закон распределения нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном нейтральной оси.

6.3. Изгиб с кручением

► **Изгибом с кручением** называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает крутящий момент M_z, изгибающие моменты M_x, M_y и, быть может, поперечные силы Q_x, Q_y.

Будем рассматривать стержни кругового сечения. Ввиду его симметрии, любые две взаимно перпендикулярные центральные оси сечения являются главными. Поэтому их всегда можно выбрать так, чтобы в рассматриваемом сечении суммарный изгибающий момент имел только одну составляющую, например M_x.

Наибольшие по модулю нормальные напряжения в сечении определяются по формуле (7) гл. 5 для прямого изгиба

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \qquad (5)$$

и достигаются в точках B и C, наиболее удаленных от нейтральной оси x (рис. 28).

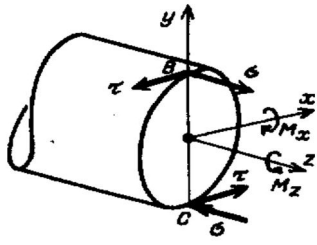


Рис. 28.

По формуле (5) гл. 4 находим наибольшие касательные напряжения при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{|M_z|}{W_p}. \qquad (6)$$

Они возникают в точках границы сечения, в том числе и в точках B и C.

Таким образом, точки B и C наиболее опасны. В их окрестности реализуется плоское напряженное состояние, являющееся комбинацией одноосного растяжения (или сжатия) и чистого сдвига.

► **Условия прочности Сен-Венана и Мизеса.** В отличие от всех видов деформаций, рассмотренных ранее, в данном случае могут быть существенны как σ, так и τ, поэтому возникает вопрос об условии прочности для такого вида напряженного состояния. Существуют различные теории прочности, отвечающие на этот вопрос. Чаще всего применяют условия прочности Сен-Венана

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma]$$

или Мизеса

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant [\sigma].$$

Используя соотношение между моментами сопротивления $W_p = 2W_x$, а также учитывая, что при произвольной ориентации осей x и y в формуле (5) величину M_x следует заменить на суммарный изгибающий момент $M_и = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, условия прочности приводятся к следующему окончательному виду:

$$\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_x} \leqslant [\sigma] \qquad \text{(Сен-Венан)},$$

$$\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0{,}75M_z^2}}{W_x} \leqslant [\sigma] \qquad \text{(Мизес)},$$

где $W_x = \pi D^3/32$ — осевой момент сопротивления для круга диаметра D.

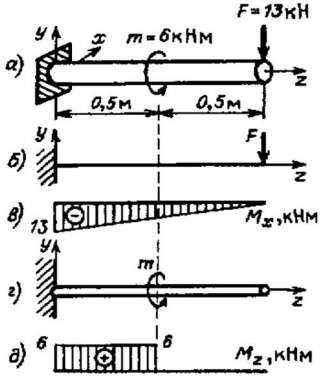


Рис. 29.

Пример. Из условия прочности Мизеса подобрать диаметр стального вала, испытывающего изгиб с кручением (рис. 29). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 150$ МПа.

Решение. Схема нагружения вала в вертикальной плоскости и соответствующая эпюра изгибающего момента M_x даны на рис. 29, *б*, *в*.

Схема нагружения вала внешним моментом и эпюра возникающих крутящих моментов M_z показаны на рис. 29, *г*, *д*.

Наиболее опасно сечение в заделке, где возникают максимальный изгибающий $M_x = 13$ кНм и крутящий $M_z = 6$ кНм моменты.

Из условия прочности

$$\frac{32\sqrt{M_x^2 + 0{,}75M_z^2}}{\pi D^3} \leqslant [\sigma]$$

находим: $D \geqslant 0{,}098$ м. Таким образом, можем принять $D = 10$ см.

7. Устойчивость сжатых стержней

7.1. Критическая сила

В разд. 1.1 уже отмечалось, что некоторые состояния равновесия тел или систем оказываются неустойчивыми, т.е. такими, при которых незначительные механические воздействия могут привести к существенным отклонениям от этих состояний. Каждое из этих состояний равновесия характеризуется определенным значением нагрузки, отделяющим области устойчивого и неустойчивого равновесия.

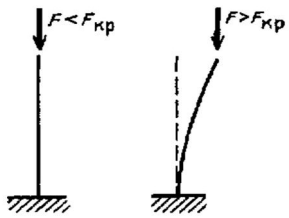


Рис. 30.

Применительно к сжатому стержню (рис. 30) оказывается, что при величине сжимающей силы F, не превышающей некоторого значения, называемого *критической силой* $F_{кр}$, прямолинейная форма равновесия стержня устойчива. Если же $F > F_{кр}$, то прямолинейная форма равновесия неустойчива, и стержень стремится принять иную, устойчивую форму равновесия с криволинейной осью.

Сжимающие напряжения $\sigma_{кр} = F_{кр}/A$, соответствующие критической силе, называются *критическими напряжениями*.

7.2. Формула Эйлера

Таким образом, при $F > F_{кр}$ решение задачи о равновесии стержня неединственно. Анализ условий этой неединственности позволяет получить формулу для величины $F_{кр}$.

Рассмотрим шарнирно опертый центрально сжатый стержень в слегка изогнутом состоянии (рис. 31). Изгибающий момент в поперечном сечении стержня равен $M = -Fv$, где прогиб $v(z)$ задает криволинейную ось стержня. Кривизна k изогнутой оси при малых прогибах стержня ($v/l \ll 1, v' \ll 1$) равна

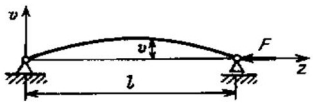


Рис. 31.

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \approx \frac{d^2v}{dz^2}.$$

При анализе деформации изгиба была получена формула (3) гл. 5, связывающая кривизну и изгибающий момент,

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

в которой согласованы правила знаков для кривизны $k = 1/\rho$ и момента M.

Отсюда приходим к дифференциальному уравнению изогнутой оси стержня

$$v'' = -a^2 v, \tag{1}$$

где обозначено $a^2 = F/(EI)$.

Граничные условия учитывают закрепления концов стержня:

$$v(0) = v(l) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) при граничных условиях (2) имеет очевидное тривиальное решение $v = 0$, соответствующее прямолинейной форме равновесия. Нас интересуют ненулевые решения.

Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$v = C_1 \sin(az) + C_2 \cos(az).$$

Из первого граничного условия следует, что $C_2 = 0$, а из второго — $C_1 \sin(al) = 0$. Сокращая на $C_1 \neq 0$, приходим к равенству

$$\sin(al) = 0,$$

которое будет выполнено, если $al = \pi n$ или

$$F = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Таким образом, установлено, что если величина сжимающей силы F принимает дискретные значения, даваемые формулой (3), то наряду с прямолинейным возможны искривленные состояния равновесия стержня, имеющие форму синусоиды

$$v = C_1 \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right).$$

Из (3) при $n = 1$ получаем *формулу Эйлера* для критической силы

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{4}$$

Более точная теория показывает, что неоднозначность форм равновесия имеет место при всех силах F, превышающих эйлерову силу (4).

7.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы

Можно рассмотреть аналогичные задачи для других случаев закрепления концов стержня (рис. 32). Их решение показывает, что критическую силу можно определять по формуле, подобной (4):

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \tag{5}$$

введя понятие *приведенной длины* μl и *коэффициента приведенной длины* μ.

Величину μl можно истолковать как часть длины стержня, на которой укладывается полуволна синусоиды, соответствующей его искривленной оси. Значения коэффициента μ для некоторых случаев закрепления стержня даны на рис. 32.

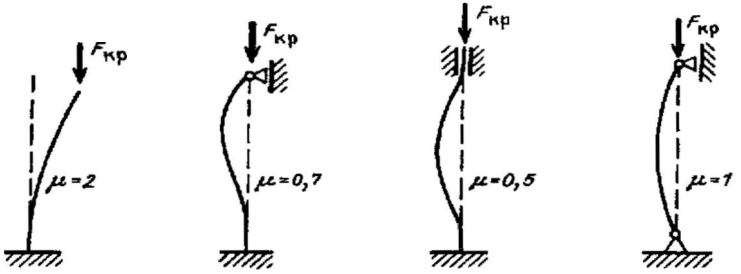


Рис. 32.

Пример. Найти критическую силу для стального стержня длиной $l = 4$ м (рис. 32), жестко заделанного одним концом. Сечение стержня — двутавр № 22.

Решение. По сортаменту находим для данного двутавра моменты инерции $I_x = 2550\,\text{см}^4$, $I_y = 157\,\text{см}^4$. Естественно, что стержень теряет устойчивость в плоскости наименьшей жесткости, поэтому следует выбрать наименьший момент инерции $I_{\min} = I_y = 157\,\text{см}^4$.

Для заданного закрепления коэффициент $\mu = 2$, модуль упругости стали $E = 210$ ГПа. По формуле Эйлера (5) получим $F_{\text{кр}} = \dfrac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = 50{,}8$ кН.

7.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Критические напряжения, соответствующие критической силе (5), равны

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l/i)^2},$$

где $i = \sqrt{I/A}$ — радиус инерции сечения.

Введем обозначение $\lambda = \mu l/i$. Тогда предыдущая формула принимает вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (6)$$

Величина λ называется *гибкостью стержня*.

Из (6) следует, что с уменьшением гибкости значение $\sigma_{кр}$ неограниченно возрастает. Ясно, что формулой (6) нельзя пользоваться при слишком больших напряжениях, так как материал стержня в этих условиях не подчиняется закону Гука.

Величина наибольшего напряжения, при котором справедлив закон Гука, называется *пределом пропорциональности* $\sigma_{пц}$.

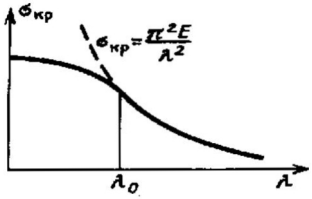


Рис. 33.

Таким образом, пределы применимости формулы Эйлера устанавливаются неравенством $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$ или $\pi^2 E/\lambda^2 < \sigma_{пц}$. В результате получим $\lambda > \lambda_0 = \pi\sqrt{E/\sigma_{пц}}$.

Зависимость $\sigma_{кр}$ от λ при $\lambda < \lambda_0$ находят экспериментальным путем. На рис. 33 схематически сплошной линией показан полный график зависимости $\sigma_{кр}(\lambda)$. При очень малых гибкостях стержень при сжатии теряет прочность, поэтому критические напряжения практически равны соответствующим напряжениям потери прочности.

7.5. Расчеты сжатых стержней на устойчивость

На практике необходимо обеспечить устойчивую работу сжатых стержней, поэтому напряжения в стержне не должны превосходить критических с некоторым запасом:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leqslant \frac{\sigma_{кр}}{n}, \qquad (7)$$

где n — коэффициент запаса.

Для удобства вводится *коэффициент продольного изгиба* $\varphi = \sigma_{кр}/(n[\sigma])$. Тогда условие (7) принимает вид

$$\frac{F}{A} \leqslant [\sigma]\varphi. \qquad (8)$$

Зависимости $\varphi(\lambda)$ для разных материалов приводятся в справочниках в виде таблиц.

Пользуясь условием (8), можно решать те же задачи, что и при расчете на прочность (см. разд. 3.3).

Список литературы

Беляев Н. М. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1976. — 607 с.

Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.

Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1989. — 622 с.

Иосилевич Г. Б. и др. Прикладная механика. — М.: Машиностроение, 1985. — 575 с.

Кинасошвили Р. С. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1976. — 607 с.

Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 711 с.

Сопротивление материалов. / Под ред. Писаренко Г.С. — Киев: Вища школа, 1986. — 775 с.

Сопротивление материалов. / Под ред. Смирнова А.Ф. — М.: Высшая школа, 1975. — 480 с.

Степин П. А. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1988. — 366 с.

Терегулов И. Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1984. — 472 с.

Тимошенко С. П. Механика материалов. — М.: Мир, 1976. — 669 с.

Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Высшая школа, 1979. — 318 с.

Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.

Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad.—СПб.:БХВ-Петербург, 2004.—512 с.

Основы общей методики конструирования

Глава 1

РАЗЛИЧНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ЗАДАЧИ

Когда хотят заняться новым материалом, познание и применение которого требуют основательной научной проработки, не всегда целесообразно сразу же начинать с теоретических выкладок или абстрактных соображений. Зачастую лучше сначала на примере составить себе приближенное представление о материале и о методике ознакомления с ним. При этом становится ясным, что методов проработки существует много, но логически обоснованные методы имеют существенные преимущества перед опирающимися лишь на интуицию.

Рассмотрим в качестве примера конструирование одной детали. Пусть поставлена задача: спроектировать двойной рычаг и сделать его рабочий чертеж. Рычаг должен качаться вокруг цапфы *A* (рис. 1), которая укреплена в стенке. Рычаг, кроме того, должен иметь отверстие *B* и плоскость *C* для свинчивания с другой деталью. Угол качания рычага приблизительно $\pm 3°$. Прилагаемые к рычагу силы не столь велики, чтобы требовался расчет на прочность. Заштрихованное крестообразно пространство должно быть свободным. Других подробностей не дано.

Конструктор (в зависимости от своего опыта и специальности) более или менее быстро набросает эскиз, который отвечает названным условиям и в котором отражается возникшая у него идея решения. Эти эскизы могут быть чрезвычайно разнообразны (рис. 2—5).

Эскиз на рис. 2 мог бы возникнуть у специалиста по тяжелому машиностроению; он изображает весьма стабильную деталь, спрессованную из стали, кованную

или литую. Рис. 3 мог быть сделан рукой инженера, который работал преимущественно в опытном производстве и привык к изготовлению малого количества или

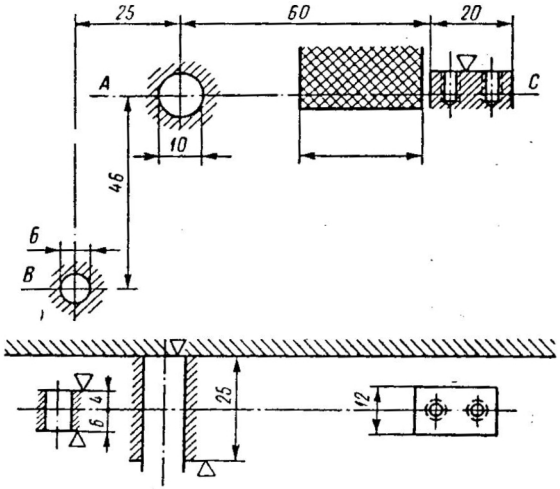


Рис. 1. Эскиз задания на двойной рычаг

даже единичных деталей и стремится главным образом к тому, чтобы осуществить свою конструкцию наипростейшим способом и из ходового материала. Рис. 4 мог бы

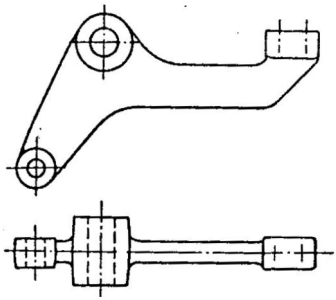


Рис. 2. Эскиз рычага для тяжелого машиностроения

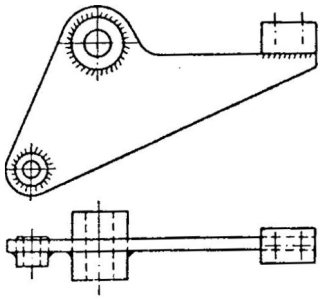


Рис. 3. Эскиз рычага для штучного производства

быть выполнен точным механиком, имеющим дело в основном с малыми усилиями, поэтому его эскиз производит впечатление изящной конструкции. Рис. 5 характеризует разработчика легких клееных конструкций. Он

исходил из того, что для передачи усилий достаточно двух тонких ребер, которые можно вырубить почти без отходов из полосы шириной b. Небольшой заштрихованный треугольник изображает излишек материала. Полоска материала, заштрихованная крестообразно, с первого взгляда представляется ненужной. Конструктор однако использует ее для придания жесткости обоим ребрам.

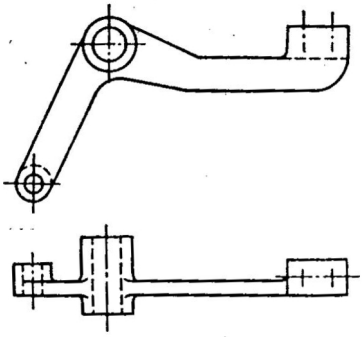


Рис. 4. Эскиз рычага для точного механизма

Почти во всех этих эскизах предусматривается, что отверстия, боковые плоскости и плоскость для свинчивания отрабатываются после выполнения заготовки.

Каков был ход мыслей при создании описанных эскизов, точно определить затруднительно. Он мог протекать очень разнообразно. Но все же можно установить, какие

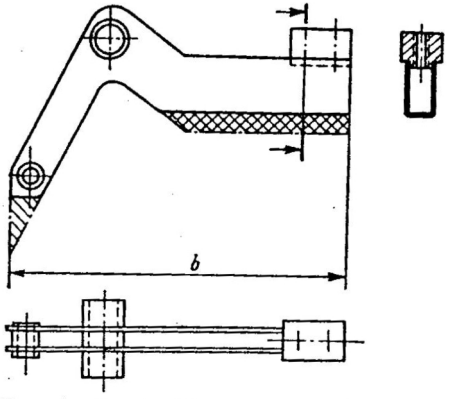


Рис. 5. Эскиз рычага для легкой конструкции

мысли при решении этой задачи следует считать существенными, а возможно, даже решающими.

Были заданы три элемента подлежащего конструированию рычага A, B и C и их взаимное расположение. Присоединяемые в точках B и C детали машины нас не

интересуют: их взаимные движения определены однозначно. Речь идет о том, чтобы соответствующим образом передать движение от B к C или наоборот. Для этого необходимо три данных элемента A, B и C жестко соединить друг с другом. Качество передачи движения будет тем лучше, чем жестче рычаг. Таким образом, основы задания можно представить рис. 6, символически выразив в нем вышеназванные условия. Для соединения элементов A, B и C существует несколько вариантов, заданных расположением их в форме треугольника.

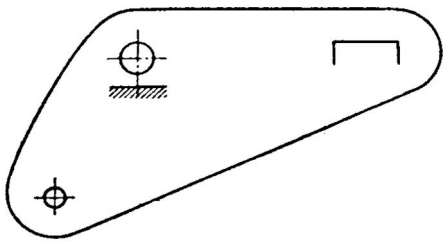


Рис. 6. Эскиз для всех возможных решений по рис. 1

Рис. 7, *а* показывает, что число возможных соединений ограничивается пятью. Им соответствуют пять принципиально отличных друг от друга конструкций (рис. 7, *б*).

Видно, что все решения, данные на рис. 2—5, соответствуют второй конструкции. И это понятно, ибо уже в формулировке задания (сконструировать двойной рычаг) и в условии качания вокруг оси в точке A заложена эта идея. Из сравнительной оценки пяти эскизов на рис. 7, *б* ясно, что наибольшими преимуществами обладает пятый вариант. Теперь надлежит исследовать разнообразные возможности реализации этих пяти решений с точки зрения свойств и стоимости материала, методики изготовления, веса, инструментария, стоимости приспособлений, зарплаты и т. д. Окончательное решение конструкции рычага из прессованного синтетического материала имеет вид, изображенный на рис. 8. Другое возможное решение изображено на рис. 9. Здесь легкость конструкции обеспечивается за счет ее предельно малой жесткости. Будет ли это исполнение отвечать условиям точности движения и передачи усилий, пред-

ставляется сомнительным; кроме того, трудно будет выдержать допуски и требования к отделке поверхности. Тем не менее это наиболее экономичное решение, позволяющее применить почти безотходную штамповку. На

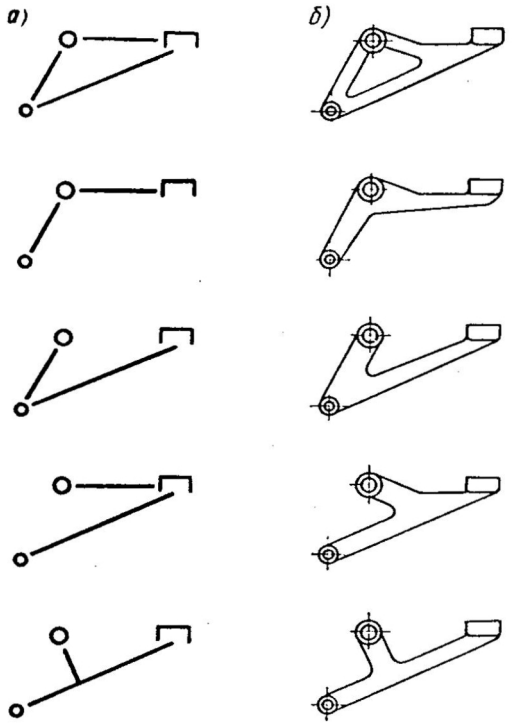


Рис. 7. Пять принципиально возможных конструкций двойного рычага: *а* — схемы, *б* — конструктивное оформление

рис. 10 показаны две склеиваемые или свариваемые листовые детали в развертке.

Самым поразительным является то, что сначала последнее из возможных решений на рис. 7 не нашло применения, в то время как именно оно и допускает самые различные исполнения (рис. 8 и 9). Теперь возникает вопрос, какими правилами руководствовался конструктор при выборе окончательного варианта. Ответ на это дается в гл. 5—10. Предварительно необходимо остановиться

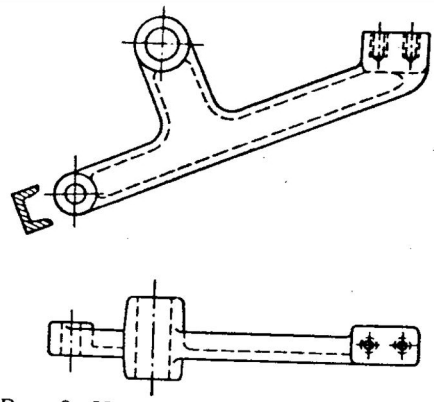


Рис. 8. Наилучшее решение для двойного рычага из дуропласта

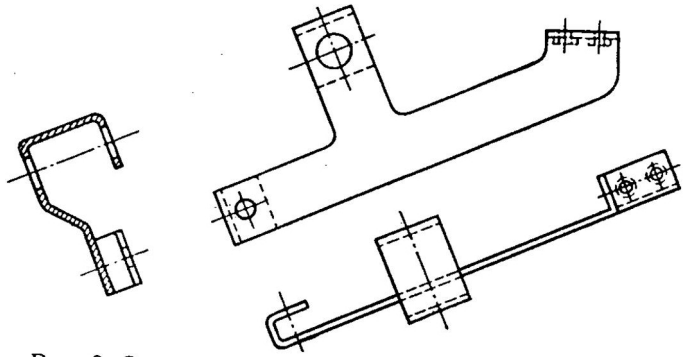


Рис. 9. Экономичное решение для легкой конструкции

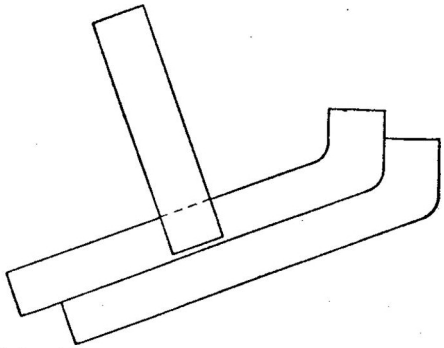


Рис. 10. Раскрой листа для решения по рис. 9

на общих вопросах: «Что такое конструирование?», «Основы творческой деятельности» и «Организующая систематизация». Это будет способствовать лучшему знакомству с материалом данной книги, с предпосылками, которые определяют научно-обоснованный процесс конструкторской деятельности, и сущностью творческой работы инженера.

Глава 2

ЧТО ТАКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ?

При рассмотрении вопроса мы исходим из общей постановки задачи: сконструировать произвольно выбранное техническое устройство. Понятие техническое устройство имеет очень широкий смысл. Под ним подразумеваются самые разнообразные предметы от маленьких и простых (как, например, винт или клин) до инструментов, приспособлений, небольших узлов и сложнейших и огромнейших машин, приборов, аппаратов, автомобилей, подъемников и транспортных средств всех видов, сооружений и, наконец, целых промышленных установок. Созданию чертежей этих сложных объектов должна предшествовать еще разработка проектов и эскизов. В некоторых случаях необходимы специальные исследования. Тогда время разработки еще больше удлиняется и превосходит время собственно конструирования.

2.1. Постановка задачи

В процессе конструирования мы должны наглядно изобразить нечто, что предметно еще не существует, а является лишь продуктом нашей умственной деятельности. Это и есть наша творческая задача в области техники.

На первых порах будет достаточным считать, что конструирование творчески определяет техническое устройство. Создаваемая при этом документация должна содержать все данные, необходимые для материального воплощения технического устройства. Необходимо, чтобы результат этой творческой деятельности соответствовал

уровню развития техники. Б[illegible] определение конструирования мы дадим в [illegible].

Условия окружающего нас мира заставляют нас работать рационально, т. е. придавать свободному ходу мыслей целесообразное, логичное направление. Техническое проектирование сегодня настолько развито, что всякая творческая инженерная работа является в большинстве случаев работой коллектива. Само собою разумеется, что организация этой коллективной работы должна иметь по возможности целесообразные и экономичные формы. Впрочем, организационных вопросов мы коснемся лишь слегка (см. п. 12. 1), ибо в нашей книге они являются второстепенными.

Нас интересует не формальный ход работы при конструировании; мы хотим попытаться рационально сформировать процесс творческого мышления в этом процессе. При этом возникает вопрос, возможна ли вообще рациональная методика конструкторской деятельности. Разделим полезную умственную деятельность на формально-умственную и творчески-умственную. Можно считать, что на формально-умственную деятельность, если она будет следовать определенной методике, способен любой работник умственного труда. Возможно ли создание подобной методики для творчески-умственной деятельности? На этот вопрос мы пока не ответим. Оставим также открытым вопрос, возможно ли на творчески-умственную деятельность повлиять таким образом, чтобы она не выродилась в беспочвенное фантазирование, а была бы направлена по благоприятному пути.

Заголовок «постановка задачи» подразумевает в узком смысле конструирование. Предваряя дальнейшее рассмотрение этого вопроса в п. 4.2, следует сказать, что эта постановка касается значительно более широкого вопроса вплоть до общей трактовки и решения технических проблем.

2.2. Данные, которые следует принимать во внимание

Для достижения поставленной цели необходимо проанализировать творческую деятельность по ее отдельным этапам и разработать для них подходящую методику.

Мы должны при этом рационально использовать имеющиеся познания из всех областей техники и смежных

с ними области [illegible], а также учитывать объективные факторы. Отметим важнейшие из них.

1. *Данные, накладывающие ряд ограничений.* Эти ограничения задаются определенными условиями задачи, но существуют и независимо от нее. Так, нам никогда не предоставляется неограниченное время. Всегда лимитируется стоимость как конструкторских работ, так и конструируемого изделия. Численность коллектива, помогающего нам при разработке, будет, как и общий уровень его основных и специальных познаний, всегда ограничена. Мастерские, которые в ходе проектирования должны проводить опыты, а затем осуществить изготовление, могут быть не укомплектованы приспособлениями и вспомогательными средствами.

2. *Природные взаимосвязи.* Они действуют частью как благоприятные, частью как тормозящие факторы. Из них мы можем и должны использовать три, имеющие особое значение для творчески-умственной деятельности конструктора.

а) Структурные условия. Каждый предмет, каждое понятие, каждая идея по форме, содержанию и действию проявляются через свои элементы. Функция предмета является результатом его структурных и энергетических свойств. Последние обусловливаются элементами, составляющими предмет, и характером их взаимного соединения.

б) Существование ошибок. Между всяким замыслом и его материальным воплощением стоит ошибка в философском смысле слова. Действительно происшедшее свободно от ошибок, т. е. причинно и объективно реально. Мысль же обременена погрешностью, т. е. отклоняется от существующей или будущей действительности даже при самом тонком проникновении в проблему. С этим более или менее значительным отклонением постоянно приходится иметь дело (подробнее см. гл. 8).

в) Стремление к преодолению. В процессе развития каждый предмет и каждое явление вытесняется чем-нибудь новым и обречено на отмирание. Новые идеи заменяют уже отжившие.

3. *Свойства нашего организма, наши познавательные и мыслительные способности.*

Мы должны принимать во внимание цели, ради которых совершается процесс человеческого мышления. При

проектной умственной деятельности мы должны суметь составить представление о действительности в будущем — в отличие от исследовательской умственной деятельности, при которой прежде всего необходимо создание представления о действительности в прошлом и настоящем.

Не вдаваясь в подробности, которые будут обсуждаться в гл. 3, сделаем предварительно следующие выводы:

1) из множества отдельных наблюдений и отдельных сведений можно лишь тогда извлечь применимые с пользой общие знания, если абстрагироваться от многообразия явлений и сконцентрировать мысли лишь на самом существенном в некоторой определенной группе явлений;

2) в области этого существенного следует, принимая во внимание вышеназванные объективные данные, выбрать из имеющихся специальных сведений подходящие «строительные камни» и их рационально комбинировать.

Перефразируя слова В. И. Ленина, можно сформулировать: «каждый конструктор должен — точно так же, как и все остальные творческие умственные работники — проходить путь от живых наблюдений к абстрактному мышлению, а от него к практическому исполнению».

2.3. Проведение работы

Для творческой деятельности (в том числе и для конструирования) недостаточно лишь одних знаний и знакомства с где-то однажды начерченным решением («может быть это можно сделать так же?»). Конструирование не является преимущественно искусством, как это часто утверждают; оно в первую очередь — логический мыслительный процесс. Кому способность к конструированию как к «искусству» не свойственна, тот будет добиваться результатов посредством логического, целенаправленного мыслительного процесса. Ему нужно хорошо знать, как последовательно и уверенно находить лучшее или хотя бы удовлетворительное решение. Многие высокоодаренные и опытные конструкторы найдут здесь то, чему они, сами того не сознавая, уже давно следовали. Но лучше все же ввести этот процесс в рамки сознательных действий, которым можно обучить начинающих и малоопытных.

Хорошая технико-конструкторская творческая работа немыслима без овладения технической механикой. В этой области как выдающийся исследователь и педагог изве-

стен Людвиг Фёпплъ. Он сказал однажды: «В качестве первого умственного акта ученый должен создать мысленную модель, в которой по возможности следует учесть все важнейшие свойства главной проблемы и опустить все побочные и не важные. Этот умственный процесс абстракции является, очевидно, решающим для всего дальнейшего» [6]. Из этой мысленной модели он, с одной стороны, развивает теорию, на основе которой находит решение, с другой — ставит опыт для оценки этого решения, внося при этом необходимые коррективы в теорию.

Этот путь в точности соответствует пути исследователя. Но он может быть легко принят и для конструктора. Трудность лежит в самом начале этого набросанного Л. Фёпплем пути — при переходе от рассматриваемой задачи к мысленной модели и необходимого при этом абстрагирования. Однако для преодоления этой трудности он никаких практических указаний не дает.

Границы достижимого при обучении творческой работе пока еще необозримы. На первых порах выработаны указания по возможному упорядочению отдельных этапов обдумывания и расположению их в логической последовательности. В этой области рационализации творческой деятельности еще много возможностей для открытий.

2.4. Интуиция или логика?

В области творчества, где идеям и фантазии должно быть предоставлено достаточно простора и где гениальные мысли В. Сименса, Т. А. Эдисона и других исследователей производили перевороты, требуется систематизация. Поэтому возникает вопрос, возможна ли творческая работа без интуиции, имеет ли последняя преимущество перед логикой или ее роль носит лишь второстепенный характер.

Работать интуитивно означает примерно то же, что и работать, следуя идее, которая случайно пришла человеку в голову. Но «зажигательная идея» или «гениальный случай» в большинстве случаев опираются на простой и очень ясный ход мыслей. Таким образом, в действительности речь идет не о случае, а о результате сопоставления ранее сделанных и удержанных в мозгу наблюдений.

От интуиции можно и не отказываться, но ее следует контролировать. Хороший конструктор, у которого также проявляется и дух изобретательства, будет постоянно проверять свои результаты до тех пор, пока не установит,

что пришел к лучшему решению. В сложных задачах систематизация неизбежна, если возможностей работника или коллектива недостаточно, чтобы одновременно обозревать все взаимосвязи (функции) будущей конструкции.

Возникновение идей не обязательно может обусловливаться какими-то причинами. Поле решений (по Х. Ломанну [9]) может быть обследовано систематически и затем обработано. Этим также подготовляется возникновение идей и нахождение элементов решений может стать причинно-логическим процессом. Хотя комбинирование элементов решений не всегда производится чисто причинно, применение методики конструирования, вынуждающей искать комбинации этих элементов, не только делает мышление более плодотворным, но и стимулирует более скорое возникновение лучших идей.

Х. Ломанн по этому поводу говорит: «Идея определенным образом связывает опыты или элементы решений». При возникновении идеи новым именно и является специфическая связь известных элементов; тогда и говорят, что идея нова. Процесс поиска новых связей элементов решений может оказаться более экономичным, чем ожидание возникновения идеи. С другой стороны, своевременно возникшая идея дает больший экономический эффект, чем длительный логический процесс. Таким образом, нельзя предсказать, какой путь экономичнее, но ожидание идеи безусловно менее надежно.

Итак, бессмысленно продолжать дальше спор о преимуществах логики и интуиции. Обе имеют свои достоинства, и оптимум может быть достигнут при их взаимодействии.

Интересно познакомиться с новейшим высказыванием англичан по поводу возможностей подготовки конструкторов [11]. Возникающие в их практике проблемы схожи с нашими. Но у них отсутствует стремление к основательному размышлению о сущности творческой работы. Поэтому они приходят к спокойному, но определенно неудовлетворительному заключению: если не говорить об академическом уровне, то конструированию нигде нельзя научиться, а можно лишь натренировать врожденные способности. На такой основе вряд ли можно ожидать существенного прогресса в пробуждении способностей, скрытых в людях.

ОСНОВЫ ТВОРЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В последующем рассмотрении вопроса мы исходим из диалектической формы взаимосвязи, признавая прежде всего причинность — связь причины и последующего действия.

Возможными являются все действия. Но лишь те возможности будут реализованы, для которых созданы условия и имеются объективные закономерности.

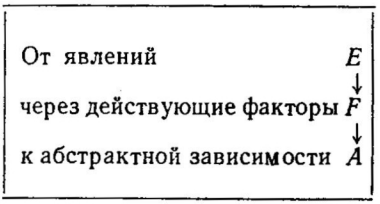


Схема 1. Признанный путь исследований

Целесообразно исходить из общности и различий исследования и проектирования. Исследование, которое ставит целью преимущественно научное познание, служит открытию объективных закономерностей. Научно-техническое проектирование имеет целью создание новых функций, следовательно, создание новых связей. Для этого требуется мышление, направленное на еще не существующее, вновь придумываемое техническое устройство.

Исследование (схема 1) исходит из явлений E — как результата действия существующей, более или менее разветвленной функциональной цепи. При исследовании предпринимается анализ явлений для того, чтобы получить представление об отдельных действующих факторах F, вызвавших явление. Наконец, в процессе исследования хотят обнаружить зависимости, установить, почему и на основании каких закономерностей действующие факторы приводят именно к наблюдаемому явлению. Ответ должен быть выражен по возможности в обобщенной абстрактной форме A, чтобы его можно было распространить на все по сути схожие, но по форме различные события.

При техническом проектировании в рамках некоторой ограниченной задачи ищут функционирующие элементы FE[1] для создания функциональной цепи (схема 2), при помощи которой могут быть вызваны определенные явления E. При этом одни и те же желаемые явления могут быть получены применением различных функционирующих элементов, действующих в составе различных функциональных цепей. Эта общность всех подобных функциональных цепей может быть выражена лишь в форме

От абстрактно сформулированного задания (основного принципа)	A
	↓
через функционирующие элементы (элементы решения)	FE
	↓
к вызывающей желаемое явление функциональной цепи (рабочему принципу)	E

Схема 2. Творческий путь технической разработки

абстракции A. И поэтому лишь она может служить исходным пунктом всех мыслимых решений некоторой задачи проектирования.

Естественно, что не всегда исследование и проектирование разграничены так строго. Одна область часто вторгается в другую и дополняет ее. Основной же факт остается в силе: исследование направлено от явления к познанию его сущности; проектирование направлено от сущности задачи к явлению, которое желают вызвать.

Анализ, синтез и абстракция являются важнейшими компонентами мышления независимо от того, направлено оно на настоящее или на будущее. Анализ отделяет существенные свойства от несущественных, и когда явления, скрывающие за собой существенное, выделяются и исключаются из рассмотрения, то анализ переходит в абстракцию. Этот процесс всегда является исходным при решении всякого рода проблем.

Если далее предположить, что все операции и возможности, которые могут быть использованы при решении задачи, известны, то на первых порах еще неясно, какая

[1] Под этим термином подразумеваются узлы, детали или части деталей, которые непосредственно участвуют в выполнении функции технического устройства. (*Прим. перев.*)

из этих возможностей открыта и наиболее благоприятна для данной специальной задачи. Процесс выбора здесь идет параллельно с синтезом системы из выбранных элементов и анализом условий задачи. Следовательно, необходимо найти методы для анализа задачи, абстрагирования и мобилизации научных сведений, полезных для решения.

«Внутренние условия» — «индивидуальные точки зрения» должны приниматься во внимание, но на них не распространяются общие закономерности и они вряд ли могут быть включены в методику (во всяком случае занять в ней место, соответствующее их влиянию). Различия в формулировках условий задачи на всех стадиях процесса мышления, в которых существенные и несущественные условия выражены с разной силой, делают ее более легкой или трудной для разных людей. В зависимости от уровня и объема знаний задачи будут разрешены лучше или хуже.

Физико-технические знания являются главным фактором, влияющим на нахождение решения. Имеет также большое значение и хорошее знание исходных данных задачи. Поэтому необходимо выяснить, в чем знания (в связи с задачей и ее решением) еще несовершенны или недостаточны.

В процессе мышления мы исходим из некоторых восприятий или ощущений, непосредственно связанных с постановкой вопроса или ею возбужденных. Путем сравнения или комбинирования ощущений, т. е. при помощи мышления, мы можем составить суждение *a* (схема 3) об ощущениях, из которых мы исходили. Процесс познания, относящийся к данному предмету, завершен; он может быть отнесен к прошедшему или настоящему.

Если мы теперь добавим другие восприятия и представления, то путем их сравнения получим второе суждение *b*. Из обоих суждений мы можем сделать вывод, который содержит как реальную, так и представляемую части. Этот вывод несет в себе, таким образом, и будущее. Он лишь тогда дает реальное отображение процессов или предметов, когда исходные элементы для суждения *b* уже осуществлены. В действительности процессы, конечно, существенно сложнее, чем показано на схеме 3, так как ощущения имеют сложный характер.

Суждения появляются как результат [illegible] связей между какими-либо предметами и процессами. Например, камень есть ощутимый предмет, разжимание руки и падение камня являются ощутимыми процессами. Обдумывание связи между этими ощущениями дает суждение *a*: когда я разжимаю руку, камень падает. Возникает проблемный вопрос: почему камень падает? Для его разрешения требуется гипотеза, т. е. представление,

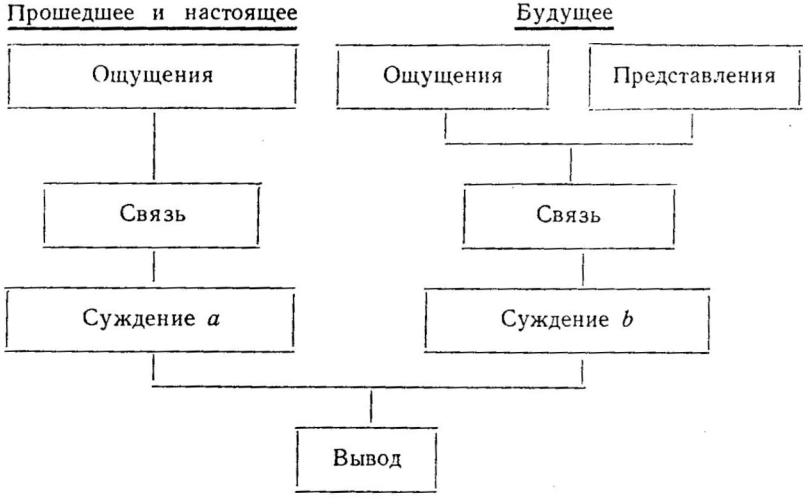


Схема 3. Упрощенная схема творческого мыслительного процесса

например, о некоторой мыслимой силе притяжения между массами. Возникающее отсюда суждение *b* дает совместно с суждением *a* вывод, т. е. решение проблемы.

Здесь речь идет о чистом исследовании. Исследование в поисках познания нуждается также и в представлениях, которые не так-то просто почерпнуть при чтении. Но они остаются представлениями о прошедшем, хотя творчески действуют в целях будущего применения. Из них можно сделать вывод, но это уже будет отделенная от задачи познания деятельность, сознательно направленная на творческое будущее.

Между обеими задачами имеется ясное различие, создаваемое определенным критерием. Если гипотеза как представление (справа на схеме 3) неправильна,

то неправилен и вывод, и гипотеза не ведет к цели. Критерием для приемлемой гипотезы в поисках познания будет постановка вопроса: неправильно или правильно? Или: отвечает ли гипотеза реальности? Если при постановке творческого вопроса, т. е. в конструкторской задаче представление неверно, то вывод не окончательно неправилен, но он непригоден. Критерием творчества нового является вопрос: пригодно или непригодно? При этом имеется в виду лишь физико-техническая пригодность, а экономической пригодности это пока не касается. О ней мы будем судить после критического рассмотрения экономической стороны вопроса.

Если все мыслительные процессы: связи, суждения, выводы правильны, то мы имеем отображение действительности в будущем. А это как раз то, чего мы добиваемся.

Вывод этот, конечно, имеет смысл лишь в том случае, если ведущие к суждению *b* восприятия и представления находятся в связи с поставленной задачей и если они не порождают нереальных фантазий. Будь это так, нужно было бы, вернувшись к представлению, оценить его реальность. Если этим фантазия будет обуздана, т. е. направлена на путь реального, тогда возможна и сознательная направленность работы к осуществимому решению.

Глава 4

ОРГАНИЗУЮЩАЯ СИСТЕМАТИЗАЦИЯ [1]

Для того чтобы указать правильный путь к лучшему решению задачи, нужно сделать краткий обзор всего высказанного в предыдущих параграфах. Но этого недостаточно. Было бы желательным иметь по возможности ясное и простое указание к действиям. Оно, конечно, не должно стеснять и тормозить работника, а носить характер руководства, оставляющего ему большой простор. Все содержащиеся в нем и подробно обсуждаемые ниже рабочие

[1] Под этим термином подразумевается «система, организующая труд конструктора». (*Прим. перев.*)

методы должны быть сведены в легко обозримую систему, в которой принято во внимание изложенное в гл. 2 и 3.

Для практически применимой системы важен в качестве исходного принцип подразделения. Наиболее благоприятным представляется последовательность во времени самых существенных рабочих этапов (ибо для творчески-умственной деятельности можно создать процесс и из ясно различимых, но лишь причинно последовательных рабочих этапов).

Было сделано много предложений по поводу хода творческой работы, которые, пожалуй, выдают тайну деятельности преуспевающих конструкторов. Так, Г. Уоллэс [12] различает четыре этапа творческого акта: подготовка, вынашивание, озарение, рассудительная проработка. И. К. Л. Фиш [4] требует, во-первых, ясной и достаточной формулировки вопроса, во-вторых, проработки вопроса, в-третьих, корректировки сделанных при этом ошибок и, в-четвертых, проработку задачи до мельчайших подробностей. Ф. Кессельринг [14] предлагает следующий путь: идея, 1-й проект, первая оценка, устранение слабых мест, 2-й проект, вторая оценка, решение, конструктивная проработка. Р. Матусек [13] переходит от задания непосредственно к конструктивному принципу, который он разрабатывает на основе рассмотрения материалов, производства, оформления и стоимости. Х. Ломанн [10] различает четыре фазы: проникновение в содержание предмета путем анализа, идея и план решения, исполнение правильного решения, испытание и последующая проверка.

Видно, что существует ясная тенденция к все более реальному пониманию творческого процесса конструирования.

Большинство авторов современных книг по конструированию полагает, что основное в учении о конструировании — перечисление требований, которые должны осуществляться в хорошей конструкции. Крайне важно постоянно иметь в виду эти требования, но помогают они лишь при оценке и улучшении уже найденного решения, а не при его нахождении. О подобных требованиях, которые, впрочем, для каждой задачи различны, будет сказано в гл. 5; они относятся ко времени, когда путь решения уже описан или установлен.

4.1. Основная система

Из изложенного в предыдущих главах вытекают некоторые положения, относящиеся к связи между заданием и наилучшим его решением, которые не носят, однако, характера непреложных законов:

1) в ядре задания содержатся все возможные решения;

2) каждое отдельное решение является комбинацией элементов, характеризуемых определенным действием;

3) каждое решение имеет недостатки, число которых возможно свести к минимуму;

4) решение с минимальным числом недостатков является оптимальным.

Эти положения диктуют важнейшие законы действий при творческом решении задания, причем их последовательность не может быть изменена. Повторения, конечно, допустимы и практически в большинстве случаев необходимы. Таким образом выявляются пять основных правил предварительного обдумывания технического устройства:

1) определите ядро задания, ибо в нем заключена совокупность всех возможных решений (основной принцип);

2) целесообразно комбинируйте возможные конструктивные элементы, ибо все решения состоят из таких комбинаций (рабочий принцип);

3) найдите содержащиеся в каждом решении недостатки и старайтесь уменьшить их или их действие (улучшенный рабочий принцип);

4) отыщите решение с наименьшим числом недостатков (оптимальный рабочий принцип);

5) создайте документацию для практической реализации.

Таким образом, можно различить четыре этапа проектирования, которые изображены на схеме 4.

После определения в ходе предварительного обдумывания ядра задания надо сформулировать его письменно. Эту формулировку мы и называем основным принципом. Его отыскание и соответствует первому этапу системы проектирования.

Основной принцип не говорит в открытой форме о решениях задачи и тем более сам не представляет собой никакого решения. Но он должен содержать в себе все

необходимые и достаточные данные для возможных решений. В задании на двойной рычаг (см. гл. 1) содержался бы следующий основной принцип: для передачи движения от *B* к *C* три заданных функционирующих элемента должны быть по возможности более жестко соединены между собой.

На втором этапе системы проектирования впервые находят свое выражение действительные конструктивные

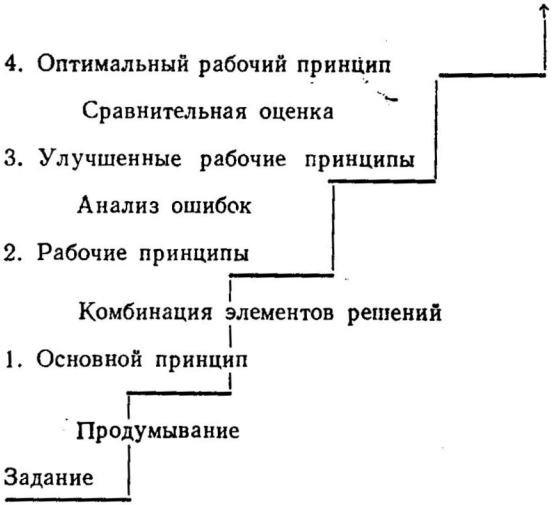


Схема 4. Основная система с четырьмя этапами проектирования

решения; они называются рабочими принципами, так как указывают, на каком принципе должно основываться действие будущего технического устройства. Если речь идет о домах, сооружениях, некоторых отдельных деталях, то можно говорить также о строительном принципе.

При переходе от основного принципа к рабочему комбинируются конструктивные элементы. При этом задаются функции, подлежащие выполнению. В большинстве случаев нетрудно также определить конкретные детали, которые в какой-то форме должны содержаться в решении. Такие функции и функционирующие элементы в итоге дают элементы решения. По методике, о которой речь пойдет дальше (п. 9.1.), последние комбинируются в решения.

Вследствие неизбежности существования ошибок в каждом рабочем принципе обнаруживается некоторое число ошибок. Они могут относиться к выполнению функций, прочности, производству, внешнему виду, стоимости и т. д. Поэтому необходим основательный анализ ошибок.



Схема 5. Путь к оптимальному решению, требующий многих пробных решений

(Ошибками при этом считаются любые недостатки.) Анализ ошибок должен вести к улучшению любого решения путем уменьшения их действия.

Коль скоро для каждого задания существует много решений и, следовательно, много рабочих принципов (схема 5), а каждый рабочий принцип может быть тем или иным путем улучшен, то число улучшенных рабочих принципов еще больше. Достигнут третий этап системы проектирования.

Путем сравнительной оценки определяют, какой из улучшенных рабочих принципов имеет наименьшее число ошибок. Это приводит к четвертому этапу системы проектирования — оптимальному рабочему принципу.

Описанный здесь процесс подобен поиску наилучшего решения конструкции двойного рычага (см. гл. 1). Из рис. 6, символично изображающего основной принцип, возникают принципиальные решения — рабочие принципы (рис. 7, *а*). Они развиваются в улучшенные рабочие принципы, которых строго говоря, существует еще больше, чем изображено на рис. 7, *б*. Сравнительная оценка приводит к выбору последнего варианта в качестве оптимального рабочего принципа, который дальше разрабатывается в соответствии с рис. 8. Из него впоследствии и должен возникнуть рабочий чертеж.

4.2. Этапы проектирования и вспомогательные работы

В предварительной формулировке в п. 2.1 конструирование было определено как творческое предопределение технического устройства. Необходимый комплекс действий лучше всего определяется выражением «техническое проектирование» (в дальнейшем это добавление «техническое» может быть опущено).

В отличие от исследования, при котором речь идет преимущественно о новых знаниях, целью проектирования является предопределение, причем не только технического устройства, но и технологического метода. Поэтому результаты проектирования не исчерпываются только разработкой документации для изготовления. Нужна также и разработка документации, позволяющей реализовать технологический метод. Таким образом, любое проектирование должно заканчиваться созданием документации для материального осуществления оптимального решения некоторой задачи.

Проектирование, как правило, осуществляется сначала «концептивно»[1], преимущественно мысленно и экспериментально, а затем проходит «конструктивную» стадию, предопределяющую оформление. Эти стадии могут и объединяться [15]. Для первой стадии работы нет ка-

[1] От Konzept (нем.) — черновой набросок. (*Прим. перев.*)

кого-нибудь единодушно принятого названия. Применяются также термины: проектирование, разработка, предварительные исследования. Вследствие неопределенности этих терминов в дальнейшем используется слово «концептирование». Конструирование по распространенной терминологии разделяется на черновое проектирование (разработку) и оформление [1]. На схеме 6 изображена взаимосвязь действий и соответствующих понятий, определение которых приводится ниже.



Схема 6. Принятая терминология проектирования

Проектирование (разработка) — творческое предопределение технического устройства или технологического метода. Цель: дать обоснования для практической реализации изделия.

Концептирование — этап проектирования, при котором мысленно, эскизами и экспериментально (или только экспериментально) делается предварительная проработка. Цель: обоснования для конструирования технического устройства или применения технологического метода.

Конструирование — этап проектирования, в котором посредством изображения замысла определяется техническое изделие. Цель: чертежи.

Черновое (эскизное) *проектирование* — этап конструирования до этапа определения окончательно выбранного принципа действия и общего оформления. Цель: полное

[1] У нас ближе всего этим терминам соответствуют эскизное и техническое проектирование. (*Прим. перев.*)

представление о принципе действия и последующего оформления.

Оформление — этап конструирования от установления принципа действия и общего оформления до разработки окончательной и подробной характеристики режима работы [1]. Цель: полная документация для изготовления.

Следует сказать еще о множестве неупомянутых этапов, которые могут играть очень важную и даже решающую роль при проектировании. Это — расчеты, проведение опытов, испытание образцов, которые требуют участия специалистов — математиков, расчетчиков оптики, электриков, расчетчиков на прочность, химиков, инженеров лабораторий, инженеров-испытателей, патентных инженеров и мн. др. Проведение этих работ может быть целесообразно на любом этапе проектирования. При длительном процессе проектирования нужно решать, что предпочтительнее на различных его этапах: опыты или расчеты. Это зависит от того, необходим систематический обзор или лишь некоторый одноразовый результат, при каком методе затраты времени и стоимость будут больше и т. д.

4.3. Система проектирования в целом

Схема 7 (система проектирования в целом) объединяет выраженное частными схемами 4 и 5. Речь идет при этом о некотором идеализированном процессе проектирования. Об отклонениях от набросанной здесь системы, основной характер которой, впрочем, сохраняется для любых задач, будет сказано в гл. 7, п. 9.3 и 10.2.

Имеется последовательность трех этапов: концептирования, эскизного проектирования и оформления (см. схему 7); каждый из них должен пройти четыре промежуточных этапа развития. Взаимная их зависимость такова, что результат одного этапа является постановкой задачи для следующего. Штриховые линии указывают, что конечная цель (создание технической документации для реализации изделия) достигается и при пропуске некоторых этапов.

---

[1] Очевидно, в «оформление» должны войти все этапы рабочего проектирования, т. е. разработка рабочих чертежей, проверочный расчет на точность и др. (*Прим. ред.*)

Для определения результата концептирования в схеме 6 применен термин черновой набросок, но нужно иметь в виду, что в практике применяются также и другие тер-



Схема 7. Система проектирования в целом

мины, как, например, «журнал предписаний» [1] или учебный проект.

Мы, однако, придерживаемся наших терминов, которые можно применить в любой области.

[1] Pflichtenheft — «тетрадь обязанностей». (*Прим. перев.*)

Поэтому понятно, что при концептировании ищут принципы действия, при конструировании — рабочие принципы, при оформлении — принципы оформления. В строительном деле при концептировании находят не принцип действия, а рациональный строительный принцип. Иногда нельзя избежать затруднений в толковании примененных терминов, так как почти нигде еще не пытались достигнуть единообразия в терминологии для всех областей техники. Номенклатура рабочих этапов и мощностей плана по исследованиям и технике [1] в смысле организации работ и отчетных сведений является удовлетворительной, но, к сожалению, меньше соответствует цели создания методики.

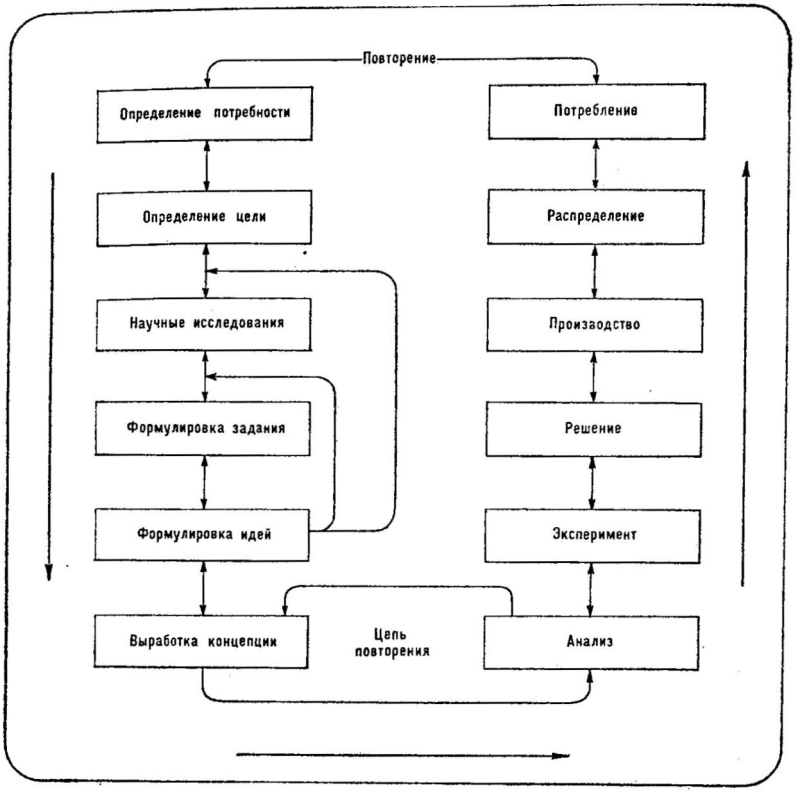
Наука и искусство проектирования (из книги П. Хилла)

ПРОЦЕСС ПРОЕКТИРОВАНИЯ

При проектировании устройства, системы или процесса необходимо обеспечить выполнение ряда условий, связанных с такими факторами, как затраты, время, критерии отбора, техническая осуществимость, рабочие характеристики, производство, техническая эстетика. Для этого проектирование должно осуществляться по методике, гарантирующей получение действительно полезного изделия, имеющего шансы на успешный сбыт. Методика проектирования — это не формула и даже не инструкция, а последовательность событий, составляющих процесс проектирования, в рамках которого возможно логическое развитие конструкции. Процесс проектирования состоит из отдельных этапов (фиг. 3.2), позволяющих определить фактическое состояние разработки и последующий этап. Этапы могут повторяться, так как в процессе работы над изделием требуется принимать ряд решений. Чаще всего происходит чередование этапов, пока, наконец, не будет достигнуто такое состояние разработки, при котором возможен переход на следующий этап. Наиболее часто повторяются такие этапы, как выработка концепции и анализ, на которых общее представление о конструкции проверяется с использованием физических законов, многократно обдумывается и вновь проверяется возможность создания изделия. Формирование новых идей может происходить на этапе, изображенном на схеме, либо в зависимости от характера разработки еще раньше.

Ниже кратко описан каждый этап процесса проектирования.

Определение потребности. Конструктор, сталкиваясь с определенной ситуацией, которая его раздражает или волнует, стремится что-то сделать для ее изменения, и его творческое воображение под действием этого стимула определяет существующую потребность.



Фиг. 3.2. Процесс проектирования.

Определение цели. Формулировка в общих выражениях характеристик системы, устройства или процесса, которые удовлетворяют эту потребность.

Научные исследования. Сбор всей доступной информации, связанной с решением поставленной цели.

Формулировка задания. Перечень данных и параметров, обеспечивающих достижение поставленной цели.

Формирование идей. Процесс рождения новых идей.

Выработка концепции. Оригинальная, новаторская, творческая, изобретательская деятельность в форме выработки вариантов возможных решений поставленной цели. На этом этапе обычно выполняются эскизы от руки.

Анализ. Проверка выбранных концепций на соответствие физическим законам.

Эксперимент. Создание опытного образца и лабораторные испытания (определение рабочих характеристик, работоспособности, надежности и долговечности).

Решение. Описание системы, процесса или устройства в виде отчета, содержащего описание изделия, рабочие чертежи, технические условия, перечень деталей и калькуляцию затрат.

Производство. Определение объема производства и потребности в производственном оборудовании; методы изготовления продукции, приобретение сырья и полуфабрикатов, автоматизация, календарное планирование, контроль качества и приемочный контроль.

Распределение продукции. Установление конкурентоспособных цен, реклама, нахождение рынков сбыта, обеспечение прибыли.

Потребление. Контакты с потребителями, ремонт, обслуживание.

ЭТАПЫ И МЕТОДЫ

Известно, что для создания одного удачного изделия требуется 55—60 идей (гл. 1), и поскольку по мере разработки изделия расходы возрастают, очевидно, что для завершения цикла проектирования недостаточно только творческого мышления. По-видимому, наиболее важным в процессе проектирования является разрешение противоречия между творческим мышлением и логическим анализом. Творческое мышление более продуктивно в том случае, когда воображение может свободно охватить сразу все стороны рассматриваемой проблемы.

Анализ же дает наилучшие результаты при последовательном, упорядоченном рассмотрении проблемы. В процессе проектирования соблюдается разумный баланс между творческим мышлением и логическим анализом, что крайне важно для успешного проектирования. Действительно, поскольку процесс проектирования представляет собой последовательность этапов, определяющих состояние разработки, то в данном случае можно легко проводить логический анализ. Кроме того, поскольку этапы определены довольно широко и могут повторяться, то творческое мышление также не ограничивается. Логический анализ и творческое мышление в рамках данной схемы могут протекать

одновременно. Ниже рассмотрены этапы процесса проектирования и некоторые известные методы, используемые для достижения определенного этапа и обеспечивающие оптимальный переход с одного этапа на другой.

Определение потребности

Процесс проектирования начинается с идеи. Нередко идея порождается настойчивым желанием фирмы выпустить новую продукцию или стремлением решить ту или иную социальную проблему. Определение потребности, в некотором отношении полезной обществу, требует в высшей степени творческого мышления. Для этого необходимо заставлять работать воображение и, непрерывно следя за обстановкой, искать новые идеи. Если конструктор «настроен» на определение потребности в ситуации, которая не является идеальной, и он принимает решение изменить положение, то генерирование идей происходит более или менее автоматически. В таком состоянии следует проводить предварительный отбор идей (выбрать наилучшую), прежде чем переходить к следующему этапу. На этом этапе необходимо ответить на следующие вопросы: соответствует ли идея критериям фирмы, имеет ли она шансы на успех и можно ли ее реализовать при существующем развитии техники за приемлемый промежуток времени. Если ответы утвердительны, то потребность (идея) существует, и можно приступить к следующему логическому этапу.

Определение цели

Определение потребности — это в основном умственная деятельность, приводящая к появлению идеи, которую необходимо перенести на бумагу, сформулировав ее как некоторую цель. Такая формулировка в общих выражениях определяет, что́ должен сделать конструктор для удовлетворения потребности, и представляет собой довольно общее описание требуемого конечного продукта. Многие трудности, встречающиеся при проектировании, часто обусловлены тем, что цели формулируются неудовлетворительно либо поспешно.

В качестве примера процесса проектирования на данном этапе рассмотрим случай, когда частнопрактикующего инженера (консультанта) беспокоит то, что уборка опавших листьев с лужайки требует больших хлопот и отнимает много времени, которое он с большим удовольствием потратил бы на игру в гольф. После прочитанной в газете

статьи, озаглавленной «Сжигание листьев осенью увеличивает загрязнение воздуха», он приходит к выводу, что существует настоятельная потребность в устройстве, убирающем опавшие листья. После тщательного обдумывания и разговоров с соседями он сформулировал цель в следующем виде: «Разработать устройство (или систему) для уборки опавших листьев с пригородных лужаек и газонов; устройство должно быть безопасным, простым в эксплуатации и не увеличивать загрязнение воздуха».

Научные исследования

Чтобы изделие новой конструкции имело шансы на успех (т. е. пользовалось спросом), необходим сбор всей доступной информации, связанной с достижением поставленной цели. Для этого можно использовать следующие источники информации: технические и профессиональные журналы, реферативные журналы, отчеты о научных исследованиях (в правительственных и частных организациях), технические библиотеки, каталоги поставщиков комплектующих элементов, материалы патентного бюро США. Эта информация может отражать уже полученные результаты, современное состояние вопроса и наличие оборудования, необходимого для достижения поставленной цели. Нередко результатом сбора информации является изменение или отказ от цели, так как оказывается, что подобное изделие уже существует. Безусловно, такая информация избавит конструктора и фирму от многих затруднений и позволит сэкономить время и деньги.

Формулировка задания

На этом этапе конструктор должен перечислить все основные данные, определяющие разработку изделия и обеспечивающие достижение поставленной цели. Важно иметь в виду, что формулировка задания должна представлять собой не свод правил для конструктора, а скорее памятку, помогающую направить усилия на достижение поставленной цели. Поскольку на этом этапе конструктор должен уметь творчески мыслить, охватывая все этапы работы над изделием, то он может подвергнуть сомнению поставленную цель, может пересмотреть ее или даже отказаться от проекта.

Возвращаясь к приведенному выше примеру, следующий неполный перечень можно рассматривать как некоторую часть формулировки задания:

1. Устройство должно быть безопасным в работе (особенно, когда поблизости находятся дети).

2. Управление устройством должно быть простым, доступным для домашней хозяйки.

3. Устройство должно убирать листья одним из следующих способов:

а) измельчать и укладывать в мешок;

б) измельчать и разбрасывать;

в) прессовать в брикеты для сжигания их зимой в печке;

г) измельчать и прессовать в виде торфяных брикетов для удобрения посевов и использования в качестве покрывающего слоя;

д) . . . . . .

е) . . . . . .

4. Устройство может работать от следующих источников энергии:

а) аккумулятора;

б) электросети (напряжение 110 в);

в) двигателя внутреннего сгорания (двухтактного или четырехтактного);

г) ручного привода через зубчатую передачу.

5. Устройство можно хранить в гараже или подвальном помещении.

6. Устройство может:

а) убирать листья и косить траву на лужайке;

б) убирать листья и разбрасывать удобрения;

в) убирать листья и известковать почву;

г) убирать листья, косить траву на лужайке и известковать почву;

д) . . . . . .

е) . . . . . .

7. В устройстве должны использоваться существующие узлы и агрегаты; при его производстве требуется механическая обработка только листового металла и труб или возможна обработка и формование пластмасс.

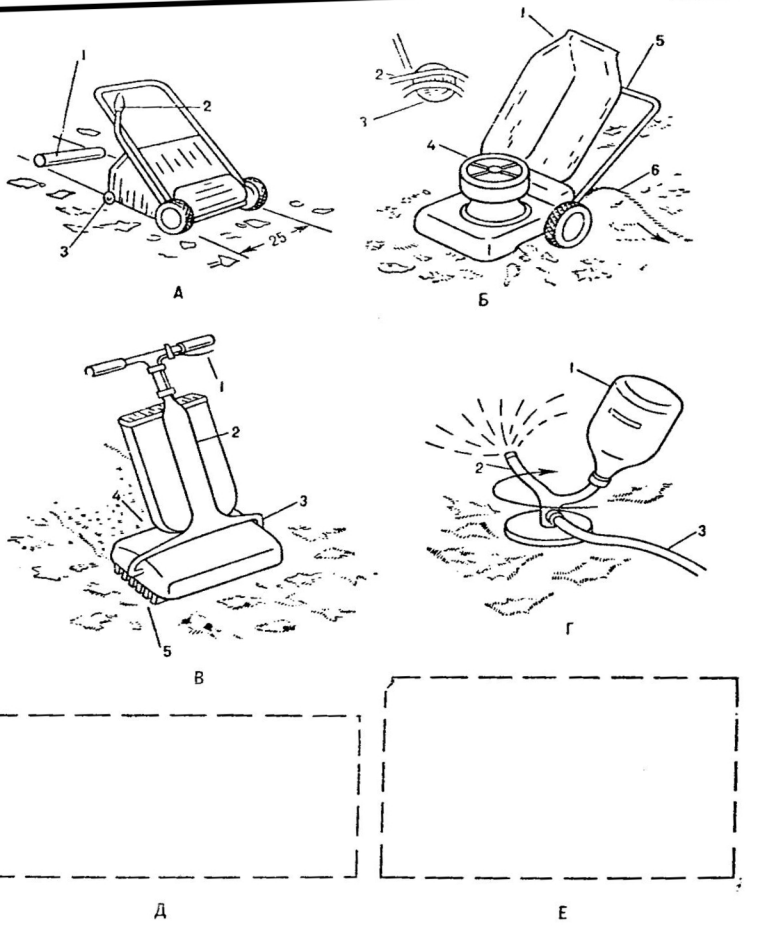
8. При выборе материалов необходимо учитывать их обрабатываемость, прочность, стоимость, внешний вид и способность противостоять изменяющимся метеорологическим условиям.

9. Устройство должно быть надежным, не нуждаться (или почти не нуждаться) в обслуживании и оно должно быть дешевле моторной газонокосилки.

10. . . . . .

11. . . . . .

12. . . . . .



Фиг. 3.3. Эскизы возможных вариантов (концепции).

А. Пресс-подборщик.
1 — измельченные листья заворачиваются в джутовую ткань, а затем полученное «бревно» используется для отопления; *2* — управление пресс-подборщиком; *3* — заднее колесо.
Б. Вакуумный подборщик.
1 — холщевый мешок поворачивается и освобождается от листьев; *2* — энергия создается при вращении колеса; *3* — щетка; *4* — электродвигатель на 3500 об/мин и вентилятор; *5* — приводится в действие человеком; *6* — шнур к генератору напряжением 110 В.
В. Измельчитель листьев в сочетании с разбрасывателем извести.
1 — регулирование подачи извести; *2* — резервуар для извести; *3* — ручка перемещается в обоих направлениях; *4* — мульча, смешанная с известью; *5* — гусеничный ход облегчает движение по неровной поверхности.
Г. Устройство, обеспечивающее химическое разложение листьев.
1 — пластмассовая бутыль с химическим раствором; *2* — разбрызгиватель; *3* — к водопроводному крану.
Д. Подборщик листьев-газонокосилка-разбрасыватель извести.
Е. Переносная печь для сжигания листьев.

Формирование идей

Хотя на фиг. 3.2 формирование новых идей представлено одним квадратиком, в действительности оно «залезает» на другие этапы и нередко протекает с нарушением последовательности этапов. Этот исключительно важный этап предшествует этапу выработки концепции, на котором идеи превращаются в реальность. Ряд методов, эффективно используемых на этапе формирования идей, рассмотрен в гл. 2.

Выработка концепции

Процесс выработки альтернативных решений и концепций, необходимых для достижения поставленной цели, требует выдающихся творческих способностей. Здесь конструктор должен учитывать результаты научных исследований и непрерывно уточнять формулировку задания. Его творческая, новаторская и изобретательская деятельность направлена на создание конечного продукта. Результатами этой работы обычно являются выполненные от руки эскизы, отражающие ряд альтернативных решений. Таким путем конструктор начинает представлять свои мысли на бумаге. Варианты не прорабатываются детально, а лишь регистрируются как возможные решения, нуждающиеся в проверке с помощью выбранных критериев. Процесс выработки концепции имеет один и тот же характер как при разработке наглядного учебного пособия или слухового аппарата в виде капсулы, так и при разработке системы пуска ракеты. На фиг. 3.3 показаны эскизы возможных устройств для уборки опавших листьев.

Матрицы решений

После того как концепции проработаны детально, необходимо решить, какую (или какие) из них можно рассматривать на следующих более капиталоемких этапах проектирования. Для принятия наилучших решений при выборе рассматриваемых вариантов составляется матрица коэффициентов, требующая более глубокого исследования каждого варианта. Проиллюстрируем применение этой матрицы на примере (фиг. 3.4). Рассмотрим шесть различных концепций, выработанных для устройства уборки опавших листьев и проверенных на соответствие конструктивным критериям.

Каждому критерию в зависимости от его относительной важности в обеспечении заданной конструкции соответ-

Конструктивные критерии с соответствующими весовыми коэффициентами / Варианты	Применение стандартных деталей 0,08	Безопасность 0,12	Простота и удобство обслуживания 0,10	Прочность 0,10	Отношение со стороны общества 0,18	Надежность 0,20	Стоимость разработки 0,03	Стоимость для покупателя 0,04	Технические характеристики 0,15	Сумма 1,0
А. Пресс-подборщик	3 0,24	5 0,60	2 0,20	4 0,40	9 1,62	6 1,20	1 0,03	1 0,04	3 0,45	4,78
Б. Вакуумный подборщик	9 0,72	10 1,20	10 1,00	8 0,80	6 1,08	7 1,40	10 0,30	10 0,40	8 1,24	8,14
В. Измельчитель	5 0,40	6 0,72	7 0,70	7 0,70	1,44	6 1,20	3 0,09	4 0,16	5 0,75	6,16
Г. Устройство, обеспечивающее химическое разложение листьев	8 0,64	10 1,20	9 0,90	8 0,80	9 1,62	7 1,40	2 0,06	8 0,32	8 1,24	8,18
Д. Подборщик листьев-газонокосилка-разбрасыватель извести	6 0,48	8 0,96	3 0,30	2 0,20	6 1,08	4 0,80	2 0,06	2 0,08	6 0,90	4,86
Е. Переносная печь для сжигания листьев	5 0,40	4 0,48	8 0,80	6 0,60	5 0,90	10 2,00	3 0,09	4 0,16	9 1,35	6,78

Фиг. 3.4. Матрица решений.

ствует весовой коэффициент, принимающий значение от 0 до 1. Сумма всех весовых коэффициентов равна 1. Если критерии хорошо известны, то можно сразу написать соответствующие коэффициенты. В противном случае единицу делят на число критериев (например, $1/C_n = 1/9 = 0{,}11$) и полученное число изменяют в соответствии с относительной важностью критерия и его влиянием на изделие, сохраняя сумму коэффициентов равной 1. Эта величина дает представление о коммерческой пригодности изделия.

Каждый вариант в зависимости от его соответствия конструктивным критериям получает соответствующее число *баллов* (от 0 до 10). Отметим, что при рассмотрении критерия стоимости варианты, требующие больших затрат, получают наименьшее число баллов. Это число, записанное в верхней половине клетки матрицы, умножается на весовые коэффициенты (произведение записывается в нижней половине), затем вычисляется сумма, которая показывает, какой из вариантов наилучшим образом соответствует поставленной цели. На фиг. 3.4 варианты *Б* и *Г* имеют самые большие значения суммы произведений (очков), поэтому эти концепции заслуживают перехода на следующий этап. Для варианта *Г* шансы на успех соответствуют от 8,18 до 10, а для варианта *Б* — от 8,14 до 10 очков. (Наибольшее число очков равно 10.) Если же сумма очков меньше 5, то концепция вряд ли заслуживает дальнейшего рассмотрения. Поскольку создание прототипов двух устройств для проведения испытаний и экспериментов требует больших затрат, целесообразно составить подматрицу решений для этих двух вариантов. После анализа подматрицы выбирают один из вариантов, который будет допущен на последующие этапы проектирования. Видно, что исключительно важное значение для точности данных, на основе которых принимается окончательное решение, имеет правильный выбор значений весовых коэффициентов и числа баллов. Следовательно, выбор коэффициентов и числа баллов должен проводиться на основе максимально возможного объема информации при полном понимании решаемой задачи и полном проявлении здравого смысла.

Анализ

После того как выбрана концепция, определяющая возможное решение поставленной задачи, ее проверяют на соответствие физическим законам. Эта проверка называется анализом. Вместе с выработкой концепции анализ образу-

от итеративный процесс. Часто в результате анализа требуется изменить концепцию или сформулировать новую идею. После этого новая концепция снова подвергается анализу. Таким образом, осуществляется непрерывный переход от анализа к выработке концепции, и обратно, пока разработка не начнет приобретать реальное содержание.

Анализ протекает в двух основных формах: оценка и следующее за ней определение порядка величины. Оценка представляет собой суждение, основанное на опыте, однако это не догадка. Инженер может легко оценить внутренние размеры гаража для одного или двух современных легковых автомобилей, но когда он попытается предсказать, какие размеры будет иметь легковой автомобиль через десять лет, то это будет чистой догадкой. Если же он имеет опыт в области перспективных разработок автомобилей, то его суждение будет не догадкой, а оценкой. Оценка, если она возможна, дает конструктору общее представление о концепции и помогает конкретизировать некоторые детали. После оценки определяется порядок величины. Как известно, изменение величины на порядок означает ее изменение примерно в 10 раз; например, в интервале от 10^{-4} до 10^{5} величина изменяется на порядок девять раз. Поскольку анализ требует больших затрат, является утомительным занятием и поглощает много времени, конструктор должен установить, когда для получения необходимой информации следует проводить анализ первого порядка (т. е. грубый подсчет) и когда проводить анализ более высокого порядка. Быстродействующие вычислительные машины при наличии соответствующей программы в настоящее время позволяют проводить анализ более высокого порядка при приемлемых затратах.

Эксперимент

В классическом смысле эксперимент представляет собой совокупность наблюдений, выполняемых в контролируемых условиях. Классическая статистика требует, чтобы условия, в которых проводится эксперимент, постоянно находились под контролем. При проектировании введение контроля с целью обеспечения постоянства окружающих условий часто превращает реальную ситуацию в непредставительную систему. В результате получают неполные или неточные данные, если их рассматривать с точки зрения реальной ситуации. (Настоящие испытания автомобиля должны проводиться на испытательном полигоне, а не в лаборатории.)

При инженерном проектировании на стадии эксперимента создаваемое изделие (или процесс) испытывается для проверки правильности выбранной концепции и проведенного анализа с точки зрения работоспособности изделия, прочности и соответствия рабочим характеристикам. На данной стадии идеи, выраженные на бумаге, превращаются в реальные вещи: *макет, модель* или *прототип* изделия.

Макет изделия обычно создается в масштабе и изготавливается из пластмассы, дерева или картона. Он используется для проверки величины зазоров, методов сборки, способов изготовления и для демонстрации внешнего вида. Макет служит также для убеждения руководителей фирмы или заказчика в правильности выбранной идеи. Хотя макет не дает большого количества информации, его изготовление сравнительно несложно и не требует много времени. В химической промышленности изготавливаются масштабные недействующие лабораторные макеты для иллюстрации процессов очистки, позволяющие получить наглядное представление о реальной системе.

Более дорогостоящим методом накопления экспериментальных данных является создание модели, отражающей реальную систему по принципу подобия элементов. Для прогнозирования поведения реальной системы используются следующие четыре типа моделей: *полная, физическая, частичная* и *математическая*. Полная модель, как следует из ее названия, является геометрически точным отображением реальной системы, она построена в масштабе и удовлетворяет всем ограничениям, налагаемым конструктивными параметрами. Физическая модель создается для проверки определенных характеристик конструкции и не предназначается для получения информации о всей конструкции. В частичной модели специально вводится отклонение от одного или большего числа конструктивных параметров. Такие модели используются в том случае, когда выполнение определенных условий вследствие нехватки времени, отсутствия материалов и т. д. невозможно и когда ожидается, что искажение параметров обеспечит получение надежной информации. Математические модели не имеют очевидного сходства с реальной системой, но благодаря соответствующим аналогиям дают точную информацию о поведении системы. Примером моделей такого типа являются аналоговые вычислительные устройства.

Наиболее дорогостоящим и обеспечивающим наибольшее количество полезной информации экспериментальным методом является создание *прототипа*. Прототип — это построенная в натуральную величину действующая реальная

система. На прототипе конструктор может отработать способы изготовления, методы сборки, работоспособность, прочность и рабочие характеристики изделия в реальных условиях. Наибольшие затруднения при создании прототипа обусловлены нехваткой времени, затратами и нежеланием изменять или совершенствовать конструкцию, когда конечный продукт уже налицо.

Как правило, для обеспечения многократного перехода от выработки концепции к анализу и обратно на стадии эксперимента вначале необходимо изготовить макет, затем модель и, наконец, после того как на макете и модели будет показана реальная ценность изделия, создавать прототип.

Решение

На этом этапе требуется конкретная информация об устройстве, системе или процессе. Конструктор должен изложить на бумаге свои мысли о проекте так, чтобы он мог убедить руководителей фирмы или заказчика в правильности идеи. Кроме того, он дает предложения по изготовлению изделия и организации обслуживания его на начальных этапах массового производства. Решение представляется в форме отчета, содержащего детальное описание устройства (а также его соответствия потребности и функционирования), чертежи деталей и сборочные чертежи, техническое задание на изготовление, перечень стандартных деталей, калькуляцию затрат и некоторые дополнительные сведения.

Изготовление изделия

На этапе изготовления конструктор работает совместно с другими специалистами, так как необходимо учитывать наличие производственного оборудования и запасов, подготовку персонала, объем производства, сроки выпуска готовой продукции, контроль качества и т. д. Опытный конструктор должен знать производственные возможности своей фирмы или фирмы заказчика и в процессе проектирования поддерживать тесный контакт с инженером-технологом.

Распределение продукции

Распределение продукции связано с организацией массового производства (см. гл. 1). К сожалению, в настоящее время конструктор практически не участвует в распределении, так как обычно этим вопросом занимаются другие

специалисты. На этом этапе решаются такие задачи, как отправка продукции на рынок, установление конкурентоспособных цен, определение наилучшего времени сбыта продукции, организация рекламы, выпуск рекламных проспектов, проверка рынков сбыта, изучение прибылей и т. д. Поэтому целесообразно, чтобы руководители фирмы консультировались с конструктором, поскольку он знает изделие лучше, чем кто-либо другой, и может иметь идеи, способные обеспечить хороший сбыт продукции.

Потребление

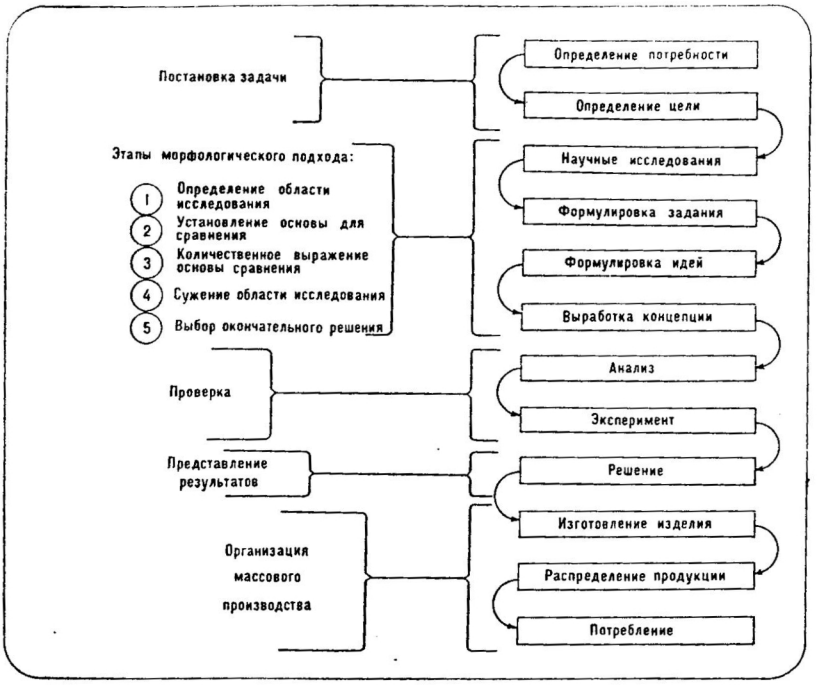
Точные записи и исследования, выполненные на этапе потребления, могут значительно облегчить изменение моделей существующих изделий и оказать большую помощь в успешной разработке новых изделий. На этом этапе определяются круг покупателей и области использования изделия, учитываются претензии и замечания покупателей, реакция конкурентов, проводится ремонт и обслуживание. Информация такого рода собирается в основном продавцами.

Хотя этап потребления всего лишь завершающий этап процесса проектирования, именно на потребление нацелен весь процесс проектирования и именно на этом этапе изделие проходит настоящую проверку как с точки зрения репутации фирмы, так и с точки зрения обеспечения прибыли.

МОРФОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Морфологический подход (morphological approach) — это подход, «связанный с теорией, структурой и формой организации или системы». Специалисты по проектированию этим термином называют метод логической организации идей при проектировании, который отличается от традиционных методов, основанных на интуиции и опыте.

Морфологический подход в проектировании представляет собой довольно строгий математический метод выбора и комбинирования различных этапов для достижения поставленной цели. Неопытному конструктору он помогает с самого начала активно включиться в решение проблемы и служит средством организации и ведения работы в наиболее плодотворном направлении. На фиг. 3.5 показано применение морфологического подхода на разных этапах процесса проектирования. Видно, что данный подход охватывает в основном этапы от научно-исследовательской ра-



Фиг. 3.5. Процесс проектирования при морфологическом подходе.

боты до выработки концепции. Ниже показано, что, хотя морфологический подход и включает этап научно-исследовательской работы, научные исследования должны проводиться отдельно, и их результаты затем сравниваются с результатами этапов 1—5.

Рассмотрим этапы морфологического подхода.

Этап 1. Определение области исследования

На данном этапе осуществляется постановка задачи, формулировка идей и выработка концепции в форме *параметров* и *возможных вариантов*, перечисленных на морфологической карте (фиг. 3.6). Параметры в общем виде описывают характерные особенности и функции изделия (каким должно быть изделие или что оно должно иметь). Возможные варианты обычно представляют собой описание способов или средств, обеспечивающих достижение требуемых параметров.

Этап 1. Рассмотрение возможных вариантов

	Параметры	Варианты (средства и способы обеспечения требуемых параметров) A	B	C	D	Общее число решений	Число оптимальных решений
1	Форма	Квадратная	Круглая	Эллиптическая	Прямоугольная	4	2
						×	×
2	Вид энергии	Двигатель внутреннего сгорания	Электрическая	Солнечная		3	1
						×	×
3	Материал	Латунь	Сталь	Алюминий	Бронза	4	1
						×	×
4	Цвет	Серый	Синий	Коричневый	Зеленый	4	1
						×	×
5	Скорость	Малая	Средняя	Большая		3	2 или 1
						×	×
6	И т. д.	?	?	?		?	?
						×	×
7	И т. д.	?	?	?		?	?
						576	2

Этап 2. Выбор основы для сравнения.
1) По возможности наименьшая стоимость.
2) Ограниченный объем производства.
3) Надежность изделия в домашних условиях.

Этап 3. Количественное выражение основы сравнения.
1) Стоимость изделия: 18—24 долл.
2) Объем производства: 1500—2000 единиц в месяц.
3) Надежность изделия в домашних условиях.

Этап 4. Сужение области исследования.
Неподчеркнутые варианты исключаются из рассмотрения.

Этап 5. Выбор окончательного решения.
Изделие должно иметь круглую или эллиптическую форму, приводиться в действие электродвигателем, изготавливаться из алюминия, окрашиваться в серый цвет и работать на малой или средней скорости.

Фиг. 3.6. Морфологическая карта.

Морфологическая карта дает все возможные решения проблемы в рассматриваемых пределах и содержит наилучшее решение. Исследование основных материалов крайне важно для получения перечня параметров и возможных вариантов. Если в результате исследования найдены коммерчески выгодные решения поставленной задачи, они должны быть перечислены на этой карте. Морфологический подход позволяет при подготовке и пересмотре карты проводить анализ и синтез одновременно. Анализ выполняется для определения параметров и возможных вариантов, а синтез для отыскания окончательного решения (этап 5).

Этап 2. Выбор основы (или основ) для сравнения

На этапе 1 определяются все возможные варианты изделия при заданных ограничениях, на этапе 2 конструктор должен выбрать основу (или основы) сравнения вариантов и отобрать наилучший вариант. За основу сравнения можно принять такие показатели, как стоимость, простота, прочность или вес. Если за основу сравнения принимается несколько критериев, то конструктор должен расположить их в порядке важности.

Этап 3. Количественное выражение основы (или основ) сравнения

На этапе 3 для основы сравнения устанавливаются определенные пределы. Основа сравнения определяется как можно точнее путем выполнения научных исследований, изучения производственных возможностей, возможностей сбыта и принимаемых допущений или проведения консультаций с заказчиком.

Этап 4. Сужение области исследования

Используя основу (или основы) сравнения и метод исключения, область исследования можно сузить и свести к нескольким оптимальным решениям. Сужение можно выполнять путем анализа строк или столбцов. Поскольку число строк равно числу параметров, каждую строку можно анализировать отдельно. Менее подходящие варианты в строке можно исключить (на фиг. 3.6 они не подчеркнуты) и, таким образом, получить оптимальное решение. После исключения в строках приступают к анализу столбцов, который проводится более детально, требует тщательного исследования и должен выявить решение, успех которого наиболее вероятен.

Этап 5. Выбор окончательного решения

Сопоставляя оставшиеся в каждом столбце варианты с параметрами, получаем ряд решений. Затем эти решения сравниваются между собой и наилучшее из них выбирается для анализа и эксперимента. Оно является окончательным решением, удовлетворяющим поставленной цели.

ОПТИМИЗАЦИЯ

Обеспечение оптимальных результатов при проектировании изделия (системы) — залог успешного проектирования. Проектирование будет оптимальным, если получены, например, наилучший внешний вид при минимальных затратах, наибольшая мощность при минимальном весе или наилучшее качество при наименьшем расходе материалов. Конструкторы ищут оптимальные решения с момента выдачи первого патента и, по-видимому, с момента изобретения колеса, которое является хорошим примером оптимальной конструкции. В последние годы процесс получения наилучшей конструкции или максимизации характеристик при минимальных затратах получил название оптимизации или оптимального проектирования.

Многие важные технические достижения появились благодаря оптимизации. Предварительно напряженный бетон явился результатом поисков более легких покрытий, способных выдерживать большие нагрузки на взлетно-посадочных полосах. Процесс декатирования был разработан для сведения к минимуму усадки тканей. Дюралюминий (сплав алюминия и стали) обеспечивает максимальную прочность при минимальном весе. Шариковая ручка иллюстрирует максимизацию подачи пишущего состава, удобства и качества при минимизации стоимости. Любой из нас принимает оптимальные решения каждый день, совершая торговые сделки при покупке товаров, выбирая кратчайший путь на работу и т. д.

Однако недостаточно оптимизировать лишь процесс проектирования. Весь процесс — от творческого вдохновения до получения конечного продукта — должен быть оптимизирован, чтобы получить наилучший из возможных результатов. Необходимо оптимизировать время разработки, этап научных исследований, руководство созданием новых изделий и анализ возможностей сбыта, однако не следует возлагать больших надежд, если проектирование уже находится на одном из завершающих этапов. Оптимальное проектирование как метод играет наиболее важную роль в

процессе анализа, эксперимента и на этапе производства. Некоторую помощь в обеспечении оптимального проектирования инженеру могут оказать следующие процедуры.

Принятие субъективных решений

Оптимизация должна быть своего рода психологической установкой и должна осуществляться инженером путем непрерывного пересмотра конструкции на основе его опыта. Он должен учитывать при этом стоимость, расход материалов, методы производства, симпатии и антипатии клиентов, должен быть осведомлен о новых разработках, о конкуренции и т. д. Пересмотр приводит к принятию интуитивного решения, близкого к оптимальному, относительно каждой мелкой детали конструкции.

Общие принципы

В процессе учебы и дальнейшего приобретения опыта инженер знакомится с определенными фактами и так называемыми «эмпирическими правилами», которые он применяет в процессе проектирования автоматически. И хотя эти общие принципы иногда применяются неосознанно, они являются общепринятым методом оптимизации. Например, чем больше поршней в двигателе, тем легче достигается динамическое равновесие; элементы фермы или конструкции геометрически располагаются таким образом, чтобы нагрузка распределялась равномерно; следует устранять острые углы, выемки и закругления малого радиуса на напряженных деталях, поскольку они приводят к концентрации напряжения; нельзя запускать электродвигатель при полной нагрузке; изгибающие напряжения можно уменьшить, увеличив момент инерции сечения, и т. д.

Графические и аналитические методы

Для оптимизации проектирования применяются графические и аналитические методы. При графическом методе для проверки конструкции на соответствие определенным критериям выполняют в масштабе чертеж изделия (дешевле изготовить чертеж, чем само изделие). Чертеж можно изменять многократно (пока конструктор не достигнет цели), а изменять реальную систему обычно очень дорого. Примеры графической оптимизации: выбор размеров ветрового стекла автомобиля для обеспечения водителю максимального обзора; проектирование автомобильных стеклоочистителей, очищающих максимально возможную пло-

щадь стекла; расчет наименьших размеров зеркала заднего вида, охватывающего область обзора заднего стекла.

Аналитические методы оптимизации основаны на составлении уравнения, удовлетворяющего некоторым условиям и содержащего оптимизируемые показатели (стоимость, вес, геометрические размеры, объем и скорость). После того как уравнение составлено, беглый анализ его членов часто позволяет определить поведение некоторых переменных при изменении (увеличении или уменьшении) физических характеристик изделия. Если уравнение составлено верно, его можно дифференцировать и строить по нему графики и номограммы.

Поиск компромиссных решений

К сожалению, реальный мир не содействует конструктору в его поисках оптимальных решений. Известно, что нельзя получить самую прочную и в то же время самую легкую конструкцию; нельзя, чтобы на мелкие детали ложилась основная нагрузка; поверхности, имеющие наименьшую площадь, не могут охватывать наибольший объем. Инженер должен постоянно искать, чем можно поступиться, чтобы обеспечить оптимальность одной или нескольких характеристик. Так, чтобы получить наибольшую прочность, необходимо пойти на увеличение веса и стоимости; чтобы с вероятностью 95% обеспечить размещение мужчины-оператора, следует отказаться от плавных линий и перейти к прямоугольным кабинам; чтобы обеспечить максимальный прием радио- и телевизионных передач, встроенные антенны необходимо заменить выносными.

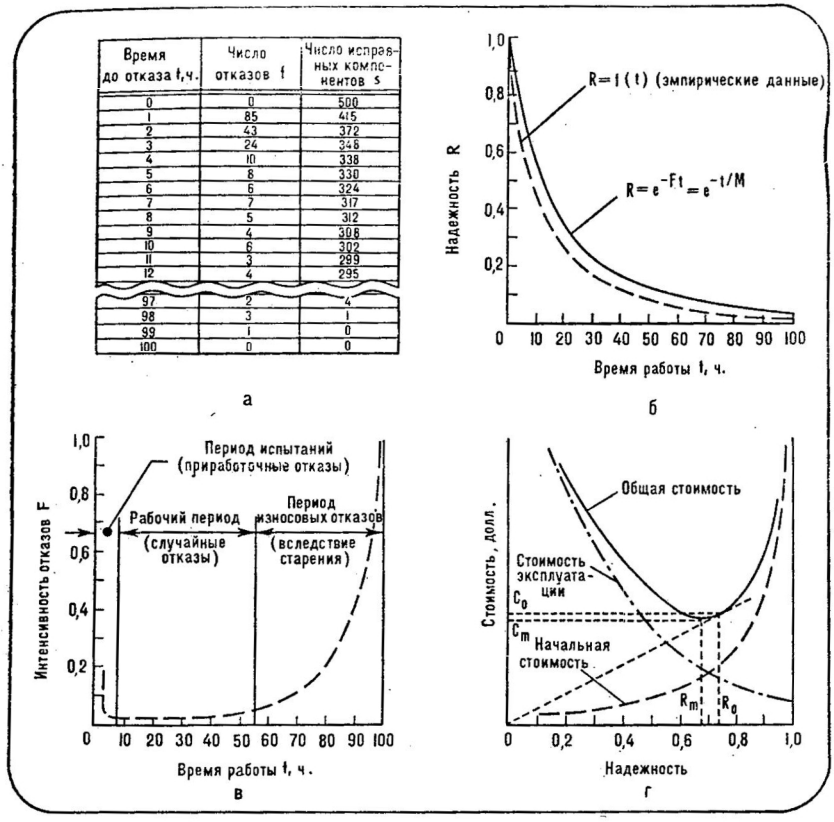
НАДЕЖНОСТЬ

Конечная цель инженера-конструктора — создать устройство или систему, оптимально удовлетворяющую поставленным требованиям, соответствующую техническому заданию и удовлетворительно функционирующую в течение заданного промежутка времени при прогнозируемых окружающих условиях. Последняя характеристика изделия рассматривается как конструктивный параметр с момента появления в начале 1950-х гг. метода расчетов, основанного на теории надежности. Надежность изделия представляет собой вероятность того, что изделие будет функционировать нормально в течение заданного промежутка времени при известных рабочих условиях. (услови-

ях окружающей среды). Легко представить трудности автомобильной фирмы, которая должна создать стандартный легковой автомобиль, способный удовлетворительно работать как в штате Мэн, так и в штатах Флорида и Калифорнии: окраска автомобиля должна выдерживать солнце пустыни, соль, разбрасываемую на дорогах против обледенения, смог индустриальных центров и соленые брызги океана; владельцем автомобиля могут оказаться мужчина и женщина средних лет, отчаянный лихач и скромная старушка. К счастью, надежность имеет точный смысл. Можно не только дать определение надежности, можно вычислить, оценить, измерить, проверить, предсказать и обеспечить необходимую надежность комплекса оборудования. Когда жизнь человека зависит от правильного функционирования некоторых элементов системы, например, таких, как устройство герметизации в реактивном самолете, рулевое управление в автомобиле, искусственное сердце в операционный палате, надежность играет исключительно важную роль.

Как изготовитель, так и потребитель хотели бы иметь удовлетворительный уровень надежности всех выпускаемых изделий. При современном развитии техники достижение этой цели вполне возможно: конструктор должен увеличить коэффициент надежности, рассчитывая каждый элемент системы с запасом. При этом система будет спроектирована с запасом прочности. В прошлом, когда материалы были в избытке и хватало квалифицированной рабочей силы, конкуренция отсутствовала и темпы технического прогресса были медленными, такая практика была обычной. Однако в настоящее время при проектировании устройства или системы необходимо стремиться к минимальным затратам, минимальным весу и размерам, оптимальному расходу материалов и надежности, находящейся в допустимых пределах.

Определение количественного показателя надежности основано на теории вероятностей. Пример вычисления показан на фиг. 3.7. В таблице на фиг. 3.7, *а* приведены экспериментальные данные для элемента, рассчитанного на работу в течение 50 ч. При испытании 500 элементов оказалось, что 85 из них вышли из строя в течение первого часа, 43 — в течение второго, 24 — в течение третьего часа и т. д. Число отказов начинает выравниваться примерно через 8 ч работы. Эти данные подчиняются нормальному закону распределения, при этом около 250 элементов (половина) при расчетном рабочем времени 50 ч продолжала работать после этого периода, а последний элемент вышел из строя после 99 ч работы. Рассматри-



Фиг. 3.7. Надежность и вероятность.
а — данные об отказах; *б* — стандартная кривая надежности; *в* — интенсивность отказов элементов; *г* — стоимость обеспечения надежности.

вая надежность элементов как долю времени, в течение которого работает каждый из них, ее можно выразить количественно следующим образом:

$$R = \text{Надежность} = \frac{\text{Число исправных элементов}}{\text{Общее число элементов}},$$

$$R(5\text{ ч}) = \frac{330}{500} = 0{,}66, \quad R(12\text{ ч}) = \frac{295}{500} = 0{,}59,$$

$$R(97\text{ ч}) = \frac{4}{500} = 0{,}008.$$

По значениям надежности, вычисленным на основе экспериментальных данных для каждого часа, построен график зависимости надежности от времени работы (фиг. 3.7, *б*), который называется *стандартной кривой надежности*. Кривая $R=f(t)$ имеет экспоненциальную форму и проходит очень близко от теоретической кривой, описываемой уравнением $R=e^{-Ft}=e^{-t/M}$, где F — интенсивность отказов, а $M=1/F$ — средняя наработка на отказ. Это уравнение выражает *экспоненциальный закон надежности*. Две кривые не совпадают друг с другом, так как закон $R=e^{-Ft}$ основан на постоянной интенсивности отказов F. Обычно это справедливо для готовой продукции, направляемой покупателю, поскольку при испытаниях первых промышленных образцов изготовитель производит отбраковку продукции.

По данным таблицы (фиг. 3.7, *а*) вычислим интенсивность отказов F, т. е. долю элементов, вышедших из строя за единицу времени, и N — среднюю численность совокупности в рассматриваемом промежутке времени:

$$N\,(5\text{ ч}) = \frac{338+330}{2} = 334,$$

$$N\,(12\text{ ч}) = \frac{299+295}{2} = 297,$$

$$N\,(97\text{ ч}) = \frac{4+4}{2} = 4,$$

$$F\,(5\text{ ч}) = \frac{8}{334} = 0{,}024,$$

$$F\,(12\text{ ч}) = \frac{4}{297} = 0{,}013,$$

$$F\,(97\text{ ч}) = \frac{2}{4} = 0{,}50.$$

По этим данным построена кривая *интенсивности отказов элементов* (фиг. 3.7, *в*) как функция времени работы. Из графика видно, что в результате приработочных отказов интенсивность отказов в период испытаний, проводимых изготовителем, убывает. Во время работы интенсивность отказов невелика и постоянна, элементы выходят из строя случайным образом до конца расчетного срока службы (50 ч). Можно ожидать, что почти половина элементов будет функционировать после расчетного срока службы при непрерывном увеличении интенсивности отказов. Итак, из экспериментальных данных следует, что для изготовителя важно проводить начальные испытания

изделий для отбраковки продукции. При соответствующем контроле качества число вышедших из строя изделий можно свести к минимуму. Если потребитель имеет дело с электрическими лампами, то он может их использовать и после расчетного срока службы (до выхода из строя). Если же речь идет о телевизоре, то его элементы необходимо заменять перед концом расчетного срока службы. В этом случае отказ элемента (механического, химического или электрического) будет редким явлением и теоретически при плановом техническом обслуживании и замене элементов система должна работать бесконечно долго.

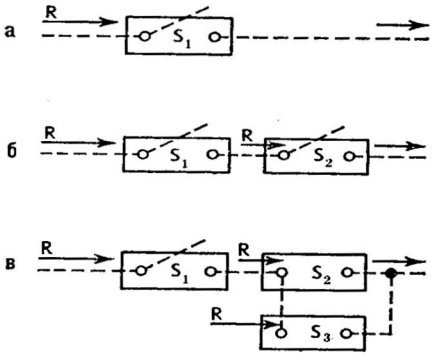
На фиг. 3. 7, *г* приведены зависимости надежности от затрат. Как и следовало ожидать, начальные затраты возрастают при увеличении надежности и достигают некоторой неприемлемой величины при попытке обеспечить надежность, равную 1. В то же время при увеличении надежности отдельных элементов стоимость эксплуатации оборудования уменьшается за счет экономии на ремонте, сокращения времени простоя и времени пуска. Общую стоимость получают, суммируя ординаты этих двух кривых. Минимальная общая стоимость C_M находится путем проведения касательной к кривой, параллельной оси абсцисс, в точке, соответствующей надежности R_M. Оптимальное отношение надежности R_0 к общей стоимости C_0 определяется путем проведения касательной к кривой через начало координат 0. Данные, подобные изображенным на фиг. 3.7, полученные для отдельных изделий, оказывают большую помощь инженерам-конструкторам в определении надежности аналогичных изделий.

Для инженеров-конструкторов и потребителей представляет интерес также средняя наработка на отказ M, которую можно вычислить по формуле $M = 1/F$.

Из фиг. 3.7, *г* ($F \approx 0{,}015$) находим, что средняя наработка на отказ составляет $M = 1/0{,}015 = 66{,}7$ ч.

Наряду с совершенствованием контроля качества и повышением прочности инженер-конструктор может увеличить надежность системы путем *резервирования*. Резервирование представляет собой дублирование элементов (включение в систему дополнительных элементов) таким образом, что в нормальных условиях дублирующий элемент не работает, но в момент отказа системы он начинает нормально функционировать. Простым примером резервирования является запасное (пятое) колесо автомобиля, которое используется только в том случае, когда спустит шина. Это колесо считается резервным элементом для данной системы.

Другой пример резервирования приведен на фиг. 3.8. Допустим, что в схеме *а* переключатель S_1 имеет надежность $R=0{,}8$ (надежность относится к способности переключателя замыкать цепь). На схеме *б* показаны элементы системы, в которой два одинаковых переключателя ($S_1=S_2$) соединены последовательно. Надежность этой



Фиг. 3.8. Системы с резервированием.

а — надежность системы равна $(S_1)=R$; *б* — надежность системы равна $(S_1)(S_2)=R^2$; *в* — надежность системы равна $[S_1(S_2S_3)]$, где вероятность исправной работы переключателей (S_2S_3) равна $S_2+S_3-S_2S_3$, откуда $S_1(S_2+S_3-S_2S_3)=R(R+R-R+R)=R(2R-R^2)=R^2(2-R)$.

системы составляет $R^2=(0{,}8)^2=0{,}64$, т. е. значительно меньше, чем в системе с одним переключателем, вследствие того, что исправная работа одного из них зависит от исправной работы другого. Поскольку по техническому заданию два переключателя должны быть соединены последовательно, конструктор может ввести резервирование, подключив третий переключатель S_3 параллельно переключателю S_2 (схема *в*). Надежность этой системы составляет $R^2(2-R)=(0{,}8)^2(2-0{,}8)=(0{,}64)\cdot(1{,}2)=0{,}768$, т. е. больше, чем надежность схемы *б*, и приближается к надежности системы с одним переключателем.

Резервирование элементов связано с увеличением стоимости, веса и размеров системы и должно тщательно изучаться заблаговременно. Резервирование полностью зависит от характера изделия. Так, оно не требуется, когда нормальное техническое обслуживание (замена отказавших деталей) не приводит к серьезным нарушениям работы системы, но необходимо, когда даже самая непродолжи-

тельная остановка или выключение системы ставит под угрозу ее функционирование. Более полную информацию о теории надежности читатель может получить из аннотированного перечня литературы в конце книги.

Инженерная программа снижения стоимости спроектированного изделия

Введение

Инженерная программа снижения стоимости изделий представляет собой систематизированную программу творческой деятельности с использованием проверенных методов, направленную на получение стандартных или даже лучших характеристик изделия при значительно меньших затратах. В отличие от известных программ снижения затрат, ориентированных на отдельные элементы изделия, эта программа ориентируется на функционирование изделия в целом. Инженерная программа снижения стоимости — это организованная деятельность, направленная на достижение оптимальной стоимости изделия, системы или услуг путем обеспечения необходимой функции при минимальных затратах и без ухудшения качества изделия.

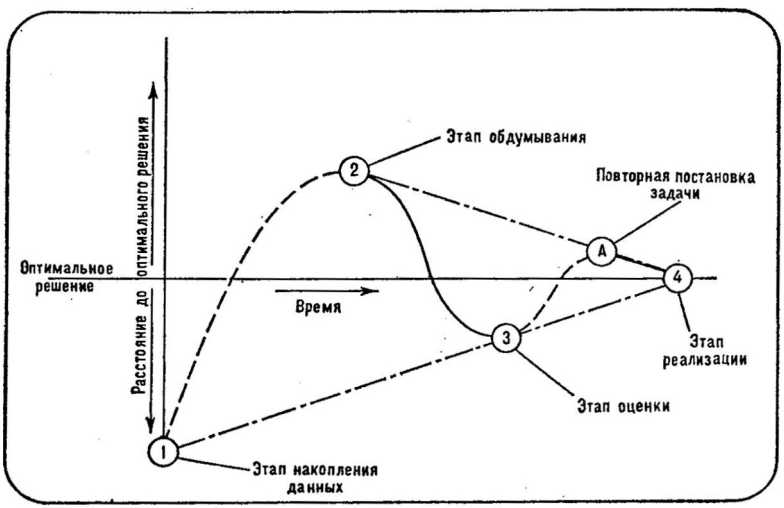
Инженерная программа снижения стоимости — это один из наилучших доступных методов увеличения прибыли и обеспечения конкурентоспособности. Имеются сведения, что на каждый доллар, вложенный в эту программу, отдача составляет до десяти и более долларов. (Это намного выше дохода от капиталовложений в промышленности, составляющего в среднем 10—15%.) Такую отдачу обеспечить нелегко, поскольку инженерная программа снижения стоимости требует привлечения персонала высокой квалификации и наличия творческого подхода. Она требует энтузиазма и уверенности в правильности принципов программы. Успех программы зависит от понимания и одобрения ее методов в самой организации. Необходимо, чтобы эта программа осуществлялась единообразно в рамках одной фирмы и пользовалась поддержкой руководителей. Нельзя, однако, рассматривать ее как универсальное средство, заменяющее обычные программы снижения затрат. Инженерная программа снижения стоимости может служить для руководства фирмы дополнительным средством определения экономической эффективности всех работников, включая инженерный персонал, на который падает

значительная доля общих расходов. Кроме того, инженерная программа снижения стоимости изделия может дать довольно наглядное представление о процессе проектирования.

Мы не будем рассматривать здесь методы снижения стоимости изделия. Однако порядок выполнения инженерной программы снижения стоимости изделия рассмотрим довольно подробно, чтобы инженер-конструктор мог получить наглядное представление о некоторых важных рациональных методах.

ЭТАПЫ ИНЖЕНЕРНОЙ ПРОГРАММЫ СНИЖЕНИЯ СТОИМОСТИ ИЗДЕЛИЯ

Хотя инженеры и руководствуются принципами инженерной программы снижения стоимости изделия в процессе проектирования, инженерная программа в целом подходит к изделию с более общих позиций. При проектировании



Фиг. 7.1. Инженерная программа снижения стоимости.
— — — поиск идей; — оценка идей; —·— уяснение задачи.

инженер может только надеяться, что ему удастся приблизиться к оптимальному решению, поскольку его интересует главным образом получение приемлемого решения. Исполнитель инженерной программы снижения стоимости, ориентируясь на стоимость и функцию изделия, может

взглянуть на конструкцию изделия как бы со стороны и тем самым помочь инженеру в создании оптимального конечного продукта.

На фиг. 7.1 показан процесс достижения оптимального решения с помощью инженерной программы снижения стоимости изделия. Процесс изображен в виде кривой, построенной вдоль оси времени и достигающей оптимального значения в точке *4*. Хотя кривая пересекает ось времени и в других точках, в эти моменты оптимальное решение еще не достигается. При переходе от одного этапа к другому осуществляется поиск идей и их оценка. Это помогает инженеру или исполнителю инженерной программы снижения стоимости достаточно глубоко разобраться в проблеме и найти оптимальное решение. Кривая, изображенная на фиг. 7.1, часто имеет дополнительные пики (например, в точке *A*). Это указывает на то, что необходимо повторить некоторые или все предыдущие этапы в случае появления дополнительной или противоречивой информации.

Этап накопления данных

На этом этапе четко формулируется задача и собираются все данные, относящиеся к ней. Затем фактические данные сообщаются высшему руководству фирмы. Если исполнитель инженерной программы снижения стоимости изделия не получит больше фактических данных, чем было известно ему ранее, он рискует не использовать все возможности.

Разбив изделие или конструкцию на функционально самостоятельные части, инженер может увязать стоимость каждой части с выполняемой ею функцией, давая, например, ответ на следующие вопросы:

Что представляет собой рассматриваемый элемент?

Какую функцию он выполняет?

Какова его стоимость?

Какие еще элементы могут выполнять эту функцию?

Какова будет их стоимость?

Изолируя отдельные элементы и применяя систематический подход к поиску и оценке каждого из них, находят соответствующие стоимости. Следовательно, инженерная программа снижения стоимости представляет собой последовательное изучение специфики каждого элемента изделия.

Этап обдумывания

Этот этап предполагает творческую работу мысли, когда требуется множество идей. После того как функция изделия четко определена и сформулирована в простейших выражениях, идеи принимают форму альтернативных изделий, материалов или методов и перечисляются без высказывания суждений об их истинной ценности. Нельзя создавать никаких препятствий, способных оборвать творческую мысль.

Этап оценки

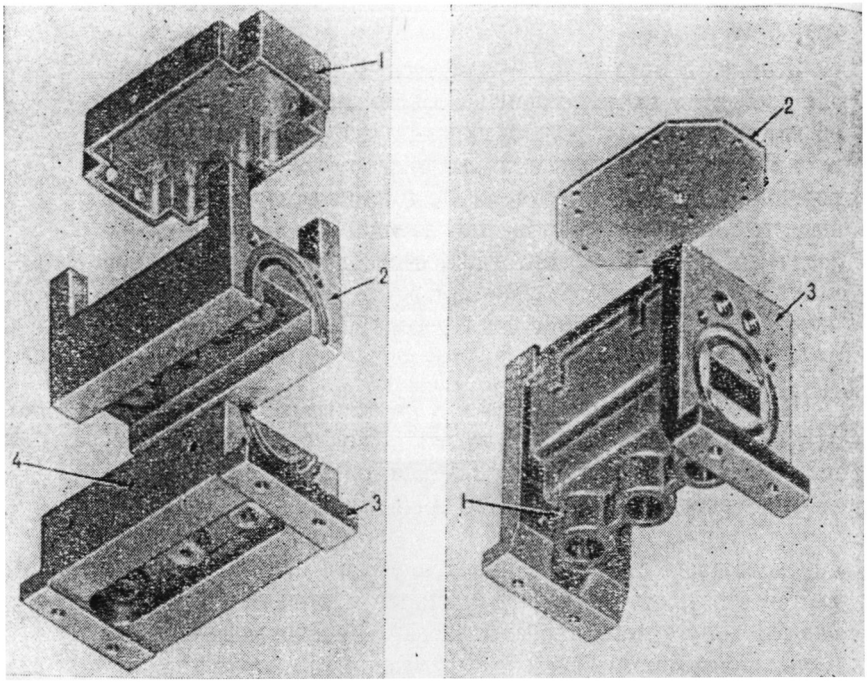
На этом этапе оцениваются и уточняются все идеи, полученные на этапе обдумывания. Уточнение идей осуществляется с экономической точки зрения: требуется создать некоторую функциональную модель, достаточно точно отражающую реальные экономические факторы, определяющие стоимость проектируемого изделия. Оценивается стоимость реализации основной идеи и устанавливаются допустимые пределы затрат. Необходимо расходовать деньги фирмы экономно и всюду, где возможно, использовать стандартные детали.

Этап реализации идеи

Рекомендации по снижению стоимости изделия получают документальное выражение и обеспечивается их выполнение. Фиксируются затраты, указывается размер экономии и назначаются исполнители, ответственные за выполнение рекомендаций в приемлемое время.

ПРИМЕР ИНЖЕНЕРНОЙ ПРОГРАММЫ СНИЖЕНИЯ СТОИМОСТИ ИЗДЕЛИЯ

Для более полного понимания этих четырех этапов инженерной программы снижения стоимости изделия рассмотрим их применение на примере реальной задачи: снижение стоимости корпуса и крышки переключателя, изготавливаемого фирмой «Микровейв ассошиэйтс». Эта конструкция используется для соединения СВЧ-волноводов и крепления элементов. В настоящее время изготавливается переключатель из трех частей (фиг. 7.2) с тем, чтобы можно было механически обрабатывать прямоугольный паз. Расходы на изготовление этой конструкции очень велики. Изготовление корпуса переключателя, состоящего из двух частей, осуществляется в несколько этапов:



Фиг. 7.2. Первоначальная конструкция корпуса и крышки переключателя (до выполнения инженерной программы снижения стоимости).

1 — крышка; *2* — верхняя часть корпуса; *3* — нижняя часть корпуса; *4* — отверстия для стопорных винтов.

Фиг. 7.3. Окончательная конструкция корпуса и крышки переключателя (после выполнения инженерной программы снижения стоимости).

1 — отверстия для стопорных винтов; *2* — крышка; *3* — корпус.

1. Поставщик частично обрабатывает эти две детали, упаковывает и отправляет их фирме.

2. Фирма получает детали, проверяет их, проводит твердую пайку погружением в расплавленный алюминий и осуществляет приемку корпуса. Затем она отправляет корпус в собранном виде поставщику.

3. Поставщик проводит чистовую обработку корпуса и отправляет его фирме.

4. Фирма получает корпус и осуществляет его приемку.

На фиг. 7.3 показана конструкция корпуса и крышки переключателя, изготовленная в соответствии с рекомендациями по программе снижения стоимости. Первоначальная конструкция корпуса, состоящая из верхней и нижней частей, заменена единой деталью, изготовленной методом

точного литья по выплавляемым моделям и имеющей значительно меньший вес. При этом не только существенно снижена стоимость корпуса, но и получено изделие, имеющее более привлекательный вид. Крышка представляет собой отдельную плоскую штампованную деталь (на ней можно легко собрать электронную схему и затем вставить ее внутрь корпуса). Изменение места расположения винтовых отверстий облегчает сборку новой конструкции, что позволяет снизить трудозатраты. Сравнение затрат на изготовление первоначального и нового изделия показывает, что инженерная программа снижения стоимости изделия позволила снизить затраты на 70%.

	Первоначальная конструкция	Конструкция, полученная после завершения инженерной программы снижения стоимости
Стоимость крышки, долл.	10,50	1,16
Стоимость корпуса, долл.	79,50	23,30
Приведенные затраты на инженерную программу снижения стоимости		2,00
Сумма	90,00	26,46

Снижение стоимости изделия при изготовлении партии из 800 единиц составило 70%

НАЗНАЧЕНИЕ ЦЕНЫ И ГРАНИЦА РЕНТАБЕЛЬНОСТИ

Перейдем к рассмотрению стратегии, связанной с назначением цены изделия. По этому вопросу имеется обширная литература, и существуют самые противоречивые мнения о теории или искусстве назначения цены изделия. Назначение цены можно определить как метод установления продажной цены изделия (или услуги), которая бы удовлетворяла покупателя и в то же время обеспечивала максимальную прибыль. Методы назначения цены связаны с изучением следующих вопросов:

Будет ли назначенная цена конкурентоспособной?

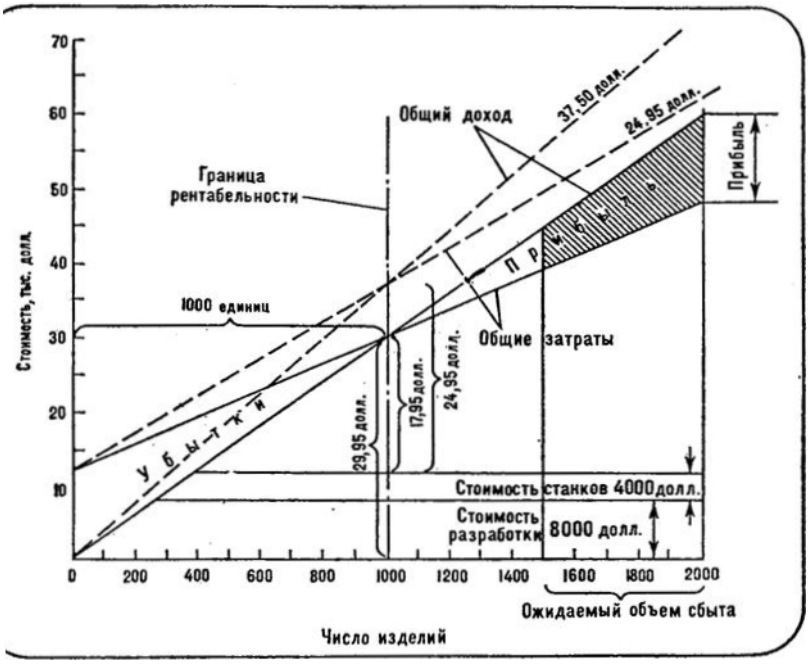
Сколько изделий предполагается продать?

Не произойдет ли в течение периода жизни изделия

увеличения расхода материалов, трудовых затрат и накладных расходов?

Если это новое изделие, то для какой части населения или отрасли промышленности оно представляет интерес?

Кто будет покупать это изделие?



Фиг. 7.4. График рентабельности.

Одно из основных правил при назначении цены изделия состоит в том, что устанавливают нижний предел стоимости изделия (с учетом доставки) и верхний предел конкурентоспособной цены. Однако сделать это не совсем просто, поскольку специалисты по сбыту должны дать достаточно точный прогноз, позволяющий количественно (в виде цены изделия) выразить ценность продукта для покупателя в некоторый момент времени.

Существуют методы, помогающие руководителям фирм определить оптимальную цену изделия (оптимальную в том смысле, что такая цена должна обеспечить получение требуемой прибыли, продажу определенного числа изделий предполагаемой группе населения и поднять репутацию фирмы). Один из таких методов основан на применении графика рентабельности, позволяющего графически

представить прибыль и потери, исходя из прежней цены и стоимости изготовления изделия.

Рассмотрим график рентабельности, изображенный на фиг. 7.4. По горизонтальной оси откладывается число изделий, а по вертикальной — стоимость в долларах. Пусть стоимость разработки изделия составляет 8000 долл. (прямая, параллельная оси абсцисс). Она включает затраты на проектирование, изготовление чертежей, создание моделей и опытных образцов, предварительные испытания и другие расходы до начала производства, кроме административных затрат и накладных расходов предприятия. Стоимость станков (затраты на приобретение новых станков и переоборудование имеющихся для изготовления изделия) наносится также на график (в нашем примере 4000 долл.). Если ожидаемый объем сбыта составляет 1600—2400 изделий, а стоимость изготовления одного изделия 17,95 долл., то можно построить прямую общей стоимости. Допустим, что продажная цена изделия принята равной 29,95 долл. Построим прямую общего дохода, которая пересечет прямую затрат в точке рентабельности. Граница рентабельности отделяет область прибыли (справа) от области убытков (слева).

Если по некоторым причинам стоимость изготовления одного изделия возрастет до 24,95 долл. (прямая общей стоимости в этом случае на графике показана пунктирной линией), то для получения почти такой же прибыли изделие необходимо продавать по цене 37,50 долл. Из графика видно, что при фиксированной стоимости изготовления изделия и перемещении границы рентабельности влево или вправо произойдет снижение или увеличение прибыли, и тем самым назначение продажной цены будет производиться на основе ожидаемой прибыли. Возможно также решение обратной задачи — определить на основе графика влияние стоимости изготовления изделия на прибыль. Для этого устанавливается фиксированная продажная цена и перемещается граница рентабельности, чтобы определить изменение стоимости и числа изделий, которое должно быть продано для получения требуемой прибыли.

ПОЛИТИКА НАЗНАЧЕНИЯ ЦЕН НА НОВЫЕ ИЗДЕЛИЯ

Цена на новые изделия должна назначаться с учетом динамического характера их конкурентоспособности. Новые изделия необычны для политики цен в том смысле, что

после их изобретения и выдачи патента они медленно поступают на рынок, ибо возможные рынки их сбыта еще не изучены. После того как изделие станет пользоваться спросом, его производство быстро увеличивается. Новый цикл начинается тогда, когда вследствие появления нового конкурентоспособного изделия рассматриваемое изделие постоянно теряет свои преимущества по сравнению с изделиями, которым оно пришло на смену. Наконец новое изделие превращается в обычный товар, мало чем отличающийся от других изделий, для которых самостоятельность фирмы при назначении цены ограничена.

Изменения политики содействия в продаже товара, изменения стоимости производства и величины сбыта товара, а также колебания цен в течение цикла жизни изделия требуют внесения поправок в политику цен. Назначение конкурентоспособных цен в течение цикла зависит от трех факторов, обычно не связанных друг с другом:

1. *Техническое совершенство,* которое выражается в снижении стоимости разработки изделия, развитии стандартизации и повышении стабильности производственных процессов.

2. *Устойчивый сбыт.* Признаком его является наличие спроса на товар и уверенность в том, что изделие имеет хорошие характеристики.

3. *Конкурентоспособность,* определяемая увеличивающейся стабильностью рынков сбыта и структуры цен.

Затруднения в назначении цены возникают тогда, когда фирма разрабатывает изделие, которое коренным образом отличается от существующих изделий и временно защищается от конкуренции с помощью патентов, сохранения в секрете способов производства и т. п. Примерами изделий такого рода являются шариковые ручки, фотоаппараты и пленка «Поляроид», множительные аппараты «Ксерокс», алюминиевые приставные веранды для домов, замороженные полуфабрикаты и воздушные турбины для бормашин. Проблему назначения цен на новые изделия фирма решает в несколько этапов.

Этап 1. Оценка спроса

При оценке спроса на новое изделие учитываются следующие факторы: 1) будет ли изделие вообще пользоваться спросом (при назначении конкурентоспособной цены); 2) в каком интервале цен изделие будет привлекать покупателей; 3) какой объем сбыта можно ожидать в различных интервалах цен; 4) какую реакцию вызовет появление нового изделия у изготовителей и продавцов.

Этап 2. Принятие решения об объеме сбыта

Для принятия решения об объеме сбыта необходимо получить ответ на несколько вопросов:

Какой объем сбыта в конечном счете требуется для нового изделия?

В какой мере новое изделие согласуется с существующим ассортиментом товаров?

Какие методы производства следует использовать?

Каковы возможные каналы распределения продукции?

Основным критерием, учитываемым при ответе на эти вопросы, является характер изменения стоимости производства и стоимости распределения.

Этап 3. Планирование мероприятий по содействию продаже нового изделия

Первоначальные затраты на создание благоприятных условий для сбыта входят в расходы на создание нового изделия и не могут быть компенсированы, пока не начнется его продажа. Одной из основных стратегических проблем является определение правильного соотношения между ценой изделия и затратами на создание благоприятных условий для его сбыта с целью максимизировать долгосрочную прибыль. Для этого устанавливают относительно высокую цену изделия на начальной стадии, увеличивают одновременно скидку на рекламу и оптовую продажу и покрывают начальные затраты на создание благоприятных условий для сбыта нового изделия. Можно также с самого начала установить низкие цены и иметь небольшую разницу между продажной ценой и себестоимостью, чтобы обескуражить возможных конкурентов, особенно когда такие защитные меры, как патенты, каналы распределения или методы производства, перестают быть эффективными.

Этап 4. Выбор каналов распределения

Определение затрат на перемещение изделия от предприятия по каналам распределения к потребителю входит в процедуру назначения цены. Эти затраты должны включать стоимость хранения товаров на складе, стоимость транспортной обработки грузов, стоимость обработки заказов, обеспечение прибыли и т. д.

После рассмотрения этих факторов окончательным решением при назначении цены нового изделия будет выбор между политикой А и политикой Б. Политика А состоит

в установлении высокой первоначальной цены, позволяющей «снять сливки» при продаже изделия, пользующегося спросом. Политика Б состоит в установлении с самого начала низкой цены как активного средства завоевания рынка сбыта.

Политика А

Установление относительно высокой цены, вызванное большими расходами на создание благоприятных условий для сбыта на первом этапе, и установление на последующих этапах более низких цен оказалось успешным для новых изделий, которые существенно отличаются от имеющихся товаров. Примерами таких товаров являются одеяло с электрическим подогревом, мусоросборщик («электрическая свинья») и машина для мойки посуды. На первых порах потребитель не знает истинной ценности этих товаров, так как он не может их сравнивать с обычными товарами.

Суть этой политики состоит в том, что установление высокой начальной цены основано на «снятии сливок» при продаже изделия, пользующегося спросом, когда объем сбыта мало зависит от цены и изделие постепенно приобретает популярность. При последующем снижении цены последовательно подключаются менее благоприятные участки рынка. Примером такой стратегии является систематическое снижение цены фотоаппарата «Поляроид», который вначале стоил около 200 долл., а теперь его можно купить за 16,50 долл.

Политика Б

Методом, противоположным описанному выше, является установление низкой цены на изделие, что обеспечивает с самого начала массовое проникновение на рынок. Для этого необходимо иметь достаточно большой объем сбыта. Как только такой объем достигается, цена постепенно повышается. В данном случае необходимо быстро продать товар большому числу покупателей, не получая при этом больших доходов или преимуществ. Такой активный метод проверки возможностей расширения сбыта путем назначения с самого начала низкой цены требует проведения исследований, прогнозирования и определенной смелости. Примером этой политики может служить продажа журнала «Плейбой», который вначале стоил 50 центов. После того как читатели познакомились с этим изданием и журнал приобрел большую популярность, его тираж значительно

вырос, стоит он теперь 1 долл., а его основатели получают многомиллионные прибыли.

Как только достигается устойчивый сбыт изделия и дальнейшего увеличения сбыта нельзя добиться путем изменения модели, фасона, отделки и т. д., то это считается признаком морального старения изделия, и фирма должна немедленно снизить его продажную цену. Такое снижение цены не означает установление бросовых цен или объявление войны цен, что было бы разорительно для любой фирмы. Оно производится для получения прибыли и оживления сбыта изделия. Подобная тактика позволяет изучить возможности совершенствования изделия. Продажная цена изделия, ненамного превышающая себестоимость, обычно устанавливается для товаров, имеющих невысокое качество или репутацию. Покупатели обычно рассуждают так: «что заплатишь, то и получишь».

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование — сравнительно новый метод исследования операций. Он основан на построении математической модели для задачи, в которой требуется найти некоторое оптимальное решение (например, максимальную прибыль, минимальные затраты или минимальный расход материалов).

С математической точки зрения это означает нахождение оптимального решения системы линейных уравнений и неравенств, которое называется планом (программой). Рассмотрим пример математической формулировки типичной задачи линейного программирования.

Максимизировать

$$X = 10A + 8B + 12C,$$

где A, B, $C \geqslant 0$,

при ограничениях

$$6A + 9B + 7C \geqslant 6000,$$

$$2A + CB + 3C \geqslant 3000,$$

$$A + 5B + 2C \leqslant 4000,$$

$$A + B + C = 1500.$$

Появление линейного программирования относится к 1758 г., когда экономисты начали описывать экономические системы с помощью математических выражений. Дей-

ствительно, грубый пример модели линейного программирования можно найти в книге Кесне «Tableau Economique», где сделана попытка показать экономические взаимоотношения между землевладельцами, крестьянами и ремесленниками.

Возможность применения линейного программирования для решения повседневных задач была неизвестна до 1947 г. Метод линейного программирования был разработан впервые Дж. Данцигом[1]. Интерес к этому новому разделу исследования операций значительно возрос после первого симпозиума по линейному программированию (1951 г., Вашингтон). Симпозиум способствовал широкому применению линейного программирования на частных предприятиях.

Построение модели линейного программирования и отыскание оптимального решения в линейной форме поясним на следующем примере. Хотя это довольно простой пример и его можно решить методом проб и ошибок или путем изменения значений одной переменной, приобретенные здесь навыки и знания помогут в решении более общих и сложных задач.

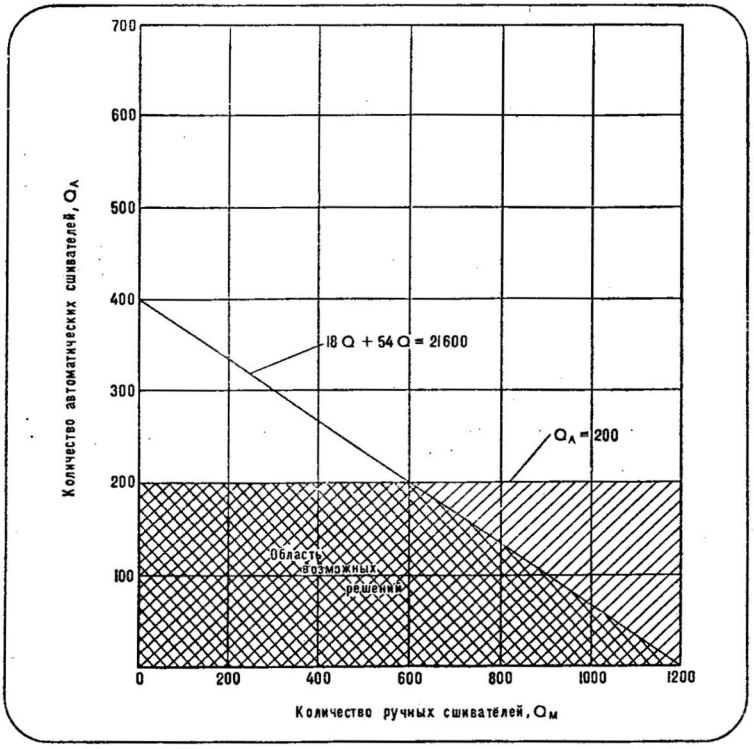
Фирма, изготавливающая настольные сшиватели и другое канцелярское оборудование, выпускает сшиватели двух моделей (ручные и автоматические сшиватели). Ручной сшиватель продается по цене 12,5 долл. и приносит прибыль 2 долл. Автоматический сшиватель (с соленоидом, приводимым в действие от аккумулятора) стоит 31,25 долл. и дает прибыль 5 долл. Фирму интересует, каким способом использовать производственные мощности, чтобы обеспечить максимальную прибыль. Первое ограничение, налагаемое на максимальную прибыль, можно записать в следующем виде:

$$P = 2\,Q_M + 5\,Q_A,$$

где P — функция прибыли, Q_M — количество ручных сшивателей, Q_A — количество автоматических сшивателей.

Предположим, что производственный процесс допускает полную взаимозаменяемость рабочей силы и производственного оборудования, и поэтому за один и тот же день может быть изготовлено различное количество ручных и автоматических сшивателей. Допустим также, что спрос

[1] Автор неточен. Общая постановка задачи линейного программирования впервые дана в 1939 г. советским математиком Л. В. Канторовичем в работе «Математические методы в организации и планировании производства» (Изд-во ЛГУ, 1939). Им же был дан метод решения задачи линейного программирования («метод разрешающих множителей»). — *Прим. перев.*



Фиг. 7.5. Задача линейного программирования с ограничениями на запас соленоидов и сборку.

на сшиватели таков, что фирма может продать столько сшивателей, сколько сумеет их изготовить. Существуют некоторые ограничения производственного характера: большинство основных узлов собирается на отдельных сборочных линиях, откуда они поступают на участок окончательной сборки; имеется запас узлов для сшивателей обоих типов, достаточный для удовлетворения дневной потребности производства, за исключением соленоидов для автоматической модели. Поэтому дневное производство автоматических сшивателей не может превышать 200 штук. Это ограничение можно записать в математической форме $Q_A \leqslant 200$ и представить графически (прямая, параллельная оси абсцисс на фиг. 7.5).

Заштрихованная область под этой прямой показывает количество сшивателей, которое можно изготовить при

данном ограничении. Итак, максимальное количество автоматических сшивателей, которое можно изготовить за день, равно 200, а на количество ручных сшивателей ограничения не налагаются.

Допустим, что изготовление и сборка ручного сшивателя требуют 18 человеко-минут, а автоматического сшивателя — 54 человеко-минуты. На заводе эту работу выполняют 45 человек в течение одной смены продолжительностью 8 ч. Следовательно, на один день приходится $(8 \cdot 45 \cdot 60) = 21\,600$ человеко-минут. Это условие можно выразить в математической форме

$$18\,Q_M + 54\,Q_A \leqslant 21600$$

и также представить графически. Область возможных решений теперь имеет вид выпуклого многоугольника.

Окончательная наладка ручного сшивателя на сборочной линии требует 3 человеко-минуты, а автоматического — 5,4 человеко-минуты. Поскольку на этой операции занято 6 человек, то на окончательную наладку имеем $(8 \cdot 6 \cdot 60) = 2880$ человеко-минут. Это ограничение записывается в следующем виде:

$$3Q_M + 5{,}4\,Q_A \leqslant 2880.$$

На окончательную проверку работоспособности изделия требуется 1 человеко-минута для ручного сшивателя и 1,5 человеко-минуты для автоматического. Эту работу выполняют четыре контролера, занятые в течение 50% времени. Следовательно, на эту операцию каждый день приходится $8 \cdot 2 \cdot 60 = 960$ человеко-минут.

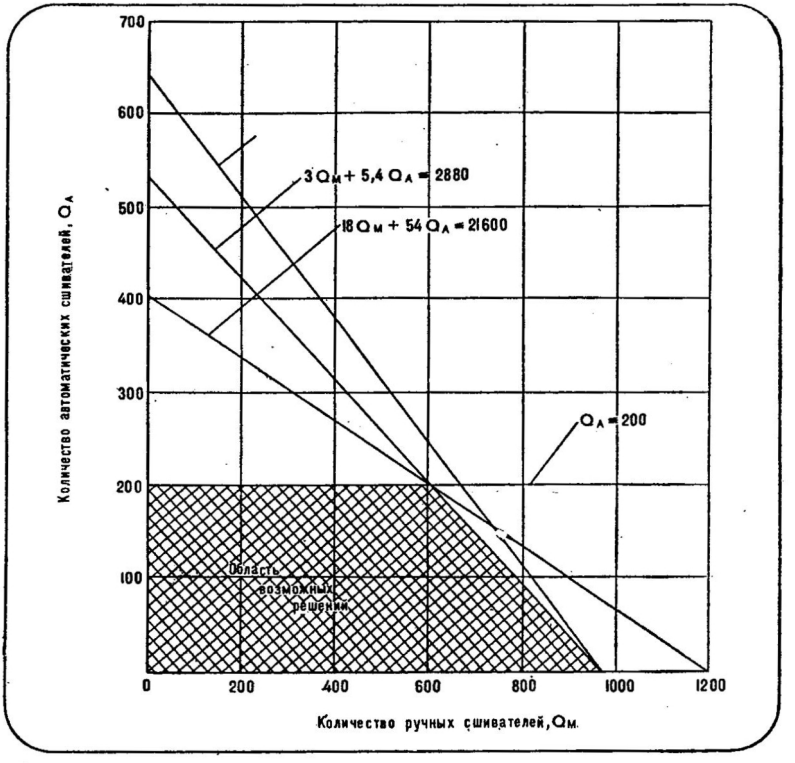
Это ограничение имеет вид

$$1{,}0Q_M + 1{,}5\,Q_A \leqslant 960.$$

Графическое представление ограничений на наладку и окончательную проверку дано на фиг. 7.6. Видно, что ограничение на наладку несколько сужает область возможных решений, а ограничение на окончательную проверку не влияет на максимизацию прибыли, поэтому его можно считать лишним и не рассматривать как границу выпуклого многоугольника.

Теперь мы видим, что любая комбинация значений Q_A и Q_M в пределах выпуклого многоугольника, т. е. в пределах области практической осуществимости, является возможным решением. Однако оптимальное решение должно удовлетворять записанному выше уравнению для функции прибыли

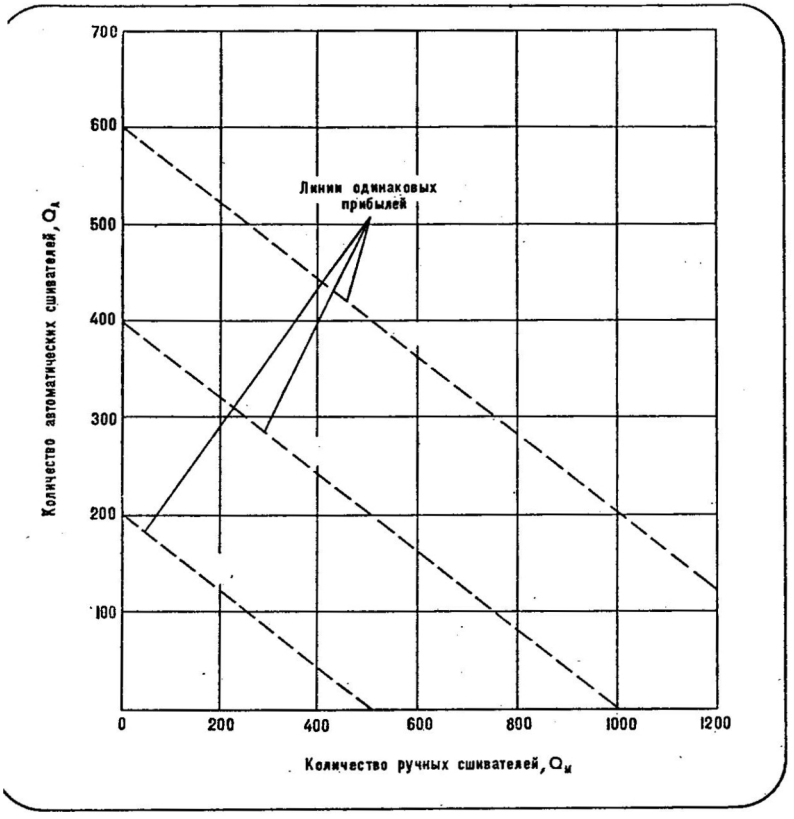
$$P = 2\,Q_M + 5Q_A.$$



Фиг. 7.6. Задача линейного программирования с ограничениями на запас соленоидов, сборку, наладку и проверку изделий.

Построив графики этой функции (параллельные прямые на фиг. 7.7), обнаруживаем, что чем дальше отстоит прямая от начала координат, тем больше прибыль. Эти прямые называются также линиями одинаковой прибыли, так как при движении вдоль прямой прибыль в любой точке постоянна.

Окончательное решение находится путем определения наиболее удаленной линии одинаковой прибыли, в которой хотя бы одна точка относится к области возможных решений (фиг. 7.8). Таким образом, точка максимальной прибыли определяет оптимальные условия ведения производства. Из фиг. 7.8 следует, что оптимальным решением будет изготовление 600 ручных сшивателей ежедневно. При этом обеспечивается прибыль в размере 2200 долл.



Фиг. 7.7. Линии одинаковых прибылей.

Итак, рассматриваемую задачу линейного программирования можно представить в следующем виде:

Максимизировать прибыль

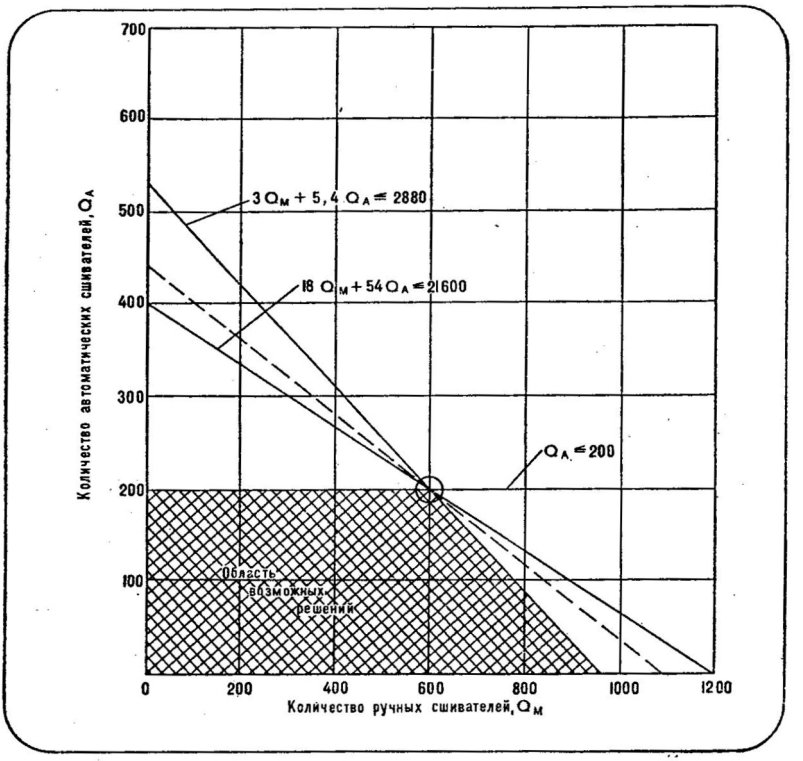
$$P = 2\,Q_M + 5Q_A$$

при ограничении на суточный запас соленоидов

$$Q_A \leqslant 200,$$

на суточные трудозатраты на операциях сборки

$$18Q_M + 54Q_A \leqslant 21\,600,$$



Фиг. 7.8. Решение задачи линейного программирования.

на трудозатраты на окончательный наладке

$$3Q_M + 5{,}4\,Q_A \leqslant 960$$

и на трудозатраты при окончательной проверке

$$1{,}0Q_M + 1{,}5\,Q_A \leqslant 960.$$

Последнее ограничение оказывается лишним.

Хотя мы решили задачу на максимум, рассмотренный метод решения одинаково приемлем и для задач на минимум. Его можно использовать для решения задач на регулирование ресурсов и рабочей силы с целью получения дополнительной прибыли.

Список литературы

1. Ф.Ханзен. Основы общей методики конструирования. Систематизация конструирования. Л.: «Машиностроение», 1969, 164 с.

2. Хилл П. Наука и искусство проектирования. Пер. с англ.– М., Мир, 1973.-263 с.

3. Дитрих Я. Проектирование и конструирование. Системный подход. Пер. с польск. М., Мир, 1981,

4. Амиров Ю.Д. Основы конструирования. М., «Машиностроение», 1991.

5. Реймерс А.Н. Основы конструирования машин. М., «Машиностроение», 1965.

6. Орлов П.И. Основы конструирования. М., «Машиностроение», книги 1 и 2 , 1972.

7.Шелофаст В.В. Основы проектирования машин. М.: Изд-во АПМ, 2000, 472 с.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК