

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Самарский государственный аэрокосмический университет имени
академика С.П. Королева

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Методические указания

Самара 2003
Составитель: к.т.н., доцент Дегтярев А.А.

УДК 519.6

Разностные методы решения дифференциальных уравнений:

Метод. указания / Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. Дегтярев А.А. Самара, 2003. 28 с.

Методические указания включают краткие теоретические сведения и задачи по общей теории разностных уравнений и разностным методам (одношаговым и многошаговым) решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 510200 – прикладная математика и информатика и могут быть использованы как при проведении аудиторных практических занятий, так и для организации самостоятельной работы студентов по курсу «Численные методы».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева.

Рецензент: д-р.физ.-матем. наук, проф. А.И. Жданов

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ, Администрации самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы “Фундаментальные исследования и высшее образование” (BRHE).

Общие сведения

В связи с увеличением числа и усложнением задач, решаемых с помощью компьютеров, постоянно растут требования к эффективности соответствующих методов решения. Современный специалист в области прикладной математики и информатики должен не только знать существующие методы и алгоритмы, но и уметь их модифицировать, исходя из особенностей решаемой задачи, а в случае необходимости – разработать свой оригинальный метод.

Настоящие методические указания должны послужить развитию и закреплению навыков построения и анализа разностных схем, предназначенных для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Линейные разностные уравнения

Предположим, что в некоторой одномерной области изменения переменной x задано семейство точек x_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ($\dots x_{-k-1} < x_{-k} < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1}$). Такое семейство будем называть сеткой, а принадлежащие ему точки x_i – узлами сетки. Всякую функцию $y_i = y(x_i)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, определенную в узлах сетки, будем называть сеточной функцией. Очевидно, что семейство Y всевозможных сеточных функций, определенных на одной и той же сетке, образует линейное пространство.

Зададим на множестве значений сеточной функции $y_i = y(x_i)$,
 $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ некоторую функцию $F = F(\dots, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots)$.
 Уравнение вида

$$F(\dots, y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots) = 0; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

будем называть сеточным уравнением [1,2].

Введем разности

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i;$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i;$$

.....

$$\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i.$$

Если уравнение (1) может быть представлено в виде

$$\tilde{F}(y_i, \Delta y_i, \dots, \Delta^m y_i) = 0; \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

то оно называется разностным уравнением m-го порядка.

Пусть дано линейное сеточное уравнение вида

$$a_i^0 y_i + a_i^1 y_{i+1} + a_i^2 y_{i+2} + \dots + a_i^m y_{i+m} = f_i;$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3)$$

Если $a_i^0 \neq 0$ и $a_i^m \neq 0$, то уравнение (3) является разностным
 порядка m.

Рассмотрим однородное линейное разностное уравнение

$$a_i^0 y_i + a_i^1 y_{i+1} + a_i^2 y_{i+2} + \dots + a_i^m y_{i+m} = 0 ;$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Теорема 1. Если сеточные функции $v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^k$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются решениями уравнения (4), то и функция $y_i = \sum_{n=1}^k c_n v_i^n$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), где c_n ($n = \overline{1, k}$) - постоянные, также является решением этого уравнения.

Теорема 2. Если $v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^m$ - линейно-независимая система решений уравнения (4), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_i = \sum_{n=1}^m c_n v_i^n, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где c_n ($n = \overline{1, m}$) - произвольные постоянные.

Теорема 3. Общее решение неоднородного уравнения (3) может быть представлено в виде суммы его частного решения и общего решения однородного уравнения (4).

Для однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$a_0 y_i + a_1 y_{i+1} + a_2 y_{i+2} + \dots + a_m y_{i+m} = 0. \quad (5)$$

решение удобно искать в виде

$$y_i = \mu^i, \quad (6)$$

где μ^i - есть i -тая степень числа μ .

После подстановки выражения (6) в уравнение (5) получим характеристическое уравнение

$$a_0 + a_1 \mu + a_2 \mu^2 + \dots + a_m \mu^m = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) имеет m корней. Если все корни μ_k ($k = \overline{1, m}$) различны, то система функций $v_i^k = \mu_k^i$ ($k = \overline{1, m}$) будет линейно независимой. Тогда общее решение уравнения (5) легко записать, пользуясь теоремой 2.

Рассмотрим случай, когда имеются кратные корни. Пусть μ_k ($k = \overline{1, r}$) - корень кратности p_k ($\sum_{k=1}^r p_k = m$). Тогда система линейно независимых решений однородного уравнения (7) может быть получена объединением r подсистем вида:

$$\left\{ \mu_k^i; i \mu_k^i; i^2 \mu_k^i; \dots; i^{p_k-1} \mu_k^i \right\}, \quad k = \overline{1, r}.$$

Задачи.

Найти общее решение разностного уравнения:

1. $16u_{i+1} + 24u_i + 9u_{i-1} = 0.$
2. $u_{i+1} + 20u_i + 25u_{i-1} = 0.$
3. $6u_{i+1} - 5u_i + u_{i-1} = 0.$
4. $2u_{i+1} - 5u_i + 2u_{i-1} = 0.$
5. $u_{i+1} - 4u_i + 4u_{i-1} = 0.$
6. $9u_{i+1} - 6u_i + u_{i-1} = 0.$
7. $u_{i+1} - 4u_i - 5u_{i-1} = 0.$
8. $24u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = 0.$
9. $49u_{i+1} - 14u_i + u_{i-1} = 0.$
10. $u_{i+1} + 6u_i + 8u_{i-1} = 0.$

Найти общее вещественное решение разностного уравнения:

11. $u_{i+1} + 9u_{i-1} = 0.$
12. $5u_{i+1} - 6u_i + 5u_{i-1} = 0.$
13. $u_{i+1} - \sqrt{3}u_i + u_{i-1} = 0.$
14. $5u_{i+1} + 8u_i + 5u_{i-1} = 0.$
15. $u_{i+1} + 2u_i + 2u_{i-1} = 0.$
16. $4u_{i+1} - 4u_i + 5u_{i-1} = 0.$
17. $49u_{i+1} + 4u_{i-1} = 0.$
18. $9u_{i+1} - 18u_i + 10u_{i-1} = 0.$
19. $u_{i+1} + \sqrt{2}u_i + u_{i-1} = 0.$
20. $u_{i+1} - u_i + u_{i-1} = 0.$

Найти произвольное частное решение неоднородного разностного уравнения:

21. $u_{i+1} - u_i + u_{i-1} = 1$.

22. $u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = (-1)^{i+1}$.

23. $u_{i+1} - u_i + u_{i-1} = (-1)^i$.

24. $u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = \sin \frac{\pi i}{2}$.

25. $u_{i+2} - u_{i+1} + u_i - u_{i-1} = \cos \frac{\pi i}{2}$.

26. $u_{i+2} - u_{i+1} + u_i - u_{i-1} + u_{i-2} = \sin^2 \frac{\pi i}{2}$.

27. $u_{i+2} - u_{i+1} + u_i - u_{i-1} = 1$.

28. $u_{i+1} - 2u_i + 2u_{i-1} - u_{i-2} = \sin^2 \frac{\pi(i+1)}{2}$.

29. $u_{i+1} - u_i - u_{i-1} + u_{i-2} = \cos \pi i$.

30. $u_{i+2} - u_i + u_{i-2} = 1$.

31. Найти при $i \geq 0$ ограниченное решение разностного уравнения

$$u_{i+1} - \frac{10}{3}u_i + u_{i-1} = 0, \text{ удовлетворяющее условию } u_0 = 1.$$

32. Найти миллионный член последовательности чисел Фибоначчи
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

33. Найти решение разностной краевой задачи

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = 0, \quad i = \overline{1, n-1},$$

$$u_0 = a, \quad u_n = b.$$

Решить спектральную задачу:

34.
$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = -\lambda u_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = 0, & u_n = 0. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \lambda u_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = 0, & u_n = 0. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \lambda u_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = 0, & u_n = u_{n-1}. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \lambda u_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ u_0 = u_1, & u_n = u_{n-1}. \end{cases}$$

2. Построение одношаговых разностных методов решения задачи Коши требуемого порядка точности.

Одношаговыми методами решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

называются приближенные методы, в которых решение в очередном узле сетки t_{i+1} ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$) ищется в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h_i \sum_{j=1}^r p_j F_j, & h_i &= t_{i+1} - t_i; \\ F_j &= f(t_i + \alpha_j h_i, x_i + h_i \sum_{k=1}^{j-1} \beta_{jk} F_k), & \alpha_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Здесь x_{i+1} - приближенное решение задачи (2.1) в точке t_{i+1} , то есть

$$x_{i+1} = x(t_{i+1}) + O(h_i^{S+1});$$

S – порядок точности метода;

p_j, α_j и β_{jk} - коэффициенты метода ($j = \overline{1, r}; k = \overline{1, j-1}$).

Процедура построения метода по формулам (2.2) заданного порядка точности состоит в том, что функцию локальной погрешности метода на i -том шаге

$$\varepsilon_i(h_i) = x(t_{i+1}) - x_{i+1}$$

разлагают в ряд по степеням h_i (при этом считается, что $x_i = x(t_i)$) и, используя условие $\varepsilon_i(h_i) = O(h_i^{s+1})$, находят соотношения, связывающие коэффициенты метода p_j, α_j и β_{jk} . Из этих соотношений и находят числовые значения коэффициентов метода, налагая при этом дополнительные условия, так как получаемая система уравнений, как правило, не замкнута.

Для разложения в ряд функции ε_i понадобятся формулы дифференцирования сложных функций $f(t, x)$ и $F_j(h_i)$. Приведем известные правила [3].

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f = Df; \\ \frac{d^2 f}{dt^2} &= D\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} f + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2 + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f \right) = D^2 f + \frac{\partial f}{\partial x} Df; \\ \frac{d^3 f}{dt^3} &= D\left(\frac{d^2 f}{dt^2}\right) = D^3 f + 3D\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) Df + \frac{\partial f}{\partial x} D^2 f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 Df; \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вообще производную любого порядка от функции $\varphi(t, x(t))$ легко получить, если воспользоваться рекуррентным соотношением для оператора D :

$$D(D^n \varphi) = D^{n+1} \varphi + n D^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) D \varphi. \quad (2.4)$$

Более сложным образом вычисляются производные по h_i от функций $F_j(h_i)$.

Рассмотрим сначала функцию $F_1(h_i) = f(t_i, x_i)$. Очевидно, что

$$\frac{d^l F_1}{dh_i^l} = 0; \quad l = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Возьмем теперь функцию $F_2(h_i) = f(t_i + \alpha_2 h_i, x_i + \beta_{21} h_i F_1)$ и вычислим несколько ее производных:

$$\begin{aligned} \frac{dF_2}{dh_i} &= \frac{\partial f}{\partial t} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial x} \beta_{21} F_1; \\ \frac{d^2 F_2}{dh_i^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \alpha_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \alpha_2 \beta_{21} F_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \beta_{21}^2 F_1^2; \end{aligned} \quad (2.6)$$

.....

Нетрудно заметить, что в общем случае

$$\frac{d^l F_2}{dh_i^l} = \sum_{\mu=0}^l \frac{\partial^l f}{\partial t^{l-\mu} \partial x^\mu} C_l^\mu \alpha_2^{l-\mu} \beta_{21}^\mu F_1^\mu. \quad (2.7)$$

В соотношениях (2.6) и (2.7) значения частных производных от функции $f(t, x)$ вычисляются при значениях аргументов $t = t_i + \alpha_2 h_i$ и $x = x_i + \beta_{21} h_i F_1$.

Рассмотрим следующую функцию

$F_3(h_i) = f(t_i + \alpha_3 h_i, x_i + \beta_{31} h_i F_1 + \beta_{32} h_i F_2)$ и ее производные:

$$\begin{aligned}
\frac{dF_3}{dh_i} &= \frac{\partial f}{\partial t} \alpha_3 + \frac{\partial f}{\partial x} (\beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2 + \beta_{32} h_i \frac{dF_2}{dh_i}); \\
\frac{d^2 F_3}{dh_i^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \alpha_3^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \alpha_3 (\beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2 + \beta_{32} h_i \frac{dF_2}{dh_i}) + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2 + \beta_{32} h_i \frac{dF_2}{dh_i})^2 + \frac{df}{dx} (2\beta_{32} \frac{dF_2}{dh_i} + \beta_{32} h_i \frac{d^2 F_2}{dh_i^2});
\end{aligned} \tag{2.8}$$

В соотношениях (2.8) значения частных производных от функции $f(t, x)$ вычисляются при значениях аргументов $t = t_i + \alpha_3 h_i$ и $x = x_i + h_i (\beta_{31} F_1 + \beta_{32} F_2)$.

Для представления в виде ряда функции $F_j(h_i)$ необходимы не сами производные $\frac{d^l F_j(h_i)}{dh_i^l}$; $l = 1, 2, \dots$, а их значения при $h_i = 0$:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dF_2}{dh_i} \right|_{h_i=0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_i \alpha_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i \beta_{21} f_i; \\
\left. \frac{d^2 F_2}{dh_i^2} \right|_{h_i=0} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right)_i \alpha_2^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \right)_i \alpha_2 \beta_{21} f_i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_i \beta_{21}^2 f_i^2;
\end{aligned} \tag{2.9}$$

В общем случае

$$\left. \frac{d^l F_2}{dh_i^l} \right|_{h_i=0} = \sum_{\mu=0}^l \left(\frac{\partial^l f}{\partial t^{l-\mu} \partial x^\mu} \right)_i C_i^\mu \alpha_2^{l-\mu} \beta_{21}^\mu f_i^\mu. \tag{2.10}$$

Здесь обозначения $\left(\frac{\partial^l f}{\partial t^{l-\mu} \partial x^\mu}\right)_i$ и f_i имеют тот смысл, что функция

$f(t, x)$ и ее частные производные вычислены в точке $t = t_i, x = x_i$.

Далее

$$\begin{aligned} \left.\frac{dF_3}{dh_i}\right|_{h_i=0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i \alpha_3 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i (\beta_{31} + \beta_{32}) f_i; \\ \left.\frac{d^2 F_3}{dh_i^2}\right|_{h_i=0} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_i \alpha_3^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}\right)_i \alpha_3 (\beta_{31} + \beta_{32}) f_i + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i (\beta_{31} + \beta_{32})^2 f_i^2 + \left(\frac{df}{dx}\right)_i 2\beta_{32} \left.\frac{dF_2}{dh_i}\right|_{h_i=0}; \end{aligned} \quad (2.11)$$

.....

Для всех известных к настоящему времени одношаговых методов выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^{j=1} \beta_{jk} = \alpha_j. \quad (2.12)$$

С его учетом выражения для производных $\left(\frac{\partial^l f}{\partial t^{l-\mu} \partial x^\mu}\right)\bigg|_{h_i=0}$ значительно

упрощаются. Действительно, из формулы (2.10) следует, что

$$\left.\frac{d^l F_2}{dh_i^l}\right|_{h_i=0} = \alpha_2^l (D^l f). \quad (2.13)$$

Из формулы (2.11) вытекает

$$\left. \frac{dF_3}{dh_i} \right|_{h_i=0} = \alpha_3 (Df)_i;$$

$$\left. \frac{d^2 F_3}{dh_i^2} \right|_{h_i=0} = \alpha_3^2 (D^2 f)_i + 2\alpha_2 \beta_{32} + \left(\frac{df}{dx} \right)_i (Df)_i; \quad (2.14)$$

.....

Пример 1. Построить одношаговый метод третьего порядка точности (s=3).

Возьмем r=2. Тогда локальная погрешность на шаге $\mathcal{E}_i$ запишется в виде

$$\mathcal{E}_i(h_i) = x(t_i + h_i) - x(t_i) + h_i [p_1 F_1(h_i) + p_2 F_2(h_i)]. \quad (2.15)$$

Разложим в ряд Тейлора точное решение $x(t_i + h_i)$:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + h_i) = x(t_i) + h_i \left(\frac{dx}{dt} \right)_i +$$

$$+ \frac{h_i^2}{2} \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)_i + \frac{h_i^3}{6} \left(\frac{d^3 x}{dt^3} \right)_i + O(h_i^4). \quad (2.16)$$

Здесь

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt} \right)_i = f_i; \\ \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)_i = (Df)_i; \\ \left(\frac{d^2 F_3}{dh_i^2} \right)_i = (D^2 f)_i + \left(\frac{dx}{dt} \right)_i (Df)_i. \end{cases} \quad (2.17)$$

Согласно равенству (2.5) функция $F_1(h_i)$ не зависит от h_i , поэтому

$$F_1(h_i) \equiv f_i. \quad (2.18)$$

Функция $F_2(h_i)$ с учетом соотношения (2.13) имеет следующее разложение:

$$F_2(h_i) = f_i + h_i \alpha_2 (Df)_i + \frac{h_i^2}{2} \alpha_2^2 (D^2 f)_i + O(h_i^3). \quad (2.19)$$

Теперь запишем разложение для $\varepsilon_i(h_i)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(h_i) = & x_i + h_i f_i + \frac{h_i^2}{2} (Df)_i + \frac{h_i^3}{6} \left[(D^2 f)_i + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i (Df)_i \right] - \\ & - x_i - h_i p_1 f_i - h_i p_2 \left[f_i + h_i \alpha_2 (Df)_i + \frac{h_i^2}{2} \alpha_2^2 (D^2 f)_i \right] + O(h_i^4). \end{aligned} \quad (2.20)$$

После упрощения будем иметь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(h_i) = & h_i (1 - p_1 - p_2) f_i + h_i^2 \left(\frac{1}{2} - p_2 \alpha_2 \right) (Df)_i + \\ & + \frac{h_i^3}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - p_2 \alpha_2^2 \right) (D^2 f)_i + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_i (Df)_i \right] - O(h_i^4). \end{aligned} \quad (2.21)$$

По условию задачи $\varepsilon_i(h_i) = O(h_i^4)$, то есть коэффициенты в разложении (2.21) при степенях h_i , меньших четырех, должны быть равны нулю, то есть

$$(1 - p_1 - p_2) f_i = 0; \quad (2.22)$$

$$\left(\frac{1}{2} - p_2 \alpha_2\right) (Df)_i = 0; \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{1}{3} - p_2 \alpha_2^2\right) (D^2 f)_i + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i (Df)_i = 0. \quad (2.24)$$

Для произвольной функции $f(t, x)$ равенства (2.22) и (2.23) будут справедливы, если $p_1 + p_2 = 1$ и $p_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}$.

Но соотношение (2.24) может быть удовлетворено только в том случае, если коэффициенты метода зависят от полученного решения,

например $p_2 \alpha_2^2 = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i (Df)_i}{(D^2 f)_i} \right]$, то есть коэффициенты не являются

постоянными, для их определения необходимо вычислять производные высокого порядка. Отсюда можно сделать вывод, что при $r = 2$ третий порядок точности практически недостижим.

Возьмем $r = 3$. В этом случае

$$\varepsilon_i(h_i) = x(t_i + h_i) - x(t_i) + h_i [p_1 F_1(h_i) + p_2 F_2(h_i) + p_3 F_3(h_i)]. \quad (2.25)$$

В формуле (2.25), по сравнению с (2.15), добавилась функция $F_3(h_i)$, разложение которой в ряд Тейлора имеет следующий вид:

$$F_3(h_i) = f_i + h_i \alpha_3 (Df)_i + \frac{h_i^2}{2} \left[\alpha_3^2 (D^2 f)_i + 2 \alpha_2 \beta_{32} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i (Df)_i \right] + O(h_i^3). \quad (2.26)$$

Действуя так же, как при рассмотрении случая $r = 2$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1; \\ p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 = \frac{1}{2}; \\ p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 = \frac{1}{2}; \\ p_3 \alpha_2 \beta_{32} = \frac{1}{6}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Решая эту систему и предполагая, что $\alpha_2 \neq \alpha_3$ и $\alpha_2 \neq \frac{2}{3}$, получим следующее двухпараметрическое семейство:

$$\begin{cases} p_2 = \frac{3\alpha_3 - 2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)}; \\ p_3 = \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)}; \\ p_1 = \frac{6\alpha_2\alpha_3 - 3(\alpha_2 + \alpha_3) + 2}{6\alpha_2\alpha_3}; \\ \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)}; \\ \beta_{21} = \alpha_2; \\ \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Положив $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, а $\alpha_3 = 1$, получим один из возможных вариантов метода

$$p_1 = \frac{1}{6}; \quad p_2 = \frac{2}{3}; \quad p_3 = \frac{1}{6}; \quad \beta_{21} = \frac{1}{2}; \quad \beta_{31} = -1; \quad \beta_{32} = 2.$$

В результате схема метода примет вид:

$$\left. \begin{aligned} x_{3+1} &= x_i + \frac{h_i}{6}(F_1 + 4F_2 + F_3); \\ F_1 &= f(t_i, x_i); \\ F_2 &= f\left(t_i + \frac{h_i}{2}, x_i + \frac{h_i}{2}F_1\right); \\ F_3 &= f\left(t_i + h_i, x_i - h_iF_1 + 2h_iF_2\right). \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Задачи

1. Построить семейство методов 2-го порядка точности при $r = 2$.
2. Построить разложение в ряд Тейлора функции $F_4(h_i)$ с погрешностью порядка $O(h_i^5)$.
3. Построить семейство методов 4-го порядка точности при $r = 4$.
4. Для задачи из примера 1 исследовать случаи $\alpha_2 = \alpha_3$ и $\alpha_2 = \frac{2}{3}$.
5. Доказать, что для построения методов 5-го порядка точности минимальное значение $r=6$.
6. Найти главный член погрешности метода из примера 1 в общем виде и при полученных числовых значениях коэффициентов.
7. Найти главный член погрешности метода из задачи 1.
8. Найти главный член погрешности метода, построенного при решении задачи 3.
9. Вывести формулы для производных от функции $f(t, x(t))$ для случая «автономной системы», то есть при отсутствии явной зависимости f от t .
10. Рассмотреть задачу из примера 1 для автономной системы.
11. Решить задачу 1 для автономной системы.
12. Решить задачу 3 для автономной системы.
13. Проверить справедливость утверждения $r_{\min} = 6$ в условиях задачи 5 для случая автономной системы.

3. Построение многошаговых разностных методов заданного порядка точности

Под многошаговыми методами решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

понимают приближенные методы, в которых решение в очередном узле сетки t_{i+1} ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$) ищется в соответствии с алгоритмом

$$x_{i+1} = \sum_{j=0}^r a_j x_{i-j} + \sum_{j=\sigma}^r b_j h_{i-j} f_{i-j}, \quad (3.2)$$

где $\sigma = 0$ (явная схема) или $\sigma = -1$ (неявная схема);

$h_i = t_i - t_{i-1}$, x_i - приближенное решение в i -том узле сетки;

$f_i = f(t_i, x_i)$ - значение функции $f(t, x)$ в точке (t_i, x_i) ;

a_j и b_j - коэффициенты метода.

Для построения метода заданного порядка точности воспользуемся тем же приемом, что и при построении одношаговых методов, то есть рассмотрим локальную погрешность на шаге:

$$\varepsilon_i(h_i) = x(t_{i+1}) - x_{i+1}. \quad (3.3)$$

Разложив затем функцию $\varepsilon_i(h_i)$ в ряд по h_i и требуя, чтобы $\varepsilon_i(h_i) = O(h_i^{S+1})$, придем к системе уравнений относительно коэффициентов метода, (здесь S – заданный порядок точности метода).

Рассмотрим эту процедуру для более простого случая – постоянного шага ($h_i = \text{const} = h$). Тогда схему (3.2) можно записать в виде

$$x_{i+1} = \sum_{j=0}^r a_j x_{i-j} + h \sum_{j=\sigma}^r b_j f_{i-j}. \quad (3.4)$$

Погрешность на шаге запишется следующим образом:

$$\varepsilon_i(h) = x(t_i + h) - \sum_{j=0}^r a_j x(t_i - jh) - h \sum_{j=\sigma}^r b_j f(t_i - jh). \quad (3.5)$$

Разложение для $x(t_i - jh)$ и $f(t_i - jh)$ имеют вид:

$$x(t_i - jh) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-jh)^k}{k!} x_i^{(k)}; \quad (3.6)$$

$$f(t_i - jh) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-jh)^k}{k!} x_i^{(k+1)}. \quad (3.7)$$

Здесь $x_i^{(k)}$ означает k -ю производную от функции $x(t)$, вычисленную в точке t_i . Подставив разложения (3.6) и (3.7) в схему (3.4), получим систему соотношений относительно a_j и b_j .

Пример 2. Построить многошаговый явный метод 3-го порядка точности.

Возьмем $r=1$. Тогда схема (3.4) будет иметь вид

$$x_{i+1} = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + h(b_0 f_i + b_1 f_{i-1}). \quad (3.8)$$

Используя выражения (3.6) и (3.7), запишем разложения

$$\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + hx_i^{(1)} + \frac{h^2}{2}x_i^{(2)} + \frac{h^3}{6}x_i^{(3)} + O(h^4); \\
x_{i-1} &= x_i - hx_i^{(1)} + \frac{h^2}{2}x_i^{(2)} - \frac{h^3}{6}x_i^{(3)} + O(h^4); \\
f_{i-1} &= x_i^{(1)} - hx_i^{(2)} + \frac{h^2}{2}x_i^{(3)} + O(h^3).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Подставив полученные выражения в схему (3.8), получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i(h) &= x_i + hx_i^{(1)} + \frac{h^2}{2}x_i^{(2)} + \frac{h^3}{6}x_i^{(3)} - a_0x_i - \\
&- a_1 \left[x_i - hx_i^{(1)} + \frac{h^2}{2}x_i^{(2)} - \frac{h^3}{6}x_i^{(3)} \right] - hb_0x_i^{(1)} - \\
&- hb_1 \left[x_i^{(1)} - hx_i^{(2)} + \frac{h^2}{2}x_i^{(3)} \right] + O(h^4).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Потребуем, чтобы $\varepsilon_i(h) = O(h^4)$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
(1 - a_0 - a_1)x_i + h(1 + a_1 - b_0 - b_1)x_i^{(1)} + h^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{a_1}{2} + b_1 \right) x_i^{(2)} + \\
+ h^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{a_1}{6} - \frac{b_1}{2} \right) x_i^{(3)} = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

При произвольных значениях x_i , $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$ последнее равенство возможно лишь в случае выполнения соотношений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 = 1; \\ -a_1 + b_0 + b_1 = 1; \\ \frac{1}{2}a_1 - b_1 = \frac{1}{2}; \\ -\frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{6}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Решая систему (3.12), получим $a_0 = -4$, $a_1 = 5$, $b_0 = 4$, $b_1 = 2$.

Итак, явная схема 3-го порядка точности при $r=1$ имеет вид:

$$x_{i+1} = -4x_i + 5x_{i-1} + h(4f_i + 2f_{i-1}). \quad (3.13)$$

Задачи

1. Построить неявную схему 3-го порядка точности при $r = 1$.
2. Построить явную схему 4-го порядка точности при $r = 2$. Сравнить ее по точности, трудоемкости вычислений и требуемой машинной памяти с одношаговым методом из задачи 3 предыдущего раздела.
3. Построить неявную схему 4-го порядка точности при $r = 1$.
4. Построить неявную схему 4-го порядка точности при $r = 2$.
5. Построить неявную схему 4-го порядка точности при $r = 2$ и $a_2 = 0$.
6. Построить явную схему 4-го порядка точности при $r = 2$ и $a_2 = 0$.

4. Исследование на устойчивость одношаговых и многошаговых методов

Определения устойчивости приведены в работах [3,4]. Смысл этих определений состоит в том, что решение “возмущенной” системы

$$y_i = F(h, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-r}) \quad (4.1)$$

для разностной схемы

$$x_i = F(h, x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-r}) \quad (4.2)$$

должно оставаться ограниченным при $h = 0$, $ih = t_i = \text{const}$ и произвольных возмущениях $\delta_i = y_i - x_i$; $i = \overline{0, r-1}$.

Для функции F произвольного вида исследование схемы (4.2) на устойчивость затруднительно. Поэтому исследование на устойчивость часто проводят на модельных, как правило, линейных задачах (обоснование такой замены приведено в [3]).

Рассмотрим явную многошаговую схему

$$x_{i+1} = \sum_{j=0}^r a_j x_{i-j} + h \sum_{j=\sigma}^r b_j f_{i-j}. \quad (4.3)$$

Заменим в формуле (4.3) произвольную функцию $f(t, x)$ на линейную

$$f(t, x) = Mx, \quad (4.4)$$

где $M = \text{const}$. В результате схема (4.3) имеет более простой вид:

$$x_{i+1} = \sum_{j=0}^r (a_j + Mhb_j) x_{i-j}. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) является линейным однородным разностным уравнением $(r+1)$ -го порядка, решение которого имеет вид:

$$a_i = \sum_{k=1}^{r+1} c_k \xi_i^{(k)}, \quad (4.6)$$

где $\xi_i^{(k)}$, $k = \overline{1, r+1}$ - линейно независимая система решений уравнения (4.5). Если в уравнении (4.5) провести замену

$$x_i = \mu^i, \quad \mu \neq 0, \quad (4.7)$$

то получим алгебраическое уравнение

$$\mu^{i+1} = \sum_{j=0}^r (a_j + Mhb_j) \mu^{i-j}. \quad (4.8)$$

Производя в формуле (4.8) сокращение на μ^{i-r} , получим так называемое характеристическое уравнение разностной схемы (4.3):

$$\mu^{r+1} = \sum_{j=0}^r (a_j + b_j z) \mu^{r-j}. \quad (4.9)$$

Здесь введено обозначение $z = Mh$.

Корням уравнения (4.9) μ_k , $k = \overline{1, r+1}$ соответствуют линейно независимые решения $\xi_i^{(k)} = \mu_k^i$; $k = \overline{1, r+1}$; $i = 0, 1, 2, \dots$.

Если среди корней уравнения (4.9) есть кратные со степенью кратности ν_l , $l = \overline{1, s}$ ($\sum_{l=1}^s \nu_l = r+1$), то линейно независимую систему решений составят следующие функции:

$$\begin{aligned} \xi_i^{(1)} &= \mu_1^i, \quad \xi_i^{(2)} = i\mu_1^i, \quad \dots, \quad \xi_i^{(\nu_1)} = i^{\nu_1-1} \mu_1^i; \\ \xi_i^{(\nu_1+1)} &= \mu_2^i, \quad \xi_i^{(\nu_1+2)} = i\mu_2^i, \quad \dots, \quad \xi_i^{(\nu_1+\nu_2)} = i^{\nu_2-1} \mu_2^i; \\ &\dots\dots\dots \\ \xi_i^{(r+2-\nu_l)} &= \mu_l^i, \quad \xi_i^{(r+3-\nu_l)} = i\mu_l^i, \quad \dots, \quad \xi_i^{(r+1)} = i^{\nu_l-1} \mu_l^i. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для того, чтобы возмущенное решение

$$y_i = \sum_{k=1}^{r+1} d_k \xi_i^{(k)} \quad (4.11)$$

было ограниченным, а следовательно, схема (4.2) – устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения (4.9) лежали в единичном круге $|\mu_k| \leq 1$, причем на границе его могут находиться только простые корни (то есть $|\mu_l| < 1$, если $\nu_l > 1$).

Пример 3. Исследовать на устойчивость явную многошаговую схему 3-го порядка точности, полученную в примере 2:

$$x_{i+1} = -4x_i + 5x_{i-1} + h(4f_i + 2f_{i-1}). \quad (4.12)$$

Заменяем f на Mx :

$$x_{i+1} = -4x_i + 5x_{i-1} + h(4Mx_i + 2Mx_{i-1}) \quad (4.13)$$

или

$$x_{i+1} + 4(1-z)x_i - (5+2z)x_{i-1} = 0, \text{ где } z = Mh.$$

Характеристическое уравнение схемы (4.13) имеет вид:

$$\mu^2 + 4(1-z)\mu - (5-2z) = 0. \quad (4.14)$$

Находим корни уравнения (4.14)

$$\mu_{1,2} = 2(z-1) \pm \sqrt{9-6z+4z^2}. \quad (4.15)$$

Исследуем поведение этих корней при действительных значениях z .

Поскольку дискриминант $D = 9 - 6z + 4z^2 = \left(2z - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$,

следовательно корни $\mu_{1,2}$ - действительные. Характерными значениями для μ_1 и μ_2 являются -1 и $+1$.

Пусть $\mu_1 = 1$. Подставив это значение вместо μ в уравнение (4.14), получим $z = 0$. При этом второй корень $\mu_2 = -5$, что говорит о неустойчивости схемы (4.12) при $z = 0$ (то есть при $h = 0$).

Вычислим производную по z от $\mu_{1,2}$:

$$\frac{d\mu_{1,2}}{dz} = 2 \left[1 \pm \frac{\left(z - \frac{3}{4} \right)}{\sqrt{\left(z - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{27}{16}}} \right].$$

Так как дробь $\frac{\left(z - \frac{3}{4} \right)}{\sqrt{\left(z - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{27}{16}}}$ при любых конечных значениях

z имеет модуль, меньший единицы, то производные $\frac{d\mu_1}{dz} > 0$,

$$\frac{d\mu_2}{dz} > 0 \quad \forall z \in (-\infty, +\infty).$$

Следовательно, зависимости $\mu_1(z)$ и $\mu_2(z)$ качественно имеют характер, отображенный на рисунке 1.

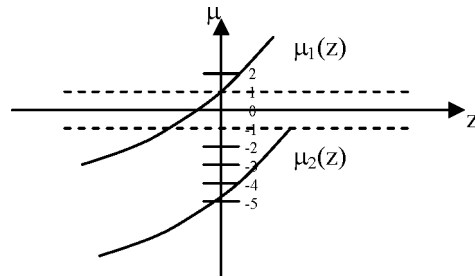


Рис. 1. Зависимости $\mu_1(z)$ и $\mu_2(z)$

Таким образом, одновременное выполнение неравенств $|\mu_1(z)| \leq 1$ и $|\mu_2(z)| \leq 1$ оказывается невозможным ни при каких z . Тем самым доказано, что в области действительных значений $z = Mh$ метод (4.12) неустойчив.

Задачи.

1. Дана неявная двухшаговая схема 3-го порядка точности

$$x_{i+1} = (1 - \alpha)x_i + \alpha x_{i-1} + h \left(\frac{5 - \alpha}{12} f_{i+1} + \frac{2(1 + \alpha)}{3} f_i + \frac{5\alpha - 1}{12} f_{i-2} \right),$$

где α - числовой параметр. Исследовать схему на устойчивость:

- а) при каких значениях α точка $z = 0$ будет точкой устойчивости (так называемая «нуль-устойчивость»);
- б) определить область устойчивости при действительных значениях z ;
- в) построить область устойчивости на комплексной плоскости z .

2. Дана явная трехшаговая схема 4-го порядка точности

$$x_{i+1} = -\frac{1}{2}x_i + 9x_{i-1} - \frac{9}{2}x_{i-2} + h \left(\frac{25}{6}f_i - \frac{4}{3}f_{i-1} - \frac{11}{6}f_{i-2} \right).$$

Исследовать схему на устойчивость.

3. Дана неявная трехшаговая схема 4-го порядка точности

$$x_{i+1} = x_{i-1} + h \left(\frac{1}{3}f_{i+1} + \frac{4}{3}f_i + \frac{1}{3}f_{i-1} \right). \text{ Исследовать схему}$$

на устойчивость.

4. Дана явная трехшаговая схема 3-го порядка точности

$$x_{i+1} = x_i + h \left(\frac{23}{12} f_i - \frac{4}{3} f_{i-1} + \frac{5}{12} f_{i-2} \right). \text{ Построить}$$

область устойчивости схемы на комплексной плоскости z .

5. Дана неявная трехшаговая схема 4-го порядка точности

$$x_{i+1} = (1 - \alpha) x_i + \alpha x_{i-1} + \\ + h \left(\frac{9 - \alpha}{24} f_{i+1} + \frac{19 + 13\alpha}{24} f_i + \frac{13\alpha - 5}{24} f_{i-1} + \frac{1 - \alpha}{24} f_{i-2} \right).$$

Исследовать данную схему на устойчивость:

- а) при каких значениях α точка $z = 0$ будет точкой устойчивости;
 - б) определить область устойчивости при действительных значениях z ;
 - в) при $\alpha = 0$ построить область устойчивости на комплексной плоскости z .
6. Исследовать на устойчивость одношаговую схему из примера 1.

Список использованных источников

Самарский А.А. Введение в численные методы. – 3-е изд. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.

Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. – М.: Наука, 1994. – 439 с.