

КуАИ
Л 59

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
К АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ**

КУЙБЫШЕВ 1988

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
К АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Утверждено
редакционно-издательским
советом института
в качестве
методических указаний
для студентов

Самарский Государственный
аэрокосмический университет
№ _____
Научно-техническая
библиотека

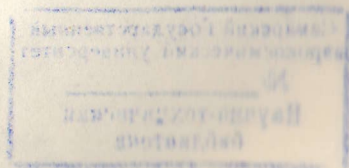
Куйбышев 1988

Методические указания содержат примеры и задачи для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов по следующим разделам линейной алгебры с приложениями к аналитической геометрии: матрицы, определители и действия над ними, системы линейных уравнений, векторная алгебра. Типовые задачи приводятся с подробными решениями и методическими указаниями. Даются варианты типовой расчетно-графической и контрольной работ.

Методические указания предназначены для студентов вечернего отделения КуМ.

Составитель В.Н. Храмова

Рецензенты: В.И. Ищенко, В.С. Ганиев,
О.С. Иванова



I. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

I.1. Основные определения

Квадратная таблица из четырех чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется квадратной матрицей 2-го порядка.

Определителем матрицы 2-го порядка называется число

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Круглые или квадратные скобки слева и справа таблицы чисел - символ матрицы, две черты - символ определителя.

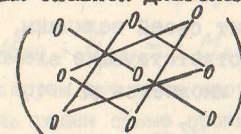
Квадратная таблица из девяти чисел называется матрицей 3-го порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем 3-го порядка называется число

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33}.$$

Каждое слагаемое этой суммы является произведением трех элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы A , причем знак плюс имеет произведение элементов главной диагонали и два произведения элементов, образующих в матрице треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали:



Знак минус имеет произведение элементов, принадлежащих побочной диагонали, и два произведения элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными побочной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I.2. Свойства определителей

(Верны для определителя любого порядка).

1) Величина определителя не изменится, если все его строки заменить столбцами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2) Перестановка двух столбцов (строк) равносильна умножению определителя на -1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

3) Умножение всех элементов одного столбца (строки) на число K равносильно умножению определителя на число K :

$$\begin{vmatrix} Ka_{11} & a_{12} \\ Ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4) Определитель равен нулю в следующих случаях:

- а) все элементы столбца (строки) есть нули;
- б) элементы двух столбцов (строк) одинаковы;
- в) элементы двух столбцов (строк) пропорциональны.

5) Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) есть сумма двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6) Определитель не изменит своей величины, если к элементам столбца (строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на общий множитель λ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Следующее свойство связано с понятием минора и алгебраического дополнения.

Минором какого-либо элемента определителя называется определитель на порядок ниже, который получается из элементов данного определителя путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Рассмотрим определитель 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минором элемента a_{11} будет определитель 2-го порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Минором элемента a_{23} будет определитель

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где i - номер строки,
 j - номер столбца.

Например, для элемента a_{11} определителя 3-го порядка алгебраическое дополнение будет

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

для элемента a_{23}

$$A_{23} = -M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Для определителя 2-го порядка

$$A_{11} = M_{11} = a_{22}; \quad A_{21} = -M_{21} = -a_{12}.$$

Теперь сформулируем еще одно свойство определителей.

7) Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо столбца (строки) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, j=1, 2, \dots, n \quad (\text{разложение определителя по } j\text{-му столбцу});$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, i=1, 2, \dots, n \quad (\text{разложение определителя по } i\text{-й строке}).$$

С помощью этого свойства можно вычислить определитель любого порядка.

Приведем некоторые примеры решения задач.

1. Вычислить определитель 2-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot 5 = -23$.

2. Вычислить определитель 3-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta = 1 \cdot (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 11$.

Вычислить следующие определители с помощью определения

3. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$.

Ответ. а) 10; б) 11; в) 1; г) 1.

4. а) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответ. а) 9; б) 9; в) 18.

5. Вычислить определитель 3-го порядка, разложив его по элементам 1-й строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Решение. $\Delta = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-8-15) - (-1 \cdot (-6-5) + 2 \cdot (-9-4)) = -4$.

6. Вычислить определитель, разложив его по элементам какого-либо ряда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -3 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение. Очевидно, проще вычислить, разложив определитель по элементам 1-го столбца, где два нуля

$$\Delta = 0 - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 99$$

7. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

Решение. Сначала воспользуемся шестым свойством для создания нулей в 1-м столбце. К элементам второй строки прибавим элементы третьей, умноженные предварительно на 2; к элементам третьей строки прибавим элементы первой строки; разложим полученный определитель по элементам 1-го столбца:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2} \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2+2 \cdot (-1) & 7+2 \cdot 2 & 4+2 \cdot 5 \\ 1+(-1) & -3+2 & 8+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 14 \\ 0 & -1 & 13 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 14 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} + 0 + 0 = -152$$

8. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Решение. Создадим в 3-м столбце еще два нуля. Для этого к элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, а к элементам 1-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные предварительно на -3. Полученный определитель разложим по элементам 3-го столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+2 \cdot (-3) & 3+1 \cdot (-3) & -3+(-1) \cdot (-3) & 4+2 \cdot (-3) \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6+2 & 2+1 & 1-1 & 0+2 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} + 0 + 0 = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Полученный определитель 3-го порядка вычислим аналогично: из элементов 2-й строки вычтем элементы 3-й строки и разложим определитель по элементам 2-го столбца:

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 8 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-28+12) = 48$$

9. Вычислить следующие определители, создав нули в каком-либо ряду и затем разложив определитель по элементам этого ряда:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -1 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$;

$$\text{г) } \begin{vmatrix} I & I & I \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Ответ. а) 144; б) 0; в) - 87; г) $(x-y)(y-z)(z-x)$;
д) 0; е) 1800.

2. МАТРИЦЫ

2.1. Операции над матрицами

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij} ; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или сокращенно } A = (a_{ij})_{m,n}.$$

Суммой $A+B$ двух матриц $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ одного размера называется матрица $C = (c_{ij})_{m,n}$ того же размера, для которой

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

т.е. матрицы складываются поэлементно.

Произведением αA матрицы $A = (a_{ij})$ на число α называется матрица $B = (b_{ij})$, для которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, т.е. умножаются на α все элементы матрицы A .

Произведением AB матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ на матрицу $B = (b_{kj})_{n,p}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m,p}$, для которой

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

т.е. для того, чтобы найти элемент c_{ij} матрицы C , стоящий в i -й строке и j -м столбце, надо элементы i -й строки матрицы A умножить соответственно на элементы j -го столбца матрицы B и сложить эти произведения. Схематически это можно изобразить так

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{i1} a_{i2} \dots a_{i2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Умножать матрицы можно, если они строго согласованы: число столбцов i -й матрицы должно быть равно числу строк i -й матрицы. Перестановочным свойством матрицы не обладают.

10. Найти $A+B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $A+B = \begin{pmatrix} 1-3 & 2+5 & 3+0 \\ -1+0 & 0-1 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$

11. Найти $3A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$.

Решение. $3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 12 \\ 3 & -21 \end{pmatrix}.$

12. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix};$$

а) Найти AB .

б) Существует ли BA ?

Решение. а) Матрицу A можно умножить на матрицу B , так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 7 \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 6 & 34 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

б) Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A .

13. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Решение. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 4^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

14. Найти $f(A)$, если $f(x) = x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. $f(A) = A^2 + E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$

15. Найти $3A+2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

16. Найти $2A + 5B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$.

17. Найти $2A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 12 \\ 0 & -10 & 1 \\ 11 & -3 & 11 \end{pmatrix}$.

18. Показать, что матрица $A + B - B^T$ является нулевой, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a-1 & a^2-1 \\ 1-a & 0 & b^2-c \\ 1-a^2 & c-b^2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

B^T - транспонированная матрица B , т.е. матрица, у которой строки заменены столбцами.

19. Существуют ли произведения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответы. а) нет; б) да; в) да; г) нет.

Найти произведения матриц

20. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

21. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -8 \\ -2 & 1 & 1 \\ 14 & 21 & -35 \end{pmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -36 & 18 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -13 & 8 \\ -4 & 0 & 28 & 0 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.

27. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 31 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

31. Проверить равенство $(A+B)C = AC + BC$

для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверить следующие равенства

а) $(AB)C = A(BC)$;

б) $(AB)^T = B^T A^T$.

33. Найти $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$.

34. Найти $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^3$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}$.

35. Найти $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

36. Найти значение многочлена $2A^2 + 3A + 5E$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

E - единичная матрица 3-го порядка.

Ответ. $\begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}$.

37. Найти $3A^2 - 4E$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 0 & 23 \end{pmatrix}$.

38. Найти $3A^2 - 2A + 5E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$.

2.2. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A , если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица существует, если $\Delta A \neq 0$.

Обратная матрица определяется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta A} (A_{ij})^T,$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы $A = (a_{ij})$.

39. Найти матрицу, обратную для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$a_{11} = 1, \quad A_{11} = 4; \quad a_{12} = 2, \quad A_{12} = 3;$$

$$a_{21} = -3, \quad A_{21} = -2; \quad a_{22} = 4, \quad A_{22} = 1.$$

Составляем матрицу из алгебраических элементов и транспонируем ее

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица A^{-1} имеет вид $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Проверка. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

40. Найти матрицу A^{-1} , обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow \exists A^{-1}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы, обратные данным

41. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

42. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

43. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

44. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -1 & -4/5 \\ 1 & 3/5 \end{pmatrix}$.

45. $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

46. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

47. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$.

48. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

49. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

50. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$.

51. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 1/c \end{pmatrix}$.

2.3. Решение матричных уравнений

Пусть требуется решить матричное уравнение $AX=B$, где X - неизвестная матрица, для которой $\Delta A \neq 0$ и, следовательно, существует обратная матрица A^{-1} . Умножим обе части матричного уравнения на A^{-1} слева

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Аналогично уравнение $YA=B$ решается умножением на A^{-1} обеих частей уравнения справа $Y=BA^{-1}$.

52. Решить уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Это уравнение вида $AX=B$. Следовательно, $X=A^{-1}B$. Так как $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то обратная матрица существует $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 11 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решить следующие матричные уравнения

53. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. Ответ. $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

54. $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

55. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

56. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Ответ. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Решение систем линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (I)$$

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система называется однородной.

3.1. Формулы Крамера

Если $m=n$ (число уравнений равно числу неизвестных) и главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система имеет единственное решение, которое находится по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где Δ_i - определитель, который получается из главного определителя Δ заменой i -го столбца на столбец свободных членов.

57. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9, \\ x + 2y - 3z = 14, \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, следовательно, система

имеет единственное решение. Найдем его по формулам Крамера, для чего сначала вычислим определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -12; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = -18; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 12.$$

Окончательно получим

$$x = \frac{-12}{-6} = 2; \quad y = \frac{-18}{-6} = 3; \quad z = \frac{12}{-6} = -2.$$

Решить следующие системы по формулам Крамера

58. $\begin{cases} 3x - 5y = 13, \\ 2x + 7y = 81. \end{cases}$ Ответ. $x=16, y=7$.

59. $\begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$ Ответ. $x=2, y=3$.

60. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$ Ответ. $x=2, y=-1, z=1$.

61. $\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$ Ответ. $x=3, y=1, z=-1$.

62. $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$ Ответ. $x=1, y=3, z=5$.

$$63. \begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ 5x + y + 3z = 14, \\ 2x + y + 2z = 5. \end{cases}$$

Ответ. $x=2, y=-5, z=3$.

$$64. \begin{cases} 2x - y + 4z = 15, \\ 3x - y + z = 8, \\ -2x + y + z = 0. \end{cases}$$

Ответ. $x=2, y=1, z=3$.

3.2. Метод обратной матрицы

Систему (I) можно записать в матричном виде $AX=B$, (2)

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Если $m=n$ и $\Delta A \neq 0$, то существует A^{-1} . Умножая обе части матричного уравнения (2) на A^{-1} слева, найдем неизвестную матрицу X .
 $X = A^{-1}B$.

65. Записать систему в матричном виде и решить ее с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Решение. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Определитель системы $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$

тогда $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1=1; x_2=-1; x_3=3.$

Решить следующие системы с помощью обратной матрицы

$$66. \begin{cases} x + 3y = 2, \\ x - 3y = 8. \end{cases}$$

Ответ. $x=5, y=-1$.

$$67. \begin{cases} 3x + y = 1, \\ x - y = 7. \end{cases}$$

Ответ. $x=2, y=-5$.

$$68. \begin{cases} 2x - y + 4z = 15, \\ 3x - y + z = 8, \\ -2x + y + z = 0. \end{cases}$$

Ответ. $x=2, y=1, z=3$.

$$69. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответ. $x_1=1, x_2=2, x_3=-2$.

$$70. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ. $x_1=1, x_2=-1, x_3=1$.

$$71. \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Ответ. $x_1=1, x_2=3, x_3=5$.

3.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса - метод последовательного исключения неизвестных - применим для любого числа уравнений с любым числом неизвестных. Этот метод позволяет выяснить, совместна ли система и найти множество решений, если система неопределенная.

72. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Исключим неизвестное x_1 из 2-го и 3-го уравнений, для чего вычтем I-е уравнение из 2-го и 3-го:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -2x_2 = 2, \\ 3x_2 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = -1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Второе и третье уравнения противоречат друг другу. Следовательно, система не имеет решений (несовместна).

73. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Исключим неизвестное x_1 из 2-го и 3-го уравнений. Для этого прибавим ко 2-му уравнению системы I-е уравнение, предварительно умножив его на -2, а к 3-му уравнению прибавим I-е уравнение, умножив его на -3.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_2 - 10x_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Система 3-х уравнений свелась к двум уравнениям с 3-мя неизвестными. Следовательно, система имеет множество решений. Чтобы найти это множество, положим $x_3 = t$, где t - любое действительное число. Тогда $x_1 = 3t$, $x_2 = 2t$, $x_3 = t$ - искомое множество решений системы. Придавая параметру t конкретное значение, получим одно решение из множества (частное решение). Например, при $t = 2$ получаем частное решение: $x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$.

Решить следующие системы методом Гаусса

$$74. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 2t - 1$,
 $x_2 = t + 1$,
 $x_3 = t$.

$$75. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ. Система несовместна.

$$76. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 2t$,
 $x_2 = -3t$,
 $x_3 = 5t$.

$$77. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 1$,
 $x_2 = 2$,
 $x_3 = 3$.

$$78. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

Ответ. Система несовместна.

$$79. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 2$,
 $x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

$$80. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = -\frac{11}{7}t$; $x_2 = -\frac{t}{7}$;
 $x_3 = t$.

$$81. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = t_1 - \frac{6}{5}t_2 - \frac{1}{5}$;
 $x_2 = \frac{4-t_2}{5}$; $x_3 = t_1$; $x_4 = t_2$,
где t_1 и t_2 - произвольные действительные числа.

3.4. Однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна. Ее решением всегда является нулевое: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то это решение единственное. Для того, чтобы однородная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

82. При каком λ система уравнений имеет ненулевые решения? Найти их.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определитель системы должен быть равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим $\lambda = 3$. При $\lambda = 3$ система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Прибавим I-е уравнение ко 2-му и 3-му.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $x_2 = t$, тогда $x_1 = -t$, $x_3 = t$. Итак, при $\lambda = 3$ система имеет множество решений: $x_1 = -t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$.

83. При каком значении λ система имеет ненулевые решения? Найти их.

$$a) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ \lambda x_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ \lambda x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответы. а) $\lambda = 5$; $x_1 = \frac{t}{2}$, $x_2 = \frac{5}{4}t$, $x_3 = t$.

б) $\lambda = 3$; $x_1 = -t$, $x_2 = -2t$, $x_3 = t$.

84. Найти все решения системы:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответы. а) единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

б) $x_1 = -4t, x_2 = -t, x_3 = 5t$;

в) $x_1 = -2t_1 - 3t_2, x_2 = t_1, x_3 = t_2$, где t_1, t_2 - произвольные действительные числа.

3.5. Расчетно-графическая работа

Решение систем линейных уравнений

1) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y - 3z = a^2 - 3a, \\ 2x + y - 2z = -b, \\ (a+1)x - 5y + (b-a)z = a. \end{cases}$$

тремя способами:

- по формулам Крамера;
- матричным методом;
- методом Гаусса.

2) При каком λ система

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda z = 0, \\ x + y - 3\lambda z = 0, \\ -2x + y + 3\lambda z = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевые решения. Найти их.

В данных системах λ - номер группы на потоке; b - номер студента в групповом списке.

4. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

4.1. Основные определения

Геометрический вектор ($\overline{AB}$ или $\vec{a}$) - это направленный отрезок, который определяется заданием начала и конца. Вектор, у которого начало совпадает с концом, называется нулевым.

Модулем вектора ($|\overline{AB}|$ или $|\vec{a}|$) называется его длина в выбранном масштабе. Если $|\vec{a}| = 1$, то вектор называется единичным ($\vec{e}$).

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны между собой ($\vec{a} = \vec{b}$), если $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

В определении равенства не участвует точка приложения векторов. Такие векторы называются свободными. Свободные векторы можно переносить в любую точку пространства.

Например, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можно привести к общему началу (рис.1) или расположить в цепь друг за другом (рис.2).

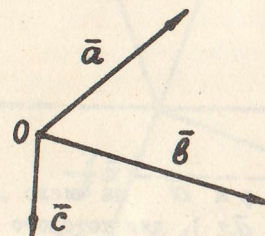


Рис. 1.

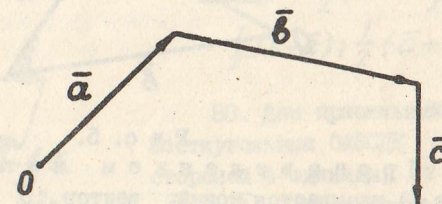


Рис. 2.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются компланарными, если они после приведения к общему началу лежат в одной плоскости.

4.2. Линейные операции над векторами

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенных в цепь, является замыкающий вектор, т.е. вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ (правило треугольника, рис. 3).

Так как $\vec{OC} = \vec{OB}$, то суммой векторов, приведенных к общему началу, является вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах, и идущий из общего начала (см. рис. 3).

Правило треугольника распространяется на любое число слагаемых: суммой векторов, расположенных в цепь, является вектор, идущий из начала первого в конец последнего вектора (рис. 4).

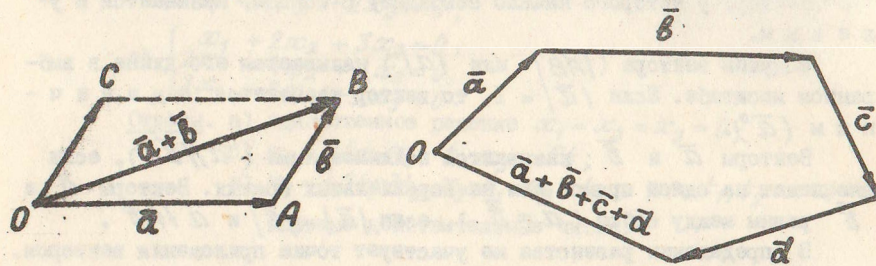


Рис. 3.

Разность векторов, приведенных к общему началу, есть вектор, идущий из конца вычитаемого в конец уменьшаемого вектора (рис. 5).

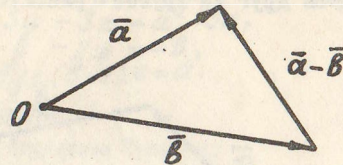


Рис. 5.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ (рис. 6) называется новый вектор $\lambda\vec{a}$ (или $\vec{a}\lambda$), для которого выполняются условия:

- а) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$; в) $\lambda\vec{a} \uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$ и $\lambda\vec{a} \downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

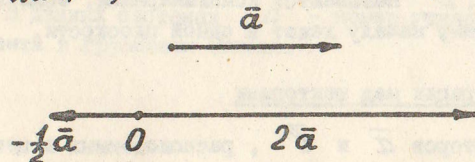


Рис. 6.

Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называются противоположными. Вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}^0$ есть единичный вектор направления $\vec{a}$.

85. В правильном шестиугольнике даны векторы, совпадающие со сторонами (рис. 7). Указать векторы:

- 1) равной длины; 2) коллинеарные; 3) равные; 4) противоположные.

Ответ.

- 1) Все векторы.
2) $\vec{a} \parallel \vec{d}$; $\vec{b} \parallel \vec{e}$; $\vec{c} \parallel \vec{f}$.
3) $\vec{c} = \vec{f}$.
4) $\vec{a} = -\vec{d}$, $\vec{b} = -\vec{e}$.

86. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

Решение. Вытекает из рис. 8.

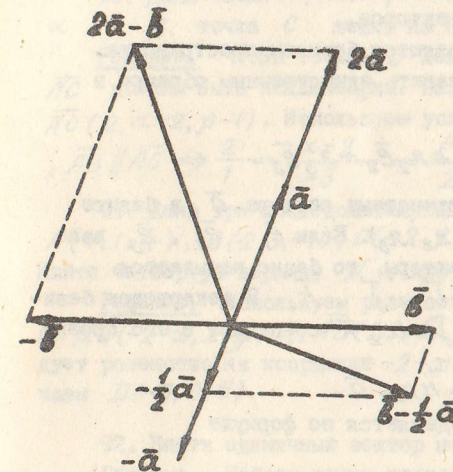


Рис. 8.

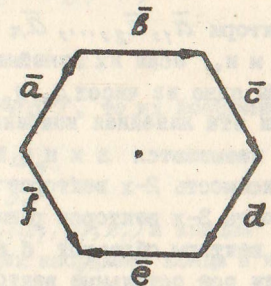


Рис. 7.

87. В параллелограмме $OACB$ даны векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\vec{MO}$, $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$, где M — точка пересечения диагоналей.

Ответ. $-\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$;
 $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$; $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

88. Дан правильный шестиугольник $OABСDE$ со стороной 4 единицы, $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ — единичные векторы направлений $\vec{OA}$, $\vec{AB}$, $\vec{BC}$. Найти зависимость между $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$. Выразить через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы $\vec{OB}$, $\vec{EO}$, $\vec{OD}$, $\vec{DA}$.

Ответ. $\vec{m} - \vec{n} + \vec{p} = 0$;
 $4\vec{m} + 4\vec{n}$; $-4\vec{p}$; $4\vec{n} + 4\vec{p}$; $-8\vec{p}$.

89. В параллелепипеде $ABСDA'B'C'D'$ даны векторы $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$, $\vec{AA'} = \vec{c}$, совпадающие с его ребрами. Найти векторы-диагонали $\vec{AC'}$, $\vec{A'C}$, $\vec{BD'}$, $\vec{B'D}$.

Ответ. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$; $\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$.

4.3. Линейная зависимость векторов. Базис

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называются линейно зависимими, если их линейная комбинация $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = 0$ и хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не равно 0. В противном случае, т.е. если эта линейная комбинация равна 0 лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, векторы называются линейно независимыми. Линейная зависимость 2-х векторов равносильна их коллинеарности. Линейная зависимость 3-х векторов равносильна их компланарности. Линейно независимые векторы образуют базис плоскости (пространства), если все остальные векторы плоскости (пространства) можно выразить в виде линейной комбинации этих векторов. Базисом плоскости является любая пара неколлинеарных векторов. Базисом пространства является любая тройка некопланарных векторов.

Пусть векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ являются базисом пространства. Тогда любой вектор $\bar{c}$ можно представить единственным образом в виде

$$\bar{c} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3.$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами вектора $\bar{c}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Обозначают $\bar{c} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ взаимно перпендикулярные и единичные векторы, то базис называется декартовым. Его обозначают $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. В декартовом базисе координаты вектора $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ совпадают с его проекциями на оси координат:

$$a_x = \text{пр}_{Ox} \bar{a}; a_y = \text{пр}_{Oy} \bar{a}; a_z = \text{пр}_{Oz} \bar{a}.$$

Модуль вектора $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ определяется по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направление вектора определяется углами α, β, γ с осями координат, косинусы которых равны

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos \beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos \gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Эти косинусы называются направляющими. Для них выполняется тождество:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Координаты вектора вполне определяют вектор, т.е. равные векторы имеют равные координаты.

Линейные операции над векторами переносятся на их координаты: пусть $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$, тогда $\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x)\bar{i} + (a_y + b_y)\bar{j} + (a_z + b_z)\bar{k}$, $\lambda \bar{a} = \lambda a_x \bar{i} + \lambda a_y \bar{j} + \lambda a_z \bar{k}$.

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны ($\bar{b} = \lambda \bar{a}$), то их координаты пропорциональны

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Координаты вектора, заданного началом $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и концом $M_2(x_2, y_2, z_2)$, равны разности соответствующих координат конца и начала $M_1, M_2(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

90. Даны точки $A(1, 2, 1), B(2, -1, 3), C(3, \alpha, \beta)$. При каких значениях α и β точка C лежит на прямой AB ?

Решение. Чтобы точка C лежала на прямой AB , векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ должны быть коллинеарны. Находим координаты векторов $\overline{AB}(1, -3, 2), \overline{AC}(2, \alpha - 2, \beta - 1)$. Используем условие коллинеарности векторов $\overline{AB} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\alpha - 2}{-3} = \frac{\beta - 1}{2} \Rightarrow \alpha = -4, \beta = 5$.

91. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1, 1, 4), B(2, 3, -1), C(-2, 2, 0)$.

Найти четвертую вершину D , противоположную вершине B .

Решение. Используем равенство $\overline{AB} = \overline{DC}$. Пусть $D(x, y, z)$, тогда $\overline{DC}(-2 - x, 2 - y, -z)$, $\overline{AB}(1, 2, -5)$. Из равенства векторов $\overline{AB} = \overline{DC}$ следует равенство их координат $-2 - x = 1, 2 - y = 2, -z = -5$. Получаем $D(-3, 0, 5)$.

92. Найти единичный вектор направления $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} - 12\bar{k}$.

Решение. Найдем длину вектора $\bar{a}: |\bar{a}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$. Тогда $\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{3}{13}\bar{i} + \frac{4}{13}\bar{j} - \frac{12}{13}\bar{k}$.

Координаты единичного вектора совпадают с направляющими косинусами $\cos \alpha = \frac{3}{13}, \cos \beta = \frac{4}{13}, \cos \gamma = -\frac{12}{13}$.

93. На плоскости даны три вектора $\bar{a}(3, -2), \bar{b}(-2, 1)$ и $\bar{c}(7, -4)$. Проверить, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис плоскости и найти координаты вектора $\bar{c}$ в этом базисе.

Решение. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ являются неколлинеарными, так как их координаты не пропорциональны $\frac{3}{-2} \neq \frac{-2}{1}$. Следовательно, $\bar{a}$ и $\bar{b}$

образуют базис. Координаты вектора $\vec{c}$ в базисе векторов $\vec{a}, \vec{b}$ есть коэффициенты линейного разложения $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Перепишем это равенство в координатной форме:

$$\begin{cases} 7 = 3\alpha - 2\beta, \\ -4 = -2\alpha + \beta. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\alpha = 1$, $\beta = -2$. Итак, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

94. Найти координаты векторов: 1) $2\vec{a}$, 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$, 3) $\vec{a} + \vec{b}$, 4) $\vec{a} - \vec{b}$, 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$, 6) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a}(3, -2, 6)$ и $\vec{b}(-2, 1, 0)$.

Ответ. 1) $(6, -4, 12)$, 2) $(1, -\frac{1}{2}, 0)$, 3) $(1, -1, 6)$, 4) $(1, 3, 6)$, 5) $(0, -1, 12)$, 6) $(3, -\frac{5}{3}, 2)$.

95. Даны точки $A(3, -1, 2)$ и $B(-1, 2, 2)$. Найти координаты вектора $\vec{AB}$, его модуль и направление (направляющие косинусы).

Ответ. $(-4, 3, 0)$; 5; $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\gamma = 0$.

96. Может ли вектор составлять с координатными осями углы

а) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;

б) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

Ответ. а) нет; б) да.

97. Найти единичный вектор (орт) направления $\vec{a} = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$

Ответ. $(-\frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7})$.

98. Определить, при каких α и β векторы $\vec{a}(2, \alpha, 1)$ и $\vec{b}(3, -6, \beta)$ коллинеарны.

Ответ. $\alpha = -4$, $\beta = \frac{3}{2}$.

99. Доказать, что точки $A(-3, -7, -5)$, $B(0, -1, -2)$ и $C(2, 3, 0)$ лежат на одной прямой.

100. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(2, 1, -4)$, $B(1, 3, 5)$, $C(7, 2, 3)$ и $D(8, 0, -6)$ есть параллелограмм. Найти длины его сторон и диагоналей.

Ответ. $\sqrt{86}$; $\sqrt{41}$; $5\sqrt{3}$; $\sqrt{179}$.

101. На плоскости даны два вектора $\vec{p}(2, -3)$ и $\vec{q}(1, 2)$. Найти разложение вектора $\vec{a}(9, 4)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}$.

Ответ. $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

102. Даны три вектора $\vec{p}(3, -2, 1)$, $\vec{q}(-1, 1, -2)$ и $\vec{z}(2, 1, -3)$. Найти разложение вектора $\vec{c}(11, -6, 5)$ по базису $\vec{p}, \vec{q}, \vec{z}$.

Ответ. $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{z}$.

4.4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скаляр), равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Если $\vec{a} = \vec{F}$ - вектор силы, $\vec{b} = \vec{s}$ - вектор перемещения, то $(\vec{F}, \vec{s}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos(\vec{F}, \vec{s}) = A$ - есть работа силы $\vec{F}$ на прямолинейном пути $\vec{s}$.

Свойства скалярного произведения

1) Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

2) Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ скалярный квадрат равен квадрату модуля.

3) $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ - скалярное произведение равно произведению модуля одного вектора на проекцию другого на направление первого.

4) Скалярное произведение подчиняется следующим законам умножения:

а) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$;

б) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$;

в) $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b})$.

Пусть $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$.

Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$;

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ - условие ортогональности (перпендикулярности) векторов.

103. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$ и $|\vec{b}| = 2$, найти:

1) $(\vec{a}, \vec{b})$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(2\vec{a} - 3\vec{b})^2$; 5) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Решение. 1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi = -3$;

2) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 9$; 3) $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 4$;

$$4) (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 4\vec{a}^2 - 12(\vec{a} \cdot \vec{b}) - 9\vec{b}^2 = 4 \cdot 9 - 12 \cdot (-3) - 9 \cdot 4 = 36;$$

$$5) |2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} = \sqrt{36} = 6.$$

104. Даны векторы $\vec{a}(-1, 2, 4)$ и $\vec{b}(5, -1, 0)$. Найти:

$$1) (\vec{a} \cdot \vec{b})^2; 2) \vec{a}^2; 3) \vec{b}^2; 4) (2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b}); 5) (\vec{a} - \vec{b})^2.$$

Решение.

$$1) (\vec{a} \cdot \vec{b}) = -1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = -7;$$

$$2) \vec{a}^2 = (-1)^2 + 2^2 + 4^2 = 21;$$

$$3) \vec{b}^2 = 5^2 + (-1)^2 + 0^2 = 26;$$

$$4) (2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a}^2(\vec{b} \cdot \vec{a}) + 6(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 5(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b}^2 = 21 - 5(-7) - 26 = -19;$$

$$5) (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2 = 21 + 14 + 26 = 61.$$

Замечание. Можно в последней задаче найти сначала координаты вектора $\vec{a} - \vec{b} = (-6, 3, 4)$, а затем $(\vec{a} - \vec{b})^2 = (-6)^2 + 3^2 + 4^2 = 61$.

105. Найти внешний угол при вершине A в треугольнике ABC $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$, $C(1, -2, 1)$.

Решение. Внешний угол при вершине A в треугольнике ABC равен углу между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CA}$. Находим координаты векторов $\vec{AB}(2, -1, 2)$, $\vec{CA}(2, 4, -4)$. Теперь найдем косинус угла между ними

$$\cos \varphi = \cos(\vec{AB}, \vec{CA}) = \frac{(\vec{AB} \cdot \vec{CA})}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{CA}|} = \frac{4 - 4 - 8}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = -\frac{4}{9}.$$

$$\text{Отсюда } \varphi = \arccos\left(-\frac{4}{9}\right).$$

106. При каком α векторы $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha \vec{k}$ ортогональны?

Решение. Векторы ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \alpha - 6 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -6.$$

Итак, при $\alpha = -6$ векторы ортогональны.

107. Даны векторы $\vec{a}(1, -3, 4)$, $\vec{b}(3, -4, 2)$ и $\vec{c}(-1, 1, 4)$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a}$.

$$\text{Решение. } \text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = \frac{\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|}.$$

Вычислим сначала координаты вектора $\vec{b} + \vec{c}$

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6).$$

$$\text{Тогда } |\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Теперь вычислим скалярное произведение

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 6 = 35.$$

Окончательно получим $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a} = \frac{35}{7} = 5$.

108. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, найти:

$$1) (\vec{a} \cdot \vec{c}); 2) \vec{a}^2; 3) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c};$$

$$4) (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c}); 5) |2\vec{a} - \vec{b}|.$$

$$\text{Ответ. } 1) 12, 2) 9, 3) 32, 4) -62, 5) \sqrt{61}.$$

109. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$; $|\vec{a}| = \sqrt{3}$; $|\vec{b}| = 1$. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

$$\text{Ответ. } \sqrt{7}.$$

110. Даны векторы $\vec{a}(4, -2, -4)$, $\vec{b}(6, -3, 2)$. Найти:

$$1) (\vec{a} \cdot \vec{b}); 2) \sqrt{\vec{a}^2}; 3) \sqrt{\vec{b}^2}; 4) (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b});$$

$$5) (\vec{a} + \vec{b})^2.$$

$$\text{Ответ. } 1) 22, 2) 6, 3) 7, 4) -200, 5) 129.$$

111. Даны точки $A(-1, 3, -7)$, $B(2, -1, 5)$ и $C(0, 1, -5)$. Найти:

$$1) (2\vec{AB} - \vec{CB})(2\vec{BC} + \vec{BA}), 2) \sqrt{\vec{AB}^2}, 3) \sqrt{\vec{AC}^2}.$$

$$\text{Ответ. } 1) -524, 2) 13, 3) 3.$$

112. Найти внутренний угол при вершине B в треугольнике ABC $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$.

$$\text{Ответ. } 45^\circ.$$

113. Проверить ортогональность векторов $\vec{a}(-1, 2, 2)$ и $\vec{b}(2, 3, -2)$.

114. Даны вершины четырехугольника $A(2, -3, 1)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$ и $D(-5, -5, 3)$. Доказать, что его диагонали $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ взаимно перпендикулярны.

115. Даны векторы $\vec{a}(1, -1, 3)$, $\vec{b}(0, 2, -1)$ и $\vec{c}(-1, 4, 2)$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a} + 2\vec{c})$.

$$\text{Ответ. } \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

116. Даны точки $A(-2, 3, 4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$ и $D(3, 2, -4)$. Найти $\text{пр}_{\vec{CD}} \vec{AB}$.

$$\text{Ответ. } \frac{1}{7}.$$

II7. Вычислить работу силы $\vec{F}(3, -2, -5)$ вдоль вектора $\vec{AB}$, если $A(2, -3, 5)$, $B(3, -2, -1)$.

Ответ. 31.

II8. Три силы $\vec{F}_1(3, 4, 2)$, $\vec{F}_2(2, 3, -5)$ и $\vec{F}_3(-3, -2, 4)$ приложены к одной точке. Вычислить работу равнодействующей этих сил на пути M_1M_2 , где $M_1(5, 3, -7)$, $M_2(4, -1, -4)$.

Ответ. 13.

4.5. Векторное произведение векторов

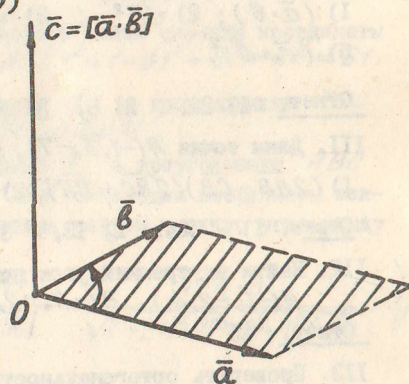
Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, для которого выполняются условия:

а) $|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$ — модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 9);

б) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

в) $\vec{c}$ образует с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ правую тройку.

Если $\vec{F}$ — сила, приложенная к точке M , $\vec{r} = \vec{OM}$ — радиус-вектор точки M , то $[\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_0$ — момент силы относительно точки O .



Р и с. 9.

Свойства векторного произведения

1) Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$.

2) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

3) Для векторного произведения выполняются следующие законы умножения

а) $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$;

б) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$.

Если $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

С помощью векторного произведения можно вычислять площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах

$$S_{\text{парал}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|; S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

II9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$ и $|\vec{b}| = 5$, вычислить $|[\vec{a}, \vec{b}]|$. Чему равна площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

Решение. $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi = 6 \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 30$ (ед).

$$S_{\text{парал}} = |[\vec{a}, \vec{b}]| = 30 \text{ (кв. ед)}.$$

120. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить векторное произведение $[(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})]$ и его модуль $|[(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})]|$.

Решение. Пользуясь свойствами векторного произведения, сначала преобразуем векторное произведение

$$[(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})] = 2[\vec{a}, \vec{a}] + [\vec{b}, \vec{a}] + 4[\vec{a}, \vec{b}] + 2[\vec{b}, \vec{b}] =$$

$$= 0 - [\vec{a}, \vec{b}] + 4[\vec{a}, \vec{b}] + 0 = 3[\vec{a}, \vec{b}].$$

Теперь найдем модуль полученного выражения

$$|[(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})]| = |3[\vec{a}, \vec{b}]| = 3|[\vec{a}, \vec{b}]| =$$

$$= 3|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

121. Даны векторы $\vec{a}(3, 0, -2)$ и $\vec{b}(-1, 2, 4)$. Найти

1) $[\vec{a}, \vec{b}]$, 2) $[(3\vec{a} - \vec{b}), \vec{b}]$.

Решение. 1)

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 10\vec{j} + 6\vec{k};$$

$$2) [(3\vec{a} - \vec{b}), \vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}] = 12\vec{i} - 30\vec{j} + 18\vec{k}.$$

Замечание. Последнюю задачу можно решить, найдя сначала координаты вектора $3\vec{a} - \vec{b}$: $3\vec{a} - \vec{b} = (10, -2, -10)$. Затем найдем $[(3\vec{a} - \vec{b}), \vec{b}]$:

$$[(3\vec{a} - \vec{b}), \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & -2 & -10 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 30\vec{j} + 18\vec{k}.$$

122. Сила $\vec{F}(3, 2, -4)$ приложена к точке $A(2, -1, 1)$. Найти момент силы относительно начала координат.

Решение. Момент силы относительно начала координат определяется по формуле $M_0 = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$, где $\vec{r} = \vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

Тогда
$$M_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}.$$

123. Найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 2, 4)$, $C(3, 0, -1)$ и длину высоты h , опущенной из вершины C на сторону AB .

Решение. Площадь треугольника вычисляется по формуле $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |[\vec{a} \cdot \vec{b}]|$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы, совпадающие с любыми двумя сторонами треугольника. Пусть, например, $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AC}$. Находим координаты этих векторов $\vec{AB}(-2, 2, 4)$, $\vec{AC}(2, 0, -1)$. Их векторное произведение

$$[\vec{AB} \cdot \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}), \text{ поэтому}$$

$$|[\vec{AB} \cdot \vec{AC}]| = 4 \cdot |-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}| = 4\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 28.$$

Отсюда $S_{\Delta} = 14$ (кв.ед.). Для отыскания высоты h воспользуемся формулой $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \cdot h$, откуда $h = \frac{2S_{\Delta}}{|\vec{AB}|}$.

Находим длину стороны AB

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}.$$

Тогда
$$h = \frac{28}{2\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{3}.$$

124. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, вычислить модуль векторного произведения этих векторов $|[\vec{a} \cdot \vec{b}]|$.

Ответ. 15.

125. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить

1) $|[(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})]|$; 2) $|[(3\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})]|$.

Ответ. 1) 24, 2) 60.

126. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Найти

1) $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$; 2) $[(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})]$.

Ответ. 1) $5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$; 2) $25\vec{i} + 5\vec{j} + 35\vec{k}$.

127. Даны вершины треугольника $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ и $C(1, 3, -1)$. Найти площадь треугольника и длину высоты, опущенной из вершины B .

Ответ. 25; 5.

128. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-3, 2)$, $B(5, -2)$ и $C(1, 3)$.

Ответ. 12.

129. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 1$, угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $\frac{\pi}{6}$.

Ответ. $\frac{7}{2}$.

4.6. Смешанное произведение 3-х векторов

Векторно-скалярное произведение $([\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c})$ называется смешанным. Его можно обозначить $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$, так как $([\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c}) = (\vec{a} [\vec{b} \cdot \vec{c}])$. Смешанное произведение 3-х некопланарных векторов, образующих правую тройку, равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

$$V_{\text{пар}} = \vec{a} \vec{b} \vec{c}.$$

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку, то $V_{\text{пар}} = -\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

Объединяя оба случая, получим формулу $V_{\text{пар}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$.

Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, вычисляется по формуле

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

Если векторы компланарны, то $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0$.

Пусть $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$. Тогда

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

— условие компланарности 3-х векторов.

130. Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A , B , C и D лежат в одной плоскости, если векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$ компланарны.

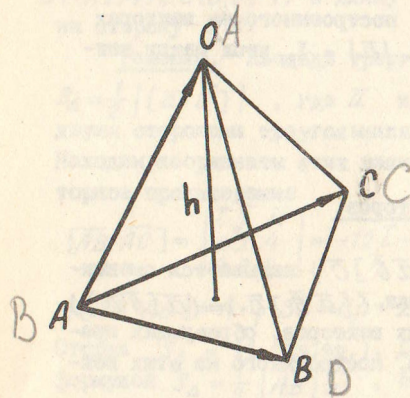
Находим координаты векторов $\vec{AB}(-1, -1, 6)$, $\vec{AC}(-2, 0, 2)$, $\vec{AD}(1, -1, 4)$.

Проверим условие компланарности векторов

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, векторы компланарны, а точки лежат в одной плоскости.

131. Найти объем пирамиды с вершинами $O(-5, -4, 8)$, $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$ и $C(6, 3, 7)$ и длину высоты, опущенной из вершины O на грань ABC (рис. 10).



Р и с. 10.

Для отыскания высоты h воспользуемся формулой $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S h$, где S - площадь грани ABC , откуда $h = \frac{3 V_{\text{пир}}}{S}$. Площадь грани S найдем по формуле $S = \frac{1}{2} |\overline{AB} \cdot \overline{AC}|$. Находим векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = 4(-3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}).$$

$$\text{Тогда } S = \frac{1}{2} \cdot 4 \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 2 \sqrt{9 + 36 + 4} = 14.$$

$$\text{Итак, } h = \frac{154}{14} = 11 (\text{ед}).$$

132. Даны векторы $\vec{a}(1, -1, 3)$, $\vec{b}(-2, 2, 1)$ и $\vec{c}(3, -2, 5)$.

1) Вычислить $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$; 2) установить, какую тройку векторов они образуют.

Ответ. - 7; левую.

133. Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, если

1) $\vec{a}(3, -2, 1)$, $\vec{b}(2, 1, 2)$, $\vec{c}(3, -1, -2)$;

2) $\vec{a}(2, -1, 2)$, $\vec{b}(1, 2, -3)$, $\vec{c}(3, -4, 7)$.

Ответ. 1) нет; 2) да.

130-134. Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

135. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(1, -2, 1)$, $\vec{b}(3, 2, 1)$ и $\vec{c}(1, 0, -1)$.

Ответ. 12.

136. Найти объем пирамиды с вершинами $O(1, 1, 2)$, $A(2, 3, -1)$, $B(2, -2, 4)$, $C(-1, 1, 3)$.

Ответ. $\frac{5}{6}$.

131-137. Даны вершины пирамиды $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины D .

Ответ. 11.

138. Объем пирамиды $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины, если она находится на оси OY .

Ответ. $(0, 8, 0)$ или $(0, -7, 0)$.

139. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны и разложить вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ. $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

Варианты контрольной работы

В а р и а н т I

I. Выполнить действия $3A^{-1} \cdot B - C$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y + z = 0, \\ 3x + y + 2z = -1. \end{cases}$$

3. Найти $\rho_{\vec{a}+\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b})$, если $\vec{a}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$.
4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}(1,1,-8)$ и $\vec{b}(2,0,-7)$.
5. Проверить, лежат ли точки в одной плоскости $A(0,1,-3)$, $B(0,1,0)$, $C(-1,2,-1)$, $D(1,0,7)$.

Ответы и указания

1. $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $3A^{-1} \cdot C - B = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -3 & 10 & 14 \end{pmatrix}$.

2. $A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$; $x=1$, $y=0$, $z=-2$.

3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. $S_{\text{парал.}} = |[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{134}$.

5. Проверить, что $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = 0$.

В а р и а н т 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+5z=0, \\ 2x-y+4z=0, \\ -x+y-z=0. \end{cases}$$

2. Найти работу вектора $\vec{F}=\vec{a}-3\vec{b}$ вдоль вектора $\vec{S}=2\vec{a}+\vec{b}$, где $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$ и $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

3. Найти объем пирамиды с вершинами $A(0,0,1)$, $B(2,3,5)$, $C(6,2,3)$ и $D(3,7,2)$.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 9 \\ 2 & 1 & 15 \end{pmatrix}$.

5. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(-2,4)$ и $C(-3,2)$ и длину высоты h , опущенной из вершины B на сторону AC .

Ответы и указания

1. Система имеет множество решений: $x=-3t$, $y=-2t$, $z=t$ где t - произвольное действительное число.

2. $A = -15$. Найти скалярное произведение $(\vec{a}-3\vec{b})(2\vec{a}+\vec{b})$.

3. 20 куб.ед.

4. $A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $S_{\Delta} = 21$ кв.ед.; $h = 5$ ед.

Библиографический список

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.-М.:Наука, 1971.

Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии.-М.:Наука, 1975.

Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики /Под ред. Г.И. Кручовича.-М.:Высшая школа, 1970.

Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.-М.:Наука, 1974.

СОДЕРЖАНИЕ

I. Определители 2-го и 3-го порядка.	3
I.1. Основные определения.	3
I.2. Свойства определителей.	4
II. Матрицы.	8
II.1. Операции над матрицами.	8
II.2. Обратная матрица.	12
II.3. Решение матричных уравнений.	14
III. Решение систем линейных уравнений.	14
III.1. Формулы Крамера.	14
III.2. Метод обратной матрицы.	16
III.3. Метод Гаусса.	17
III.4. Однородная система линейных уравнений.	19
III.5. Расчетно-графическая работа.	20
IV. Векторная алгебра.	21
IV.1. Основные определения.	21
IV.2. Линейные операции над векторами.	21
IV.3. Линейная зависимость векторов. Базис.	24
IV.4. Скалярное произведение векторов.	27
IV.5. Векторное произведение векторов.	30
IV.6. Смешанное произведение 3-х векторов.	33
Варианты контрольной работы.	35
Библиографический список.	37

Составитель Юлия Николаевна Храмова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ
К АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Редактор Т.И. Папкина
Техн. редактор Н.М. Каленюк
Корректор О.Ю. Ненашева

Подписано в печать 2.06.88. Формат 60х84 1/16.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. 2,3. Уч.-изд.л. 2,0. Т. 1000 экз.
Заказ № 7263. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П. Королева, г. Куйбышев, ул. Моло-
догвардейская, 151.

Типография им. В.П. Мяти Куйбышевского полиграфического
объединения, 443099, г. Куйбышев, ул. Венца, 60.