

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАУЧНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ)»**

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

САМАРА 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАУЧНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ)»

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

*Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний к лабораторным работам*

САМАРА
Издательство СГАУ
2012

УДК СГАУ: 519.6(075)

ББК 22.193

Составитель *О.А. Кузнецова*

Рецензент канд. экон. наук, доц. Д. Ю. И в а н о в

Численные методы: метод. указания к лаб. работам / сост. *О.А. Кузнецова*. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2012. – 61 с.

Рассматриваются численные методы решения математических и экономических задач .

Предназначены для студентов специальности 080116.65 «Математические методы в экономике».

УДК СГАУ: 519.6(075)

ББК 22.193

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1. Приближение функций	4
Лабораторная работа № 2. Интерполяция функций.....	14
Лабораторная работа № 3. Построение сплайн-функции.....	17
Лабораторная работа № 4. Численные методы решения нелинейных уравнений.....	20
Лабораторная работа № 5. Численные методы решения систем уравнений.....	25
Лабораторная работа № 6. Численные методы интегрирования.....	46
Лабораторная работа № 7. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.....	50
Лабораторная работа № 8. Методы численной оптимизации.....	52
Список использованной литературы.....	60

Лабораторная работа № 1

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Цель работы: научиться использовать методы вычисления для функций, о которых известна полная информация.

Задание: Для функций $f(x)$ и $g(x)$, рассматриваемых на отрезке $x \in [-1; 1]$ и при заданном значении $x_0 = 0$, выполнить следующие задания:

1. Разложить функцию в ряд Тейлора с $n_1 = 6$, $n_2 = 11$ и $n_3 = 20$ членами; оценить ошибку аппроксимации в каждом случае.
2. Выполнить аппроксимацию данных функций с помощью полиномов Чебышева.
3. Произвести экономизацию степенных рядов (разложить функцию в ряд Тейлора и заменить x^n полиномами Чебышева).

Вариант	Функция $f(x)$	Функция $g(x)$
1	$4 \sin x$	$2x^2 + 2x - 4$
2	$2 \cos x$	$3x^2 + x - 4$
3	$2 \sin x$	$x^2 + 3x - 4$
4	$3 \cos x$	$3x^2 + 2x - 5$
5	$3 \sin x$	$2x^2 + 4x - 6$
6	$\cos x$	$3x^2 + 4x - 7$

4. Сформулировать вывод о сложности использования и точности применяемых методов.

Пример выполнения работы

1. Разложение функций в ряд Тейлора

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора функции $f(x) = 2 \sin x$.

Общая формула разложения в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 по степеням $(x - x_0)$ имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(\xi), \quad (1)$$

где $R_n(\xi)$ – ошибка ограничения, которую можно определить по формуле

$$R_n(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (2)$$

где ξ находится между x и x_0 .

Согласно формулам (1) и (2) разложение функции $f(x) = 2 \sin x$ в ряд Тейлора с шестью членами с учётом $x_0 = 0$ выглядит так:

$$f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + R_6(\xi).$$

Ошибка при такой аппроксимации составит

$$R_6(\xi) = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}x^7 = \frac{-2 \cos x}{7!}x^7.$$

Максимально возможное значение ошибки аппроксимации при разложении рассматриваемой функции в ряд Тейлора с шестью членами составляет

$$|R_6(1)| = 2,144 \cdot 10^{-4}.$$

Аналогично разложим функцию $f(x) = 2 \sin x$ в ряд Тейлора с одиннадцатью членами:

$$f(x) = 2 \cdot x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{2520} + \frac{x^9}{181440} - \frac{x^{11}}{19958400} + R_{11}(\xi).$$

Ошибка при такой аппроксимации составит

$$R_{11}(\xi) = \frac{f^{(12)}(\xi)}{12!} x^7 = \frac{2 \sin x}{12!} x^{12}.$$

Максимально возможное значение ошибки аппроксимации при разложении рассматриваемой функции в ряд Тейлора с шестью членами составляет

$$|R_{11}(1)| = 3,513 \cdot 10^{-9}.$$

Разложим функцию $f(x) = 2 \sin x$ в ряд Тейлора с двадцатью членами:

$$f(x) = 2 \cdot x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{2520} + \frac{x^9}{181440} - \frac{x^{11}}{19958400} + \frac{x^{13}}{3113510400} - \\ - \frac{x^{15}}{653837184000} + \frac{x^{17}}{177843714048000} - \frac{x^{19}}{60822550204416000} + R_{20}(\xi).$$

Ошибка при такой аппроксимации составит

$$R_{20}(\xi) = \frac{f^{(21)}(\xi)}{21!} x^7 = \frac{2 \cos x}{21!} x^{21}.$$

Максимально возможное значение ошибки аппроксимации при разложении рассматриваемой функции в ряд Тейлора с шестью членами составляет

$$|R_{20}(1)| = 2,115 \cdot 10^{-20}.$$

Мы видим, что при повышении порядка аппроксимирующего полинома точность аппроксимации возрастает нелинейно: при разложении функции $f(x) = 2 \sin x$ в ряд Тейлора с 6 членами порядок ошибки ограничения составляет 10^{-4} , при разложении в ряд с 11 членами – 10^{-9} , а при использовании ряда с 20 членами – уже 10^{-20} .

Рассмотрим теперь разложение в ряд Тейлора функции $g(x) = x^2 + 3x - 4$. Снова воспользуемся формулами (1) и (2).

Разложение функции $g(x) = x^2 + 3x - 4$ в ряд Тейлора с шестью членами с учётом $x_0 = 0$ выглядит так:

$$g(x) = -4 + 3x + x^2 + R_6(\xi).$$

Ошибка при такой аппроксимации составит

$$R_6(\xi) = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} x^7 = \frac{(x^2 + 3x - 4)^{(7)}}{7!} x^7 = \frac{0}{7!} x^7 = 0.$$

Поскольку порядок степенной функции, разлагаемой в ряд Тейлора, меньше количества членов в этом ряду, аппроксимирующая функция тождественна аппроксимируемой, следовательно, ошибка аппроксимации равна нулю.

Разложение функции $g(x) = x^2 + 3x - 4$ в ряд Тейлора с тремя и более членами неактуально, так как такое разложение будет в точности повторять исходную функцию. Соответственно, нет необходимости

выполнять разложение в ряды с 11 и 20 членами и вычислять для них ошибку аппроксимации – результаты будут такими же, как в приведённом выше разложении в ряд с 6 членами.

2. Аппроксимация функций с помощью полиномов Чебышева

Любую функцию на отрезке $[-1; 1]$ можно представить как линейную комбинацию полиномов Чебышева $T_i(x)$:

$$f(x) = \alpha_0 \cdot T_0(x) + \alpha_1 \cdot T_1(x) + \dots + \alpha_n \cdot T_n(x). \quad (3)$$

Полиномы Чебышева $T_i(x)$ определяются следующим образом:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x),$$

$$T_0(x) = \cos(0) = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x,$$

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \cos(2 \arccos x) = \cos^2(\arccos x) - \sin^2(\arccos x) = \\ &= x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1. \end{aligned}$$

Или по рекуррентной формуле:

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Коэффициенты разложения α_i определяются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ \alpha_k &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Представим исходную функцию $f(x) = 2 \sin x$ в виде линейной комбинации шести полиномов Чебышева, используя формулы (3) и (4):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha_0 \cdot T_0(x) + \alpha_1 \cdot T_1(x) + \alpha_2 \cdot T_2(x) + \alpha_3 \cdot T_3(x) + \alpha_4 \cdot T_4(x) + \alpha_5 \cdot T_5(x) + \alpha_6 \cdot T_6(x) = \\
&= \left[\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 2 \sin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] \cdot 1 + \left[\frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 2 \sin x \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] \cdot x + \\
&+ \left[\frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 2 \sin x \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] \cdot (2x^2-1) + \left[\frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 2 \sin x \frac{4x^3-3x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] \cdot (4x^3-3x) + \\
&+ \left[\frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 2 \sin x \frac{1-8x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] \cdot (8x^4-8x^2+1) + \\
&+ \left[\frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 2 \sin x \frac{16x^5-20x^3+5x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] \cdot (16x^5-20x^3+5x) + \\
&+ \left[\frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 2 \sin x \frac{18x^2-48x^4+32x^6-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] \cdot (32x^6-48x^4+18x^2-1).
\end{aligned}$$

В общем случае разложение функции полиномами Чебышева выглядит следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i,$$

где n – требуемое количество полиномов Чебышева в разложении функции.

Из результатов расчётов видно, что аппроксимация функций полиномами Чебышева даёт более точные результаты по сравнению с разложением функций в ряд Тейлора, особенно при небольших количествах элементов ряда. При разложении рассматриваемой функции в ряд Тейлора с 6 членами точность расчётов на уровне 10^{-4} , а при аппроксимации функции линейной комбинацией из 6 полиномов Чебышева – уже 10^{-6} .

Представим функцию $g(x) = x^2 + 3x - 4$ в виде линейной комбинации шести полиномов Чебышева, используя формулы (3) и (4):

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \alpha_0 \cdot T_0(x) + \alpha_1 \cdot T_1(x) + \alpha_2 \cdot T_2(x) + \alpha_3 \cdot T_3(x) + \alpha_4 \cdot T_4(x) + \\
 &+ \alpha_5 \cdot T_5(x) + \alpha_6 \cdot T_6(x) = \\
 &= \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (x^2 + 3x - 4) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] 1 + \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (x^2 + 3x - 4) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] x + \\
 &+ \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (x^2 + 3x - 4) \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] (2x^2 - 1) + \\
 &+ \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (x^2 + 3x - 4) \frac{4x^3 - 3x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] (4x^3 - 3x) + \\
 &+ \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (x^2 + 3x - 4) \frac{1 - 8x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] (8x^4 - 8x^2 + 1) + \\
 &+ \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (x^2 + 3x - 4) \frac{16x^5 - 20x^3 + 5x}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] (16x^5 - 20x^3 + 5x) + \\
 &+ \left[\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (x^2 + 3x - 4) \frac{18x^2 - 48x^4 + 32x^6 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right] (32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1)
 \end{aligned}$$

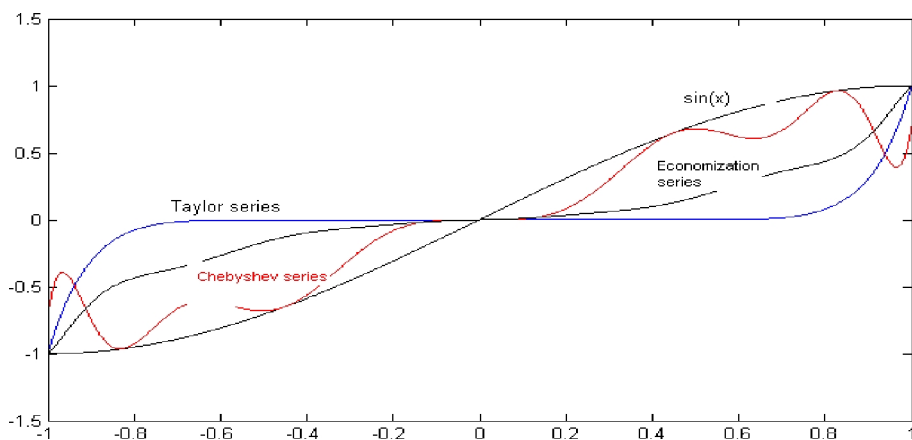
Рассчитаем значения функций в точках -1, 0 и 1 и их отклонения от значений исходной функции в этих точках:

3. Экономизация степенных рядов

Метод экономизации рядов заключается в корректировке коэффициентов частичной суммы степенного ряда функции $f(x)$. Он состоит из следующей последовательности действий:

1. Вычислить необходимое число коэффициентов степенного ряда для приближения функции $f(x)$ с требуемой точностью на отрезке $[a, b]$.
2. Сделать замену переменных для отображения интервала $[a, b]$ в интервал $[-1, 1]$.
3. Найти коэффициенты разложения полученного полинома по полиномам Чебышева.
4. В полученном разложении взять первые k членов так, чтобы коэффициент при T_{k+1} по абсолютной величине был меньше необходимой точности вычислений.
5. Представить полученную сумму многочленом стандартного вида.
6. Сделать обратную замену переменных.

Метод экономизации рядов позволяет распространить ошибку ограничения по всему интервалу, при этом уменьшив количество необходимых для вычисления слагаемых.



Для функции $f(x) = 2 \sin x$ при разложении в ряд Тейлора имеем

$$f(x) = 2 \cdot x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{2520} + \frac{x^9}{181440} - \frac{x^{11}}{19958400}.$$

С помощью метода приближения функции полиномами Чебышева получим

$$x^{11} = \frac{1}{1024} (462T_1 + 330T_3 + 165T_5 + 55T_7 + 11T_9 + T_{11}).$$

Полиномы Чебышева представляют собой следующие выражения:

$$T_1 = x,$$

$$T_3 = 4x^3 - 3x,$$

$$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x,$$

$$T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x,$$

$$T_{11} = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x.$$

Подставляя $T_1 - T_9$ в x^{11} , получим

$$\begin{aligned} x^{11} &= \frac{1}{1024} (462T_1 + 330T_3 + 165T_5 + 55T_7 + 11T_9 + T_{11}) = \\ &= \frac{1}{1024} (462x + 1320x^3 - 990x + 2640x^5 - 3300x^3 + 825x + \\ &+ 3520x^7 - 6160x^5 + 3080x^3 - 385x + 2816x^9 - 6336x^7 + \\ &+ 4752x^5 - 1321x^3 + 99x + T_{11}) = \\ &= \frac{1}{1024} (2816x^9 - 2816x^7 + 1232x^5 - 220x^3 + 11x + T_{11}) = \\ &= 2,75x^9 - 2,75x^7 + \frac{1232}{1024}x^5 - \frac{220}{1024}x^3 + \frac{11}{1024}x + \frac{T_{11}}{1024}. \end{aligned}$$

Подставим x^{11} в выражение для ряда Тейлора:

$$\begin{aligned}
 f_{\ominus}(x) &= 2 \cdot x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{2520} + \frac{x^9}{181440} - \frac{x^{11}}{19958400} = \\
 &= 2x + \frac{11}{20437401600}x - \frac{x^3}{3} - \frac{220}{20437401600}x^3 + \\
 &+ \frac{x^5}{60} + \frac{1232}{20437401600}x^5 - \frac{x^7}{2520} - \frac{2816x^7}{20437401600} + \\
 &+ \frac{x^9}{181440} + \frac{2816x^9}{20437401600} + \frac{T_{11}}{20437401600} = \\
 &= 2,00000000054x - 0,3333333441x^3 + 0,01666672695x^5 - \\
 &- 0,00039696318x^7 + 0,00000564925x^9 + \frac{T_{11}}{20437401600}.
 \end{aligned}$$

Значение T_{11} на рассматриваемом интервале ($x \in [-1; 1]$) по модулю не превосходит 1; для оценки ошибки примем $T_{11}=1$.

Отклонение значения полинома $f_{\ominus}(x)$ от истинного значения функции $f(x) = 2 \sin x$ составляет

$$\begin{aligned}
 Fe(x, t) &:= \left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{2520} + \frac{x^9}{181440} \right) + \\
 &+ \left(\frac{11x}{20437401600} - \frac{220x^3}{20437401600} + \frac{1232x^5}{20437401600} - \right. \\
 &- \left. \frac{2816x^7}{20437401600} + \frac{2816x^9}{20437401600} \right) + t, \\
 t &:= \frac{1}{20437401600},
 \end{aligned}$$

$$|f(1) - Fe(1, t)| = 9.989 \times 10^{-8}.$$

Заметим, что порядок приближающего полинома равен 9. Сравним значение ошибки приближения с ошибкой при использовании ряда Тейлора девятой степени:

$$R_9(x) := \frac{2 \sin(x)}{10!} x^{10},$$

$$R_9(1) := 4,638 \cdot 10^{-7}.$$

Мы видим, что ошибка приближения функции с помощью ряда Тейлора почти в пять раз больше, чем при приближении этой функции полиномом, полученным по методу экономизации степенных рядов (при том же порядке полинома). Из полученных значений можно сделать следующий вывод: экономизация степенного ряда позволяет получить в 5 раз более точный результат, чем обычный ряд Тейлора, при незначительном усложнении вычислений.

Лабораторная работа № 2

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Цель работы: научиться находить промежуточные значения в таблицах выборок с помощью интерполяции методами Ньютона и Лагранжа.

Задание: Вычислить значение интерполирующей функции в точках методами Ньютона и Лагранжа. Вычислить оценку погрешности интерполяции.

x	0.4	0.45	0.55	0.6	0.7	0.8
y	-3.632	-3.489	-3.1385	-2.928	-2.429	-1.816

Прямая интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $q = \frac{x - x_0}{h}$, $y_i = f_i$,

а выражения вида $\Delta^k y_i$ — конечные разности.

Обратная интерполяционная формула Ньютона

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $q = \frac{x - x_n}{h}$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}.$$

Пример. Построить эмпирическую формулу для функции y , заданной таблично.

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

Составляя таблицу разностей, убеждаемся, что вторая разность постоянна.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	5,2	2,8	-0,4
1	8,0	2,4	-0,4
2	10,4	2,0	-0,4
3	12,4	1,6	-0,4
4	14,0	1,2	
5	15,2		

Используя интерполяционную формулу Ньютона и учитывая, что $h = 1$, будем иметь:

$$y = 5,2 + 2,8x - \frac{0,4}{2}x(x-1)$$

или

$$y = 5,2 + 3x - 0,2x^2.$$

Определим погрешности.

Результаты интерполяции сведены в таблице:

Число узлов	Метод Лагранжа	Метод Ньютона	Оценка погрешности	
			метод Ньютона	метод Лагранжа
2	5,0877	-3,0122	0,00594	0,00312
3	5,09364	-3,01532	0,000048	0,000144
4	5,093592	-3,015176	0	

Пример применения формулы Лагранжа

b_i	$b_1 = 1$	$b_2 = 3$	$b_3 = 4$
$c_i = f(b_i)$	$c_1 = 2$	$c_2 = -2$	$c_3 = -1$

$$f(x) = 2 \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} - 2 \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} - \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = x^2 - 6x + 7.$$

Лабораторная работа № 3

ПОСТРОЕНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ

Цель работы: Изучить интерполяцию сплайн-функциями, научиться строить сплайны для функции, заданной таблично.

Задание: По заданной таблице значений составить линейный, параболический и кубический сплайны (вычислить $f'(x_i)$ и $f''(x_i)$, используя проверочную функцию). В одной системе координат построить график функции и графики всех сплайнов. Сделать анализ представленных методов.

Решение:

Сплайном называется непрерывная функция, принимающая в узлах интерполяции соответствующие значения $y_1, y_2, \dots, y_n$ и описываемая на отдельных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = \overline{1, n-1}$) некоторыми полиномами $P_i(x)$ невысокого порядка (обычно второго или третьего). Сплайны хороши тем, что дают возможность получить приближенный аналитический вид функции, при этом степень полинома остается невысокой. Главным недостатком сплайнов является то, что на каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ функция приближается отдельным полиномом. Таким образом, для всего промежутка $[x_1, x_n]$ требуется построить $n-1$ полином. При увеличении степени сплайна повышается точность интерполяции, однако увеличиваются количество вычислений и порядок полинома. Простейшим случаем сплайн-функции является линейный сплайн, получающийся соединением точек $(x_1, y_1) \dots, (x_n, y_n)$ ломаной линией. В этом случае

$$P_i(x) = a_i x + b_i,$$

где коэффициенты a_i и b_i можно найти по формулам

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$b_i = y_i - a_i x_i.$$

Параболический сплайн строится на полиномах второго порядка:

$$P_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i.$$

При построении параболического сплайна обычно считается заданной производная функции в первом узле $f'(x_1)$. Коэффициенты полиномов такого сплайна могут быть вычислены по следующим рекуррентным формулам:

1)

$$a_1 = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - f'(x_1) \right),$$

$$b_1 = f'(x_1) - 2a_1 x_1,$$

$$c_1 = y_1 - f'(x_1)x_1 + a_1 x_1^2.$$

i)

$$a_i = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \beta_i \right),$$

$$b_i = \beta_i - 2a_i x_i,$$

$$c_i = y_i - \beta_i x_i + a_i x_i^2,$$

где $\beta_i = 2a_{i-1}x_i + b_{i-1}$.

Чаще всего на практике используют кубический сплайн, так как при достаточно низком порядке полиномов он дает удовлетворительную точность вычислений. Для полиномов $P_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$, кубического сплайна коэффициенты могут быть получены по следующей рекуррентной схеме:

1)

$$a_1 = \frac{1}{(x_2 - x_1)^3} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2} f''(x_1)(x_2 - x_1) - f''(x_1) \right),$$

$$b_1 = \frac{1}{2} f''(x_1) - 3a_1 x_1,$$

$$c_1 = f''(x_1) - 3a_1 x_1^2 - 2b_1 x_1,$$

$$d_1 = y_1 - a_1 x_1^3 - b_1 x_1^2 - c_1 x_1,$$

где значения $f'(x_1)$ и $f''(x_1)$ считаются заданными (на практике часто полагают $f''(x_1) = 0$).

i)

$$a_i = \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)^3} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - r_i \cdot (x_{i+1} - x_i) - \beta_i \right),$$

$$b_i = r_i - 3a_i x_i,$$

$$c_i = \beta_i - 3a_i x_i^2 - 2b_i x_i,$$

$$d_i = y_i - a_i x_i^3 - b_i x_i^2 - c_i x_i,$$

где $\beta_i = 3a_{i-1}x_i^2 + 2b_{i-1}x_i + c_{i-1}$,

$$r_i = 3a_{i-1}x_i + b_{i-1}.$$

Лабораторная работа № 4

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: Изучить численные методы решения нелинейных уравнений с одним неизвестным; научиться программировать алгоритмы итерационных методов уточнения корней; сравнить скорость сходимости различных методов.

Задание:

1. Графическим методом определить наличие, приблизительное расположение и количество корней заданных уравнений.

2. Задать границы отрезка (интервала поиска). Значение шага поиска взять в пределах $0.1 \leq h \leq 1$. Результаты представить в виде таблицы:

Корень	Интервал
1	$[a_1, b_1]$
2	$[a_2, b_2]$
...	...

3. Уточнить корни уравнений по методу половинного деления. В качестве начального отрезка использовать интервал, найденный при выполнении второго задания. Определить приближенные значения корней с разной точностью ε (например, 10^{-1} , 10^{-5} , 10^{-8}). Результаты представить в виде таблицы:

Корень	Приближенное значение	Точность	Кол-во итераций
1		10^{-3}	
		10^{-5}	
		10^{-8}	
2			
...			

4. Найти корень по методу Ньютона (методу касательных). В качестве начального приближения к корню x_0 выберите одну из границ интервала, найденного в ходе выполнения второго задания. Для правильного выбора начального приближения используйте критерий $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Определите приближенные значения корней с разной точностью ε (например, 10^{-3} , 10^{-5} , 10^{-8}). Результаты представить в виде таблицы:

Корень	Начальное приближение	Приближенное значение	Точность	Кол-во итераций
1			10^{-3}	
			10^{-5}	
			10^{-8}	
2				
...				

5. Уточнить значение корня по методу секущих. В методе секущих необходимо задать два приближения к корню – нулевое x_0 и

первое x_1 . Нулевое приближение выбирается аналогично методу Ньютона. В качестве первого приближения можно взять величину $x_1 = x_0 + \sigma$. Результаты представить в виде аналогичной таблицы.

6. Уточнить значение корня по методу простых итераций. В программе предусмотрите счетчик количества итераций, совершаемых для достижения заданной точности. В качестве начального приближения к корню x_0 выберите любую точку из интервала $[a, b]$, найденного при выполнении задания 2. Определить приближенные значения корней с разной точностью ε (например, 10^{-3} , 10^{-5} , 10^{-8}). Результаты представить в виде, аналогичном заданию 4.

Пояснения. Преобразуйте исходное уравнение к виду, подходящему для метода простых итераций, т.е. к виду $x = \varphi(x)$.

Проверьте основное условие сходимости метода: $|\varphi'(x)| < 1$ для средней точки интервала $[a, b]$. При невыполнении условия найдите другой способ перехода от исходного уравнения к уравнению в итерационной форме или запишите уравнение в виде $x = x + \tau f(x)$ и выбором константы τ обеспечьте выполнение условия сходимости.

7. Проведите анализ результатов. Составьте сводную таблицу (для выбранной точности, например 10^{-8}).

На основе таблицы сформулировать выводы о скорости сходимости различных методов.

Корень	Приближенное значение	Количество итераций			
		МДОП	мет. Ньютона	мет. секущих	МПИ
1					
2					
...					

Отчет

Отчет о выполнении работы состоит из двух частей: теоретической и практической. В первой части отчета необходимо привести краткое описание и характеристики использованных методов (рабочая формула, условия сходимости, критерии применимости). Во второй части отчета должны быть представлены результаты выполнения практических заданий для каждого уравнения. Должны быть приведены графики, поясняющие процесс локализации корней, **подробно отражены** выбор начального приближения в методе Ньютона и проверка сходимости метода простых итераций, а также приведены таблицы с результатами. В заключение необходимо сделать анализ результатов и сформулировать выводы. К отчету должны быть приложены расчёты.

Варианты заданий.

№ вар.	Уравнение	№ вар.	Уравнение
1	$e^x - 6x - 3 = 0$ $\ln x + x = 5 = 0$	11	$x - \sin x - 1 = 0$ $3^x + 2 - x = 0$

2	$3x + \cos x + 1 = 0$ $\ln x + (x+1)^3 = 0$	12	$(x-1)^2 - 2e^x = 0$ $3x + \cos(x+1) = 0$
3	$x^3 - 4\sin x = 0$ $3x - e^x = 1$	13	$3\sin x = x^2 - 2$ $e^x = (x+1)^3$
4	$2e^x = 5x^2 + 2$ $\ln x + 2(x-3) = 0$	14	$x^2 + 4\sin x = 0$ $2^x + x^2 = 5$
5	$2^x - (x-2)^2 = 0$ $x^2 - \cos 2x = -1$	15	$2x^2 - 5 = 2^x$ $2^x - 2\cos x = 0$; $x > -\pi$
6	$2\cos x + 0.5x = 0$ $e^x - 1/x = 0$	16	$\ln(x+5) + (x-3) = 0$ $3x - \cos x - 1 = 0$
7	$2 - x = \ln x$ $x^3 - 3\sin x = 0$	17	$x - \lg x = 0$; $x \in [0; \pi/2]$ $e^{2x+1} + 3x + 1 = 0$
8	$e^x - 3x^2 + 1 = 0$ $(x-1)^2 - \cos x = 2$	18	$e^{x+1} - (x-1)^2 = 0$ $x^2 \cos(2x-1) = 1$
9	$e^x + x^2 - 2 = 0$ $\cos(x+0.5) = x^3$	19	$e^x - 5\cos x = 0$; $x \in [-\pi; \pi]$ $x^3 + 1 - e^x = 0$
10	$\ln x + 2x - 3 = 0$ $(x+1)^2 - \sin x = 3$	20	$\operatorname{arctg} x - x^2 + 1 = 0$ $e^x + x^2 = 3$

Лабораторная работа № 5

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: Изучение возможностей пакета Ms Excel при решении задач линейной алгебры. Приобретение навыков решения систем линейных алгебраических уравнений и выполнение действий над матрицами средствами пакета.

Задание: решить систему уравнений методом Гаусса, методом LU-разложения, методом Зейделя.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Пусть задана СЛАУ следующего вида:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\&\dots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n.\end{aligned}$$

Эту систему можно представить в матричном виде:

$$AX = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- матрица коэффициентов} \\ \text{системы уравнений;} \end{array}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad - \text{ вектор неизвестных}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad - \text{ вектор правых частей.}$$

При выполнении лабораторной работы систему линейных алгебраических уравнений необходимо будет решать методом обратной матрицы и методом Крамера. Вспомним основные формулы, используемые в этих методах.

Метод обратной матрицы

Систему линейных алгебраических уравнений $AX = b$ умножим слева на матрицу, обратную к A . Система уравнений примет вид

$$A^{-1}AX = A^{-1}b, \quad EX = A^{-1}b \quad (E - \text{единичная матрица}).$$

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле $X = A^{-1}b$.

Метод Крамера

В этом случае неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ вычисляются по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Δ – определитель матрицы **A**,

Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы **A** путем замены i -го столбца вектором **b**.

Обратите внимание на особенность работы с матричными формулами: необходимо предварительно выделять область, в которой будет храниться результат, а после получения результата преобразовывать его к матричному виду, нажав клавиши **F2** и **Ctrl + Shift + Enter**.

Теперь рассмотрим решение системы линейных уравнений методом обратной матрицы и методом Крамера на следующих примерах.

ПРИМЕР 5.1. Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_2 - 13x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 21x_2 - 5x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

В этом случае матрица коэффициентов **A** и вектор свободных коэффициентов **b** имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -13 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 21 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Введём матрицу **A** и вектор **b** в рабочий лист MS Excel (рис. 5.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5	
2		1	0	-2	3		-4	
3		3	21	0	-5		2	
4		4	3	-5	0		3	
5								

Рис. 5.1

В нашем случае матрица **A** находится в ячейках **B1:E4**, а вектор **b** в диапазоне **G1:G4**. Для решения системы методом обратной матрицы необходимо вычислить матрицу, обратную к **A**. Для этого выделим ячейки для хранения обратной матрицы (**это нужно сделать обязательно!!!**); пусть в нашем случае это будут ячейки **B6:E9**. Теперь обратимся к мастеру функций, и в категории Математические выберем функцию **МОБР**, предназначенную для вычисления обратной матрицы (рис. 5.2), щелкнув по кнопке **ОК**, перейдём ко второму шагу мастера функций. В диалоговом окне, появляющемся на втором шаге мастера функций, необходимо заполнить поле ввода Массив (рис. 5.3). Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица – в нашем случае **B1:E4**. Данные в поле ввода Массив можно ввести, используя клавиатуру или выделив их на рабочем листе, удерживая левую кнопку мыши.

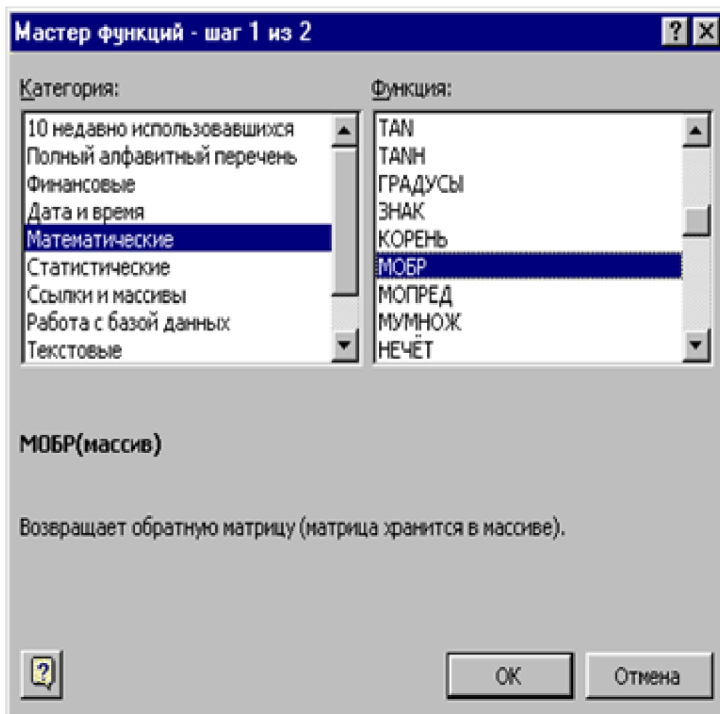


Рис. 5.2

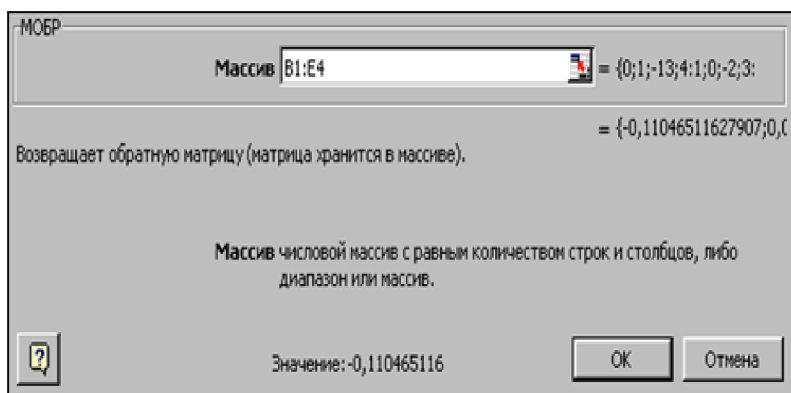


Рис. 5.3

Если поле Массив заполнено, можно нажать кнопку **ОК**. В первой ячейке, выделенной под обратную матрицу диапазона, появится некое число. Для того чтобы получить всю обратную матрицу, необходимо нажать клавишу **F2** для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае рабочая книга MS Excel примет вид, изображенный на рис. 5.4.

	A	B	C	D	E	F	G
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5
2		1	0	-2	3		-4
3		3	21	0	-5		2
4		4	3	-5	0		3
5							
6		-0,11047	0,096899	-0,03023	0,24845		
7		0,011628	0,077519	0,055814	-0,06124		
8		-0,0814	0,124031	0,009302	-0,03798		
9		-0,01744	0,383721	0,016279	-0,10814		
10							

Рис. 5.4

Теперь необходимо умножить полученную обратную матрицу на вектор **b**. Выделим ячейки для хранения результирующего вектора, например **H6:H9**. Обратимся к мастеру функций, и в категории **Математические** выберем функцию **МУМНОЖ**, которая предназначена для умножения матриц. Напомним, что умножение матриц происходит по правилу «строка на столбец» и матрицу **A** можно умножить на матрицу **B** только в том случае, если количество столбцов матрицы **A** равно количеству строк матрицы **B**. Кроме того, при умножении матриц важен порядок сомножителей, т.е. **AB ≠ BA**.

Перейдём ко второму шагу мастера функций. Появившееся диалоговое окно (рис. 5.5) содержит два поля ввода **Массив1** и **Массив2**. В поле **Массив1** необходимо ввести диапазон ячеек, в котором содержится первая из перемножаемых матриц, в нашем случае **B6:E9** (обратная матрица), а в поле **Массив2** ячейки, содержащие вторую матрицу, в нашем случае **G1:G4** (вектор **b**).

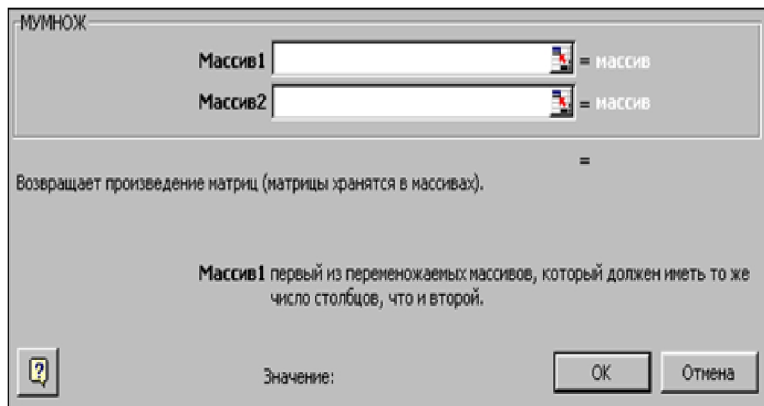


Рис. 5.5

Если поля ввода заполнены, можно нажать кнопку **ОК**. В первой ячейке выделенного диапазона появится соответствующее число результирующего вектора. Для того чтобы получить весь вектор, необходимо нажать клавишу **F2**, а затем одновременно клавиши **Ctrl+Shift+Enter**. В нашем случае результат вычислений (вектор **x**) находится в ячейках **H6:H9**.

Для того чтобы проверить, правильно ли решена система уравнений, необходимо умножить матрицу **A** на вектор **x** и получить в результате вектор **b**. Умножение матрицы **A** на вектор **x** осуществляется при помощи функции **МУМНОЖ(B1:E4;H6:H9)**, так, как было описано выше.

В результате проведенных вычислений рабочий лист примет вид, изображенный на рис. 5.6.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5		Проверка	-5
2		1	0	-2	3		-4			-4
3		3	21	0	-5		2			2
4		4	3	-5	0		3			3
5										
6		-0,11047	0,096899	-0,03023	0,24845		x=	0,849612		
7		0,011628	0,077519	0,055814	-0,06124			-0,44031		
8		-0,0814	0,124031	0,009302	-0,03798			-0,1845		
9		-0,01744	0,383721	0,016279	-0,10814			-1,73953		

Рис. 5.6

ПРИМЕР 5.2. Решить систему из ПРИМЕРА 5.1 методом Крамера.

Введём матрицу **A** и вектор **b** на рабочий лист. Кроме того, сформируем четыре вспомогательные матрицы, заменяя последовательно столбцы матрицы **A** на столбец вектора **b** (рис. 5.7).

Для дальнейшего решения необходимо вычислить определитель матрицы **A**. Установим курсор в ячейку **I10** и обратимся к мастеру функций. В категории **Математические** выберем функцию **МОПРЕД**, предназначенную для вычисления определителя матрицы, и перейдём ко второму шагу мастера функций. Диалоговое окно, появляющееся на втором шаге, содержит поле ввода **Массив**. В этом поле указывают диапазон матрицы, определитель которой вычисляют. В нашем случае это ячейки **B1:E4**.

Для вычисления вспомогательных определителей введем формулы:

I11=МОПРЕД(B6:E9), I12=МОПРЕД(B11:E14),
I13=МОПРЕД(B16:E19), I14=МОПРЕД(B21:E24).

В результате в ячейке **I10** хранится главный определитель, а в ячейках **I11:I14** – вспомогательные.

Воспользуемся формулами Крамера и разделим последовательно вспомогательные определители на главный. В ячейку **K11** введём формулу **=I11/\$I\$10**. Затем скопируем её содержимое в ячейки **K12**, **K13** и **K14**. Система решена.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	A=	0	1	-13	4	b=	-5					
2		1	0	-2	3		-4					
3		3	21	0	-5		2					
4		4	3	-5	0		3					
5												
6	A1=	-5	1	-13	4							
7		-4	0	-2	3							
8		2	21	0	-5							
9		3	3	-5	0							
10								d=	2580			
11	A2=	0	-5	-13	4			d1=	2192	x=	0,849612	
12		1	-4	-2	3			d2=	-1136		-0,44031	
13		3	2	0	-5			d3=	-476		-0,1845	
14		4	3	-5	0			d4=	-4488		-1,73953	
15												
16	A3=	0	1	-5	4							
17		1	0	-4	3							
18		3	21	2	-5							
19		4	3	3	0							
20												
21	A4=	0	1	-13	-5							
22		1	0	-2	-4							
23		3	21	0	2							
24		4	3	-5	3							

Рис. 5.7

ПРИМЕР 5.3. Вычислить матрицу **C** по формуле

$$C = A^2 + 2AB,$$

где $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 2 & -13 & 3 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix};$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 4 & 5 & 5 \\ 11 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Введем исходные данные на рабочий лист (рис. 5.8).

Для умножения матрицы **A** на матрицу **B** выделим диапазон **B5 : D7** и воспользуемся функцией **МУМНОЖ(B1 : D3; G1 : I3)**.

Результат вычисления $A^2 = A * A$ поместим в ячейки **G5 : I7**, воспользовавшись формулой, описанной выше, **МУМНОЖ(B1 : D3; B1 : D3)**.

Умножение (деление) матрицы на число можно выполнить при помощи элементарных операций. В нашем случае необходимо умножить матрицу из диапазона **B5 : D7** на число 2. Выделим ячейки **B9 : D11** и введем формулу **=2 * B5 : D7**.

Сложение (вычитание) матриц выполняется аналогично. Например, выделим диапазон **G9 : I11** и введем формулу **= B9 : D11 + G5 : I7**.

Для получения результата в обоих случаях необходимо нажать комбинацию клавиш **Ctrl + Shift + Enter**.

Кроме того, в строке формул рабочего листа, изображенного на рис. 5.8, показано, как можно вычислить матрицу **C** одним выражением.

3) $2(A+B)(2B-A)$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$				
В. №2	1)	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$
3) $3A - (A + 2B)B$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$				
В. №3	1)	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$
3) $2(A-B)(A^2+B)$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$				
В. №4	1)	$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

3) $(A^2 - B^2)(A + B)$, где $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$				
В. №5	1)	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$
3) $(A - B^2)(2A + B)$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$				
В. №6	1)	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9 \\ 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$
3) $(A - B)A + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$				
В. №7	1)	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

3) $2(A-0,5B)+AB$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$				
В. №8	1)	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$
3) $(A - B)A + 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$				
В. №9	1)	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$
3) $2A - (A^2 + B)B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$				
В. №10	1)	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7 \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$

3) $3(A^2 - B^2) - 2AB$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$				
В. №11	1)	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$
3) $(2A-B)(3A+B)-2AB$,		где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$		
В. №12	1)	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$
3) $A(A^2 - B) - 2(B+A)B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$				
В. №13	1)	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

3) $(A+B)A-B(2A+3B)$,		где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$	
В. №14	1) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$	2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$	
3) $A(2A+B)-B(A-B)$,		где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	
В. №15	1) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$	2) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$	
3) $3(A+B)(AB-2A)$,		где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$	
В. №16	1) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$	

3) $2A^2 \cdot (A+B)(A-B)$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$				
В. №17	1)	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$
3) $2A + 3B(AB-2A)$,		где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		
В. №18	1)	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$
3) $(A - B)(A + B) - 2AB$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$				
В. №19	1)	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

3) $2A - AB(B - A) + B$		где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	
B. №20	1) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$	2) $\begin{cases} 11x + 3y - 3z = 2 \\ 2x + 5y - 5z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$	
3) $A^2 \cdot (A + B) \cdot (A - 3B)$, где $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$			
B. №21	1) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$	2) $\begin{cases} 7x + 5y + 2z = 18 \\ x - y - z = 3 \\ x + y + 2z = -2 \end{cases}$	
3) $B(A + 2B) - 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$			
B. №22	1) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -4 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$	2) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$	

3) $3(A+B)-(A \cdot B)A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$				
B. №23	1)	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x - 2y - 2z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$
3) $A(A-B) + 2B(A+B)$,		где $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$		
B. №24	1)	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 28 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
3) $(2A+B)B - 0,5A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$				
B. №25	1)	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -15 \end{cases}$	2)	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$

3) $AB - 2(A + B)A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	
B. №26	1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
3) $(A + 2B)(3A - B)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
B. №27	1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$
3) $2AB + A(B - A)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	
B. №28	1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

3) $(3A + 0.5)(2B - A)$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	
В. №29	1) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$
3) $2A(A + B) - 3AB$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	
В. №30	1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$
3) $3AB + (A - B)(A + 2B)$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	

Лабораторная работа № 6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Цель работы: научиться вычислять определенный интеграл на основе заданных значений подынтегральной функции различными методами.

Задание:

1. Вычислить на интеграл заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью 10^{-4} методами трапеций и Симпсона. Сравнить точность полученных результатов.

2. Определить, какое число отрезков разбиения обеспечило бы достижение точности 10^{-6} при вычислении заданного интеграла по формуле трапеций.

Вариант	Подынтегральная функция $f(x)$	Пределы интегрирования $a \ b$	
1	$x \arctg(x)$	5	6,5
2	$x^3 \ln x$	2	3,5
3	$x^2 \cos x$	3π	$3,5 \pi$
4	$x^2 / (8 + x^3)$	0	2
5	$(\sqrt{16 - x^2})^{-3}$	0,5	2

6	$\sqrt{(3+x)} / (3-x)$	2	2,5
7	$x\sqrt{(1+x^2)}$	0	1
8	$\exp(\cos x) \sin x$	$3\pi / 4$	2π
9	$x^5 / ((3x)^{12} + 1)$	2	5
10	$(\arctan x)^{10} / (1-x^2)$	0,2	0,3
11	$\sin^4 x / \cos^6 x$	0	$\pi / 4$
12	$\exp(x^2)$	0	2
13	$\sqrt{(\exp(x) - 1)}$	0	$\ln 2$
14	$\ln x$	1	2
15	$1 / (1+x^2)$	0	1
16	$ x - 1 $	0	2
17	$x^2 \sqrt{1-x^2}$	0	1
18	$\arcsin^2 x$	0,5	1
19	$\sin 2x \cos x$	0	$\pi / 4$
20	$1 / (1 + \sin x)$	0	$\pi / 4$

21	$1 / \cos^4 x$	$0,1 \pi$	$0,5 \pi$
22	$1 / (2x^2 + 3x + 1)$	1	2
23	$\sqrt{9 - x^2}$	0	1
24	$1 / (x^2 - 3x + 2)$	3	4
25	$1 / (\sin^3 x \cos x)$	$0,1 \pi$	$0,3 \pi$

Порядок выполнения работы

Пример 6.1. Вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 x^2 \sin x dx$$

по формуле трапеций, разделив отрезок $[0;1]$ на 10 равных частей, и оценить погрешность вычислений.

Оценим ошибку метода. Для этого найдем вторую производную подынтегральной функции:

$$f''(x) = (2 - x^2) \sin x + 4x \cos x.$$

На отрезке $[0;1]$ $f''(x)$ всюду положительна, причем ее значение ограничено сверху: $f''(x) < 3,3$.

Таким образом, используя формулу **$(a = 0; b = 1; n = 10)$** , имеем

$$|R_{\text{тр}}| = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi), 0 \leq \xi \leq 1;$$

полагая

$$M = \max_{x \in [0,1]} |f'''(\xi)| = 3,3,$$

получим

$$|R_{TP}| \leq \frac{(1-0)^3}{24 \cdot 10^2} = 0,001375.$$

Итак, приняв на заданном участке интегрирования $n = 10$, мы сможем получить интеграл от заданной функции с погрешностью, не превышающей 0,001375, если будем вести вычисления таким образом, чтобы погрешность округления не исказила окончательный результат в пределах точности метода.

В соответствии с формулой трапеций и учетом рассчитанной ошибки получим **$J = 0,2251 \pm 0,0014$** .

Пример 6.2. Вычислить интеграл из примера 6.1 по формуле Симпсона при том же числе отрезков разбиения ($n = 10$).

Для оценки остаточного члена найдем производную четвертого порядка от подынтегральной функции **$f(x) = x^2 \sin x$** :

$$f^{(4)}(x) = (x^2 - 12) \sin x - 8x \cos x.$$

Значение $|f^{(4)}(x)|$ на отрезке $[0;1]$ ограничено числом 14. Используя формулу, получаем оценку:

$$|R_s| < 14 \frac{(1-0)^5}{2880} 10^{-4} = 4,861 \cdot 10^{-7}.$$

Приведем полученный результат в соответствие с оценкой:

$$J = 0,2232395 \pm 0,0000005.$$

Сравнивая этот результат со значением интеграла, полученным в примере 6.1, заметим, что при одинаковом числе отрезков разбиения формула Симпсона дает ответ с большим числом верных знаков.

Посмотрим, как можно было бы воспользоваться в данном случае формулой Симпсона.

Пусть требуется найти значение заданного интеграла с точностью $\epsilon = 10^{-6}$.

Тогда по формуле Симпсона получим

$$\epsilon = |R_4| = \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \max |f^{(4)}(\xi)| = \frac{(b-a)^4}{n^4} \frac{(b-a)}{2880} M = h^4 \frac{(b-a)}{2880} M.$$

Отсюда

$$h = \sqrt[4]{\frac{2880\epsilon}{(b-a)M}} = 0,119761.$$

Следовательно, для достижения точности 10^{-6} достаточно было разбить отрезок $[0;1]$ на 9 частей.

Лабораторная работа № 7

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: Изучить методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, научиться программировать алгоритмы указанных методов.

Общие сведения: Пусть требуется численно решить задачу Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (7.1)$$

при заданном начальном условии

$$y(x_0) = y_0. \quad (7.2)$$

Зададим некоторый достаточно малый шаг сетки вычислений h . Тогда для каждого $x_k = x_0 + kh$ значение искомой функции (решения задачи (7.1)-(7.2)) можно последовательно вычислить по формуле Эйлера:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h \cdot f(x_k, y(x_k)). \quad (7.3)$$

Формула Эйлера является достаточно простой для программирования, однако ее погрешность достаточно велика и сильно зависит от величины h .

Более точной является неявная формула Адамса

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{h}{2} \{f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y'(x_{k+1}))\},$$

где значение $y^*(x_{k+1})$ вычисляется по формуле Эйлера (7.3).

При использовании описанных формул следует учитывать, что погрешность увеличивается с каждым шагом вычислений.

Варианты заданий:

1-8. Используя формулы Эйлера и Адамса, решить краевую задачу, найти значение y в точке x_n при $h = 0,1$:

1	$y' = y$	$y(0) = 1$	$x_n = 1$
2	$y' = x + y^2$	$y(0) = 1$	$x_n = 1$

3	$y' = 2x - y$	$y(0) = 0$	$x_1 = 1$
4	$y' = x + y$	$y(0) = 1$	$x_1 = 2$
5	$y' = \frac{y}{x}$	$y(0) = 2$	$x_1 = 2$
6	$y' = x^3 + 2$	$y(0) = 9$	$x_1 = 2$
7	$y' = xy$	$y(0) = 1$	$x_1 = 1$
8	$xy' = 1$	$y(2) = 4$	$x_1 = 3$

Лабораторная работа №8

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель работы: освоить методы численной оптимизации:

- а) градиентный метод с постоянным шагом;
- б) метод покоординатного спуска с постоянным шагом.

Краткие теоретические сведения

8.1 О численных методах многомерной оптимизации

Задача многомерной безусловной оптимизации формулируется в виде

$$F(\vec{x}) \rightarrow \min_{\vec{x} \in X},$$

где $x = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\}$ – точка в n -мерном пространстве $\vec{x} \in X$, то есть целевая функция $f(x) = f(x^{(1)}, \dots, f(x^{(n)})$ – функция n аргументов.

Так же как и в первой лабораторной работе, мы рассматриваем задачу минимизации. Численные методы отыскания минимума, как правило, состоят в построении последовательности точек $\{x_k\}$, удовлетворяющих условию $f(x_0) > f(x_1) > \dots > f(x_n) > \dots$. Методы построения таких последовательностей называются методами спуска. В этих методах точки последовательности $\{x_k\}$ вычисляются по формуле

$$x_{k+1} = x_k + a_k p_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где p_k — направление спуска, a_k — длина шага в этом направлении.

Различные методы спуска отличаются друг от друга способами выбора направления спуска p_k и длины шага a_k вдоль этого направления. Алгоритмы безусловной минимизации принято делить на классы, в зависимости от максимального порядка производных минимизируемой функции, вычисление которых предполагается. Так, методы, использующие только значения самой целевой функции, относят к методам нулевого порядка (иногда их называют также методами прямого поиска); если, кроме того, требуется вычисление первых производных минимизируемой функции, то мы имеем дело с методами первого порядка; если же дополнительно используются вторые производные, то это методы второго порядка и т. д.

8.2. Градиентные методы

8.2.1. Общая схема градиентного спуска

Как известно, градиент функции в некоторой точке x_k направлен в сторону наискорейшего локального возрастания функции и перпендикулярен линии уровня (поверхность постоянного значения функ-

ции $f(x)$, проходящей через точку x_k). Вектор, противоположный градиенту, называется антиградиентом, который направлен в сторону наискорейшего убывания функции $f(x)$. Выбирая в качестве направления спуска p_k антиградиент – в точке x_k , мы приходим к итерационному процессу вида

$$x_{k+1} = x_k - a_k f'(x_k), \quad a_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Все итерационные процессы, в которых направление движения на каждом шаге совпадает с антиградиентом функции, называются градиентными методами. Они отличаются друг от друга только способом выбора шага a_k . Существует много различных способов выбора a_k , но наиболее распространены методы: с постоянным шагом, с дроблением шага и наискорейшего спуска.

8.2.2. Градиентный метод с постоянным шагом

Основная проблема в градиентных методах — это выбор шага a_k . Достаточно малый шаг a_k обеспечивает убывание функции, то есть выполнение неравенства

$$f(x_k - a_k f'(x_k)) < f(x_k),$$

но может привести к неприемлемо большому количеству итераций, необходимых для достижения точки минимума. С другой стороны, слишком большой шаг может вызвать неожиданный рост функции (невыполнение условия убывания) либо привести к колебаниям около точки минимума. Однако проверка условия убывания на каждой итерации является довольно трудоемкой, поэтому в методе градиентного спуска с постоянным шагом задают $a = a_k$ постоянным и достаточно малым, чтобы можно было использовать этот шаг на любой итерации. При

этом приходится мириться с возможно большим количеством итераций. Утешением является лишь то, что трудоемкость каждой итерации в этом случае минимальна (нужно вычислять только градиент).

Схема алгоритма

Шаг 1.

Задаются начальное приближение x_0 , постоянный шаг a , условия остановки алгоритма e_3 . Вычисляется значение градиента — направление поиска. Присваивается $k = 0$.

Шаг 2.

Определяется точка очередного эксперимента:

$$x_{k+1} = x_k - af'(x_k),$$

где $f'(x[k]) = \left(\frac{\partial f(x[k])}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x[k])}{\partial x_n} \right)^T$ — градиент целевой функции $f(x)$ в точке $x[k]$.

Шаг 3.

Вычисляется значение градиента в точке x_{k+1} .

Шаг 4.

Если $\|f(x_k)\| \leq e_3$,

то поиск заканчивается.

Иначе $k = k + 1$ и переходим к шагу 2.

8.2.3. Градиентный метод с дроблением шага

В методе градиентного спуска с дроблением шага величина шага a_k выбирается так, чтобы было выполнено неравенство

$$f(x_k - a_k) f(x_k) \leq f(x_k) - d a_k \|f(x_k)\|,$$

где $0 < d < 1$ — произвольно выбранная постоянная (одна и та же для всех итераций). Это требование на выбор шага a_k более жесткое, чем условие убывания, но имеет тот же смысл: функция должна убывать от итерации к итерации. Однако при выполнении неравенства функция будет уменьшаться на гарантированную величину, определяемую правой частью неравенства.

Процесс выбора шага протекает следующим образом. Выбираем число $a > 0$, одно и то же для всех итераций. На k -й итерации проверяем выполнение неравенства при $a_k = a$. Если оно выполнено, полагаем $a_k = a$ и переходим к следующей итерации. Если нет, то шаг a_k дробим, например уменьшаем каждый раз в два раза, до тех пор, пока оно не выполнится.

Схема алгоритма

Шаг 1.

Задаются x_0 , e_3 , d и начальное значение шага a . Вычисляется значение градиента — направление поиска. Присваивается $k = 0$.

Шаг 2.

Проверяется условие: $f(x_k - a) - da \parallel f(x_k) \parallel \leq e_3$. Если выполняется, то переходим к шагу 3, иначе дробим значение a ($a = a/2$) и повторяем шаг 2.

Шаг 3.

Определяется точка очередного эксперимента:

$$x_{k+1} = x_k - a.$$

Шаг 4.

Вычисляется значение градиента в точке x_{k+1} .

Шаг 5.

Если $\|f(x_k)\| \leq e_3$, то поиск заканчивается.

Иначе $k = k + 1$ и переходим к шагу 2.

8.2.4. Метод наискорейшего спуска

В градиентном методе с постоянным шагом величина шага, обеспечивающая убывание функции $f(x)$ от итерации к итерации, оказывается очень малой, что приводит к необходимости проводить большое количество итерации для достижения точки минимума. Поэтому методы спуска с переменным шагом являются более экономными. Алгоритм, на каждой итерации которого шаг a_k выбирается из условия минимума функции $f(x)$ в направлении движения, называется методом наискорейшего спуска. Разумеется, этот способ выбора a_k сложнее ранее рассмотренных вариантов.

Реализация метода наискорейшего спуска предполагает решение на каждой итерации довольно трудоемкой вспомогательной задачи одномерной минимизации. Как правило, метод наискорейшего спуска дает выигрыш в числе машинных операций, поскольку обеспечивает движение с самым выгодным шагом, ибо решение задачи одномерной минимизации связано с дополнительными вычислениями только самой функции $f(x)$, тогда как основное машинное время тратится на вычисление ее градиента.

Следует иметь в виду, что одномерную минимизацию можно проводить любым методом одномерной оптимизации, что порождает различные варианты метода наискорейшего спуска.

Схема алгоритма

Шаг 1.

Задаются x_0, e_3 . Вычисляются градиент, направление поиска.

Присваивается $k = 0$.

Шаг 2.

Определяется точка очередного эксперимента:

$$x_{k+1} = x_k - a_k,$$

где a_k — минимум задачи одномерной минимизации.

Шаг 3.

Вычисляется значение градиента в точке x_{k+1} .

Шаг 4.

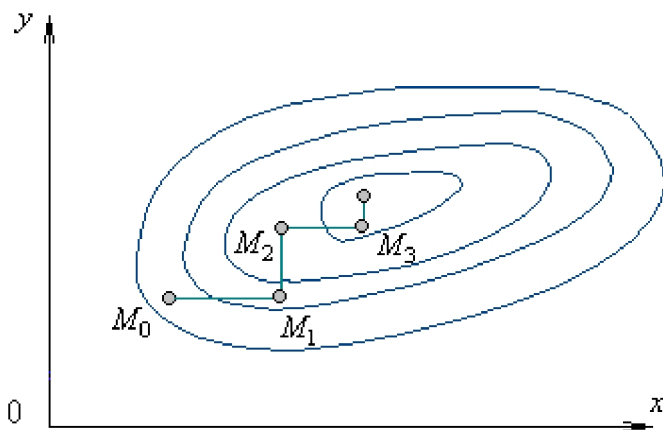
Если $\|f(x_k)\| \leq e_3$, то поиск точки минимума заканчивается.

Иначе $k = k + 1$ и переходим к шагу 2.

8.3. Метод покоординатного спуска

Пусть требуется найти наименьшее значение целевой функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В качестве начального приближения выберем в n -мерном пространстве некоторую точку M_0 с координатами $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. Зафиксируем все координаты функции u , кроме первой. Тогда $u = f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ — функция одной переменной x_1 . Решая одномерную задачу оптимизации для этой функции, мы от точки M_0 перейдем к точке $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, в которой функция u принимает наименьшее значение по координате x_1 при фиксированных остальных координатах. В этом состоит первый шаг процесса оптимизации, состоящий в спуске по координате x_1 .

Зафиксируем теперь все координаты, кроме x_2 , и рассмотрим функцию этой переменной $u = f(x_1^{(1)}, x_2, \dots, x_n^{(0)})$. Снова решая одномерную задачу оптимизации, находим ее наименьшее значение при $x_2 = x_2^{(1)}$, т.е. в точке $M_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(0)})$. Аналогично проводится спуск по координатам $x_3, x_4, \dots, x_n$, а затем процедура снова повторяется от x_1 до x_n и т.д. В результате этого процесса получается последовательность точек $M_0, M_1, \dots$, в которых значения целевой функции составляют монотонно убывающую последовательность $f(M_0) \geq f(M_1) \geq \dots$. На любом k -м шаге этот процесс можно прервать, и значение $f(M_k)$ принимается в качестве наименьшего значения целевой функции в рассматриваемой области.



Величина шага a_k выбирается на каждой итерации аналогично тому, как это делается в градиентных методах. Например, если $a_k = a$ постоянно, то имеем покоординатный спуск с постоянным шагом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. - М.: Наука, 2006. – 631 с.
2. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 632 с.
3. Воробьев, Г.Н. Практикум по численным методам [Текст] / Г. Н.Воробьев, А. Н. Данилова. – М.: Высш. шк., 2007. – 184 с.
4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие. В 2т. / П.Е. Данко. – М.: Высш. шк., 2008.
5. Исаков, В.Н. Элементы численных методов [Текст]: учеб. пособие / В.Н. Исаков. – М.: Академия, 2008.
6. Коварцев, А.Н. Численные методы [Текст]: курс лекций / А.Н. Коварцев. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2000. – 177 с.
7. Протасов, И.Д. Лекции по вычислительной математике [Текст]: учеб. пособие / И.Д. Протасов. – М.: Гелиос АРВ, 2009.

Учебное издание

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Методические указания к лабораторным работам

Составитель **Кузнецова Ольга Александровна**

Редактор Т. К. К р е т и н н и н а

Доверстка Т. Е. П о л о в н е в а

Подписано в печать 26. 09. 12. Формат 60х84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ. л. 4,0.

Тираж 100 экз. Заказ . Арт. – М17/2012

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

