

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королева

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Самара 2000

Министерство образования Российской Федерации

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания

Самара 2000

Составитель: *М.Л.Нечаевский*

УДК 517.2 (075)

Линейные дифференциальные уравнения. Метод. указания / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. Сост. М.Л.Нечаевский. Самара. 2000, 24 с.

Приводятся основные теоретические сведения об обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях. Подробно, с примерами, описаны методы решения уравнений с постоянными коэффициентами, однородных и неоднородных с правой частью в виде квазимногочлена, а также метод вариации произвольных постоянных.

Методические указания предназначены для подготовки студентов к практическим занятиям, выполнения индивидуальных заданий и курсовой работы.

Подготовлены на кафедре высшей математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королева.

Рецензент *М.И. Уманский*

1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-го ПОРЯДКА

О п р е д е л е н и е 1. Общий вид линейного обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (1)$$

где a_2, a_1, a_0, f - заданные непрерывные функции или постоянные, причем $a_2 \neq 0$ для всех x из рассматриваемой области.

Функцию $f(x)$ называют правой частью уравнения. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется линейным неоднородным или уравнением с правой частью.

При $f(x) = 0$ уравнение (1) называется однородным (его правая часть - однородная функция переменных y'', y', y):

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (2)$$

П р и м е р 1. Уравнение

$$y'' + y \operatorname{tg} x + y \cos x = x - 5$$

является линейным неоднородным.

П р и м е р 2. Линейное однородное уравнение Эйлера

$$x^2 y'' + pxy' + qy = 0, \quad p, q = \text{const.}$$

Основные свойства однородных уравнений вида (2):

1. Если y_1 и y_2 - частные решения уравнения, то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.

Данное свойство характеризует принцип суперпозиции (наложения) для однородных уравнений.

2. Если y_1 - решение уравнения (2) и C - произвольная постоянная, то Cy_1 есть также решение уравнения (2).

О п р е д е л е н и е 2. Две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ называются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$, если их отношение на этом отрезке не является постоянным, т.е. если

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \neq \text{const.}$$

В противном случае функции называются линейно зависимыми. Другими словами, две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, если существует такое число C , что

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = C \text{ при } \forall x \in [a, b], \text{ т.е. } g_1(x) = Cg_2(x).$$

Аналогично определяется линейная зависимость любых двух решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ дифференциального уравнения (1).

Пример 3. Очевидно, что функции $g_1(x) = e^{2x}$ и $g_2(x) = e^{-2x}$ являются линейно независимыми, т.к.

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \frac{e^{2x}}{e^{-2x}} = e^{4x} \neq \text{const на любом отрезке.}$$

Каждая из этих функций является решением однородного уравнения

$$y'' - 4y = 0 \text{ (проверьте это !)}$$

Таким образом $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{-2x}$ - два линейно независимых решения указанного уравнения.

С другой стороны, согласно Свойству 2 однородных уравнений функция, например $y_3 = 7.3e^{-2x}$ также есть решение рассматриваемого уравнения. Однако

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{7.3e^{-2x}}{e^{-2x}} = 7.3 = \text{const},$$

т.е. решения y_2 и y_3 уже линейно зависимы, тогда как решения y_1 и y_3 - линейно независимы (убедитесь в этом самостоятельно!).

О п р е д е л е н и е 3. Определителем Вронского (вронскианом) функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называется определитель вида

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2. \quad (3)$$

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы решения уравнения (2) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ были линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского $W(y_1, y_2) = 0$ хотя бы в одной точке этого отрезка.

Пример 3'. Рассмотрим опять функции $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{-2x}$. Их вронскиан

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ для всех } x.$$

Следовательно, эти функции линейно независимы.

Для $y_2 = e^{-2x}$ и $y_3 = 7.3e^{-2x}$ имеем

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 7.3e^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -14.6e^{-2x} \end{vmatrix} = 0 \text{ для всех } x,$$

т.е. решения y_2 и y_3 линейно зависимы.

Путем вычисления вронскиана $W(y_1, y_3)$ убедитесь самостоятельно, что решения y_1 и y_3 линейно независимы.

О п р е д е л е н и е 4. Любая пара линейно независимых решений уравнения (2) называется его фундаментальной системой решений (ф.с.р.).

Т е о р е м а 2. Если y_1 и y_2 - любые линейно независимые решения однородного уравнения (2), т.е. его ф.с.р., то выражение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (4)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные, определяет общее решение уравнения (2).

П р и м е р 3". Как было показано в Примере 3, функции $y_1 = e^{2x}$ и $y_2 = e^{-2x}$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y'' - 4y = 0.$$

Следовательно, его общее решение можно записать как

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Т е о р е м а 3. Общее решение неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}, \quad (5)$$

где $\tilde{y} \neq 0$ - любое частное решение уравнения (1), а y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения (2).

Теорема 3 характеризует принцип суперпозиции для неоднородных уравнений.

П р и м е р 4. Неоднородное уравнение

$$y'' - 4y = 3x$$

имеет частное решение $\tilde{y} = -\frac{3}{4}x$ (проверьте!). Общее решение соответствующего однородного уравнения найдено в Примере 3". Таким образом, общее решение данного уравнения можно записать в виде

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{3}{4}x.$$

2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Не существует общих методов для нахождения решений линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами. Однако такие методы есть для уравнений с постоянными коэффициентами.

Общий вид однородного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$hy'' + py' + qy = 0, \quad (1)$$

где h, p, q - действительные числа.

Как было показано в разд. 1 (теорема 2), чтобы получить общее решение уравнения (1), достаточно найти его любые два линейно независимые частные решения. Рассмотрим метод Эйлера для отыскания частных решений уравнений с постоянными коэффициентами. Предположим, что частное решение уравнения (1) можно записать в виде

$$y = e^{rx}, \quad (2)$$

где r - некоторое число, подлежащее определению.

Подставляя выражение (2) в (1), имеем

$$hr^2 e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = 0,$$

откуда, сокращая на $e^{rx} \neq 0$, получаем алгебраическое уравнение для определения r

$$hr^2 + pr + q = 0. \quad (3)$$

Если значение r удовлетворяет (3), то функция (2) является решением (частным) уравнения (1). Квадратное уравнение (3) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (1). По известным формулам корней (3)

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2h}, r_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2h}, D = p^2 - 4hq. \quad (4)$$

Возможны следующие случаи:

1. Дискриминант $D > 0$. т.е. $r_1 \neq r_2$ - действительные различные корни.
2. $D = 0$, т.е. $r_1 = r_2$ - действительные равные корни.
3. $D < 0$, т.е. $r_1 \neq r_2$ - комплексные (сопряженные) корни.

1. Действительные различные корни характеристического уравнения:
 $r_1 \neq r_2$.

Частными решениями уравнения (1) являются две функции вида (2)

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}.$$

Очевидно, что они линейно независимы (т.к. $r_1 \neq r_2$):

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{r_1 x}}{e^{r_2 x}} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \text{const.}$$

(Проверьте, что вронскиан $W(y_1, y_2) \neq 0$!)

Таким образом, общее решение уравнения (1)

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \quad (5)$$

Пример 1. Уравнению

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad (6)$$

соответствует характеристическое уравнение

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

с корнями $r_1 = 1$, $r_2 = -3$. Следовательно, общее решение уравнения (6)

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}.$$

2. Действительные равные (кратные) корни характеристического уравнения

$$r_1 = r_2 = r.$$

Согласно (2) одно частное решение уравнения (1) известно

$$y_1 = e^{rx}$$

Подстановкой в (1) нетрудно убедиться, что другим решением является

$$y_2 = x e^{rx},$$

причем y_1 и y_2 линейно независимы:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{rx}}{x e^{rx}} = \frac{1}{x} \neq \text{const.}$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) в данном случае

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} = e^{rx} (C_1 + C_2 x). \quad (7)$$

Пример 2. Дифференциальное уравнение

$$y'' - 8y' + 16y = 0 \quad (8)$$

имеет характеристическое уравнение

$$r^2 - 8r + 16 = (r - 4)^2 = 0$$

с корнями $r_1 = r_2 = r = 4$. Поэтому общее решение уравнения (8)

$$y = e^{4x} (C_1 + C_2 x).$$

3. Комплексные (сопряженные) корни характеристического уравнения:
 $r_1 = a + ib, r_2 = a - ib$.

Прежде всего отметим, что нас интересуют действительные решения уравнения. Нетрудно убедиться (сделайте это!), что если некоторая комплексная функция

$$z = u(x) + iv(x)$$

удовлетворяет уравнению (1), то функции $u(x)$ и $v(x)$ также являются его решениями в силу свойств линейных уравнений.

В данном случае частные решения уравнения (1) вида (2) являются комплексными функциями:

$$z_1 = e^{\eta x} = e^{(a+ib)x}, z_2 = e^{\bar{\eta}x} = e^{(a-ib)x}.$$

Используя формулу Эйлера, получим

$$z_1 = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx, z_2 = e^{ax} \cos bx - ie^{ax} \sin bx.$$

Следовательно, частными решениями являются также действительные функции

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, y_2 = e^{ax} \sin bx,$$

которые линейно независимы

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{ax} \cos bx}{e^{ax} \sin bx} = \operatorname{ctg} bx \neq \operatorname{const}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \quad (9)$$

Пример 3. Уравнению

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad (10)$$

соответствует характеристическое уравнение

$$r^2 + 2r + 5 = 0$$

с комплексными корнями $r_1 = -1 + 2i, r_2 = -1 - 2i$. Поэтому общее решение уравнения (10) записывается так:

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

3. НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$hy'' + py' + qy = f(x). \quad (1)$$

Как известно (разд. 1, теорема 3), структура общего решения уравнения такого типа

$$y = y_0 + \widetilde{y}. \quad (2)$$

Нахождение общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения не представляет принципиальных трудностей (см. разд. 2). Основная задача в данном случае - получение какого-нибудь частного решения $\widetilde{y}$ неоднородного уравнения.

Существует общий метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для отыскания частных решений неоднородных уравнений. Однако в ряде важных случаев такая задача решается значительно проще. Когда правая часть $f(x)$ имеет специальный вид - квазимногочлена

$$f(x) = P_1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + P_2(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (3)$$

где P_1 и P_2 - многочлены от x степеней n_1 и n_2 соответственно, α и β - действительные числа, частное решение $\widetilde{y}$ уравнения (1) можно найти в аналогичном виде.

Для наглядности рассмотрим сначала основные частные случаи представления (3).

I вариант.

$$f(x) = P_1(x)e^{\alpha x}. \quad (4)$$

В зависимости от значений характеристических корней соответствующего однородного уравнения возможны следующие варианты.

а) Число α не является корнем характеристического уравнения

$$hr^2 + pr + q = 0. \quad (5)$$

Тогда частное решение $\widetilde{y}$ ищется в виде

$$\widetilde{y} = Q_1(x)e^{\alpha x} = (A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha x}, \quad (6)$$

где Q_1 - многочлен степени $n = n_1$ с неопределенными пока коэффициентами $A_0, A_1, \dots, A_n$.

Подставляя выражение (6) в уравнение (1) с правой частью (4), сокращая на $e^{\alpha x}$, приводя подобные члены, а затем приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x (по условию равенства многочленов в левой и

правой частях), получим систему $n + 1$ линейных алгебраических уравнений относительно $n + 1$ искомых коэффициентов $A_n, A_{n-1}, \dots, A_0$.

Пример 1. Найдем общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = x. \quad (7)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

имеет корни $r_1 = -1$ и $r_2 = -3$, так что общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}. \quad (8)$$

Осталось найти частное решение y . Очевидно, что правая часть уравнения (7) относится к типу (4): в данном случае $P_1(x) = x$, $\alpha = 0$, т.е. значение α не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде

$$y = Q_1(x) = A_0 x + A_1. \quad (9)$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), имеем

$$4A_0 + 3(A_0 x + A_1) = x \Rightarrow 3A_0 x + (4A_0 + 3A_1) = x,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$3A_0 = 1, 4A_0 + 3A_1 = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{1}{3}, A_1 = -\frac{4}{9}.$$

Следовательно,

$$\bar{y} = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9},$$

а общее решение уравнения (7) с учетом (8)

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}.$$

б) Число α является простым (однократным) корнем характеристического уравнения.

Здесь ситуация аналогична случаю кратных характеристических корней для однородного уравнения (см. разд. 2). Частное решение y ищется в виде

$$\bar{y} = xQ_1(x)e^{\alpha x}. \quad (10)$$

Пример 2. Найдем общее решение уравнения

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x. \quad (11)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - 7r + 6 = 0$$

имеет корни $r_1 = 1, r_2 = 6$, так что общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}. \quad (12)$$

Правая часть уравнения (10) относится к типу (4) при $n_1 = 1, \alpha = 1$: $P_1(x)e^{\alpha x} = (x-2)e^x$, т.е. показатель $\alpha = 1$ является простым корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищется в виде

$$\bar{y} = x(A_0 x + A_1)e^x. \quad (13)$$

Подставляя это $\bar{y}$ в уравнение (10), имеем

$$[(A_0 x^2 + A_1 x) + (4A_0 x + 2A_1) + 2A_0 - 7(A_0 x^2 + A_1 x) - 7(2A_0 x + A_1) + 6(A_0 x^2 + A_1 x)]e^x = (x-2)e^x,$$

или

$$-10A_0 x + 2A_0 - 5A_1 = x - 2,$$

откуда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$-10A_0 = 1, 2A_0 - 5A_1 = -2 \Rightarrow A_0 = -\frac{1}{10}, A_1 = \frac{9}{25}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (10) с учетом (12) и (13)

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right)e^x.$$

в) Число α является двукратным корнем характеристического уравнения. В данном случае частное решение ищется в виде

$$\bar{y} = x^2 Q_1(x) e^{\alpha x}. \quad (14)$$

II вариант.

Правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} (M \cos \beta x + N \sin \beta x), \quad (15)$$

где M, N - действительные числа.

а) Число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения.

Тогда частное решение ищется в виде

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x), \quad (16)$$

где A, B - действительные числа, подлежащие определению. Их значения находятся аналогично предыдущему пункту I методом неопределенных коэффициентов, но применительно к тригонометрическим многочленам.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x. \quad (17)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 - 1 = 0$$

имеет корни $r_1 = 1, r_2 = -1$, так что общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad (18)$$

Правая часть уравнения (17) относится к типу (15) при $M = 3, N = 0, \alpha = 2, \beta = 1$. Так как число $2 + i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$\bar{y} = e^{2x} (A \cos x + B \sin x). \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнение (17), сокращая на e^{2x} и приводя подобные члены, имеем

$$(2A + 4B) \cos x + (-4A + 2B) \sin x = 3 \cos x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, т.е. при $\cos x$ и $\sin x$, получаем

$$2A + 4B = 3, -4A + 2B = 0 \Rightarrow A = 0,3, B = 0,6.$$

Итак, частное решение уравнения (17) имеет вид

$$\bar{y} = e^{2x} (0,3 \cos x + 0,6 \sin x), \quad (20)$$

а общее, с учетом (18),

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x} (0,3 \cos x + 0,6 \sin x).$$

б) Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение ищется в виде

$$\bar{y} = x e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x). \quad (21)$$

Пример 4. Найдем общее решение уравнения

$$y'' + 4y = \cos 2x. \quad (22)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + 4 = 0$$

имеет чисто мнимые корни $r_1 = 2i, r_2 = -2i$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \quad (23)$$

Правая часть уравнения (22) относится к типу (5) при

$M = 1, N = 0, \alpha = 0, \beta = 2$, т.е. число $0 + 2i = 2i$ является корнем характеристического уравнения, и частное решение ищется в виде

$$\tilde{y} = x(A \cos 2x + B \sin 2x), \quad (24)$$

откуда

$$\tilde{y}' = 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

$$\tilde{y}'' = 4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение (22), приводя подобные члены и приравнявая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$, находим

$$4B = 1, -4A = 0 \Rightarrow A = 0, B = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, с учетом (23) и (24) общее решение уравнения (22)

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

III вариант.

Теперь перейдем к общему случаю квазимногочлена в правой части:

$$f(x) = P_1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + P_2(x)e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (25)$$

(Очевидно, что вариант I является частным случаем (25) при $\beta = 0$, а вариант II - при $P_1(x) = M = \text{const}, P_2(x) = N = \text{const}$).

В зависимости от значений характеристических корней возможны два варианта.

а) Число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения.

Тогда частное решение ищется в виде, аналогичном (25):

$$\tilde{y} = Q_1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_2(x)e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad (26)$$

где $Q_1(x), Q_2(x)$ - многочлены от x одинаковой степени m , равной наивысшей из степеней многочленов P_1 и P_2 : $m = \max[n_1, n_2]$.

б) Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения.

Тогда частное решение ищется в виде

$$\tilde{y} = x(Q_1(x)e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_2(x)e^{\alpha x} \sin \beta x). \quad (27)$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = x \sin x. \quad (28)$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + 3r + 2 = 0$$

имеет корни $r_1 = -1$, $r_2 = -2$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}. \quad (29)$$

Правая часть уравнения (28) относится к типу (25) при $P_1 = 0, n_1 = 0, P_2 = x, n_2 = 1, \alpha = 0, \beta = 1$. Так как число $0 + i = i$ не является корнем характеристического уравнения, а наивысшая степень многочленов P_1 и P_2 $m = 1$, то частное решение ищется в виде

$$\bar{y} = Q_1(x) \cos x + Q_2(x) \sin x$$

или

$$\bar{y} = (A_0 x + A_1) \cos x + (B_0 x + B_1) \sin x. \quad (30)$$

Подставляя (30) в уравнение (28), имеем

$$(2B_0 - A_1 - A_0 x) \cos x - (2A_0 + B_1 + B_0 x) \sin x + 3(A_0 + B_1 + B_0 x) \cos x + \\ + 3(B_0 - A_1 - A_0 x) \sin x + 2(A_0 x + A_1) \cos x + 2(B_0 x + B_1) \sin x = x \sin x$$

или

$$[(A_0 + 3B_0)x + 3A_0 + A_1 + 2B_0 + 3B_1] \cos x + [(-3A_0 + B) x - 2A_0 - \\ - 3A_1 + 3B + B] \sin x = x \sin x.$$

Отсюда из условия равенства многочленов при $\cos x$ и $\sin x$ получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} A_0 + 3B_0 = 0 \\ 3A_0 + A_1 + 2B_0 + 3B_1 = 0 \\ -3A_0 + B_0 = 1 \\ -2A_0 - 3A_1 + 3B_0 + B_1 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$A_0 = -0.3, A_1 = 0.34, B_0 = 0.1, B_1 = 0.12.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения с учетом (29) и (30)

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (-0.3x + 0.34) \cos x + (0.1x + 0.12) \sin x.$$

4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Описанные в предыдущем параграфе свойства и методы решения распространяются (с соответствующими поправками) и на линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы система

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x) \quad (1)$$

решений однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (2)$$

была линейно независимой на некотором промежутке оси x , необходимо и достаточно, чтобы вронскиан системы (1)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (3)$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке этого промежутка (тогда $W(x) \neq 0$ во всех его точках).

О п р е д е л е н и е 5. Любая совокупность n линейно независимых решений уравнения (2) называется его фундаментальной системой решений (ф.с.р.).

Т е о р е м а 5. Если (1) - ф.с.р. уравнения (2), то его общее решение можно представить как

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (4)$$

где $C_k, k = \overline{1, n}$, - произвольные постоянные.

Уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_k = \text{const}, k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

решается методом Эйлера (см. разд. 2). При этом каждому действительному корню r кратности k характеристического уравнения

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \quad (6)$$

соответствует k частных решений уравнения (5): $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}$, а каждой паре комплексно сопряженных корней $a \pm ib$ кратности k соответствующих $2k$ частных решений: $e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, \dots, x^{k-1}e^{ax} \cos bx,$

$$e^{ax} \sin bx, x e^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1} e^{ax} \sin bx.$$

Пример 1. Решим начальную задачу (задачу Коши):

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2. \quad (7)$$

Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (7), характеристическое уравнение которого можно получить, заменив каждую производную на соответствующую степень параметра r :

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0. \quad (8)$$

По теореме Виета произведение корней алгебраического уравнения равно его свободному члену, который в данном случае разлагается на три натуральных множителя $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Каждое из этих чисел, как легко проверить, является корнем уравнения (8), так что $r_1 = r_2 = 2$ (действительный корень кратности 2), $r_3 = 3$ (простой). Следовательно, общее решение уравнения (7) представляется как

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 e^{3x}. \quad (9)$$

Теперь найдем значения произвольных постоянных, соответствующие заданным начальным условиям. Дважды дифференцируя (9), имеем

$$\begin{aligned} y' &= e^{2x}(2C_1 + C_2 + 2C_2 x) + 3C_3 e^{3x}, \\ y'' &= 4e^{2x}(C_1 + C_2 + C_2 x) + 9C_3 e^{3x}. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу начальных условий, при $x = 0$ равенства (9) и (10) дают:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_3 = 0, \\ y'(0) &= 2C_1 + C_2 + 3C_3 = 1, \\ y''(0) &= 4C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Решив систему (11) относительно неизвестных C_1, C_2, C_3 : $C_1 = 2$, $C_2 = 3$, $C_3 = -2$ и подставив эти значения в общее решение (9), получим искомое решение задачи Коши (7):

$$y = e^{2x}(2 + 3x) - 2e^{3x}.$$

Теорема 6. Общее решение неоднородного линейного уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (12)$$

можно представить в виде

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + \tilde{y}, \quad (13)$$

где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения (2) (см. (4)), $\tilde{y}$ - какое-нибудь частное решение уравнения (12).

Для отыскания частных решений неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде квазимногочлена

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x], \alpha, \beta \in R, \quad (14)$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - многочлены, используется метод неопределенных коэффициентов (см. разд. 3). При этом, если число $\alpha + i\beta$ совпадает с характеристическим корнем кратности k , то частное решение уравнения (12) ищется в форме

$$\tilde{y} = x^k e^{\alpha x} [Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x], \quad (15)$$

где Q_1 и Q_2 - многочлены степени, равной максимальной степени многочленов P_1 и P_2 . Если $\alpha + i\beta$ не является характеристическим корнем, то в формуле (15) надо принять $k = 0$.

Пример 2. Найдем общее решение уравнения

$$y^{IV} - 8y'' = 24x^2 - 32. \quad (16)$$

Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{IV} - 8y'' = 0, \quad (17)$$

для которого характеристическое уравнение представим в виде

$$r^5 - 8r^2 = r^2(r^3 - 8) = r^2(r - 2)(r^2 + 2r + 4) = 0,$$

откуда $r_1 = r_2 = 0$ (корень кратности 2), $r_3 = 2$ (простой), $r_{4,5} = 1 \pm \sqrt{3}$ (простые). Следовательно, общее решение уравнения (17)

$$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} + e^{-x} (C_4 \cos \sqrt{3}x + C_5 \sin \sqrt{3}x). \quad (18)$$

Правая часть (16) - квазимногочлен с параметрами $\alpha = 0, \beta = 0$, $P_1(x) = 24x^2 - 32$. Число $0 + i0 = 0$ является характеристическим корнем кратности $k = 2$ уравнения (17), поэтому согласно (15) частное решение уравнения (16) ищем в виде

$$\tilde{y} = x^2 (Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2, \quad (19)$$

где действительные коэффициенты A, B, C подлежат определению.

Дифференцируя (19), найдем производные

$$\tilde{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2Cx, \quad \tilde{y}^{IV} = 0$$

и подставим их в уравнение (16):

$$-96Ax^2 - 48Bx + 16C = 24x^2 - 32.$$

Это равенство должно выполняться тождественно (для всех x), т.е. многочлены справа и слева должны совпадать, откуда

$$A = -0,25, B = 0, C = 2.$$

Итак, частное решение уравнения (16)

$$\bar{y} = x^2(-0,25x^2 + 2),$$

так что с учетом (18) общее решение (16)

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + e^{-x}(C_4 \cos \sqrt{3}x + C_5 \sin \sqrt{3}x) + x^2(2 - 0,25x^2).$$

Т е о р е м а 7 (общий принцип суперпозиции): Если $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ - некоторые частные решения неоднородных уравнений вида (12) с правыми частями соответственно $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ является частным решением (12) с $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

П р и м е р 3. Решим уравнение

$$y^{IV} + 2y'' + y = 3\cos 2x + 5e^x. \quad (20)$$

Соответствующее однородное уравнение

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0 \quad (21)$$

имеет характеристическое уравнение

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)^2 = 0$$

с чисто мнимыми корнями кратности 2: $r_1 = r_2 = i$, $r_3 = r_4 = -i$, поэтому общее решение уравнения (21)

$$y_0 = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x. \quad (22)$$

Правая часть исходного уравнения является суммой двух различных квазимногочленов, поэтому частное решение для (20) также удобно представить как сумму двух частных решений $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ соответствующих слагаемых $f_1(x) = 3\cos 2x$ и $f_2(x) = 5e^x$ в правой части (20).

Вначале найдем частное решение неоднородного уравнения

$$y^{IV} + 2y'' + y = 3\cos 2x. \quad (23)$$

Параметры квазимногочлена справа: $\alpha = 0, \beta = 2, P_1(x) = 3$. Число $0 + 2i = 2i$ не является характеристическим корнем уравнения (21), поэтому частное решение (23) ищем в виде

$$\tilde{y}_1 = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Подставляя это выражение в правую часть (23) и приведя подобные, имеем

$$9A \cos 2x + 9B \sin 2x = 3 \cos 2x,$$

откуда $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$, так что $\tilde{y}_1 = \frac{1}{3} \cos 2x$.

Теперь определим частное решение уравнения

$$y^{IV} + 2y'' + y = 5e^x \quad (24)$$

с параметрами квазимногочлена в правой части: $\alpha = 1, \beta = 0, P_1(x) = 5$.

Поскольку число $1 + 0i = 1$ не совпадает с характеристическими корнями уравнения (21), частное решение (24) ищем в виде

$$\tilde{y}_2 = Ae^x.$$

Подстановка $\tilde{y}_2$ в (24) после сокращения на e^x дает $A = \frac{5}{4}$, т.е.

$$\tilde{y}_2 = \frac{5}{4} e^x.$$

Таким образом, с учетом (22) общее решение уравнения (20)

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x + \frac{1}{3} \cos 2x + \frac{5}{4} e^x.$$

5. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ (МЕТОД ЛАГРАНЖА)

Метод неопределенных коэффициентов пригоден только для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида. В общем случае для решения неоднородных дифференциальных уравнений используется метод вариации произвольных постоянных, разработанный Лагранжем.

Пусть известны функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, образующие ф.с.р. соответствующего однородного уравнения. Тогда его общее решение согласно теореме 5 можно записать в виде

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x). \quad (1)$$

По методу Лагранжа общее решение неоднородного уравнения ищется в аналогичном виде, но с некоторыми функциями $\bar{C}_k(x)$ вместо произволь-

ных постоянных $C_k, k=1, n$:

$$y(x) = \tilde{C}_1(x)y_1(x) + \tilde{C}_2(x)y_2(x) + \dots + \tilde{C}_n(x)y_n(x). \quad (2)$$

Здесь, в отличие от (1), набор коэффициентов C_k при частных решениях y_k уже не остается постоянным для всех x , а как бы изменяется, варьируется от точки к точке (отсюда и название метода).

Неизвестные функции $\tilde{C}_k(x)$ определяются из условий, чтобы выражение (2) удовлетворяло неоднородному уравнению, а производные общего решения $y(x)$ имели вид, аналогичный производным решения $y_0(x)$ однородного уравнения. Например, дифференцируя (2), имеем

$$y'(x) = \tilde{C}_1 y_1' + \tilde{C}_1' y_1 + \tilde{C}_2 y_2' + \tilde{C}_2' y_2 + \dots + \tilde{C}_n y_n' + \tilde{C}_n' y_n \quad (3)$$

Сравнивая это выражение с производной от (1)

$$y_0'(x) = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_n y_n', \quad (4)$$

приходим к условию

$$\tilde{C}'_1 y_1 + \tilde{C}'_2 y_2 + \dots + \tilde{C}'_n y_n = 0, \quad (5)$$

которому должны удовлетворять функции $\tilde{C}_k(x)$, чтобы (3) имело вид, аналогичный (4):

$$y_0'(x) = \tilde{C}_1 y_1' + \tilde{C}_2 y_2' + \dots + \tilde{C}_n y_n'.$$

Продолжая дальше таким же образом, т.е. последовательно находя производные от $y(x)$ вплоть до $n-1$ порядка, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных функций $\zeta'_k(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{C}'_1 y_1 + \tilde{C}'_2 y_2 + \dots + \tilde{C}'_n y_n = 0 \\ \tilde{C}'_1 y'_1 + \tilde{C}'_2 y'_2 + \dots + \tilde{C}'_n y'_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \tilde{C}'_1 y^{(n-2)}_1 + \tilde{C}'_2 y^{(n-2)}_2 + \dots + \tilde{C}'_n y^{(n-2)}_n = 0 \\ \tilde{C}'_1 y^{(n-1)}_1 + \tilde{C}'_2 y^{(n-1)}_2 + \dots + \tilde{C}'_n y^{(n-1)}_n = f(x) \end{array} \right. \quad (6)$$

(последнее из равенств (6) получается при подстановке (2) непосредственно в дифференциальное уравнение с учетом всех предыдущих условий). Очевидно, что определитель системы (6) совпадает с вронскианом $W(x)$ ф.с.р. $\{y_k(x)\}$, который, по определению ф.с.р., отличен от нуля, и следовательно, система (6) имеет единственное решение - набор функций $\bar{C}_k(x)$, $k = 1, n$. Интегрируя найденные выражения для $\bar{C}'_k(x)$, получим искомые функции

$\tilde{C}_k(x)$, а значит и общее решение (2) неоднородного уравнения.

Для неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка ($n = 2$) система (6) принимает вид

$$\begin{cases} \tilde{C}'_1 y_1 + \tilde{C}'_2 y_2 = 0 \\ \tilde{C}'_1 y'_1 + \tilde{C}'_2 y'_2 = f(x). \end{cases} \quad (7)$$

Пример 1. Пользуясь методом Лагранжа, найдем общее решение уравнения

$$y'' - \frac{2x}{x^2 + 1} y' + \frac{2}{x^2 + 1} y = x^2 \quad (8)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что соответствующее однородное уравнение

$$y'' - \frac{2x}{x^2 + 1} y' + \frac{2}{x^2 + 1} y = 0 \quad (9)$$

имеет частные решения $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = x^2 - 1$, которые являются линейно независимыми, т.к.

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x} \neq \text{const.}$$

Общее решение уравнения (8) будем искать в форме

$$y(x) = \tilde{C}_1(x) y_1(x) + \tilde{C}_2(x) y_2(x) = \tilde{C}_1(x) x + \tilde{C}_2(x) (x^2 - 1). \quad (10)$$

Тогда система (7) примет вид

$$\begin{cases} \tilde{C}'_1 x + \tilde{C}'_2 (x^2 - 1) = 0 \\ \tilde{C}'_1 + 2\tilde{C}'_2 x = x^2. \end{cases} \quad (11)$$

Умножая второе из этих уравнений на x и вычитая из полученного равенства первое уравнение, найдем

$$\tilde{C}'_2(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1} \quad (12)$$

откуда, интегрируя обе части, определяем

$$\tilde{C}_2(x) = \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C_2. \quad (13)$$

Подставив (13) во второе из уравнений (11), найдем

$$\tilde{C}'_1(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - x^2 = 2 - x^2 - \frac{2}{x^2+1},$$

откуда, интегрируя, определяем

$$\tilde{C}_1(x) = 2x - \frac{1}{3}x^3 - 2\arctg x + C_1. \quad (14)$$

Таким образом, в силу (10), (13) и (14) общее решение уравнения (8):

$$y(x) = \left(2x - \frac{1}{3}x^3 - 2\arctg x + C_1 \right) x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C_2 \right) (x^2-1),$$

или приводя подобные и перегруппируя члены:

$$y(x) = C_1 x + C_2 (x^2 - 1) + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - 2x \arctg x - \frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x^2 + 1), \quad (15)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Отметим, что первые два слагаемые в (15) образуют общее решение соответствующего однородного уравнения (9), а все остальные - частное решение исходного уравнения (8), что согласуется с теоремой 3.

Для уравнений 3-го порядка ($n=3$) общее решение ищется в форме

$$y(x) = \tilde{C}_1(x)y_1 + \tilde{C}_2(x)y_2 + \tilde{C}_3(x)y_3, \quad (16)$$

система Лагранжа (6) принимает вид

$$\begin{cases} \tilde{C}'_1 y_1 + \tilde{C}'_2 y_2 + \tilde{C}'_3 y_3 = 0; \\ \tilde{C}'_1 y'_1 + \tilde{C}'_2 y'_2 + \tilde{C}'_3 y'_3 = 0; \\ \tilde{C}'_1 y''_1 + \tilde{C}'_2 y''_2 + \tilde{C}'_3 y''_3 = f(x). \end{cases} \quad (17)$$

Пример 2. Найдем общее решение уравнения

$$y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \quad (18)$$

Прежде всего определим ф.с.р. соответствующего однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y''' + y' = 0. \quad (19)$$

Решая характеристическое уравнение

$$r^3 + r = r(r^2 + 1) = 0,$$

имеем $r_1 = 0$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$. Следовательно, ф.с.р. уравнения (18) образуют

функции $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x$, подставляя которые в систему (17), получим

$$\begin{cases} \tilde{C}_1' + \tilde{C}_2' \cos x + \tilde{C}_3' \sin x = 0, \\ -\tilde{C}_2' \sin x + \tilde{C}_3' \cos x = 0, \\ -\tilde{C}_2' \cos x - \tilde{C}_3' \sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \end{cases} \quad (20)$$

Умножая второе из этих уравнений на $\sin x$, третье - на $\cos x$ и складывая полученные равенства, определим $\tilde{C}_2'(x) = -tgx$, а затем из второго и первого уравнений последовательно найдем $\tilde{C}_3'(x) = -tg^2 x = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$ и

$\tilde{C}_1'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. Интегрируя эти три выражения, получаем искомые функции:

$$\tilde{C}_1(x) = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos} + C_1,$$

$$\tilde{C}_2(x) = -\int tgx dx = \ln|\cos x| + C_2,$$

$$\tilde{C}_3(x) = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = x - tgx + C_3.$$

Теперь можно выписать общее решение исходного уравнения (18) (см. (16)):

$$\begin{aligned} y(x) &= \tilde{C}_1(x) + \tilde{C}_2(x) \cos x + \tilde{C}_3(x) \sin x = \\ &= \frac{1}{\cos x} + C_1 + (\ln|\cos x| + C_2) \cos x + (x - tgx + C_3) \sin x. \end{aligned}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. — М.: Наука, 1971.
2. Бугров С.Я., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1989.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
4. Краснов М.П. и др. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Высшая школа, 1978.
5. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — Минск: Высшэйшая школа, 1967.
6. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
7. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.

Учебное издание

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания

Составитель Нечасевский Марк Лазаревич

Редактор Т. К. К р е т и н и н а
Техн. редактор Г. А. У с а ч е в а
Корректор Т. И. Щ е л о к о в а

Лицензия ЛР № 020301 от 30.12.96 г.

Подписано в печать 27.03.2000. Формат 60х84 1/16.

Бумага газетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,3. Усл. кр.-отт. 1,4. Уч.-изд.л. 1,5.

Тираж 100 экз. Заказ 40. Арт. С - 41/2000.

**Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С. П. Королева.**

443086 Самара, Московское шоссе, 34.

**ИПО Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.**