

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

ИНСТИТУТ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ РАН

**МНОГОМОДОВЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПОЛЯ
В СТУПЕНЧАТЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ**

Методические указания

САМАРА
2004

Составитель *С.Н. Хонина*

УДК 535.4, 535.8

Многомодовые лазерные поля в ступенчатых оптических волокнах:

Метод. указания / Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. *Хонина С.Н.*

Самара, 2004. 30 с.

Описание лазерных полей, распространяющихся в оптических волокнах со ступенчатым профилем показателя преломления, дано в рамках электромагнитной теории. Подробно показано применение уравнений Максвелла к цилиндрической среде со ступенчатым профилем показателя преломления. Рассмотрен переход к линейно-поляризованным (LP) модам для слабонаправляющих оптических волокон (наиболее распространенный тип волокон). Рассматриваются суперпозиции LP-мод, обладающие различными свойствами самовоспроизведения при распространении: инвариантность, вращение, периодическое повторение картины поперечного распределения интенсивности поля. Такие лазерные пучки могут быть использованы для передачи на небольшие расстояния кодированной и тестовой информации с увеличенной (за счет модового уплотнения каналов передачи информации) пропускной способностью и уменьшенной межмодовой дисперсией.

Методические указания предназначены для студентов специальностей и направлений «Прикладная математика и физика», «Прикладная математика и информатика».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Казанский Н.Л.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МД-209.2003.01, а также Министерства образования РФ, Администрации Самарской области и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF Project SA-014-02) в рамках российско-американской программы "Фундаментальные исследования и высшее образование" (BRHE).

Общие сведения

Для многомодовых оптических волокон существует термин модовое уплотнение каналов – mode division multiplexing (MDM), который используется для методов уплотнения каналов передачи информации, где каждая распространяющихся в волокне пространственная мода рассматривается как отдельный канал, несущий свой сигнал [1, 2]. Суть модового уплотнения каналов состоит в том, чтобы с помощью лазерных пучков, являющихся линейной суперпозицией распространяющихся в волноводе мод можно формировать сигналы, которые будут эффективно передавать информацию в одном физическом носителе – многомодовом волокне. Передаваемая информация может содержаться как в модовом составе, так и в доле энергии, которую несет каждая мода лазерного пучка.

Идея MDM до сих пор не нашла практического применения из-за сложности возбуждения определенной суперпозиции мод с заданным распределением энергии по модам, а также из-за перетекания энергии между модами в неидеальных волноводах при передаче информации на большие расстояния. Однако, в [3, 4] теоретически и экспериментально показано, что для оптических волокон длиной 1-2 м, которые применяются, например, в эндоскопии, при небольших изгибах (радиус кривизны которых значительно больше радиуса сердцевины волновода) моды не «смешиваются» (т.е. перетекания энергии между модами не происходит), а лишь приобретают фазовый набег, связанный с кривизной изгиба. В [5] экспериментально показано, что высшая мода (с азимутальным индексом 9) не чувствительна к изгибам 4-метрового градиентного волокна, радиус кривизны которых более 5 см. Известно также [6], что коэффициент «смешивания» соседних мод является доминирующим. Т.о. возбуждая далекие друг от друга моды можно минимизировать их «смешивание». Особенно перспективными могут быть в этом отношении моды с различными азимутальными индексами. Последнее время, в связи с развитием и все более широким использованием локальных сетей, интерес к модовому уплотнению каналов передачи информации, вновь оживился [7-9].

Одной из основных проблем в MDM является возбуждение определенной суперпозиции мод с заданным распределением энергии по модам. Для возбуждения мод невысокого порядка, в частности, LP_{11} , часто используют периодическую деформацию (сдавливание или изгибание) волокна [10, 11]. Возбуждение LP_{11} мод достигается также с помощью наклонной решетки, записанной в волокне с фоточувствительной средой при интерференции двух пучков лазерного излучения [12]. Но более простым, в этом случае, способом является фазовая модуляция. В [13], например, она производилась смещением диэлектрических пластинок, помещенных в волновой фронт гауссового пучка. Для возбуждения спиральных мод лазерное излучение вводится в торец волокна под определенным углом и со смещением относительно центра волокна [14,15]. Также моды высокого порядка LP_{m1} формировались с помощью амплитудных оптических масок, в

которых закодирована комплексная функция распределения мод [16]. При этом для каждой моды используется отдельная маска.

Все эти методы либо сложны в исполнении, либо не позволяют возбуждать набор мод с произвольно заданным энергетическим вкладом. Эффективным средством решения этих проблем является применение методов дифракционной оптики. С помощью дифракционных оптических элементов (ДОЭ) можно эффективно возбуждать и селективировать любой набор мод с заданными весами [17, 18].

В данной работе рассматриваются линейные суперпозиции LP-мод ступенчатого волокна, демонстрирующие особые свойства самовоспроизведения при распространении в идеальном волноводе: инвариантность, вращение и периодическое повторение картины распределения интенсивности в поперечном сечении многомодового пучка. Такие лазерные пучки могут быть использованы для передачи на небольшие расстояния кодированной и тестовой информации с увеличенной (за счет модового уплотнения каналов) пропускной способностью и уменьшенной межмодовой дисперсией.

1. Уравнения, описывающие распространение в диэлектрической среде

Дифференциальная форма уравнений Максвелла выражает связь векторных компонент электромагнитного поля в произвольной точке пространства и времени:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (4)$$

где компоненты имеют зависимость как от пространственных, так и временной координат, например,

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = e_x E_x(x, y, z, t) + e_y E_y(x, y, z, t) + e_z E_z(x, y, z, t),$$

e_x, e_y, e_z – единичные векторы вдоль осей декартовой системы координат.

В уравнениях (1)-(4) использованы следующие обозначения:

$\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля (вольт/метр),

$\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля (ампер/метр),

$\mathbf{D}$ – электрическое смещение (кулон/метр²),

$\mathbf{B}$ – магнитная индукция (вебер/метр²),

$\mathbf{J}$ – плотность электрического тока (ампер/метр²),

ρ – пространственная плотность электрического заряда (кулон/метр³).

Величины $\mathbf{J}$ и ρ связаны уравнением непрерывности:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Векторы поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла (1)-(2), д.б. непрерывными функциями пространственных и временной координат с непрерывными производными, однозначно определенными и ограниченными повсюду, кроме точек резкого изменения в распределении тока или заряда. Обычно такие скачки происходят на границе двух сред.

Нужно отметить, что система уравнений (1)-(4) не является полной, т.к. в нее входят пять векторов, а векторных уравнений всего два, причем два скалярных являются следствием уравнений (1), (5) и (2). Для расчета электромагнитных полей в различных средах уравнения (1)-(4) дополняются системой материальных уравнений:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{D}). \quad (6)$$

Для линейной изотропной однородной среды известны следующие соотношения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (7)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость (фард/метр),

μ – магнитная проницаемость (генри/метр),

σ – удельная электрическая проводимость (сименс/метр).

Для непоглощающих диэлектрических сред:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1, \quad \sigma = 0, \quad (8)$$

где ε_r и μ_r относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, соответственно, ε_0 и μ_0 – параметры свободного пространства:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \approx 8.854 \cdot 10^{-12}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}.$$

Если речь идет о работе в оптической части частотного спектра и распространении в диэлектрической среде, то часто вместо диэлектрической проницаемости используют показатель преломления среды:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r}. \quad (9)$$

Так, например, для стекла, часто используемого в качестве материала для диэлектрических волноводов, показатель преломления равен $n_{\text{гл}} \approx 1.5$.

В общем случае материальные уравнения (6) можно выразить через тензорные соотношения, т.е.:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (10)$$

$$\text{где} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
D_x &= \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z, \\
D_y &= \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z, \\
D_z &= \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z.
\end{aligned}
\tag{12}$$

Такое тензорное соотношение существует для анизотропных материалов, например, для кристаллов. В то время как изотропные материалы демонстрируют одинаковые свойства во всех направлениях.

Кроме того, если среда неоднородная, то диэлектрическая проницаемость является функцией, зависящей от положения, т.е. $\varepsilon(x,y,z)$. Одним из примеров неоднородной среды является градиентное оптическое волокно.

При анализе диэлектрических волноводов, считая среду свободной от зарядов и линейно изотропной, можно использовать уравнения Максвелла (1)-(4) в следующем виде:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{13}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{15}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{16}$$

и материальные уравнения (6) для такой среды:

$$\mu_r \approx 1, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \tag{17}$$

Уравнения Максвелла являются парными и их сложно использовать при решении задачи с граничными условиями. Из уравнений Максвелла можно получить волновое уравнение, в котором участвует только один вектор. Решение волнового уравнения позволяет получить описание распространения энергии в данной среде при выполнении граничных условий. Для электрического вектора (для магнитного вектора вид аналогичный) волновое уравнение в *неоднородной среде* $\varepsilon(x,y,z)$ выглядит следующим образом:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right). \tag{18}$$

Если же *среда однородная*, то градиент диэлектрической проницаемости равен нулю $\nabla \varepsilon = 0$, и тогда правая часть тоже будет равна нулю:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{19}$$

и аналогично

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{20}$$

Для ступенчатого волновода однородное волновое уравнение м.б. решено отдельно для сердцевины и оболочки. В [19] показано, что

однородное волновое уравнение может быть использовано даже в случае неоднородной среды при условии, что изменения $\epsilon(x,y,z)$ незначительны на расстоянии сравнимом с длиной волны излучения. Как правило, для используемых на практике волноводов, в том числе и для градиентного оптического волокна, это условие выполняется. Исключением являются места состыковки двух диэлектрических сред с различным показателем преломления.

Уравнения (19) и (20) являются векторными, имеющими по три скалярных компоненты каждый. Уравнение (19) можно представить в декартовых координатах следующим образом:

$$\begin{cases} \nabla^2 E_x - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 E_y - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 E_z - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Т.е. каждая компонента электромагнитного поля, если обозначить ее через $\psi(x,y,z,t)$, удовлетворяет скалярному волновому уравнению:

$$\nabla^2 \psi(x,y,z,t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (22)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \frac{c}{n}$ – скорость волны в среде, c – скорость волны в воздухе.

Для постоянных гармонических по времени полей временная зависимость имеет определенный вид:

$$\Psi(x,y,z,t) = \psi(x,y,z) \exp(i\omega t + i\phi), \quad (23)$$

где ω – частота излучения, ϕ – начальная фаза.

В частности,

$$\begin{aligned} E_x(x,y,z,t) &= E_x(x,y,z) \exp(i\omega t + i\phi_x), \\ E_y(x,y,z,t) &= E_y(x,y,z) \exp(i\omega t + i\phi_y), \\ E_z(x,y,z,t) &= E_z(x,y,z) \exp(i\omega t + i\phi_z). \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда, беря производную по времени, уравнения Максвелла (13)-(16) можно переписать:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon \mathbf{E}, \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (28)$$

где $\mathbf{E}(x,y,z) = iE_x(x,y,z) + jE_y(x,y,z) + kE_z(x,y,z)$ и т. д.

Откуда можно получить волновое уравнение Гельмгольца:

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E}(x, y, z) = 0, \quad (29)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{H}(x, y, z) = 0, \quad (30)$$

где $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ – длина волны в среде, λ_0 – длина волны в воздухе.

Фазовая скорость одной монохроматической гармонической волны:

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (31)$$

Для квазимонохроматической волны

$$\omega + \Delta\omega, \quad \omega \gg \Delta\omega,$$

выражение для фазовой скорости совпадает с (31), но вводится также понятие групповой скорости:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}. \quad (32)$$

В пределе при $\Delta\omega \rightarrow 0$

$$v_g = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (33)$$

Фактически, групповая скорость представляет собой фазовую скорость огибающей.

2. Электромагнитное поле в волноводе

Рассмотрим диэлектрический волновод, в котором энергия распространяется в определенном направлении, например, вдоль оси z , с постоянной распространения β . Будем считать, что диэлектрическая проницаемость $\epsilon(x, y)$ не зависит от продольной координаты z , и меняется только в поперечном направлении. Такая модель неоднородной среды хорошо описывает оптическое волокно.

Тогда электромагнитное поле, распространяющееся в волноводе, можно записать в виде:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y) \exp(-i\beta z), \quad (34)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_0(x, y) \exp(-i\beta z), \quad (35)$$

где β – постоянная распространения, которую нужно будет определить.

Уравнения Максвелла (25) и (26) можно записать в «компонентном» виде:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = -i\omega\mu_0 (H_x \mathbf{e}_x + H_y \mathbf{e}_y + H_z \mathbf{e}_z), \quad (36)$$

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x - \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z = i\omega\epsilon(E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z). \quad (37)$$

Если подставить выражения (34) и (35) и взять производные по z , то можно расписать покомпонентные уравнения:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\beta E_y = -i\omega\mu_0 H_x, \quad (38)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\beta E_x = -i\omega\mu_0 H_y, \quad (39)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0 H_z, \quad (40)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + i\beta H_y = i\omega\epsilon E_x, \quad (41)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} - i\beta H_x = i\omega\epsilon E_y, \quad (42)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\epsilon E_z. \quad (43)$$

Используя уравнения (38)-(43) можно выразить поперечные компоненты через продольные. Например, подставляя (39) в (41), получим:

$$E_x = \frac{-i}{k^2 - \beta^2} \left(\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \quad (44)$$

где $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon$. Аналогично, для других компонент:

$$E_y = \frac{-i}{k^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \quad (45)$$

$$H_x = \frac{-i}{k^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (46)$$

$$H_y = \frac{-i}{k^2 - \beta^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right). \quad (47)$$

Далее получим уравнения только для продольных компонент. Подставляя (46) и (47) в (43), получим уравнение относительно одной компоненты E_z :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2)E_z = 0. \quad (48)$$

Это выражение можно было получить из волнового уравнения Гельмгольца (29), подставив поле в виде (34). Аналогично, для компоненты H_z :

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (k^2 - \beta^2)H_z = 0. \quad (49)$$

Нужно отметить, что уравнения (48) и (49) являются независимыми.

3. Электромагнитное поле в круглом ступенчатом волокне

Рассмотрим ступенчатое оптическое волокно круглого сечения, где сердцевина радиуса a имеет показатель преломления n_1 , а оболочка радиуса b имеет показатель преломления n_2 (рис.1а). Предположим, что радиус оболочки волокна достаточно большой и поле в оболочке, экспоненциально убывающее, близко к нулю на стыке оболочки волокна с воздухом. Такое предположение позволяет, как показано на рис.1б, рассматривать волокно с одной граничной поверхностью.



Рис.1. Геометрия круглого ступенчатого оптического волокна

Учитывая форму оптического волокна рассмотрим цилиндрическую систему координат для компонент электромагнитного поля. Будем считать, что поле распространяется в направлении оси z . Чтобы выражение для мод ступенчатого волокна, нужно решить модифицированные волновые уравнения (48) и (49) для z -компонент электрического и магнитного векторов в сердцевине и оболочке, а затем получить из уравнений (44)-(47) остальные (поперечные) компоненты.

Учитывая круглое сечение оптического волокна лучше использовать поперечные компоненты в полярной системе координат (r, ϕ) . В этом случае уравнения (44)-(49) будут выглядеть следующим образом [20]:

$$E_z = \frac{-i}{\alpha^2} \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \omega \mu_0 \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right), \quad (50)$$

$$E_\phi = \frac{-i}{\alpha^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} \right), \quad (51)$$

$$H_r = \frac{-i}{\alpha^2} \left(\beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \omega \epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right), \quad (52)$$

$$H_\phi = \frac{-i}{\alpha^2} \left(\beta \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \right), \quad (53)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \alpha^2 E_z = 0, \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \phi^2} + \alpha^2 H_z = 0, \quad (55)$$

где $\alpha^2 = k^2 - \beta^2$.

Чтобы получить решение уравнения (54) применим метод разделения переменных. Будем искать решение в виде:

$$E_z(r, \phi) = A \cdot R(r) \cdot \Phi(\phi). \quad (56)$$

Учитывая радиальную симметрию оптического волокна, выберем в качестве $\Phi(\phi)$ угловые гармоники:

$$\Phi(\phi) = \exp(im\phi), \quad (57)$$

где m – положительное или отрицательное целое.

Тогда дифференциальное уравнение для радиальной части будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0. \quad (58)$$

Это известное дифференциальное уравнение, решением которого являются многочисленные цилиндрические функции. Конкретный вид функций выберем из следующих соображений:

а) в сердцевине волокна поле должно быть конечным, в т.ч. и в центре при $r=0$,

б) в оболочке волокна поле должно экспоненциально спадать на больших расстояниях от центра.

Тогда, в сердцевине волокна, следует использовать функцию Бесселя первого рода где $J_m(\alpha r)$, а в оболочке – модифицированную функцию Бесселя $K_m(\gamma r)$, которая спадает как $\exp(-\alpha r)$ для $\alpha = i\gamma$.

Учитывая, что сердцевина волокна, $r \leq a$, имеет показатель преломления n_1 , то нужно использовать параметр $\alpha_1 = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \beta^2} = \sqrt{(k_0 n_1)^2 - \beta^2}$, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ –

волновое число в воздухе. Аналогично в оболочке, $r \geq a$, имеющей показатель преломления n_2 .

Т.к. далее придется «сшивать» два решения, полученные в сердцевине и в оболочке, на границе двух сред, т.е. при $r=a$, введем следующие параметры:

$$u = a \sqrt{(k_0 n_1)^2 - \beta^2}, \quad (59)$$

$$w = a \sqrt{\beta^2 - (k_0 n_2)^2}, \quad (60)$$

$$u^2 + w^2 = V^2, \quad (61)$$

$$V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (62)$$

Параметр V называется числом отсечки.

Тогда компоненты электромагнитного поля будут следующими:

– в *сердцевине* волокна, т.е. при $0 \leq r \leq a$:

$$E_z = A_1 J_n \left(u \frac{r}{a} \right) \exp(im\phi), \quad (63)$$

$$H_z = B_1 J_m \left(u \frac{r}{a} \right) \exp(im\phi), \quad (64)$$

– в *оболочке* волокна, т.е. при $a \leq r \leq b$:

$$E_z = A_2 K_n \left(w \frac{r}{a} \right) \exp(im\phi), \quad (65)$$

$$H_z = B_2 K_m \left(w \frac{r}{a} \right) \exp(im\phi). \quad (66)$$

Поперечные компоненты получаются из выражений (50)-(53). Например,

$$E_r = \frac{-ia^2}{u^2} \left[A_1 \beta \frac{u}{a} J_n' \left(u \frac{r}{a} \right) + A_2 \frac{i\omega\mu_0}{r} J_m' \left(u \frac{r}{a} \right) \right] \exp(im\phi). \quad (67)$$

Удовлетворение граничным условиям на границе двух диэлектрических сред Γ в общем виде означает непрерывность тангенциальных и нормальных компонент электрического и магнитного поля на этой границе:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)|_{\Gamma} = 0, \quad (68)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_{\Gamma} = 0, \quad (69)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)|_{\Gamma} = 0, \quad (70)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_{\Gamma} = 0, \quad (71)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к границе двух сред ($r=a$), индексы 1 и 2 означают первую и вторую среды.

Учитывая, что вектор нормали к границе двух сред в оптическом волокне совпадает с $\mathbf{e}_r$, из уравнения (68), получим:

$$(E_{z1} - E_{z2})|_{r=a} = 0, \quad (72)$$

$$(E_{\phi 1} - E_{\phi 2})|_{r=a} = 0. \quad (73)$$

Из уравнения (69), соответственно:

$$(H_{z1} - H_{z2})|_{r=a} = 0, \quad (74)$$

$$(H_{\phi 1} - H_{\phi 2})|_{r=a} = 0. \quad (75)$$

Четыре уравнения (72)-(75) позволяют однозначно определить коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 :

$$A_1 J_m(u) - A_2 K_m(w) = 0, \quad (76)$$

$$A_1 \frac{im\beta}{u^2} J_m(u) - B_1 \frac{\omega\mu_0}{u} J_m(u) + A_2 \frac{im\beta}{w^2} K_m(w) - B_2 \frac{\omega\mu_0}{w} K_m(w) = 0, \quad (77)$$

$$B_1 J_m(u) - B_2 K_m(w) = 0, \quad (78)$$

$$A_1 \frac{\omega\varepsilon_1}{u} J_m(u) + B_1 \frac{im\beta}{u^2} J_m(u) + A_2 \frac{\omega\varepsilon_2}{w} K_m(w) + B_2 \frac{im\beta}{w^2} K_m(w) = 0, \quad (79)$$

Уравнения (76)-(79) имеют нетривиальное решение, если детерминант системы этих уравнений равен нулю:

$$\begin{vmatrix} J_m(u) & 0 & -K_m(w) & 0 \\ \frac{im\beta}{u^2} J_m(u) & -\frac{\omega\mu_0}{u} J_m(u) & \frac{im\beta}{w^2} K_m(w) & -\frac{\omega\mu_0}{w} K_m(w) \\ 0 & J_m(u) & 0 & -K_m(w) \\ \frac{\omega\varepsilon_1}{u} J_m(u) & \frac{im\beta}{u^2} J_m(u) & \frac{\omega\varepsilon_2}{w} K_m(w) & \frac{im\beta}{w^2} K_m(w) \end{vmatrix} = 0. \quad (80)$$

Раскрытие уравнения (80) дает уравнение, которое называется уравнением на собственные числа или характеристическим уравнением волновода:

$$\left[\frac{J_m'(u)}{u J_m(u)} + \frac{K_m'(w)}{w K_m(w)} \right] \left[\frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot \frac{J_m'(u)}{u J_m(u)} + \frac{K_m'(w)}{w K_m(w)} \right] = m^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right). \quad (81)$$

Уравнение (81) позволяет получить набор допустимых значений u_{mq} , w_{mq} , β_{mq} , определяющих множество распространяющиеся в ступенчатом волокне мод. Выражая коэффициенты B_1 , A_2 , B_2 через A_1 с помощью (76)-(79) и полагая $A_1=1$, можно окончательно записать [21]:

$$E_{mq}^z = \exp(im\phi) \begin{cases} J_m\left(\frac{u_{mq}r}{a}\right), 0 \leq r \leq a \\ \frac{J_m(u_{mq})}{K_m(w_{mq})} K_m\left(\frac{w_{mq}r}{a}\right), a \leq r \leq b \end{cases} \quad (82)$$

$$E_{mq}^r = \exp(im\phi) \begin{cases} -i \frac{a\beta_{mq}}{u_{mq}} \left\{ \frac{1-P_{mq}}{2} J_{m-1}\left(\frac{u_{mq}r}{a}\right) - \frac{1+P_{mq}}{2} J_{m+1}\left(\frac{u_{mq}r}{a}\right) \right\}, 0 \leq r \leq a \\ -i \frac{a\beta_{mq}}{w_{mq}} \frac{J_m(u_{mq})}{K_m(w_{mq})} \left\{ \frac{1-P_{mq}}{2} K_{m-1}\left(\frac{w_{mq}r}{a}\right) + \frac{1+P_{mq}}{2} K_{m+1}\left(\frac{w_{mq}r}{a}\right) \right\}, a \leq r \leq b \end{cases} \quad (83)$$

$$E_{mq}^\phi = \exp(im\phi) \begin{cases} -i \frac{a\beta_{mq}}{u_{mq}} \left\{ \frac{1-P_{mq}}{2} J_{m-1}\left(\frac{u_{mq}r}{a}\right) + \frac{1+P_{mq}}{2} J_{m+1}\left(\frac{u_{mq}r}{a}\right) \right\}, 0 \leq r \leq a \\ -i \frac{a\beta_{mq}}{w_{mq}} \frac{J_m(u_{mq})}{K_m(w_{mq})} \left\{ \frac{1-P_{mq}}{2} K_{m-1}\left(\frac{w_{mq}r}{a}\right) - \frac{1+P_{mq}}{2} K_{m+1}\left(\frac{w_{mq}r}{a}\right) \right\}, a \leq r \leq b \end{cases} \quad (84)$$

$$H_{mq}^z = \exp(im\phi) \cdot \begin{cases} \frac{P_{mq} J_m(u_{mq})}{\omega \mu_0} \left(\frac{u_{mq} r}{a} \right), & 0 \leq r \leq a \\ \frac{\beta_{mq} P_{mq}}{\omega \mu_0} \frac{J_m(u_{mq})}{K_m(w_{mq})} K_m\left(\frac{w_{mq} r}{a}\right), & a \leq r \leq b \end{cases} \quad (85)$$

$$H_{mq}^r = \exp(im\phi) \cdot \begin{cases} i \frac{a \beta_{mq}^2}{\omega \mu_0 u_{mq}} \left\{ \frac{\gamma_{mq}^1 - P_{mq}}{2} J_{m-1}\left(\frac{u_{mq} r}{a}\right) + \frac{\gamma_{mq}^1 + P_{mq}}{2} J_{m+1}\left(\frac{u_{mq} r}{a}\right) \right\}, & 0 \leq r \leq a \\ i \frac{a \beta_{mq}^2}{\omega \mu_0 w_{mq}} \frac{J_m(u_{mq})}{K_m(w_{mq})} \left\{ \frac{\gamma_{mq}^1 - P_{mq}}{2} K_{m-1}\left(\frac{w_{mq} r}{a}\right) - \frac{\gamma_{mq}^1 + P_{mq}}{2} K_{m+1}\left(\frac{w_{mq} r}{a}\right) \right\}, & a \leq r \leq b \end{cases} \quad (86)$$

$$H_{mq}^\theta = \exp(im\phi) \cdot \begin{cases} -i \frac{a \beta_{mq}^2}{\omega \mu_0 u_{mq}} \left\{ \frac{\gamma_{mq}^1 - P_{mq}}{2} J_{m-1}\left(\frac{u_{mq} r}{a}\right) - \frac{\gamma_{mq}^1 + P_{mq}}{2} J_{m+1}\left(\frac{u_{mq} r}{a}\right) \right\}, & 0 \leq r \leq a \\ -i \frac{a \beta_{mq}^2}{\omega \mu_0 w_{mq}} \frac{J_m(u_{mq})}{K_m(w_{mq})} \left\{ \frac{\gamma_{mq}^1 - P_{mq}}{2} K_{m-1}\left(\frac{w_{mq} r}{a}\right) + \frac{\gamma_{mq}^1 + P_{mq}}{2} K_{m+1}\left(\frac{w_{mq} r}{a}\right) \right\}, & a \leq r \leq b \end{cases} \quad (87)$$

$$\text{где } P_{mq} = \frac{m \left(\frac{1}{u_{mq}^2} + \frac{1}{w_{mq}^2} \right)}{\frac{J_m'(u_{mq})}{J_m(u_{mq})} + \frac{K_m'(w_{mq})}{K_m(w_{mq})}}, \quad \gamma_{mq}^1 = \left(\frac{k_0 n_1}{\beta_{mq}} \right)^2, \quad \gamma_{mq}^2 = \left(\frac{k_0 n_2}{\beta_{mq}} \right)^2, \quad (88)$$

а также были использованы следующие соотношения для функций Бесселя:

$$J_m'(x) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)], \quad (89)$$

$$\frac{ma}{ur} J_m\left(\frac{ur}{a}\right) = \frac{1}{2} \left[J_{m-1}\left(\frac{ur}{a}\right) + J_{m+1}\left(\frac{ur}{a}\right) \right], \quad (90)$$

$$K_m'(x) = -\frac{1}{2} [K_{m-1}(x) + K_{m+1}(x)], \quad (91)$$

$$\frac{ma}{wr} K_m\left(\frac{wr}{a}\right) = -\frac{1}{2} \left[K_{m-1}\left(\frac{wr}{a}\right) - K_{m+1}\left(\frac{wr}{a}\right) \right]. \quad (92)$$

В общем случае моды, распространяющиеся в ступенчатом оптическом волокне описываются 6-компонентным электромагнитным полем (82)-(88). Моды, у которых присутствуют продольные компоненты $E_z \neq 0$ и $H_z \neq 0$, называются гибридными и обозначаются HE, если $E_z > H_z$ и EH, если $E_z < H_z$.

В случае, когда $m=0$ правая часть уравнения (81) обнуляется, и возникают уравнения на собственные числа для поперечных TE и TM мод:

$$\frac{J_m'(u)}{u J_m(u)} + \frac{K_m'(w)}{w K_m(w)} = 0, \quad (93)$$

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{J_m'(u)}{u J_m(u)} + \frac{K_m'(w)}{w K_m(w)} = 0. \quad (94)$$

Уравнение (93) соответствует ТЕ моде ($E_z=0$), а уравнение (94) – ТМ моде ($H_z=0$).

В терминах лучевой модели распространения света в ступенчатом оптическом волокне гибридные моды соответствуют косым лучам, а поперечные – меридиональным.

Важным параметром для каждой распространяющейся моды является частота отсечки. Мода будет «утекающей», т.е. не распространяющейся, если ее поле в оболочке не спадает. Для модифицированной функции Бесселя известна [22] следующая аппроксимация при больших значениях аргумента:

$$K_m\left(\frac{wr}{a}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi a}{2wr}} \exp\left(-\frac{wr}{a}\right). \quad (95)$$

Для больших значений w поле сконцентрировано в сердцевине оптического волокна. При уменьшении w поле начинает выходить все больше в оболочку, а при $w=0$ «уходит» из волновода. Частота, при которой это происходит называется частотой отсечки. При отсечке:

$$w_c = a\sqrt{\beta_c^2 - (k_0 n_2)^2} = 0, \quad (96)$$

или

$$\beta_c = k_0 n_2 = \omega_c \sqrt{\mu_0 \epsilon_2}. \quad (97)$$

С другой стороны в ситуации «отсечки» в сердцевине волокна выполняется равенство:

$$u_c = a\sqrt{(k_0 n_1)^2 - \beta_c^2} = a\omega_c \sqrt{\mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)}, \quad (98)$$

или

$$\omega_c = \frac{u_c}{a\sqrt{\mu_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2)}}. \quad (99)$$

Параметр u_c называется числом отсечки волокна:

$$u_c = V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (100)$$

В оптическом волокне с $\omega_c=0$ ($u_c=0$) распространяется только одна мода – гибридная мода HE_{11} , которая существует для всех частот. Такое одномодовое волокно имеет очень маленький диаметр сердцевины a и маленькую разность показателей преломления сердцевины и оболочки волокна.

4. Линейно-поляризованные моды слабонаправляющего ступенчатого волокна

Для наиболее распространенных коммерческих волокон разность показателей преломления сердцевины и оболочки $\Delta n = n_1 - n_2$ меньше 1%. Такие волокна называются слабонаправляющими и для них, полагая $n_1 \approx n_2$ можно существенно упростить выражения для распространяющегося электромагнитного поля.

В предположении слабонаправляющей аппроксимации уравнение на собственные значения принимает вид:

$$\frac{J'_m(u)}{uJ'_m(u)} + \frac{K'_m(w)}{wK'_m(w)} = \pm m \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right). \quad (101)$$

Используя соотношения (89)-(92) для функций Бесселя уравнение (101) можно упростить. При использовании знака «+» получаем уравнение:

$$\frac{uJ'_m(u)}{J_{m+1}(u)} = \frac{wK'_m(w)}{K_{m+1}(w)}, \quad (102)$$

соответствующее гибридным модам EH, а для знака «-»:

$$\frac{uJ'_{m-2}(u)}{J_{m-1}(u)} = -\frac{wK'_{m-2}(w)}{K_{m-1}(w)}, \quad (103)$$

соответствующее гибридным модам HE.

Сравнивая уравнения (102) и (103) можно заметить, что HE моды порядка $m=m_0+1$ вырождаются в EH моды порядка $m=m_0-1$. Тогда более, чем одна мода имеют одинаковые собственные значения (и скорости распространения). Причем, возможно составить линейную комбинацию гибридных мод, которая имеет линейную поляризацию (LP моды) и является преимущественно поперечной [23, 24].

Если ввести для LP моды вместо m индекс p :

$$p = \begin{cases} 1, & \text{TE, TM} \\ m+1, & \text{EH} \\ m-1, & \text{HE} \end{cases} \quad (104)$$

то уравнение на собственные значения будет одним:

$$\frac{uJ'_p(u)}{J_p(u)} = -\frac{wK'_p(w)}{K_p(w)}. \quad (105)$$

В табл. 1 приведено соответствие между линейно-поляризованными и гибридными модами ступенчатого волокна.

Таблица 1. Соответствие между линейно-поляризованными и гибридными модами

Линейно-поляризованные моды	LP _{0q} ($p=0$)	LP _{1q} ($p=1$)	LP _{pq} ($p=2,3,\dots$)
Гибридные моды	HE _{1q} ($m=1$) HE _{-1q} ($m=-1$)	TE _{0q} ($m=0$) TM _{0q} ($m=0$) HE _{2q} ($m=2$) HE _{-2q} ($m=-2$)	EH _{p-1 ,q} EH _{- p-1 ,q} HE _{p+1 ,q} HE _{- p+1 ,q}
Степень вырождения	2	4	4

В приближении слабонаправляющего оптического волокна удобнее перейти из полярных координат в декартовы. Учитывая, что поперечное поле для LP моды существенно линейно-поляризовано, полный набор мод имеет

место, когда только одна электрическая и одна магнитная компонента являются доминирующей. Тогда и поле можно рассматривать в скалярном виде [25, 26]:

$$\Psi_{pq}(r, \varphi, z) = \exp(-i\beta_{pq}z) \begin{cases} \frac{J_p(u_{pq}r/a)}{J_p(u_{pq})} \cos(p\varphi), & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_p(w_{pq}r/a)}{K_p(w_{pq})} \sin(p\varphi), & a \leq r \leq b \end{cases} \quad (106)$$

Можно выбрать электрический вектор, описываемый выражением (106), лежащим вдоль любого радиуса, например, вдоль оси x , E_x , и магнитный вектор перпендикулярно $H_y = -\frac{k_0 n_{1,2}}{\omega \mu_0} E_x$. E_y и H_x будут очень малы по сравнению с E_x и H_y . При этом всегда можно изменить поляризацию и выбрать вторую пару электрического и магнитного векторов, перпендикулярную первой. При этом каждая пара с независимыми поляризациями может быть взята либо с $\cos(p\varphi)$, либо с $\sin(p\varphi)$, которые возникают при линейных комбинациях гибридных мод. Т.о. четыре типа LP мод отражают четыре типа гибридных мод.

Интенсивность скалярного поля (106) выражает распределение энергии, распространяющейся в ступенчатом слабонаправляющем волноводе [24].

5. Расчет LP-мод

Для расчета LP-мод нужно:

- по заданным характеристикам оптического волокна (a , b , n_1 , n_2) и длины волны лазерного излучения λ , определить число отсечки V (100);
- для найденного V определить множество решений $\{u_{pq}\}$ системы уравнений (61) и (105) относительно параметра u ;
- для каждого u_{pq} можно определить β_{pq} и w_{pq} используя формулы (59) и (60);
- используя выражение (106) для найденных параметров u_{pq} , w_{pq} , β_{pq} можно определить комплексное распределение моды с индексами (p, q) в любой точке ступенчатого оптического волокна.

Обычно наибольшие проблемы вызывает определение множества решений $\{u_{pq}\}$.

Следует отметить, что вся область определения $u \in [0, V]$ разделена на интервалы корнями функции Бесселя $J_p(u)$, находящейся в знаменателе в левой части ур. (105). В каждом интервале выражения, представленные в левой и правой части, являются унимодальными функциями. Поэтому в интервале может быть не более одного решения u_{pq} , где индекс p соответствует порядку функций Бесселя в знаменателе, а индекс q – номеру интервала (начиная с единицы). Для любого фиксированного p выполняется неравенство $u_{p,q} < u_{p,q+1}$.

На рис. 2 показано графическое решение уравнения на собственные значения (105) для (а) $V=10$ и (б) $V=100$ при фиксированных значениях p . Количество решений определяется числом пересечений функций, представляющих собой левую и правую части уравнения (105).

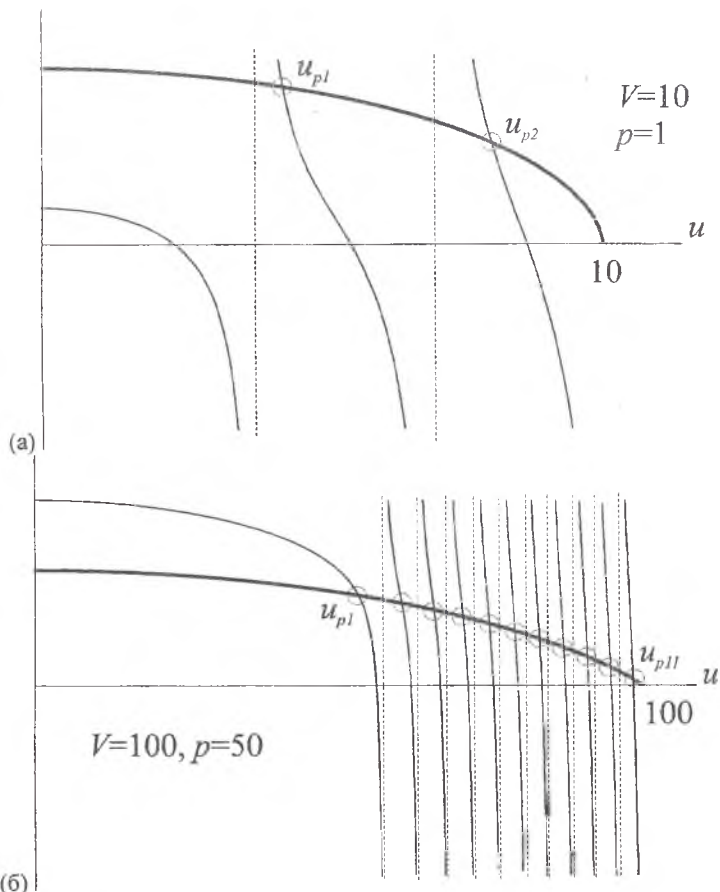


Рис. 2. Графическое решение уравнения на собственные значения (105) для фиксированных значений V и p . Тонкой линией показана функция, представляющая собой левую часть уравнения (105), а жирная линия для правой части уравнения.

Для определения $u_{p,q}$ можно использовать табулирование функций, входящих в уравнение (105), но знание характера поведения этих функций позволяет сократить объем вычислений, что становится значимым с ростом числа отсечки V .

6. Самовоспроизведение многомодовых лазерных полей в слабонаправляющих ступенчатых волокнах

Рассмотрим распространение некоторой линейной суперпозиции LP-мод в идеальном ступенчатом оптическом волокне:

$$U_0(r, \varphi) = \sum_{p, q \in \Omega} C_{pq} \Psi_{pq}(r, \varphi) \quad (107)$$

где C_{pq} – комплексные коэффициенты, $\Psi_{pq}(r, \varphi)$ – моды из (106) при $z=0$, угловая часть которых без потери общности представлена в несколько другом виде:

$$\Psi_{pq}(r, \varphi, z) = \exp(-i\beta_{pq}z) T_p(\varphi) R_{pq}(r) = \exp(-i\beta_{pq}z) \exp(ip\varphi) \begin{cases} \frac{J_p(u_{pq}r/a)}{J_p(u_{pq})}, & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_p(w_{pq}r/a)}{K_p(w_{pq})}, & a \leq r \leq b \end{cases} \quad (108)$$

Хотя выражения (106) и (108) связаны друг с другом простым соотношением, они описывают моды с несколько различными свойствами. Так, например, моды (106) являются действительными при $z=0$, но не имеют орбитального углового момента.

Линейная плотность проекции на ось z орбитального углового момента линейно-поляризованного поля, заданного в полярных координатах, может быть вычислена по следующей формуле [27]:

$$J_{z0} = -\frac{i}{2\omega} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^a \left(U \frac{\partial U^*}{\partial \varphi} - U^* \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^a U U^* r dr d\varphi}, \quad (109)$$

где ω – циклическая частота света в вакууме.

Для поля (107) с модами вида (108) выражение (109) можно записать в следующем виде:

$$\omega J_{z0} = -\frac{\sum_{p, q \in \Omega} |C_{pq}|^2 p}{\sum_{p, q \in \Omega} |C_{pq}|^2}. \quad (110)$$

Формула (110) верна для мод с нормированной радиальной частью:

$$\int_0^b R_{pq}^2(r) r dr = 1, \quad (111)$$

что вполне можно выполнить при расчете.

Таким образом, каждая мода вида (108) имеет линейную плотность z -проекции орбитального углового момента, пропорциональную первому индексу p . В то же время выражение (109) для любой моды вида (106) равно нулю.

Заметим, что основное свойство мод – инвариантность к оператору распространения в данной среде. Т.е. при распространении мода не меняет своей структуры, приобретая лишь фазовый набег. В частности, поперечное распределение интенсивности поля (108) на любом расстоянии будет таким же, как и при $z=0$:

$$|\Psi_{pq}(r, \varphi, z)|^2 = |R_{pq}(r) \exp(ip\varphi) \exp(-i\beta_{pq}z)|^2 = |R_{pq}(r)|^2 = |\Psi_{pq}(r, \varphi)|^2. \quad (112)$$

На рис. 3 показаны поперечные распределения (негативы) амплитуды (а) и интенсивности (в), а также радиальное сечение амплитуды (б) для некоторых мод (108) ступенчатого волокна с числом отсечки $V=8,4398$. Эти характеристики моды не меняются при распространении в идеальном волокне. Изменения происходят только в фазе. Для сравнения на рис. 3г приведена фаза при $z=0$, а на рис. 3д – через 100 мкм.

Для численного моделирования были использованы следующие параметры: радиус сердцевинки $a=5$ мкм, радиус оболочки $b=62.5$ мкм, показатели преломления сердцевинки и оболочки, соответственно $n_1=1.45$, $n_2=1.44$. Оптические волноводы с такими параметрами обычно используются для одномодового режима при излучении с длиной волны $\lambda=1.31$ мкм и $\lambda=1.55$ мкм. Однако, для излучения гелий-неонового лазера, $\lambda=0.633$ мкм, режим становится маломодовым [28, 29], т.е. распространяющихся мод становится несколько. Постоянные распространения мод, полученные при решении уравнения на собственные значения (105), приведены в табл. 2.

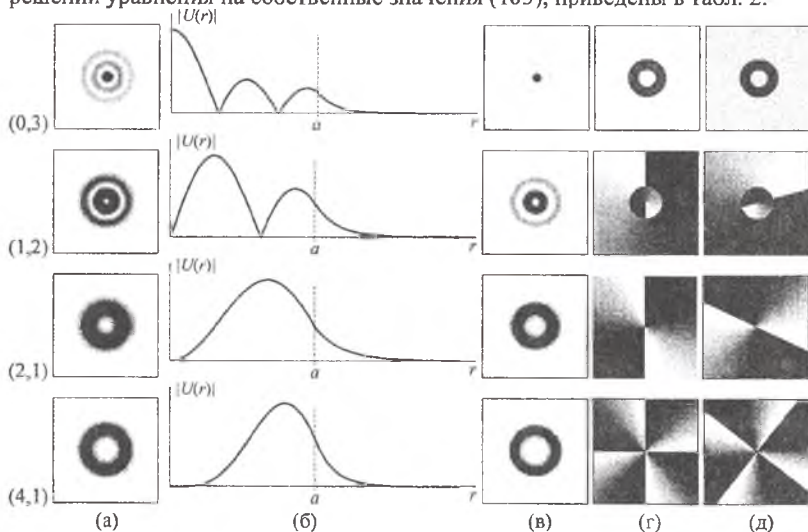


Рис. 3. Моды (p,q) : (0,3), (1,2), (2,1), (4,1): поперечное распределение (негатив) амплитуды (а), радиальное сечение амплитуды (б), поперечное распределение (негатив) интенсивности (в) в плоскостях $z=0$ и $z=100$ мкм; поперечное распределение фазы (белый цвет соответствует значению фазы 0, а черный – 2π) в плоскостях $z=0$ (г) и $z=100$ мкм (д).

Таблица 2. Характеристики мод для ступенчатого волокна с числом отсечки $V=8,4398$.

Номер	p	q	u_{pq}	β_{pq}
1	0	1	2.1474291730684545	9.919887285972235
2	0	2	4.900219427448308	9.880695108697655
3	0	3	7.545941268399409	9.8138153978706
4	± 1	1	3.4157021271478394	9.905651972872423
5	± 1	2	6.193521985887937	9.851610693939358
6	± 2	1	4.568598425596171	9.88704901300449
7	± 2	2	7.3722733639627895	9.819093912699257
8	± 3	1	5.661700788644216	9.864402040454456
9	± 3	2	8.42461940929785	9.785175182942139
10	± 4	1	6.713633609103453	9.83797269761591
11	± 5	1	7.731137785879236	9.808047827674855

В общем случае поле (107) не будет обладать свойством инвариантности отдельной моды (112). Однако, можно подобрать такой модовый состав в (107), что интенсивность такой суперпозиции будет обладать некоторыми особыми свойствами самовоспроизведения.

Суперпозиция (107) в идеальном через расстояние z в идеальном волокне будет иметь следующее комплексное распределение:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} C_{pq} \Psi_{pq}(r, \varphi, z), \quad (113)$$

где $\Psi_{pq}(r, \varphi, z) = \Psi_{pq}(r, \varphi) \cdot \exp(-i\beta_{pq}z)$, β_{pq} – постоянные распространения.

Для любой пары мод интенсивность на расстоянии z :

$$\left| C_{pq} \Psi_{pq}(r, \varphi, z) + C_{p'q'} \Psi_{p'q'}(r, \varphi, z) \right|^2 = \left| C_{pq} \right|^2 R_{|p|q}^2(r) + \left| C_{p'q'} \right|^2 R_{|p'|q'}^2(r) + 2 \left| C_{pq} \right| \left| C_{p'q'} \right| R_{|p|q}(r) R_{|p'|q'}(r) \cos \left[\arg C_{pq} - \arg C_{p'q'} + (p_l - p'_l) \varphi + (\beta_{|p|q} - \beta_{|p'|q'}) z \right] \quad (114)$$

отличается от интенсивность при $z=0$:

$$\left| C_{pq} \Psi_{pq}(r, \varphi) + C_{p'q'} \Psi_{p'q'}(r, \varphi) \right|^2 = \left| C_{pq} \right|^2 R_{|p|q}^2(r) + \left| C_{p'q'} \right|^2 R_{|p'|q'}^2(r) + 2 \left| C_{pq} \right| \left| C_{p'q'} \right| R_{|p|q}(r) R_{|p'|q'}(r) \cos \left[\arg C_{pq} - \arg C_{p'q'} + (p_l - p'_l) \varphi \right] \quad (115)$$

за счет члена, содержащего косинус.

Если наложить определенные условия на все пары мод, входящих в состав суперпозиции (107), то можно получить поля с особыми свойствами воспроизведения (повторения) распределения интенсивности.

Изменения комплексного распределения поля при распространении оценивались по следующим критериям:

– нормированное среднеквадратичное отклонение поперечного распределения амплитуды поля на расстоянии z $|U(r, \varphi, z)|$ от исходного $|U_0(r, \varphi)|$:

$$\delta_r = \left(\int_0^{2a} \int_0^{2\pi} (|U(r, \varphi, z)| - |U_0(r, \varphi)|)^2 r dr d\varphi \right)^{1/2} \left(\int_0^{2a} \int_0^{2\pi} U_0(r, \varphi)^2 r dr d\varphi \right)^{-1/2}, \quad (116)$$

– нормированное среднеквадратичное отклонение поперечного распределения интенсивности поля на расстоянии z $|U(r, \varphi, z)|^2$ от исходного $|U_0(r, \varphi)|^2$:

$$\delta_r = \left(\int_0^{2a} \int_0^{2\pi} (|U(r, \varphi, z)|^2 - |U_0(r, \varphi)|^2)^2 r dr d\varphi \right)^{1/2} \left(\int_0^{2a} \int_0^{2\pi} U_0(r, \varphi)^4 r dr d\varphi \right)^{-1/2}, \quad (117)$$

– нормированный интеграл перекрытия комплексного поля на расстоянии z $U(r, \varphi, z)$ с исходным $U_0(r, \varphi)$:

$$\eta = \left| \int_0^{2a} \int_0^{2\pi} U(r, \varphi, z) U_0^*(r, \varphi) r dr d\varphi \right|^2 \left(\int_0^{2a} \int_0^{2\pi} |U(r, \varphi, z)|^2 r dr d\varphi \int_0^{2a} \int_0^{2\pi} |U_0(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi \right)^{-1}. \quad (118)$$

6.1. Инвариантность на всей области распространения

Изменение поперечного распределения интенсивности светового поля при распространении в связано с межмодовой дисперсией, определяемой различием постоянных распространения мод β_{pq} . Для функций вида (108) одинаковые скорости распространения имеют только моды с одинаковыми индексами $(|p|, q)$. Т.е. инвариантной на любом интервале (в идеальном волокне) будет суперпозиция пар мод вида:

$$C_{|p|q} \Psi_{|p|q}(r, \varphi) + C_{-|p|q} \Psi_{-|p|q}(r, \varphi). \quad (119)$$

В этом случае в выражении (114)

$$\cos[(\arg C_{|p|q} - \arg C_{-|p|q}) + (|p| + |p|)\varphi + (\beta_{|p|q} - \beta_{-|p|q})z] = \cos[(\arg C_{|p|q} - \arg C_{-|p|q}) + 2|p|\varphi]$$

и интенсивность в поперечном сечении поля перестает зависеть от z , т.е. остается неизменяемой. Причем вид распределения интенсивности полностью определяется комплексными коэффициентами C_{pq} . (см. рис. 4).

В частном случае при $|C_{|p|q}| = \pm |C_{-|p|q}|$ мы получим «классические» LP-моды вида (1) (первая строка рис. 4). Интересно, что аргументы комплексных коэффициентов не влияют на значение орбитального углового момента (109) суперпозиции (107). Т.е., если амплитуды коэффициентов остаются одинаковыми, то мы получим повернутую «классическую» LP-моду орбитальный угловой момент, которой также равен нулю (вторая строка рис. 4).

Изменение амплитуды коэффициентов приводит как к изменению структуры поперечного сечения, так и проекции орбитального углового момента (109). Для случаев, приведенных на рис. 4 в третьей и нижней строках, выражения (110) для орбитального углового момента различаются и равны 0.6 и 0.923, соответственно.

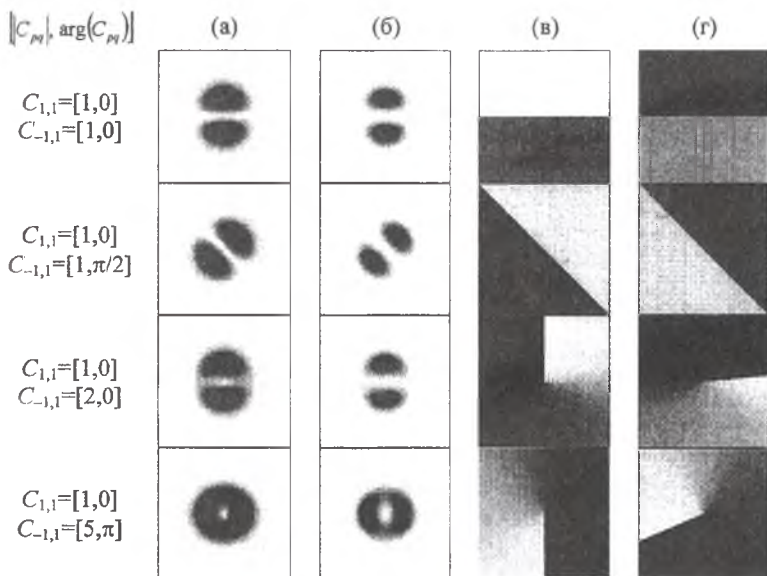


Рис. 4. Суперпозиция мод $(p,q): (1,1)+(-1,1)$ с различными комплексными коэффициентами: поперечное распределение амплитуды (а), интенсивности (б) и фазы (в) в плоскости $z=0$, а также распределение фазы на расстоянии $z=200$ м (д).

6.2. Инвариантность на интервале $[0,z]$

Кроме этого, интерес могут представлять суперпозиции приблизительно (с определенной погрешностью) сохраняющие поперечное распределение интенсивности. В этом случае для всех пар мод, входящих в суперпозицию должно выполняться условие:

$$|\cos[(p_i - p_j)\varphi + (\beta_{p,q_i} - \beta_{p,q_j})z] - \cos[(p_i - p_j)\varphi]| < \varepsilon, \quad (120)$$

где ε – мало и определяет «разбегание» различных мод вдоль оси z . Такое «запаздывание» одной моды относительно другой при распространении может быть выражено небольшим набегом фазы ϕ_ε :

$$|\beta_{p,q_i} - \beta_{p,q_j}|z \leq \phi_\varepsilon. \quad (121)$$

Формализация условия инвариантности на интервале с заданной погрешностью позволяет автоматизировать процедуру выбора допустимых суперпозиций из всего набора мод, распространяющихся в данном волокне. Алгоритм может быть реализован как полный перебор мод и выбор суперпозиций, удовлетворяющих сформулированному условию.

Так при задании допустимого набега фазы $\phi_e = \pi/18$ на интервале в 10 мкм, в результате работы описанного алгоритма были выбраны 59 суперпозиций (от 2 до 5 мод с учетом знака индекса p) из набора мод, приведенных в табл. 2.

На рис. 5 показаны поперечные распределения амплитуды, интенсивности и фазы на различных расстояниях для одной из этих суперпозиций, в частности, $(p,q): (1,2)+(-1,2)+(3,1)+(-3,1)$, коэффициенты C_{pq} были выбраны одинаковыми.

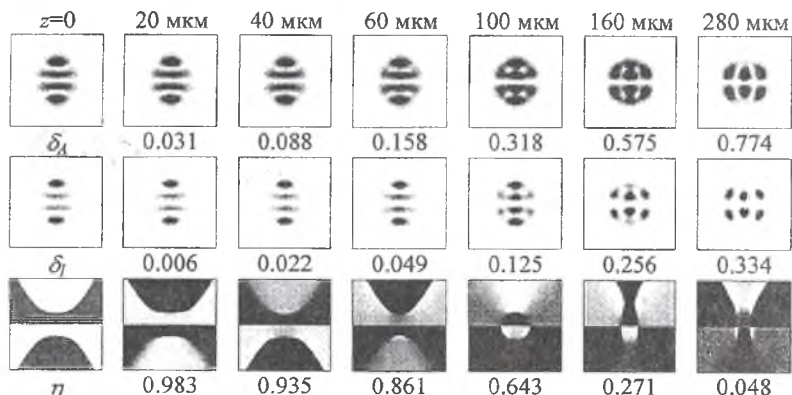


Рис. 5. Распространение суперпозиции $(p,q): (1,2)+(-1,2)+(3,1)+(-3,1)$: поперечные распределения амплитуды (верхняя строка), интенсивности (средняя строка) и фазы (нижняя строка) на различных расстояниях z и значения критериев, отражающих изменения поля.

На рис. 5 видно, что поперечное распределение интенсивности, т.е. энергетическое распределение поля, меняется на заданном интервале меньше, чем амплитуда поля.

К сожалению, в ступенчатом волокне межмодовая дисперсия очень значительна, и при задании допустимого набега фазы $\phi_e \leq \pi/18$ на интервале в 20 мкм, допустимыми могут быть 17 суперпозиций, а на интервале в 40 мкм – только 8. Причем это те 8 суперпозиций из (119), которые инварианты на интервале любой длины.

Можно существенно расширить множество суперпозиций, сохраняющих свой вид на интервале любой длины, если рассматривать инвариантность с точностью до поворота, т.е. «вращающиеся» поля.

6.3. Инвариантность на всей области распространения с точностью до поворота

Если допустить инвариантность с точностью до поворота, то для пар мод в суперпозиции должно выполняться условие:

$$\cos[(p_i - p_j)\varphi + (\beta_{|p_i|q_i} - \beta_{|p_j|q_j})z] = \cos[(p_i - p_j)(\varphi + \varphi_0)], \quad (122)$$

где φ_0 – некоторый угол.

Из (122) следует условие вращения:

$$\frac{\beta_{|p_i|q_i} - \beta_{|p_j|q_j}}{p_i - p_j} z = \varphi_0, \quad (123)$$

для любой пары, составляющей суперпозицию.

Точному условию (123) удовлетворяют любые суперпозиции, состоящие из двух мод, если $|p_i| \neq |p_j|$, т.к. при $|p_i| = |p_j|$ будет вращение на угол $\varphi_0 = 0$, т.е. полная инвариантность, рассмотренная в предыдущем разделе. Т.о. возбуждая различные пары мод можно получить поля, сохраняющие свою структуру (с точностью до поворота) на интервале любой длины. Таких суперпозиций из набора, приведенного в табл. 2, может быть 154, что во много раз превышает число просто инвариантных суперпозиций, равное 8. Для иллюстрации на рис. 6 приведены примеры распространения на расстояние 150 м инвариантных вращающихся пар мод (p, q) : $(1, 2) + (-2, 1)$ – верхняя строка, $(3, 2) + (5, 1)$ – средняя строка, $(4, 1) + (5, 1)$ – нижняя строка.

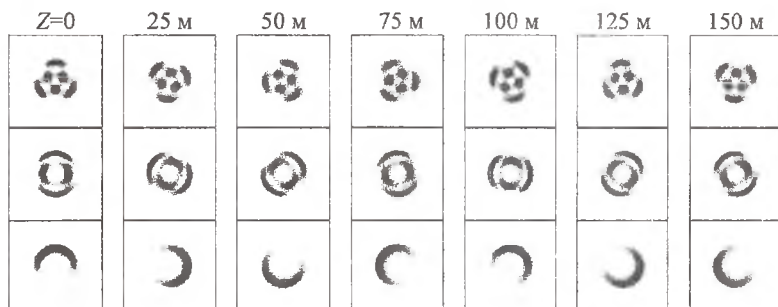


Рис. 6. Распространение вращающихся пар мод (p, q) : $(1, 2) + (-2, 1)$ – верхняя строка, $(3, 2) + (5, 1)$ – средняя строка, $(4, 1) + (5, 1)$ – нижняя строка; показано распределение интенсивности на различных расстояниях z .

Как видно на рис.6 суперпозиции, состоящие из двух мод имеют симметрию порядка

$$s = |p_1 - p_2|, \quad (124)$$

при этом на расстоянии полного оборота поперечное распределение интенсивности благодаря симметрии воспроизводится s раз.

Скорость вращения такой пары определяется по формуле:

$$g = \frac{\beta_{|p_1|q_1} - \beta_{|p_2|q_2}}{p_1 - p_2}, \quad (125)$$

а направление вращения соответствует знаку выражения (125).

Интересно, что скорость вращения интерференционной картины мод, входящих в суперпозицию, (125) не связано с выражением для орбитального углового момента (110), т.к. зависит не от коэффициентов мод, а от их постоянных распространения. В частности, для пар мод, приведенных на рис. 6, учитывая равенство коэффициентов, величины (110) и (125) равны следующим значениям: для $(1,2)+(-2,1)$ $\omega_{J_{z0}}=0.5$, $\vartheta=0.54$; для $(3,2)+(5,1)$ $\omega_{J_{z0}}=-4$, $\vartheta=-0.35$; для $(4,1)+(5,1)$ $\omega_{J_{z0}}=-4.5$, $\vartheta=1.02$.

Заметим, что поперечное распределение интенсивности пучка, состоящего из двух мод можно варьировать изменением коэффициентов при модах. При этом само распределение интенсивности будет сохраняться при распространении пучка в идеальном волокне.

6.4. Инвариантность на интервале $[0, z]$ с точностью до поворота

Вращающуюся суперпозицию из более, чем двух мод можно выбрать, если разрешить небольшую погрешность в воспроизведении поперечного распределения интенсивности пучка. В этом случае между любыми двумя парами в суперпозиции $(p_b, q_l)+(p_j, q_j)$ и $(p_b, q_k)+(p_l, q_l)$ должно выполняться условие:

$$\max \Delta_{ij}^M - \min \Delta_{ij}^M \leq \varphi_\varepsilon, \quad (126)$$

где $\Delta_{ij}^M = \varphi_{q_j} - \varphi_{p_i}$, $\varphi_{q_j} = \left| \frac{\beta_{p_i q_j} - \beta_{p_j q_i}}{p_i - p_j} \right| \varepsilon$, φ_ε — допустимый угол рассогласования поворота на всем интервале $[0, z]$.

На рис. 7 показано распространение суперпозиции из трех мод (p, q) : $(2,2)+(-4,1)+(5,1)$ с одинаковыми коэффициентами на расстояние до 1500 мкм. Данная суперпозиция удовлетворяет условию (126) с допустимым углом рассогласования $\varphi_\varepsilon \leq \pi/36$ на интервале до 150 мкм. Аналогичным свойством обладает симметричная по знаку индексов суперпозиция $(-2,2)+(4,1)+(-5,1)$. Других вариантов с количеством мод более двух не оказалось.

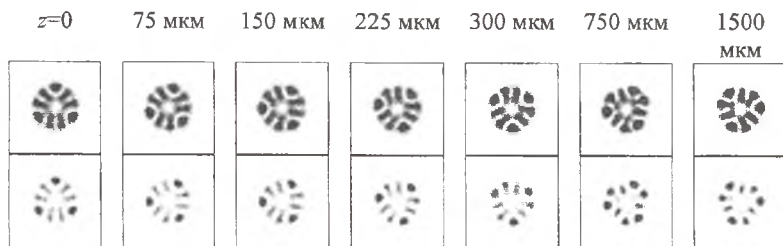


Рис. 7. Распространение суперпозиции (p, q) : $(2,2)+(-4,1)+(5,1)$: поперечные распределения амплитуды (верхняя строка), интенсивности (нижняя строка) на различных расстояниях z .

Как видно из вышеизложенного, суперпозиции из более чем двух мод сохраняют свою структуру на небольшом интервале (около сотни микрон), затем структура разваливается. Однако, через некоторое расстояние (период), поперечное сечение пучка снова самовоспроизводится.

6.5. Периодическое самовоспроизведение

Для суперпозиции из двух мод всегда существует период самовоспроизведения z_0 , который определяется из соотношения:

$$\cos[(p_1 - p_2)\varphi + (\beta_{p,q_1} - \beta_{p,q_2})z_0] = \cos[(p_1 - p_2)\varphi] \Rightarrow |\beta_{p,q_1} - \beta_{p,q_2}|z_0 = 2\pi m, \quad (127)$$

где m – целое.

Однако интереснее, задавшись некоторым расстоянием z_L , определить возможные суперпозиции мод, которые воспроизведутся с некоторой допустимой погрешностью на этом расстоянии. Такие суперпозиции можно формировать попарно отбирая моды, удовлетворяющие условию:

$$\left| [(\beta_{p,q_1} - \beta_{p,q_2})z_L]_{\pi} \right| \leq \phi_c, \quad (128)$$

где ϕ_c – допустимый приведенный набег фазы, $[\dots]_{\pi}$ означает приведение к интервалу $[-\pi, \pi]$.

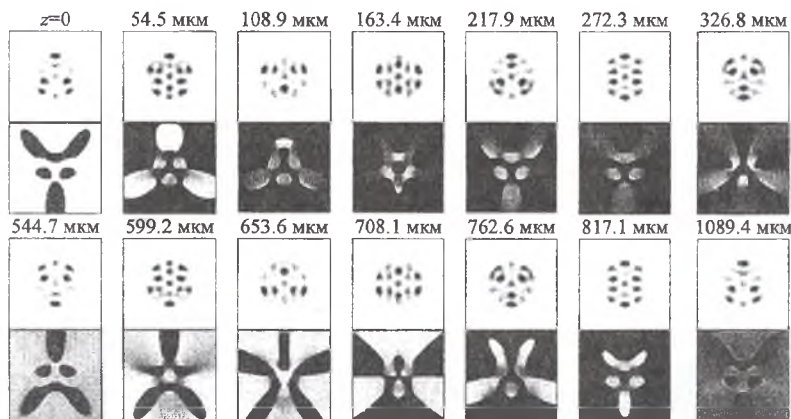


Рис. 8. Распространение суперпозиции (p, q) : $(0,3)+(3,2)+(-3,2)+(5,1)+(-5,1)$, практически воспроизводящейся на расстоянии $z_L=1089$ мкм (приведены распределения интенсивности и фазы на различных расстояниях z).

Например, задавшись $z_L=1089.4$ мкм (значение, близкое к периоду повторения суперпозиции из двух мод $(0,3)+(5,1)$), и определив допустимый приведенный набег фазы $\phi_c \leq \pi/2$, можно получить набор из 41 допустимых суперпозиций, содержащих от 2 до 5 мод. В частности, на рис. 8 показано

распространение суперпозиции из пяти мод (p,q) : $(0,3)+(3,2)+(-3,2)+(5,1)+(-5,1)$ на интервале от $z=0$ до z_L . В плоскости z_L данная суперпозиция воспроизводится с погрешностью $\delta_A=2.9\%$ для амплитуды и $\delta_f=0.48\%$ для интенсивности. При этом уровень корреляции комплексных полей при $z=0$ и при z_L близок к единице – $\eta=0.989$.

Интересно отметить, что на расстоянии в половину периода $z_L/2 = 544.7$ мкм поперечное распределение интенсивности равно исходному, повернутой на угол 180 градусов (см. рис. 8). Таким образом, есть возможность увеличить количество точек воспроизведения некоторого поля, если рассматривать повторение с точностью до поворота.

6.6. Периодическое самовоспроизведение с точностью до поворота

Аналогично предыдущему разделу, задавшись некоторым расстоянием z_L (например, длина волокна), рассмотрим суперпозиции мод, воспроизводящиеся на данном расстоянии (через данный период) с точностью до поворота с некоторым допустимым рассогласованием (иначе множество будет состоять только из двух-модовых суперпозиций). В этом случае моды, входящие в суперпозицию, должны попарно удовлетворять условию:

$$\max \Delta_{ij}^M - \min \Delta_{ij}^M \leq \varphi_\epsilon, \quad (129)$$

где $\Delta_{ij}^M = \left| [\varphi_{ij} - \varphi_{il}]_\pi \right|$, $\varphi_{ij} = \frac{(\beta_{pi} - \beta_{pj})z_L}{p_i - p_j}$, φ_ϵ – допустимый угол рассогласования в плоскости z_L .

При выборе $z_L = 1$ м и определив допустимое рассогласование по углу $\varphi_\epsilon \leq \pi/9$, можно получить набор из 173 возможных суперпозиций, содержащих от 2 до 3 мод. На рис. 9 показано распространение одной из таких суперпозиций из трех мод (p,q) : $(2,1)+(3,1)+(4,1)$ на интервале от $z=0$ до z_L (при этом угол рассогласования в точке $z_L = 1$ м равен $\varphi_\epsilon \leq \pi/30$).

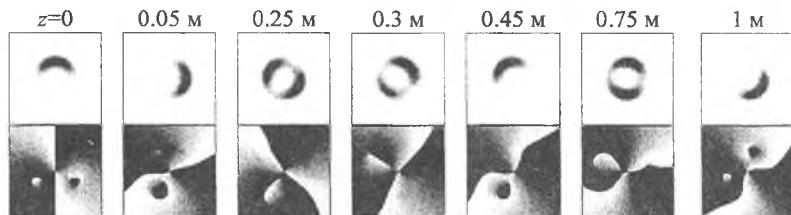


Рис. 9. Распространение суперпозиции (p,q) : $(2,1)+(3,1)+(4,1)$, практически воспроизводимой на расстоянии $z_L=1$ м (приведены распределения интенсивности и фазы на различных расстояниях z).

На рис. 9 видно, что интенсивность суперпозиции воспроизводится (с некоторой точностью) и в других плоскостях. Однако, в данной работе не ставилась задача нахождения всех точек воспроизведения для определенной суперпозиции. Решалась другая задача — по заданным физическим характеристикам ступенчатого оптического волокна (поперечные и продольные размеры, характеристики материала) определить весь возможный набор распространяющихся мод и множество суперпозиций этих мод, обладающих теми или иными свойствами самовоспроизведения с заданной погрешностью.

Библиографический список.

1. Berdague S., Facq P. Mode division multiplexing in optical fibers // *Appl. Optics*, 1982, v.21, p. 1950-1955.
2. Soifer V.A., Golub M.A. Laser beam mode selection by computer-generated holograms // CRC Press, Boca Raton, 1994.
3. Anderson D.Z., Bolshtyansky M.A., Zel'dovich B.Ya. Stabilization of the speckle pattern of a multimode fiber undergoing bending // *Optics Lett.*, 1996, v.21, no.11, p. 785-787.
4. Bolshtyansky M.A., Zel'dovich B.Ya. Stabilization of transmission function: theory for an ultrathin endoscope of one multimode fiber // *Applied Optics*, 1997, v.36, no.16, p. 3673-3681.
5. Shinmura Y., Ezoe H., Yoshikawa M. Observation of mode in graded-index optical fibers with bending and cross talk in MDM // *IEICE Trans. Electron.*, 1997, v.E80-C, no.6, p. 828-830.
6. Marcuse D. Theory of dielectric optical waveguides // Academic, San Diego, 1974.
7. Raddatz L. An experimental and theoretical study of the offset launch technique for the enhancement of the bandwidth of multimode fibre links / L. Raddatz, I.H. White, D.G. Cunningham, M.C. Nowell // *IEEE J. of Lightw. Techn.*, 1998, p. 324-331.
8. Stuart H.R. Dispersive multiplexing in multimode fiber // *Proc. of OFC*, Baltimore, 2000, p. 305-307.
9. Koonen T. Mode group diversity multiplexing for multi-service in-house networks using multi-mode polymer optical fibre / T. Koonen, H. van den Boom, F. Willems, J. Bergmans, G.-D. Khoe // *Proc. IEEE/LEOS*, Amsterdam, 2002, p. 183-186.
10. Poole C. D. and Wang S.-C. Bend-induced loss for the higher-order spatial mode in a dual-mode fiber // *Opt. Lett.*, 1993, v.18, no.20, p. 1712-1714.
11. Hwang I.K., Yun S.H. and Kim B.Y. Long-period fiber gratings based on periodic microbends // *Opt. Lett.*, 1999, v.24, no.18, p. 1263-1265.
12. Lee K.S. and Erdogan T. Fiber mode conversion with tilted gratings in an optical fiber // *J. Opt. Soc. Am. A*, 2001, v.18, no.5, p. 1176-1185.

13. Thornburg W.Q., Corrado B.J. and Zhu X.D. Selective launching of higher-order modes into an optical fiber with an optical phase shifter // Opt. Lett., 1994, v.19, no.7, p. 454-456.
14. Poon A.W., Chang R.K., Lock J.A. Spiral morphology-dependent resonances in an optical fiber: effects of fiber tilt and focused Gaussian beam illumination // Opt. Lett., 1998, v.23, no.14, p. 1105-1107.
15. Bolshtyansky M.A., Savchenko A.Yu. and Zel'dovich B.Ya. Use of skew rays in multimode fibers to generate speckle field with nonzero vorticity // Opt. Lett., 1999, v.24, no.7, p. 433-435.
16. Dubois F., Emplit Ph. and Hugon O. Selective mode excitation in graded-index multimode fiber by a computer-generated optical mask // Opt. Lett., 1994, v.19, no.7, p. 433-435.
17. Soifer V.A., Golub M.A. Laser beam mode selection by computer-generated holograms // CRC Press, Boca Raton, 1994
18. Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements / V.A. Soifer, ed. // John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.
19. Marcuse D. Light transmission optics // Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1972.
20. Cherin A.H. An introduction to optical fibers // McGraw-Hill book Co., Singapore, 1987.
21. Koshiha M. Optical waveguide analysis // McGraw-Hill Inc., Tokyo, 1990.
22. Справочник по специальным функциям / по ред. М. Абрамовица и И. Стиган // М.: Наука, 1979.
23. Снайдер А., Лав Д. Теория оптических волноводов // М.: Радио и связь, 1987.
24. Levi L. Applied optics // John Wiley & Sons Inc., New York, 1980
25. Gloge D. Weakly guided fibers // Appl. Opt., 1971, v.10, p. 2252-2258.
26. Yeh C. Handbook of fiber optics. Theory and applications // Academic Press Inc., New York, 1990.
27. Котляр В.В. Измерение орбитального углового момента светового поля с помощью дифракционного оптического элемента / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, В.А. Сойфер, Я. Ванг // Автометрия, 2002, т.38, №3, с. 33-44.
28. Хонина С.Н. Фазовый дифракционный фильтр, предназначенный для анализа световых полей на выходе волокна со ступенчатым профилем показателя преломления / С.Н. Хонина, Р.В. Скиданов, В.В. Котляр, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика, 2003, вып.25, с. 89-94.
29. Карпеев С.В., Павельев В.С., Хонина С.Н. Исследование зависимости мощностей мод на выходе ступенчатого волоконного световода от величины его прогиба // Компьютерная оптика, 2003, вып.25, с. 95-99.

Содержание

Общие сведения	3
1. Уравнения, описывающие распространение в диэлектрической среде	4
2. Электромагнитное поле в волноводе	8
3. Электромагнитное поле в круглом ступенчатом волокне.....	10
4. Линейно-поляризованные моды слабонаправляющего ступенчатого волокна	15
5. Расчет LP-мод.....	17
6. Самовоспроизведение многомодовых лазерных полей в слабонаправляющих ступенчатых волокнах.....	19
6.1. Инвариантность на всей области распространения	22
6.2. Инвариантность на интервале $[0, z]$	23
6.3. Инвариантность на всей области распространения с точностью до поворота.....	24
6.4. Инвариантность на интервале $[0, z]$ с точностью до поворота.....	26
6.5. Периодическое самовоспроизведение	27
6.6. Периодическое самовоспроизведение с точностью до поворота	28
Библиографический список	29

Учебное издание

**МНОГОМОДОВЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПОЛЯ
В СТУПЕНЧАТЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ**

Методические указания

Составитель: *Хонина Светлана Николаевна*

Подписано в печать 28.10.04. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл.печ.л. 1,86. Усл.кр.-отг. 1,98. Уч.-изд.л. 2,0.
Тираж 100 экз. Заказ N380.

Самарский государственный аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Отпечатано в типографии ООО «Август»,
Лицензия ПЛД №67-50.