

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ТРИГОНОМЕТРИИ
Часть II
„ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ“**

КУЙБЫШЕВ 1980

ВВЕДЕНИЕ

"Тригонометрические уравнения" являются второй частью "Методических указаний по тригонометрии" для слушателей подготовительного отделения КуАИ.

Для использования "Указаний" необходимо знание материала, изложенного в первой части "Тождественные преобразования тригонометрических уравнений".

В "Методических указаниях" изложены основы теоретического материала, соответствующего программе, и также приведено много примеров с решениями. В основной части "Указаний" даны примеры на различные способы решения тригонометрических уравнений /150 номеров/, в связи с этим, "Методические указания" будут использоваться в качестве задачника по данному разделу тригонометрии как слушателями, так и преподавателями для работы на подготовительном отделении в КуАИ.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида:

$$\sin x = a, \quad 1$$

$$\cos x = a, \quad 2$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad 3$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad 4$$

где $a \in \mathbb{R}$ - данное число.

1.1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $\sin x = a$.

Так как $|\sin x| \leq 1$, то при $|a| > 1$ уравнение 1 решения не имеет. При $a = 1$ уравнение 1 принимает вид $\sin x = 1$ и имеет решения:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При $a = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Чтобы найти все решения уравнения 1 при $|a| < 1$, достаточно найти все решения на любом отрезке длины 2π , т.к. период синуса равен 2π . Удобно взять отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, т.к. на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ синус возрастает и принимает каждое значение один раз, а на $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ синус убывает и принимает каждое своё значение тоже один раз /рис. 1/.

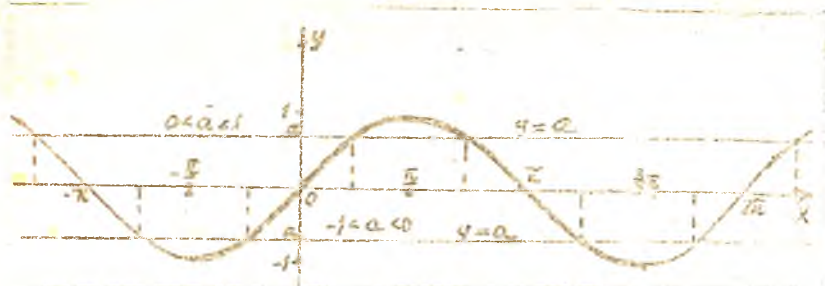


Рис. 1

Значит на каждом из этих отрезков уравнение 1 имеет по одному решению. Решение уравнения 1 на $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ есть $\arcsin \alpha$, по определению арксинуса. Решение уравнения 1 на $[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi]$ есть $\pi - \arcsin \alpha$.

Покажем это. По формуле приведем $\sin(\pi - x) = \sin x$. Если $x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi]$, то $(\pi - x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

Уравнение 1 заменим равносильным

$$\sin(\pi - x) = \alpha, \text{ т.к. } \pi - x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}],$$

значит, $\pi - x = \arcsin \alpha$, откуда $x = \pi - \arcsin \alpha$.

Чтобы записать все решения уравнения 1, воспользуемся периодичностью синуса, т.е. к каждому из двух полученных решений прибавим числа вида $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Получаем два бесконечных подмножества решений:

$$y = \arcsin \alpha + \pi \cdot 2m \quad \text{и}$$

$$x = \pi - \arcsin \alpha + 2\pi m = -\arcsin \alpha + \pi(2m+1),$$

которые можно объединить в одно множество и записать одной формулой:

$$x = (-1)^n \arcsin \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad 5$$

При чётном n из формулы 5 получаем первое подмножество решений, при нечётном n - второе подмножество.

Рассмотрим примеры решения уравнений вида 1 :

Пр. 1. $\sin x = 0$.

По формуле 5 записываем: $x = (-1)^n \arcsin 0 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Из того, что $\sin 0 = 0$ и $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ следует, что $\arcsin 0 = 0$, поэтому $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пр. 2. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

значит, $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пр. 3 $\sin x = -\frac{1}{2}$.

$x = (-1)^n \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, т.к. $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

значит, $x = (-1)^n(-\frac{\pi}{6}) + \pi n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ 2 $\cos x = a$.

Из того, что $|\cos x| \leq 1$, то при $|a| > 1$ уравнение 2 решения не имеет. При $a = 1$ имеем уравнение $\cos x = 1$, все его решения запишутся формулой $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. При $a = -1$ уравнение 2 примет вид $\cos x = -1$, а решения уравнения $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Чтобы найти все решения уравнения 2 при $|a| < 1$, достаточно найти все его решения на любом отрезке длины 2π , т.е. период косинуса, равен 2π . Из рис.2 видно, что удобно взять $[-\pi, \pi]$.

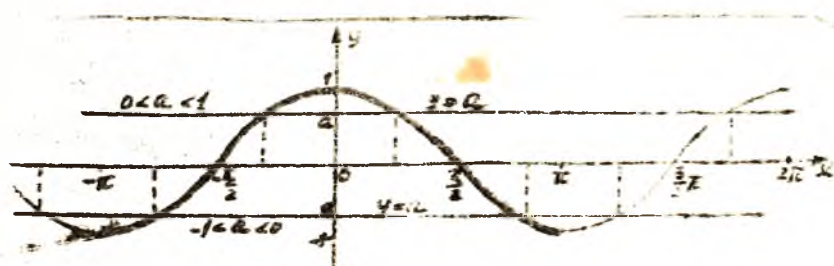


Рис.2.

т.е. на $[0, \pi]$ косинус убывает и принимает каждое своё значение один раз, а на $[-\pi, 0]$ косинус возрастает и принимает каждое своё значение тоже только один раз. Значит, на каждом из этих отрезков уравнение 2 имеет одно решение. Решение уравнения 2 на $[0, \pi]$ есть $\arccos a$, по определению арккосинуса. В том же уравнении 2 на $[-\pi, 0]$ есть $-\arccos a$ ввиду чётности функции косинуса. Таким образом, решения уравнения 2 на $[-\pi, \pi]$ будут числа $\pm \arccos a$. Чтобы записать все решения уравнения 2, воспользуемся периодичностью косинуса:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим примеры решения уравнения вида

Пр. 4. $\cos x = 0$.

По формуле 6 записываем: $x = \pm \arccos 0 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \text{ т.к. } \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ и } \frac{\pi}{2} \in [0, \pi],$$

значит, $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

или

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

/ см. рис. 3 /



Рис. 3

Пр. 5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \frac{\pi}{6} \in [0, \pi].$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пр. 6 $\cos x = -\frac{1}{2}$.

$x = \pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi,$
 т. к. $\cos \frac{2}{3}\pi = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}\pi \in [0, \pi]$.

$$x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

1.3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИДА 3 $\operatorname{tg} x = a$.

Чтобы найти решения уравнения 3, достаточно найти все решения этого уравнения на любом отрезке длины π , т. к. период тангенса π . Из рис. 4 видно, что удобно взять промежуток $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Решение уравнения 3 на $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ есть $\operatorname{arctg} a$, по определению арктангенса. Пользуясь периодичностью тангенса получаем все решения уравнения 3:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad 7$$

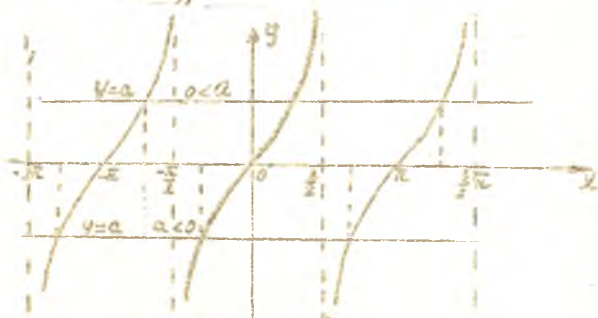


Рис. 4

Рассмотрим примеры решения уравнения вида 3:

Пр. 7. $\operatorname{tg} x = 0$.

По формуле 7 записываем:

$$x = \operatorname{arctg} 0 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \text{ т. к. } \operatorname{tg} 0 = 0 \text{ и } 0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

значит, $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пр. 8. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

$$x = \arctg \sqrt{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \text{ т.к. } \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ и } \frac{\pi}{3} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \quad x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пр. 9. $\operatorname{tg} x = -1$. $x = \arctg(-1) + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}, \text{ т.к. } \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1 \text{ и } -\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

1.4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВИДА 4 $\operatorname{ctg} x = a$.

Чтобы найти все решения уравнения 4, достаточно найти все решения его на любом отрезке длины π , т.к. период котангенса является π . Из рис. 5 видно, что удобно взять интервал $]0, \pi[$. Решение уравнения 4 на $]0, \pi[$, по определению арккотангенса, есть $\operatorname{arccotg} a$. Чтобы записать все решения уравнения 4, воспользуемся периодичностью функции котангенса.

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad 8$$

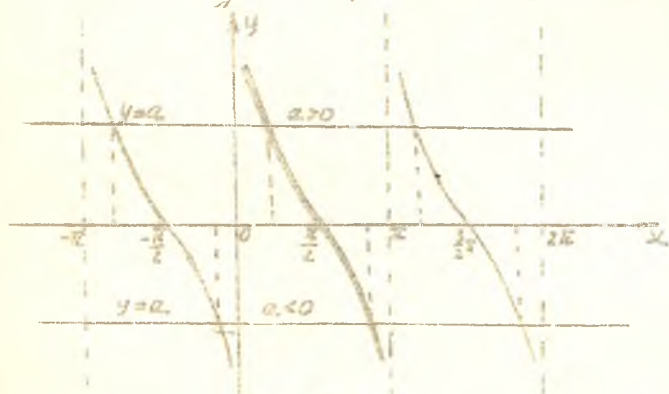


Рис. 5

Решим несколько уравнений вида 4 :

Пр. 10. $\operatorname{ctg} x = 0$.

По формуле 8 записываем: $x = \operatorname{arccotg} 0 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{arccctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$ и $\frac{\pi}{2} \in]0, \pi[$,
значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пр. 11. $\operatorname{ctg} x = 1$.

$x = \operatorname{arccctg} 1 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{arccctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, т.к. $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in]0, \pi[$.

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пр. 12. $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

$x = \operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. $\operatorname{arccctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$,

т.к. $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in]0, \pi[$.

$x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2. СПОСОБ ПРИВЕДЕНИЯ К ОДНОЙ ФУНКЦИИ.

Рассмотрим решение уравнения $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

Это квадратное уравнение относительно $\cos x$. Решив его
относительно косинуса: $\cos x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} =$

$$= \frac{7 \pm 5}{4},$$

имеем два простейших уравнения:

$$(\cos x)_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad (\cos x)_2 = 3.$$

Первое уравнение имеет множество решений

$$x = \pm \operatorname{arccos} \frac{1}{2} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z},$$

или $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, второе не имеет решений, т.к.

$|\cos x| \leq 1$, ни при каких значениях x не может равняться

3. Следовательно, решение данного уравнения

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если уравнение содержит различные тригонометрические функции от неизвестного, то можно все эти функции

выразить через одну и получить уравнение, содержащее лишь одну тригонометрическую функцию от неизвестного. При этом нужно выбирать такие подстановки, которые не вносят в уравнение радикалов, в противном случае, при освобождении уравнения от них возможно появление посторонних решений.

Рассмотрим решение уравнения

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0.$$

Заменяя $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, получим

$$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \text{ или } 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Решив квадратное уравнение относительно $\sin x$, имеем два простейших уравнения:

$$(\sin x)_1 = -\frac{1}{2} \text{ и } (\sin x)_2 = 2.$$

Первое уравнение имеет общее решение

$$x = (-1)^n \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

а второе решений не имеет, т.к. $|\sin x| \leq 1$.

Для уравнения, содержащего неизвестное под знаком тригонометрических функций сложных аргументов, в ряде случаев также можно, выразив все тригонометрические функции через одну, получить уравнение, содержащее лишь одну тригонометрическую функцию от неизвестного.

Решим несколько уравнений.

Пр. 1. $\cos 2x = \sin^2 x$.

Из формулы понижения степени имеем: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, подставим это в правую часть уравнения:

$$\cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \text{ откуда имеем}$$

$$3\cos 2x = 1, \text{ или } \cos 2x = \frac{1}{3}, \text{ тогда}$$

$$2x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ и, наконец,}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2} \arccos \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пр. 2. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = -2.$

Из формулы тангенса суммы следует, что

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Поэтому данное уравнение можно переписать в виде:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = -2.$$

Невозможно установить ОДЗ. т.к. $\operatorname{tg} x$ не существует при

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ а также } 1 - \operatorname{tg} x = 0 \quad \text{при}$$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то эти значения x_1 и x_2 должны быть исключены из ОДЗ.

Для простоты записи обозначим $\operatorname{tg} x = y$ и решим уравнение относительно y :

$$y + \frac{1+y}{1-y} = -2, \Rightarrow y(1-y) + 1+y = -2(1-y), \Rightarrow y^2 = 3, \Rightarrow y = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Итак, } (\operatorname{tg} x)_1 = \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = \arctg \sqrt{3} + \pi n = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{tg} x)_2 = -\sqrt{3} \Rightarrow x_2 = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi n_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi n_2, n_2 \in \mathbb{Z}.$$

Или объединяя в одно множество, запишем одной формулой:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найденные решения входят в ОДЗ. Так решаются примеры №1-20.

3. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СИНУСА И КОСИНУСА И СВОДИЩИЕСЯ К НИМ.

Пр. 1. Решить уравнение $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

Каждое слагаемое левой части — одночлен второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Говорят, что это однородное

уравнение второй степени относительно синуса и косинуса. Синус и косинус не могут быть одновременно равными нулю. Так что значение аргумента, при котором одна из этих функций обращается в нуль, не является решением этого уравнения. Поэтому можно обе части уравнения разделить на $\cos^2 x$ или на $\sin^2 x$ и при этом не будет потери корней, т.е. получим уравнение, равносильное данному:

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Решив квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, имеем два простейших:

$$1. \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ и}$$

$$2. \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Бывают однородные уравнения первой, второй, третьей и т.д. степени. Они также решаются делением левой и правой части уравнения на косинус или синус в степени, равной степени однородности уравнения. Так уравнение первой степени делят на $\cos x$ или $\sin x$, второй - на $\cos^2 x$ или $\sin^2 x$, третьей на $\cos^3 x$ или $\sin^3 x$ и т.д. Потом заменой $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$ на y получают алгебраическое уравнение 1-ой, 2-ой и 3-ей степени.

Рассмотрим примеры уравнений, сводящихся к однородным.

Пр.2. Решить уравнение $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2} \sin 2x$

Представим $\sin 2x$ по формуле синуса двойного аргумента $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ и придём к однородному уравнению второй степени: $2 \sin^2 x + \cos^2 x = 3 \sin x \cos x$. Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, получим

$2\operatorname{tg}^2 x + 1 = 3\operatorname{tg} x$. Решив квадратное уравнение относительно тангенса, имеем

$$(\operatorname{tg} x)_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{tg} x)_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пр. 3. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0,5 - \sin x \cos x$

Однородность нарушает свободный член 0,5, умножим его на "тригонометрическую единицу" $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}(\sin^2 x - \cos^2 x) - \sin x \cos x$

После упрощений имеем уравнение $\sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0$.

Разделим на $\cos^2 x$ обе части уравнения и получим

$$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Решив его, имеем: $(\operatorname{tg} x)_1 = -3$ и $(\operatorname{tg} x)_2 = 1$.

$$x_1 = \operatorname{arctg}(-3) + \pi n = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Решим уравнение 1-ой степени.

Пр.4. $2\sin x + \cos x = 0$.

Разделим обе части на $\cos x$. $2\operatorname{tg} x + 1 = 0, \Rightarrow$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \Rightarrow x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Так решаются примеры с № 21-30.

4. СПОСОБ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ.

Если левую часть уравнения, после переноса в неё всех слагаемых, можно разложить на множители, то уравнение примет вид равенства нулю произведения. Далее следует приравнять поочерёдно нулю каждый из сомножителей, решить каждое из полученных уравнений и объединить в одно множество все найденные решения.

Решить уравнения:

Пр. 1. $\sin 5x - \cos 3x = \sin x$

Перенесём $\sin x$ в левую часть и разложим её на множители.

Имеем: $(\sin 5x - \sin x) - \cos 3x = 0$,

$$2 \sin 2x \cos 3x - \cos 3x = 0,$$

$$\cos 3x (2 \sin 2x - 1) = 0.$$

Приравняв нулю сомножители левой части, получим два простейших уравнения:

1. $2 \sin 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}.$$

Объединение множеств x_1 и x_2 есть решение данного уравнения.

Пр. 2. $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

Установим ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1. $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

по сюда войдут $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, при n - нечётном, которые исключены из ОДЗ. Их надо исключить из полученных решений.

тогда в формуле $x = \frac{\pi}{2} n$ n надо взять только чётные, т.е. $n = 2m$ и тогда $x_1 = \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

2. $\operatorname{tg} x = 0 \quad x_2 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, т.е. множество

x_2 совпадает с множеством решений x_1 .

Ответ: $x = \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Пр. 3. $\cos 2x = \cos 6x$.

Перенесём $\cos 6x$ в левую часть и используем формулу для разности косинусов: $\cos 2x - \cos 6x = 0$.

$$- 2 \sin \frac{2x+6x}{2} \sin \frac{2x-6x}{2} = 0.$$

$$2 \sin 4x \sin 2x = 0.$$

$$1. \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = \pi n \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2. \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi m \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} m, m \in \mathbb{Z}$$

Второе множество решений входит в первое /легко проследить из тригонометрическом круге/. Ответ: $x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$

Пр.4. $1 + \cos x + \sin x = 0.$

$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ следует из формулы понижения степени.
 $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, тогда уравнение примет вид:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0.$$

$$2 \cos \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}) = 0.$$

$$1. \cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x_1 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 0 - \text{уравнение, однородное 1-ой степени, делим на } \cos \frac{x}{2}. \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: множество решений данного уравнения есть объединение множеств решений x_1 и x_2 .

Этим приёмом можно решить примеры № 31-46.

5. ЧАСТНЫЕ ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Покажем на примерах различные частные приёмы решения тригонометрических уравнений. Эти приёмы могут быть весьма разнообразными в зависимости от вида левой и правой

частей уравнения.

Решить уравнения:

Пр.1. $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$

Преобразуем в сумму левую и правую части:

$$\frac{\cos 6x - \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2} \quad \text{или}$$

$\cos 6x = \cos 2x$. Далее применим способ разложения на множители: $\cos 6x - \cos 8x = 0, -2\sin 4x \sin 2x = 0$.

Откуда: 1. $\sin 4x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} n_1, n_1 \in \mathbb{Z}$.

2. $\sin 2x = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} n_2, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$ / см. пр. 3 §4 /

Пр.2. $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$.

По формулам понижения степени имеем:

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Откуда $\frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 1, \cos 4x + \cos 2x = 0$.

Разложив на множители, имеем $2 \cos 3x \cos x = 0$.

1. $\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n_1, n_1 \in \mathbb{Z}$.

Второе подмножество решений входит в первое /рассмотреть на тригонометрическом круге/.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}$.

Пр.3. $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$

Преобразуем выражение $\sin x - \sqrt{3} \cos x$, введя вспомо-

гательный урок: $\sin x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} \cos x \right] =$
 $= 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) =$
 $= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$

Теперь данное уравнение примет вид:

$$2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1, \text{ откуда } \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2},$$

значит, $x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$ а

$$x = \frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично можно было решить пример № 4:

$$5 \sin x - \cos x = 5.$$

$$\sqrt{26} \left(\frac{5}{\sqrt{26}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{26}} \cos x \right) = 5,$$

$$\sqrt{26} \sin(x - \varphi) = 5, \quad \varphi \text{ определим из условия:}$$

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{26}}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{26}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{5} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{1}{5}$$

Поэтому $\sin(x - \arctg \frac{1}{5}) = \frac{5}{\sqrt{26}}.$

Откуда $x - \arctg \frac{1}{5} = (-1)^n \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}} + \pi n,$

$$x = \arctg \frac{1}{5} + (-1)^n \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Также можно решить пр. №4 из §4.

Пример 4 из § 5 можно решить, применив формулы выражения синуса и косинуса через тангенс половинного аргумента:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Уравнение примет вид:

$$10 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 5 + 5 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}, \quad 4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 10 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 6 = 0.$$

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)_1 = 1, \quad \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)_2 = \frac{3}{2}.$$

$$\left(\frac{x}{2} \right)_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \left(\frac{x}{2} \right)_2 = \arctg \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = 2\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответы, полученные двумя различными способами, выражают один и тот же результат.

Пр. 5. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos 2x + \sin(2x - \pi) \sin x = 0.$

По формулам приведения имеем $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

и $\sin(2x - \pi) = -\sin 2x$, подставим в уравнение:

$$\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 0,$$

в левой части имеем формулу косинуса суммы аргументов x и $2x$, применив её имеем $\cos 3x = 0$, откуда:

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} n, n \in \mathbb{Z}.$$

6. О ПОТЕРЕ РЕШЕНИЙ И ПОЯВЛЕНИИ ПОСТОРОННИХ РЕШЕНИЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ.

Тождественные преобразования данного выражения могут изменить его область допустимых значений.

Например, выражение $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ не имеет смысла при $\sin x = 0$, т.е. при $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Если выполнить сокращение дроби, применив формулу:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \text{ получим } \frac{\sin 2x}{\sin x} = 2 \cos x,$$

полученное выражение $2 \cos x$ имеет смысл при $x \in \mathbb{R}$.

Множество допустимых значений расширилось. При переходе же от выражения $2 \cos x$ к первоначальному $\frac{\sin 2x}{\sin x}$ произойдёт сужение области допустимых значений.

При выполнении тождественных преобразований над выражениями, содержащимися в уравнении, возможно появление посторонних решений, если множество допустимых значений неизвестного расширилось, и возможна потеря решений, если

это множество сузилось.

$$\text{Пр.1. } \frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$$

Установим ОДЗ: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$1-\cos 2x \neq 0, \cos 2x \neq 1, 2x \neq 2\pi n, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1+\cos 2x = 2\cos^2 x, 1-\cos 2x = 2\sin^2 x,$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Подставим это в уравнение и произведём сокращение дробей

$$\frac{2\cos^2 x}{2\cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{2\sin^2 x}, \quad \text{будем иметь:}$$

$$\cos x (\sin x - 1) = 0. \quad \cos x \neq 0 \quad / \text{см. ОДЗ}/$$

$\sin x - 1 = 0, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ - это множество решений является посторонним, т.к. оно войдет в множество $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, которые исключены из ОДЗ.

Ответ: уравнение решения не имеет. Потери решений не может быть, т.к. в процессе решения ОДЗ расширилась.

$$\text{Пр.2. } \sin^3 x + \cos^3 x = 1 \quad 1$$

Разделим на $\cos^3 x$, при этом ОДЗ сузится. У первоначального уравнения $x \in \mathbb{R}$. После деления имеем:

$$\tan^3 x + 1 = \frac{1}{\cos^3 x} \quad 2$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\cos^3 x} = 1 + \tan^3 x, \quad \text{тогда } \tan^3 x + 1 = \sqrt{(1 + \tan^2 x)^3}$$

Освободимся от радикала /произойдет расширение области допустимых значений - возможны посторонние корни/.

Возведём обе части в квадрат:

$$(\tan^3 x + 1)^2 = (1 + \tan^2 x)^3 \quad 3$$

$$\tan^6 x + 2\tan^3 x + 1 = 1 + 3\tan^2 x + 3\tan^4 x + \tan^6 x$$

$$3\operatorname{tg}^4 x + 3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg}^3 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x (3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3) = 0.$$

$$1. \operatorname{tg}^2 x = 0 \Rightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. 3\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3 = 0, \quad x \in \emptyset, \text{ т.к. } D < 0$$

Полученные решения надо проверить. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ разобьём на два подмножества, рассмотрим n_1 - чётное и нечётное. При $n_1 = 2k$ - чётном $x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ проверкой убеждаемся, что удовлетворяет уравнению 1, следовательно $x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ - есть решение уравнения 1.

При $n_1 = 2k+1$ - нечётном $x = 2\pi k + \pi, k \in \mathbb{Z}$, проверкой убеждаемся, что эти значения не удовлетворяют уравнению 1 (Достаточно взять одно значение при $k=0$ $x = \pi$ и убедиться $\sin^3 \pi + \cos^3 \pi = 0 - 1 \neq 1$, что не удовлетворяет уравнению 1).

Теперь надо проверить, при переходе от уравнения 1 к 2 ОДЗ сузилась, не произошла ли потеря корней.

Потеряны могли быть значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Разобьём их также на два подмножества, рассмотрим n чётное и нечётное. При $n = 2k$ имеем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, проверкой убедимся, что $x = \frac{\pi}{2} (k=0)$ является решением $\sin^3 \frac{\pi}{2} + \cos^3 \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$.

Ввиду периодичности $\sin x$ и $\cos x$ /период 2π / значения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, также будут удовлетворять уравнению 1. Значит, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. При $n = 2k+1$ нечётном имеем $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi = 2\pi k + \frac{3\pi}{2}$. Доста-

точно проверить значение $x = \frac{3}{2}\pi$ и убедиться, что оно не удовлетворяет уравнению 1 :

$$\sin^3 \frac{3}{2}\pi + \cos^3 \frac{3}{2}\pi = -1 + 0 \neq 1$$

Итак, ответ: $x_1 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$
 $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Применяя вышележащие приёмы, можно решить уравнения № 1-150, приведённые в следующем разделе методических указаний.

7. РЕШИТЬ СЛЕДУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ:

1. $\sin^2 x - 3 = 2 \sin x$ Ответ. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
2. $\cos^2 x + \cos x = 1$ Ответ. $\pm \arccos \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
3. $6 \sin^4 x = 1 - \sin^2 x$ Ответ. $\pm \arcsin \frac{1}{3} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
4. $\sin x = 1 - 2 \sin^2 x$ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $(-1)^{\frac{2\pi}{5}} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
5. $2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2$ Ответ. $\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
6. $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ Ответ. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
7. $2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 5$ $\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
8. $\sin^2 x = 1 + \cos^2 x$ Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
9. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = 1$ Ответ. $\operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
10. $\sin(\frac{\pi}{3} + x) - \frac{1}{2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Ответ. $2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
11. $\cos(\frac{\pi}{3} - x) - 0,5 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$ Ответ. $x \in \mathbb{R}$.
12. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$ Ответ. $\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
13. $3 - \cos^2 x - 3 \sin x = 0$ Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
14. $4 \sin x = 4 - \cos^2 x$ Ответ. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
15. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\frac{1}{2}$ $\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
16. $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$ Ответ. $\pm \frac{2}{3}\pi + 4\pi n, \pi + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
17. $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$ Ответ. $2\pi n, \pi + 4\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
18. $1 + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2}$ Ответ. $\pi + 2\pi n, 4\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
19. $\cos 2x = 2\frac{1}{3} \sin x$ Ответ. $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
20. $\cos 2x = 2 \sin^2 x$ Ответ. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
21. $\sin x = \cos x$ Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
22. $3 \sin^2 x = \cos^2 x$ Ответ. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
23. $\sin x = \frac{x}{8} \cos x$ Ответ. $\operatorname{arctg} \frac{x}{8} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.

24. $\sqrt{3} \sin x = \cos x$ Omb. $\frac{\pi}{6} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
25. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x$ Omb. $\frac{\pi}{4} + \pi n, \pi n - \arctg 3$
($n \in \mathbb{Z}$).
26. $3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 13 \sin x \cos x$ Omb. $\arctg 4 + \pi n,$
 $\arctg \frac{1}{3} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
27. $1 - 3 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$ Omb. $\arctg(1 \pm \sqrt{3}) + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
28. $6 \sin^2 x - \frac{3}{2} \sin 2x - \cos^2 x = 1$ Omb. $\frac{\pi}{4} + \pi n, -\arctg 9 + \pi n$
($n \in \mathbb{Z}$).
29. $3 \cos 2x + \sin 2x + 8 \sin^2 x = 2$ omb. $x \in \emptyset$.
30. $2 \sin^2 x - 3 \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x = 2$ Omb. $\arctg(-\frac{3 \pm \sqrt{89}}{5}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
31. $\sin^2 x - 2 \sin x = 0$ Omb. $\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
32. $\tg^2 x = 2 \tg x$ Omb. $\pi n, \arctg 2 + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
33. $\ctg^2 x + 4 \ctg x = 0$ Omb. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \arctg(-4) + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
34. $\tg^3 x = \tg x$ Omb. $\pi n, \pi n \pm \frac{\pi}{4} (n \in \mathbb{Z})$.
35. $1 + \cos x + \cos 2x = 0$ Omb. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
36. $\sin x - \sin 5x = 0$ Omb. $\pi n, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} (n \in \mathbb{Z})$.
37. $\sin 3x = \cos 2x$ Omb. $\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi n, \frac{\pi}{5} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
38. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ Omb. $\frac{2}{5}\pi n,$
 $\frac{\pi}{2} + \pi n, (2n+1)\pi (n \in \mathbb{Z})$.
39. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$ Omb. $\frac{2}{3}\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, -\frac{\pi}{2} + \pi n 2 (n \in \mathbb{Z})$.
40. $1 - \cos x = \sin x$ Omb. $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
41. $\cos 2x = 1 + \sin x$ Omb. $\pi n, (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
42. $\sin x + \sin 3x = 0$ Omb. $\frac{\pi n}{2} (n \in \mathbb{Z})$.
43. $\sin x + \cos \frac{x}{2} = 0$ Omb. $(2n+1)\pi, (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
44. $\sin 2x = 2 \sin x$ Omb. $\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
45. $\tg 5x + \tg 3x = 0$ Omb. $\frac{\pi n}{8} (n+4(2k+1), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z})$.

46. $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 3x$ Omб. $\pi n (n \in \mathbb{Z})$
47. $\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} 2x$ Omб. $\frac{\pi n}{2} (n \in \mathbb{Z})$
48. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$ Omб. $2\pi n, \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$
49. $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$ Omб. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} (n \in \mathbb{Z})$
50. $\cos(\frac{\pi}{3} + x) - \sin(\frac{\pi}{3} - x) = 0$ Omб. $-\frac{\pi}{6} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$
51. $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x = 1$ Omб. $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} (n \in \mathbb{Z})$
52. $\sin x \cos x = 0,25$ Omб. $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} (n \in \mathbb{Z})$
53. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x$ Omб. $\frac{1}{2}[(1 - \sqrt{3}) \arcsin(\sqrt{3} - 1) + \pi n] (n \in \mathbb{Z})$
54. $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = 0,5$ Omб. $\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$
55. $\cos 7x \cos 3x = \cos 4x$ Omб. $\frac{\pi n}{7}, \frac{\pi n}{3} (n \in \mathbb{Z})$
56. $\cos 3x \cos x = \cos 7x \cos 5x$ Omб. $\frac{\pi n}{8} (n \in \mathbb{Z})$
57. $\cos 2x \cos 3x = \cos 5x \cos 6x$ Omб. $\frac{\pi n}{3}, \frac{\pi n}{8} (n \in \mathbb{Z})$
58. $\sin x \sin 3x = \sin 2x \sin 4x$ Omб. $\frac{\pi n}{9} (n \in \mathbb{Z})$
59. $\sin 2x \cos 3x = \sin 3x \cos 2x$ Omб. $\pi n (n \in \mathbb{Z})$
60. $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$ Omб. $\pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$
61. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$ Omб. $2\pi n, 2\pi n - 2 \arctg 3 (n \in \mathbb{Z})$
62. $\cos^2 x + 3 \cos^2 \frac{x}{2} = 2$ Omб. $\pm \arccos \frac{\sqrt{12} - 3}{4} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$
63. $\sin^2 x + \sin^2 3x + \frac{1}{2} \cos 6x = 1$ Omб. $\frac{\pi}{7} + \frac{\pi n}{2} (n \in \mathbb{Z})$
64. $\cos^2 x + 2 \sin^2 5x = \frac{3 - \cos 10x}{2}$ Omб. $\frac{\pi n}{6}, \frac{\pi n}{4} (n \in \mathbb{Z})$
65. $\sin^2 4x + 7 \cos^2 6x + \frac{1}{2} \cos 8x = 5$ Omб. $\pm \frac{1}{12} \arccos \frac{2}{7} + \frac{\pi n}{6} (n \in \mathbb{Z})$
66. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$ Omб. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$
67. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$ Omб. $\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \frac{7\pi}{12} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$
68. $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2 \sin 7x$ Omб. $\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} (n \in \mathbb{Z})$
69. $\sin x - \sqrt{7} \cos x = \sqrt{7}$ Omб. $2 \arctg \sqrt{7} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$

10. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2}$. Оmb. $\frac{\pi}{12} + 2\pi n, -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
11. $\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = 1$. Оmb. $\frac{\pi}{4} + \pi n, (2n+1)\pi (n \in \mathbb{Z})$.
12. $2\sin x - 5\cos x + 2\operatorname{tg} x = 5$. Оmb. $(2n+1)\pi, \arctg \frac{5}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
13. $\sqrt{3}\sin x - \sqrt{5}\cos x = \sqrt{3}$. Оmb. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -2\arctg(4+\sqrt{5}) + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
14. $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$. Оmb. $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
15. $\cos 4x + \operatorname{tg} 2x = 1$. Оmb. $\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{2} (n \in \mathbb{Z})$.
16. $\cos x \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = -\frac{3}{2}$. Оmb. $\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
17. $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 2\operatorname{ctg} x$. Оmb. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
18. $\sin(\frac{3}{2}\pi - x) + 2\cos(2\pi - x) = 3$. Оmb. $x \in \emptyset$.
19. $\sin(x - 90^\circ) + \sin(x - 180^\circ) = 0$. Оmb. $-\frac{\pi}{4} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
20. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$. Оmb. $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
21. $\sin(x + 90^\circ) + \operatorname{ctg}(360^\circ - x) = 0$. Оmb. $\frac{\pi}{2} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
22. $1 + \sin^2 2x = 4\sin^2 x$. Оmb. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} (n \in \mathbb{Z})$.
23. $\cos 2x = \cos x$. Оmb. $2\pi n, \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
24. $\cos 2x = \cos x - \sin x$. Оmb. $\frac{\pi}{4} + \pi n, 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
25. $\cos 2x = \cos x + \sin x$. Оmb. $-\frac{\pi}{4} + \pi n, 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
26. $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$. Оmb. $\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
27. $\cos 3x = 4\cos^2 x$. Оmb. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
28. $\sin x + \cos x = 1\frac{1}{4}$. Оmb. $2\pi n + 2\arctg \frac{4 \pm \sqrt{7}}{9} (n \in \mathbb{Z})$.
29. $4\sin x + 3\cos x = 2$. Оmb. $2\pi n + 2\arctg \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5} (n \in \mathbb{Z})$.
30. $\sin 3x = 2\sin x$. Оmb. $\pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n (n \in \mathbb{Z})$.
31. $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$. Оmb. $2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
32. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$. Оmb. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n (n \in \mathbb{Z})$.
33. $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x = 2$. Оmb. $\frac{\pi n}{4} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{24} (n \in \mathbb{Z})$.

94. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$. Omб. $\frac{\pi n}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
95. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$. Omб. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
96. $\sin^2 x \cos x + \cos^3 x \sin x = \frac{1}{4}$. Omб. $(-1)^n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
97. $\operatorname{tg}(2x-1) \cdot \operatorname{tg}(3x+1) = 1$. Omб. $\frac{\pi}{10}(2n+1)$ ($n \in \mathbb{Z}$).
98. $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3}$. Omб. $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
99. $\sin^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$. Omб. $\frac{\pi}{4}(4n-1) \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
100. $8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \sec x$. Omб. $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
101. $\frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{1 + \cos x} = \sec^2 \frac{x}{2} - 1$. Omб. $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
102. $2[1 - \sin(\frac{3\pi}{2} - x)] = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2}$. Omб. $\pi(2m), (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
103. $\sin x - \cos x - 4 \cos^2 x \sin x = 4 \sin^3 x$. Omб. $\pi n - \arctg \frac{1}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
104. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$. Omб. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
105. $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sec x - \cos x}{2 \sin x}$. Omб. $\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
106. $\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}} = 2 \sin \frac{x}{2}$. Omб. $\pm \frac{4}{3}\pi + 4\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
107. $\sin^3 x (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x (1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x$. Omб. $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
108. $\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = 0,375$. Omб. $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
109. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$. Omб. $\frac{\pi n}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
110. $1 + \sin x + \cos x = 2 \cos(\frac{x}{2} - 45^\circ)$. Omб. $-90^\circ + 360^\circ n, 90^\circ + 720^\circ n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
111. $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos(\frac{\pi}{2} + x)$. Omб. $\frac{\pi}{2}n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
112. $(\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin(\frac{\pi}{4} + x) \sin(\frac{\pi}{4} - x)$. Omб. $2\pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
113. $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$. Omб. $\frac{\pi}{12} + \pi n, \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{6}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
114. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{6}$. Omб. $\pm \arcsin \sqrt{\frac{3}{4}}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
115. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$. Omб. $(-1)^n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

116. $\sin 3x = \cos x - \sin x$. Omv. $\frac{\pi}{2} + \pi n, (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$
117. $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$. Omv. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
118. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$. Omv. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
119. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sec x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos \sec x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = -3$.
Omv. $\pm \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
120. $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$. Omv. $\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
121. $4\sin^2 x + 4\sin^2 x - 3\sin x = 3$. Omv. $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, 2\pi n - \frac{\pi}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
122. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$. Omv. $\frac{\pi}{2} + \pi n,$
 $2\pi n \pm \frac{2}{3}\pi, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
123. $2\sin x + 2\cos x = 1$. Omv. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n - 2\arctg \frac{1}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
124. $\sin x + \cos x = \cos \sec x$. Omv. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
125. $8\sin^2 x + 6\cos^2 x = 13\sin 2x$. Omv. $\arctg 3 + \pi n, \arctg \frac{1}{3} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
126. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$. Omv. $2\pi n, \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
127. $\sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\sin 2x = 1$. Omv. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
128. $\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 1$. Omv. $\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
129. $5\cos 2x = 4\sin x$. Omv. $(-1)^n \arcsin \frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
130. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.
Omv. $\pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
131. $1 - \sin 5x = (\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2})^2$. Omv. $\pi n, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
132. $(1 + \cos 4x)\sin 4x = \cos^2 2x$. Omv. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4}$
($n \in \mathbb{Z}$).
133. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$. Omv. $\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n$.
134. $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$. Omv. $\frac{\pi n}{4}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
135. $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$. Omv. $\frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
136. $2\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$. Omv. $\pm \arccos \frac{\sqrt{13}-2}{5} + 2\pi n$
($n \in \mathbb{Z}$).

137. $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x) + \operatorname{tg} x - 2 = 0$. Омб. $\arctg(2+13)$
($n \in \mathbb{Z}$).
138. $1 - \cos(\pi - x) + \sin \frac{\pi + x}{2} = 0$. Омб. $\pi(2n+1)$, $\frac{4\pi n}{3} \pm \frac{4\pi}{3}$
($n \in \mathbb{Z}$).
139. $2 \operatorname{ctg}(x - \pi) - (\cos x + \sin x) \cdot (\operatorname{cosec} x - \sec x) = 4$.
Омб. $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
140. $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + x) = \sec(x) - \cos(2\pi - x)$.
Омб. πn ($n \in \mathbb{Z}$).
141. $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$. Омб. $\pi n - \frac{\pi}{4}$, $2\pi n$, $2\pi n - \frac{\pi}{2}$
($n \in \mathbb{Z}$).
142. $1 - 3 \cos x + \cos 2x = \frac{\operatorname{cosec}(\pi - x)}{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x}$. Омб. $2\pi n \pm \frac{\pi}{3}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
143. $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2 \sin^2 x$. Омб. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, $2\pi n$,
 $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$).
144. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$. Омб. $\pi n - \frac{\pi}{4}$, πn ($n \in \mathbb{Z}$).
145. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4 \cos^2 x} = \sin(x + 30^\circ) \sin(x - 30^\circ)$. Омб. $180^\circ n \pm 30^\circ$
($n \in \mathbb{Z}$).
146. $2\sqrt{2} \sin(45^\circ + x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin x}$. Омб. $2\pi n$, $2\pi n + 2 \arctg 2$
($n \in \mathbb{Z}$).
147. $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$. Омб. πn , $\pi n \pm \frac{\pi}{6}$ ($n \in \mathbb{Z}$).
148. $\sec x + 1 = \sin(\pi - x) - \cos x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi + x}{2}$. Омб. $\pi(2n+1)$,
 $\frac{\pi}{4}(4n+1)$ ($n \in \mathbb{Z}$).
149. $(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2 = \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x+\pi}{2}}$. Омб. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$
($n \in \mathbb{Z}$).
150. $[\cos x - \sin(x - \pi)]^2 + 1 = \frac{2 \sin^2 x}{\sec^2 x - 1}$. Омб. $\pi n - \frac{\pi}{4}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М.И. Абрамович, И.Т. Стародубцев "Математика", М., "Высшая школа", 1976.
2. А.Г. Мордкович "Алгебра и начала анализа", М., "Высшая школа", 1979.
3. А.Н. Колмогоров и др. "Алгебра и начала анализа", М., "Просвещение", 1976.
4. Б.С. Кочетков, Е.С. Кочеткова "Алгебра и элементарные функции", М., "Просвещение", 1966.
5. Р.А. Калнин "Алгебра и элементарные функции" М., "Наука", 1964.
6. С.Н. Новосёлов, "Тригонометрия", М., "Учпедгиз", 1956.
7. Н.В. Стратилатов "Сборник задач по тригонометрии", М., "Учпедгиз", 1957.
8. Н.Рыбкин "Сборник задач по тригонометрии", М., "Учпедгиз", 1950.
9. Н.П. Антонова, М.Я. Выгодский и др. "Сборник задач по элементарной математике", М., "Поскыздат технико-теоретической литературы", 1956.
10. В.С. Куценко "Сборник конкурсных задач по математике с решениями", Ленинград, "Судостроение", 1964.

Офсетный участок КуАИ
Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.

Тираж 1000 Заказ № 17 Бесплатно