МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

КУЙБЫШЕВ 1979

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

КУЙБЫШЕВ 1979
(1996)

УДК 518.12

Методические указания «Численные методы высшей математики» составлены на основе разделов высшей математики «Определенный интеграл», «Дифференциальные уравнения», «Ряды», «Математическая статистика». В работе приведены типовые примеры, подробно рассмотрено их решение.

Методические указания предназначены для студентов Куйбышевского авиационного института.

Составители: *Е. А. Вакулич, О. Ф. Меньших, Ю. Л. Файницкий*

Ответственный редактор — д. т. н. *Шафеев М. Н.*

Утверждены редакционно-издательским советом института 17.11.78 г.

Расчетно-графическая работа № 1

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вычислить по формулам парабол и трапеций определенный интеграл

$$\int\limits_{0,2}^{1,815} \sqrt{1 + x^2 + x^4}\, dx.$$

Оценить точность результата.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Округляя пределы интегрирования, разбить отрезок [0,2; 1,815] на части:

$$\int\limits_{0,2}^{1,815} \sqrt{1 + x^2 + x^4}\, dx = \int\limits_{0,2}^{1,8} \sqrt{1 + x^2 + x^4}\, dx + \int\limits_{1,8}^{1,815} \sqrt{1 + x^2 + x^4}\, dx.$$

Первый из полученных интегралов вычислить по формуле парабол

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{3\cdot 2n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}),$$

второй — по формуле трапеций

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n).$$

Таблица 1

Приближенное вычисление определенного интеграла по формуле парабол

Номера точек	x	x^2	x^4	$1+x^2+x^4$	$y=\sqrt{1+x^2+x^4}$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	k	k'	yk	yk'
0	0,2	0,04	0,0016	1,0416	1,0206	273				1	1	1,0206	1,0206
1	0,3	0,09	0,0081	1,0981	1,0479	409	136	23		4	0	4,1916	
2	0,4	0,16	0,0256	1,1856	1,0888	568	159	22	−1	2	4	2,1776	4,3552
3	0,5	0,25	0,0625	1,3125	1,1456	749	181	18	−4	4	0	4,5824	
4	0,6	0,36	0,1296	1,4896	1,2205	948	199	16	−2	2	2	2,4410	2,4410
5	0,7	0,49	0,2401	1,7301	1,3153	1163	215	9	−7	4	0	5,2612	
6	0,8	0,64	0,4096	2,0496	1,4316	1327	224	7	−2	2	4	2,8632	5,7264
7	0,9	0,81	0,6561	2,4661	1,5703	1618	231	−2	−9	4	0	6,2812	
8	1,0	1,00	1,0000	3,0000	1,7321	1847	229	1	3	2	2	3,4642	3,4642
9	1,1	1,21	1,4641	3,6741	1,9168	2077	230	−2	−3	4	0	7,6672	
10	1,2	1,44	2,0736	4,5136	2,1245	2305	228	−3	−1	2	4	4,2490	8,4980
11	1,3	1,69	2,8561	5,5461	2,3550	2530	225	−4	−1	4	0	9,4200	
12	1,4	1,96	3,8416	6,5016	2,6080	2761	221	−1	3	2	2	5,2160	2,6080
13	1,5	2,25	5,0625	8,3125	2,8831	2971	220	−3	−2	4	0	11,5324	
14	1,6	2,56	6,5536	10,1136	3,1802	3188	217	8	11	2	4	6,3604	12,7208
15	1,7	2,89	8,3521	12,2421	3,4990	3413	225			4	0	13,9960	
16	1,8	3,24	13,0321	14,7376	3,8403					1	1	3,8403	3,8403
										$S_{2n}=94{,}5643$			$S_n=47{,}2825$

2. Для вычисления интеграла

$$\int\limits_{0,2}^{1,8} \sqrt{1+x^2+x^4}\,dx.$$

принять $n = 8$, $a = 0{,}2$, $b = 1{,}8$.

Отрезок $[0{,}2;\ 1{,}8]$ разбить на части $2n = 16$ частей.

Заполнить табл. 1.

Вычислить:

$S_{2n} = \Sigma\, yk = 94{,}5643$;

$S_n = \Sigma\, yk' = 47{,}2825$;

$I_{2n} = \dfrac{\Sigma\, yk}{3\cdot 2n}(b-a) = 3{,}1521$;

$I_n = \dfrac{\Sigma\, yk'}{3n}(b-a) = 3{,}1522.$

3. Учитывая, что I_{2n} и I_n совпадают с точностью до 0,001 и у I_{2n} точных знаков на один больше, чем число совпадающих знаков у I_n и I_{2n}, принять

$$\int\limits_{0,2}^{1,8} \sqrt{1+x^2+x^4}\,dx \approx 3{,}1521$$

с точностью $\Delta_1 \leqslant 0{,}0001$ (в предположении, что значения подынтегральной функции определены точно).

Учесть, что значения y вычислялись с точностью до $\varepsilon = 0{,}0001$, и найти связанную с этим погрешность вычисления I_{2n}:

$\Delta_2 \leqslant (b-a)\,\varepsilon = 1{,}6\cdot 0{,}0001 = 0{,}00016.$

Определить суммарную погрешность вычисления интеграла I_{2n}:

$\Delta I_{2n} = \Delta_1 + \Delta_2 \leqslant 0{,}0001 + 0{,}00016 = 0{,}00026.$

4. Для отыскания интеграла

$$\int\limits_{1,8}^{1,815} \sqrt{1+x^2+x^4}\,dx$$

принять $n = 2$ и заполнить табл. 2.

Найти шаг таблицы

$h = \dfrac{1{,}815-1{,}8}{2} = \dfrac{0{,}015}{2} = 0{,}0075,$

вычислить

$\Sigma\, yk = 15{,}4571$

и интеграл

$$\int_{1,8}^{1,815} \sqrt{1 + x^2 + x^4}\, dx \approx \frac{0{,}0075}{2} \cdot 15{,}4571 = 0{,}0575.$$

Таблица 2

Вычисление определенного интеграла ***по формуле трапеций***

Номера точек	x	x^2	x^4	$1+x^2+x^4$	$y = \sqrt{1+x^2+x^4}$	Δ	Δ^2	k	yk
0	1,8	3,24	10,4976	14,7376	3,8389			1	3,8389
1	1,8075	3,2652	10,6602	14,9254	3,8633	244		2	7,7266
2	1,815	3,2942	10,8504	15,1446	3,8916	283	39	1	3,8916

5. Определить погрешность вычисления последнего интеграла

$\Delta I = 2h^3 = 2 \cdot 0{,}0075^3 = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$.

Из сравнения с ΔI_{2h} $(0{,}8 \cdot 10^{-6} \ll 0{,}00016)$ следует, что ею можно пренебречь (табл. 2).

6. Вычислить заданный интеграл

$$\int_{0,2}^{1,815} \sqrt{1 + x^2 + x^4}\, dx = 3{,}1521 + 0{,}0575 = 3{,}2096$$

и указать точность вычисления:

$\Delta \leqslant 0{,}00026 < 0{,}0003.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М., «Наука», 1966.

Расчетно-графическая работа № 2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методом Эйлера решить дифференциальное уравнение

$y' = y \sin x - y^2$

при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке $[0{,}1]$ с шагом $\Delta x = 0{,}1$.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Считая $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ и учитывая соотношения

$x_{i+1} = x_i + \Delta x;$

$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\,\Delta x, \ (i = 0, 1, ..., 9),$

где $f(x, y) = y \sin x - y^2$,

заполнить табл. 3.

2. Если вычисления проводятся с помощью клавишной вычислительной машины «Искра-121», использовать программу, приведенную на рис. 1. Расчетную таблицу в этом случае следует сократить (табл. 4).

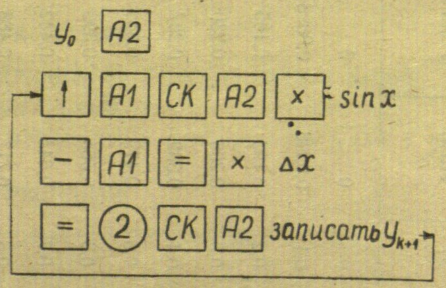

Рис. 1. **Программа решения дифференциального уравнения методом Эйлера**

Таблица 3

Решение дифференциального уравнения методом Эйлера

i	x_i	$\sin x_i$	$y_i \sin x_i$	$-y_i^2$	$y_i' = y_i \sin x_i - y_i^2$	$\Delta y_i = y_i' \Delta x$	$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$
0	0	0	0	—1	—1	—0,1	1
1	0,1	0,0998	0,0898	—0,81	—0,72	—0,072	0,9
2	0,2	0,199	0,165	—0,686	—0,521	—0,052	0,828
3	0,3	0,296	0,230	—0,602	—0,372	—0,037	0,776
4	0,4	0,389	0,287	—0,546	—0,259	—0,026	0,739
5	0,5	0,479	0,342	—0,508	—0,166	—0,017	0,713
6	0,6	0,565	0,393	—0,484	—0,091	—0,009	0,696
7	0,7	0,644	0,442	—0,472	—0,070	—0,007	0,687
8	0,8	0,717	0,488	—0,462	0,026	—0,003	0,680
9	0,9	0,783	0,535	—0,466	0,069	—0,007	0,683
10	1,0	0,841					0,690

Таблица 4

Решение дифференциального уравнения с помощью клавишной вычислительной машины

x	$\sin x$	y
0	0	1,00000
0,1	0,09985	0,90000
0,2	0,19867	0,82799
0,3	0,29552	0,77588
0,4	0,38942	0,73861
0,5	0,47943	0,71282
0,6	0,56464	0,69618
0,7	0,64422	0,68702
0,8	0,71736	0,68408
0,9	0,78333	0,68636
1,0		0,69301

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. М., Физматгиз, 1963.

Расчетно-графическая работа № 3

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Найти приближенное решение задачи Коши

$y' = x^3 + 2y^2; \ y|_{x=1} = 0,$

взяв 5 членов разложения решения $y = y(x)$ в ряд Тейлора.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Искомое решение представить в виде

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{y^{\mathrm{IV}}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

2. Определить коэффициенты $y'(1)$, $y''(1)$, $y'''(1)$, $y^{IV}(1)$:

$y' = x^3 + 2y^2;$

$y'' = 3x^2 + 4yy';$

$y''' = 6x + 4yy'' + 4(y')^2;$

$y^{IV} = 6 + 4yy''' + 4y'y'' + 8y'y'' = 6 + 4yy''' + 12y'y'';$

$y'(1) = 1;$

$y''(1) = 3;$

$y'''(1) = 6 + 4\cdot 1 = 10;$

$y^{IV}(1) = 6 + 12\cdot 1\cdot 3 = 42.$

3. Записать приближенное решение:

$$y = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{3}(x-1)^3 + \frac{7}{4}(x-1)^4.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петровский И. Г.* «Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.» М., Наука, 1961.

2. *Копченова Н. В., Марон И. А.* «Вычислительная математика в примерах и задачах». М., Наука, 1972.

3. *Пискунов Н. С.* «Дифференциальное и интегральное исчисление», т. 2, М., Наука, 1970.

Расчетно-графическая работа № 4

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности найти решение уравнения

$y' = f(x, y)$

при начальном условии

$y|_{x=x_0} = y_0$

на отрезке $[x_0, x_1]$ с шагом h,

где

$f(x, y) = x + y;\ x_0 = 0;\ x_1 = 0{,}5;\ y_0 = 1;\ h = 0{,}1.$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Задачу решать по формуле

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{3!}(p_{1,k} + 2p_{2,k} + 2p_{3,k} + p_{4,k}),$$

где

$p_{1,k} = hf(x_k, y_k);$

$p_{2,k} = hf\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{p_{1,k}}{2}\right);$

$p_{3,k} = hf\left(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{p_{2,k}}{2}\right);$

$p_{4,k} = hf(x_k + h,\ y_k + p_{3,k});$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ n = x_1/h.$

2. Вычисления начать с $k = 0$:

$p_{1,0} = (0 + 1)\cdot 0{,}1 = 0{,}1;$

$p_{2,0} = \left[0{,}05 + \left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)\right]\cdot 0{,}1 = 0{,}11;$

$p_{3,0} = \left[0{,}05 + \left(1 + \frac{0{,}11}{2}\right)\right]\cdot 0{,}1 = 0{,}1105;$

$p_{4,0} = [0{,}1 + (1 + 0{,}1105)]\cdot 0{,}1 = 0{,}12105.$

Отсюда

$p_0 = \frac{1}{6}(p_{1,0} + 2p_{2,0} + 2p_{3,0} + p_{4,0})\frac{1}{6}\cdot 0{,}6620 = 0{,}1103;$

$y_1 = y_0 + p_0 = 1 + 0{,}1103 = 1{,}1103.$

3. Аналогично вычислить дальнейшие приближения, заполняя табл. 5 и вычисляя на каждом шаге приращения:

$p_1 = \frac{1}{6}(0{,}1210 + 0{,}2624 + 0{,}2652 + 0{,}1443) = 0{,}1324;$

$p_2 = \frac{1}{6}0{,}9415 = 0{,}1569;$

$p_3 = \frac{1}{6}1{,}1034 = 0{,}1840;$

$p_4 = \frac{1}{6}1{,}2828 = 0{,}2138.$

Таблица 5

Решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта

k	x_k	y_k	p_{ik}	r	$r\,p_{ik}$
0	0	1	0,1	1	0,1000
	0,05	1,05	0,11	2	0,2200
	0,05	1,055	0,1105	2	0,2210
	0,1	1,1105	0,1210	1	0,1210
1	0,1	1,1103	0,1210	1	0,1210
	0,15	1,1708	0,1321	2	0,2624
	0,15	1,1763	0,1326	2	0,2652
	0,2	1,2429	0,1446	1	0,1443
2	0,2	1,2427	0,1443	1	0,1443
	0,25	1,3149	0,1565	2	0,3130
	0,25	1,3209	0,1571	2	0,3142
	0,3	1,3998	0,1700	1	0,1700
3	0,3	1,3996	0,1700	1	0,1700
	0,35	1,4846	0,1835	2	0,3670
	0,35	1,4904	0,1840	2	0,3680
	0,4	1,5836	0,1984	1	0,1984
4	0,4	1,5838	0,1984	1	0,1984
	0,45	1,6828	0,2133	2	0,4266
	0,45	1,6902	0,2140	2	0,4280
	0,5	1,7976	0,2298	1	0,2298
5	0,5	1,7974			

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. М., ГИФМЛ, 1962.

2. *Трошин Г. Д., Шатунов М. П., Шафеев М. Н.* Практикум по вычислительной математике. КуАИ, 1967.

Расчетно-графическая работа № 5

ПРАКТИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Функция $y = f(x)$ задана табл. 6. Аппроксимировать ее тригонометрическим многочленом

$$y \approx a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x.$$

Таблица 6

Заданная функция

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0	—7200	9	$3\pi/4$	—2650	18	$3\pi/2$	7600
1	$\pi/12$	—4150	10	$5\pi/6$	—5200	19	$19\pi/12$	6800
2	$\pi/6$	—300	11	$11\pi/12$	—7700	20	$5\pi/3$	4500
3	$\pi/4$	3250	12	π	—7400	21	$21\pi/12$	2300
4	$\pi/3$	7000	13	$13\pi/12$	—4850	22	$11\pi/6$	250
5	$5\pi/12$	7450	14	$7\pi/6$	—2250	23	$23\pi/12$	—5150
6	$\pi/2$	4300	15	$5\pi/4$	650	24	2π	—7200
7	$7\pi/12$	2750	16	$4\pi/3$	3850		—	—
8	$2\pi/3$	0	17	$17\pi/12$	6400		—	—

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Составить расчетную схему. С этой целью:

а) расположить значения функции в указанном порядке в две строки, над каждой парой подписанных одно под другим значений произвести операции сложения и вычитания, результаты сложений поместить в третью строку, вычитаний — в четвертую:

$y_0 \div y_{12}$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
$y_{13} \div y_{23}$		y_{23}	y_{22}	y_{21}	y_{20}	y_{19}	y_{18}	y_{17}	y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}	
$u_0 \div u_{12}$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$v_1 \div v_{11}$		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	

б) повторить операции для полученных сумм

$u_0 \div u_6$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
$u_7 \div u_{12}$	u_{12}	u_{11}	u_{10}	u_9	u_8	u_7	
$p_0 \div p_6$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$q_0 \div q_5$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	

и разностей

$v_1 \div v_6$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$v_7 \div v_{11}$	v_{11}	v_{10}	v_9	v_8	v_7	
$r_1 \div r_6$	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
$s_1 \div s_5$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	

при этом новые суммы опять поместить в третьи строки, а разности в четвертые;

в) повторить операции над суммами, обозначенными «p_i» и разностями «s_i»; в первом случае новые суммы поместить в третью строку, разности — в четвертую, во втором случае найти только суммы:

$p_0 \div p_3$	p_0	p_1	p_2	p_3
$p_4 \div p_6$	p_6	p_5	p_4	
$k_0 \div k_3$	k_0	k_1	k_2	k_3
$l_0 \div l_2$	l_0	l_1	l_2	

$s_1 \div s_3$	s_1	s_2	s_3
s_4, s_5	s_5	s_4	
$m_1 \div m_3$	m_1	m_2	m_3

Рассмотрим пример:

$y_0 \div y_{12}$	—7200	—4150	—300	3250	7000	7450	4300	2750	0	—2650	—5200	—7700	—7400
$y_{13} \div y_{23}$		—5150	250	2300	4500	6800	7600	6400	3850	650	—2250	—4850	
$u_0 \div u_{12}$	—7200	—9300	—50	5550	11500	14250	11900	9150	3850	—2000	—7450	—12550	—7400
$v_1 \div v_{11}$		1000	—550	950	2500	650	—3300	—3650	—3850	—3300	—2950	—2850	

$u_0 \div u_6$	—7200	—9300	—50	5550	11500	14250	11900
$u_7 \div u_{12}$	—7400	—12550	—7450	—2000	3850	9150	
$p_0 \div p_6$	—14600	—21850	—7500	3550	15350	23400	11900
$q_0 \div q_5$	200	3250	7400	7550	7650	5100	

$v_1 \div v_6$	1000	—550	950	2500	650	—3300
$v_7 \div v_{11}$	—2850	—2950	—3300	—3850	—3650	
$r_1 \div r_6$	—1850	—3500	—2350	—1350	—3000	—3300
$s_1 \div s_5$	3850	2400	4250	6350	4300	

$p_0 \div p_3$	—14600	—21850	—7500	3550
$p_4 \div p_6$	11900	23400	15350	
$k_0 \div k_3$	—2700	1550	7850	3550
$l_0 \div l_2$	—26500	—45250	—22850	

$s_1 \div s_3$	3850	2400	4250
s_4, s_5	4300	6350	
$m_1 \div m_3$	8150	8750	4250

2. Вычислить коэффициенты по формулам:

$24\,a_0 = k_0 + k_1 + k_2 + k_3;$

$12\,a_1 = q_0 + 0{,}9659\,q_1 + 0{,}8660\,q_2 + 0{,}7071\,q_3 + 0{,}5\,q_4 + 0{,}2588\,q_5;$

$12 b_1 = 0{,}2588\,r_1 + 0{,}5\,r_2 + 0{,}7071\,r_3 + 0{,}8660\,r_4 + 0{,}9659\,r_5 + r_6;$

$12\,a_2 = l_0 + 0{,}8660\,l_1 + 0{,}5\,l_2;$

$12\,b_2 = 0{,}5\,m_1 + 0{,}8660\,m_2 + m_3$

или

$24\,a_0 = -2700 + 1550 + 7850 + 3550;$

$12\,a_1 = 200 + 0{,}9659 \cdot 3250 + 0{,}8660 \cdot 7400 + 0{,}7071 \cdot 7550 +$
$+ 0{,}5 \cdot 7650 + 0{,}2588 \cdot 5100;$

$12\,b_1 = 0{,}2588 \cdot (-1850) + 0{,}5 \cdot (-3500) + 0{,}7071 \cdot (-2350) +$
$+ 0{,}8660 \cdot (-1350) + 0{,}9659 \cdot (-3000) + (-3300);$

$12\,a_2 = -26500 + 0{,}8660 \cdot (-45250) + 0{,}5 \cdot (-22850);$

$12\,b_2 = 0{,}5 \cdot 8150 + 0{,}8660 \cdot 8750 + 4250,$

т. е. $a_0 = 427;$ $a_1 = 1685;$ $a_2 = -6426;$

$b_1 = -938;$ $b_2 = 1325.$

3. Записать искомый тригонометрический многочлен:

$y \approx 427 + 1685 \cos x - 938 \sin x - 6426 \cos 2x + 1325 \sin 2x.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. М., Физматгиз, 1963.

Расчетно-графическая работа № 6

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методом конечных разностей найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$u|_{x=0} = \varphi_1(t), \ (0 \leqslant t \leqslant T);$

$u|_{x=L} = \varphi_2(t);$

$u|_{t=0} = f(x),$

где

$a^2 = 0{,}001;\ \varphi_1(t) = 0{,}01\,t^2;\ \varphi_2(t) = 0;\ f(x) = 0;\ T = 50.$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Разбить отрезок $[0, L]$ на n частей (рис. 2) и ввести обозначения:

$h = \frac{L}{n};$

$x_i = ih, \ (i = 0, 1, 2, ..., n),$

где $n = 10;\ h = 0{,}1.$

Вычислить шаг по времени

$$l = \frac{h^2}{2a^2} = \frac{0{,}1^2}{2 \cdot 0{,}001} = 5$$

и обозначить

$t_k = kl;\ u(x_i, t_k) = u_{ik}.$

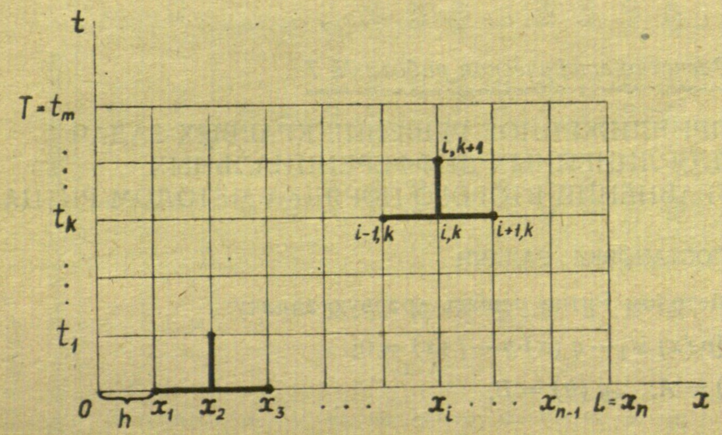

Рис. 2. Схема расположения расчетных точек

2. Составить расчетную таблицу (табл. 7).

В первом ее столбце записать значения функции $u|_{x=0} = 0{,}01\,t^2$, в последнем — $u|_{x=1} = 0$. В первую строку занести числа $u|_{t=0} = 0$.

3. Остальные значения находить по формуле

$$u_{i,\,k+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,\,k} + u_{i+1,\,k}),$$

т. е.

$$u_{1,1} = \frac{1}{2}(u_{0,0} + u_{2,0}) = \frac{0+0}{2} = 0$$

и т. д.

Заполнив таким образом строку, соответствующую $k = 1$, перейти к следующей:

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}(u_{0,1} + u_{2,1}) = \frac{0{,}25+0}{2} = 0{,}12$$

и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. М., Физматгиз, 1963.

2. *Копченова Н. В., Марон И. А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. М., «Наука», 1972.

Расчетно-графическая работа № 7

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ РИТЦА

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Методом Ритца решить краевую задачу:

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y'] - q(x)\cdot y - f(x) = 0;$$

$$y(a) = A; \quad y(b) = B,$$

где

$p(x) = 1$; $q(x) = 1$; $f(x) = 0$; $a = 0$; $A = 0$; $b = 1$; $B = 1$.

Таблица 7

Решение уравнения теплопроводности

k	i / t_k \ x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5	0,25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	10	1,00	0,12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	15	2,25	0,50	0,06	0	0	0	0	0	0	0	0
4	20	4,00	1,16	0,25	0,03	0	0	0	0	0	0	0
5	25	6,25	2,12	0,60	0,12	0,02	0	0	0	0	0	0
6	30	9,00	3,42	1,12	0,31	0,06	0,01	0	0	0	0	0
7	35	12,25	5,06	1,86	0,54	0,16	0,03	0,01	0	0	0	0
8	40	16,00	7,05	2,80	1.01	0,29	0,08	0,02	0,01	0	0	0
9	45	20,25	9,40	4,03	1,54	0,55	0,15	0,04	0,01	0,01	0	0
10	50	25,00	12,14	5,47	2,29	0,85	0,24	0,08	0,03	0,01	0,01	0

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. Краевую задачу заменить эквивалентной ей вариационной: найти экстремум функционала

$$I[y(x)] = \int_a^b [p(x)(y')^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y]\,dx;$$

$$y(a) = A,\ y(b) = B$$

или

$$I[y(x)] = \int_0^1 [(y')^2 + y^2]\,dx; \qquad (1)$$

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 1.$$

2. Искомую функцию представить в виде

$$y = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x),$$

где

$$\varphi_0(x) = x;\ \varphi_k(x) = x^k(1-x);\ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Построить первое приближение ($n = 1$):

$$y_1 = x + c_1 x(1-x)$$

и, подставляя это выражение в уравнение (1), найти функционал

$$I = \frac{11}{30}c^2 + \frac{1}{6}c + \frac{4}{3}.$$

Параметр $c = -\frac{5}{22}$ определить из условия $I'(c) = 0$. Записать первое приближение

$$y_1 = x - \frac{5}{22}x(1-x) = 0{,}7727\,x + 0{,}2273\,x^2.$$

4. Найти второе приближение

$$y_2 = x - c_1 x(1-x) + c_2 x^2 (1-x).$$

Подставить это выражение в уравнение (1) и вычислить значение функционала

$$I(c_1, c_2) = \frac{11}{30}c_1^2 + \frac{11}{30}c_1c_2 + \frac{1}{7}c_2^2 + \frac{1}{6}c_1 + \frac{1}{10}c_2 + \frac{4}{3}.$$

Приравнять к нулю частные производные

$$\frac{\partial I}{\partial c_1} = \frac{11}{15}c_1 + \frac{11}{30}c_2 + \frac{1}{6} = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_2} = \frac{11}{30}c_1 + \frac{2}{7}c_2 + \frac{1}{10} = 0$$

и решить полученную систему уравнений:

$$c_1 = -\frac{69}{473} = -0{,}1459;\ c_2 = -\frac{7}{43} = -0{,}1628.$$

Записать второе приближение:

$$y_2 = x - 0{,}1459\,x(1-x) - 0{,}1628x^2(1-x) =$$

$$= 0{,}8541\,x - 0{,}0169\,x^2 + 0{,}1628\,x^3$$

и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* «Приближенные методы высшего анализа». М., Физматгиз, 1962.
2. *Эльсгольц Л. Э.* «Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление». М., «Наука», 1965.
3. *Мышкис А. Д.* Математика. «Специальные курсы» (для втузов). М., «Наука», 1971.
4. *Краснов М. Л., Макаренко Г. М., Киселев А. И.* «Вариационное исчисление» (задачи и упражнения). М., «Наука», 1973.

Расчетно-графическая работа № 8

ПОСТРОЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ СРЕДНИХ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Случайная величина X, представляющая собой ошибку измерения некоторого расстояния, задана простой статистической совокупностью (табл. 8). Необходимо получить упорядоченный статистический ряд, построить гистограмму частостей, выровнять статистический закон теоретическим (нормальным), проверить соответствие выбора.

ПОРЯДОК РАБОТЫ

1. Определить размах вариационного ряда. Для этого выбрать наименьшее и наибольшее значения случайной величины:

$$x_{\min} = x_7 = 111, \quad x_{\max} = x_{25} = 296$$

Таблица 8

Вариационный ряд

№ измерения	Значения случайной величины	№ измерения	Значения случайной величины
1	161	36	235
2	181	37	182
3	163	38	203
4	263	39	193
5	185	40	219
6	221	41	183
7	111	42	230
8	187	43	170
9	121	44	210
10	239	45	189
11	267	46	229
12	127	47	138
13	210	48	201
14	188	49	159
15	211	50	237
16	238	51	190
17	208	52	228
18	165	53	173
19	202	54	204
20	209	55	191
21	241	56	227
22	248	57	170
23	169	58	225
24	216	59	218
25	296	60	178
26	219	61	243
27	218	62	195
28	271	63	205
29	217	64	199
30	254	65	184
31	227	66	222
32	255	67	224
33	215	68	206
34	258	69	211
35	229	70	164

и вычислить размах

$x_{max} - x_{min} = 185.$

2. Выбрать число разрядов $k = 10$.

3. Принять за интервал задания случайной величины такой промежуток, который включает x_{min}, x_{max} и достаточно близкие к ним границы и представляет удобные для расчетов значения:

$x_0 = 100$, $x_{10} = 300$.

4. Заполнить табл. 9. Для контроля расчета найти столбцовые суммы.

Таблица 9

Упорядоченный вариационный ряд

Номер разряда i	Граница разряда $x_{i-1} \div x_i$	Среднее значение разряда $\bar{x}_i$	Численность (частота) разряда m_i	Частость разряда $W_i = \frac{m_i}{n}$	Высота i-го прямоугольника гистограммы $h_i = \frac{W_i}{\Delta x}$
1	100—120	110	1	0,0143	0,000715
2	120—140	130	3	0,0429	0,002145
3	140—160	150	1	0,0143	0,000715
4	160—180	170	9	0,1285	0,006425
5	180—200	190	13	0,1857	0,009285
6	200—220	210	19	0,2714	0,013570
7	220—240	230	14	0,2000	0,010000
8	240—260	250	6	0,0857	0,004285
9	260—280	270	3	0,0429	0,002145
10	280—300	290	1	0,0143	0,000715
—	—	—	$\sum_{i=1}^{10} m_i = 70$	$\sum_{i=1}^{10} W_i = 1$	$\Delta x \sum_{i=1}^{10} h_i = 1$

5. По результатам, полученным в табл. 9, построить гистограмму. Для этого в прямоугольной системе координат на оси абсцисс отложить значения границ интервалов разбиения и на каждом из интервалов с номером i построить прямоугольник, высота которого равна h_i (рис. 3).

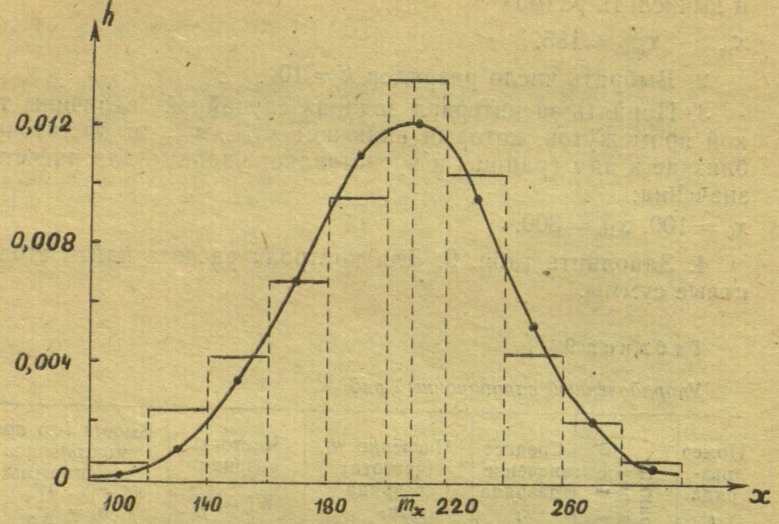

Рис. 3. Гистограмма

6. Используя данные табл. 9, вычислить оценки математического ожидания и дисперсии (табл. 10):

Таблица 10

Выравнивание статистического закона распределения

i	$\bar{x}_i$	m_i	$\bar{x}_i m_i$	$(\bar{x}_i-\bar{m}_x)^2 m_i$	$t=\frac{\bar{x}_i-\bar{m}_x}{\bar{\sigma}_x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$	$f(\bar{x}_i)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$
1	110	1	110	9325,8	—2,918	0,0056	0,000169
2	130	3	390	17588,9	—2,314	0,0274	0,000830
3	150	1	150	3200,0	—1,709	0,0926	0,002794
4	170	9	1530	12036,2	—1,105	0,2167	0,006543
5	190	13	2470	3569,3	—0,501	0,3519	0,010637
6	210	19	3990	223,4	0,102	0,3969	0,011993
7	230	14	3220	328,0	0,706	0,3109	0,009365
8	250	6	1500	11316,9	1,311	0,1689	0,005178
9	270	3	810	12070,1	1,915	0,0638	0,001933
10	290	1	290	6960,6	2,519	0,0167	0,000504

$$\bar{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} \bar{x}_i m_i = \frac{1446}{70} = 206,6;$$

$$\bar{D}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} (\bar{x}_i - \bar{m}_x)^2 m_i = 1095,6;$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\bar{D}_x} = 33,1.$$

7. Выровнять гистограмму теоретическим нормальным законом. Принимая $m = \bar{m}_x$, $D = \bar{D}_x$, записать плотность вероятности аппроксимирующего закона:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{33,1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-206,6)^2}{2\cdot 33,1^2}}.$$

Для иллюстрации эффективности подбора найти значения $f(x)$ по таблицам (например, [1], табл. 3) в точках $\bar{x}_i$ и нанести их на рис. 3. Результаты расчета занести в табл. 10.

8. С помощью критерия согласия χ^2 проверить согласованность статистического и выбранного теоретического распределений:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \approx 10,5,$$

где p_i — теоретические вероятности попадания случайной величины в соответствующие разряды, определяемые для выбранного теоретического закона (табл. 11).

При этом учесть, что для нормального закона

$$p_i = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_i - \bar{m}_x}{\bar{\sigma}_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{m}_x}{\bar{\sigma}_x}\right)\right],$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Далее определить число «степеней свободы»:
$r = k - 3 = 10 - 3 = 7$,
«3» — число связей, наложенных при выборе теоретической зависимости

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = 1;\ \bar{m}_x = m;\ \bar{D}_x = D.$$

По значениям χ^2 и r из таблицы (например, табл. 4 [1]) найти искомую вероятность. Если вероятность мала (практически меньше 0,1), гипотезу о выборе теоретического закона

Таблица 11

Вычисление критерия согласия

i	x_i	m_i	$\frac{x_i - \bar{m}_x}{\bar{\sigma}_x}$	$\Phi\left(\frac{x_i - \bar{m}_x}{\bar{\sigma}_x}\right)$	p_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
0	100		—3,22	—0,999			
1	120	1	—2,616	—0,992	0,0035	0,245	2,3265
2	140	3	—2,012	—0,966	0,013	0,91	4,8001
3	160	1	—1,407	—0,841	0,0625	4,375	2,6035
4	180	9	—0,803	—0,576	0,1325	9,275	0,0081
5	200	13	—0,199	—0,158	0,209	14,63	0,1816
6	220	19	0,404	0,311	0,2345	16,415	0,407
7	240	14	1,129	0,735	0,212	14,84	0,0475
8	260	6	1,613	0,894	0,0795	5,565	0,0339
9	280	3	2,217	0,973	0,0395	2,765	0,0199
10	300	1	2,82	0,995	0,011	0,77	0,0687

следует пересмотреть, если вероятность велика, принятую гипотезу можно считать не противоречащей экспериментальной информации.

Так как при $\chi = 10{,}5$, $r = 7$ имеем $p = 0{,}2$, то нормальный закон в этом случае может быть принят в качестве аппроксимирующего.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М., «Наука», 1973.
2. *Федорченко Г. П. Родионова И. П.* Сборник задач по теории вероятностей в авиационной технике. КуАИ, 1977.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители: *Юрий Львович Файницкий, Евгений Алексеевич Вакулич, Олег Федорович Меньших*

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания к расчетно-графическим работам

Редактор Э. Грязнова
Техн. редактор Н. Каленюк
Корректор Т. Полякова

Сдано в набор 4.04.79 г. Подписано в печать 11.05.79 г. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$. Бумага оберточная белая. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. п. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,32. Тираж 2000 экз. Заказ № 415. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С. П. Королева, г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Типография УЭЗ КуАИ, г. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.