

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

С.Н. Хонина

**Оптическая информатика.
Материалы для практических занятий.**

Электронные материалы для практических занятий

САМАРА
2011

Автор: **Хонина Светлана Николаевна**

Хонина, С. Н. Оптическая информатика. Материалы для практических занятий
[Электронный ресурс] : Электрон. материалы для практических занятий / С. Н. Хонина;
Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т). -
Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2011.

В материалах по практическим занятиям рассмотрены типовые задачи курса, включающие разделы: преобразование Фурье и его свойства, описание оптических систем, а также часто используемые в оптике функции и сигналы. Рассмотрены подробные решения приведенных задач и даны их интерпретации с точки зрения оптического преобразования изображений и сигналов.

Материал соответствует программе курса «Оптическая информатика» 010400.62
Прикладная математика и информатика (бакалавриат), 6 факультет, кафедра
технической кибернетики.

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2011

ОПТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА (практика)

Раздел: Преобразование Фурье и его свойства.

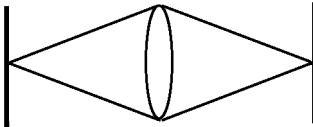
Рекомендации: см. книгу О.И. Смокий, В.А. Фабриков. «Методы теории систем и преобразований в оптике», стр.17-19, 53-56.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - координаты на входе и на выходе, соответственно.

При этом $\mathbf{x}\boldsymbol{\xi} = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_n\xi_n$.

Преобразованием Фурье называется оператор:

$$f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\boldsymbol{\xi}): F(\boldsymbol{\xi}) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) \exp(-i2\pi\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}) d^n \mathbf{x} \quad (1.1)$$

Физическая интерпретация: 

Обратное преобразованием Фурье:

$$F(\boldsymbol{\xi}) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(\mathbf{x}): f(\mathbf{x}) = \int_{R^n} F(\boldsymbol{\xi}) \exp(i2\pi\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}) d^n \boldsymbol{\xi} \quad (1.2)$$

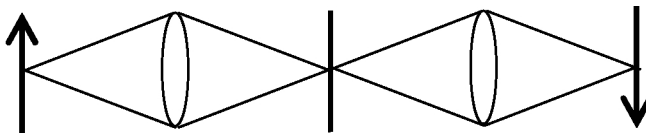
Свойства:

Симметрия: Преобразование Фурье от Фурье-образа дает зеркально перевернутую исходную функцию

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\boldsymbol{\xi}), \text{ то } F(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(-\boldsymbol{\xi}) \quad (1.3)$$

Доказательство

$$\int_{R^n} F(\mathbf{x}) \exp(-i2\pi\mathbf{x}\boldsymbol{\xi}) d^n \mathbf{x} = \int_{R^n} F(\mathbf{x}) \exp[i2\pi\mathbf{x}(-\boldsymbol{\xi})] d^n \mathbf{x} \stackrel{(1.2)}{=} f(-\boldsymbol{\xi})$$

Физическая интерпретация: 

$$\text{Инверсия: Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\boldsymbol{\xi}), \text{ то } f(-\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(-\boldsymbol{\xi}) \quad (1.4)$$

Доказательство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) \exp(-i2\pi x \xi) dx = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(y) \exp(i2\pi y \xi) dy \stackrel{(1.1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp(-i2\pi y(-\xi)) dy = F(-\xi)$$

Сопряжение: При сопряжении функции Фурье-образ становится сопряженным и зеркально перевернутым:

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\boldsymbol{\xi}), \text{ то } f^*(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F^*(-\boldsymbol{\xi}) \quad (1.5)$$

Доказательство

$$\int_{R^n} f^*(\mathbf{x}) \exp(-i2\pi \mathbf{x} \boldsymbol{\xi}) d^n \mathbf{x} = \left[\int_{R^n} f(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi \mathbf{x}(-\boldsymbol{\xi})] d^n \mathbf{x} \right]^* \stackrel{(1.1)}{=} F^*(-\boldsymbol{\xi})$$

Подобие: С увеличением масштаба аргументов функции, масштаб Фурье-образа уменьшается (a - вещественное):

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\boldsymbol{\xi}), \text{ то } f(a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} F\left(\frac{\xi_1}{a_1}, \frac{\xi_2}{a_2}, \dots, \frac{\xi_n}{a_n}\right) \quad (1.6)$$

Доказательство

$$\int_{R^n} f(ax) \exp(-i2\pi x \xi) dx = \int_{R^n} \stackrel{y=ax}{\frac{1}{a}} f(y) \exp\left[-i2\pi y \left(\frac{\xi}{a}\right)\right] dy \stackrel{(1.1)}{=} \frac{1}{a} F\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

Смещение: Сдвиг аргумента функции эквивалентен умножению Фурье-образа на экспоненту с линейной фазой:

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\boldsymbol{\xi}), \text{ то } f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\boldsymbol{\xi}) \exp(-i2\pi \boldsymbol{\xi} \mathbf{x}_0) \quad (1.7)$$

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\boldsymbol{\xi}), \text{ то } f(\mathbf{x}) \exp(i2\pi \boldsymbol{\xi}_0 \mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} F(-\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) \quad (1.8)$$

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\boldsymbol{\xi}), \text{ то } F(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} f(\mathbf{x}) \exp(i2\pi \boldsymbol{\xi}_0 \mathbf{x}) \quad (1.8')$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_{R^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \exp(-i2\pi \mathbf{x} \boldsymbol{\xi}) d\mathbf{x} &= \int_{R^n} \stackrel{y=\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{f(y)} \exp[-i2\pi (y + \mathbf{x}_0) \boldsymbol{\xi}] dy \\ &= \exp(-i2\pi \mathbf{x}_0 \boldsymbol{\xi}) \int_{R^n} f(y) \exp(-i2\pi y \boldsymbol{\xi}) dy \stackrel{(1.1)}{=} \exp(-i2\pi \mathbf{x}_0 \boldsymbol{\xi}) F(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned}$$

Факторизация: Если функция от n переменных равна произведению функций меньшего числа непересекающихся переменных, то ее Фурье-образ равен произведению соответствующих преобразований Фурье меньшей размерности:

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\boldsymbol{\xi}), \text{ то } f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F_1(\xi_1) \cdot F_2(\xi_2) \cdot \dots \cdot F_n(\xi_n) \quad (1.9)$$

Модуляция:

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{Z}} F(\xi), \text{ то } f(x) \cos(2\pi\xi_0 x) \xrightarrow{\mathfrak{Z}} \frac{1}{2}[F(\xi + \xi_0) + F(\xi - \xi_0)] \quad (1.10)$$

Доказательство

$$\text{С учетом } \cos(2\pi\xi_0 x) = \frac{1}{2}[\exp(i2\pi\xi_0 x) + \exp(-i2\pi\xi_0 x)]$$

Физическая интерпретация: Наложение решетки приводит к появлению двух порядков (удвоению изображения). Чем чаще решетка (меньше ее период), тем дальше расходятся порядки.

Доказать, что если на входе в Фурье-анализатор комплексная амплитуда $f(x)$ - действительная и четная, то комплексная амплитуда $F(\xi)$ на выходе анализатора также - действительная и четная.

Решение:

Вещественная: $f^*(x) = f(x)$, четная: $f(-x) = f(x)$

Вариант 1.

$$\begin{aligned} E(-\xi) &= \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(i \frac{k}{f} x \xi\right) dx \stackrel{x'=-x}{=} - \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x') \exp\left(-i \frac{k}{f} x' \xi\right) dx' \stackrel{f(-x)=f(x)}{=} \\ &= \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \exp\left(-i \frac{k}{f} x' \xi\right) dx' = E(\xi) \quad \text{- четная} \\ E^*(\xi) &= \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) \exp\left(i \frac{k}{f} x \xi\right) dx \stackrel{f^*(x)=f(x)}{=} \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(i \frac{k}{f} x \xi\right) dx = E(-\xi) \stackrel{\text{см. выше}}{=} E(\xi) \end{aligned}$$

Вариант 2.

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i \frac{k}{f} x \xi\right) dx = \sqrt{\frac{k}{f}} \int_0^{\infty} f(x) \exp\left(-i \frac{k}{f} x \xi\right) dx + \underbrace{\sqrt{\frac{k}{f}} \int_0^{\infty} f(x) \exp\left(i \frac{k}{f} x \xi\right) dx}_{x=-x} \\ &= 2 \sqrt{\frac{k}{f}} \int_0^{\infty} f(x) \cos\left(\frac{k}{f} x \xi\right) dx - \text{вещественная} \end{aligned}$$

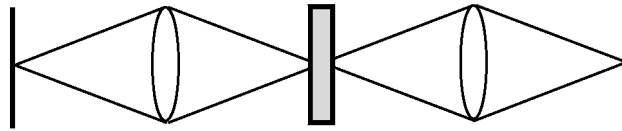
$$\text{Дифференцирование: Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{Z}} F(\xi), \text{ то } \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \xrightarrow{\mathfrak{Z}} i2\pi\xi_1 F(\xi) \quad (1.11)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d f(x)}{d x} \exp(-i2\pi x \xi) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi x \xi) d f(x) \stackrel{\int u dv = uv - \int v du}{=} \\ &= f(x) \cdot \exp(-i2\pi x \xi) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d \exp(-i2\pi x \xi) \stackrel{\text{осциллирующая функция } (\pm \infty) = 0}{=} \\ &= 0 + i2\pi \xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi x \xi) dx \stackrel{(1.1)}{=} i2\pi \xi F(\xi) \end{aligned}$$

функция яркости $\sim \xi$

Физическая интерпретация:



Оптический элемент, выполняющий умножение в частотной плоскости на $i2\pi\xi$ представляет собой амплитудный транспарант с функцией яркости $\sim \xi$.

При этом мнимая единица $i = \exp(\pi/2)$ выполняется с помощью прозрачной подложки толщиной $h = \lambda/4(n-1)$, где n - показатель преломления материала подложки.

Оператор Лапласа:
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \xrightarrow{\mathfrak{F}} 4\pi^2(\xi^2 + \eta^2)F(\xi, \eta) \quad (1.12)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) \exp[-i2\pi(x\xi + y\eta)] dx dy &= I_1 + I_2 \\ I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \exp[-i2\pi(x\xi + y\eta)] dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] \exp[-i2\pi(x\xi + y\eta)] dx dy = \\ &= i2\pi\xi \mathfrak{F} \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] \stackrel{(1.11)}{=} (i2\pi\xi)^2 \mathfrak{F}[f(x, y)] = -4\pi^2\xi^2 F(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Интегрирование: Если $f(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\xi)$, то $\int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{F(\xi)}{i2\pi\xi}$ (1.13)

Доказательство Вариант 1. Используя теорему Барроу $\int_{-\infty}^x \frac{d g(\tau)}{d \tau} d \tau = g(x)$

Обозначим $f(\tau) = \frac{d g(\tau)}{d \tau}$, тогда $\int_{-\infty}^x f(\tau) d \tau = g(x)$

$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^x f(\tau) d \tau \right\} \exp(-i2\pi x \xi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-i2\pi x \xi) dx = G(\xi)$, с другой стороны

$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i2\pi x \xi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d g(x)}{d x} \exp(-i2\pi x \xi) dx \stackrel{(1.11)}{=} i2\pi\xi G(\xi)$, то есть

$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^x f(\tau) d \tau \right\} \exp(-i2\pi x \xi) dx = G(\xi) = \frac{F(\xi)}{i2\pi\xi}$

Вариант 2.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau \right\} \exp(-i2\pi x\xi) dx \stackrel{\substack{\lambda = \tau - x, d\lambda = d\tau \\ -\infty < \tau < x, \tau = \lambda + x, -\infty < \lambda < 0}}{=} \int_{-\infty}^0 \left\{ \int_{-\infty}^0 f(\lambda + x) d\lambda \right\} \exp(-i2\pi x\xi) dx = \\
& = \int_{-\infty}^0 \exp(i2\pi \lambda \xi) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda + x) \exp[-i2\pi(\lambda + x)\xi] dx \right\}}_{F(\xi)} d\lambda = F(\xi) \int_{-\infty}^0 \exp(i2\pi \lambda \xi) d\lambda = \\
& = \frac{F(\xi)}{i2\pi \xi} \exp(i2\pi \lambda \xi) \Big|_{-\infty}^0 = \frac{F(\xi)}{i2\pi \xi} \left(1 - \underbrace{\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} [\exp(i2\pi \lambda \xi)]}_{=0} \right) = \frac{F(\xi)}{i2\pi \xi}
\end{aligned}$$

Унитарность (сохранение расстояния):

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\xi), \text{ то } \int_{R^n} f_1(\mathbf{x}) f_2^*(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \int_{R^n} F_1(\xi) F_2^*(\xi) d^n \xi \quad (1.14)$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \exp(-i2\pi x\xi) dx \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y) \exp(-i2\pi y\xi) dy \right]^* d\xi = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2^*(y) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i2\pi(x-y)\xi] d\xi \right]}_{\delta(x-y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2^*(x) dx
\end{aligned}$$

Равенство Парсеваля:

$$\text{Если } f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\xi), \text{ то } \int_{R^n} |f(\mathbf{x})|^2 d^n \mathbf{x} = \int_{R^n} |F(\xi)|^2 d^n \xi \quad (1.15)$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \exp(i2\pi x\xi) d\xi \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi') \exp(i2\pi x\xi') d\xi' \right]^* dx = \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) F^*(\xi') \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i2\pi(\xi' - \xi)x] dx \right]}_{\delta(\xi' - \xi)} d\xi d\xi' = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) F^*(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Раздел: Операция свертки. Часто используемые в оптике функции.

Рекомендации: см. книгу О.И. Смокий, В.А. Фабриков. «Методы теории систем и преобразований в оптике», стр.28-40.

Теорема о свертке:

$$\text{Если } g(\mathbf{x}) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}') h(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^n \mathbf{x}' = f * h, \quad \text{то } G(\xi) = F(\xi) H(\xi), \quad (2.1)$$

$$\text{где } g(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} G(\xi), \quad f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\xi), \quad h(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} H(\xi),$$

Для линейной системы: $f(\mathbf{x}) \longrightarrow \boxed{h(\mathbf{x})} \longrightarrow g(\mathbf{x})$

где $f(\mathbf{x})$ - входной сигнал, $g(\mathbf{x})$ - выходной сигнал,
 $h(\mathbf{x})$ - импульсная характеристика, $H(\xi)$ - передаточная функция.

Доказательство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x') h(x - x') dx' \right] \exp(-i2\pi x \xi) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') h(t) \exp(-i2\pi x' \xi) \exp(-i2\pi t \xi) dx' dt = F(\xi) H(\xi)$$

$t = x - x',$
 $x = t + x'$

И обратно: $f(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \int_{R^n} F(\eta) H(\xi - \eta) d^n \eta. \quad (2.2)$

Доказательство

$$\int_{R^n} F(\eta) H(\xi - \eta) d^n \eta = \int_{R^n} F(\eta) \int_{R^n} h(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi \mathbf{x}(\xi - \eta)] d^n \mathbf{x} d^n \eta =$$

$$= \int_{R^n} h(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi \mathbf{x} \xi] \underbrace{\int_{R^n} F(\eta) \exp[i2\pi \mathbf{x} \eta] d^n \eta}_{f(\mathbf{x})} d^n \mathbf{x} = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) \exp[-i2\pi \mathbf{x} \xi] d^n \mathbf{x} = \mathfrak{F}\{f(\mathbf{x}) h(\mathbf{x})\}$$

Теорема об автокорреляции: Следует из свойства сопряжения и теоремы о свертке

$$\text{Если } g(\mathbf{x}) = \int_{R^n} f^*(\mathbf{x}') f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') d^n \mathbf{x}' = f \otimes f, \text{ то } G(\xi) = |F(\xi)|^2, \quad (2.3)$$

где $g(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} G(\xi), \quad f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathfrak{F}} F(\xi).$

Доказательство

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x') f(x + x') d x' \right] \exp(-i 2\pi x \xi) d x = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x') f(t) \exp(i 2\pi x' \xi) \exp(-i 2\pi t \xi) d x' d t = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x') \exp(i 2\pi x' \xi) d x' \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i 2\pi t \xi) d t = F^*(\xi) F(\xi) = |F(\xi)|^2 \end{aligned}$$

И обратно: $|f(\mathbf{x})|^2 \xrightarrow{\mathfrak{F}} \int_{R^n} F^*(\eta) F(\eta + \xi) d^n \eta. \quad (2.4)$

Доказательство

$$\begin{aligned} & \int_{R^n} F^*(\eta) F(\xi + \eta) d^n \eta = \int_{R^n} F^*(\eta) \int_{R^n} f(\mathbf{x}) \exp[-i 2\pi \mathbf{x}(\xi + \eta)] d^n \mathbf{x} d^n \eta = \\ & = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) \exp[-i 2\pi \mathbf{x} \xi] \underbrace{\int_{R^n} F^*(\eta) \exp[-i 2\pi \mathbf{x} \eta] d^n \eta}_{f^*(\mathbf{x})} d^n \mathbf{x} = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) f^*(\mathbf{x}) \exp[-i 2\pi \mathbf{x} \xi] d^n \mathbf{x} = \mathfrak{F}\{|f(\mathbf{x})|^2\} \end{aligned}$$

В виде свертки двух функций могут быть представлены многие интегралы. Так,

$$\int_{x-x_0/2}^{x+x_0/2} f(\xi) d\xi = f(x) * \text{rect}(x/x_0), \text{ где } \text{rect}(x/x_0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq x_0/2, \\ 0, & |x| > x_0/2 \end{cases} - \text{прямоугольная функция}$$

и $\int_0^{\infty} f(\xi) d\xi = f(x) * U(x)$

где $U(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ - единичная ступенчатая функция или функция Хевисайда.

Для операции свертывания функций роль единичного элемента играет *дельта-функция Дирака* $\delta(\mathbf{x})$. Она является ядром единичного оператора, записанного в интегральной форме:

$$\phi(\mathbf{x}) * \delta(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$$

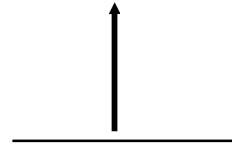
я

Дельта-функцией $\delta(x-x_0)$ называется обобщенная функция или линейный непрерывный функционал (распределение), ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(x)$ из основного линейного пространства функций D число $\varphi(x_0)$. Символически это записывается в виде:

$$\int \delta(x_0 - x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0).$$

дельта-функция Дирака

$$\int \delta(x) dx = 1 \quad \left[\int \underbrace{\delta(x)}_0 dx = 1 \right]$$



Свойства:

Симметрия

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

Подобие

$$\delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|} \delta(x, y)$$

Преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} 1 \\ 1 &\xrightarrow{\mathfrak{F}} 2\pi \delta(w) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Доказательство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi x \xi) dx = \frac{\exp(-2\pi x \xi)}{-2\pi \xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2i} = \frac{\sin(2\pi x \xi)}{\pi \xi} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}$$

осциллирующая функция $(\pm \infty) = 0$
только при $\xi=0$ возникает неопределенность $\frac{0}{0}$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi x \xi)}{\pi \xi} \stackrel{\text{правило Лопиталя}}{=} \frac{(\sin(2\pi x \xi))'}{(\pi \xi)'} \Big|_{\xi=0} = \frac{2\pi x \cos(2\pi x \xi)}{\pi} \Big|_{\xi=0} = 2x \cos(2\pi x \xi) \Big|_{\xi=0} = 2x \cos(0) = 2x$$

$$\delta(\xi)$$

Дифференцирование

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{d^n \delta(x)}{d x^n} = (-1)^n \frac{n!}{x^n} \delta(x) \quad (2.6)$$

Доказательство

1 вариант: Используя свойства дифференцирования $\frac{\partial f(x)}{\partial x} \xrightarrow{\mathfrak{F}} i\xi F(\xi)$ и

$$\frac{d \delta(x)}{d x} \xrightarrow{\mathfrak{F}} i\xi \Rightarrow \frac{d \delta(x)}{d x} = \int_{-\infty}^{\infty} i\xi e^{ix\xi} d\xi = \underbrace{i\xi \frac{e^{ix\xi}}{ix}}_0 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \underbrace{\frac{i}{ix} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} d\xi}_{\delta(x)} = -\frac{\delta(x)}{x}$$

2 вар, ан2: Используя $x\delta(x) \equiv 0$ и

$$\frac{d}{d x} [x\delta(x)] = \frac{d x}{d x} \delta(x) + x \frac{d \delta(x)}{d x} = \delta(x) + x \frac{d \delta(x)}{d x} \equiv 0 \Rightarrow \delta(x) = -x \frac{d \delta(x)}{d x} \Rightarrow \frac{d \delta(x)}{d x} = -\frac{\delta(x)}{x}$$

Интегрирование и дифференцирование

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x - x_0) \varphi(x) dx = (-1)^n \varphi^{(n)}(x_0), \quad \text{где } \delta^{(n)}(x) = \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} \text{ и } \varphi^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad (2.7)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0) \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{d \delta(x - x_0)}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d \delta(x - x_0) \stackrel{\int u dv = uv - \int v du}{=} \\ &= \varphi(x) \delta(x - x_0) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) d \varphi(x) = -\varphi'(x_0) \end{aligned}$$

Интегрирование
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \delta(x - x_1) dx = \delta(x_1 - x_0) \quad (2.8)$$

Со сдвигом

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &\xrightarrow{\mathfrak{F}} e^{-j\omega t_0} \\ e^{j\omega_0 t} &\xrightarrow{\mathfrak{F}} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \\ e^{j2\pi(ax + by)} &\xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(\xi - a) \delta(\eta - b) = \delta(\xi - a) \cdot \delta(\eta - b) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Прямоугольный импульс

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} A, & |x| \leq T/2 \\ 0, & |x| > T/2 \end{cases} \xrightarrow{\mathfrak{F}} A T \text{sinc}(\xi T) = A T \frac{\sin(\pi \xi T)}{\pi \xi T} \quad (2.10)$$

Доказательство

$$\int_{-T/2}^{T/2} A \exp(-j2\pi x \xi) dx = A \frac{\exp(-j2\pi x \xi)}{-j2\pi \xi} \Big|_{-T/2}^{T/2} \stackrel{\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin x}{=} A \frac{\sin(\pi \xi T)}{\pi \xi} \stackrel{\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc } x}{=} A T \text{sinc}(\xi T)$$

Интеграл Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (2.11)$$

Обозначим $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = I$

Понятно, что

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha y^2) dy} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\alpha(x^2 + y^2)] dx dy} = \\ &= \sqrt{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha r^2) r dr d\varphi} = \sqrt{2\pi \int_0^{\infty} \exp(-\alpha r^2) r dr} = \sqrt{2\pi \left(-\frac{1}{2\alpha}\right) \int_0^{\infty} \exp(-\alpha r^2) d(-\alpha r^2)} = \\ &= \sqrt{-\frac{\pi}{\alpha} \exp(-\alpha r^2) \Big|_0^{\infty}} = \sqrt{-\frac{\pi}{\alpha} (0 - 1)} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{aligned}$$

Гауссова функция (является собственной функцией)

$$\exp[-\pi(x^2 + y^2)] \xrightarrow{\mathfrak{S}} \exp[-\pi(\xi^2 + \eta^2)] \quad (2.12)$$

Доказательство

Используя (2.11) $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \exp(-i2\pi x\xi) dx \stackrel{-(x+i\pi\xi)^2 = -x^2 - i2\pi x\xi + (\pi\xi)^2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x+i\pi\xi)^2] \exp(-\pi^2\xi^2) dx = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2\xi^2)$$

В общем случае для α -действительного имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) \exp(-i\beta x\xi) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{1}{4\alpha} \beta^2 \xi^2\right) \quad (2.13)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) \exp(-i\beta x\xi) dx &\stackrel{-\left(\sqrt{\alpha}x + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}i\beta\xi\right)^2 = -\alpha x^2 - i\beta x\xi + \frac{1}{4\alpha}(\beta\xi)^2}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\sqrt{\alpha}x + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}i\beta\xi\right)^2\right] \exp\left(-\frac{1}{4\alpha} \beta^2 \xi^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{1}{4\alpha} \beta^2 \xi^2\right) \end{aligned}$$

Квадратично-фазовый множитель

$$\exp[i\pi(x^2 + y^2)] \xrightarrow{\mathfrak{S}} i \exp[-i\pi(\xi^2 + \eta^2)] \quad (2.14)$$

Доказательство

В общем случае для α -действительного имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha x^2) \exp(-i\beta x\xi) dx = \sqrt{\frac{\pi i}{\alpha}} \exp\left(-\frac{i}{4\alpha} \beta^2 \xi^2\right) \quad (2.15)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha x^2) \exp(-i\beta x\xi) dx &\stackrel{\left(\sqrt{\alpha}x - \frac{\beta\xi}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 = i\alpha x^2 - i\beta x\xi + \frac{i}{4\alpha}(\beta\xi)^2}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\sqrt{\alpha}x - \frac{\beta\xi}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{i}{4\alpha} \beta^2 \xi^2\right) dx = \\ &= \exp\left(-\frac{i}{4\alpha} \beta^2 \xi^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{i}}x - \frac{\beta\xi}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2\right] dx \stackrel{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}{=} \exp\left(-\frac{i}{4\alpha} \beta^2 \xi^2\right) \sqrt{\frac{i\pi}{\alpha}} \end{aligned}$$

Раздел: Полярные координаты. Преобразование Ханкеля.

Рекомендации: см. книгу О.И. Смокий, В.А. Фабриков. «Методы теории систем и преобразований в оптике», стр.45-50, 59-60.

Полярные координаты

Преобразование Фурье в полярных координатах:

$$F(\rho, \theta) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \exp[-i2\pi r\rho \cos(\theta - \varphi)] r dr d\varphi \quad (3.1)$$

Доказательство

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) \exp[-i2\pi(x\xi + y\eta)] dx dy \rightarrow$$

Используя

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & \xi &= \rho \cos \theta \\ y &= r \sin \varphi & \eta &= \rho \sin \theta \end{aligned}$$

$dx dy = \text{Якобиан } dr d\varphi$, где

$$\text{Якобиана } \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - (-r \sin \varphi) \cdot \sin \varphi = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r,$$

следовательно $dx dy = r dr d\varphi$, тогда получаем

$$\begin{aligned} \rightarrow F(\rho, \theta) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \exp[-i2\pi r\rho (\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta)] r dr d\varphi = \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \exp[-i2\pi r\rho \cos(\varphi - \theta)] r dr d\varphi \end{aligned}$$

я

Обратное преобразование Фурье в полярных координатах:

я

$$f(r, \theta) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi) \exp[i2\pi r\rho \cos(\theta - \varphi)] \rho d\rho d\varphi \quad (3.2)$$

Функция Дирака в полярных координатах

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \frac{\delta(r - r_0)}{r_0} \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (3.3)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy \stackrel{\text{подставим}}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\delta(r - r_0)}{r_0} \delta(\varphi - \varphi_0) \cdot r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \varphi_0) \cdot 1 d\varphi \int_0^\infty \frac{\delta(r - r_0)}{r_0} \cdot r dr = 1 \cdot \frac{1}{r_0} \int_0^\infty \delta(r - r_0) \cdot r dr = \frac{1}{r_0} \cdot r_0 = 1 \end{aligned}$$

Радиально-симметричная функция Дирака в полярных координатах

$$\delta(x, y) = \frac{\delta(r)}{\pi r} \quad (3.4)$$

Доказательство

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy \stackrel{\text{подставим}}{=} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(r)}{\pi r} \cdot r dr d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \delta(r) dr = \frac{2\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(r) dr = 1$$

Преобразование Ханкеля.

Двумерное Фурье-преобразование функции $f(x, y)$, обладающей осевой симметрией $f(x, y) = f(r, \theta) = f(r)$ приводится к одномерному преобразованию Фурье-Бесселя или *преобразованию Ханкеля* нулевого порядка:

$$H(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi r \rho) r dr \quad (3.5)$$

Доказательство

По определению $F(\rho, \varphi) = \int_0^{\infty} f(r) r \int_0^{2\pi} \exp[-i 2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] d\theta dr =$

с учетом $J_m(x) = \frac{i^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(imt) \exp(-ix \cos t) dt$, $J_m(-x) = (-1)^m J_m(x)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i x \cos(t - t_0)] dt &= J_0(-z) = J_0(z) - \text{Бесселева функция нулевого порядка} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi r \rho) r dr = H(\rho) \end{aligned}$$

Обратное преобразование Ханкеля:

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} H(\rho) J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho \quad (y.6)$$

Формула Парсеваля:

$$\int_0^{\infty} f(r) g^*(r) r dr = \int_0^{\infty} F(\rho) G^*(\rho) \rho d\rho \quad (y.7)$$

Доказательство

Используя ортогональность Бесселевой функции на бесконечном пределе:

$$\alpha \int_0^{\infty} J_m(\alpha r) J_m(\beta r) r dr = \delta(\alpha - \beta) \quad (C1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F(\rho) G^*(\rho) \rho d\rho &= \int_0^{\infty} \left[2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi r \rho) r dr \right] \left[2\pi \int_0^{\infty} g^*(r') J_0(2\pi r' \rho) r' dr' \right] \rho d\rho = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(r) g^*(r') r r' \left[4\pi^2 \int_0^{\infty} J_0(2\pi r \rho) J_0(2\pi r' \rho) \rho d\rho \right] dr dr' \stackrel{(C1)}{=} \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(r) g^*(r') r r' \left[4\pi^2 \frac{\delta(2\pi r - 2\pi r')}{2\pi r} \right] dr dr' = \int_0^{\infty} f(r) g^*(r) r dr \end{aligned}$$

Преобразование Ханкеля круговой функции:

$$\text{circ}(r/R) = \begin{cases} 1, & r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases} \xrightarrow{H} \frac{R}{\rho} J_1(2\pi R\rho) \quad (3.8)$$

Доказательство

Воспользуемся тождеством $\int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi = x J_1(x)$

$$2\pi \int_0^R J_0(2\pi r\rho) r dr \stackrel{\xi=2\pi r\rho}{=} \frac{1}{2\pi\rho^2} \int_0^{2\pi R\rho} J_0(\xi) \xi d\xi \stackrel{\int_0^x J_0(\xi) \xi d\xi = x J_1(x)}{=} \frac{2\pi R\rho}{2\pi\rho^2} J_1(2\pi R\rho) = \frac{R}{\rho} J_1(2\pi R\rho)$$

я

я

Преобразование Ханкеля функции Дирака:

я

$$\delta(r-R) \xrightarrow{H} 2\pi R \cdot J_0(2\pi R\rho), \quad R > 0 \quad (y.9)$$

Доказательство

$$2\pi \int_0^\infty \delta(r-R) J_0(2\pi r\rho) r dr = 2\pi R \cdot J_0(2\pi R\rho)$$

я

я

Раздел: Основные типы световых волн.

Рекомендации: см. пособие В.В. Котляр. «Френелевские изображения», стр.3-17.

4.1. Показать, что сферическая волна $E(x, y, z) = \frac{\exp(ikR)}{R}$, $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$(\nabla^2 + k^2)E(x, y, z) = 0.$$

Решение:

Перейдем в сферические координаты. Тогда Лапласиан:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

В нашем случае $\nabla^2 E = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$, а именно:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{e^{ikr}}{r^2} (ikr - 1); \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial E}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} (e^{ikr} (ikr - 1)) = -k^2 r e^{ikr}; \quad \nabla^2 E = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r}$$

4.2. Дан гауссовый пучок с комплексной амплитудой

$$U(x, y, z) = \frac{e^{-(x^2 + y^2)/B(z)}}{B(z)}, \quad B(z) = a^2 + 2iz/k.$$

Показать, что он удовлетворяет параксиальному уравнению распространения:

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] U(x, y, z) = 0.$$

Решение:

Перейдем в цилиндрические координаты. Тогда Лапласиан:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad \text{а } (x^2 + y^2) = r^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{e^{-\frac{r^2}{B(z)}}}{B(z)} \left(-\frac{2r}{B(z)} \right); \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{2r^2 e^{-\frac{r^2}{B(z)}}}{B(z)} \right) = -\frac{4re^{-\frac{r^2}{B(z)}}}{B^2(z)} \left(1 - \frac{r^2}{B(z)} \right);$$

$$\nabla_{\perp}^2 E = \frac{4e^{-\frac{r^2}{B(z)}}}{B^2(z)} \left(-1 + \frac{r^2}{B(z)} \right) (*); \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\partial E}{\partial B(z)} \cdot \frac{\partial B(z)}{\partial z} = \frac{e^{-\frac{r^2}{B(z)}}}{B^2(z)} \left(-1 + \frac{r^2}{B(z)} \right) \cdot \frac{2i}{k} (**)$$

$$(*) + 2ik(**) = 0$$

4.3. Показать, что параболическая волна

$$F(x,y,z)=k/z \exp[ik(x^2+y^2)/2z]$$

удовлетворяет параксиальному уравнению распространения:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) F(x, y, z) = 0.$$

4.4. Показать, что коэффициенты разложения по ортогональному базису $\{\Psi_n(x)\}$ с

дискретным индексом n : $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \Psi_n(x)$,

вычисляются по формуле $C_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi_n^*(x) dx$

Решение:

Учитывая ортогональность функций $\Psi_n(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(x) \Psi_m^*(x) dx = \delta_{nm}$$

домножим и проинтегрируем обе части:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi_m^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \Psi_n(x) \Psi_m^*(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(x) \Psi_m^*(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta_{nm} = C_m$$

4.5. Показать, что коэффициенты разложения по ортогональному базису $\{\Psi(\alpha, x)\}$ с

непрерывным индексом α : $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \Psi(\alpha, x) d\alpha$,

вычисляются по формуле $C(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi^*(\alpha, x) dx$

Решение:

Учитывая ортогональность функций $\{\Psi(\alpha, x)\}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, x) \Psi^*(\beta, x) dx = \delta(\alpha - \beta)$$

домножим и проинтегрируем обе части:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi^*(\beta, x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \Psi(\alpha, x) d\alpha \right] \Psi^*(\beta, x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, x) \Psi^*(\beta, x) dx \right] d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) \delta(\alpha - \beta) d\alpha = C(\beta) \end{aligned}$$

4.6. Показать, что если $U_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\alpha, \beta) \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta$,

то $A_0(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] dx dy$

Решение:

Учитывая ортогональность функций $\exp[ik(\alpha x + \beta y)]$, домножим и проинтегрируем обе части:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x, y) \exp[-ik(\alpha' x + \beta' y)] dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\alpha, \beta) \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \right\} \exp[-ik(\alpha' x + \beta' y)] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\alpha, \beta) \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik(\alpha x + \beta y)] \exp[-ik(\alpha' x + \beta' y)] dx dy \right\}}_{\delta(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta)} d\alpha d\beta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\alpha, \beta) \delta(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta) d\alpha d\beta = A_0(\alpha', \beta') \end{aligned}$$

4.7. Получить интеграл Кирхгофа через разложение сферической волны по плоским волнам.

Решение:

Разложим сферическую волну

$$S(x, y, z) = A \frac{\exp\left(ik\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \stackrel{R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{=} A \frac{\exp(ikR)}{R}.$$

по спектру плоских волн $U(x, y, z) = A \exp[ik(\alpha x + \beta y \pm z\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2})]$:

$$\frac{\exp(ikR)}{R} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\alpha, \beta) \exp[ikz\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}] \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta.$$

Так как сферическая волна в плоскости $z=0$ имеет амплитуду

$$S(x, y, z=0) = \frac{\exp\left(ik\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \stackrel{r=\sqrt{x^2+y^2}}{=} \frac{\exp(ikr)}{r}.$$

то найти функцию $A_0(\alpha, \beta)$ можно переходя для удобства в полярные координаты:

$$A_0(\alpha, \beta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp(ikr)}{r} \exp[-ikr \cos(\varphi - \theta)] \cdot r dr d\varphi,$$

и используя известные соотношения $\int_0^{2\pi} \exp(ix \cos \varphi) d\varphi = 2\pi J_0(x)$,

$$\int_0^{\infty} \exp(iar) J_0(br) dr = \frac{i}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b,$$

где $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Тогда

$$\begin{aligned}
 A_0(\alpha, \beta) &= \int_0^\infty \exp(ikr) \underbrace{\left\{ \int_0^{2\pi} \exp[-ikr\rho \cos(\varphi - \theta)] d\varphi \right\}}_{2\pi J_0(kr\rho)} dr = \\
 &= 2\pi \int_0^\infty \exp(ikr) J_0(kr\rho) dr = \frac{2\pi i}{\sqrt{k^2 - (k\rho)^2}} = \frac{2\pi i}{k\sqrt{1-\rho^2}} \stackrel{\rho^2=\alpha^2+\beta^2}{=} \frac{2\pi i}{k\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}
 \end{aligned}$$

Итак, разложение сферической волны по плоским волнам имеет вид

$$\frac{\exp(ikR)}{R} = -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(ikz\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\right)}{ik\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta. \quad (*)$$

Ранее мы получили связь комплексной амплитуды поля $U_0(x, y)$ в плоскости $z=0$ с комплексной амплитудой $U(x, y, z)$ в плоскости z .

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0(x', y') H(x - x', y - y', z) dx' dy'$$

где

$$H(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ikz\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\right] \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta \quad (**)$$

Правые части формул (*) и (**) связаны между собой. Это легко видеть, обозначив

$$D = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] &= -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikzD)}{ikD} \right] \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta = \\
 &= -2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikzD) \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta = -2\pi H(x, y, z)
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем связь левых частей:

$$\begin{aligned}
 -2\pi H(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\exp(ikR)}{R} \right] = \frac{\partial}{\partial z} [\exp(ikR) \cdot R^{-1}] = \frac{\partial}{\partial z} [\exp(ikR)] R^{-1} + \exp(ikR) \frac{\partial}{\partial z} [R^{-1}] = \\
 &= ik \exp(ikR) \frac{\partial}{\partial z} [R] R^{-1} + \exp(ikR) (-1) R^{-2} \frac{\partial}{\partial z} [R] = \frac{ik \exp(ikR)}{R} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\exp(ikR)}{R^2} \frac{\partial R}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} [z^2] = z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{z}{R}$,

получаем:

$$H(x, y, z) = -\frac{z \exp(ikR)}{2\pi R^2} \left(ik - \frac{1}{R} \right)$$

4.8. Для параксиальных световых полей, представимых в виде:

$$U(x, y, z) = E(x, y, z) \exp(ikz).$$

где $E(x, y, z)$ - медленная меняющаяся от z составляющая, $\exp(ikz)$ - быстро меняющаяся от z составляющая, k - волновое число.

получить параксиальное волновое уравнение.

Решение:

Подставим параксиальное световое поле в уравнение Гельмгольца:

$$[\nabla^2 + k^2]U(x, y, z) = 0,$$

и получим уравнение для медленно меняющейся по z амплитуды $E(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} & [\nabla^2 + k^2]E(x, y, z)\exp(ikz) = \\ & = \exp(ikz) \left(\frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\exp(ikz) \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} + E(x, y, z) ik \exp(ikz) \right) + k^2 E(x, y, z) \exp(ikz) = \\ & = \exp(ikz) \nabla_{\perp}^2 E(x, y, z) + ik \exp(ikz) \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} + \exp(ikz) \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial z^2} + ik \exp(ikz) \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} + \\ & + E(x, y, z) (ik)^2 \exp(ikz) + k^2 E(x, y, z) \exp(ikz) = \\ & = \exp(ikz) \nabla_{\perp}^2 E(x, y, z) + 2ik \exp(ikz) \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} + \exp(ikz) \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\nabla_{\perp}^2 E(x, y, z) + 2ik \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.2)$$

где $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - поперечный лапласиан.

Пусть медленно меняющаяся амплитуда удовлетворяет условию

$$\left| \frac{\partial^2 E(x, y, z)}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial E(x, y, z)}{\partial z} \right| \quad (3.3)$$

тогда вместо (3.2) получим параболическое (или параксиальное) уравнение распространения света

$$\left[\nabla_{\perp}^2 + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right] E(x, y, z) = 0. \quad (3.4)$$

4.9. Дан гауссовый пучок с комплексной амплитудой

$$U(x, y, z) = \frac{e^{-(x^2+y^2)/B(z)}}{B(z)}, \quad B(z) = a^2 + 2iz/k.$$

Найти уравнение для множества точек (x,y), в которых интенсивность гауссового пучка равна 0.1 на расстоянии z=10 мм, $\lambda=0.001$ мм, a=1 мм.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{Интенсивность } I &= |U(x, y, z)|^2 = U(x, y, z) \cdot U^*(x, y, z) = \frac{e^{-(x^2+y^2)/B(z)}}{B(z)} \cdot \frac{e^{-(x^2+y^2)/B^*(z)}}{B^*(z)} = \\ &= \frac{e^{-(x^2+y^2)\left(\frac{B^*(z)+B(z)}{B(z)B^*(z)}\right)}}{B(z)B^*(z)} = \frac{e^{-\frac{2a^2(x^2+y^2)}{a^4+\frac{4z^2}{k^2}}}}{a^4+\frac{4z^2}{k^2}} \stackrel{k=\frac{2\pi}{\lambda}}{=} \frac{e^{-\frac{2a^2(x^2+y^2)}{a^4+\left(\frac{z\lambda}{\pi}\right)^2}}}{a^4+\left(\frac{z\lambda}{\pi}\right)^2} = \frac{e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{1+\left(\frac{10^{-2}}{\pi}\right)^2}}}{1+\left(\frac{10^{-2}}{\pi}\right)^2} \stackrel{\frac{1}{10000\pi} \approx 0}{\approx} e^{-2(x^2+y^2)} = 0.1 \end{aligned}$$

$$-2(x^2 + y^2) = \ln 0.1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.15 - \text{окружность}$$

4.10. Дан гауссовый пучок с комплексной амплитудой

$$E(r, z) = \frac{e^{-r^2/W(z)}}{W(z)}, \quad W(z) = b^2 + 2iz/k.$$

Найти уравнение волнового фронта на расстоянии z=100 мм (b=2 мм, $\lambda=0.01$ мм).

Решение:

Волновым фронтом называется поверхность, в точках которой фаза имеет одинаковое значение. Комплексное число $a+ib = Ae^{i\varphi}$, здесь φ - фаза.

Используем прием домножения на комплексно-сопряженное знаменателю:

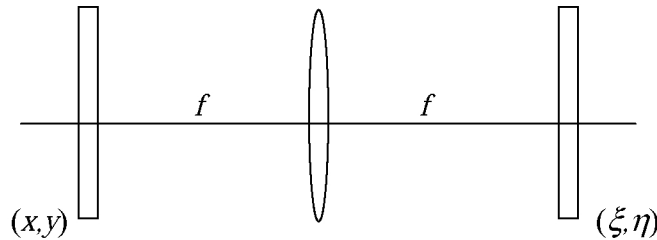
$$E(r, z) = \frac{e^{-r^2/W(z)}}{W(z)} = \frac{e^{-\frac{r^2}{W(z)} \frac{W^*(z)}{W^*(z)}}}{W(z)} \cdot \frac{W^*(z)}{W^*(z)} = \frac{W^*(z)}{W(z)} \cdot \frac{W^*(z) = |W(z)| e^{i \arctg\left(-\frac{2z}{a^2 k}\right)}}{|W(z)|^2} e^{-\frac{r^2 a^2}{|W(z)|^2}} \cdot e^{\left[\frac{2r^2 z}{k|W(z)|^2} - \arctg\left(\frac{2z}{a^2 k}\right) \right]}$$

$$\text{здесь } \varphi(r, z) = \frac{2r^2 z}{k|W(z)|^2} - \arctg\left(\frac{2z}{a^2 k}\right) = 0.07r^2 - 4.004 = \text{const} - \text{окружность}$$

Раздел: Оптические системы

Фурье-анализатор.

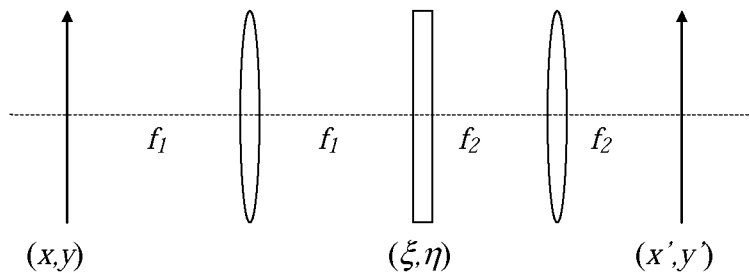
Рекомендации: см. пособие В.В. Котляр. «Оптическая обработка изображений», стр.4-14;



Фурье-анализатор: $E_f(\xi) = \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-i \frac{k}{f} x \xi\right) dx$, где f - фокусное расстояние

Фурье-коррелятор.

Рекомендации: см. пособие В.В. Котляр «Оптическая обработка изображений» стр.15-35;



Фурье-коррелятор: $E_{f_1 f_2}(x') = \frac{k}{\sqrt{f_1 f_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H(\xi) \exp\left(-i \frac{k}{\sqrt{f_1 f_2}} (x + x') \xi\right) d\xi dx$,

с фильтром $H(\xi)$ и фокусными расстояниями f_1, f_2

При $f_1 = f_2$ получим:

$$E(x') = \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(x + x') dx = f \otimes h, \quad \text{где} \quad h(x) = \sqrt{\frac{k}{f}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi) \exp\left(-i \frac{k}{f} \xi x\right) d\xi$$

Найти комплексную амплитуду поля на выходе Фурье-коррелятора с фильтром

$$H(\xi) = i \operatorname{sgn}(\xi) = \begin{cases} i\xi > 0 \\ -i\xi < 0 \end{cases}$$

если на входе имеется поле с амплитудой $f(x) = \sin^2(\beta x) - 1/2$.

Решение:

С помощью такого фильтра выполняется преобразование Гильберта, которое по своим свойствам похоже на операцию дифференцирования, но «сглаженное». Преобразование Гильберта часто используется для оконтуривания изображений вместо операции дифференцирования, т. к. В этом случае используется фазовый фильтр, поглощающий значительно меньше энергии, чем амплитудный для дифференцирования.

Т.к. $f(x) = \sin^2(\beta x) - 1/2 = \frac{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}{2} - \cos(2\beta x)/2$, то далее после первого каскада Фурье-коррелятора получаем:

$$\begin{aligned} E(\xi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{f_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\beta x) \exp\left(-i \frac{k}{f_1} x \xi\right) dx = \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{k}{f_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i \left(\frac{k}{f_1} \xi - 2\beta\right) x\right\} + \exp\left\{-i \left(\frac{k}{f_1} \xi + 2\beta\right) x\right\} dx = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{k}{f_1}} \left[\delta\left(\frac{k}{f_1} \xi - 2\beta\right) + \delta\left(\frac{k}{f_1} \xi + 2\beta\right) \right] \end{aligned}$$

после второго каскада Фурье-коррелятора получаем:

$$\begin{aligned} f(x') &= -\frac{1}{4} \frac{k}{\sqrt{f_1 f_2}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) H(\xi) \exp\left(-i \frac{k}{f_2} x' \xi\right) d\xi = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{k}{\sqrt{f_1 f_2}} \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi + 2\beta \frac{f_1}{k}\right) \exp\left(-i \frac{k}{f_2} x' \xi\right) d\xi + i \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\xi - 2\beta \frac{f_1}{k}\right) \exp\left(-i \frac{k}{f_2} x' \xi\right) d\xi \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{k}{\sqrt{f_1 f_2}} \left[-i \exp\left(-2\beta \frac{f_1}{f_2} x'\right) + i \exp\left(-2\beta \frac{f_1}{f_2} x'\right) \right] = -\frac{k}{2\sqrt{f_1 f_2}} \sin\left(2\beta \frac{f_1}{f_2} x'\right) \end{aligned}$$

Найти поле на выходе Фурье-коррелятора с фильтром $H(\rho, \theta) = e^{im\theta}$, $m=1,2,3,\dots$, если на входе имеется радиально-симметричное поле $f(r)$, где (r, φ) -полярные координаты на входе, (ρ, θ) - полярные координаты в плоскости фильтра.

Решение:

Перед частотным фильтром: $F(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) J_0(2\pi r \rho) r dr$

На выходе из коррелятора

$$\begin{aligned} E_c(r', \varphi') &= 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(\rho) \exp(im\theta) \exp[-2\pi r' \rho \cos(\theta - \varphi')] \rho d\rho d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} F(\rho) \rho \underbrace{\left\{ \int_0^{2\pi} \exp(im\theta) \exp[-2\pi r' \rho \cos(\theta - \varphi')] d\theta \right\}}_{\frac{2\pi}{(-i)^m} J_m(-2\pi r' \rho)} d\rho \stackrel{J_m(-x) = (-1)^m J_m(x)}{=} \\ &= \frac{4\pi^2}{i^m} \int_0^{\infty} F(\rho) J_m(2\pi r' \rho) \rho d\rho = E_c(r') \end{aligned}$$

Это радиально-симметричная функция, равная преобразованию Ханкеля m -го порядка от спектра исходной функции.