

**ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
МЕХАНИКИ**

2007



САМАРА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»

УДК 531(075)
ББК 22.2



Инновационная образовательная программа «Развитие центра компетенции и подготовка специалистов мирового уровня в области аэрокосмических и геоинформационных технологий»

Составители: *Т.В. Кривко, Н.В. Орлова, Т.А. Сандимирова,
Т.С. Соломнина, А.А. Маркелов*

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А. Ю. П р и в а л о в

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Методические указания к лабораторным работам

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ: метод. указания к лаб. раб. / сост. Т.В. Кривко, Н.В. Орлова, Т.А. Сандимирова [и др.]— Самара: Изд-во СГАУ, 2007.—84 с.

Методические указания к лабораторным работам содержат краткие теоретические сведения об основных законах и понятиях механики; методики экспериментального изучения динамики поступательного и вращательного движений твердых тел, их упругих свойств, а также по механическим колебаниям.

В работе приводятся описание экспериментальных установок; порядок выполнения лабораторных работ; методики обработки полученных результатов, в том числе с помощью персонального компьютера; проверочные программы обработки экспериментальных результатов в виде расчётных таблиц MS Excel; перечень контрольных вопросов, необходимых для самостоятельной подготовки студентов; список рекомендуемой литературы.

Методические указания рекомендованы студентам всех факультетов, а также могут быть использованы в аэрокосмическом лицее.

УДК 531(075)
ББК 22.2

САМАРА
Издательство СГАУ
2007

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения	4
1. Маятник наклонный.....	5
2. Машина Атвуда.....	11
3. Маятник Максвелла	17
4. Маятник универсальный	23
5. Унифилярный подвес.....	30
6. Маятник Обербека	39
7. Гироскоп	46
8. Соударение шаров.....	54
9. Модули упругости.....	64
Приложение 1	75
Приложение 2	76
Приложение 3	77
Приложение 4	79
Приложение 5	80
Приложение 6	81
Приложение 7	82
Рекомендуемый библиографический список	83

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Поступательное движение	Вращательное движение
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ <i>Линейная скорость</i>	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ <i>Угловая скорость</i> равна отношению вектора элементарного поворота тела к продолжительности этого поворота
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ <i>Линейное ускорение</i>	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ <i>Угловое ускорение</i> – вектор, характеризующий быстроту изменения угловой скорости тела
m <i>Масса</i> – мера инертности тела	$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ <i>Момент инерции</i> системы материальных точек (В.1) относительно оси Z равен сумме произведений масс м.т. на квадраты их расстояний от оси
	$J = \int_V r^2 dm$ <i>Момент инерции</i> механической системы, (В.2) масса которой непрерывно распределена по объёму
	$J = J_C + md^2$ <i>Теорема Гюйгенса – Штейнера:</i> момент (В.3) инерции тела относительно произвольной оси равен сумме моментов инерции тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между этими осями
$\vec{p} = m\vec{v}$ <i>Импульс</i> – вектор, равный произведению массы материальной точки на её скорость (Л.1)	$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}]$ <i>Момент импульса материальной точки</i> (м.т.) (В.5) относительно неподвижной т. О: векторное произведение радиуса-вектора м.т., проведённого из т.О, на импульс м.т.
	$L_z = [\vec{r} \vec{p}]_z$ <i>Момент импульса относительно оси Z</i> есть (В.6) проекция на эту ось вектора момента импульса относительно любой точки, выбранной на оси Z $L_z = J\omega_z$
$\vec{F}$ <i>Сила</i> – мера механического взаимодействия	$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]$ <i>Момент силы</i> относительно неподвижной т.О: (В.7) векторное произведение радиуса-вектора, проведённого из т.О в т. приложения силы
	$M_z = [\vec{r} \vec{F}]_z$ <i>Момент силы</i> относительно неподвижной оси (В.8) Z есть проекция на эту ось вектора момента силы относительно любой точки, выбранной на оси Z
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ <i>Закон изменения импульса:</i> скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе (Л.2)	$\vec{M}^{\text{дт до}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ <i>Закон изменения момента импульса:</i> производная по времени от момента импульса механической системы относительно неподвижной точки равна главному моменту относительно той же точки всех внешних сил, действующих на систему (В.9)
$\vec{F} = m\vec{a}$ <i>Основное уравнение динамики</i> м. т.	$M_z^{\text{дт до}} = J\varepsilon$ <i>Основное уравнение динамики</i> тела, вращающегося относительно неподвижной оси (В.10)
$W_E = \frac{mv^2}{2}$ <i>Кинетическая энергия</i>	$W_E = \frac{J\omega^2}{2}$ <i>Кинетическая энергия</i> твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (В.11)

1. МАЯТНИК НАКЛОННЫЙ

1.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методику измерений коэффициентов трения скольжения и трения качения с помощью установки лабораторной «ФМ-16» с относительной погрешностью не более 15%.

1.2. Средства измерений

Внешний вид лабораторной установки «ФМ-16» представлен на рис. 1.1.



Рис.1.1. Внешний вид лабораторной установки

Установка включает в свой состав: основание, вертикальную стойку, верхний кронштейн с панелью, маятник скольжения и маятник качения, которые устанавливаются на верхнем кронштейне поочередно.

Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации вертикальной стойки.

Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы, на которую нанесена риска, показывающая угол отклонения панели от вертикального положения.

Панель имеет прямоугольное окно, в котором устанавливаются сменные образцы в виде пластин. В нижней части панели нанесена шкала отсчета угла отклонения маятников. С помощью винта панель отклоняется от вертикального положения. Угол отклонения панели определяется с помощью шкалы, закрепленной с обратной стороны нижней части панели.

Маятник скольжения представляет собой металлический стержень, снабженный призматической опорой и обоймой, в которую устанавливаются сменные образцы в виде усеченного шара.

Маятник качения представляет собой металлический шарик, подвешенный на капроновой нити. Шары являются сменными.

1.3. Описание измеряемых величин

Внешним трением называется механическое сопротивление, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Сила сопротивления направлена противоположно относительному перемещению тел и называется силой трения $F_{тр}$.

Внешнее трение – диссипативный процесс, сопровождающийся выделением тепла, электризацией тел, их разрушением и др. Вследствие волнистости

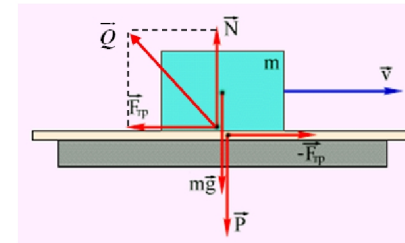


Рис.1.2. Трение скольжения

и шероховатости каждой из поверхностей касание двух твердых тел происходит в дискретных областях, так называемых пятнах касания. Пятна касания – это элементарные площадки контакта, возникающие в результате упругих или пластических деформаций

неровностей поверхности соприкасающихся тел. На пятнах касания возникают силы сцепления двух тел

(адгезия, химические связи, взаимная диффузия и др.). При скольжении тел пятна касания мигрируют по поверхности. Этот процесс сопровождается объемным деформированием тонких приповерхностных слоев. При этом расходуется работа по преодолению сил сцепления на пятнах касания и на образование новых очагов сцепления. Суммарная площадь реального касания в 100-1000 раз меньше, чем общая площадь трущихся поверхностей, и зависит только от силы, которая прижимает эти тела. Прижимающая сила, действующая со стороны соседнего тела на трущуюся поверхность, перпендикулярна ей и называется *силой нормального давления* $\vec{N}$ (рис 1.2).

Различают внешнее трение скольжения и внешнее трение качения. Характеристикой внешнего трения скольжения является *коэффициент трения скольжения* μ – безразмерная величина, равная отношению модулей силы внешнего трения к нормальной силе, прижимающей тела друг к другу:

$$\mu = \frac{F_{тр}}{N}. \quad (1.1)$$

Коэффициент трения скольжения μ зависит от рода соприкасающихся поверхностей и степени их обработки.

Трение качения возникает при перекатывании цилиндра или шара по

поверхности твердого тела. Причинами внешнего трения качения являются потери, связанные со сжатием под нагрузкой катящегося тела и материала основания; с совершением работы, затрачиваемой на передоформирование материала в результате формирования валика перед катящимся телом и преодоление мостиков сцепления. Чем больше деформация соприкасающихся поверхностей, тем больше потери энергии движущегося тела.

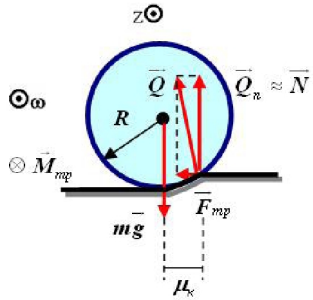


Рис.1.3. Трение качения

коэффициент трения качения μ_k , равный отношению модуля момента силы трения относительно центра шара и модуля силы нормального давления. В случае малой деформации

$$\mu_k = \frac{F_{тр} R}{N} \quad (1.2)$$

Коэффициент трения качения μ_k имеет размерность длины и играет роль плеча нормальной силы давления относительно оси Z.

1.4. Метод измерений

Определение коэффициентов трения скольжения и трения качения с помощью наклонного маятника

Для изучения трения в работе используются маятники скольжения и качения. При выводе маятников из положения равновесия, они совершают затухающие колебания, двигаясь шарами по наклонной поверхности (угол β наклона поверхности к горизонту устанавливается экспериментатором).

Выведем формулы, которые связывают уменьшение амплитуды колебаний маятников с коэффициентом трения. При скольжении (качении) шара по плоскости сила трения совершает работу, которая уменьшает полную энергию шара. В тех положениях (точки поворота), где маятник максимально отклонён от положения равновесия, его скорость равна нулю и его полная энергия равна потенциальной энергии маятника. Уменьшение потенциальной энергии

маятника при его движении от одной точки поворота до другой равно работе силы трения на пути между этими точками.

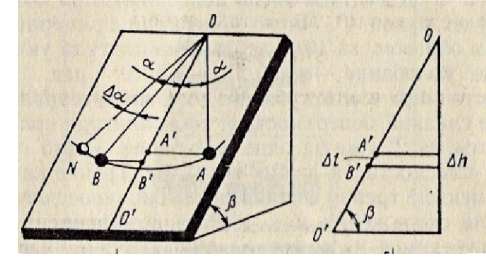


Рис.1.4. Наклонный маятник

Пусть A – точка поворота. В этом положении нить маятника составляет угол α с осью OO' (рис.1.4). Из-за трения угол поворота маятника за половину периода уменьшается на величину $\Delta\alpha$. Длина отрезка

$\Delta l = |A'B'| = l \cos(\alpha - \Delta\alpha) - l \cos(\alpha)$, где l – длина нити, равная радиусу дуги

AB. Длина дуги равна: $\Delta s = l(2\alpha - \Delta\alpha)$. Потеря высоты составляет величину: $\Delta h = \Delta s \sin \beta = l \sin \beta (\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos(\alpha))$.

Изменение потенциальной энергии между точками A и B: $\Delta W_p = mg \Delta h$, где m – масса шара, g – ускорение силы тяжести. Работа силы трения на пути Δs равна: $\Delta A_{тр} = \mu m g l (2\alpha - \Delta\alpha) \cos \beta$.

Так как $\Delta W_p = \Delta A_{тр}$, то

$$\mu \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos \alpha}{2\alpha - \Delta\alpha} \quad (1.3),$$

Поскольку $\Delta\alpha \ll 1$, то $\cos \Delta\alpha \approx 1$; $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$;

$$\cos(\alpha - \Delta\alpha) = \cos \alpha \cos \Delta\alpha + \sin \alpha \sin \Delta\alpha \approx \cos \alpha + \Delta\alpha \sin \alpha;$$

и выражение (1.3) приобретает вид

$$\mu \cos \beta = \frac{\Delta\alpha \sin \alpha}{2\alpha - \Delta\alpha} \quad (1.4)$$

Если учесть далее, что коэффициент трения мал настолько, что выполняется неравенство $\sin \alpha \gg \mu \cos \beta$, то из выражения (1.4) можно найти потерю угла за половину периода

$$\Delta\alpha = 2\mu \cos \beta \frac{\alpha}{\sin \alpha} \quad (1.5)$$

Пусть угол α отклонения маятника от положения равновесия мал, т.е. $\sin \alpha \approx \alpha$, тогда $\Delta\alpha = 2\mu \cos \beta$. За одно полное колебание потеря угла составляет $\Delta\alpha = 4\mu \cos \beta$, а за n колебаний $\Delta\alpha_n = (\alpha_0 - \alpha_n) = 4n\mu \cos \beta$, откуда следует выражение для коэффициента силы трения скольжения

$$\mu = \operatorname{tg} \beta \Delta \alpha_n / 4n, \quad (1.6)$$

где α_0 – начальный угол отклонения маятника от положения равновесия; α_n – угол отклонения маятника после n колебаний.

Коэффициент силы трения качения определяется из (1.2) и (1.6) как

$$\mu_k = R \operatorname{tg} \beta \Delta \alpha_n / 4n, \quad (1.7)$$

где R – радиус катающегося по наклонной плоскости шара маятника качения. Измеряя в эксперименте уменьшение угла $\Delta \alpha_n$ за n полных колебаний маятника для различных углов β наклона плоскости к горизонту, можно построить график зависимости $\Delta \alpha_n / 4n = f(\operatorname{ctg} \beta)$ по одной из методик, изложенных в прил. 2-5, и убедиться, что зависимость линейна. Определив коэффициенты наклона A и A_k , можно найти коэффициенты трения по формулам

$$\mu = A \text{ и } \mu_k = A_k. \quad (1.8)$$

1.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

1. Установите угол наклона панели к вертикали $\gamma = 90^\circ - \beta = 0^\circ$.
2. Используя маятник качения в качестве отвеса, при помощи регулировки опор основания установите вертикально стойку установки так, чтобы указатель маятника указывал на нулевое деление шкалы отсчета угла.
3. Установите одну из сменных пластин на плоскость и установите угол наклона панели к вертикали $\gamma = 7^\circ$.
4. Отклоните рукой маятник от положения равновесия на угол $\alpha_0 (\leq 5^\circ, \text{ угол отклонения шарика выбирается таким образом, чтобы шарик катался по пластине без проскальзывания})$. Снимите отсчёт по шкале и запишите значение отсчета для начального угла отклонения α_0 в табл. 1.1.
5. Отпустите маятник без толчка, сделайте отсчёт по шкале и запишите в табл. 1.1 угол отклонения α_n после совершения маятником n полных колебаний. Переведите значения углов в радианную меру.
6. Повторите измерения ещё раз с тем же углом γ .
7. Увеличьте угол наклона панели на один градус и повторите измерения по пп. 4-6. Повторите аналогичные измерения ещё для двух углов γ .
8. Установите угол наклона панели $\gamma = 0^\circ$. Вставьте усеченный стальной шар в обойму маятника скольжения сферической поверхностью наружу. Повесьте маятник скольжения при помощи призматической опоры на верхний кронштейн таким образом, чтобы шар своей усеченной плоскостью

соприкоснулся с пластиной, и ось маятника была параллельна лицевой поверхности панели. При необходимости подрегулируйте положение основания так, чтобы указатель маятника оказался напротив нулевого деления шкалы отсчета угла отклонения маятника, но без нарушения вертикального положения стойки.

9. Установите угол наклона панели к вертикали $\gamma = 3^\circ$. Отклоните рукой маятник от положения равновесия на $7-10^\circ$ и определите углы α_0 и α_n в соответствии с пп. 4-6.

10. Постройте графики зависимостей $(\alpha_0 - \alpha_n) / 4n = f(\operatorname{ctg} \beta)$ для качения и скольжения по одной из методик, изложенных в прил. 2-5 (методику определяет преподаватель).

11. Определите коэффициенты наклона $A_{ск}$ и A_k линейных зависимостей.

12. Определите средние значения коэффициентов трения скольжения и качения по формулам (1.8), где $\beta = 90^\circ - \gamma$, $R = 0,01 \text{ м}$ – радиус шара.

13. Вычислите средние квадратические отклонения случайной составляющей погрешности результатов измерений по формулам: $S_\mu = S_A$; $S_{\mu_k} = R S_{A_k}$.

14. Найдите доверительные границы погрешности результатов измерений коэффициентов трения согласно прил. 6 и с учетом того, что суммарной неисключённой систематической составляющей погрешности можно пренебречь. Запишите окончательные результаты измерений в виде: $\mu = \langle \mu \rangle \pm \Delta \mu$, $\mu_k = \langle \mu_k \rangle \pm \Delta \mu_k$.

Таблица 1.1

Экспериментальные данные для определения коэффициентов трения

Наименование измерения	Качение								Скольжение							
материал пластины																
материал шарика																
№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
угол γ , град																
угол отклонения α_0 , град																
угол отклонения α_0 , рад																
число колебаний n																
угол отклонения α_n , град																
угол отклонения α_n , рад																
коэффициент трения $\langle \mu \rangle$																

2. МАШИНА АТВУДА

2.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методики выполнения измерений ускорений свободного падения и движения связанной системы грузов с помощью лабораторной установки «Машина Атвуда» с относительной погрешностью не более 15%.

2.2. Средства измерений

Классической установкой для изучения законов кинематики и динамики поступательного движения твердых тел является машина Атвуда. Общий вид лабораторной установки приведен на рис.2.1.

Установка включает в свой состав: основание, вертикальную стойку, верхний кронштейн, кронштейн для установки фотодатчика, фотодатчик.

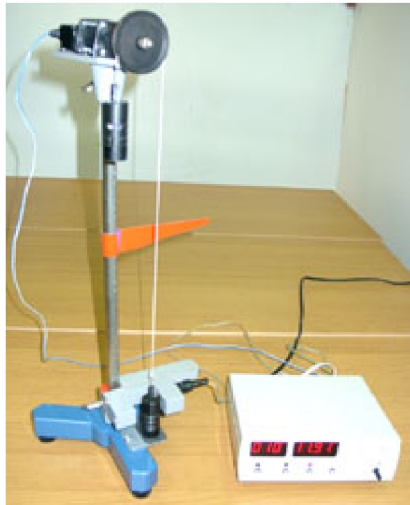


Рис.2.1. Внешний вид лабораторной установки

Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации вертикальной стойки.

Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы, на которой нанесена миллиметровая шкала и крепится визир.

На верхнем кронштейне размещаются узел подшипников с малоинерционным шкивом, через который перекинута капроновая нить с двумя основными грузами и набором разновесов, электромагнитный тормоз, предназначенный для фиксации исходного положения грузов.

Кронштейн для установки фотодатчика имеет зажим для крепления на вертикальной стойке, элементы фиксации фотодатчика, а также площадку с резино-

вым амортизатором, о который ударяется груз при его остановке. Установка работает от блока электронного ФМ 1/1.

2.3. Описание измеряемых величин

Рассмотрим систему связанных нитью грузов. Пусть нить перекинута через блок (шкив). Блок закреплён на оси OZ, проходящей через его центр масс, и может вращаться вокруг неё. Если на концах нити висят грузы одинаковой массы m , система находится в состоянии безразличного равновесия. Когда на один из грузов положен перегрузок массой m_1 , система выходит из равновесия и начинает двигаться равноускоренно под действием силы тяжести перегрузки. При этом, если масса перегрузки $m_1 \ll m$ много меньше массы груза, то движение будет происходить с ускорением $a \ll g$, много меньшим ускорения свободного падения, что существенно увеличивает время движения, позволяя проводить измерения с минимальной погрешностью.

Рис.2.2. Связанная система грузов

На каждый груз (рис.2.2) действуют две силы: сила тяжести и сила натяжения нити. Второй закон Ньютона в векторной форме и в проекции на ось OY для первого и второго грузов соответственно записывается в виде

$$(m + m_1)\vec{g} + \vec{T}_1 = (m + m_1)\vec{a}_1, \quad (m + m_1)g - T_1 = (m + m_1)a_1; \quad (2.1)$$

$$m\vec{g} + \vec{T}_2 = m\vec{a}_2, \quad mg - T_2 = -ma_2. \quad (2.2)$$

Пренебрегая массой блока и нити, а также силой трения в подшипниках оси блока и силой трения скольжения нити по блоку, т.е. полагая $T_1 = T_2 = T$ и $a_1 = a_2 = a$, найдём теоретическое значение ускорения системы грузов из уравнений (2.1) и (2.2)

$$a_T = a = \frac{m_1 g}{2m + m_1}. \quad (2.3)$$

2.4. Методы измерений

2.4.1. Метод измерения ускорения свободного падения с помощью машины Аттвуда

Экспериментальное значение ускорения можно найти, используя уравнение равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью

$$a_2 = \frac{2h}{t^2}, \quad (2.4)$$

где h – длина пути, пройденная одним из грузов, t – время движения грузов.

Ускорение свободного падения находится из соотношения (2.3)

$$a_2 = \frac{m_2(2m + m_2)}{m_2}. \quad (2.5)$$

2.4.2. Метод измерения ускорения связанной системы тел

Соотношение (2.4) можно представить в виде зависимости $t=t(\sqrt{h})$

$$t = \sqrt{\frac{2}{a_2}} \sqrt{h}. \quad (2.6)$$

Измеряя в эксперименте время движения системы грузов для различных длин путей, можно построить график зависимости $t=t(\sqrt{h})$ по одной из методик, изложенных в прил. 2-5 (методику определяет преподаватель), и убедиться, что зависимость линейна. По коэффициенту наклона A линейной зависимости определяется среднее значение ускорения по формуле:

$$\langle a_2 \rangle = \frac{2}{A^2}. \quad (2.7)$$

2.4.3. Оценка силы трения скольжения

Реальное значение ускорения a_2 будет меньше теоретического a_T , найденного по формуле (2.3), т.к. принятая модель не учитывает силу трения в подшипниках оси блока и силу трения скольжения нити по блоку.

Значение силы трения скольжения можно оценить, вводя ее в уравнение (2.1) и сравнивая результат с теоретическим значением (2.3):

$$a_2 = \frac{m_2 g - F_{\text{тр.ск}}}{2m + m_2}, \quad (2.8)$$

откуда

$$F_{\text{тр.ск}} = m_2 g - a_2 (2m + m_2). \quad (2.9)$$

Это выражение с учетом значения a_T , определенного формулой (2.3), удобно переписать в виде:

$$F_{\text{тр.ск}} = (2m + m_2)(a_T - a_2). \quad (2.10)$$

При $m_2 \ll m$ получаем:

$$F_{\text{тр.ск}} = 2m(a_T - a_2). \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.11) видно, что сила трения скольжения вызывает систематическую погрешность в экспериментально найденном значении ускорения.

2.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

2.5.1. Измерение пути и времени движения грузов

1. Перекиньте через шкив нить с двумя наборными грузами равных масс и убедитесь, что система находится в состоянии безразличного равновесия.
2. При помощи регулировочных опор основания произведите, если необходимо, регулировку положения основания, используя для визуального наблюдения в качестве отвеса нить с грузами.
3. Установите кронштейн с фотодатчиком в нижней части шкалы вертикальной стойки так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в красный цвет, совпала с одной из рисок шкалы, а правый груз при движении вниз проходил в центре рабочего окна фотодатчика. Включите в сеть шнур питания блока.
4. Установите правый груз в крайнем верхнем положении и установите визир на уровне нижней плоскости груза.
5. Нажмите клавишу «Сеть» на задней панели блока, при этом должно включиться табло индикации и должен сработать фрикцион электромагнитного тормоза.
6. Снимите с левого груза минимальный перегрузок (разновес минимальной массы).
7. Нажмите кнопку «Пуск» блока. Происходит растормаживание электромагнитного тормоза, правый груз начинает опускаться, и таймер блока начинает отсчёт времени. При пересечении правым грузом оптической оси фотодатчика отсчёт времени прекращается. Запишите показания таймера в графу время движения грузов t в табл. 2.1.
8. Переведите правый груз в верхнее положение. Нажмите на кнопку «Сброс» блока для обнуления показаний таймера и включения электромагнита.
9. Опыт повторите еще два раза с занесением результатов в таблицу 2.1.
10. По шкале вертикальной стойки определите пройденный грузом путь как расстояние от нижней плоскости груза в его верхнем положении (определяется по визиру) до оптической оси фотодатчика (определяется по красной плоскости нижнего кронштейна). Занесите значение пути h в табл. 2.1.

11. Опустите визир на 4-5 см и переведите правый груз в верхнее положение так, чтобы нижняя плоскость груза была на уровне визира. Нажмите кнопку «Сброс» для обнуления показаний таймера и включения электромагнита.

12. Опыты 7-10 проделайте в той же последовательности с двумя другими значениями пути h . По окончании измерений выключите блок клавишей «Сеть».

Таблица 2.1

Определение экспериментальных значений времени движения грузов

Масса перегрузка $m_{\text{п}}$, г	Расстояние h , см	Время движения грузов t , с	Среднее время движения грузов $\langle t \rangle$, с

2.5.2. Определение ускорения свободного падения

1. Найдите значение ускорения по данным табл. 2.1 для максимального значения пути, пройденного грузами, по формуле (2.4).
2. Определите ускорение свободного падения по формуле (2.5).
3. Вычислите теоретическое значение ускорения свободного падения по формуле (П.1.4) прил. 1.
4. Определите абсолютную и относительную погрешности результата измерений величины g по формулам: $\Delta g = |g_{\text{т}} - g_{\text{э}}|$, $\delta = \frac{\Delta g}{g} \cdot 100\%$. Запишите окончательный результат измерений в виде: $g = g_{\text{э}} \pm \Delta g$.

2.5.3. Определение экспериментальных и теоретических значений ускорения системы грузов

1. Заполните первые три столбца табл. 2.2 по данным измерений табл. 2.1.
2. Постройте график зависимости $t = t(\sqrt{h})$ по одной из методик, изложенных в прил. 2-5 (методику определяет преподаватель), и определите коэффициент наклона A линейной зависимости.
3. Сделайте оценку ускорения по формуле (2.7).

Таблица 2.2

Определение значений ускорения системы грузов

Масса перегрузка $m_{\text{п}}$, г	Квадратный корень из значения расстояния $\sqrt{h}$, см ^{1/2}	Среднее время движения грузов $\langle t \rangle$, с	Экспериментальное значение ускорения $a_{\text{э}}$, см/с ²	Теоретическое значение ускорения, $a_{\text{т}}$, см/с ²

4. Найдите среднее квадратическое отклонение (СКО) случайной составляющей погрешности результата измерений ускорения по формуле $S_a = 2a_{\text{э}}S_A/A$, где S_A – СКО измерений коэффициента наклона A .

5. Определите СКО суммарной неисключённой систематической составляющей погрешности результата измерений ускорения по формуле

$$S_{\Theta} = \langle a_y \rangle \sqrt{\frac{\Theta_h^2}{3h^2} + \frac{4\Theta_t^2}{3t^2}}, \text{ где } \Theta_h=0,02\text{см и } \Theta_t=0,001\text{с} - \text{границы неисключённых}$$

систематических погрешностей длины пути h и времени движения t .

6. Сделайте оценку доверительных границ неисключённой систематической составляющей погрешности при доверительной вероятности $\alpha=0,95$ по формуле $\Theta = 1,1\sqrt{3}S_{\Theta}$.

7. Найдите СКО суммарной погрешности результата измерений ускорения грузов по формуле $S = \sqrt{S_a^2 + S_{\Theta}^2}$.

8. Оцените доверительные границы погрешности результата измерений ускорения системы грузов как $\Delta a = \frac{t_{\alpha,(n-1)} \cdot S_a + \Theta}{S_a + S_{\Theta}} S$, где $t_{\alpha,(n-1)}$ – коэффициент

Стьюдента при $\alpha=0,95$ и эффективном числе степеней свободы $f_{\text{эфф}}=(n-1)$.

9. Запишите окончательный результат в виде $a_{\text{э}} = \langle a_{\text{э}} \rangle \pm \Delta a$.

10. Вычислите теоретическое значение ускорения связанной системы грузов по формуле (2.3).

11. Оцените по формуле (2.11) значение силы трения скольжения.

3. МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

3.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методику выполнения измерений с помощью лабораторной установки «Маятник Максвелла ФМ-12» и набора сменных колец момента инерции системы тел с относительной погрешностью не более 10%.

3.2. Средства измерений

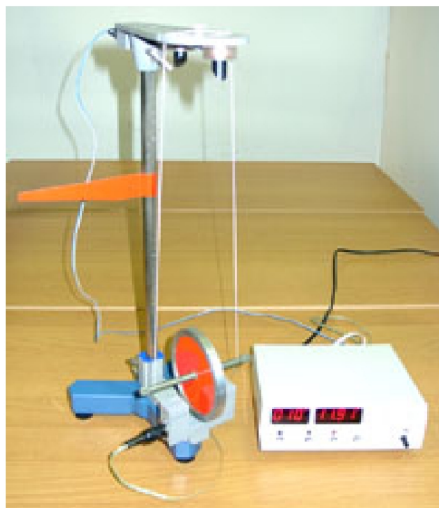


Рис.3.1. Внешний вид лабораторной установки

Внешний вид лабораторной установки «Маятник Максвелла ФМ-12» показан на рис.3.1. Установка включает в свой состав: основание, вертикальную стойку, верхний кронштейн, кронштейн для установки фотодатчика, фотодатчик, диск на осевом стержне, подвешенном на двух нитях; комплект из трёх сменных колец с различными моментами инерции.

Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации вертикальной стойки. Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала, и имеет визир.

На верхнем кронштейне размещаются электромагниты и узел регулировки исходного положения маятника. Установка работает от электронного блока. ФМ 1/1. Время движения маятника определяется по показаниям цифрового таймера, электрический сигнал на который поступает с фотодатчика в момент его прохождения маятником.

Для приведения маятника в движение нити наматываются на осевой стержень, маятник при этом поднимается на некоторую высоту. При освобождении маятника он начинает движение: поступательное вниз под действием силы тя-

жести и вращательное вокруг своей оси симметрии под действием момента сил натяжения нитей. Нити во время движения разматываются до полной длины, раскрутившийся диск продолжает вращательное движение в том же направлении и наматывает нити на осевой стержень, в результате чего он поднимается вверх, замедляя при этом вращение. Дойдя до верхней точки, диск опять опускается вниз и т.д. Диск будет совершать колебания вверх и вниз, поэтому устройство и называют маятником.

3.3. Описание измеряемых величин

Момент инерции (В.1- В.2) есть величина *аддитивная*. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей.

Момент инерции бесконечно тонкого диска относительно оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости, и сплошного цилиндра относительно его продольной геометрической оси равен

$$J = mr^2/2 = md^2/8. \quad (3.1)$$

Маятник Максвелла состоит из трех цилиндрических тел, оси симметрии которых совпадают с осью вращения маятника: диск массой m_d и диаметром d_d ; осевой стержень массой m_0 и диаметром d_0 ; кольцо, надеваемое на диск, массой m_k и диаметром d_k (рис.3.2). Моменты инерции отдельных составных частей маятника вычисляются по формулам, аналогичным (3):

$$\text{для осевого стержня} \quad J_0 = m_0 d_0^2 / 8, \quad (3.2)$$

$$\text{для диска} \quad J_A = m_A d_A^2 / 8, \quad (3.3)$$

$$\text{для сменного кольца} \quad J_E = m_E (d_E^2 + d_A^2) / 8. \quad (3.4)$$

Общий момент инерции маятника со сменным кольцом равен:

$$J = J_0 + J_E + J_A. \quad (3.5)$$

3.4. Методы измерений

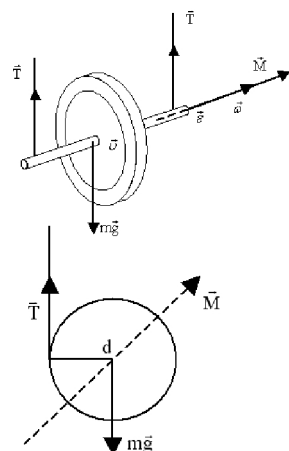
3.4.1. Метод определения моментов инерции тел вращения с помощью маятника Максвелла.

Уравнение поступательного движения центра масс маятника в проекции на направление движения и без учета сил трения имеет вид:

$$mg - 2T = ma, \quad (3.6)$$

где a – ускорение центра масс; T – сила натяжения одной нити.

Маятник приводит во вращательное движение момент сил натяжения нитей, проекция которого на ось вращения OZ по определением (В.8), (В.10) и с учетом уравнения (3.6) равна:



$$M_{T,z} = mr_0(g - a) = J_z \varepsilon_z, \quad (3.7)$$

где J_z – момент инерции маятника относительно оси вращения; ε_z – проекция углового ускорения маятника на эту же ось.

Тангенциальное ускорение наружных точек осевого стержня совпадает с ускорением центра масс маятника. Поэтому проекция углового ускорения ε_z связана с модулем ускорения поступательного движения a соотношением $a = r_0 \varepsilon_z$.

Уравнение измерений для момента инерции маятника следует из (3.7)

$$J_z = mr_0^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) = md_0^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) / 4, \quad (3.8)$$

где r_0 и d_0 – радиус и диаметр осевого стержня

соответственно.

3.4.2. Метод измерения ускорения поступательного движения центра масс маятника Максвелла.

Экспериментальное значение ускорения поступательного движения маятника можно найти из уравнения равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью

$$\dot{a} = 2h / t^2, \quad (3.9)$$

по измеренным в опыте значениям длины пути h , проходимой маятником, и времени его движения t .

Электромагнит, удерживающий маятник в начальном положении, обладает инертностью. После выключения он продолжает удерживать маятник еще некоторое время δt , поэтому отсчет времени начинается на δt секунд раньше начального момента движения маятника. Эту систематическую ошибку можно исключить следующим образом.

Уравнение (3.9), с учетом времени задержки δt маятника электромагнитом,

$$\sqrt{h} = \sqrt{\frac{a}{2}} (t - \delta t) \quad (3.10)$$

представляет собой линейную зависимость $\sqrt{h} = f(t)$ с коэффициентом наклона $A = \sqrt{a/2}$. Коэффициент наклона A определяется по одной из методик, изложенных в прил. 2-5 (по указанию преподавателя).

Величина δt не влияет на наклон прямой, а значит и на значение ускорения, которое определяется в виде

$$a = 2A^2. \quad (3.11)$$

3.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

1. Установите кронштейн с фотодатчиком в крайнее нижнее положение шкалы вертикальной стойки так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в синий цвет, совпала с одной из рисок шкалы. Оптическая ось фотодатчика лежит в данной плоскости кронштейна. Определите координату h_1 окрашенной плоскости кронштейна по миллиметровой шкале вертикальной стойки и запишите значение в таблицу 3.2 в качестве координаты нижней образующей маятника в конце пути.
2. Оденьте одно из трех сменных колец на диск. Используя данные лабораторной установки (табл.3.1), определите значение полной массы маятника и занесите её значение в таблицу 3.2.

Таблица 3.1

Данные лабораторной установки «Маятник Максвелла»

Диаметр осевого стержня d_0 , м	Диаметр диска d_d , м	Диаметр сменного кольца d_K м	Масса осевого стержня m_0 , кг	Масса диска m_d , кг	Масса сменного кольца m_K , кг
0,008	0,09	0,104	0,019	0,1	0,1663
					0,2503
					0,3282

3. Установите с помощью винта регулировки на верхнем кронштейне необходимую длину бифилярного подвеса таким образом, чтобы нижняя образующая сменного кольца маятника находилась на 4-5 мм ниже оптической оси фотодатчика; при этом осевой стержень маятника должен занимать горизонтальное положение. Произведите, если необходимо, регулировку положения осно-

вания при помощи регулировочных опор так, чтобы диск на бифилярном подвесе находился в центре окна фотодатчика.

4. Нажмите красную клавишу "Сеть" на задней панели блока. При этом включаются табло индикации и электромагниты.

5. Вращая маятник по часовой стрелке, зафиксируйте его в верхнем положении при помощи левого (ближнего к стойке) электромагнита, при этом необходимо следить за тем, чтобы нить наматывалась на ось виток к витку. При вращении маятника против часовой стрелки фиксируйте маятник при помощи правого (дальнего от стойки) электромагнита.

6. Определите координату h_0 нижней образующей маятника в верхнем положении, используя линейку в качестве визира, по миллиметровой шкале вертикальной стойки и запишите значение в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Экспериментальные и расчетные данные для нахождения моментов инерции маятника Максвелла

№ измерения	Масса маятника, m , кг	Координата нижней образующей маятника		Длина пройденного пути h , мм	Время поступательного движения маятника t , с	Результаты графоаналитической обработки результатов измерений		
		начальная h_0 , мм	конечная h_1 , мм			A	Ускорение $\langle a \rangle$, м/с ²	Момент инерции J , кг·м ²
1								
2								
3								
4								
6								
7								
8								
9								
11								
12								
13								
14								

7. Нажмите кнопку "Пуск". Происходит выключение электромагнита, маятник начинает раскручиваться, таймер производит отсчёт времени. Отсчёт времени прекращается в момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика. Поднявшийся вновь маятник в верхнем положении задержите рукой и осторожно опустите вниз, размотав нити. Запишите показания таймера в табл. 3.2.

8. Нажмите кнопку «СБРОС» для обнуления таймера и включения электро-

магнита. Приведите маятник в исходное верхнее положение и зафиксируйте его при помощи электромагнита.

9. Поднимите кронштейн с фотодатчиком на 4-5 см, определите координату нижней образующей маятника и запишите значение h_1 в табл.3.2.

10. Для того же сменного кольца проведите измерения времени движения по пп. 6-8.

11. Повторите измерения по пп.9-10 ещё два раза. Результаты занесите в табл. 3.2.

10. Повторите измерения по пп.1-11 для двух других сменных колец.

11. Выключите прибор, нажав клавишу "СЕТЬ".

12. Для каждого маятника постройте графики зависимости $\sqrt{h} = f(t)$ и определите коэффициент наклона A по одной из методик, изложенных в прил. 2-5 (методику определяет преподаватель).

13. Вычислите значения ускорений a по формуле (3.11).

14. Вычислите экспериментальные значения моментов инерции трёх исследуемых маятников с использованием формулы (3.8).

15. Вычислите теоретические (опорные) значения моментов инерции по формулам (3.2) - (3.5).

16. Оцените абсолютную и относительную погрешности измерений моментов инерции для трёх различных масс маятников по формулам:

$$\Delta J = |J_T - J_y|, \quad \delta = \frac{\Delta J}{J_T} 100\%.$$

17. Запишите окончательный результат измерений в виде:

$$J_1 = J_{1y} \pm \Delta J_1; \quad J_2 = J_{2y} \pm \Delta J_1; \quad J_3 = J_{3y} \pm \Delta J_3.$$

4. МАЯТНИК УНИВЕРСАЛЬНЫЙ

4.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методики выполнения измерений ускорения силы тяжести с помощью лабораторной установки «Маятник универсальный ФМ-13» с относительной погрешностью не более 10%.

4.2. Средства измерений

Внешний вид установки «Маятник универсальный ФМ-13» представлен на рис.4.1. Установка включает в свой состав: основание, вертикальную стойку,

математический и физический (оборотный) маятники, имеющие узлы подвеса на верхнем кронштейне, кронштейн для установки фотодатчика, фотодатчик.

Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации вертикальной стойки. Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала.

Математический маятник имеет бифилярный подвес, выполненный из капроновой нити, на которой подвешен груз в виде металлического шарика, и устройство для изменения длины подвеса маятника.

Физический (оборотный) маятник имеет жёсткий металлический стержень с рис-

ками через каждые 10 мм для отсчёта длины, две призматические опоры, два груза с возможностью перемещения и фиксации по всей длине стержня.

Узлы подвески математического и физического (оборотного) маятников расположены на диаметрально расположенных относительно вертикальной стойки сторонах кронштейна.

Установка работает от электронного блока ФМ 1/1. Сигнал с фотодатчика подается на блок, где на табло фиксируется время, за которое совершается

задаваемое экспериментатором число полных колебаний маятника.

4.3. Описание измеряемой величины

Определение величины g см. в прил. 1 данных методических указаний.

4.4. Методы измерений

4.4.1. Метод измерения ускорения силы тяжести с помощью физического (оборотного) маятника

Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , не совпадающую с центром масс C тела (рис.4.2). Точка O называется *точкой подвеса маятника*.

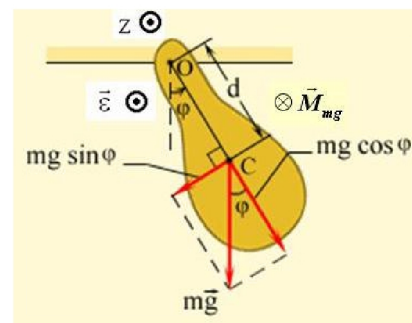


Рис.4.2. Физический маятник

Причиной, вызывающей движение физического маятника после отклонения его от положения равновесия на угол φ , является момент силы тяжести, который по определению (В.8) и в соответствии с основным уравнением динамики вращательного движения (В.10) может быть представлен в виде

$$M_z = -mgd \sin \varphi = J_z \varepsilon_z, \quad (4.1)$$

где m – масса маятника; d – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; J_z – момент инерции физического маятника относительно оси Z ; ε_z – проекция вектора углового ускорения на ось Z .

При малых углах отклонения $\sin \varphi \approx \varphi$ и, используя то, что $\varepsilon = d^2 \varphi / dt^2$, получим:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{J} \varphi = 0. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) – дифференциальное уравнение гармонических колебаний физического маятника с циклической частотой ω_0 и периодом T , равными:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{r0}}{g}}, \quad (4.3)$$

где $l_{\text{ред}} = \frac{J_z}{md}$ – приведенная длина физического маятника.

Точка, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, называется *центром качания* физического маятника. Точка подвеса и центр качания находятся по разные стороны от центра масс C . Точка подвеса и центр качания являются взаимными или сопряженными точками в следующем смысле. Если маятник подвесить за центр качания, то его период не изменится, и прежняя точка подвеса делается новым центром качания. Это положение называется *теоремой Гюйгенса*.

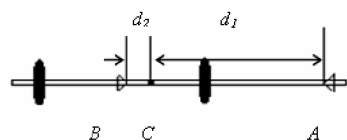


Рис.4.3. Схема расположения грузов на стержне оборотного маятника

На том свойстве, что период малых колебаний при качании вокруг осей, проходящих через точки качания и подвеса, одинаков и расстояние между ними равно приведенной длине физического маятника, основано определение ускорения силы тяжести с помощью оборотного маятника.

Оборотным называется маятник, состоящий из стержня, на котором крепятся тяжелые грузы и легкие опорные призмы, за которые он может поочередно подвешиваться. Перемещением грузов или опорных призм добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными ребрами призм будет равно $l_{\text{пр}}$. Измеряя период колебаний маятника и $l_{\text{пр}}$, можно по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 l_{\text{пр}}}{T^2} \quad (4.4)$$

найти ускорение силы тяжести.

В лабораторной установке относительное положение призм определяется с точностью 0,5%. Поэтому точность определения $\Delta g/g$ не может быть лучше 0,5% и бессмысленно добиваться полного совпадения периодов $T(d_1)$ и $T(d_2)$. В эксперименте достаточно добиться совпадения периодов колебаний с точностью до $(1-5) \cdot 10^{-3}$ с, затем найти расстояние $l_{\text{пр}} = (d_1 + d_2)$ между призмами и по формуле (4.4) определить g .

4.4.2. Метод определения центра масс оборотного маятника

Рассмотрим произвольное расположение подвижных массивных грузов на стержне оборотного маятника, например, в несимметричных положениях (рис.4.3): один груз – у конца стержня, а другой – вблизи его центра.

Периоды колебаний маятника при подвесе за призмы A и B равны соответственно:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mgd_1}} \text{ и } T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mgd_2}}. \quad (4.5)$$

Используя теорему Гюйгенса-Штейнера (В.3): $J_1 = J_C + md_1^2$, $J_2 = J_C + md_2^2$, и решая уравнения (4.5) относительно d_2 , можно определить расстояние BC от левой призмы до центра масс по формуле:

$$d_2 = \frac{4\pi^2 l^2 - g l T_1^2}{8\pi^2 l - g(T_2^2 + T_1^2)}, \quad (4.6)$$

где $d_1 + d_2 = l$ – расстояние между призмами.

4.4.3. Метод измерения ускорения силы тяжести с помощью математического маятника

Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.

Достаточно хорошим приближением к математическому маятнику служит небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. Анализ движения такого маятника проводится в рамках той же абстрактной модели физического маятника. Период колебаний маятника с учетом того, что $J_z = md^2$, где d – длина математического маятника, определится из (4.3) в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}. \quad (4.7)$$

Оценку g можно провести, выполнив однократные измерения с соблюдением требований рассмотренной абстрактной модели по формуле:

$$g = \frac{4\pi^2 d}{T^2}. \quad (4.8)$$

4.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

4.5.1. Измерение ускорения силы тяжести с помощью математического маятника

1. Произведите регулировку положения основания при помощи регулировочных опор, используя для визуального наблюдения в качестве отвеса математический маятник.
2. Установите нижний кронштейн с фотодатчиком в крайнее нижнее положение шкалы так, чтобы плоскость кронштейна, окрашенная в синий цвет, совпала с одной из рисок шкалы.
3. Установите верхний кронштейн таким образом, чтобы шарик математического маятника оказался в рабочей зоне фотодатчика. Установите такое положение шарика, при котором его центральная риска будет совпадать по высоте с риской на фотодатчике. По шкале вертикальной стойки определите длину математического маятника d , как расстояние от точки подвеса (верхнего кронштейна) маятника до центральной риски на шарике (определяется по синей плоскости нижнего кронштейна).
4. Нажмите клавишу «СЕТЬ» на задней панели блока. При этом должно включиться табло индикации.
5. Отведите рукой шарик математического маятника на угол примерно 5-6 градусов и отпустите его.
6. Нажмите кнопку "ПУСК" на блоке и убедитесь, что он регистрирует число и время колебаний маятника. По показанию таймера определите значение времени **20-30** колебаний маятника, нажав кнопку «СТОП». Определите период колебаний маятника как $T=t/n$. Нажмите кнопку «СБРОС» на блоке для обнуления показаний блока.
7. Выключите прибор, нажав клавишу "СЕТЬ".
8. Вычислите ускорение силы тяжести при наибольшем значении длины подвеса d по формуле (4.8).
9. Оцените доверительные границы неисклѐнной систематической погрешности результата измерения g_{Σ} по формуле $\Delta g = 1,1 g_{\Sigma} \sqrt{\frac{\Delta d^2}{d^2} + 4 \frac{\Delta T^2}{T^2} + 4 \frac{\Delta \pi^2}{\pi^2}}$, где $\Delta d = 0,001\text{ м}$; $\Delta T = 0,001\text{ с}$; $\Delta \pi = 0,0016$ и $\pi = 3,14$. Окончательный результат запишите в виде $g = g_{\Sigma} \pm \Delta g$, $\delta = \frac{\Delta g}{g} 100\%$.

4.5.2. Определение центра масс физического маятника

1. Поверните верхний кронштейн так, чтобы узел подвески оборотного маятника оказался над фотодатчиком.
2. Закрепите подвижные массивные грузы на стержне оборотного маятника в несимметричных положениях (рис.4.3): один груз – у левого конца стержня, а другой – вблизи его центра, при этом одна из опорных призм (первая) укрепляется вблизи правого конца стержня, а вторая – между грузами ближе к левому концу стержня.
3. Подвесьте маятник на острое ребро первой призмы так, чтобы ребро призмы одновременно касалось обоих стержней узла подвески штатива, и нижний конец стержня оборотного маятника мог свободно перемещаться через прорезь фотодатчика и при этом перекрывал луч лампочки фотодатчика.
4. Включите установку, нажав клавишу "СЕТЬ" на задней панели блока.
5. Отклоните маятник на угол примерно 5-6 градусов и без толчка отпустите его. Нажмите кнопку «ПУСК» на блоке. По показанию таймера определите значение времени **10-15** колебаний маятника, нажав кнопку «СТОП». Определите период колебаний маятника как $T(d_1) = T_1 = t/n$. Нажмите кнопку «СБРОС» на блоке для обнуления показаний блока.
6. Снимите маятник, переверните и подвесьте его на другой (левой) призматической опоре. Определите аналогично по п.4 период колебаний T_2 .
7. Выключите прибор, нажав клавишу "СЕТЬ".
8. Снимите маятник и измерьте расстояние l между призматическими опорами, подсчитав число рисок между ними.
9. Определите расстояние d_2 от центра масс до точки подвеса по формуле (4.6).

4.5.3. Измерение ускорения силы тяжести с помощью оборотного маятника

1. Установите призму между грузами левее центра масс на небольшом расстоянии d_2 (10-20 мм).
2. Подвесьте маятник на острое ребро правой призмы (находящейся вблизи конца стержня) так, чтобы нижний конец стержня оборотного маятника мог свободно перемещаться через прорезь фотодатчика и при этом перекрывал луч лампочки фотодатчика.

3. Включите блок клавишей "СЕТЬ" на задней панели. Отклоните маятник на угол примерно 5-6 градусов и без толчка отпустите его. Нажмите кнопку «ПУСК» на блоке. По показанию таймера определите значение времени **10-15** колебаний маятника, нажав кнопку «СТОП». Определите период колебаний маятника $T(d_1)=T_1=t/n$.

4. Снимите маятник с кронштейна, переверните его и подвесьте на ребре левой призмы (находящейся между грузами), **не изменяя положения грузов**. Аналогичным образом измерьте период $T(d_2)=T_2$ по 10 колебаниям маятника. Сравните значение периода $T(d_2)$ с $T(d_1)$. Если $T(d_2) > T(d_1)$, то маятник снимают со штатива, призму передвигают **дальше** от центра масс на одно деление на стержне и снова измеряют период колебаний. Если $T(d_2) < T(d_1)$, то призму передвигают **ближе** к центру масс на одно деление и измеряют период колебаний. Добейтесь совпадения периода $T(d_2)$ с $T(d_1)$. Равенство $T(d_2)=T(d_1)$ должно выполняться с точностью 0,005 с. Выключите блок клавишей «Сеть».

5. Определите приведённую длину оборотного маятника l_{np} , подсчитав число нарезов на стержне между ножами призм. Результаты измерений занесите в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Экспериментальные и расчетные данные для нахождения ускорения силы тяжести с помощью оборотного маятника

№ призмы	Число колебаний n	Время колебаний t , с	Период колебаний T , с	Приведенная длина маятника l_{np} , м
1				
2				

6. По формуле (4.4) определите ускорение силы тяжести g_{Σ} , где $T = T(d_1)$.

7. Оцените доверительные границы неисклѐченной систематической погрешности результата измерения g по формуле: $\Delta g = 1,1 g_{\Sigma} \sqrt{\frac{\Delta l_{np}^2}{l_{np}^2} + 4 \frac{\Delta T^2}{T^2} + 4 \frac{\Delta \pi^2}{\pi^2}}$, где $\Delta l_{np}=0,002$ м; $\Delta T=0,005$ с; $\Delta \pi=0,0016$ при $\pi=3,14$. Окончательный результат запишите в виде $g = g_{\Sigma} \pm \Delta g$, $\delta = \frac{\Delta g}{g} 100\%$.

8. Вычислите теоретическое значение ускорения силы тяжести g_T по формуле (П.1.4) и сделайте вывод о попадании g_T в доверительные границы измеренной величины g_{Σ} для математического и физического маятников.

5. УНИФИЛЯРНЫЙ ПОДВЕС

5.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методику выполнения измерений с помощью лабораторной установки «Унифилярный подвес ФМ-15» скорости полѐта «снаряда» и главных моментов инерции параллелепипеда с погрешностью не более 10%.

5.2. Средства измерений

Общий вид лабораторной установки «Унифилярный подвес ФМ-15» представлен на рис.5.1. Установка включает в свой состав: основание, вертикаль-

ную стойку, верхний, нижний и средний кронштейны, набор «снарядов» различной массы, набор исследуемых образцов.

Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации стойки. Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы. Верхний и нижний кронштейны предназначены для крепления узлов подвески и натяжения торсиона (стальной проволоки), с которым связана металлическая рамка с грузами, предназначенная для установки съёмной мишени с противовесом и исследуемых образ-



Рис. 5.1. Общий вид лабораторной установки ФМ 15

цов. На среднем кронштейне, на котором нанесена шкала отсѐта угла закручивания торсиона, расположены:

- спусковое устройство, предназначенное для производства «выстрела»;
- электромагнит, предназначенный для удерживания рамки в исходном положении и её освобождения (при этом возникают крутильные колебания рамки вокруг вертикальной оси);

- фотодатчик, предназначенный для определения периода колебаний металлической рамки с исследуемыми образцами и без них;
- съёмная мишень, предназначенная для попадания «снарядов» после «выстрела».

5.3. Описание измеряемых величин

Из определений (В.1-В.2) следует, что момент инерции есть величина *аддитивная*. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей. Кроме того, величина момента инерции тела зависит от положения оси вращения в пространстве.

Поскольку ось вращения тела можно выбрать произвольно, то в общем случае существует сколь угодно большое число моментов инерции данного тела относительно этих осей.

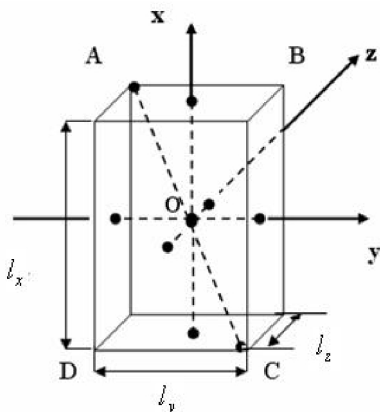


Рис.5.2. Главные оси инерции однородного параллелепипеда

Опыт показывает, что если тело привести во вращение вокруг произвольно выбранной оси, а затем предоставить его самому себе, то положение оси вращения в пространстве в общем случае изменится. Однако существуют такие оси вращения тела, которые не изменяют своей ориентации в пространстве и после того, как будет устранено действие на тело внешних сил. Такие оси называются свободными осями.

Для тела любой формы с произвольным распределением массы существует три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс тела свободные

оси, которые называются главными осями инерции тела.

Моменты инерции относительно главных осей инерции называются главными моментами инерции тела. При отсутствии внешних воздействий устойчивым оказывается только вращение вокруг главных осей, соответствующих максимальному и минимальному значениям инерции. В общем случае эти моменты различны: $J_1 \neq J_2 \neq J_3$.

Для однородного параллелепипеда главными осями инерции являются оси, проходящие через центры противоположных граней и центр масс (рис.5.2).

Главные моменты инерции параллелепипеда относительно осей x , y , z равны соответственно:

$$J_x = \frac{1}{12} m(l_y^2 + l_z^2), \quad J_y = \frac{1}{12} m(l_x^2 + l_z^2), \quad J_z = \frac{1}{12} m(l_x^2 + l_y^2), \quad (5.1)$$

где m – масса параллелепипеда; l_x , l_y , l_z – его длины по осям x , y , z .

Совокупность всех возможных моментов инерции данного тела составляет поверхность вращения, которая называется эллипсоидом инерции. Его полуоси совпадают с главными осями инерции тела.

Отметим, что для однородного куба: $J_x = J_y = J_z = J$.

5.4. Методы измерений

Моменты инерции твёрдого тела могут быть измерены методом крутильных колебаний. *Крутильный маятник* в данной работе представляет собой рамку, в которую закрепляется исследуемое тело, подвешенную на тонкой упругой струне (проволоке). При повороте маятника из положения равновесия на некоторый угол φ закручивающие силы создают вращающий момент M относительно продольной оси струны. Закон Гука для деформации кручения струны записывается в виде:

$$M = A\varphi, \quad (5.2)$$

где A – постоянная для данной проволоки величина, называемая её модулем кручения.

На маятник со стороны струны действует упругий момент, возвращающий рамку в положение равновесия и вызывающий колебательное движение маятника:

$$M_{\text{упр}} = -M. \quad (5.3)$$

Движение маятника без учета момента сил трения, приводящего к затуханию колебаний, описывается уравнением динамики вращательного движения (В.10), которое с учетом (5.2) и (5.3) легко привести к уравнению гармонического осциллятора:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (5.4)$$

где $\omega_0 = \sqrt{A/J_i}$ – циклическая частота колебаний крутильного маятника;

J_i – момент инерции маятника относительно оси вращения.

Период колебаний маятника определяется по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J_i}{A}}. \quad (5.5)$$

5.4.1. Метод определения модуля кручения проволоки и момента инерции пустой рамки

Момент инерции маятника J_m равен сумме момента инерции пустой рамки J_0 и момента инерции исследуемого тела J :

$$J_m = J_0 + J. \quad (5.6)$$

Из уравнения для периода колебаний маятника (5.5) следует, что момент инерции исследуемого тела равен:

$$J = \frac{A}{4\pi^2} T^2 - J_0. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) является уравнением прямой $y = Ax + B$, где $x = T^2$ и $y = J$. Уравнение (5.7) можно использовать как основу метода определения модуля кручения струны и момента инерции пустой рамки, если экспериментально определить периоды колебаний крутильного маятника при различной ориентации образца по отношению к оси маятника; вычислить соответствующие теоретические значения моментов инерции образца по формулам (5.1); построить график линейной зависимости $J = J(T^2)$ по одной из методик, изложенных в прил. 2-5; определить коэффициент наклона линейной зависимости A и координату B пересечения прямой $J = J(T^2)$ с осью ординат.

Тогда модуль кручения определяется по формуле:

$$A = 4\pi^2 A, \quad (5.8)$$

а момент инерции пустой рамки равен:

$$J_0 = -B. \quad (5.9)$$

5.4.2. Метод определения экспериментальных значений моментов инерции твердых тел

Из уравнения (5.5) следует, что отношение квадратов периодов колебаний маятника T^2 с исследуемым твёрдым телом (однородным параллелепипедом) и пустой рамки T_0^2 равно отношению соответствующих моментов инерции

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{J_i}{J_0}. \quad (5.10)$$

Уравнение измерений для определения одного из главных моментов инерции исследуемого образца можно найти из (5.6) и (5.10):

$$J = J_0 \left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right). \quad (5.11)$$

5.4.3. Метод экспериментального определения скорости полёта «снаряда»

Крутильный баллистический маятник можно использовать для определения скорости полёта «снаряда». В эксперименте «снаряд» массой m_n , летящий со скоростью v , попадает в закреплённую на маятнике мишень и застревает в ней, вызывая отклонение маятника от положения равновесия на угол φ .

В момент удара систему «маятник-снаряд» можно считать замкнутой, поскольку сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю. В такой системе выполняется закон сохранения момента импульса:

$$L_c + L_i = L'_{c+i}, \quad (5.12)$$

где $L_i = J_i \omega_0 = 0$ – момент импульса маятника в начальный момент удара, маятник покоится, и угловая скорость вращения маятника равна нулю; $L_c = m_c v l$ – момент импульса снаряда в начальный момент удара; l – расстояние от оси вращения маятника до линии полёта «снаряда»; v – скорость полёта снаряда в начальный момент удара; $L'_{c+i} = J_{c+i} \omega = (J_i + m_c l^2) \omega$ – момент импульса маятника вместе с застрявшим в результате неупругого удара «снарядом»: после удара и «снаряд», и соответствующая точка мишени на стержне будут двигаться с одинаковыми скоростями; ω – угловая скорость вращения маятника в конце удара.

Поскольку в эксперименте масса «снаряда» m_c мала, то моментом инерции «снаряда» по сравнению моментом инерции маятника J_i можно пренебречь. Тогда выражение (5.12) приобретает вид:

$$J_i \omega = m_c v l. \quad (5.13)$$

После удара маятник будет совершать колебания. Если затухание мало, то полная энергия маятника за период почти не изменится. По закону сохранения энергии кинетическая энергия W_K (В.11) в начале движения маятника равна потенциальной энергии W_{II} в положении максимального отклонения:

$$\frac{J_i \omega^2}{2} = \frac{A \varphi^2}{2}. \quad (5.14)$$

Решая уравнения (5.13) и (5.14) относительно v получаем, что скорость полёта снаряда в начальный момент удара равна:

$$v = \frac{\sqrt{J_i} \Lambda \varphi}{m_c l} . \quad (5.15)$$

Из уравнения (5.5) следует, что отношение квадратов периодов колебаний маятника T^2 с мишенью и пустой рамки T_0^2 равно отношению соответствующих моментов инерции:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{J_i}{J_0} , \quad (5.16)$$

т.е. момент инерции маятника равен:

$$J_i = J_0 \frac{T^2}{T_0^2} . \quad (5.17)$$

Подстановка (5.17) в выражение (5.15) приводит к уравнению измерений для скорости «снаряда»:

$$v = \frac{\sqrt{J_0 \Lambda \varphi T}}{m_c l T_0} . \quad (5.18)$$

5.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

5.5.1 Определение теоретических и экспериментальных значений главных моментов инерции образца, модуля кручения струны и момента инерции пустой рамки

1. Вычислите по формулам (5.1) теоретические значения главных моментов инерции и занесите результаты в табл. 5.1.
2. Ознакомьтесь с внешним видом прибора. С помощью регулируемых ножек основания прибора установите, если необходимо, струну, через которую проходит ось вращения рамки, вертикально.
3. Определите период колебаний T_0 пустой рамки для $n=10-15$ полных колебаний. Для этого закрепите электромагнит среднего кронштейна установки на уровне 30° по шкале отсчёта угла. Подключите сетевой шнур блока питания к электрической сети лаборатории и включите блок красной клавишей «Сеть» на задней панели. Отклоните рамку и зафиксируйте флажок рамки с помощью электромагнита. Нажмите клавишу "Пуск" блока для выключения электромагнита, при этом рамка начинает совершать колебания. После нажатия на кнопку "Стоп" на индикаторном табло прибора будет зафиксировано время t , за которое рамка совершит n полных колебаний. Запишите результаты в табл. 5.1 и нажмите клавишу «Сброс» для обнуления показаний индикаторного табло.

4. Установите исследуемый образец в рамку так, чтобы одна из его главных осей совпала с осью вращения рамки. Для этого:

- отвинтите гайки зажимов подвижной балки рамки; поднимите балку, придерживая другой рукой нижнюю неподвижную сторону рамки; осторожно установите образец так, чтобы острие нижнего центровочного винта рамки входило в углубление на образце по какой-либо из главных осей;
- придерживая рукой нижнюю сторону рамки и не допуская нагрузки на верхнюю часть проволоки, опустите подвижную балку так, чтобы конец центровочного винта вошел в нужное углубление на образце; подтяните гайки зажимов на подвижной балке;
- при установке образца и его последующем снятии из рамки производите действия так, чтобы не нагружать проволоки при перемещениях подвижной балки.

Таблица 5.1

Экспериментальное определение периодов колебаний

Наименование колебательной системы	Число колебаний n	Время колебаний t , с	Период колебаний T , с	Квадрат периода колебаний T^2, c^2	Моменты инерции параллелепипеда	
					$J_x, кг \cdot м^2$	$J_T, кг \cdot м^2$
Пустая рамка						
Рамка с твёрдым телом ось OX						
Рамка с твёрдым телом ось OY						
Рамка с твёрдым телом ось OZ						

5. Определите периоды колебаний T_x, T_y, T_z рамки с образцом, ориентированным вдоль трёх главных осей инерции, для $n=10-15$ полных колебаний. Результаты занесите в табл. 5.1.
6. Выньте образец из рамки и выключите блок клавишей «Сеть».
7. Постройте график зависимости $J_T = J_T(T^2)$ по одной из методик, изложенной в прил. 2-5 (по указанию преподавателя). Определите коэффициент наклона A .
8. Определите модуль кручения Λ по формуле (5.8).
9. Определите момент инерции пустой рамки по формуле (5.9).
10. Вычислите экспериментальные значения главных моментов инерции по формуле (5.11).
11. Оцените абсолютную и относительную погрешности результата измерений

моментов инерции по формулам $\Delta J = |J_T - J|$, $\delta = \frac{\Delta J}{J_T} 100\%$.

12. Запишите окончательный результат измерений для трёх главных моментов инерции исследуемого образца в виде: $J = J_T \pm \Delta J$.

5.5.2 Определение скорости полёта снаряда методом крутильного баллистического маятника

1. Установите мишень в рамку. Для этого вставьте стержень, на котором крепится мишень, в отверстия металлических креплений в нижней части рамки. Закрепите стержень винтами крепления. На противоположный по отношению к мишени конец стержня закрепите груз-противовес так, чтобы груз и мишень располагались приблизительно симметрично относительно рамки. Убедитесь, что мишень находится на линии «выстрела», а флажок рамки в её исходном положении пересекает оптическую ось фотодатчика.

Таблица 5.2

Экспериментальные значения физических величин для определения скорости полёта снаряда методом крутильного баллистического маятника

№ опыта	Угол начального положения флажка рамки φ_0 , рад	Угол максимального отклонения рамки $\varphi_{\max}$, рад	Амплитуда колебаний рамки φ , рад	Расстояние от оси вращения рамки до центра отпечатка «снаряда» на мишени l , м	Масса снаряда m_s , кг	Период колебаний рамки с мишенью T , с	Скорость полёта снаряда v , м/с	Среднее значение скорости снаряда $\langle v \rangle$, м/с
1								
2								
3								
4								
5								

- По шкале отсчёта угла определите начальное положение флажка рамки φ_0 .
- Взведите пружину спускового устройства, установите «снаряд» на направляющий стержень спускового устройства и произведите «выстрел».
- Определите максимальное отклонение флажка рамки $\varphi_{\max}$ по шкале отсчёта угла и амплитуду колебаний флажка рамки $\varphi = \varphi_{\max} - \varphi_0$.

- Измерьте при помощи линейки расстояние l от оси вращения рамки до центра отпечатка «снаряда» на мишени.
- Произведите не менее пяти «выстрелов», выполняя пп.3-5 раздела 5.5.2 и внося результаты измерений в табл. 5.2.
- Включите блок питания клавишей «Сеть» на задней панели.
- Определите период колебаний $T = t/n$ рамки с мишенью для $n=10-15$ полных колебаний.
- Выключите блок питания клавишей «Сеть».
- Вычислите скорость полёта «снаряда» по формуле (5.18).
- Найдите среднее квадратическое отклонение (СКО) случайной составляющей погрешности результата измерений скорости «снаряда» по формуле:

$$S_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \langle v \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

- Определите СКО суммарной неисключённой систематической составляющей погрешности результата измерений скорости как:

$$S_\Theta = \langle v \rangle \sqrt{\frac{\Theta_\varphi^2}{3\varphi^2} + \frac{2\Theta_T^2}{3T^2} + \frac{\Theta_l^2}{3l^2}}, \text{ где } \Theta_\varphi=0,1\text{град; } \Theta_T=0,01\text{с и } \Theta_l=0,5\text{мм} - \text{границы}$$

неисключённых систематических погрешностей угла отклонения рамки φ , периода колебаний T и расстояния от оси вращения до линии полёта «снаряда» l .

- Сделайте оценку доверительных границ неисключённой систематической составляющей погрешности при доверительной вероятности $\alpha=0,95$ по формуле: $\Theta = 1,1\sqrt{3}S_\Theta$.

- Найдите СКО суммарной погрешности результата измерений скорости полёта «снаряда» по формуле: $S = \sqrt{S_a^2 + S_\Theta^2}$.

- Оцените доверительные границы погрешности результата измерений скорости как: $\Delta v = \frac{t_{\alpha,(n-1)} \cdot S_v + \Theta}{S_v + S_\Theta} S$, где $t_{\alpha,(n-1)}$ – коэффициент Стьюдента при

$\alpha=0,95$ и эффективном числе степеней свободы $f_{\text{эфф}} = (n-1)$.

- Запишите окончательный результат измерений в виде: $v = \langle v \rangle \pm \Delta v$.

6. МАЯТНИК ОБЕРБЕКА

6.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методику выполнения измерений момента инерции маятника Обербека с помощью лабораторной установки «Маятник Обербека ФМ-14» с относительной погрешностью не более 10%.

6.2. Средства измерений

Установка лабораторная «Маятник Обербека ФМ-14» включает в свой состав: основание, вертикальную стойку, верхний и средний кронштейны, кронштейн для установки фотодатчика, фотодатчик (рис. 6.1).



Рис.6.1. Внешний вид лабораторной установки

Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации стойки.

Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы, на которую нанесена миллиметровая шкала, и имеет визир.

На верхнем кронштейне размещается узел подшипников с малоинерционным шкивом изменения направления движения капроновой нити, на которой подвешен наборный груз.

На среднем кронштейне размещены: узел подшипников, на оси которого с одной стороны закреплён двухступенчатый шкив, на котором имеется приспособле-

ние для закрепления капроновой нити, а с другой стороны находится крестовина, представляющая собой четыре металлических стержня. На металлических стержнях через каждые 10 мм нанесены риски.

Грузы закреплены на металлических стержнях и могут свободно переме-

щаться и фиксироваться на каждом стержне, что даёт возможность ступенчатого изменения моментов инерции крестовины.

Электромагнитный тормоз предназначен для фиксации подвижной системы в начале эксперимента, выдачи электрического сигнала начала отсчёта времени и торможения подвижной системы после завершения отсчёта времени.

Установка работает от электронного блока. На лицевой панели блока расположены кнопки управления, имеющие следующие назначения: «Сброс» – обнуление показаний индикаторного табло и включение электромагнита; «Пуск» – запуск отсчёта времени и отключение электромагнита; «Стоп» – завершение отсчёта времени.

На задней панели блока расположена кнопка «Сеть» – включение и выключение сетевого напряжения.

6.3. Описание измеряемых величин

Момент инерции маятника Обербека зависит от положения четырех грузов на стержнях относительно оси вращения, проходящей через центр крестовины, и, исходя из свойства аддитивности моментов инерции, равен

$$J = J_0 + 4J_\mu, \quad (6.1)$$

где J_0 – момент инерции крестовины; J_μ – момент инерции грузов μ относительно оси, проходящей через центр крестовины.

Момент инерции крестовины J_0 определяется по формуле

$$J_0 = 2m_1 l_1^2 / 12, \quad (6.2)$$

где l_1 – длина одного из стержней крестовины, m_1 – масса стержня.

На основании теоремы Гюйгенса - Штейнера для одного груза μ

$$J_\mu = J_{\mu_0} + \mu l^2, \quad (6.3)$$

где J_{μ_0} – момент инерции груза на стержне относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси вращения; l – расстояние между осью вращения маятника и параллельной осью, проходящей через центр масс груза μ .

Груз представляет собой цилиндр, момент инерции которого относительно оси, проходящей через его центр масс параллельно оси вращения, а значит, перпендикулярно к оси цилиндра, определяется как

$$J_{\mu_0} = \frac{\mu d^2}{16} + \frac{\mu H^2}{12}, \quad (6.4)$$

где d – диаметр цилиндра, H – высота цилиндра.

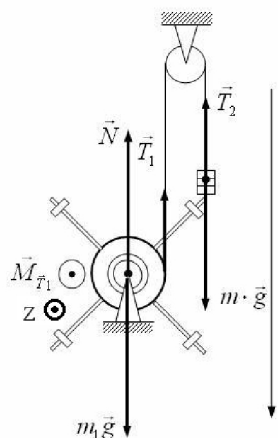
После подстановки (6.2) – (6.4) в (6.1) получаем формулу для определения теоретического значения момента инерции маятника Обербека

$$J = J_T = J_0 + 4J_{\mu_0} + 4\mu l^2 = J_0 + \frac{\mu d^2}{4} + \frac{\mu H^2}{3} + 4\mu l^2. \quad (6.5)$$

6.4. Методы измерений

6.4.1. Определение момента инерции маятника Обербека

Момент инерции маятника Обербека может быть найден из основного уравнения динамики твёрдого тела, вращающегося относительно неподвижной оси (В.10), по значениям проекций на ось вращения результирующего момента внешних сил и углового ускорения.



В данной установке *поступательное* равноускоренное движение совершает груз m . На него действуют силы (рис.6.2): $m\vec{g}$ – сила тяжести груза; $\vec{T}_2$ – сила натяжения нити.

Вращательное движение совершает шкив вместе с прикрепленными к нему телами (крестовиной с четырьмя грузами μ). Силы, действующие на шкив: $\vec{N}$ – сила реакции оси вращения; $m_1\vec{g}$ – сила тяжести шкива вместе с прикрепленными к нему телами; $\vec{T}_1$ – сила натяжения нити.

Моменты сил тяжести $m_1\vec{g}$ и силы реакции оси вращения $\vec{N}$ относительно оси Z , проходящей через ось вращения, равны нулю

(линии действия сил пересекают ось Z). Проекции вектора углового ускорения на ось Z и вектора момента силы натяжения положительны: $\varepsilon_z = \varepsilon$; $M_{T_1 Z} = M_{T_1}$.

Из определения момента силы (В.8) следует

$$M_{T_1} = T_1 r, \quad (6.6)$$

где r – радиус шкива. Если пренебречь массой блока, через который переброшена нить груза m , то $T_1 \approx T_2$. Силу натяжения нити T_2 можно найти из второго закона Ньютона для поступательного движения груза m :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= m\vec{g} + \vec{T}_2 \\ OX: \quad ma &= mg - T_2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

С учётом момента силы трения в оси $M_{\delta\delta}$ и выражения (6.7) основное уравнение динамики (В.10) принимает вид

$$m(g - a)r - M_{\delta\delta} = J\varepsilon. \quad (6.8)$$

Учитывая, что тангенциальное ускорение наружных точек шкива совпадает с ускорением поступательного движения груза $a_\tau = a$, угловое ускорение шкива ε определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r} = \frac{a}{r} = \frac{4h}{Dt^2}, \quad (6.9)$$

где D – диаметр шкива. Ускорение a поступательного движения груза находится из уравнения равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью по измерениям времени движения груза t и длины пройденного грузом пути h по формуле

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.8) является уравнением прямой $y = Ax + B$ в осях координат $y = M_T = m(g - a)r$, $x = \varepsilon$ с коэффициентом наклона

$$A = J \quad (6.11)$$

и точкой пересечения с осью ординат $B = M_{\delta\delta}$. Определение коэффициента наклона A и построение графика линейной зависимости $M = M(\varepsilon)$ выполняются в соответствии с одной из методик, изложенных в прил. 2-5 (методику определяет преподаватель).

6.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

6.5.1. Определение момента инерции маятника Обербека

1. Ознакомьтесь с внешним видом прибора. Приведите, если необходимо, колонну прибора к вертикальному положению при помощи регулируемых ножек основания. Включите сетевой шнур блока в сеть питания.

2. Закрепите грузы μ на стержнях крестовины на одинаковом расстоянии l (0,13-0,14 м) от оси вращения маятника (первая от оси риска на стержне соответствует значению $l=0,02\text{м}$). Запишите установленное значение l табл. 6.1.
3. Установите кронштейн с фотодатчиком в нижней части шкалы вертикальной стойки так, чтобы красная плоскость кронштейна совпала с одной из рисок шкалы, а наборный груз при движении вниз проходил по центру рабочего окна фотодатчика. Красная плоскость кронштейна находится на одном уровне с риской на корпусе фотодатчика и его оптической осью.
4. Установите при помощи разновесов определённую массу наборного груза m и запишите это значение в табл. 6.1. Поставьте наборный груз m на резиновый амортизатор кронштейна, перекиньте нить через верхний блок, вставьте конец нити в прорезь на большой ступени шкива и намотайте нить на *большую ступень шкива* вращением крестовины против часовой стрелки. Переместите грузы m в крайнее верхнее положение таким образом, чтобы нижняя плоскость груза по визиру совпала с одной из рисок шкалы вертикальной стойки.
5. Нажмите красную клавишу «Сеть» на задней панели блока. Убедитесь, что произошла блокировка маятника, светятся индикаторы таймера блока и фотоэлектрического датчика.
6. Снимите отсчеты по миллиметровой шкале, соответствующие нижней плоскости грузов в верхнем положении h_2 (определяется по визиру) и нижнем положении h_1 (определяется по красной плоскости нижнего кронштейна). Занесите значение длины пути $h = h_2 - h_1$ поступательного движения грузов в табл. 6.1. Все последующие опыты проводите при постоянном значении величины h , при этом перемещение наборного груза должно быть не менее 0,25 м.
7. Нажмите клавишу "Пуск", при этом происходят движение грузов и вращение маятника. После остановки груза прочитайте время движения грузов на индикаторе таймера и запишите его значение в табл. 6.1.
8. Переведите вращением крестовины маятника против часовой стрелки груз m в верхнее положение, нажмите клавишу "Сброс" для блокировки маятника и обнуления показаний таймера.
9. Измерения времени по пунктам 7-8 повторите еще два раза для той же самой массы грузов m .
10. Повторите аналогичные измерения времени еще для двух значений масс m грузов.
11. Передвиньте грузы на крестовине ближе к оси вращения на 0,02-0,04м и

занесите значение l в таблицу 6.1.

12. Проведите аналогичную серию измерений для малой ступени шкива.

13. Найдите среднее значение времени $\langle t \rangle$ поступательного движения груза в серии трёх равноточных измерений.

Таблица 6.1

Экспериментальные и расчетные данные для нахождения зависимости углового ускорения от момента приложенной силы

Путь, пройденный грузом h , м	Расстояние от оси вращения до центра масс груза на крестовине l , м	Диаметр шкива D , м	Масса грузов на нити m , кг	Время поступательного движения грузов t , с	Среднее время поступательного движения грузов $\langle t \rangle$, с	Ускорение $\langle a \rangle$, м/с ²	Угловое ускорение маятника ε , с ⁻²	Момент силы натяжения нити M , Н·м

14. Определите среднее ускорение $\langle a \rangle$ в серии трёх равноточных измерений из соотношения (6.10).

15. Вычислите угловое ускорение маятника ε по формуле (6.9), используя данные лабораторной установки (табл.6.2).

16. Рассчитайте момент силы натяжения нити M по формуле (6.11).

17. По данным табл.6.1 постройте график зависимости $M=f(\varepsilon)$ для первого

цикла измерений (когда грузы μ находятся на расстоянии l_1 от оси вала) и аналогичный график для второго цикла измерений (когда грузы μ находятся на расстоянии l_2 от оси вала) одним из методов, описанных в прил. 2-5. Определите коэффициенты наклона A_1 и A_2 .

18. Определите экспериментальные значения моментов инерции маятника Обербека из соотношения (6.12) для двух циклов.

19. Вычислите теоретические значения моментов инерции маятника Обербека по формуле (6.5) для двух циклов, используя данные лабораторной установки (табл.6.2).

Таблица 6.2

Данные лабораторной установки «Маятник Обербека»

Диаметр большо- го шки- ва D_1 , м	Диаметр малого шкива D_2 , м	Диаметр груза на крестови- не d , м	Длина образую- щей груза на кресто- вине H , м	Масса груза на кресто- вине μ , кг	Масса стержня кресто- вины m_1 , кг	Длина стержня крестови- ны l_1 , м
0,07	0,04	0,03	0,02	0,114	0,023	0,15

20. Оцените абсолютную и относительную погрешности результата измерений моментов инерции по формулам $\Delta J = |J_T - J_y|$, $\delta = \frac{\Delta J}{J_T} 100\%$.

21. Запишите окончательные результаты измерений в виде: $J = J_y \pm \Delta J$.

22. Определите по графику момент силы трения $M_{тр}$.

7. ГИРОСКОП

7.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методику выполнения измерений моментов импульса и инерции гироскопа с помощью лабораторной установки «Гироскоп ФМ-18М» с относительной погрешностью не более 10%.

7.2. Средства измерений

Гироскоп ФМ-18М представлен на рис. 7.1 и включает в свой состав: осно-

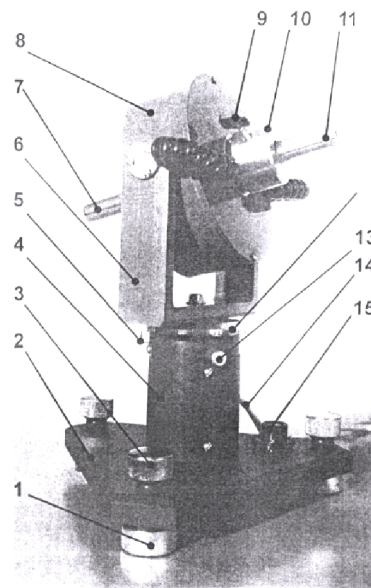
вание 2; корпус 4 с узлом подшипников, вертикальным валом с винтом фиксации 13 и коллектором. На валу установлены лимб 12 и вилка 6. На вилке установлена гироскопическая система 8. Основание 2 снабжено тремя регулируемыми опорами 1 с фиксирующими винтами 3 и уровнем 15.

Лимб 12 и указатель 5, установленный на корпусе 4, предназначены для определения угла поворота гироскопической системы во время прецессирования.

Гироскопическая система 8 состоит из электродвигателя – маховика с встроенным датчиком скорости вращения, стержней 7 и 11. На стержни в процессе работы устанавливается противовес 10 с фиксирующим винтом 9. Гироскопическая система предварительно (при наладке установки) свободно уравновешена.

Стержни 7 и 11 и противовес 10 предназначены для создания момента внешних сил, вызывающих прецессию гироскопа.

Рис.7.1. Внешний вид установ-
ки «Гироскоп ФМ-18М»



Гироскоп в составе установки работает совместно с блоком электронным ФМ 1/1м, к которому подключается с помощью кабеля с разъемом 14.

Блок электронный управляет частотой вращения маховика гироскопа, а также индицирует значения частоты вращения маховика гироскопа и угловой скорости прецессии. На передней панели блока электронного размещены следующие органы управления и индикации:

1. Кнопка "ПУСК/СТОП - СБРОС" предназначена:
 - для включения и выключения (путем повторного нажатия) привода вращения маховика гироскопа, при этом кнопка должна удерживаться в нажатом состоянии в течение 1-2 с до индикации соответствующего режима ("0") - выключен, "(I)" - включен) на индикаторном табло;
 - для сброса показаний индикаторного табло (путем кратковременного нажатия).
2. Кнопки "ЧАСТОТА +" и "ЧАСТОТА -" предназначены для установки предельной скорости вращения маховика гироскопа, нажатие соответствующей кнопки приводит к ее увеличению (уменьшению).
3. Жидкокристаллическое табло индикации предназначено для индикации измеряемых величин и режимов. На табло отображается следующая информация:
 - текущее значение и предельное значение частоты вращения маховика гироскопа соответственно через знак «/» ($f = \text{***}/\text{***}$ Гц);
 - значение угловой скорости прецессии ($\omega = \text{*.***}$ рад/с);
 - состояние привода вращения маховика гироскопа: (I) -вкл., (0) -выкл.

7.3. Описание измеряемых величин

Гироскопом называется быстровращающееся симметричное твердое тело, ось вращения (ось симметрии) которого может изменять своё направление в пространстве.

Гироскоп называется *уравновешенным* (или свободным), если его центр масс совпадает с центром подвеса.

Движение гироскопа описывается с помощью основного закона динамики вращательного движения (В.9). Ось симметрии является одной из главных осей инерции гироскопа, поэтому момент его импульса совпадает по направлению с осью вращения.

Если $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = \text{const}$, т.е. вектор момента импульса свободного гироскопа сохраняет свою величину и направление в пространстве, вместе с ним сохраняет своё положение в пространстве и ось гироскопа. Данное свойство

гироскопа лежит в основе устройств для измерения углов, стабилизации платформ, используется в пилотажно-навигационных гироскопических приборах, например гироскопах.

В работе изучается движение гироскопа под действием момента внешней силы. Если к оси гироскопа приложить вертикальную внешнюю силу $\vec{F}$ (рис.7.2), то возникает момент силы $\vec{M}$, лежащий в горизонтальной плоскости и направленный перпендикулярно оси вращения. Векторы $\vec{M}$ и $\vec{F}$ ортогональны друг другу. За время dt момент импульса гироскопа $\vec{L}$ получит приращение $d\vec{L} = \vec{M}dt$, которое имеет такое же направление, как и $\vec{M}$, поэтому сила $\vec{F}$, не изменяя величины вектора $\vec{L}$, заставляет его конец описывать окружность в горизонтальной плоскости вокруг оси, параллельной внешней силе. Спустя время dt вектор момента импульса гироскопа будет равен $\vec{L}' = \vec{L} + d\vec{L}$, направление вектора $\vec{L}'$ совпадает с новым направлением оси гироскопа. Таким образом, проекция вектора $\vec{L}$ на горизонтальную плоскость повернется на некоторый угол $d\varphi$.

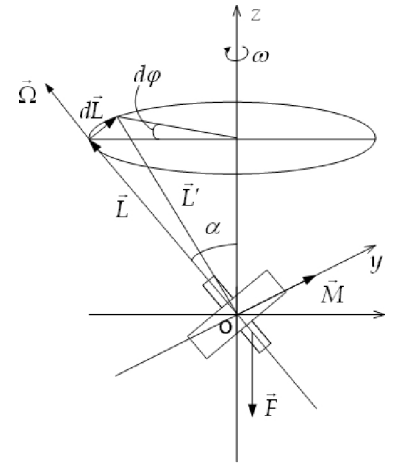


Рис. 7.2. Схема гироскопа

$$d\varphi = \frac{dL}{L \sin \alpha} = \frac{Mdt}{L \sin \alpha}, \quad (7.1)$$

где α – угол, который вектор $\vec{L}$ составляет с вертикалью.

Модуль угловой скорости ω вращения вектора $\vec{L}$ равен:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \sin \alpha} \text{ или } M = L\omega \sin \alpha. \quad (7.2)$$

Так как вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$, а выражение (7.2) имеет вид модуля векторного произведения, то справедливо соотношение:

$$\vec{M} = [\vec{\omega} \vec{L}]. \quad (7.3)$$

Таким образом, под действием внешнего момента $\vec{M}$ ось гироскопа вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\vec{\omega}$, описывая в пространстве в общем случае конус. Это вращение при постоянной силе $\vec{F}$ называется *равномерной прецессией*, а величина ω – *угловой скоростью прецессии*.

7.4. Методы измерений

7.4.1. Определение момента импульса гироскопа

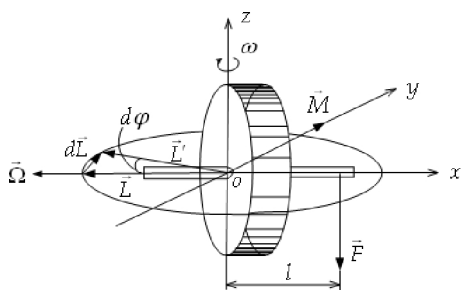


Рис. 7.3. Схема гироскопа в эксперименте

При действии на горизонтальную ($\alpha=\pi/2$) ось гироскопа (рис.7.3) внешней силы $\vec{F}$, не уравновешенной относительно его центра масс, модуль угловой скорости прецессии равен:

$$\omega = \frac{M}{L}. \quad (7.4)$$

В работе внешней силой является сила тяжести противовеса, момент которой равен:

$$M = Fl = mgl, \quad (7.5)$$

где $m=0,2034$ кг – масса противовеса; l – плечо силы тяжести противовеса.

Устанавливая противовес на различных расстояниях от боковой поверхности электродвигателя и измеряя по табло угловую скорость прецессии ω при данном значении момента силы тяжести, можно построить график линейной зависимости $\omega = \omega(M)$. Определив коэффициент наклона A прямой, можно найти момент импульса гироскопа по формуле:

$$L = 1/A. \quad (7.6)$$

7.4.2. Определение момента инерции гироскопа

Из определения момента импульса относительно оси (В.6) следует, что модуль момента импульса равен: $L=J\Omega$, где Ω – модуль циклической частоты вращения маховика гироскопа вокруг оси X , J – момент инерции гироскопа относительно оси X . Тогда уравнение (7.4) принимает вид:

$$\omega = \frac{M}{J\Omega} = \frac{M}{J} \frac{1}{2\pi f} = \frac{M}{J} \frac{T}{2\pi}, \quad (7.7)$$

где f и T – частота и период вращения маховика гироскопа соответственно.

Изменяя частоту f вращения маховика гироскопа и измеряя угловую скорость прецессии ω , можно построить график линейной зависимости $\omega = \omega(T)$. Определив коэффициент наклона A прямой и зная момент внешней силы, можно найти момент инерции гироскопа относительно оси X по формуле:

$$J = M/2\pi A. \quad (7.8)$$

7.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

1. Ознакомьтесь с внешним видом прибора. Снимите, при необходимости, со стержня гироскопа. Зафиксируйте винтом 13 положение вала.
2. Отпустите фиксирующие винты 3 и при помощи регулировочных опор основания 1 по уровню 15 установите горизонтальное положение основания, после чего затяните фиксирующие винты.
3. Подключите блок питания к электрической сети лаборатории и включите выключатель питания «СЕТЬ», расположенный на задней панели электронного блока. При этом должно включиться табло индикации.
4. Отпустите фиксирующий винт 13.
5. Нажмите кнопку "ПУСК/СТОП - СБРОС" и удерживайте её в течение 1-2 с (до появления на табло индикации надписи "(I)"). При помощи кнопок регулирования скорости вращения маховика гироскопа "ЧАСТОТА +" и "ЧАСТОТА -" установите частоту вращения 40 Гц.
6. Подождите, пока значение установленной вами частоты будет равно значению измеренной частоты, т.е. на табло появится надпись: $f=40/40$ Гц. Если значения частот не совпадают, то добейтесь равенства значений при помощи кнопок "ЧАСТОТА +" и "ЧАСТОТА -". После разгона двигателя убедитесь в отсутствии прецессии (должно отсутствовать вращение вилки с гироскопической системой).
7. Зафиксируйте винтом 13 положение вала.
8. Установите противовес 10 на один из стержней (7 или 11) вплотную к корпусу гироскопической системы и закрепите его фиксирующим винтом 9. Плечо силы тяжести противовеса в данном положении $l_l=0,04$ м.

9. Установите гироскопический узел так, чтобы стержни 7 и 11 находились в горизонтальном положении и, поддерживая один из стержней снизу рукой, второй рукой отпустите фиксирующий винт вала 13, после чего отпустите стержень и кратковременно нажмите кнопку "ПУСК/СТОП - СБРОС" блока электронного.

10. Прочитайте на табло и запишите в табл. 7.1 значение скорости прецессии ω гироскопа.

Таблица 7.1

Экспериментальные данные для нахождения момента импульса гироскопа

№ измерения	Угловая скорость прецессии ω , рад/с	Плечо внешней силы l_p , м	Момент внешней силы M , Н·м	Момент импульса L , кг·м ² /с
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

11. Зафиксируйте винтом 13 положение вала.

12. Повторите измерения по пп.9-11 ещё раз.

13. Сместите противовес на одно деление разметки стержня (цена деления 5 мм).

14. Повторите пункты 9-13 ещё три раза, определяя с помощью табло угловую скорость прецессии гироскопа (всего 10 измерений). Результаты измерений запишите в табл. 7.1. Результаты последнего опыта запишите также в первую строку табл. 7.2.

15. Не изменяя положения противовеса (следующая серия экспериментов проводится при постоянном моменте силы тяжести противовеса, действующем на горизонтальную ось гироскопа), увеличьте частоту вращения на 5 Гц при помощи кнопок регулирования скорости вращения маховика гироскопа "ЧАСТОТА +" и "ЧАСТОТА -" и дождитесь, пока измеренная частота вращения двигателя достигнет установленной. Во время ожидания установления частоты

поддерживайте одной рукой стержень гироскопа в горизонтальном положении. Запишите значение измеренной частоты f в табл. 7.2.

Таблица 7.2

Экспериментальные данные для нахождения момента инерции гироскопа

№ измерения	Расстояние $l_{изм}$, мм	Угловая скорость прецессии ω , рад/с	Частота вращения маховика гироскопа f , Гц	Период вращения маховика гироскопа $T=1/f$, с	Момент инерции гироскопа J , кг·м ²
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

16. Выполните измерения частоты прецессии гироскопа ω по пп.9-12 и п.15 четыре раза, увеличивая между опытами частоту вращения маховика гироскопа на 5 Гц (всего 10 измерений). Результаты измерений запишите в табл. 7.2.

17. Зафиксируйте винтом 13 положение вала. Снимите противовес со стержня гироскопа и выключите двигатель кнопкой "ПУСК/СТОП-СБРОС", удерживая ее в течение 1-2 с (до появления на табло индикации надписи "(0)"). Выключите блок переключателем питания «СЕТЬ» на его задней панели (при этом должно выключиться табло индикации).

7.5.1. Определение момента импульса гироскопа

1. Определите момент внешней силы по формуле (7.5), запишите результаты в табл. 7.1.

2. По данным табл. 7.1 постройте зависимость скорости прецессии от момента внешней силы: $\omega = f(M)$ по одной из методик, описанных в прил. 2-5 (методику определяет преподаватель) и определите коэффициент наклона A и среднее квадратическое отклонение (СКО) коэффициента наклона S_A .

3. Определите момент импульса гироскопа по формуле (7.6).

4. Вычислите СКО случайной составляющей погрешности результата измерений момента импульса S_L по формуле: $S_L = LS_A / A$.
5. Оцените доверительные границы погрешности результата измерений момента импульса, пренебрегая малой систематической составляющей погрешности, по формуле: $\Delta L = t_{\alpha, n} S_L$ при доверительной вероятности $\alpha=0,95$.
6. Запишите окончательный результат в виде: $L = L_y \pm \Delta L$.

7.5.2. Определение момента инерции гироскопа

1. Постройте график зависимости $\omega = \omega(T)$ по одной из методик, описанных в прил. 2-5 (методику определяет преподаватель), и определите коэффициент наклона A и СКО коэффициента наклона S_A .
2. Определите момент инерции гироскопа по формуле (7.8).
3. Вычислите СКО случайной составляющей погрешности результата измерений момента инерции S_J по формуле: $S_J = JS_A / A$.
4. Оцените доверительные границы погрешности результата измерений момента импульса, пренебрегая малой систематической составляющей погрешности, по формуле: $\Delta J = t_{\alpha, n} S_J$ при доверительной вероятности $\alpha=0,95$.
5. Запишите окончательный результат в виде: $J = J_y \pm \Delta J$.

8. СОУДАРЕНИЕ ШАРОВ

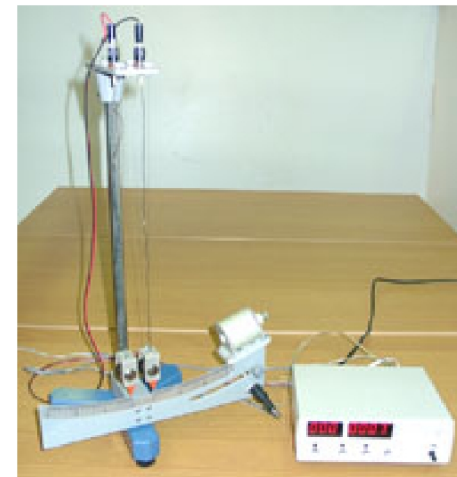
8.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методику выполнения измерений времени, средней силы соударения двух шаров, коэффициентов восстановления энергии, относительной скорости и изучения закона сохранения импульса с помощью лабораторной установки «Соударение шаров ФМ-17» с относительной погрешностью не более 10%.

8.2. Средства измерений

При выполнении измерений используется лабораторная установка «Соударение шаров ФМ-17», общий вид которой представлен на рис.8.1. Установка включает в свой состав: основание, вертикальную стойку, верхний кронштейн, корпус, электромагнит, нити для подвески металлических шаров, провода для

обеспечения электрического контакта шаров с клеммами.



Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации вертикальной стойки. Вертикальная стойка выполнена из металлической трубы. На верхнем кронштейне, предназначенном для подвески шаров, расположены узлы регулировки, обеспечивающие прямой центральный удар шаров, и клеммы. Корпус предназначен для крепления шкалы угловых перемещений. Электромагнит – для фиксации

исходного положения одного из шаров.

Металлические шары выполнены попарно из алюминия, латуни и стали.

Установка работает от блока электронного ФМ 1/1. На задней панели блока расположена клавиша «Сеть», нажатие которой вызывает включение табло индикации и электромагнита.

Кнопка «Пуск» на лицевой панели блока отключает питание электромагнита. После нажатия этой кнопки отклоненный шар приходит в движение. При соприкосновении шаров происходит замыкание цепи микросекундомера и производится отсчет времени удара. Время удара высвечивается на индикаторном табло. Кнопка «Сброс» вызывает при нажатии обнуление счетчика времени и включение электромагнита.

8.3. Описание измеряемых величин

8.3.1. Центральный удар, закон сохранения импульса, средняя сила соударения двух тел

Под соударением тел в механике понимается такое их взаимодействие, которое длится очень короткое время, много меньшее времени наблюдения. В процессе удара возникают кратковременные ударные силы взаимодействия между сталкивающимися телами, причем эти силы во много раз превосходят все внешние силы, действующие на тела. Поэтому систему соударяющихся тел во время удара можно считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2, \quad (8.1)$$

где m_1 и m_2 – массы тел; $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ – их скорости до удара; $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ – их скорости после удара. Это утверждение подлежит экспериментальной проверке в данной работе.

Мерой механического взаимодействия тел при ударе служит импульс ударной силы $\vec{F}$ за время τ

$$\int_0^{\tau} \vec{F} d\tau = \vec{F}_{\text{ср}} \tau, \quad (8.2)$$

где $\vec{F}_{\text{ср}}$ – средняя сила удара.

Согласно второму закону Ньютона, импульс ударной силы равен изменению импульса одного из сталкивающихся тел за время удара

$$\vec{F}_{\text{ср}} \tau = m_2 (\vec{U}_2 - \vec{V}_2) = -m_1 (\vec{U}_1 - \vec{V}_1). \quad (8.3)$$

Измеряя время удара τ и изменение импульса одного из сталкивающихся тел, можно определить среднюю силу удара по формуле:

$$\vec{F}_{\text{ср}} = m_2 (\vec{U}_2 - \vec{V}_2) / \tau = m_1 (\vec{V}_1 - \vec{U}_1) / \tau. \quad (8.4)$$

Общая нормаль к поверхности соударяющихся тел называется *линией удара*. Удар называется *прямым*, если перед ударом скорости центров масс соударяющихся тел параллельны линии удара. Удар называется *центральный*, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.

8.3.2. Абсолютно упругий удар

В зависимости от упругих свойств тел соударения могут протекать различным образом. Принято выделять два предельных случая: *абсолютно упругий* и *абсолютно неупругий* удары.

Абсолютно упругим ударом называется столкновение тел, в результате которого их внутренние энергии не меняются, т.е. механическая энергия соударяющихся тел не преобразуется в другие, немеханические виды энергии. Кинетическая энергия сталкивающихся тел полностью или частично переходит в потенциальную энергию упругой деформации, которая затем опять переходит в кинетическую энергию тел после удара.

В случае *абсолютно упругого удара* выполняются:

закон сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 \vec{V}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{V}_2^2}{2} = \frac{m_1 \vec{U}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{U}_2^2}{2} \quad (8.5)$$

и закон сохранения импульса (8.1).

Дальнейшее рассмотрение проведем, считая удар центральным, а движение тел одномерным в положительном направлении оси ОХ (рис.8.2), т.е. далее обозначения сил, скоростей и импульсов подразумевают их проекции на ось ОХ.

Решая уравнения (8.5) и (8.1), записанные в скалярном виде, получим следующие выражения для скоростей U_1 и U_2 тел после удара:

$$U_1 = \frac{2m_2 V_2 + (m_1 - m_2) V_1}{m_1 + m_2}, \quad (8.6)$$

$$U_2 = \frac{2m_1 V_1 + (m_2 - m_1) V_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.7)$$

8.3.3. Абсолютно неупругий удар

Центральный удар называется *абсолютно неупругим*, если после удара тела движутся как единое твердое тело в произвольной лабораторной системе от-

счета, т.е. это удар, при котором потенциальной энергии упругой деформации не возникает.

При *абсолютно неупругом ударе* выполняются закон сохранения импульса (8.1) и закон сохранения *полной* энергии системы – механической и внутренней. Закон сохранения механической энергии не выполняется.

Для определения общей скорости тел после удара достаточно одного уравнения – закона сохранения импульса (8.1):

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 = (m_1 + m_2) U, \quad (8.8)$$

$$U = U_1 = U_2 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.9)$$

8.3.4. Коэффициент восстановления относительной скорости при соударении двух тел

При соударении реальных тел всегда имеют место и упругие, и остаточные деформации, и поэтому удар будет *частично неупругим*. При таких столкновениях часть кинетической энергии тел переходит в потенциальную энергию упругой деформации, часть – во внутреннюю энергию тел, а часть механической энергии превращается в механическую энергию звуковой волны, которую мы слышим во время удара.

При частично неупругом ударе относительная скорость после удара равна некоторой доле относительной скорости до удара:

$$U_1 - U_2 = -\varepsilon \cdot (V_1 - V_2), \quad (8.10)$$

где ε ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) есть *коэффициент восстановления относительной скорости*. При ударе стальных шаров $\varepsilon = 0,56$; для шаров из слоновой кости $\varepsilon = 0,89$; для свинца ε близок к нулю.

8.3.5. Коэффициент восстановления энергии при ударе

Рассеяние механической энергии тел при ударе характеризуется также *коэффициентом восстановления энергии* K . Он определяется как отношение суммарной кинетической энергии тел после удара W_K' к суммарной кинетической энергии тел до удара W_K . В системе центра инерции:

$$K_c = \varepsilon^2. \quad (8.11)$$

8.4. Методы измерений

8.4.1. Определение скоростей шаров до и после удара

В настоящей работе рассматривается удар шаров равных масс, подвешенных на нитях, т.е. $m_1 = m_2 = m$.

Для осуществления удара один шар (правый) отводится из положения равновесия на угол α_1 и отпускается. Второй шар (левый) до удара покоится: $V_2 = 0$. Скорость V_1 первого шара к моменту удара можно найти из закона сохранения энергии для первого шара:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}, \quad (8.12)$$

где h_1 – высота подъема центра инерции шара при его отклонении из положения равновесия на угол α_1 .

Высота h_1 выражается через угол α_1 и через расстояние l от точки подвеса шара до его центра инерции (рис.8.2) следующим образом:

$$h_1 = l(1 - \cos \alpha_1) = 2l \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}. \quad (8.13)$$

Из (8.12) и (8.13) имеем:

$$V_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2}. \quad (8.14)$$

Аналогично величины скоростей U_1 и U_2 шаров после удара выражаются через углы β_1 и β_2 их отклонения из положения равновесия по формулам:

$$U_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\beta_1}{2}, \quad (8.15)$$

$$U_2 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\beta_2}{2}. \quad (8.16)$$

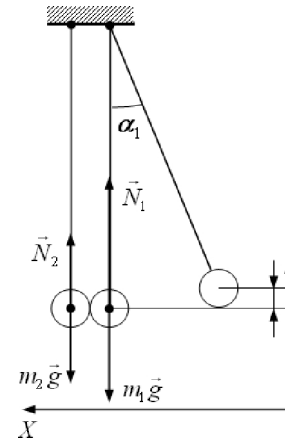


Рис.8.2. Схема соударения шаров

8.4.2. Определение средней силы взаимодействия шаров при центральном ударе

Учитывая, что скорости шаров U_1 и U_2 после удара направлены в одну сторону, скорость второго шара до удара $V_2 = 0$ и углы отклонения шаров в опытах малы, из формулы (8.4) получим:

$$F_{\text{нз}} = \frac{m_2 U_2}{\tau} = \frac{2m_2 \sqrt{gl}}{\tau} \sin \frac{\beta_2}{2} = \frac{2m \sqrt{gl}}{\tau} \sin \frac{\beta_2}{2} \approx \frac{m \beta_2 \sqrt{gl}}{\tau}. \quad (8.17)$$

8.4.3. Экспериментальная проверка закона сохранения импульса

Суммарные импульсы шаров p и p' до и после удара запишутся в виде (при равенстве масс шаров):

$$p = m_1 V_1 = 2m \sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2}, \quad (8.18)$$

$$p' = m_1 U_1 + m_2 U_2 = 2m \sqrt{gl} \left(\sin \frac{\beta_1}{2} + \sin \frac{\beta_2}{2} \right). \quad (8.19)$$

Проверка закона сохранения импульса (8.1) сводится в данном случае к проверке следующего соотношения для скоростей шаров до и после удара:

$$V_1 = U_2 + U_1, \quad (8.20)$$

или через измеряемые в эксперименте углы отклонения шаров

$$\sin \frac{\alpha_1}{2} = \sin \frac{\beta_2}{2} + \sin \frac{\beta_1}{2}. \quad (8.21)$$

Углы отклонения шаров в эксперименте не превышают 12° . Представим синусы малых углов двумя первыми членами разложения в ряд Тэйлора:

$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$. В опытах величина $\frac{x^3}{6} \leq 0,0014 \text{ рад}$. Инструментальная по-

грешность измерения углов составляет величину порядка $0,002 \text{ рад}$. Отсюда следует, что можно пренебречь вторым членом разложения и привести формулу измерений (8.21) к простейшему виду:

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2. \quad (8.22)$$

Методика экспериментальной проверки закона сохранения импульса в нашем простейшем случае равенства масс шаров и на данной лабораторной установке заключается в следующем.

Выдвигается гипотеза о том, что расхождение в значениях p и p' случайно

и далее проверяется эта гипотеза методами математической статистики. Для этого:

1. Проводится серия равнозначных измерений величин β_1 и β_2 при постоянном наибольшем значении α_1 и находятся средние значения углов $\langle \beta_1 \rangle$, $\langle \beta_2 \rangle$ и их дисперсии

$$S_{\langle \beta_1 \rangle}^2 = \sum_{i=1}^n (\beta_{1i} - \langle \beta_1 \rangle)^2 / n(n-1), \quad S_{\langle \beta_2 \rangle}^2 = \sum_{i=1}^n (\beta_{2i} - \langle \beta_2 \rangle)^2 / n(n-1).$$

2. Вычисляется среднее значение случайной величины

$$\langle \beta \rangle = \langle \beta_1 \rangle + \langle \beta_2 \rangle. \quad (8.23)$$

3. Определяется дисперсия $S_{\langle \beta \rangle}^2$ по формуле

$$S_{\langle \beta \rangle}^2 = S_{\langle \beta_1 \rangle}^2 + S_{\langle \beta_2 \rangle}^2. \quad (8.24)$$

4. Вычисляется дисперсия неисклѐченной систематической составляющей погрешности результата измерений величины $\langle \alpha \rangle = \alpha_1$

$$S_{\langle \alpha \rangle}^2 = \Theta_\alpha^2 / 3, \quad (8.25)$$

где $\Theta_\alpha = 0,002 \text{ рад}$ – границы неисклѐченной систематической погрешности шкалы лабораторной установки.

5. Находится среднее квадратическое отклонение (СКО) суммарной погрешности результата измерений углов по формуле

$$S = \sqrt{S_{\langle \beta \rangle}^2 + S_{\langle \alpha \rangle}^2}. \quad (8.26)$$

6. Для заданного уровня доверительной вероятности $P=0,95$ и числа ν степеней свободы, определяемых как $\nu = 2(n-1)$, находится по таблицам квантиль распределения Стюдента $t_{(1+P)/2, \nu}$. При $n=5$ квантиль равен $t_{(1+P)/2, \nu} = 2,306$.

7. Гипотеза о равенстве величин $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ принимается с доверительной вероятностью $P = 0,95$, если:

$$|\langle \alpha \rangle - \langle \beta \rangle| \leq t_{(1+P)/2, \nu} \cdot S \quad (8.27)$$

8.4.4. Определение коэффициентов восстановления энергии и относительной скорости

Для данной экспериментальной установки уравнения измерений для коэффициентов восстановления энергии K_c и скорости ε имеют вид

$$K_c \approx \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1} \right)^2, \quad \varepsilon \approx \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1}. \quad (8.28)$$

8.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

8.5.1. Экспериментальное определение времени и средней силы взаимодействия шаров при упругом центральном ударе

1. Вставьте шары в скобы подвеса (в правую скобу подвеса вставляется шар, стальной вставкой обращенной в сторону электромагнита).
2. С помощью регулировочных опор отрегулируйте основание установки таким образом, чтобы нижние визеры скоб подвеса указывали на нули шкал.
3. Отрегулируйте положение шаров в вертикальной и горизонтальной плоскостях до совмещения верхних визиров скоб подвеса. Регулировку производите с помощью изменения длины подвеса шаров, а также изменяя положения узлов крепления нитей на верхнем кронштейне.
4. Нажмите клавишу «Сеть» на задней панели блока. При этом включаются табло индикации и электромагнит.
5. Установите электромагнит так, чтобы начальное отклонение правого шара составило $\alpha_1 = 12^\circ$. Занесите значение угла в радианах в табл. 8.1. Отведите правый шар к электромагниту и зафиксируйте его, оставляя левый шар неподвижным в положении равновесия.
6. Нажмите кнопку «Пуск», при этом произойдет удар шаров. По таймеру блока определите время τ соударения шаров, запишите результат измерения в таблицу 8.1.
7. Нажмите кнопку «Сброс» для обнуления показаний таймера и включения электромагнита.
8. Повторите соударение шаров для того же значения угла α_1 начального отклонения правого шара. При помощи левой части шкалы визуально определите максимальный угол β_2 отклонения левого шара после удара. Значение угла в радианах запишите в таблицу 8.1.
9. Повторите соударение шаров еще раз, не изменяя α_1 . Визуально определите угол максимального отклонения β_1 правого шара после удара.
10. Повторите измерения углов β_1 , β_2 и времени соударения шаров τ еще четыре раза для того же самого начального угла отклонения правого шара α_1 , т.е. при неизменном положении электромагнита.

11. Отключите питание установки, нажав клавишу «Сеть».

Таблица 8.1

Экспериментальное определение времени и средней силы взаимодействия шаров при столкновении

№ опыта				Начальный угол отклонения правого шара α_1 , рад				Угол отклонения шаров после удара				Время соударения				Средняя сила удара $F_{ср}$, Н															
								правого шара												левого шара											
в отд. опыте β_1 , рад				Среднее значение $\langle \beta_1 \rangle$, рад				Квадрат отклонения от среднего $(\beta_1 - \langle \beta_1 \rangle)^2$, рад ²				Дисперсия $S^2_{\langle \beta_1 \rangle}$, рад ²				в отд. опыте β_2 , рад				Среднее значение $\langle \beta_2 \rangle$, рад				Квадрат отклонения от среднего $(\beta_2 - \langle \beta_2 \rangle)^2$, рад ²				Дисперсия $S^2_{\langle \beta_2 \rangle}$, рад ²			
в отд. опыте τ , мкс				среднее значение $\langle \tau \rangle$, мкс				Квадрат отклонения от среднего $(\tau - \langle \tau \rangle)^2$, мкс ²				Дисперсия $S^2_{\langle \tau \rangle}$, мкс ²																			

12. Проведите обработку прямых многократных измерений, т.е. найдите значения величин $\langle \beta_1 \rangle, \langle \beta_2 \rangle, S^2_{\langle \beta_1 \rangle}, S^2_{\langle \beta_2 \rangle}, \langle \tau \rangle, S^2_{\langle \tau \rangle}$.

13. Рассчитайте среднюю силу удара $\langle F_{cp} \rangle$ по формуле (8.17), используя данные лабораторной установки (табл.8.2), уточнив длину нити подвеса с помощью линейки или штангенциркуля.

Таблица 8.2

Данные лабораторной установки

Материал шара	Масса шара m , кг	Диаметр шаров D , м	Длина нити подвеса d , м
Сталь	0,111	0,03	0,37±0,01
Латунь	0,121		
Алюминий	0,043		

14. Определите доверительные границы результата измерений силы удара ΔF_{cp} по правилам обработки косвенных измерений (прил.6; считая, что систематическая составляющая погрешности значительно меньше случайной) по формулам:

$$S_{F_{\vec{n}0}} = \langle F_{\vec{n}0} \rangle \cdot \sqrt{\frac{S_{\langle \beta_1 \rangle}^2}{\langle \beta_1 \rangle^2} + \frac{S_{\langle \tau \rangle}^2}{\langle \tau \rangle^2}}, \quad \Delta F_{\vec{n}0} = t_{p,n} \cdot S_{F_{\vec{n}0}}, \quad F_{\vec{n}0} = \langle F_{\vec{n}0} \rangle \pm \Delta F_{\vec{n}0},$$

где $t_{p,n}$ – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности $P = 0,95$.

15. Сравните полученное значение величины силы взаимодействия F_{cp} с силой тяжести шара. Сделайте вывод об интенсивности сил взаимного отталкивания, действующих во время удара, и о том, можно ли систему соударяющихся шаров во время удара считать замкнутой.

16. По указанию преподавателя определите время соударения для двух других пар шаров по методике, изложенной в пп.1-15.

8.5.2. Экспериментальная проверка закона сохранения импульса

1. Найдите $\langle \beta \rangle$ и $S_{\langle \beta \rangle}^2$ по формулам (8.23) и (8.24) и занесите результаты вычислений в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Экспериментальная проверка закона сохранения импульса

Угол отклонения шаров до удара $\alpha_1 = \langle \alpha \rangle$, рад	Дисперсия $S_{\langle \alpha \rangle}^2$, рад ²	Среднее значение $\langle \beta \rangle$, рад	Дисперсия $S_{\langle \beta \rangle}^2$, рад ²	Средне-квадратичное отклонение S , рад

2. Определите дисперсию неисключённой систематической составляющей погрешности результата измерений угла $S_{\langle \alpha \rangle}^2$ по формуле (8.25). Рассчитайте СКО суммарной погрешности S из соотношения (8.26).

3. Проверьте гипотезу о равенстве величин $\langle \alpha \rangle = \langle \beta \rangle$ по формуле (8.27) и сделайте вывод о выполнении закона сохранения импульса.

8.5.3. Определение коэффициентов восстановления энергии и относительной скорости

1. По данным α_1 , $\langle \beta_1 \rangle$, $\langle \beta_2 \rangle$ табл. 8.1 и формулам (8.28) определите среднее значение коэффициента восстановления относительной скорости ε и значение коэффициента восстановления механической энергии.

2. Сделайте вывод о характере удара и о том, выполняется ли закон сохранения механической энергии системы шаров при столкновении.

9. МОДУЛИ УПРУГОСТИ

9.1. Вводная часть

Настоящие методические указания устанавливают методику выполнения измерений с помощью лабораторной установки «ФМ-19» модуля Юнга методом изгиба и модуля сдвига с помощью пружинного маятника с относительной погрешностью не более 15%.

9.2. Средства измерений

Общий вид лабораторной установки «ФМ-19» представлен на рис.9.1



Рис.9.1. Внешний вид установки

Установка включает в свой состав: основание, вертикальную стойку, два кронштейна, кронштейн для установки фотодатчика, фотодатчик, наборный груз, устройство нагружения образца, часовой индикатор, две призматические опоры для установки исследуемого образца (пластины), набор образцов (пластин), узел крепления вертикально подвешиваемых сменных пружин, набор цилиндрических винтовых пружин растяжения.

Основание снабжено тремя регулируемыми опорами и зажимом для фиксации вертикальной стойки. Фотодатчик предназначен для подсчета периодов колебаний груза на пружине. Устройство нагружения образца представляет собой скобу с призматической опорой и узлом подвески наборного груза.

9.3. Описание измеряемых величин

Деформация – изменение взаимного расположения множества частиц материальной среды, которое приводит к искажению формы и размеров тела и вызывает изменение сил взаимодействия между частицами, т. е. появление ме-

ханических напряжений. Деформация упругая, если она возникает и исчезает одновременно с нагрузкой и не сопровождается рассеянием энергии.

В механике сплошной среды рассматривается деформация бесконечно малой окрестности точки, по которой воспроизводится деформация тел произвольных форм и размеров.

Волокном называется линия, состоящая из частиц вещества. Мерой деформации являются относительное удлинение и сдвиг. *Относительным удлинением* ε волокна называется отношение изменения его длины $\Delta l = l - l_0$ к первоначальной длине l_0 . Под *сдвигом* понимают изменение угла между элементарными (бесконечно малыми) волокнами, исходящими из одной точки среды и взаимно перпендикулярными до деформации.

Напряжение – мера внутренних сил, возникающих при деформации материала. Для введения понятия напряжения мысленно вырезается из среды некоторый объём, по поверхности S которого распределены силы взаимодействия с остальной частью среды, возникающие при деформации. Если $\vec{\Delta F}$ – равнодействующая сил взаимодействия на элементе поверхности ΔS , содержащем рассматриваемую точку A , то величина:

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta S} \quad (9.1)$$

называется вектором напряжения $\vec{\sigma}$ в точке A на площадке с нормалью n . Величины проекций вектора напряжений на нормаль n и на касательную плоскость называются нормальными σ_n и касательными τ_n напряжениями.

Модули упругости – величины, характеризующие упругие свойства материала. Основным закон теории упругости – закон Гука (установлен английским физиком Р.Нooke в 1660 г.), выражающий линейную зависимость между напряжениями и малыми деформациями в упругой среде.

Физический смысл модулей упругости выявляется при рассмотрении основных элементарных типов напряжённого состояния упругого тела: одностороннего нормального напряжения, чистого сдвига и всестороннего нормального напряжения. Для каждого из этих напряжённых состояний зависимость между напряжением и соответствующей ему деформацией определяется простейшей формулой: напряжение равно произведению соответствующей деформации на модуль упругости. Одностороннему нормальному напряжению σ_n , возникающему при простом растяжении (сжатии), соответствует в направле-

нии растяжения модуль продольной упругости E (модуль Юнга). Он равен отношению нормального напряжения к относительному удлинению, вызванному этим напряжением в направлении его действия: $E = \sigma_n / \varepsilon$ и характеризует способность материалов сопротивляться деформации растяжения.

Напряжённому состоянию чистого сдвига, при котором по двум взаимно ортогональным площадкам действуют только касательные напряжения τ_n , соответствует модуль сдвига G . По величине он равен отношению касательного напряжения τ_n к величине угла сдвига γ , определяющего искажение прямого угла между плоскостями, по которым действуют касательные напряжения: $G = \tau_n / \gamma$, и представляет способность материала сопротивляться изменению формы при сохранении его объёма.

Деформации растяжения (сжатия) и сдвига являются однородными, т.е. такими, когда все бесконечно малые элементы тела деформированы одинаково. Деформации неоднородны, если они меняются внутри тела от точки к точке. К таким деформациям относятся кручение и изгиб.

Закон Гука для деформации кручения записывается в виде:

$$M = A\varphi, \quad (9.2)$$

где A – постоянная для данного тела величина, называемая её модулем кручения.

Деформацию кручения можно рассматривать как неоднородный сдвиг. Для сплошной проволоки радиуса r и длины l модули кручения A и сдвига G связаны соотношением:

$$A = \frac{\pi G}{2l} r^4. \quad (9.3)$$

9.4. Методы измерений

9.4.1. Определение модуля Юнга методом изгиба

Рассмотрим изгиб однородной прямоугольной пластины произвольного постоянного поперечного сечения. Все прямые AA' , BB' , NN' произвольного бесконечно малого элемента пластины $AA'BB'$ длиной l_0 в результате изгиба перейдут в дуги окружности с центрами, лежащими на оси O , перпендикулярной плоскости рис.9.2. Эта ось называется осью изгиба. Наружные волокна, лежащие ниже линии NN' , укорачиваются; волокна, лежащие выше линии NN' , удлиняются. Длина нейтральной линии NN' остаётся

неизменной: $l_0 = R\alpha$, где R – радиус нейтральной линии; α – центральный угол, опирающийся на дугу NN' . Длина волокна, находящегося на расстоянии y от нейтральной линии, равна: $l = (R+y)\alpha$, а удлинение: $\Delta l = l - l_0 = y\alpha$.

Натяжение, действующее вдоль рассматриваемого волокна:

$$\sigma_n = E\Delta l/l_0 = E y \alpha / l_0 = E y / R. \quad (9.4)$$

Модуль момента сил натяжения, действующих на сечение AB , относительно оси z , перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку N :

$$M_\sigma = \int \sigma_n y dS = E/R \int y^2 dS, \quad (9.5)$$

где $dS = dx dy$ – элемент площади поперечного сечения.

Если поперечное сечение

Рис.9.2. Изгиб прямоугольной пластины

пластины имеет форму прямоугольника шириной a (вдоль оси z) и высотой b (вдоль оси y), то интеграл в правой части (9.5) равен

$$\int y^2 dS = 2 \int_0^a dx \int_0^{b/2} y^2 dy = 2a \int_0^{b/2} y^2 dy = \frac{ab^3}{12}. \quad (9.6)$$

Кривизна $1/R$ нейтральной линии NN' определяется известным из курса высшей математики выражением

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (9.7)$$

Если изгиб мал, т.е. $dy/dx \ll 1$, то квадратом производной в знаменателе (9.7) можно пренебречь. Тогда кривизна пластины равна $1/R \approx d^2 y/dx^2$, и модуль момента сил натяжения в этом приближении определяется как

$$M_\sigma = \frac{Eab^3}{12} \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (9.8)$$

Определим стрелу прогиба пластины, лежащей на двух опорах, если к её середине приложена сосредоточенная сила $\vec{F} = m\vec{g}$ тяжести груза (рис.9.3).

Весом самой пластины пренебрегаем. Вследствие симметрии сила $\vec{F}$

распределится между опорами поровну. В точке максимального изгиба на каждую половину пластины действует сила $\vec{F}/2$, направленная вниз. Модуль момента внешних сил, действующих на одну половину пластины, равен $M = (F/2)x$.

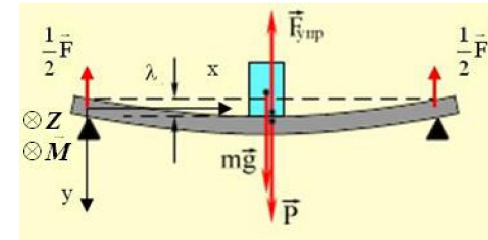


Рис.9.3. Изгиб пластины на двух опорах

Условием равновесия пластины является равенство модулей моментов внешней силы и сил натяжения:

$$x \frac{F}{2} = - \frac{Eab^3}{12} \frac{d^2 y}{dx^2}. \quad (9.9)$$

Поскольку вторая производная $d^2 y/dx^2$ отрицательна (ось y направлена вниз в сторону изгиба пластины), в правой части уравнения (9.9) стоит знак минус.

Интегрируя уравнение (9.9), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{6F}{Eab^3} \int x dx = - \frac{3F}{Eab^3} x^2 + C_1, \quad (9.10)$$

где постоянная интегрирования $C_1 = \frac{3F}{Eab^3} \frac{l^2}{4}$ находится из условия, что $dy/dx = 0$ при $x = l/2$. Подстановка значения C_1 в уравнение (9.10) приводит к выражению:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3F}{4Eab^3} (l^2 - 4x^2). \quad (9.11)$$

Интегрируя уравнение (9.11), получаем:

$$y = \frac{3F}{4Eab^3} \int (l^2 - 4x^2) dx = \frac{F}{4Eab^3} x (3l^2 - 4x^2) + C_2, \quad (9.12)$$

где постоянная интегрирования $C_2 = 0$ находится из условия, что $y = 0$ при $x = 0$, т.е.:

$$y = \frac{Fx(3l^2 - 4x^2)}{4Eab^3}. \quad (9.13)$$

Подставляя в (9.13) $x = l/2$, находим стрелу прогиба $\lambda = y_{max}$ пластины под действием сосредоточенной силы тяжести:

$$\lambda = \frac{mgl^3}{4Eab^3}. \quad (9.14)$$

Изменяя в эксперименте значение массы груза на пластине и измеряя значение стрелы прогиба λ , можно построить график линейной зависимости $\lambda = \lambda(m)$. Определив коэффициент наклона A прямой, найти модуль Юнга по формуле:

$$E_Y = gl^3 / 4Aab^3. \quad (9.15)$$

9.4.2 Определение модуля сдвига с помощью пружинного маятника.

Определим удлинение спиральной пружины, если растягивающие силы действуют вдоль её оси. Шаг спирали считаем пренебрежимо малым по сравнению с радиусом витка R .

Произведём мысленный разрез проволоки пружины в произвольной точке A плоскостью, проходящей через ось пружины (рис.9.4).

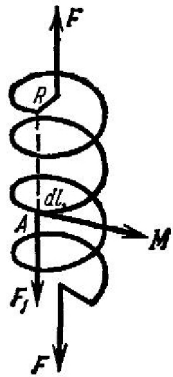


Рис.9.4. Растяжение пружины

Пусть сила $\vec{F}_1$ – сила, с которой нижняя часть пружины действует на верхнюю в месте разреза. Для равновесия необходимо, чтобы $\vec{F}_1 = -\vec{F}$, где $\vec{F}$ – растягивающая сила, действующая на верхнюю часть пружины. Так как силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}$ образуют пару, то момент этой пары не зависит от выбора точки, относительно которой он берётся. Этот момент перпендикулярен к плоскости разреза и по модулю равен $M = FR$. Из-за малости шага витка можно считать, что момент в точке A направлен вдоль оси проволоки. Чтобы рассматриваемая часть пружины находилась в равновесии, необходимо, чтобы возникло кручение проволоки вокруг её оси, компенсирующее момент $\vec{M}$.

Когда растягивающие силы действуют вдоль оси пружины, модуль момента не меняется вдоль проволоки, поэтому кручение её будет равномерным. Пусть dl – элемент длины проволоки. Под действием момента $\vec{M}$ он закрутится на угол $d\varphi = M / \Lambda_l$, где Λ_l – модуль кручения

рассматриваемого элемента. Модуль кручения всей проволоки $\Lambda = \Lambda_l \frac{dl}{l_0}$

обратно пропорционален длине проволоки l_0 . Угол закручивания равен:

$d\varphi = \frac{M}{\Lambda} \frac{dl}{l_0}$. В результате закручивания элемента dl на угол $d\varphi$ нижний конец

проволоки опустится на величину: $dy = R d\varphi = \frac{MR}{\Lambda} \frac{dl}{l_0} = \frac{FR^2}{\Lambda} \frac{dl}{l_0}$. Интегрируя по

всей длине проволоки, найдём удлинение пружины: $y = \frac{FR^2}{\Lambda}$.

Введём жесткость пружины, записав последнее уравнение в известном виде: $F = ky$, где $k = \Lambda / R^2$ – жесткость пружины. Используя взаимосвязь (9.3) между модулями кручения и сдвига, а также то, что $l = 2\pi RN$ – длина пружины, N – количество витков в пружине, получаем:

$$k = \frac{Gr^4}{4NR^3}. \quad (9.16)$$

Экспериментально модуль сдвига можно определить, наблюдая малые колебания тела массой m на пружине. Эти колебания можно приближенно считать гармоническими с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}. \quad (9.17)$$

Квадрат периода колебаний с учетом уравнения (9.16) равен:

$$T^2 = m \frac{16\pi^2 R^3 N}{Gr^4} = m \frac{32\pi^2 D^3 N}{Gd^4}, \quad (9.18)$$

где $D = 2R$ – диаметр витка пружины, $d = 2r$ – диаметр поперечного сечения проволоки.

Изменяя в эксперименте массу грузов на пружине и измеряя период колебаний пружинного маятника, можно построить график линейной зависимости $T^2 = T^2(m)$. Модуль сдвига G определяется через коэффициент наклона A построенной прямой по формуле:

$$G_Y = \frac{32\pi^2 D^3 N}{Ad^4}. \quad (9.19)$$

9.5. Выполнение измерений и обработка их результатов

9.5.1. Определение модуля Юнга методом изгиба

1. Установите одну из исследуемых пластин на призматические опоры.
2. Установите часовой индикатор таким образом, чтобы его наконечник коснулся пластины. Вращая кольцо шкалы корпуса индикатора, установите стрелку на ноль.
3. Повесьте на скобу устройства нагружения образца груз массой $m_I=0,1$ кг и повесьте скобу устройства посередине пластины (или поставьте на середину пластины груз массой $m_I=0,1$ кг). По шкале индикатора определите значение стрелы прогиба пластины λ_I ($c=0,01$ мм – цена деления шкалы часового индикатора). Снимите груз. Повторите данный опыт ещё два раза с той же массой груза. Запишите результаты измерений в табл.9.1.
4. Выполните предыдущий пункт ещё с тремя грузами различных масс (увеличивая массу груза).

Таблица 9.1

Экспериментальные данные для определения модуля Юнга методом изгиба

№ измерения	Масса груза m , кг	Значение стрелы прогиба λ , мм	Среднее значение стрелы прогиба $\langle \lambda \rangle$, мм	Среднее значение модуля Юнга E , ГПа
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

5. Постройте график зависимости $\lambda = \lambda(m)$, определите коэффициент наклона A и среднее квадратическое отклонение (СКО) коэффициента наклона

S_A по одной из методик, изложенных в прил. 2-5 (по указанию преподавателя).

6. Сделайте оценку модуля Юнга $\langle E_Y \rangle$ по формуле (9.15) с подстановкой данных лабораторной установки: $l=0,114$ м – расстояние между призмами; $a=0,012$ м – ширина сечения пластины (проверьте данные с помощью штангенциркуля).
7. Вычислите СКО случайной составляющей погрешности результата измерений модуля Юнга S_E по формуле: $S_E = ES_A / A$.
8. Оцените доверительные границы погрешности результата измерений модуля Юнга, пренебрегая малой систематической составляющей погрешности, по формуле: $\Delta E = t_{\alpha,n} S_E$ при доверительной вероятности $\alpha=0,95$.
9. Запишите окончательный результат в виде: $E = \langle E_Y \rangle \pm \Delta E$.

9.5.2. Определение модуля сдвига с помощью пружинного маятника

1. Повесьте одну из исследуемых пружин на кронштейн.
2. Повесьте на пружину минимальную массу наборного груза.
3. Кронштейн с вертикально подвешенной пружиной закрепите на вертикальной стойке таким образом, чтобы оптическая ось фотодатчика (определяется по рискам на корпусе фотодатчика) проходила через нижнюю плоскость наборного груза.
4. Нажмите клавишу «СЕТЬ» на задней панели блока. При этом должно включиться табло индикации.
5. Оттяните рукой груз на 5-7 мм ниже оси фотодатчика и отпустите. При этом груз начинает совершать колебательные движения на пружине.
6. Нажмите на кнопку «ПУСК». По показанию таймера на табло определите значение времени 15-25 колебаний маятника, нажав кнопку «СТОП». Определите период колебаний маятника как $T=t/n$, где t – время колебаний, n – число колебаний. Запишите результаты измерений в табл.9.2.
7. Выполните пп. 5-6 ещё с тремя грузами различных масс (увеличивая массу груза на 0.01 кг).
8. Выключите блок клавишей «Сеть».
9. Постройте график зависимости $T^2 = T^2(m)$, определите коэффициент наклона A и СКО коэффициента наклона S_A по одной из методик, изложенных в прил. 2-5 (методика определяется преподавателем).
10. Сделайте оценку модуля сдвига $\langle G_Y \rangle$ по формуле (9.19) с подстановкой

значений среднего диаметра пружины ($D_1 = 0,0198$ м или $D_2 = 0,02$ м в зависимости от пружины), диаметра проволоки ($d_1 = 0,0008$ м или $d_2 = 0,001$ м) и числа $N=28$ витков пружины (проверьте значения диаметров с помощью штангенциркуля).

Таблица 9.2

Экспериментальные данные для определения модуля сдвига
методом пружинного маятника

№ измерения	Масса груза m , кг	Число периодов n	Время n периодов t , с	Период колебаний T , с	Квадрат периода колебаний T^2 , с ²	Среднее значение модуля сдвига G , ГПа

11. Вычислите СКО случайной составляющей погрешности результата измерений модуля сдвига S_G по формуле: $S_G = ES_A / A$.

12. Оцените доверительные границы погрешности результата измерений модуля сдвига, пренебрегая малой систематической составляющей погрешности, по формуле: $\Delta G = t_{\alpha,n} S_G$ при доверительной вероятности $\alpha=0,95$.

13. Запишите окончательный результат в виде: $G = \langle G_y \rangle \pm \Delta G$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте определения следующих физических величин: угла поворота, угловой скорости и углового ускорения, момента силы относительно точки, момента силы относительно оси, момента импульса материальной точки и твердого тела.
2. На примере данной установки определите взаимное расположение векторов: $\vec{\varepsilon}$ – углового ускорения, $\vec{F}$ – вращающей силы, $\vec{M}$ – момента вращающей силы, $\vec{M}_{\delta\delta}$ – момента силы трения, $\vec{\omega}$ – угловой скорости.
3. Запишите основные законы динамики поступательного и вращательного движения, проведите аналогию между физическими величинами.
4. Сформулируйте определения моментов инерции системы материальных точек и твердого тела. Дайте определения свободных осей и главных моментов инерции.
5. Выведите теоретические выражения для главных моментов инерции: сплошного (полого) цилиндра; диска; параллелепипеда.
6. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса-Штейнера.
7. Сформулируйте законы сохранения импульса; момента импульса, механической энергии и условия их выполнения.
8. Проанализируйте характер удара в лабораторной работе и объясните, какие законы сохранения выполняются.
9. Что называется гармоническим осциллятором, физическим и математическим маятниками. Выведите дифференциальное уравнение гармонических колебаний соответствующей физической величины из основного уравнения движения колеблющегося элемента лабораторной установки. Запишите и проанализируйте выражения для периодов колебаний маятников: пружинного, физического, математического, крутильного.
10. Что называется гироскопом? Какие гироскопы называются свободными? Чем объясняется, что при отсутствии внешних сил ось гироскопа не меняет направления в пространстве? С какой целью гироскопы делают массивными и придают им большую скорость вращения?
11. Какой физический смысл имеют модули упругости? Дайте определения нормального, касательного напряжения и величины относительной деформации.
12. Дайте определения коэффициентов трения скольжения и качения. Какая из этих величин больше, почему и при каких условиях?
13. Выведите уравнения измерений, объясните метод экспериментального определения искомых величин.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Описание измеряемой величины – ускорения свободного падения

Для величины g применяются два равнозначных наименования: «ускорение свободного падения» и «ускорение силы тяжести». Первое из них используется для значений g , измеренных в опытах со свободным падением тел в поле силы тяжести, второе – для значений g , измеренных с помощью физического маятника.

Силой тяжести тела называется сила $\vec{P}$, приложенная к телу и равная геометрической сумме силы тяготения тела к Земле и центробежной силы инерции, обусловленной неинерциальностью системы отсчёта, связанной с Землей, из-за её суточного вращения с постоянной угловой скоростью

$$\vec{P} = \vec{F}_{\text{тяг}} + \vec{F}_{\text{ин}} \quad (\text{П.1.1.})$$

или в явном виде:

$$\vec{P} = -G \frac{mm_c}{r^3} \vec{r} - m \left[\vec{\omega} \left[\vec{\omega} \vec{r} \right] \right]. \quad (\text{П.1.2})$$

Рис.П.1.1.

Здесь $G=6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг – гравитационная постоянная; $m_s=5,96 \cdot 10^{24}$ кг – масса Земли; m – масса тела; $r=R_s$ – радиус Земли на данной широте местности; $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый из центра Земли к телу; $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Из рис П.1.1 в соответствии с теоремой косинусов следует, что модуль силы тяжести равен:

$$P = \sqrt{F_{\text{тяг}}^2 + F_{\text{ин}}^2 - 2F_{\text{тяг}}F_{\text{ин}} \cos \varphi}, \quad (\text{П.1.3})$$

где φ – географическая широта местности.

Ускорение силы тяжести из формулы (П.1.3), после подстановки явного вида модулей сил тяготения и центробежной силы инерции, находится по формуле:

$$g = \sqrt{\frac{G^2 m_c^2}{R_s^4} + \left(R_s^2 \omega^4 - \frac{2G\omega^2 m_c}{R_s} \right) \cos^2 \varphi}, \quad (\text{П.1.4})$$

где R_s – радиус Земли на данной широте местности.

Из-за вращения Земля сплюснута у полюсов и удлинена на экваторе. На полюсе: $\varphi=90^\circ$, $R_s=6,36 \cdot 10^6$ м, $g_n=9,832$ м/с²; на экваторе: $\varphi=0^\circ$, $R_s=6,376 \cdot 10^6$ м, $g_s=9,78$ м/с²; стан-

дартное значение ускорения свободного падения, принятое при построении систем единиц и при барометрических расчётах, равно $g=9,80665$ м/с². Значение g для г. Самары, вычисленное по формуле (П.1.4) при $\varphi=53^\circ$, $R_s=6,361 \cdot 10^6$ м, может приниматься в качестве действительного значения измеряемой физической величины для оценки погрешности измерений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Обработка результатов измерений графическим методом с выравниванием экспериментальных результатов «на глаз»

В большинстве случаев экспериментального изучения различных физических явлений целесообразно представить полученные зависимости в виде графика. При построении графика функциональная зависимость становится явной, а результаты опыта наглядными.

График выполняется на миллиметровой бумаге, на которую наносят координатные оси. Для независимой переменной всегда используется ось абсцисс. На оси наносится масштаб так, чтобы расстояние между делениями составило 1, 2, 5 единиц. В конце оси указывается откладываемая величина и единицы её измерения. Обычно туда же выносятся и порядок масштаба ($10^{\pm n}$, где n – целое число). Масштаб следует выбирать так, чтобы кривая заняла весь лист, а погрешность измерения соответствовала одному-двум мелким делениям графика. При этом начало отсчёта не обязательно начинать с нуля.

Экспериментальные точки на график нужно наносить точно и тщательно. По нанесённым на график точкам проводится плавная кривая, в случае линейной зависимости вида $y=Ax+B$ – прямая. При этом следует руководствоваться правилами, вытекающими из метода наименьших квадратов (МНК):

- сумма отрезков отклонений точек от кривой в одну сторону должна быть равна сумме отклонений точек от этой же кривой в другую сторону (проводите прямую так, чтобы она проходила возможно ближе к точкам и чтобы по обе стороны от неё оказывалось приблизительно равное их количество);
- по возможности не должно быть очень больших отклонений точек от кривой, лучше иметь два-три небольших отклонения, чем одно большое.

Исключение составляет градуировочный график, на котором точки соединяются последовательно прямыми линиями, т.к. при этом значения величин считаются точными, а кривая служит для отыскания промежуточных значений линейной интерполяцией.

Обработка результатов в случае линейной зависимости сводится к определению коэффициента наклона A прямой и погрешности его определения ΔA .

Коэффициент наклона A находится как отношение приращения функции к приращению аргумента, взятому по выбранной прямой на возможно большем интервале изменения аргумента: выберите на прямой две произвольные точки, найдите их координаты

ты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , вычислите коэффициент наклона A (тангенс угла наклона прямой к оси ox) по формуле:

$$A = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1). \quad (\text{П.2.1})$$

По найденному значению A определите искомые в лабораторной работе физические величины.

Для нахождения погрешности определения коэффициента наклона A дополнительно постройте две вспомогательные прямые, параллельные ранее начерченной и проходящие через наиболее удалённые от неё экспериментальные точки. Крайние точки параллельных прямых соединяются крест-накрест и находятся коэффициенты наклона этих прямых A_1 и A_2 . Погрешность определения коэффициента наклона определяется по формуле:

$$\Delta A = \frac{|A_1 - A_2|}{2} \quad (\text{П.2.2})$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) случайной составляющей погрешности определения коэффициента наклона S находится по формуле:

$$S = \Delta A / t_{\alpha, n}, \quad (\text{П.2.3})$$

где $t_{\alpha, n}$ – коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности $\alpha=0,95$; n – количество экспериментальных точек.

Пренебрегая СКО суммарной неисключённой систематической составляющей погрешности определения коэффициента наклона, обусловленной погрешностью отсчёта по миллиметровой бумаге, по сравнению со случайной составляющей погрешности S , можно считать, что СКО суммарной погрешности определения коэффициента A равно случайной составляющей: $S_A \cong S$.

Далее определяются доверительные границы погрешности результата измерений искомой физической величины по методике, указанной в лабораторной работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Обработка результатов совместных измерений по методу наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) позволяет найти значения коэффициента наклона A и свободный член B линейной зависимости вида $y = Ax + B$ аналитически.

МНК заключается в нахождении таких значений A и B , при которых сумма квадратов расстояний от прямой $y = Ax + B$ до экспериментальных точек с координатами x_i и y_i

($i=1, 2, \dots, n$) была бы наименьшей. Это эквивалентно минимуму суммы: $\sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B)^2$.

Условия минимальности суммы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B)^2 \right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial B} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i - B)^2 \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{П.3.1})$$

дают два уравнения для определения A и B :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i &= A \sum_{i=1}^n x_i^2 + B \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n y_i &= A \sum_{i=1}^n x_i + nB. \end{aligned} \quad (\text{П.3.2})$$

Если ввести обозначения средних значений $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ и $\langle y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, то систему

уравнений можно записать в виде:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}, \\ B &= \langle y \rangle - A \langle x \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.3.3})$$

СКО определения коэффициента наклона A равно:

$$S_A = \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \left[\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \langle y \rangle)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} - A^2 \right]}. \quad (\text{П.3.4})$$

СКО определения свободного члена B вычисляют по формуле:

$$S_B = S_A \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2 + \langle x \rangle \sum_{i=1}^n x_i}{n}}. \quad (\text{П.3.5})$$

Далее оцениваются доверительные границы погрешности результата измерений искомой физической величины по методике, указанной в лабораторной работе, и, если необходимо, выполняется построение графика: в осях координат y и x проводится прямая линия с коэффициентом наклона A ; экспериментальные значения измеренных величин обозначаются на этом же графике точками с координатами (x_i, y_i) .

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Обработка результатов совместных измерений по методу наименьших квадратов на персональном компьютере с помощью MS Excel

Постройте график зависимости y от x с помощью MS Excel. Для этого выполните следующие действия.

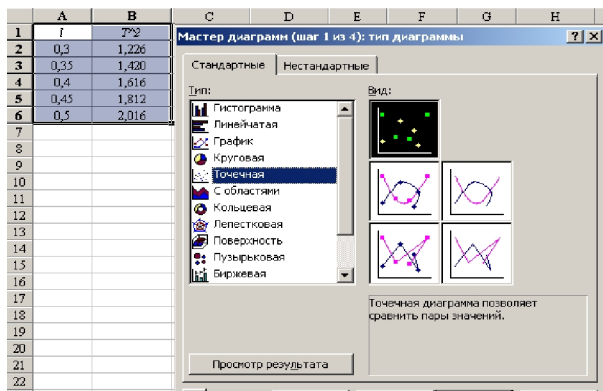


Рис.П.4.1.

Мастер диаграмм с помощью команды Вставка – Диаграмма. В списке Тип выберите пункт Точечная, в окне Вид – первую диаграмму (рис.П.4.1). Нажмите кнопку Готово.

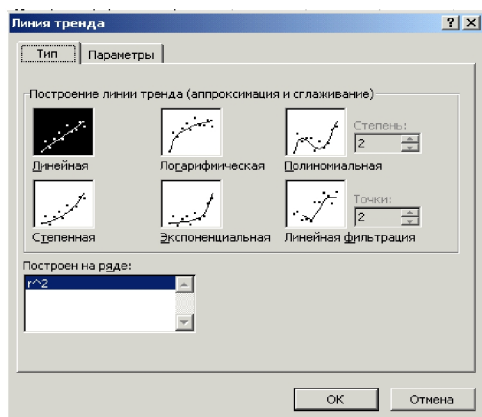


Рис.П.4.2.

граммы приведён на рис.П.4.3.

1. Получите разрешение преподавателя или дежурного инженера лаборатории на включение компьютера и принтера. Откройте электронные таблицы с помощью команды Пуск – Программы – Microsoft Excel. Введите в столбцы A и B экспериментальные данные для x и y . Выделите диапазон ячеек, содержащих данные, с помощью левой кнопки мыши. Запустите

Добавьте линию линейного тренда, которая является в данном случае графиком искомой прямой, выравнивающей набор экспериментальных данных по методу наименьших квадратов, с помощью команды Диаграмма – Добавить линию тренда. В открывшемся окне на закладке Тип выберите "линейный тренд" (рис.П.4.2).

Перейдите к закладке Параметры и установите галочки на флажках "показывать уравнения на диаграмме" и "поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации R^2 ", щелкнуть по кнопке ОК.

Пример окончательного вида диа-

2. Коэффициент наклона A определяется с помощью функции MS Excel НА-

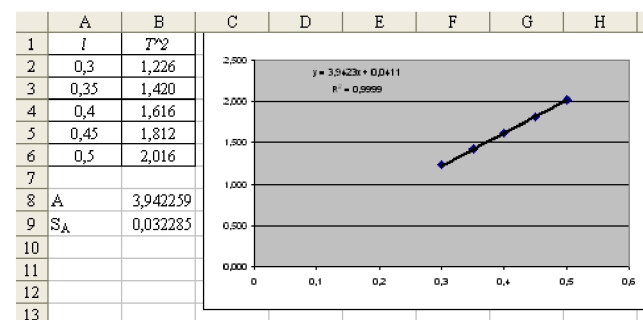


Рис.П.4.3.

ления коэффициента наклона A введите в ячейку ниже массива экспериментальных данных, например, в ячейке B8: =НАКЛОН(B2:B6;A2:A6).

3. Вычислите среднюю квадратическую погрешность S_A по формуле:

$$S_A = A \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right)}, \text{ т.е. введите выражение:}$$

=B8*КОРЕНЬ((1/(КВПИРСОН(B2:B6;A2:A6)^2-1)/(n-2))) с подстановкой числового значения для количества опытов n . Здесь функция MS Excel КВПИРСОН(изв_знач_y;изв_знач_x) используется для вычисления квадрата величины достоверности аппроксимации R^2 .

4. Коэффициент B линейной зависимости определяется аналогично с использованием функции ОТРЕЗОК(изв_знач_y;изв_знач_x).

5. Выведите страницу на печать. Для этого выберите в меню Файл – Печать – ОК. Закройте окно MS Excel без сохранения файла.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Обработка результатов совместных измерений по методу наименьших квадратов на персональном компьютере с помощью проверочных таблиц MS Excel

1. Получите разрешение преподавателя или дежурного инженера лаборатории на включение компьютера и принтера. Узнайте имя файла программы. Откройте файл. Программа выполнена в MS Excel и представляет собой готовые таблицы для автоматической обработки экспериментальных результатов.
2. Внесите экспериментальные данные в соответствующие столбцы электронной таблицы, при этом произойдет автоматическое обновление графика и обработка данных.
3. Выведите страницу на печать. Для этого выберите в меню Файл – Печать – ОК. Закройте окно MS Excel с сохранением или без сохранения файла.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Оценивание характеристик погрешности результата косвенных измерений

1. Запишите уравнение измерений: $Y=f(X, Z)$, где Y – искомое значение измеряемой величины, X и Z определяются прямыми измерениями.
2. Выполните нахождение результата измерений:
 - 2.1. Получите в результате измерений ряд значений X_i и Z_i .
 - 2.2. Вычислите средние арифметические значений:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \langle Z \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, \quad \langle Y \rangle = f(\langle X \rangle, \langle Z \rangle).$$

3. Проведите анализ источников погрешности результата измерений:
 - 3.1. Вычислите среднее квадратическое отклонение (СКО), характеризующее случайную составляющую погрешности при измерениях X, Z :

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \langle X \rangle)^2} \quad \text{и} \quad S_Z = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (Z_i - \langle Z \rangle)^2}.$$

- 3.2. Определите границы неисклѐченной систематической погрешности измерительных приборов: Θ_X и Θ_Z .
4. Проведите оценку характеристик погрешности результатов измерений величины Y :
 - 4.1. Вычислите СКО суммарной неисклѐченной систематической составляющей погрешности результата измерений величины Y (в предположении о равномерном распределении неисклѐченных систематических составляющих погрешности результата измерений внутри из границ) по формуле:

$$S_\Theta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \frac{\Theta_X^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 \frac{\Theta_Z^2}{3}}, \quad \text{где } \frac{\partial f}{\partial X} \text{ и } \frac{\partial f}{\partial Z} - \text{коэффициенты влияния.}$$

- 4.2. Оцените доверительные границы суммарной неисклѐченной систематической составляющей погрешности результата измерений Y при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ по формуле: $\Theta = 1,1\sqrt{3}S_\Theta$.
- 4.3. Определите СКО случайной составляющей погрешности результата измерений

$$Y \text{ по формуле: } S_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 S_X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 S_Z^2}.$$

- 4.4. Вычислите СКО суммарной погрешности результата измерений Y по формуле: $S = \sqrt{S_Y^2 + S_\Theta^2}$.
- 4.5. Выполните оценивание доверительных границ погрешности результата измерений Y при $\alpha = 0,95$ по формуле: $\Delta Y = \frac{t_{\alpha, (n-1)} S_Y + \Theta}{S_Y + S_\Theta} S$.

5. Запишите окончательный результат измерений в виде: $Y = \langle Y \rangle \pm \Delta Y$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Таблица П.7.1

Значения коэффициентов Стьюдента

Число измерений n	Коэффициент надежности α					
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	3,1	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
3	1,9	2,92	4,31	6,96	9,92	31,60
4	1,6	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
5	1,5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	1,5	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
7	1,4	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,4	1,90	2,36	3,00	3,50	5,40
9	1,4	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,4	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
∞	1,3	1,65	1,96	2,33	2,59	3,31

Таблица П.7.2

Погрешности округления числа π и ускорения силы тяжести g .

№ п/п	Число π		Ускорение силы тяжести $g, \text{ м/с}^2$	
	π	S_π	g	S_g
1	3	0.142	10	0.193
2	3.1	0.042	9.8	0.0067
3	3.14	0.0016	9.81	0.0034
4	3.142	0.00041	9.806	0.00065
5	3.1415	0.000093	9.8067	0.00005

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Детлаф, А.А. Курс физики: учебное пособие для втузов/А.А.Детлаф, В.М.Яворский.– М.: Высшая школа, 2002.–718 с.
2. Сивухин, Д.Е. Общий курс физики. Механика/Д.Е.Сивухин.–М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2002. Т.1.– 560 с.
3. Савельев,И.В. Курс общей физики. Механика/И.В.Савельев.–М.: Астрель, 2005. Т.1.–336с.
4. Рогачев,Н.В. Курс физики. Механика. Молекулярная физика/Н.В.Рогачев.–Самара: СГАУ, 2006.–192 с.
5. Каленков,С.Г. Практикум по физике./С.Г.Каленков, Г.И.Соломахо.–М.: Высшая школа, 1990.–111 с.
6. Практические рекомендации по обработке результатов измерений: метод указания/ сост. Л.П.Муркин, Н.В.Мышкина.–Самара: СГАУ, 1982.–24 с.

Учебное издание

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Методические указания к лабораторным работам

Составители: ***Кривко Татьяна Вячеславовна,
Орлова Наталья Викторовна,
Сандимирова Татьяна Александровна,
Соломеина Татьяна Сергеевна,
Маркелов Александр Александрович***

Научный редактор Н. Л. К а з а н с к и й
Редакторская обработка Н. С. К у п р и я н о в а
Корректорская обработка Н. С. К у п р и я н о в а
Доверстка Н. С. К у п р и я н о в а

Подписано в печать 25.09.07. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,25.
Тираж 120 экз. Заказ . ИП-93/2007

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.