

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)» (СГАУ)

Практические занятия по теоретической механике

Мультимедийный образовательный модуль
в системе дистанционного обучения Moodle

Работа выполнена по мероприятию блока 1 «Совершенствование
образовательной деятельности» Программы развития СГАУ
на 2009 – 2018 годы по проекту «Установка, настройка и использование в учебном процессе факультета
летательных аппаратов системы дистанционного обучения (СДО) Moodle совместно с блоком
«Электронный деканат»
Соглашение № 1/16 от 03.06.2013 г.

УДК 531(075)
П692

Автор-составитель: **Алексеев Алексей Владимирович**

Практические занятия по теоретической механике [Электронный ресурс] : ультимедийный образоват. модуль в системе дистанц. обучения Moodle / М-во образования и науки РФ, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост. А. В. Алексеев. - Электрон. текстовые и граф. дан. - Самара, 2013. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В состав научно-образовательного модуля входят:

1. Теоретическая механика. Задания для расчётно-графических работ.
2. Теоретическая механика. Методические рекомендации к решению.
3. Теоретическая механика. Задачи для самостоятельной работы.
4. Теоретическая механика. Набор тестов для самоконтроля.

Мультимедийный образовательный модуль предназначен для студентов факультета летательных аппаратов, обучающихся по специальности 160100.65 «Самолето- и вертолестроение» и направлению подготовки бакалавров 220700.62 «Автоматизация технологических процессов и производств», изучающих дисциплину «Теоретическая механика» в 3 и 4 семестрах.

Модуль разработан на кафедре теоретической механики.

Исследование относительного движения материальной точки

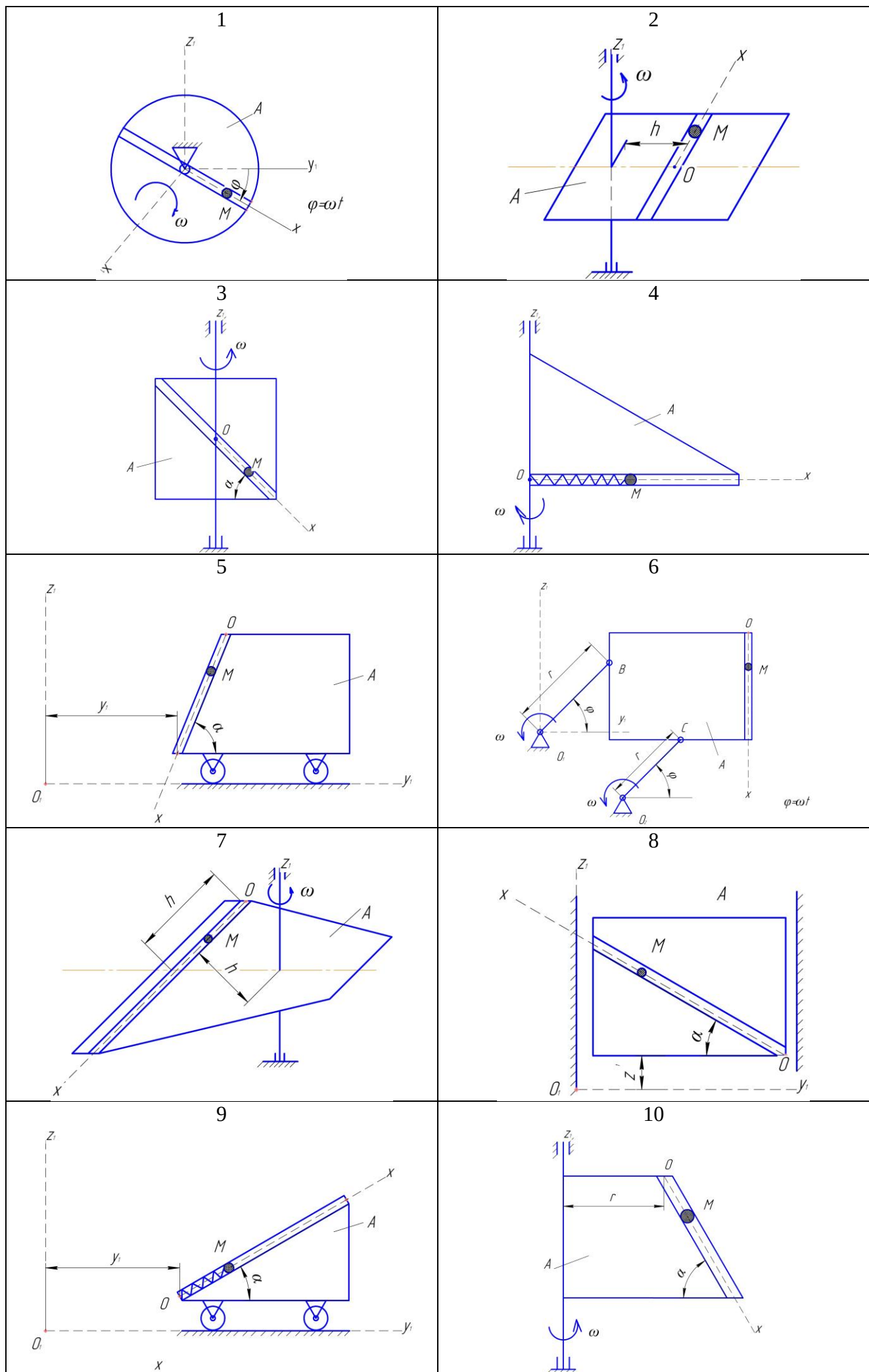
Шарик M , рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу движущегося тела A . Найти уравнение относительного движения этого шарика $x = f(t)$, приняв за начало отсчета точку O .

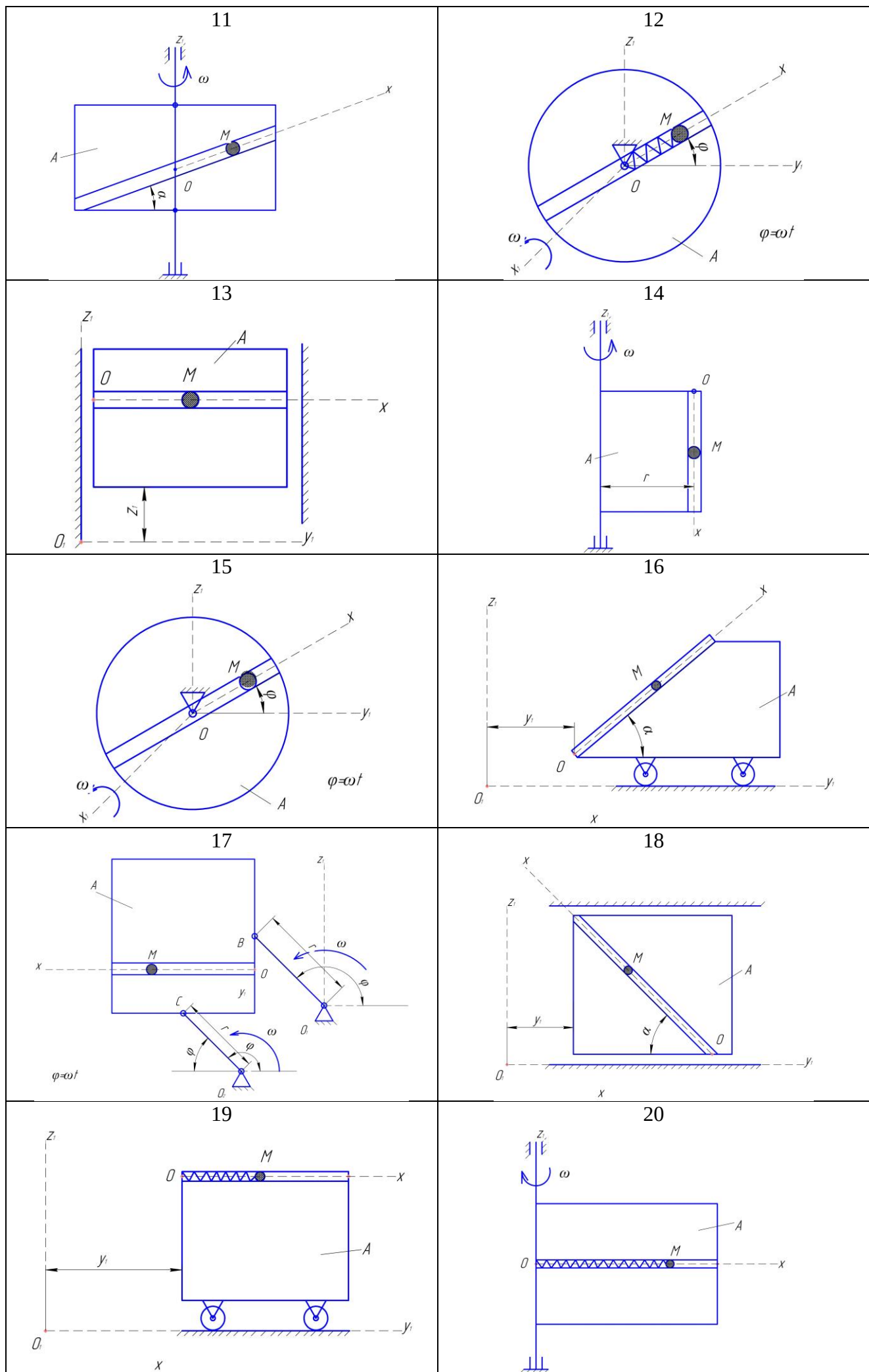
Тело A равномерно вращается вокруг неподвижной оси (в вариантах 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 20, 23, 26 и 30 ось вращения z_1 вертикальна, в вариантах 1, 12, 15 и 25 ось вращения x_1 горизонтальна). В вариантах 5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 28 и 29 тело A движется поступательно, параллельно вертикальной плоскости $y_1O_1z_1$.

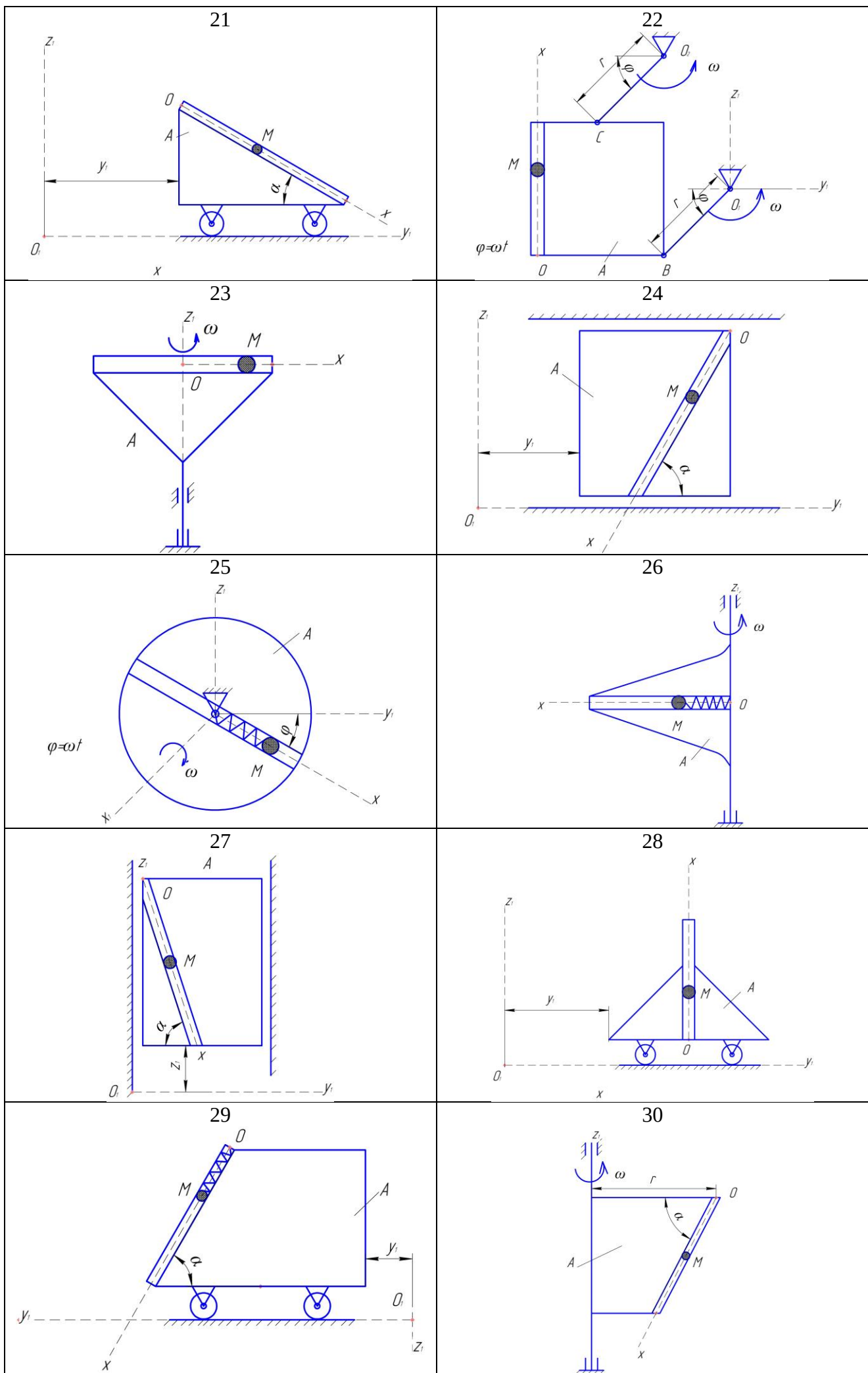
Найти также координату x и давление шарика на стенку канала при заданном значении $t = t_1$. Данные, необходимые для выполнения задания, приведены в таблице.

В задании приняты следующие обозначения: m – масса шарика M ; ω – постоянная угловая скорость тела A (в вариантах 1, 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 20, 23, 25, 26, 30) или кривошипов O_1B и O_2C (в вариантах 6, 17, 22); c – коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик M ; l_0 – длина недеформированной пружины; f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала; x_0 , $\dot{x}_0$ – начальная координата и проекция начальной скорости на ось x .

№ вар.	α , град	m , кг	ω , рад/с	Начальные данные		t_1 , с	c , Н/м	l_0 , м	Уравнение движения тела A , м	r, h , м	f
				x_0 , м	$\dot{x}_0$, м/с						
1	-	0,01	2π	0	0,4	0,4	-	-	-	-	0
2	-	0,01	2π	0	0,2	0,1	-	-	-	0,15	0
3	45	0,02	π	0,5	0	0,2	-	-	-	-	0
4	-	0,08	6π	0,2	-0,8	0,1	0,4	0,15	-	-	0
5	60	0,01	-	0,6	0	1,0	-	-	$y_1 = 0,5 - 3t^3$	-	0
6	-	0,02	8π	0,5	0	0,1	-	-	-	0,10	0
7	-	0,02	4π	0,3	0	0,2	-	-	-	0,20	0
8	30	0,02	-	0,8	0	0,1	-	-	$z_1 = 0,2 \cos 2\pi t$	-	0
9	30	0,01	-	0,4	0	0,1	0,3	0,20	$y_1 = 6t^3$	-	0
10	60	0,04	4π	0,4	0	0,2	-	-	-	0,20	0
11	30	0,04	2π	0	0	0,1	-	-	-	-	0
12	-	0,07	4π	0,05	0	0,1	0,4	0,10	-	-	0
13	-	0,02	-	0	0,5	0,2	-	-	$z_1 = 4 - 8t^2$	-	0,1
14	-	0,04	8π	0,5	0	0,2	-	-	-	0,20	0,2
15	-	0,02	2π	0,5	0	0,1	-	-	-	-	0
16	45	0,01	-	1,0	2,0	0,1	-	-	$y_1 = 0,4t^3$	-	0
17	-	0,01	4π	0	4,0	0,3	-	-	-	0,20	0
18	40	0,01	-	0,6	0	0,3	-	-	$y_1 = 0,3 \sin \pi t$	-	0
19	-	0,07	-	0,4	-0,8	0,1	0,2	0,20	$y_1 = 6t - 2t^3$	-	0
20	-	0,02	6π	0,1	0	0,2	0,4	0,10	-	-	0
21	30	0,04	-	0,5	0,1	0,4	-	-	$y_1 = 4 + 2t^2$	-	0,2
22	-	0,02	2π	0,1	3,0	0,2	-	-	-	0,10	0
23	-	0,02	4π	-0,5	-0,1	0,1	-	-	-	-	0
24	60	0,02	-	0	0,2	0,2	-	-	$y_1 = 0,2 \cos 1,5\pi t$	-	0
25	-	0,04	8π	0,1	-0,4	0,2	0,3	0,20	-	-	0
26	-	0,08	2π	0,2	0,3	0,2	0,4	0,10	-	-	0
27	75	0,03	-	1,0	0,6	0,1	-	-	$z_1 = 0,3 \sin 0,5\pi t$	-	0
28	-	0,02	-	0,8	0	0,1	-	-	$y_1 = 10 - 6t^3$	-	0,1
29	60	0,07	-	0,4	1,0	0,1	0,4	0,20	$y_1 = 6 + 2t^3$	-	0
30	50	0,03	π	0	0,5	0,2	-	-	-	0,50	0







Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

По заданным уравнениям движения точки М установить вид её траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Необходимые для решения данные приведены в таблице.

Номер варианта	Уравнения движения		t_1 , с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1/2
2	$3\cos^2(\pi/3) + 1$	$3\sin^2(\pi/3)$	1
3	$-2\cos(\pi^2/3) + 2$	$2\sin(\pi^2/3)$	1
4	$3t + 3$	$-3/(t+1)$	2
5	$\sin(\pi/3)$	$-2\cos(\pi/3) + 4$	1
6	$2t^2 + 5$	$-4t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	2
8	$\sin(\pi^2/6) + 3$	$3 - \cos(\pi^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t + 6$	1
10	$-6\cos(\pi/3)$	$-3\sin(\pi/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$8 - 3t$	2
12	$10\sin^2(\pi/6)$	$-10\cos^2(\pi/6) - 5$	1
13	$5\cos(\pi^2/3)$	$-5\sin(\pi^2/3)$	2
14	$-4t - 4$	$-3/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi/3)$	$-3\sin(\pi/3)$	1/2
16	$2t$	$4t^2 + 3$	1/2
17	$7\sin^2(\pi/6) - 5$	$-7\cos^2(\pi/6)$	2
18	$2 + 6\cos(\pi^2/3)$	$6\sin(\pi^2/3) + 4$	1
19	$-5t^2 - 4$	$3t$	2
20	$2 - 4t - 8t^2$	$3 - 7t/2 - 7t^2$	0
21	$6\sin(\pi^2/6) - 2$	$6\cos(\pi^2/6) + 3$	2
22	$3t^2 - 5$	$4t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1/2
24	$-7\cos(\pi/3) - 3$	$-7\sin(\pi/3)$	1
25	$-8t$	$-4t^2 - 6$	1
26	$8\cos^2(\pi/6) + 2$	$-8\sin^2(\pi/6) - 7$	2
27	$-5 - 10\sin(\pi^2/6)$	$-10\cos(\pi^2/6) + 7$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	2
29	$8t^2 + 8t/3 - 1$	$9t^2 + 3t + 2$	1
30	$2\cos(\pi^2/3) - 2$	$2\sin(\pi^2/3) + 3$	2

Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела

Тело H массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω_0 ; при этом в точке O желоба AB тела H на расстоянии AO от точки A , отсчитываемом вдоль желоба, закреплена материальная точка K массой m_2 . В некоторый момент времени ($t = 0$) на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t = \tau$ действие пары сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела H в момент времени $t = \tau$.

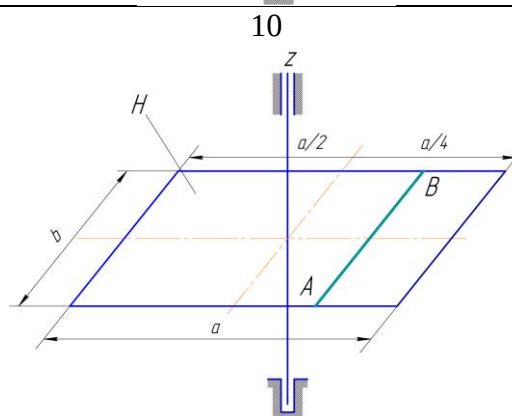
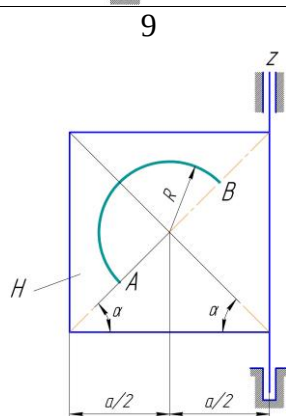
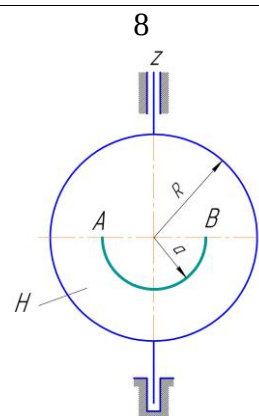
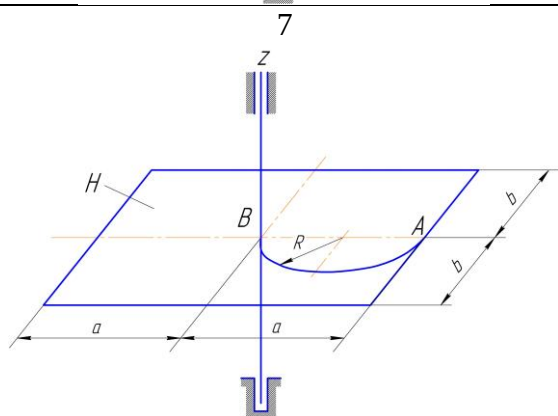
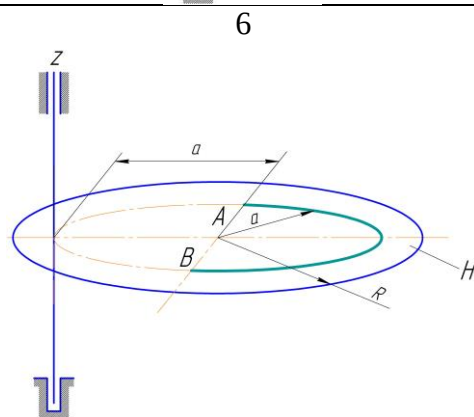
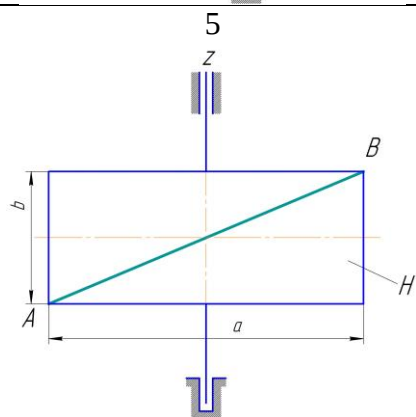
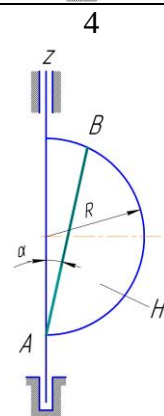
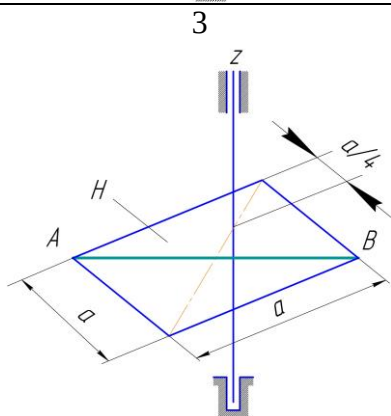
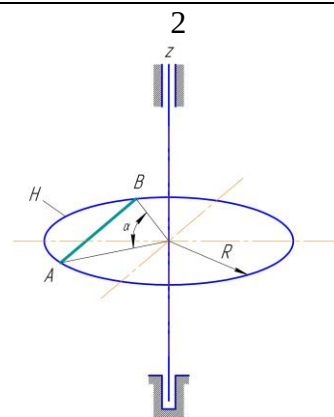
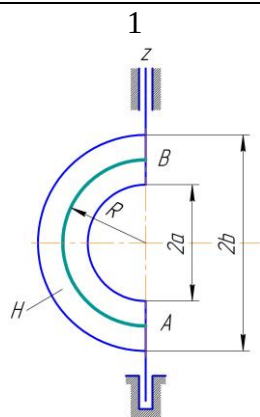
Тело H вращается по инерции с угловой скоростью ω_τ .

В некоторый момент времени $t_1 = 0$ (t_1 — новое начало отсчета времени) точка K (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки O вдоль желоба AB (в направлении к B) по закону $OK = s = s(t_1)$.

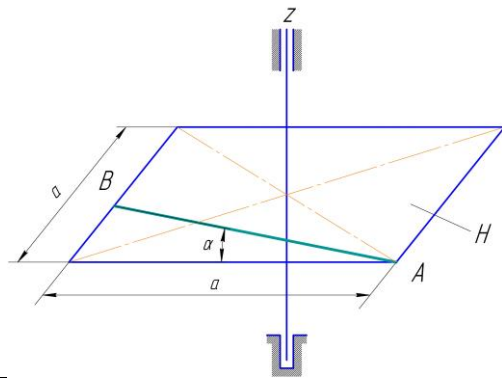
Определить угловую скорость ω_T тела H при $t_1 = T$.

Тело H рассматривать как однородную пластинку, имеющую форму, показанную на рисунках. Необходимые для решения данные приведены в таблице.

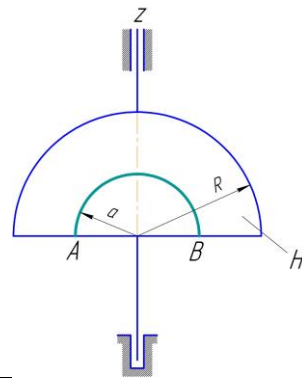
№ вар.	m_1 , кг	m_2 , кг	ω_0 , рад/с	a , м	b , м	R , м	α , град	AO , м	$M_z =$ $= M_z(t)$ Н·м	τ , с	$OK =$ $= s = s(t_1)$ м	T , с
1	40	16	-1	1	1,5	1,2	-	$\pi R/6$	$-26t^2$	3	$(5\pi R/12)t_1$	1
2	36	3	-2	-	-	2	120	$\sqrt{3}/2$	101	5	$\sqrt{3}t_1^2$	1
3	50	10	0	2	-	-	-	0	$-120t$	4	$(\sqrt{2}/4)t_1^2$	2
4	100	50	-3	-	-	1	30	0,4	$21t$	2	$0,6t_1$	2
5	84	20	1,5	2	1,5	-	-	0	$15\sqrt{t}$	4	$0,5t_1$	2,5
6	28	5	-1,25	1,5	-	2,5	-	$\pi a/6$	$-700t$	$\sqrt{3}$	$(5\pi a/18)t_1^2$	$\sqrt{3}$
7	68	32	-2	1,6	1	0,8	-	0	968	1	$(\pi R/2)t_1^2$	1
8	92	50	0	1,2	-	2	-	$\pi a/2$	$240\sqrt{t}$	4	$(\pi a/4)t_1$	2
9	160	100	5	1,2	-	0,4	45	$\pi R/4$	$-29t$	3	$(3\pi R/4)t_1^2$	1
10	200	140	2	$\sqrt{2}$	2	-	-	$\sqrt{2}/2$	$-90\sqrt{t}$	4	$(\sqrt{2}/4)t_1^2$	1
11	150	80	-1	2	-	-	15	0	$40t$	2	$0,4t_1^2$	2
12	76	20	-3	1	-	2	-	0	$50t^2$	3	$(\pi a/3)t_1$	2
13	140	40	4	1	-	-	-	0,5	$-27\sqrt{t}$	1	$0,3t_1$	2
14	80	50	2	-	-	1	-	0	$120t$	1	$0,5t_1$	3
15	48	18	-4	1	-	2	-	0	$330t^2$	2	$(\pi a/2)t_1^2$	1
16	96	54	-5	1	1,2	-	30	0,4	74	2	$0,3t_1^2$	$\sqrt{2}$
17	38	10	-2	-	-	1,6	30	0,6	$69t$	4	$0,6t_1$	2
18	26	14	3	2	3	0,8	-	$\pi R/2$	324	3	$(\pi R/8)t_1^2$	2
19	18	10	1	1,5	-	-	-	0	$-135t$	2	$(\pi a/4)t_1^2$	1
20	30	10	3	1	-	1,2	-	$\pi a/6$	$-14t^2$	3	$(\pi a/12)t_1^2$	2
21	46	20	-6	-	-	1	-	$\sqrt{2}/2$	$75\sqrt{t}$	1	$(\sqrt{2}/16)t_1^2$	2
22	52	20	-1	1,6	1,2	0,6	-	$\pi R/2$	163	4	$(\pi R/2)t_1^2$	1
23	94	40	2	$\sqrt{2}$	1	-	-	$\sqrt{3}/2$	-210	2	$(\sqrt{3}/2)t_1$	1
24	70	30	-3	0,6	-	-	60	0,2	$27t^2$	2	$0,4t_1$	2
25	80	46	-5	-	-	0,5	-	0	$20t$	2	$(\pi R/6)t_1^2$	2
26	160	60	-4	1,5	-	2	-	$\pi a/6$	$1170\sqrt{t}$	1	$(\pi a/2)t_1^2$	1
27	200	160	0	1	-	-	60	0	$-25t$	2	t_1^2	1
28	40	16	-2	0,6	-	-	-	0,1	$5,6t$	3	$0,4t_1$	1
29	140	50	5	0,6	-	0,6	-	0	$-6,3\sqrt{t}$	4	$(5\pi R/6)t_1$	1
30	160	80	0	1,6	1,2	-	-	1,6	$652t$	2	$0,2t_1^2$	2



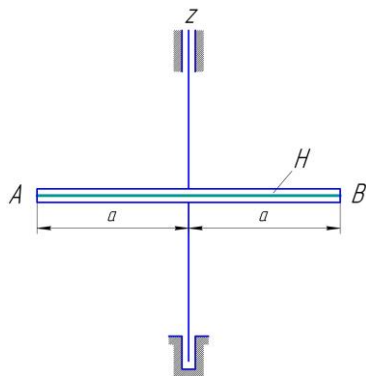
11



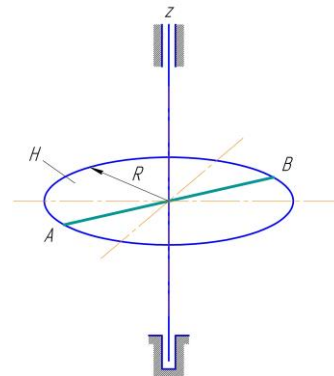
12



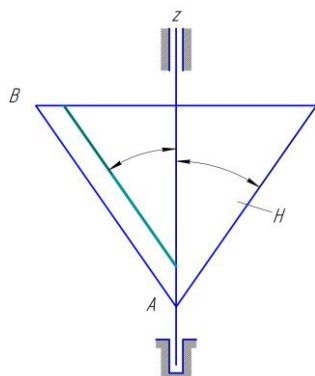
13



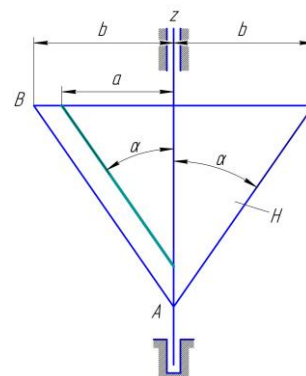
14



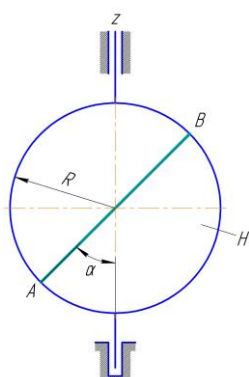
15



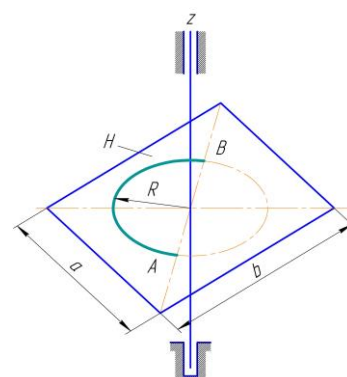
16



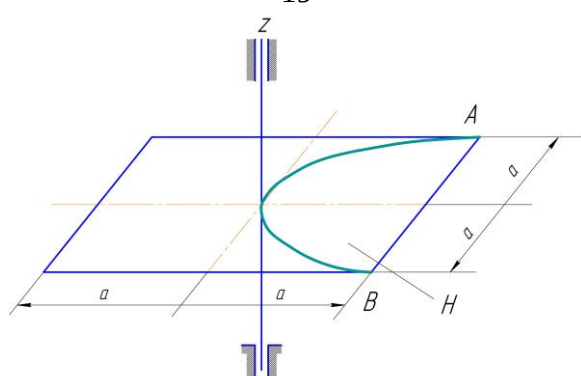
17



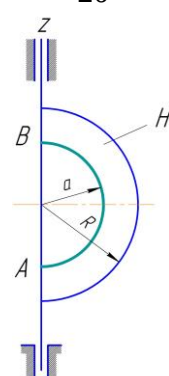
18

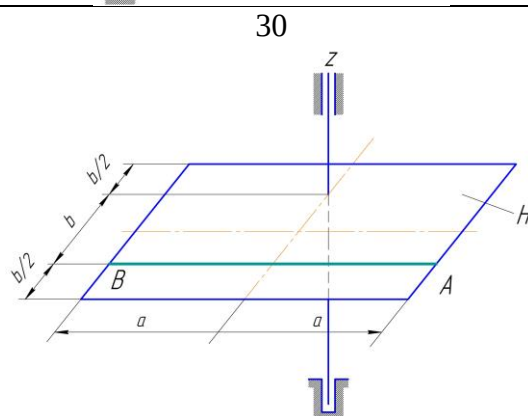
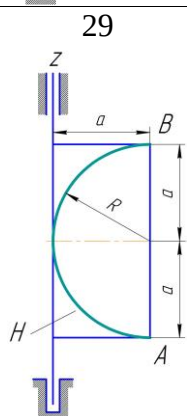
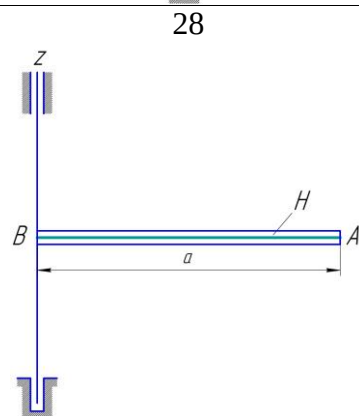
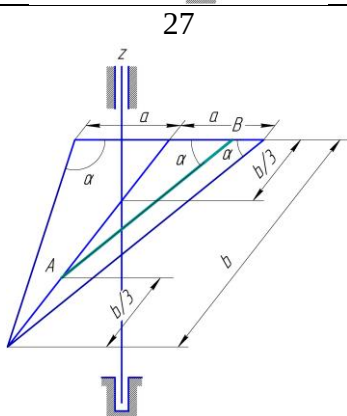
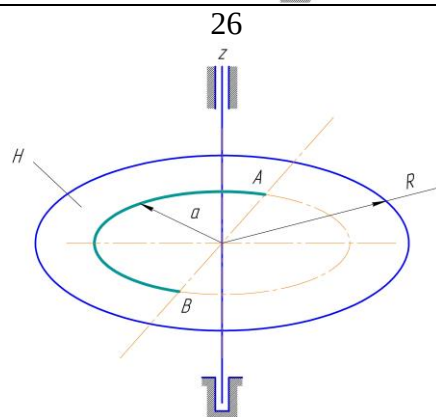
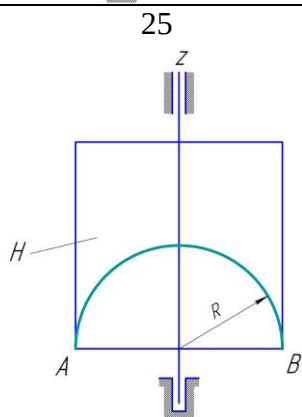
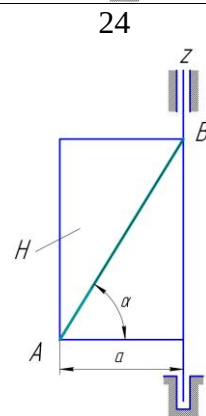
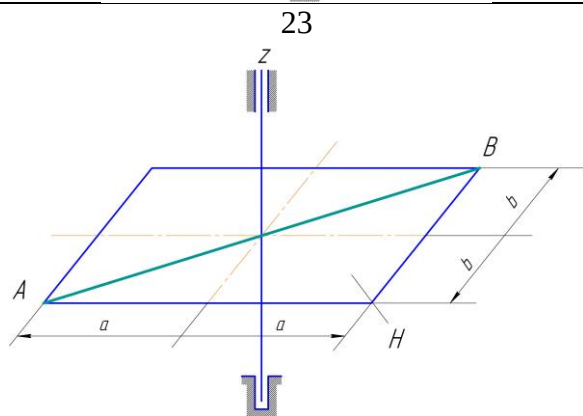
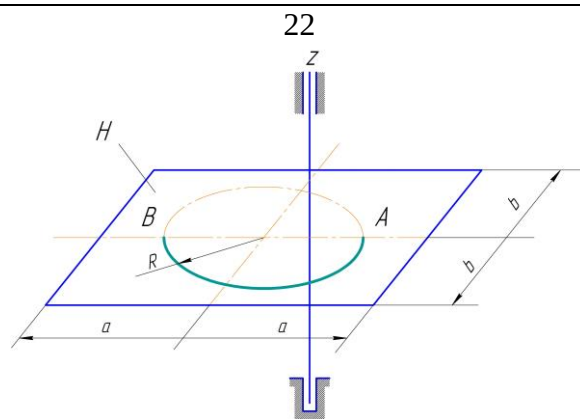
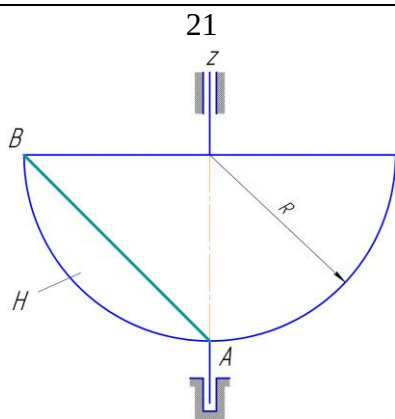


19



20



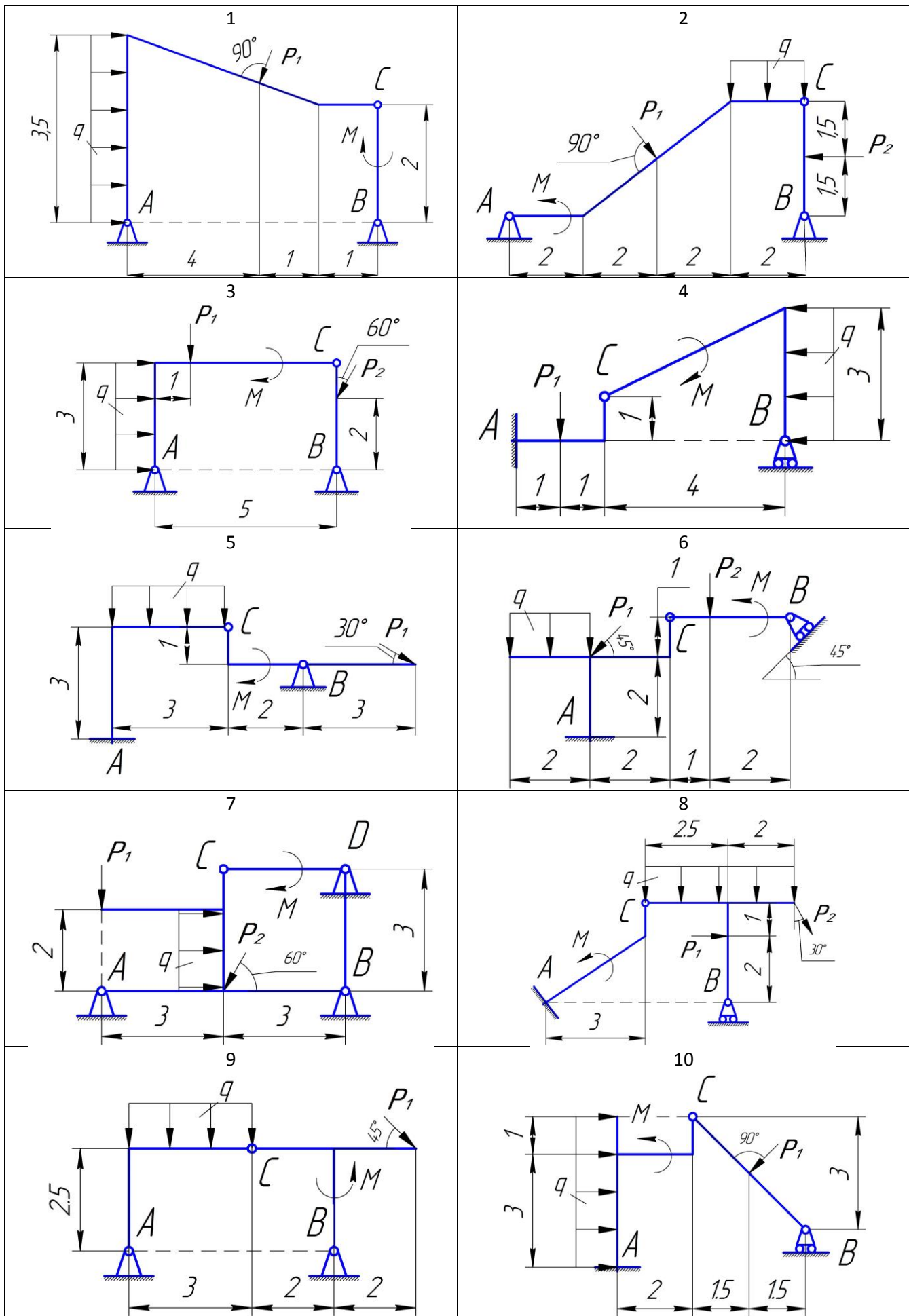


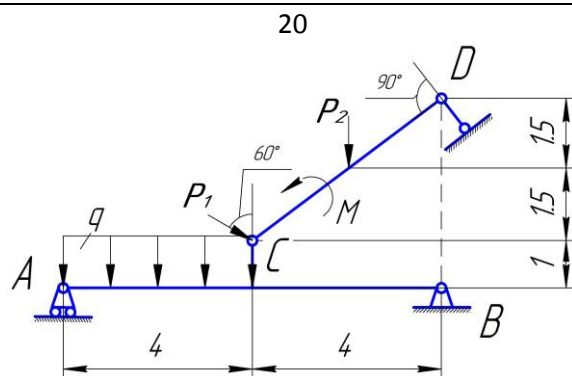
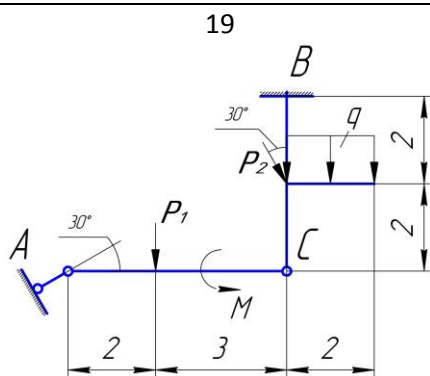
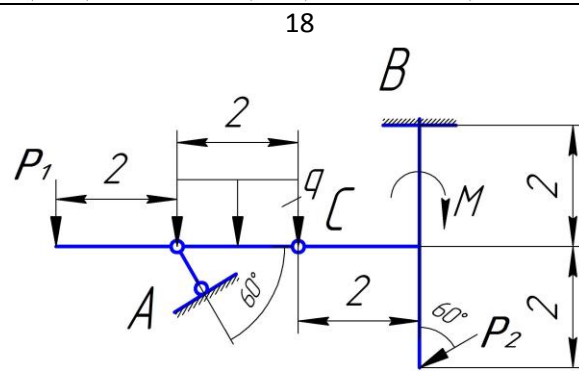
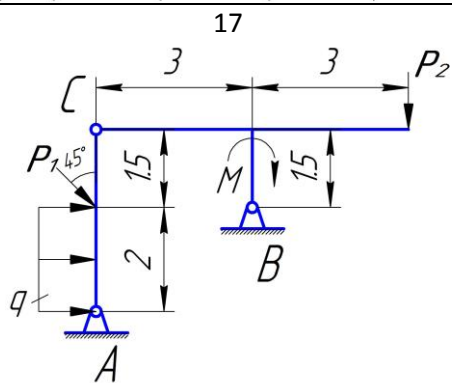
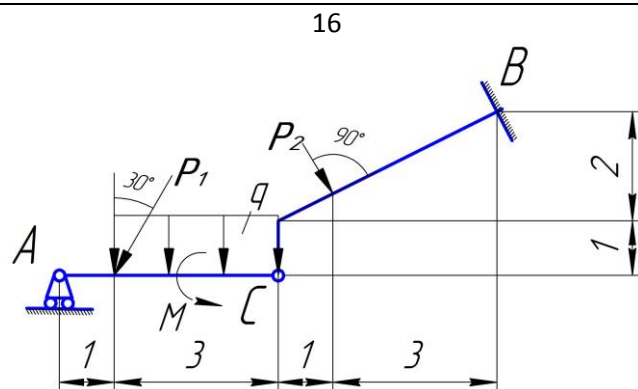
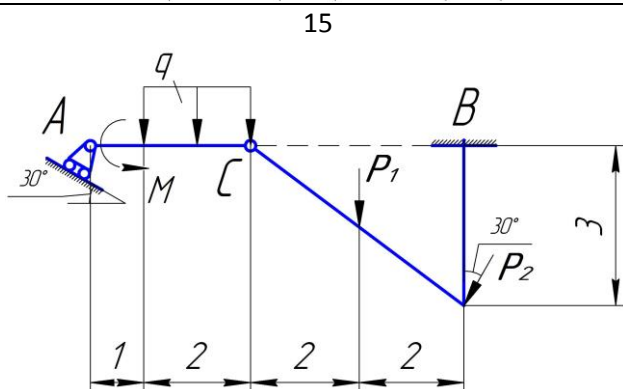
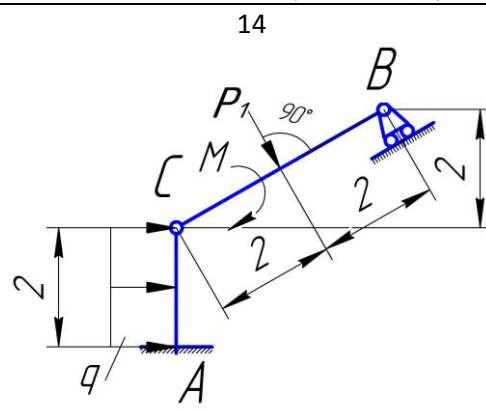
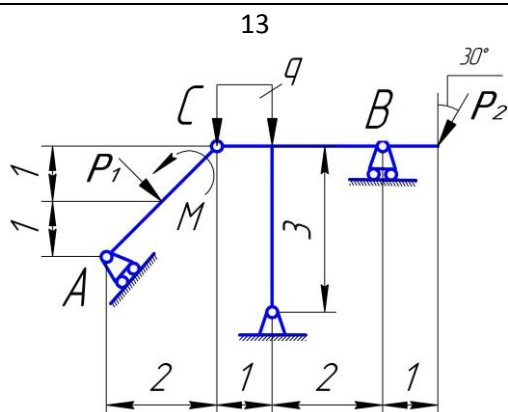
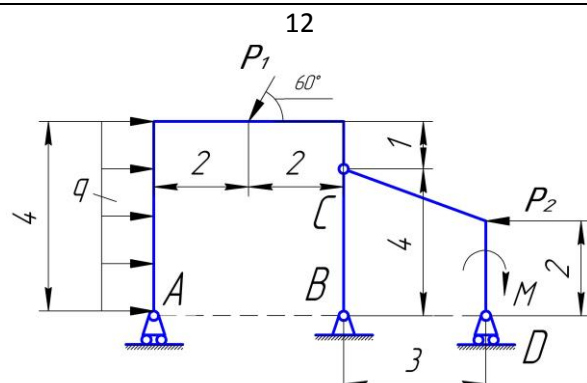
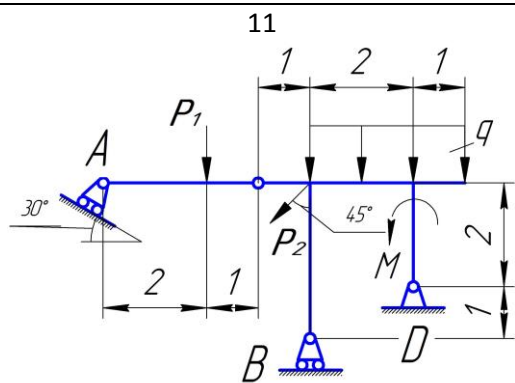
Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Конструкция состоит из двух частей. Установить при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции, указанной в таблице 1, наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения С. На рисунках показан первый способ соединения – с помощью шарнира С. Второй способ соединения – с помощью скользящей заделки, схемы которой показаны в таблице 2.

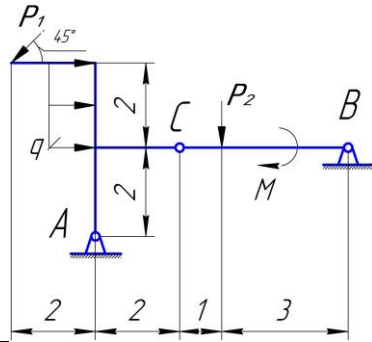
Таблица 1

№ вар.	P ₁	P ₂	M, кН · м	q, кН / м	Исследуемая реакция
	кН				
1	3	-	20	0,4	X _A
2	4	20	24	0,6	R _A
3	5	11	22	0,8	R _B
4	6	-	20	1,0	M _A
5	7	-	18	1,2	R _A
6	8	6	16	1,4	M _A
7	9	8	25	1,6	R _B
8	10	7	20	1,8	M _A
9	11	-	15	2,0	X _A
10	12	-	10	2,2	R _A
11	13	15	12	2,4	R _D
12	14	14	14	2,6	R _B
13	12	16	16	2,8	R _A
14	4	-	18	3,0	M _A
15	2	3	20	3,2	M _B
16	8	20	22	3,4	R _B
17	12	6	14	3,6	R _A
18	13	5	26	3,8	M _B
19	14	18	18	4,0	M _B
20	17	10	30	3,0	R _B
21	8	11	25	2,5	R _A
22	3	3	20	2,0	R _A
23	12	9	15	1,5	R _A
24	17	7	10	1,0	M _A
25	19	14	5	2,2	R _B
26	15	13	7	2,1	R _B
27	8	20	9	2,0	X _A
28	17	5	11	2,2	R _A
29	13	13	13	2,4	M _A
30	19	9	15	2,6	M _B

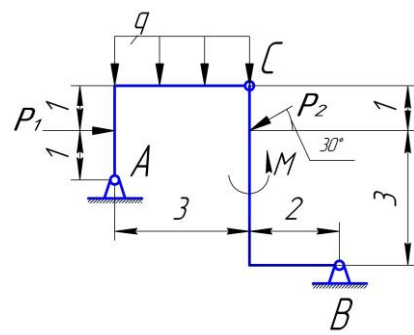




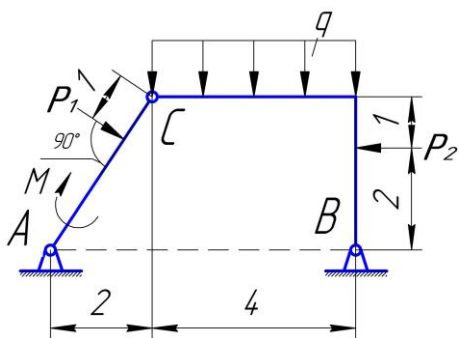
21



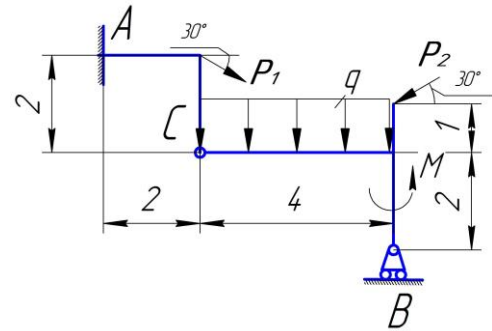
22



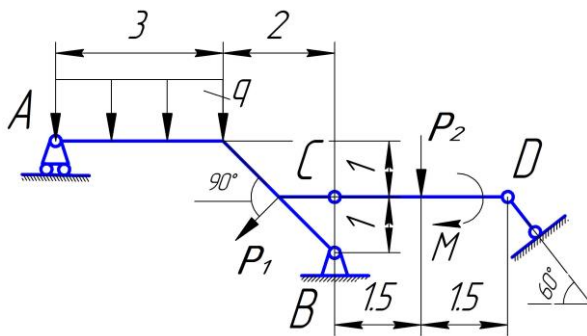
23



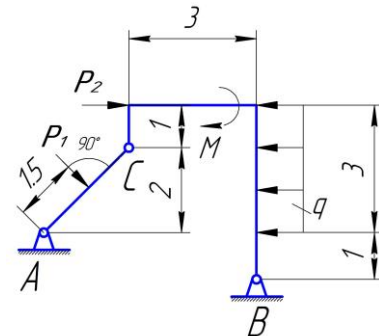
24



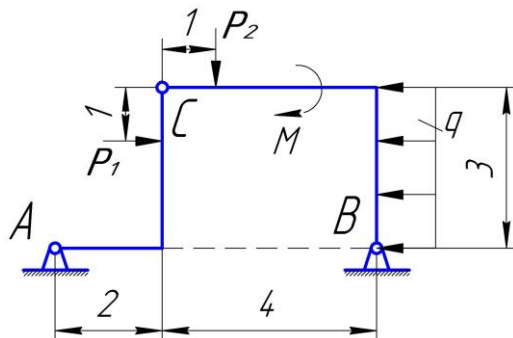
25



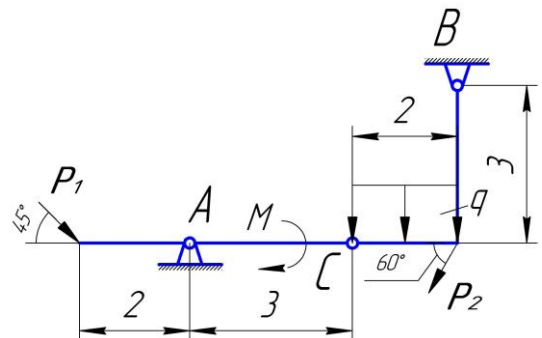
26



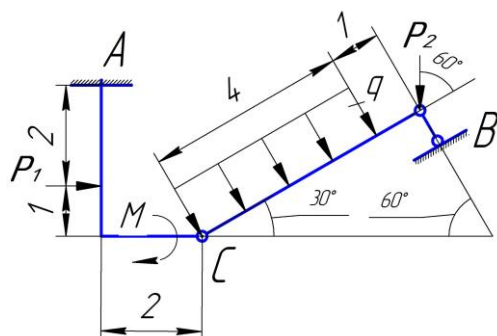
27



28



29



30

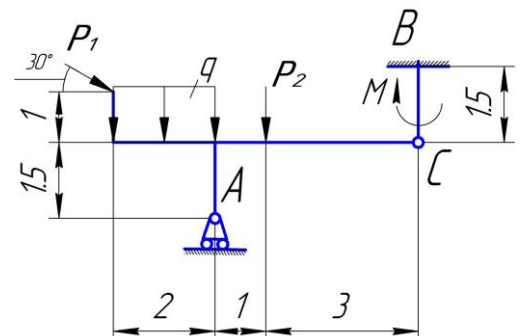
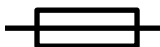
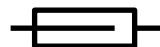
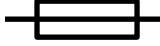
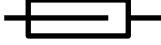
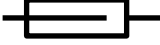
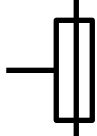


Таблица 2

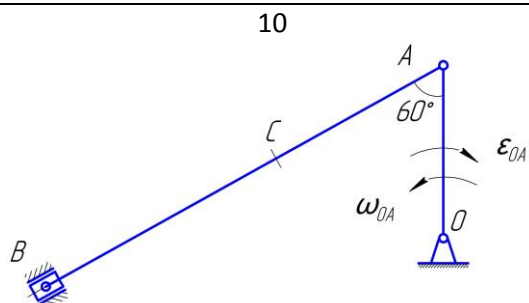
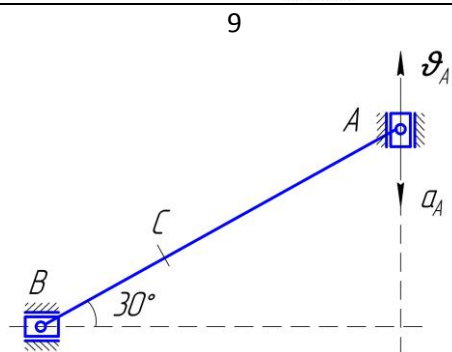
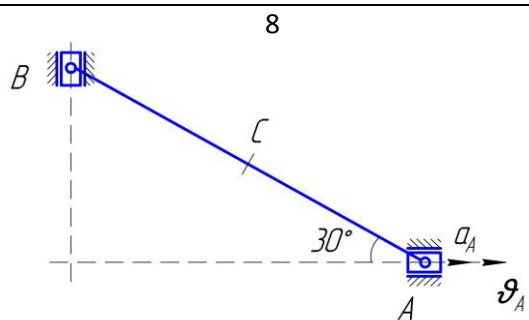
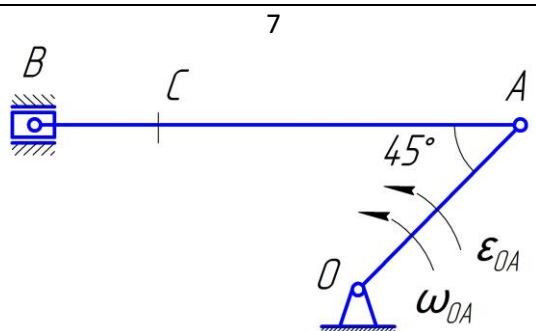
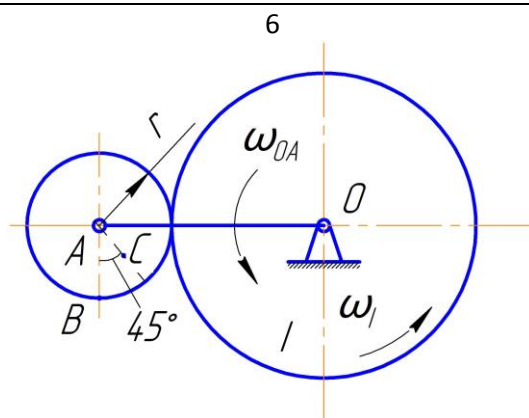
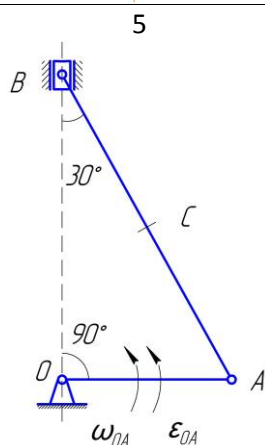
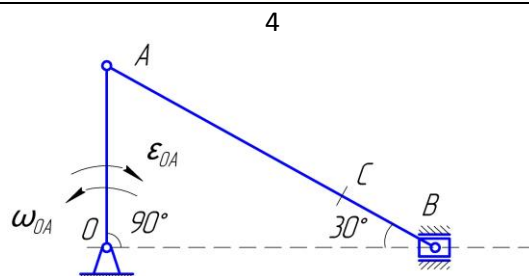
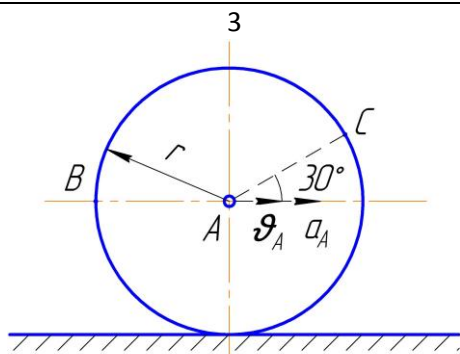
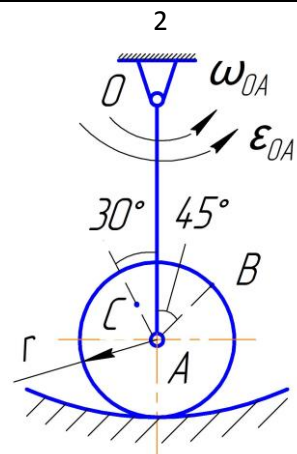
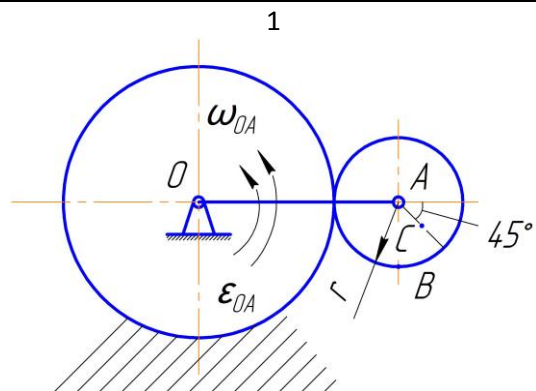
№ вар.	Вид скользящей заделки	№ вар.	Вид скользящей заделки	№ вар.	Вид скользящей заделки
1		11		21	
2		12		22	
3		13		23	
4		14		24	
5		15		25	
6		16		26	
7		17		27	
8		18		28	
9		19		29	
10		20		30	

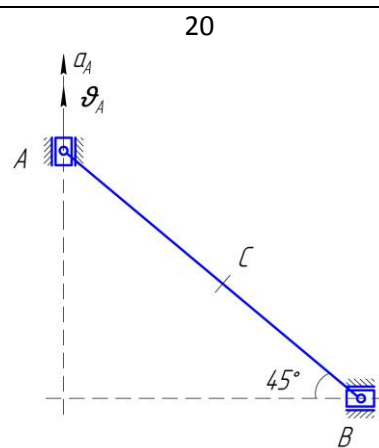
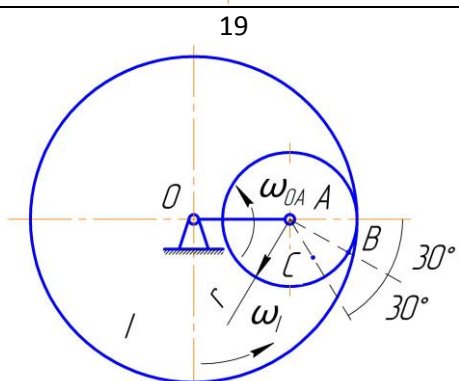
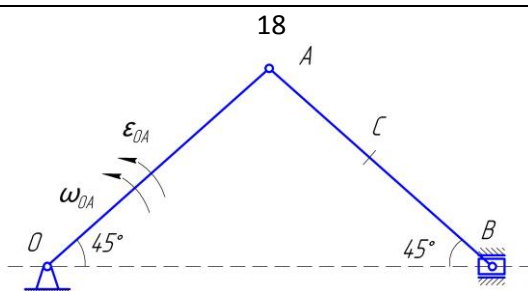
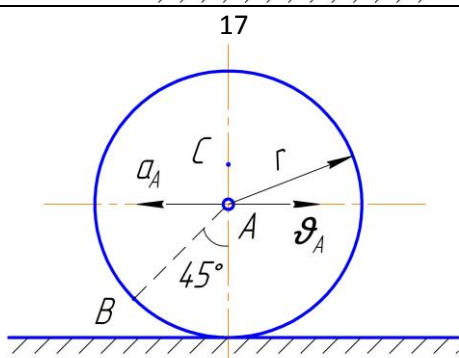
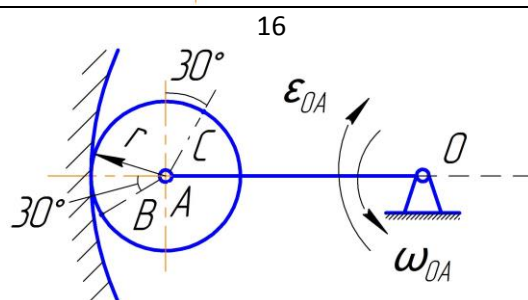
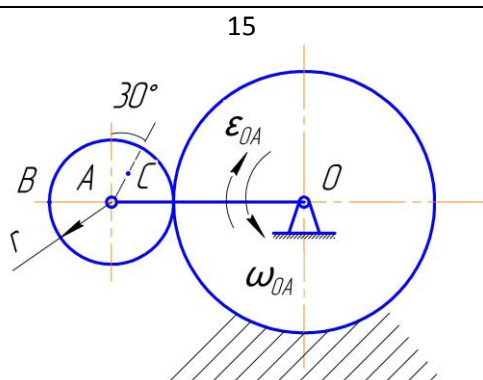
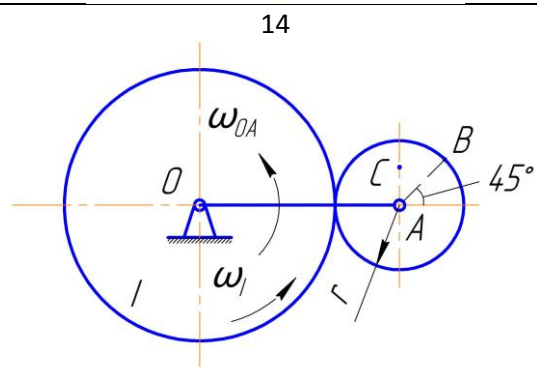
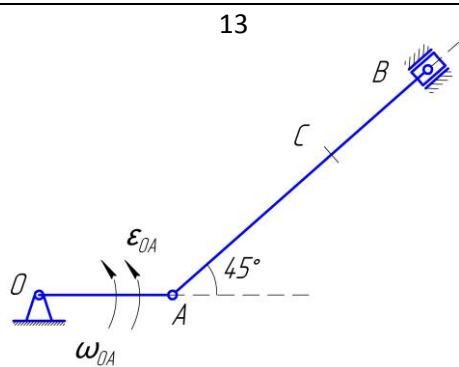
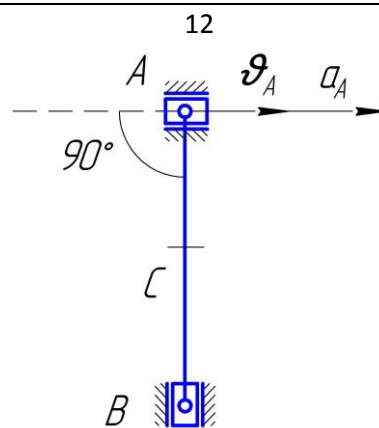
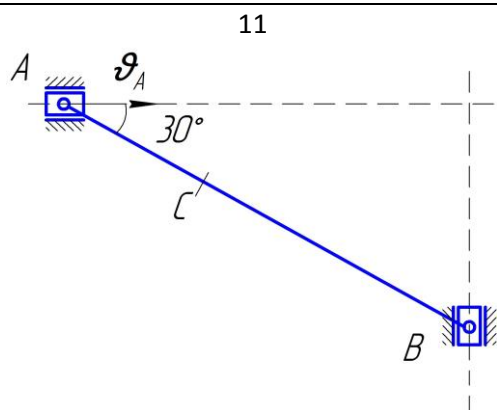
Кинематический анализ плоского механизма

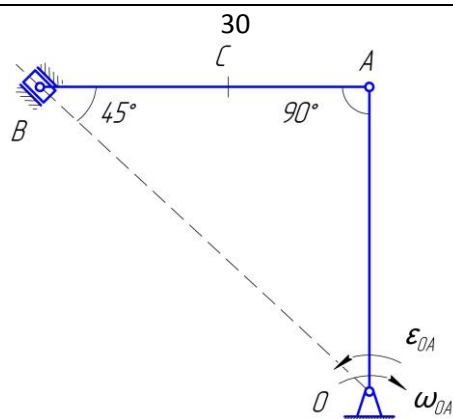
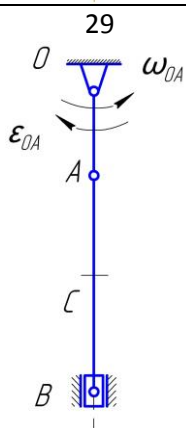
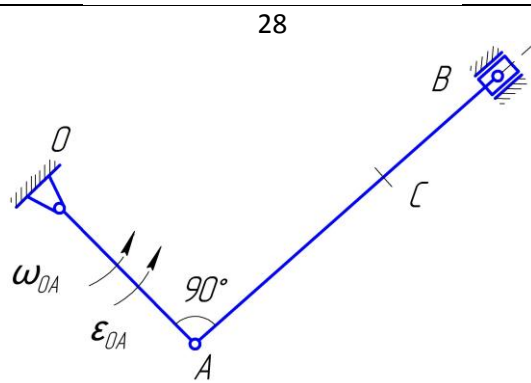
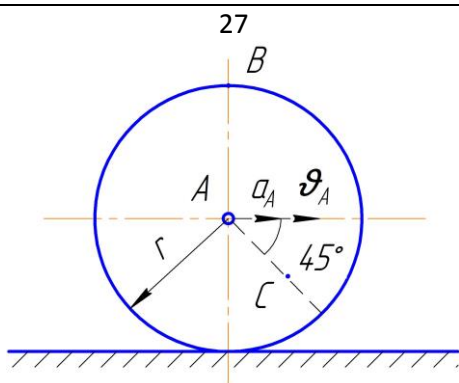
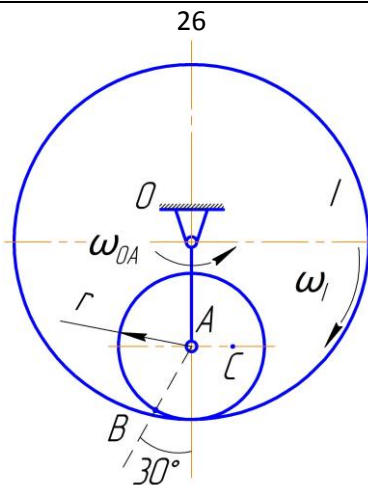
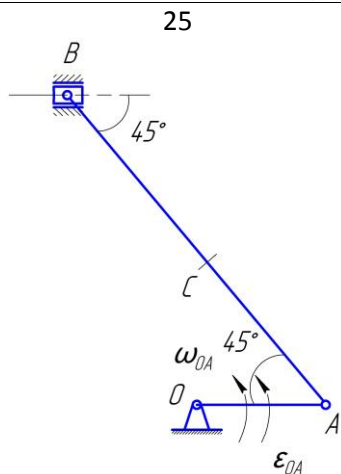
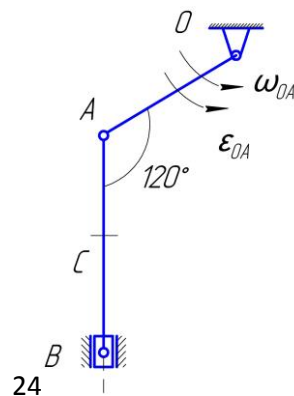
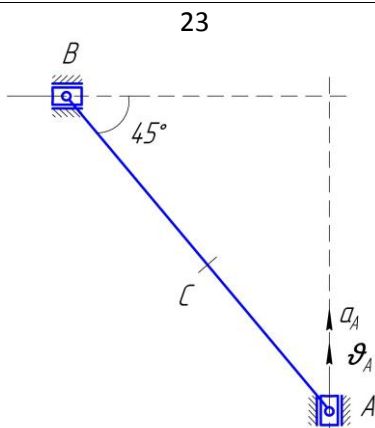
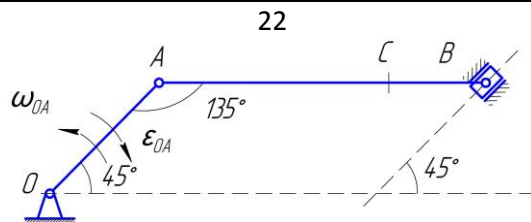
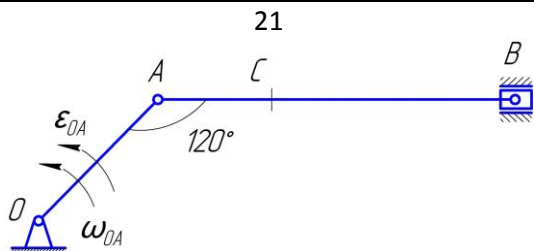
Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек В и С, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Схемы механизмов помещены на рисунках, а необходимые для расчета данные приведены в таблице.

№ вар.	Размеры, см				ω_{OA} , рад/с	ω_I , рад/с	ε_{OA} , рад/с ²	V_A , м/с	a_A , м/с ²
	OA	r	AB	AC					
1	40	15	-	8	4	-	1	-	-
2	30	15	-	8	2	-	1	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	60	120
4	35	-	-	45	6	-	5	-	-
5	25	-	-	20	2	-	3	-	-
6	40	15	-	6	3	2	0	-	-
7	35	-	75	60	4	-	15	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	60	30
9	-	-	45	30	-	-	-	80	40
10	25	-	80	20	2	-	5	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	30	0
12	-	-	30	20	-	-	-	50	50
13	25	-	55	40	1	-	6	-	-
14	45	15	-	8	6	15	0	-	-
15	40	15	-	8	5	-	3	-	-
16	55	20	-	-	7	-	10	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	160	100
18	10	-	10	5	4	-	11	-	-
19	20	15	-	10	3	4,5	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	100	150
21	30	-	60	15	5	-	4	-	-
22	35	-	60	40	2	-	8	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	20	40
24	25	-	35	15	3	-	4	-	-
25	20	-	70	20	7	-	6	-	-
26	20	15	-	10	1	0,2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	100	50
28	20	-	50	25	2	-	2	-	-
29	12	-	35	15	7	-	8	-	-
30	40	-	-	20	10	-	15	-	-



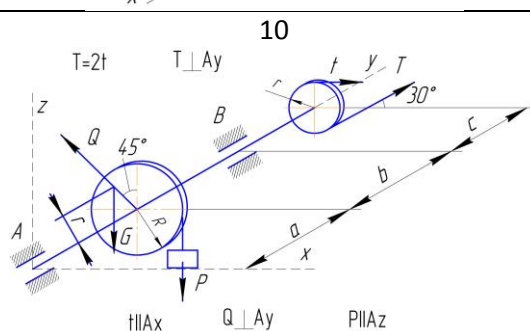
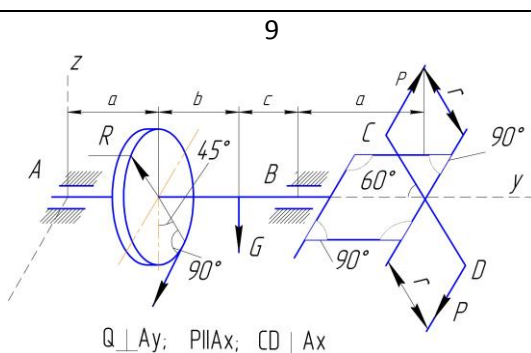
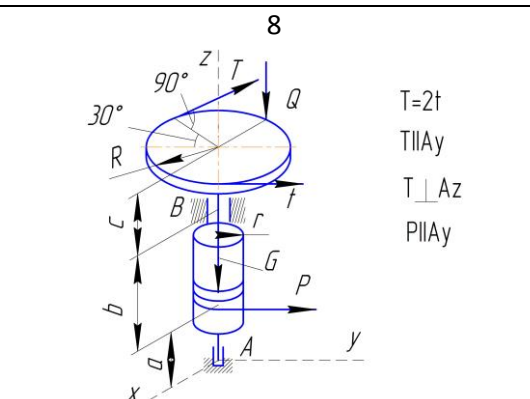
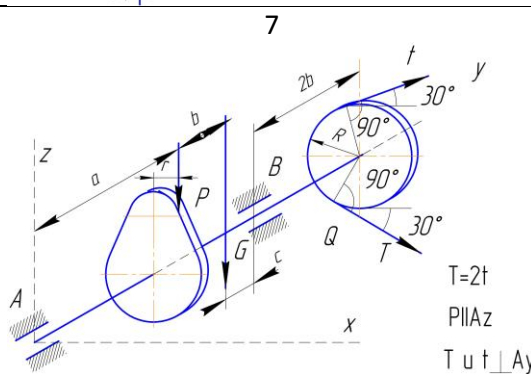
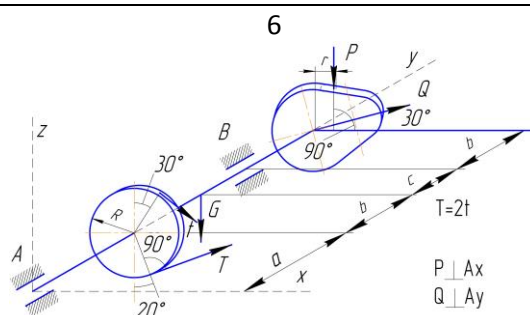
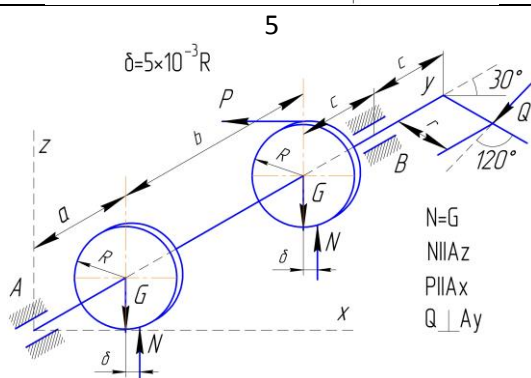
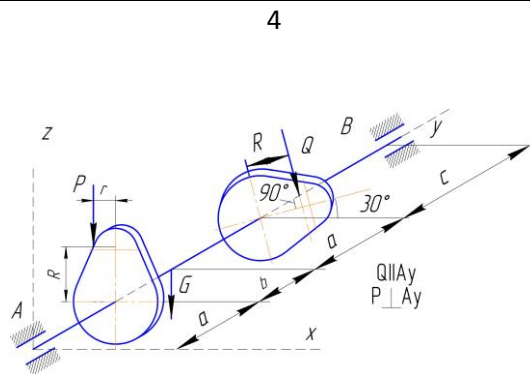
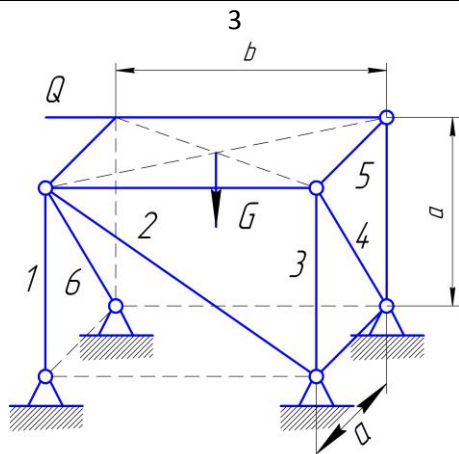
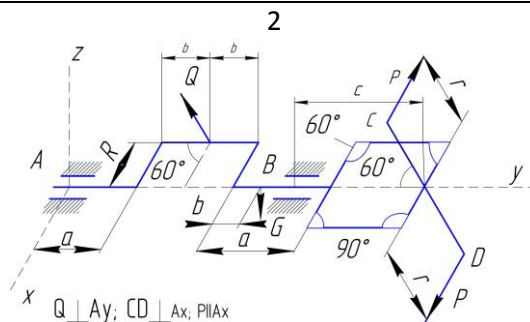
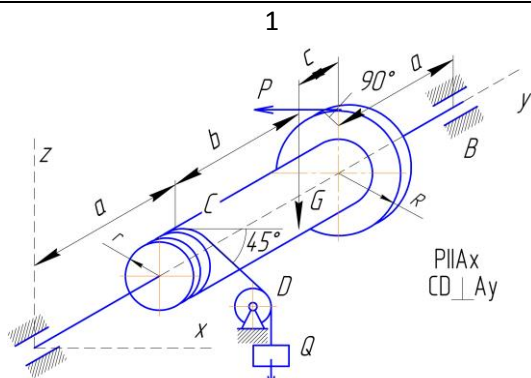


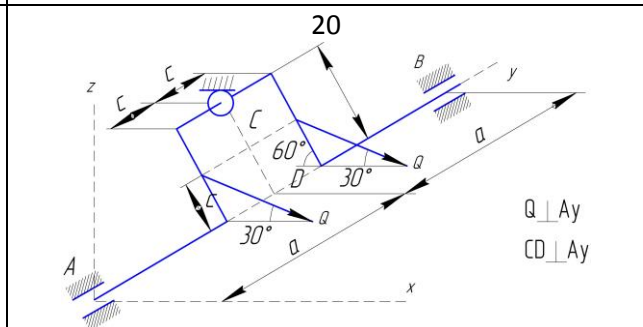
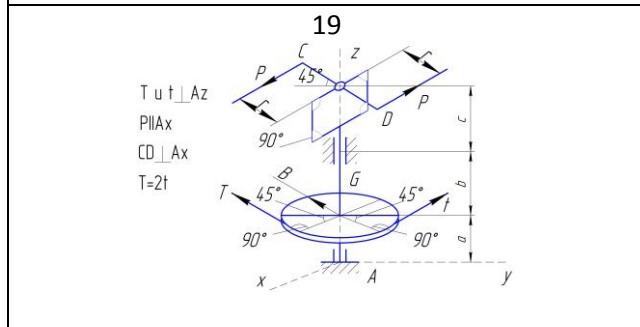
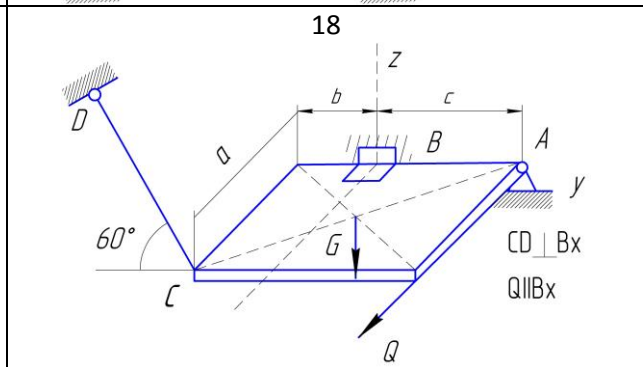
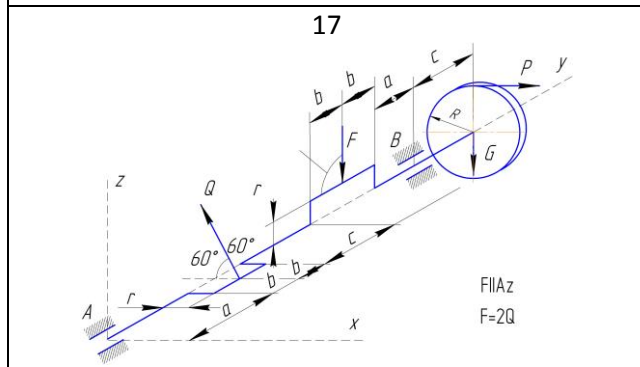
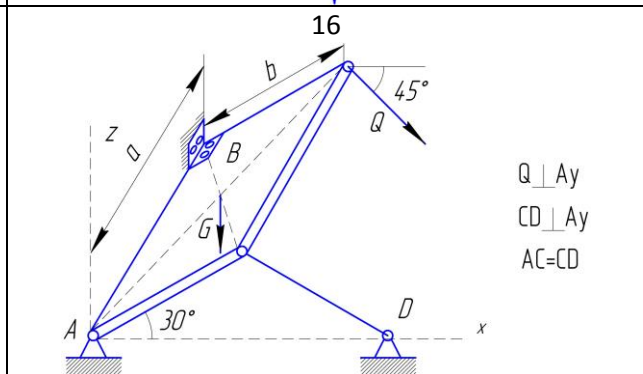
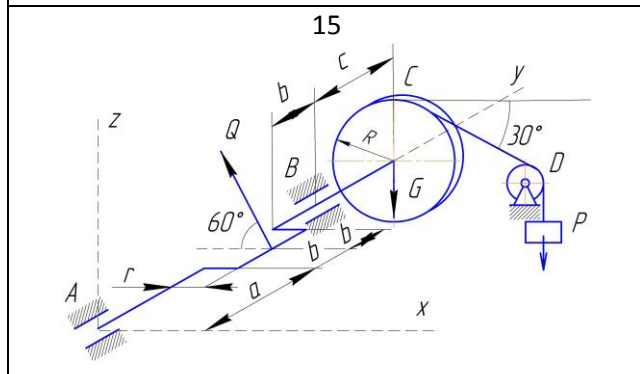
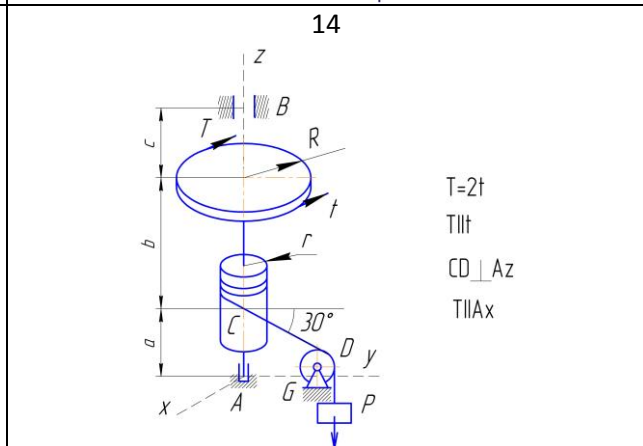
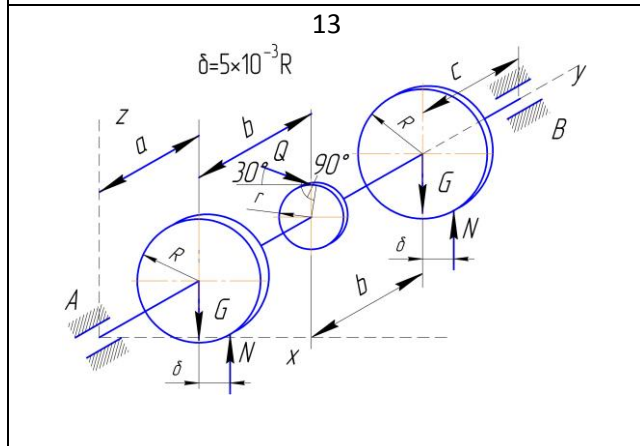
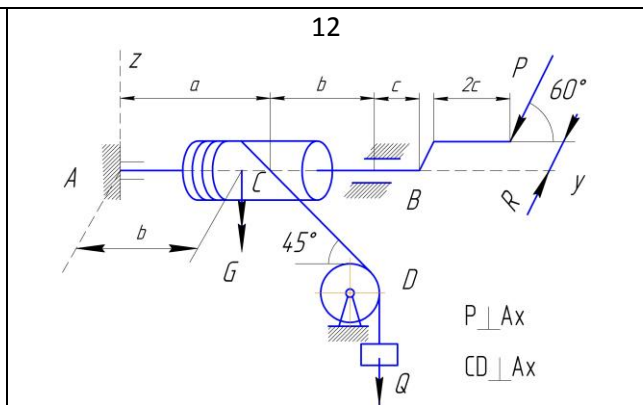
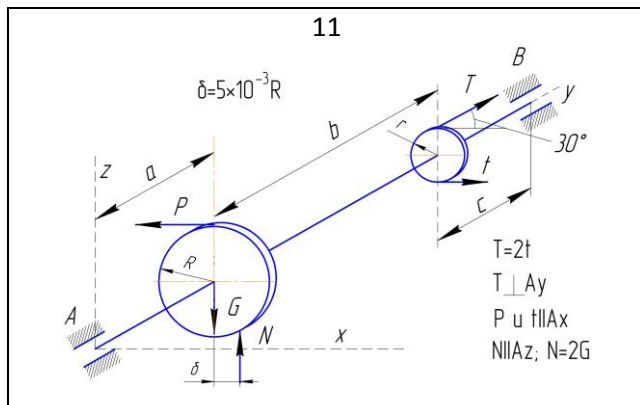


Определение реакций опор твёрдого тела

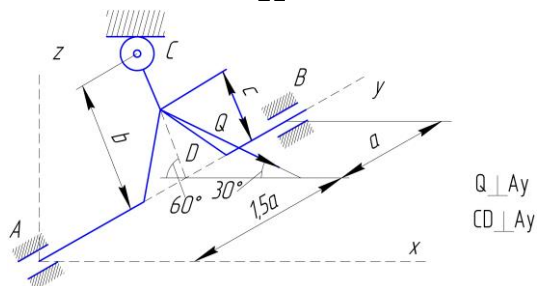
Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций показаны на рисунках.
Необходимые для расчета данные приведены в таблице.

№ вар.	Силы, кН			Размеры, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r
1	1	-	10	20	30	10	15	5
2	5	-	1	20	10	30	10	10
3	12	-	23	400	400	450	-	-
4	5	-	5	30	20	40	15	10
5	2	-	1	30	40	20	20	15
6	4	3	5	40	30	20	20	10
7	-	5	3	30	10	5	18	6
8	8	8	2	20	40	15	20	10
9	4	-	5	20	15	10	30	40
10	3	5	1	30	40	20	20	10
11	-	1	4	20	30	15	15	10
12	3	-	3	25	20	8	15	10
13	16	-	8	40	30	20	25	15
14	-	3	3	30	90	20	30	10
15	2	-	1	60	20	40	20	5
16	6	-	3	50	30	-	-	-
17	3	-	2	15	10	20	20	5
18	2	-	3	60	40	60	-	-
19	-	10	5	20	30	40	20	15
20	8	-	-	60	40	20	-	-
21	5	-	-	40	60	30	-	-
22	-	-	9	20	50	30	-	-
23	-	-	7	40	30	50	-	-
24	2	-	1	-	-	-	-	-
25	-	-	2	50	50	60	-	-
26	-	-	4	20	60	40	-	-
27	8	-	-	50	30	50	-	-
28	22	-	21	400	200	200	-	-
29	-	5	2	15	20	15	15	10
30	11	-	-	40	40	10	-	-

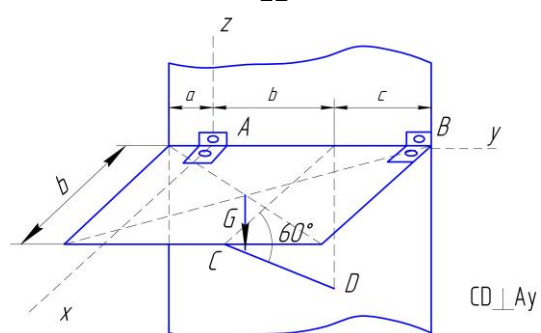




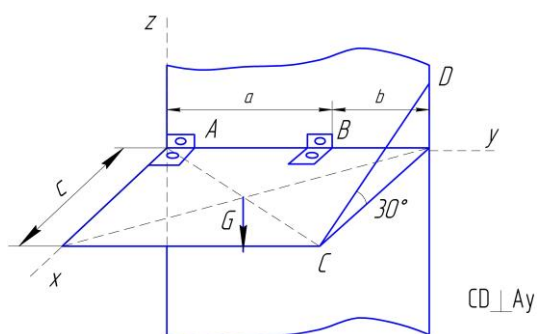
21



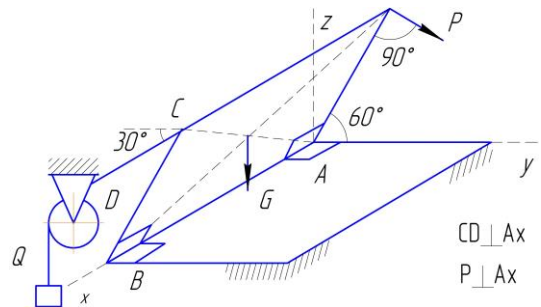
22



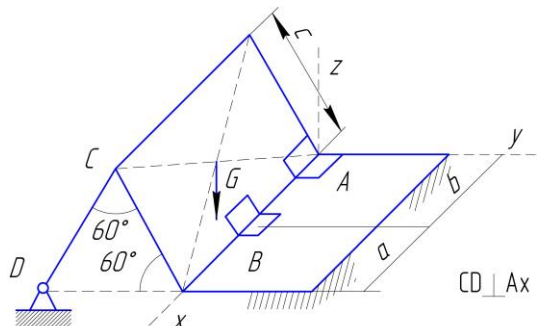
23



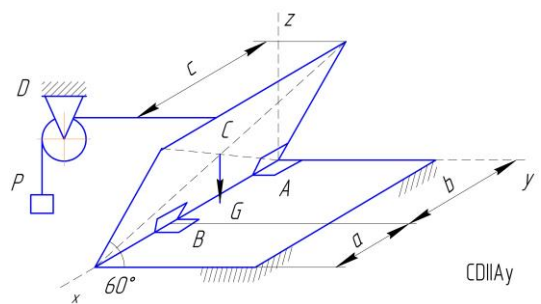
24



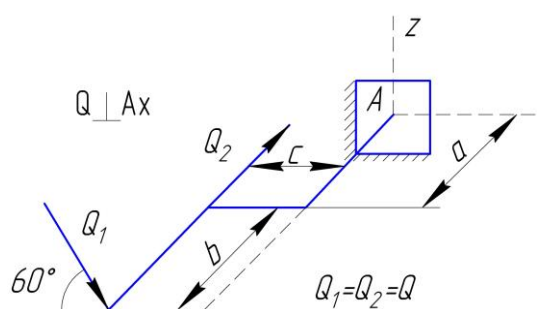
25



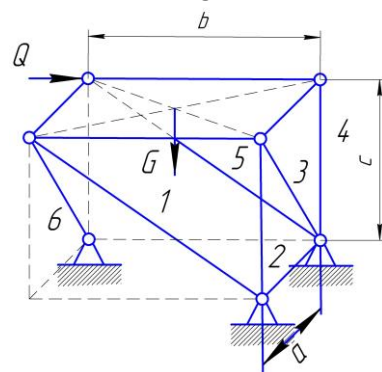
26



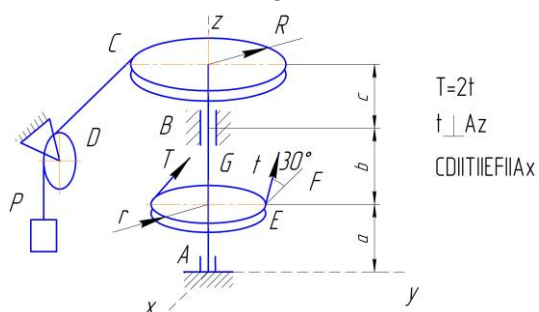
27



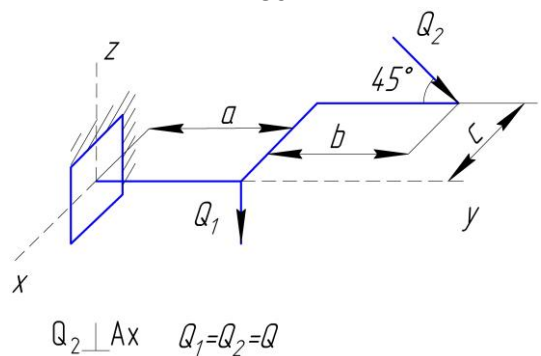
28



29



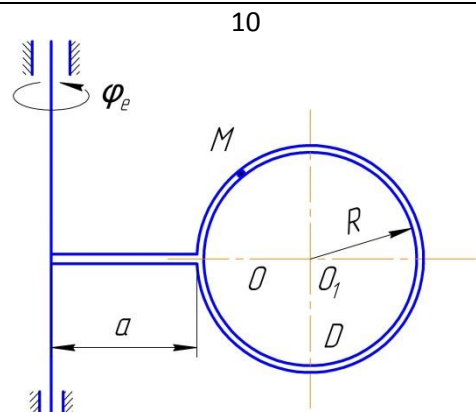
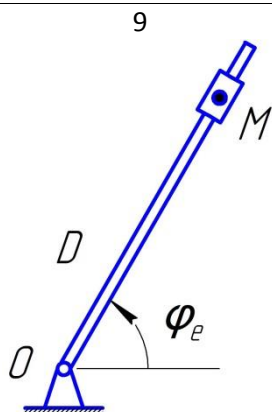
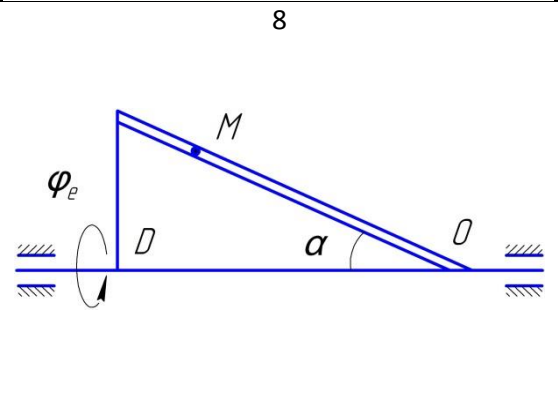
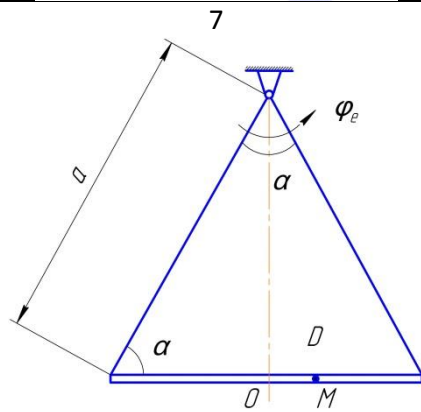
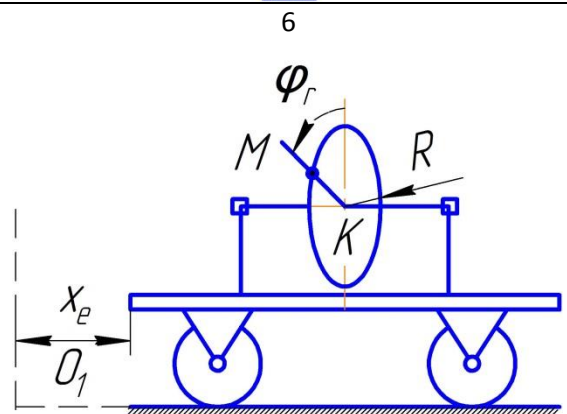
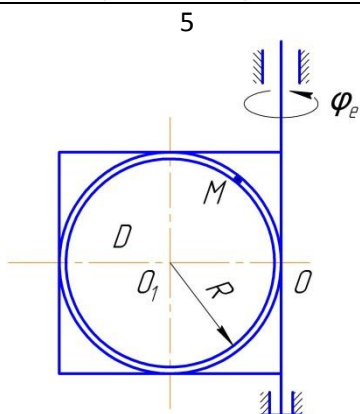
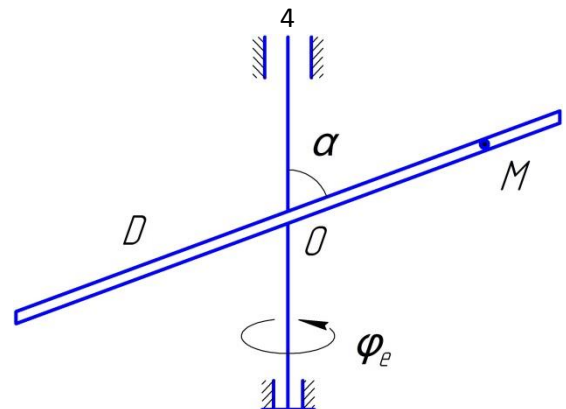
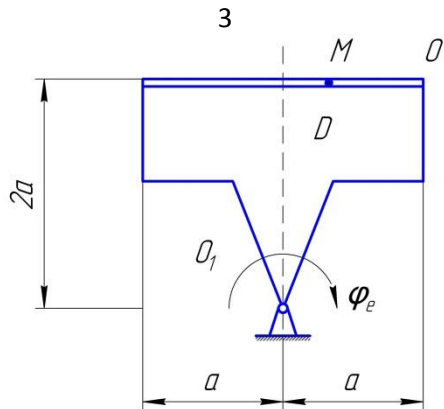
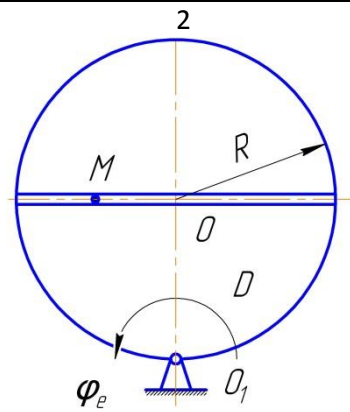
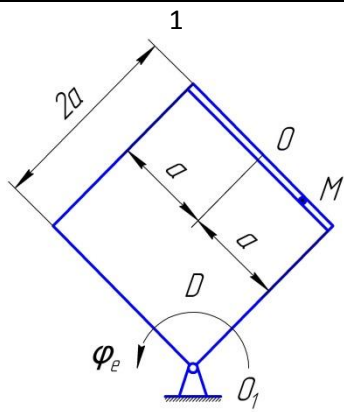
30

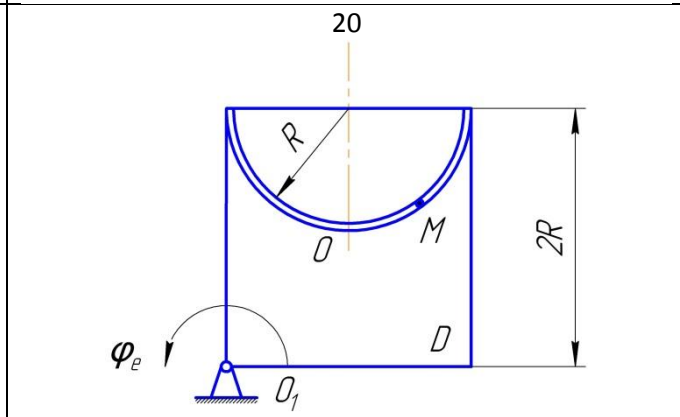
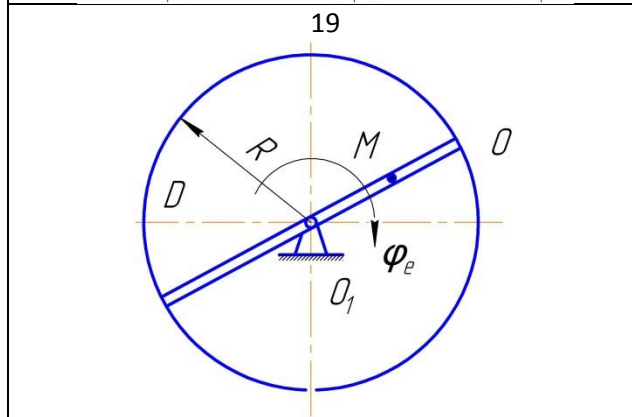
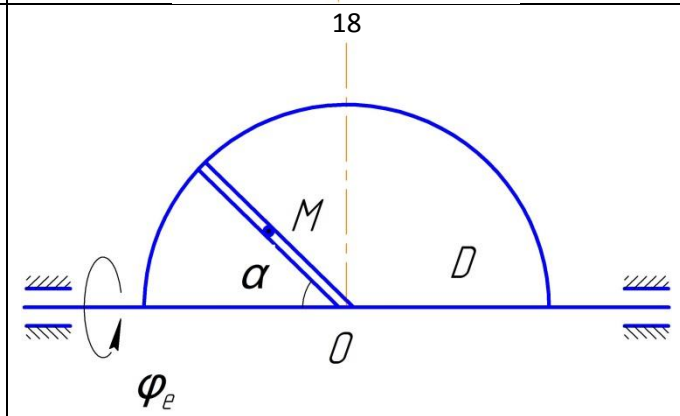
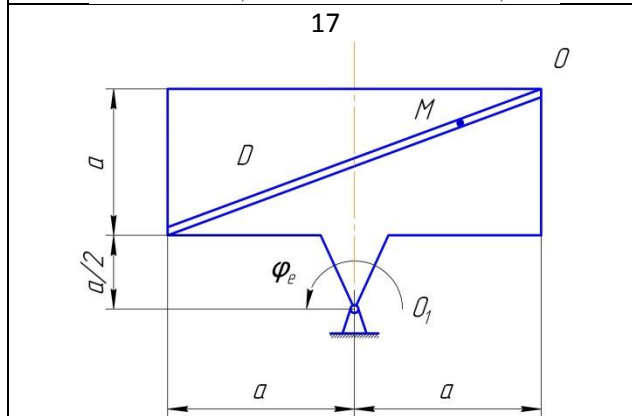
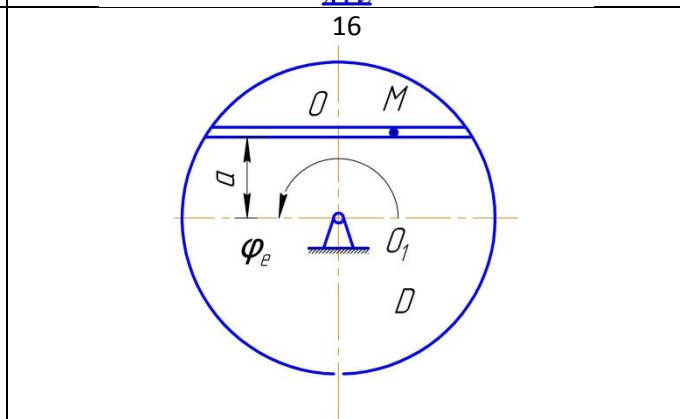
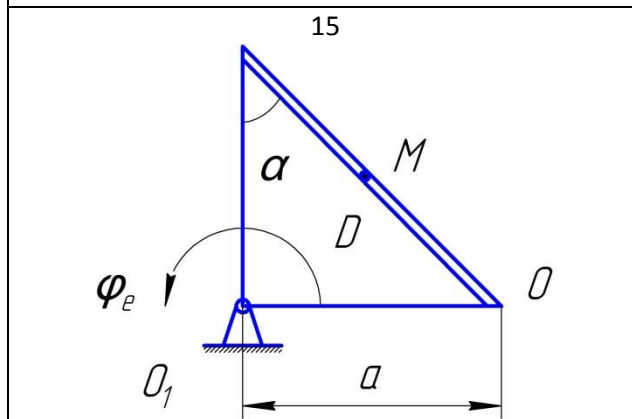
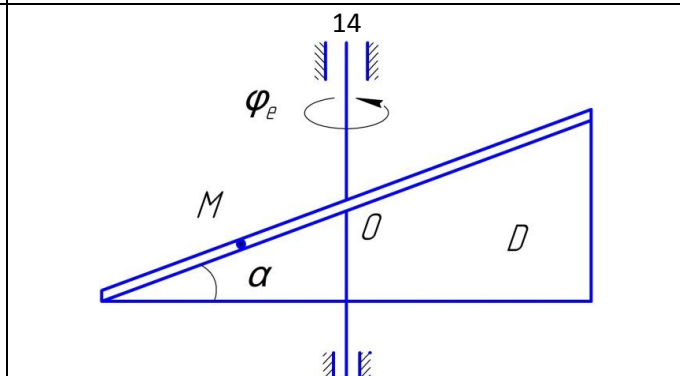
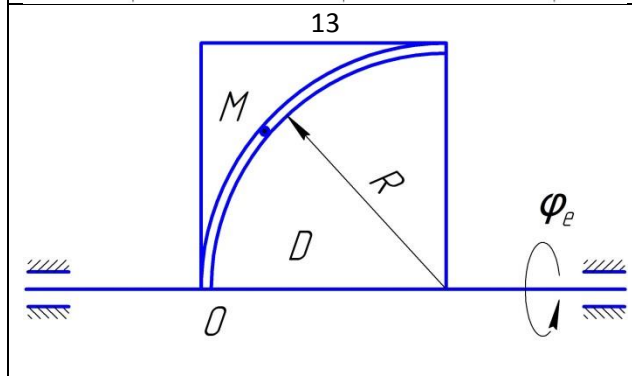
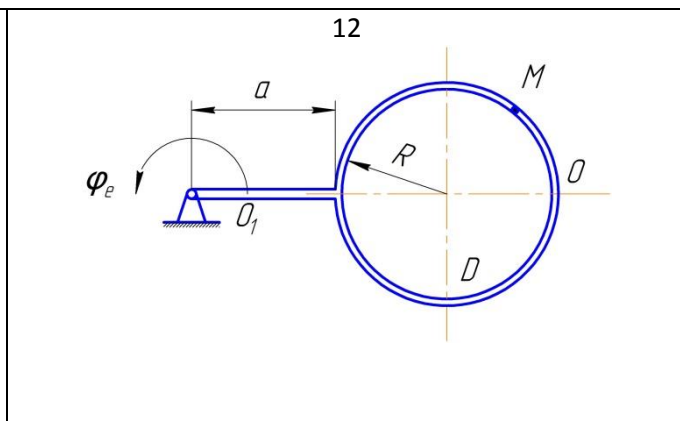
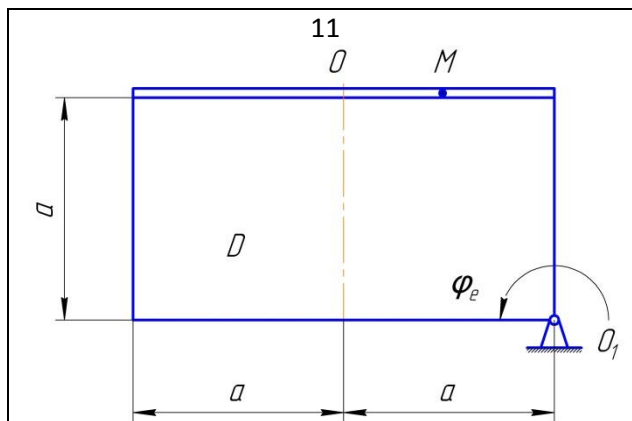


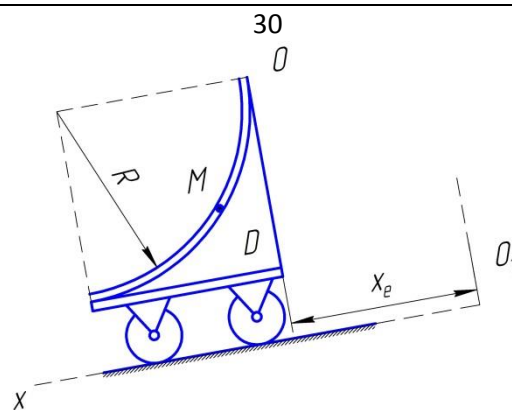
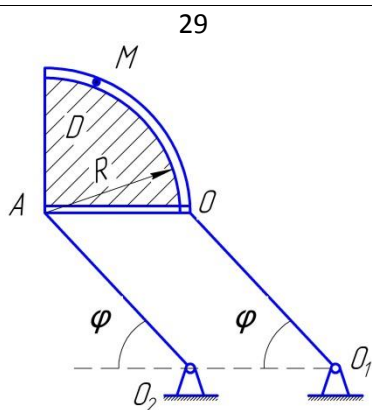
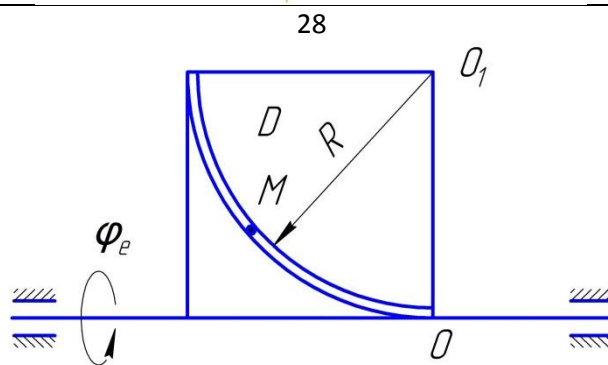
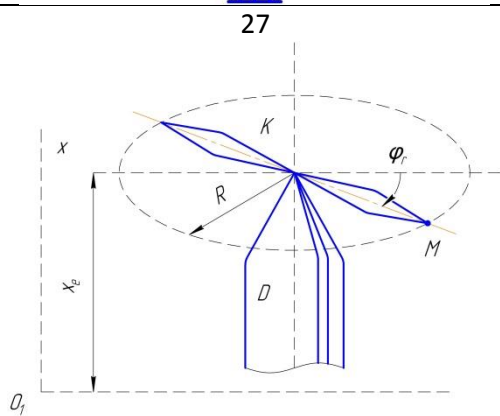
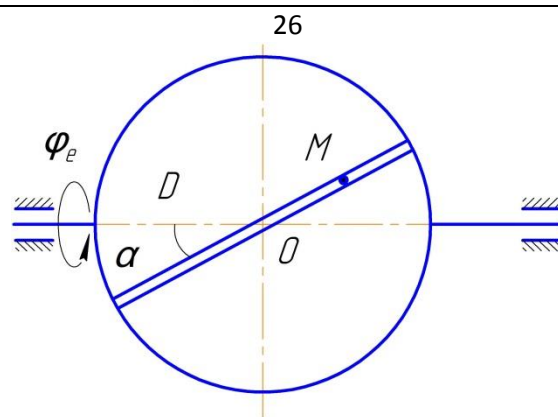
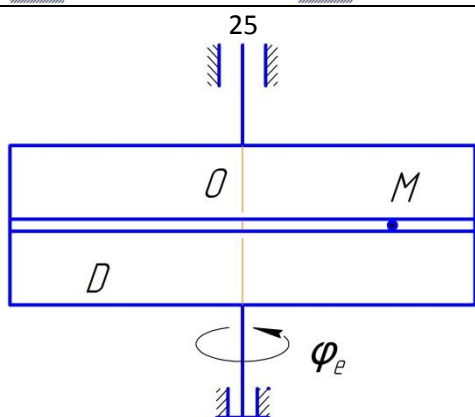
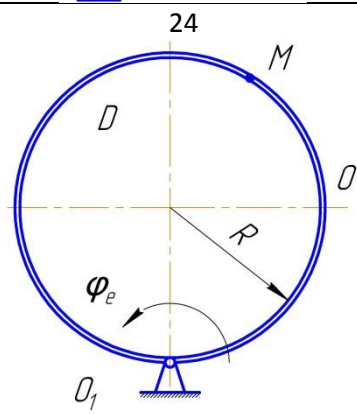
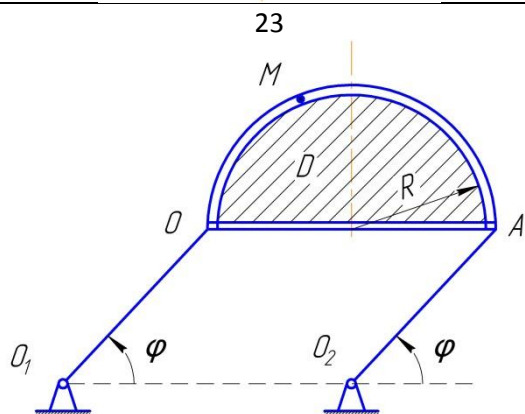
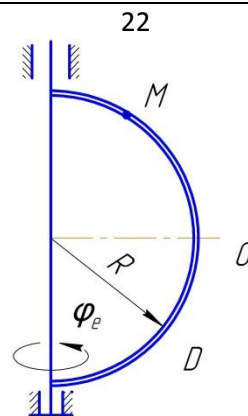
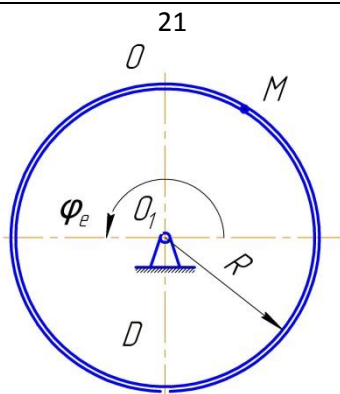
Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки

Точка М движется относительно тела D. По заданным уравнениям относительного движения точки М и движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М. Схемы механизмов показаны на рисунках, а необходимые для расчета данные приведены в таблице.

№ вар.	Уравнение относительного движения точки М $OM = S_r(t)$, см	Уравнение движения тела		t_1 , с	R , см	a , см	α , град	Дополни-тельные данные
		$\varphi_e = \varphi_e(t)$, рад	$x_e = x_e(t)$, см					
1	$18\sin(\pi/4)$	$4t^3 - 2t^2$	-	2/3	-	25	-	
2	$20\sin \pi$	$0,8t^2 + t$	-	5/3	20	-	-	
3	$6t^3$	$t + 0,5t^2$	-	2	-	30	-	
4	$10\sin(\pi/6)$	$2t^2$	-	1	-	-	60	
5	$40\pi \cos(\pi/6)$	$4t - t^3$	-	2	30	-	-	
6	-	-	$3t + 0,27t^3$	10/3	15	-	-	$\varphi_r = 0,15\pi^3$
7	$20\cos 2\pi$	$0,8t^2$	-	3/8	-	40	60	
8	$6(t + 0,5t^2)$	$2t^3 - 7t$	-	2	-	-	30	
9	$10(1 + \sin 2\pi)$	$3t + t^2$	-	1/8	-	-	-	
10	$20\pi \cos(\pi/4)$	$1,8t - 2t^2$	-	4/3	20	20	-	
11	$25\sin(\pi/3)$	$5t^2 - 2t$	-	4	-	25	-	
12	$15\pi^3/8$	$6t - 3t^2$	-	2	30	30	-	
13	$120\pi^2$	$9t^2 - 2t$	-	1/3	40	-	-	
14	$3 + 14\sin \pi$	$3t - t^2$	-	2/3	-	-	30	
15	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	$0,8t^3 + 2t$	-	2	-	60	45	
16	$20\sin \pi$	$5t - 2t^2$	-	1/3	-	20	-	
17	$8t^3 + 2t$	$2t^2$	-	1	-	$4\sqrt{5}$	-	
18	$10t + t^3$	$2t - 0,5t^2$	-	2	-	-	60	
19	$6t + 4t^3$	$4t + t^2$	-	2	40	-	-	
20	$30\pi \cos(\pi/6)$	$9t + t^2$	-	3	60	-	-	
21	$25\pi(t + t^2)$	$12t - 4t^2$	-	1/2	25	-	-	
22	$10\pi \sin(\pi/4)$	$8t - 0,4t^2$	-	2/3	30	-	-	
23	$6\pi^2$	-	-	1	18	-	-	$\varphi = \pi^3/6$; $O_1O = O_2A = 20\text{ см}$
24	$75\pi(0,1t + 0,3t^3)$	$5t - 0,6t^2$	-	1	30	-	-	
25	$15\sin(\pi/3)$	$12t - 0,2t^2$	-	5	-	-	-	
26	$8\cos(\pi/2)$	$-4\pi^2$	-	3/2	-	-	45	
27	-	-	$50t^2$	2	75	-	-	$\varphi_r = 5\pi^3/48$
28	$2,5\pi^2$	$t^3 - 2t$	-	2	40	-	-	
29	$\pi^3/4$	-	-	2	30	-	-	$\varphi = \pi^3/8$; $O_1O = O_2A = 40\text{ см}$
30	$4\pi^2$	-	$t^3 + 4t$	2	48	-	-	







Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

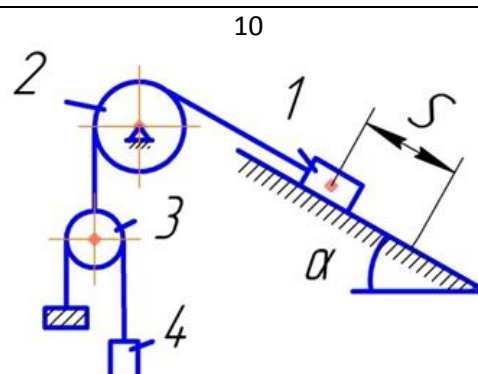
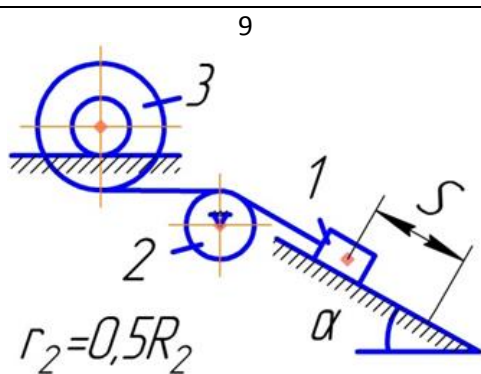
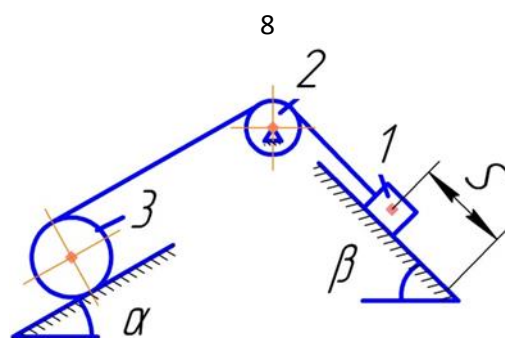
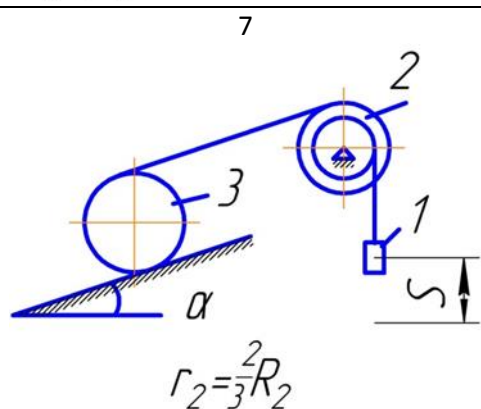
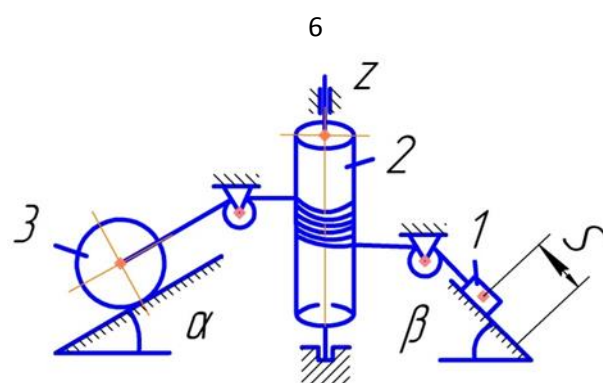
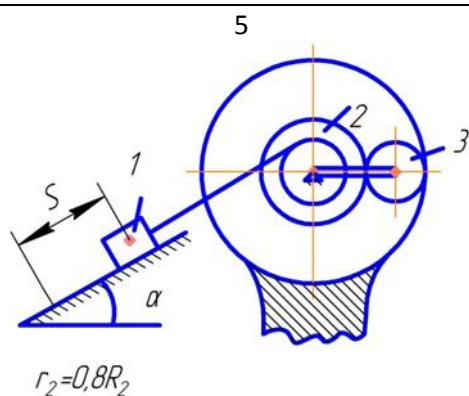
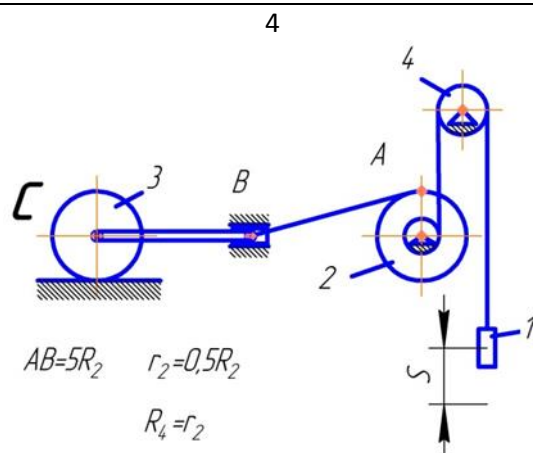
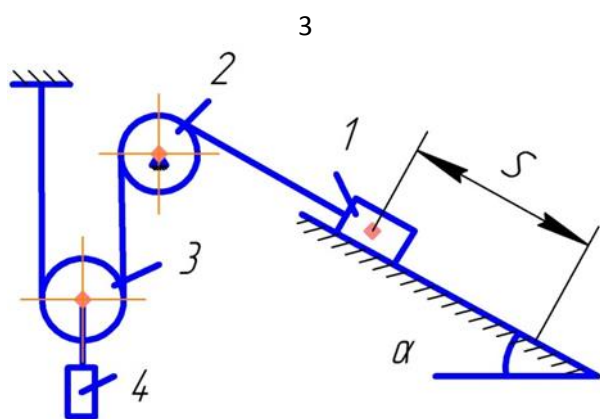
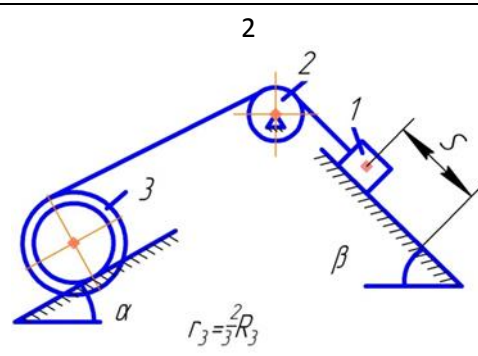
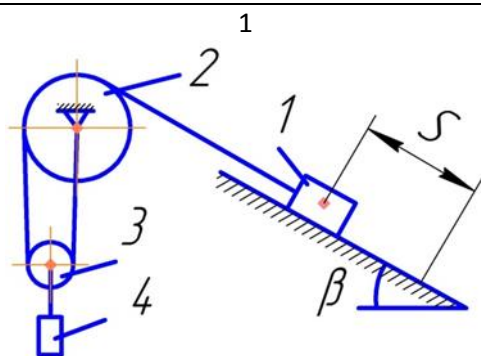
Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рисунках. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s .

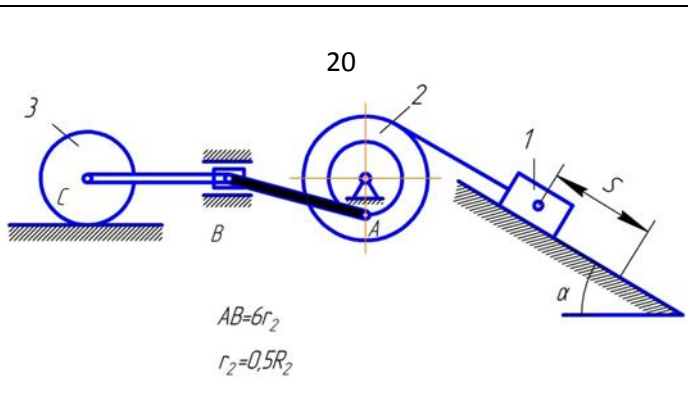
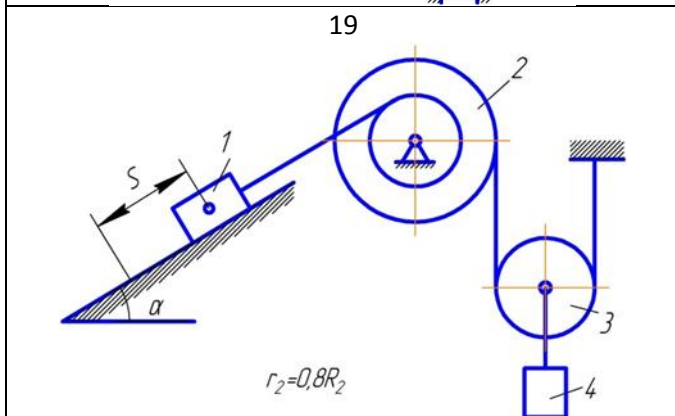
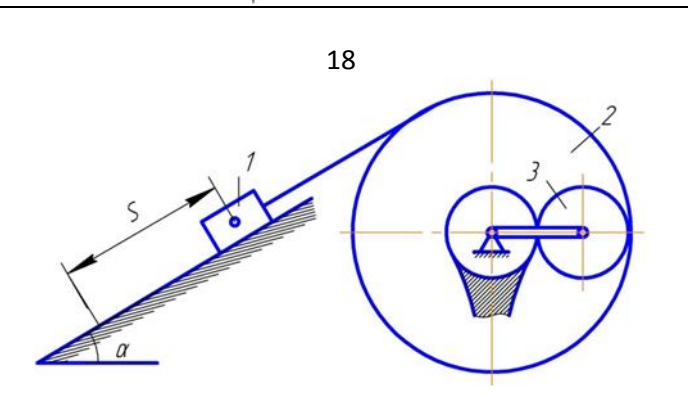
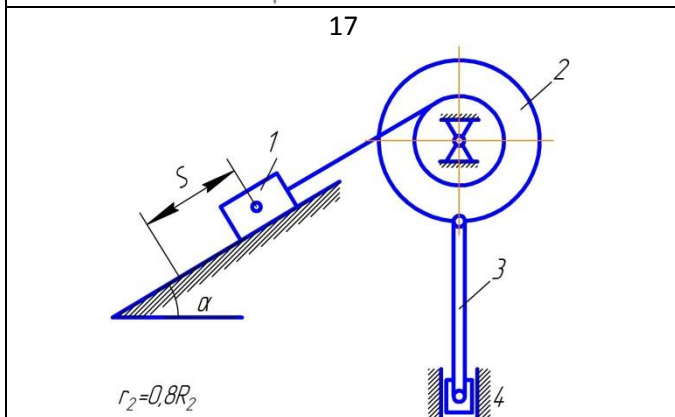
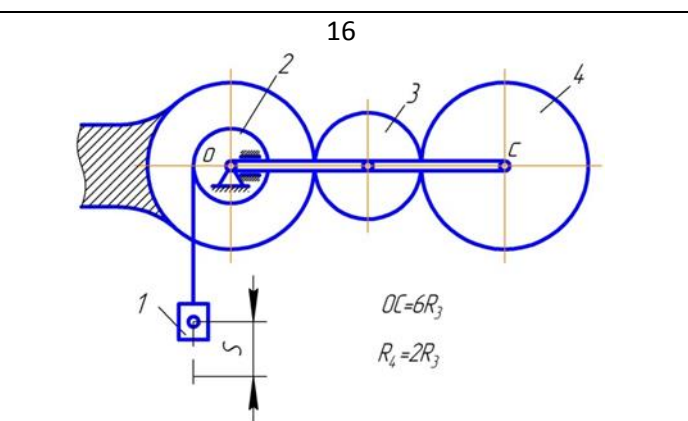
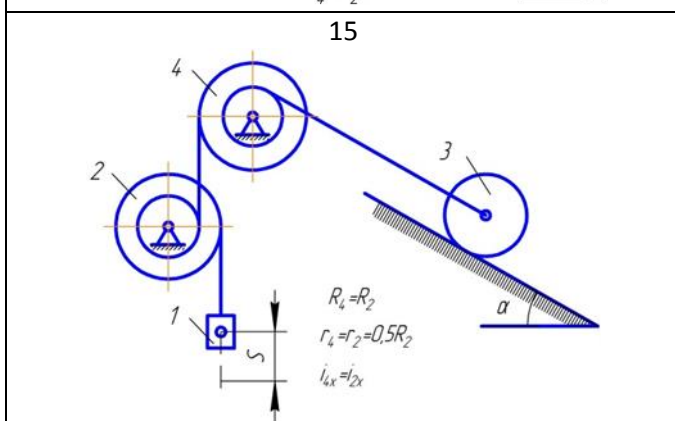
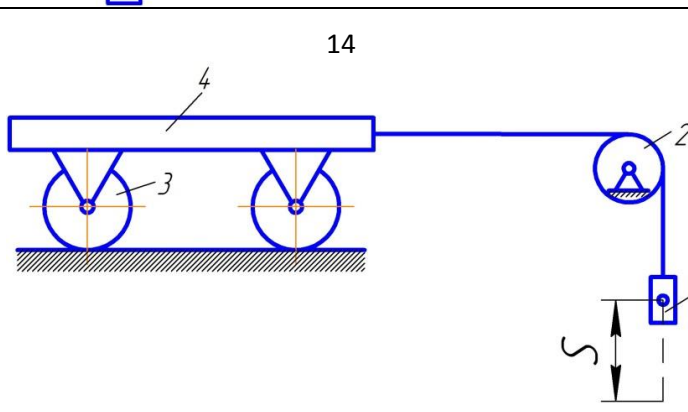
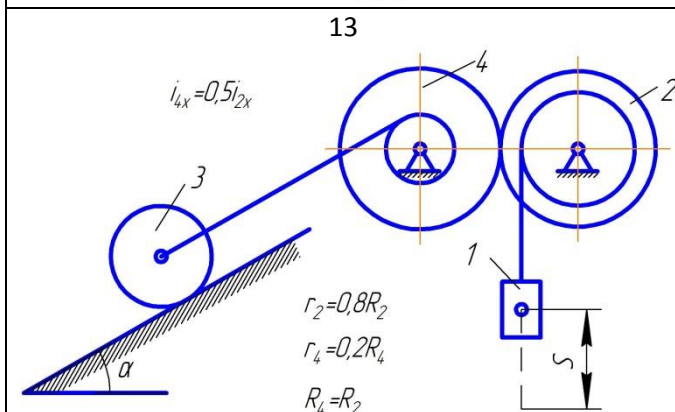
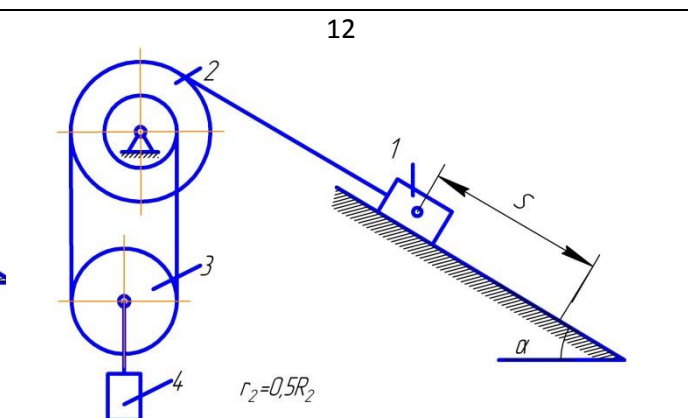
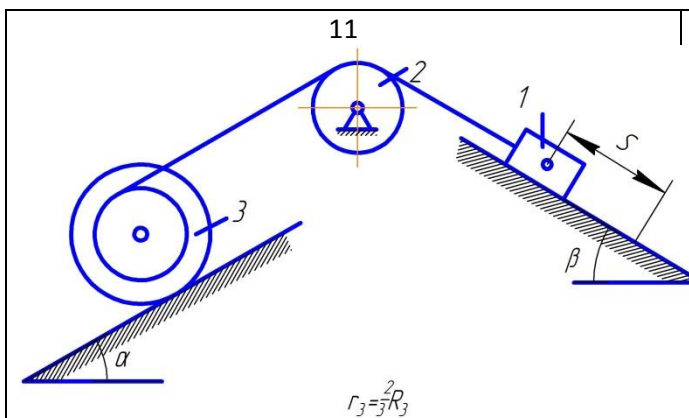
В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 – радиусы больших и малых окружностей; $i_{2x}, i_{3\xi}$ – радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β – углы наклона плоскостей к горизонту; f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения.

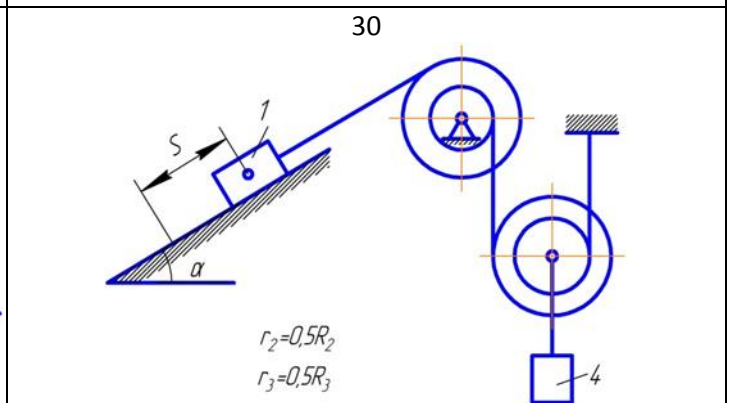
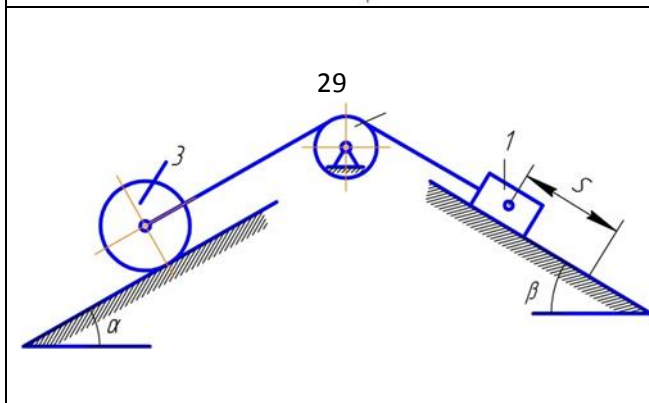
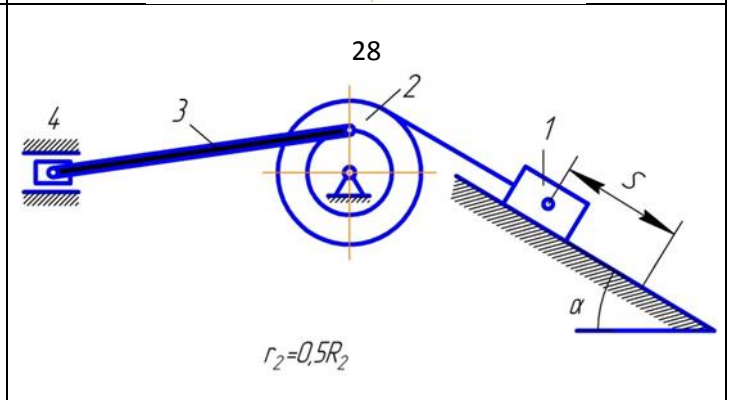
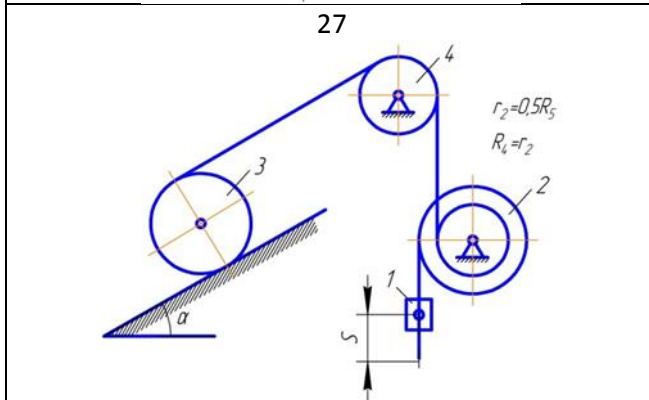
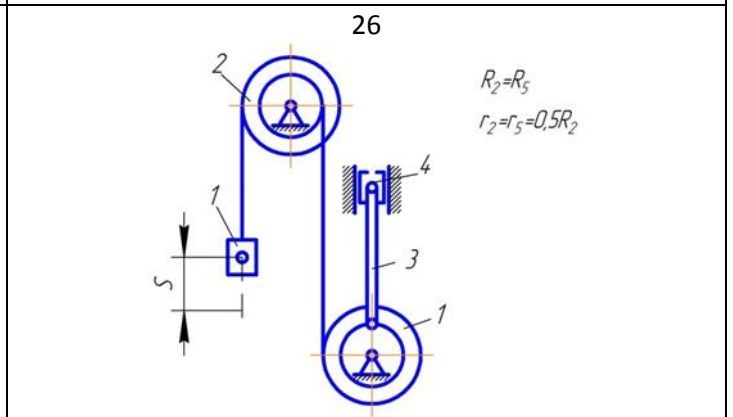
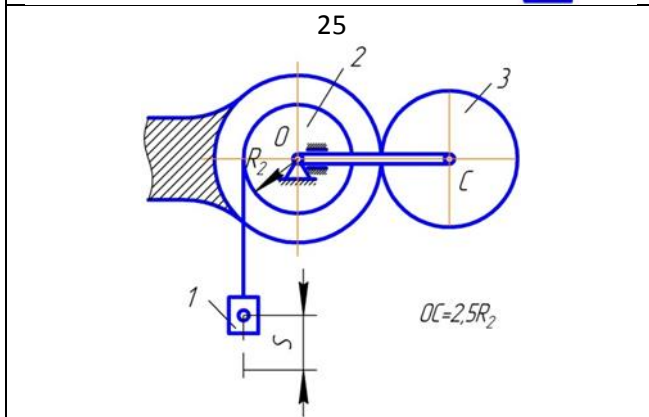
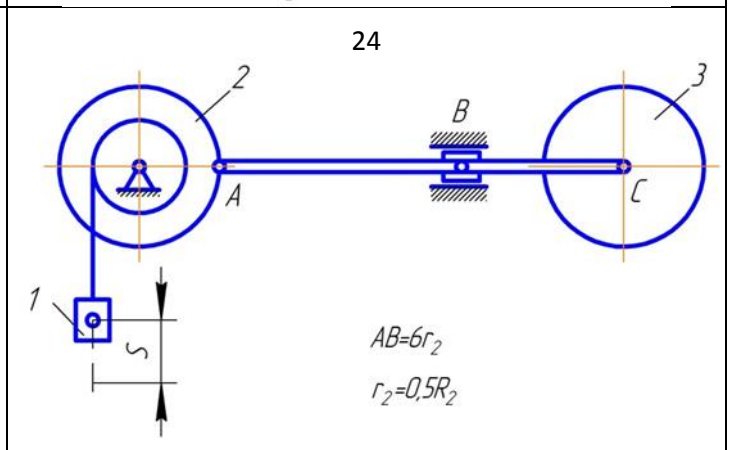
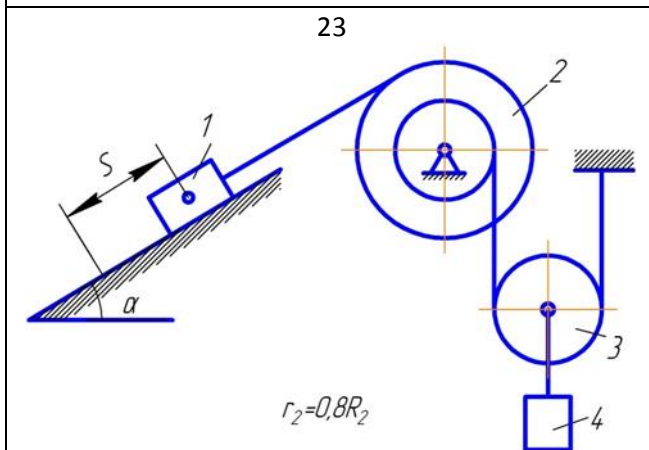
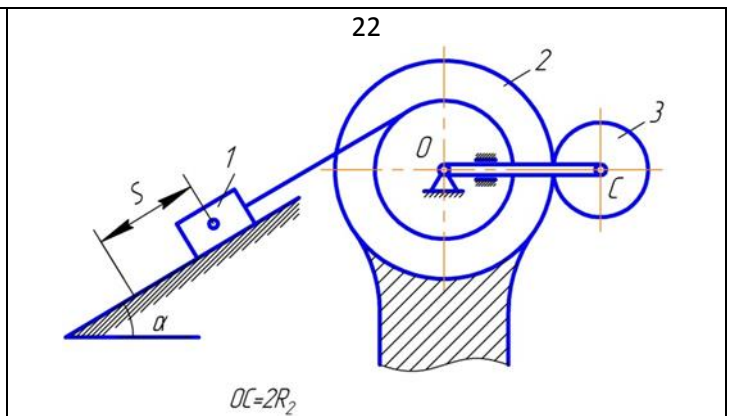
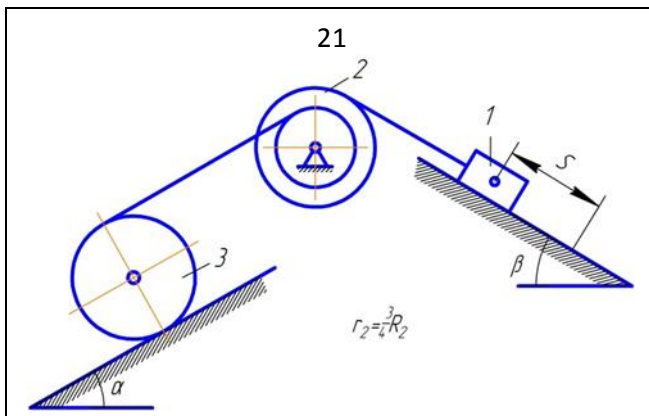
Необходимые для решения данные приведены в таблице. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

№ вар	m_1	m_2	m_3	m_4	R_2	R_3	i_{2x}	i_{3z}	α	β	f	δ , см	s, м	Примечание
	кг				см		см		град					
1	m	$3m$	$1/6m$	$3/2m$	-	-	-	-	-	60	0,12	-	2	
2	m	$1/3m$	$1/4m$	-	-	30	-	22	30	45	0,18	0,15	2	
3	m	$1/2m$	$1/8m$	$1/2m$	-	-	-	-	45	-	0,14	-	2	
4	m	m	$30m$	m	20	40	20	-	-	-	-	0,25	$0,1\pi$	Массами звеньев AB , BC и ползуна B пренебречь
5	m	$3m$	$1/2m$	-	20	15	16	-	60	-	0,09	-	$0,28\pi$	Массой водила пренебречь
6	m	$2m$	m	-	-	28	-	-	30	45	0,11	0,28	1,5	
7	m	m	$3m$	-	16	25	20	-	30	-	-	0,16	2	
8	m	$1/3m$	$1/4m$	-	-	30	-	-	30	45	0,10	0,18	1,75	
9	m	$3m$	$3m$	-	-	30	-	16	30	-	0,10	0,22	1,5	
10	m	$1/8m$	$1/8m$	$1/4m$	-	-	-	-	60	-	0,15	-	3	
11	m	$1/3m$	$1/3m$	-	-	30	-	20	30	45	0,15	0,21	2,5	
12	m	$1/3m$	$1/4m$	$2m$	30	-	14	-	30	-	0,12	-	2,5	
13	m	m	$6m$	m	30	20	30	-	30	-	-	0,18	2	
14	m	m	$2m$	$3m$	-	25	-	-	-	-	-	0,14	2	Массы каждого из четырех колес одинаковы
15	m	$1/3m$	$3m$	m	20	15	16	-	60	-	-	0,20	1,5	
16	m	$1/20m$	$1/10m$	$1/20m$	10	12	-	-	-	-	-	-	$0,05\pi$	Массой водила пренебречь
17	m	$1/5m$	$1/4m$	$1/5m$	20	-	18	-	60	-	0,12	-	$0,16\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
18	m	$2m$	$2m$	-	35	15	20	-	60	-	0,13	-	$0,2\pi$	Массой водила пренебречь
19	m	$1/2m$	$1/5m$	$1/5m$	24	-	16	-	60	-	0,12	-	1,5	
20	m	$3m$	$10m$	-	20	15	12	-	30	-	0,08	0,16	$0,2\pi$	Массами звеньев AB , BC и ползуна B пренебречь
21	m	$1/2m$	$4/3m$	-	20	20	14	-	30	45	0,15	0,20	1,2	
22	m	$1/3m$	$1/3m$	-	20	10	-	-	60	-	0,12	-	$0,1\pi$	Массой водила пренебречь
23	m	$1/2m$	$1/5m$	$2/5m$	20	-	20	-	30	-	0,14	-	1	
24	m	$4m$	$10m$	-	20	30	16	-	-	-	-	0,30	$0,08\pi$	Массами звеньев AB , BC и ползуна B пренебречь
25	m	$1/4m$	$1/5m$	-	16	20	-	-	-	-	-	-	$0,04\pi$	Массой водила пренебречь
26	m	$1/3m$	m	$1/2m$	30	-	14	-	-	-	-	-	$0,6\pi$	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
27	m	$1/2m$	$5m$	$1/3m$	20	20	20	-	30	-	-	0,22	2	
28	m	$3m$	m	-	20	-	16	-	60	-	0,09	-	$0,1\pi$	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
29	m	$1/5m$	$1/5m$	-	-	35	-	-	15	30	0,16	0,22	2,4	
30	m	$1/3m$	$2/5m$	$3/2m$	26	20	22	16	30	-	0,08	-	2	







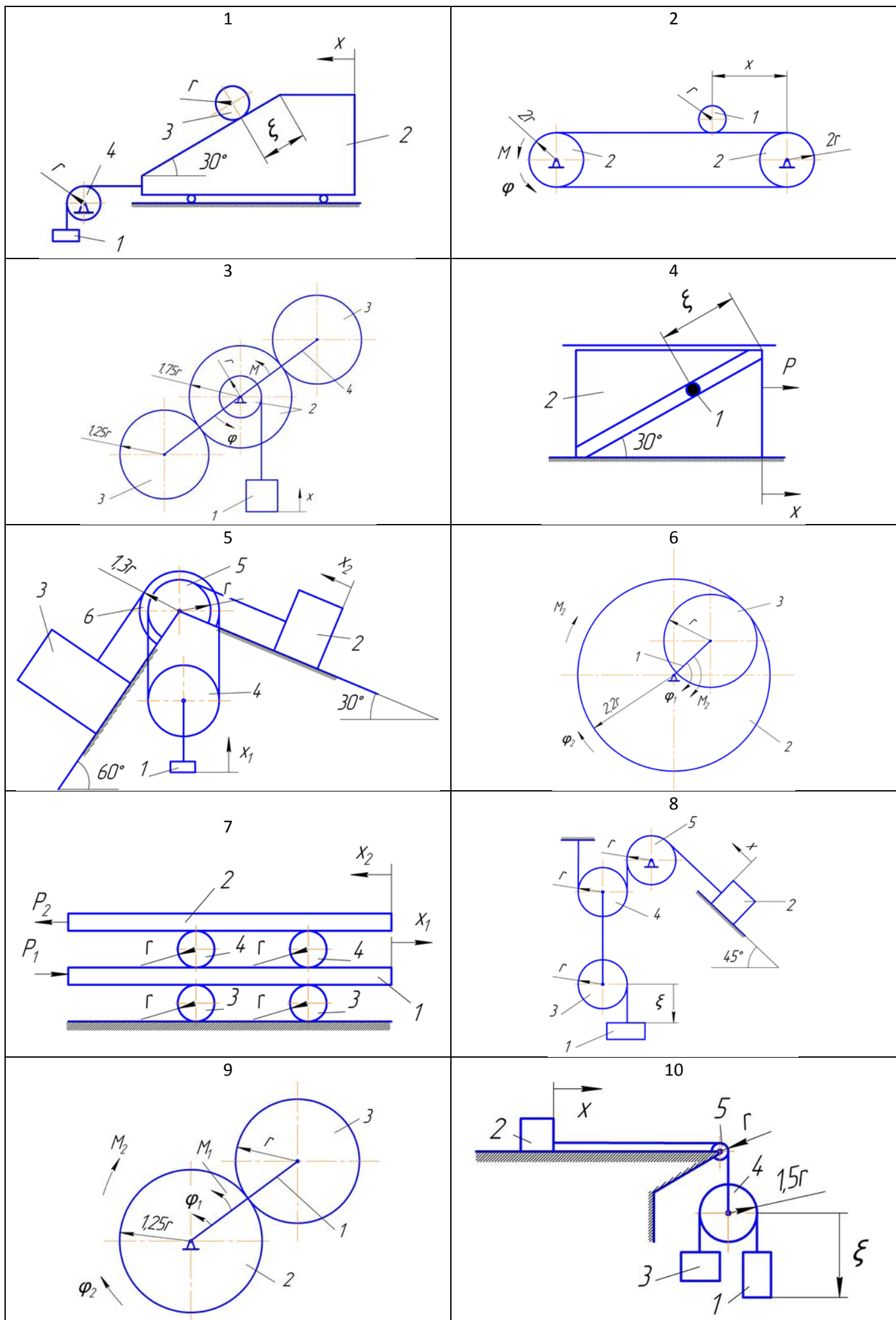
Применение уравнений Лагранжа II рода к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы

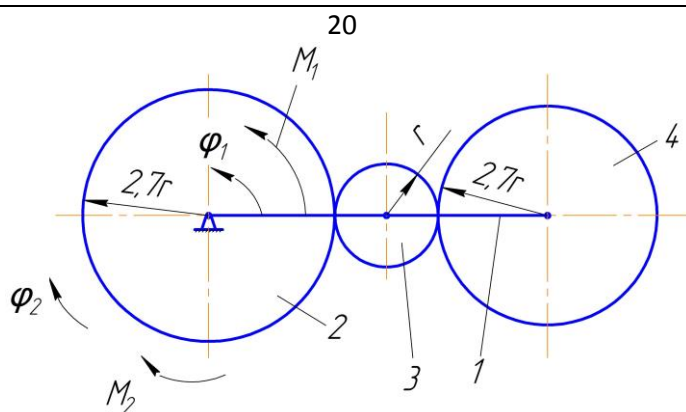
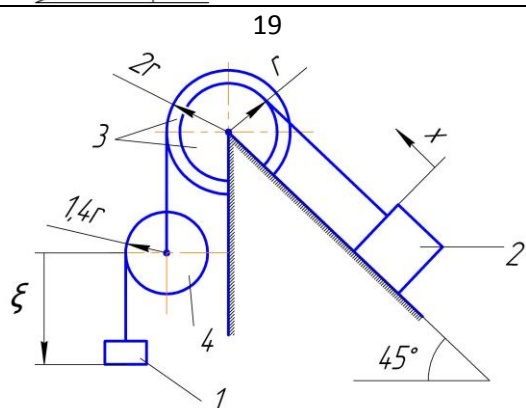
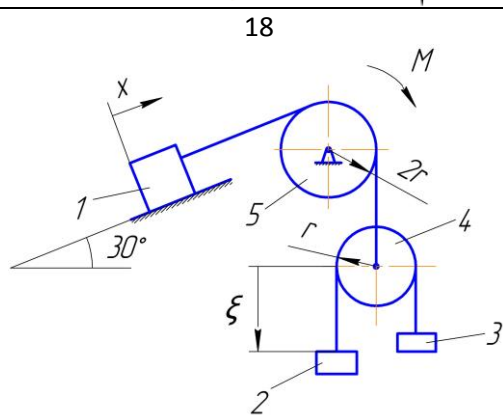
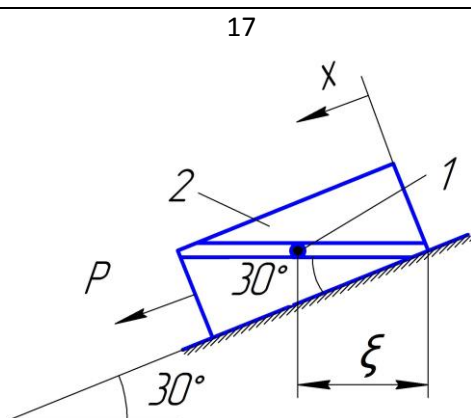
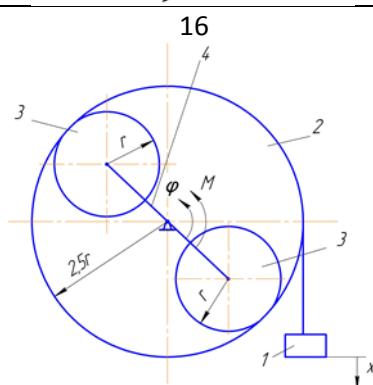
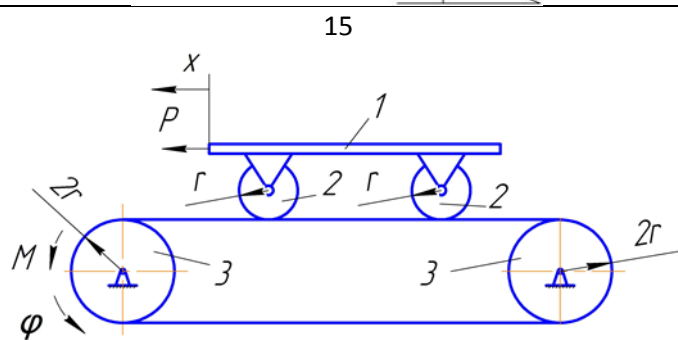
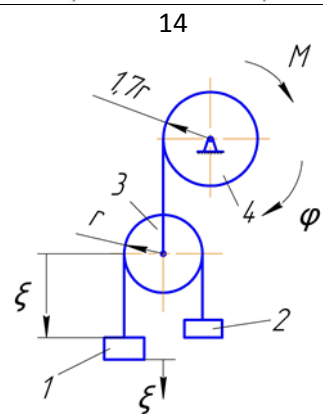
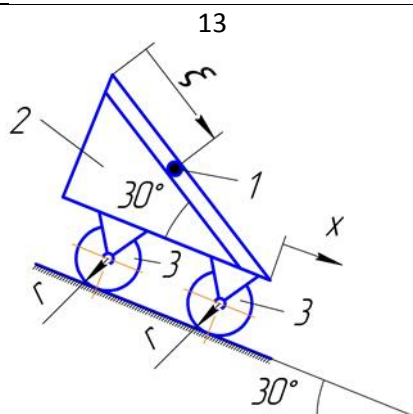
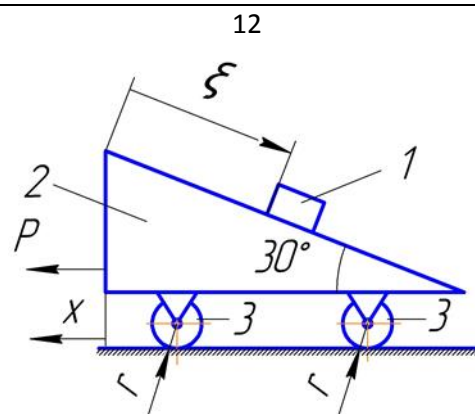
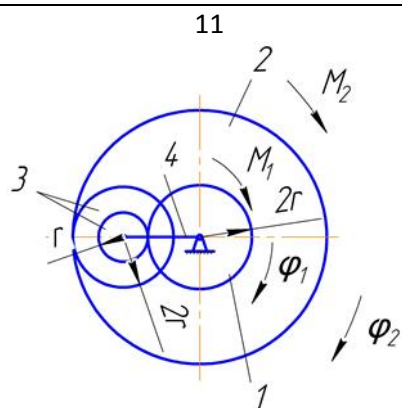
Механическая система тел 1 – 6 движется под воздействием постоянных сил $\vec{P}$ и пар сил с моментами M или только сил тяжести.

Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах q_1 и q_2 при заданных начальных условиях. Необходимые данные приведены в таблице; там же указаны рекомендуемые обобщенные координаты (x и φ – обобщенные координаты для абсолютного движения, а ξ – для относительного движения).

Массами нитей пренебречь. Считать, что качение колес происходит без проскальзывания. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Колеса, для которых в таблице радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками. Водила (кривошип) рассматривать как тонкие однородные стержни. Принять, что в вариантах 6, 9, 11, 20, 22 и 30 механизм расположен в горизонтальной плоскости.

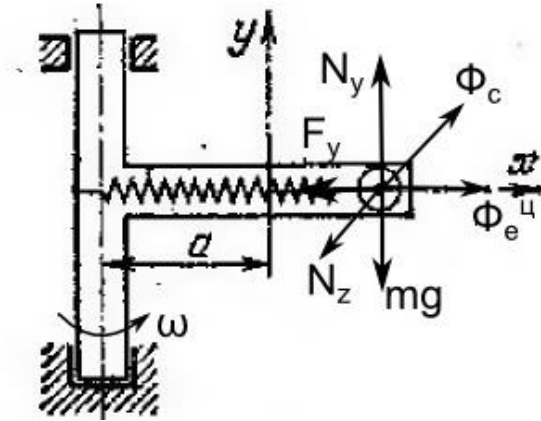
№	Массы тел					Радиус инерции		Силы P	Моменты M	Коэффициенты		Обобщенные координаты		Начальные условия				Дополнительные данные
	1	2	3	4	5	i_{2y}	i_{3y}			трения	скольжения	вязкого сопротивления	q_1	q_2	q_{10}	q_{20}	$\dot{q}_{10}$	
1	$2m$	$6m$	m	m	-	-	-	-	-	-	-	x	ξ	0	0	0	0	
2	m	$3m$	-	-	-	-	-	-	M	-	-	φ	x	0	x_0	0	0	Массу ленты не учитывать
3	m	$3m$	$2m$	-	-	$r\sqrt{2}$	-	-	M	-	-	φ	x	0	0	0	0	Момент M приложен к водилу
4	m	$4m$	-	-	-	-	-	-	-	0	b	x	ξ	0	0	$\dot{x}_0$	0	1 – материальная точка
5	m	$2m$	$4m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	f	-	x_1	x_2	0	0	0	0	Блоки 5 и 6 насажены на общую ось свободно, их массы одинаковы
6	m	$2m$	$3m$	-	-	$2r$	-	-	$M_1; M_2$	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	Момент M_1 приложен к водилу
7	$3m$	$3m$	m	m	-	-	-	$P_1; P_2$	-	-	-	x_1	x_2	0	0	0	0	
8	m	$2m$	$2m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	f	-	x	ξ	0	0	0	$\dot{\xi}_0$	
9	m	$2m$	$3m$	-	-	-	-	-	$M_1; M_2$	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	Момент M_1 приложен к водилу
10	$2m$	$2m$	m	$2m$	m	-	-	-	-	f	-	x	ξ	0	0	$\dot{x}_0$	0	
11	m	$3m$	$2m$	m	-	$4r$	$r\sqrt{2}$	-	$M_1; M_2$	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	
12	$2m$	$5m$	m	-	-	-	-	P	-	f	-	x	ξ	0	ξ_0	0	0	
13	m	$3m$	$2m$	-	-	-	-	-	-	-	b	x	ξ	0	0	0	$\dot{\xi}_0$	1 – материальная точка
14	$2m$	m	m	$2m$		-	-	-	M	-	-	φ	ξ	0	0	0	$\dot{\xi}_0$	
15	$3m$	m	$2m$	-	-	-	-	P	M	-	-	φ	x	0	0	0	0	Массу ленты не учитывать
16	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$2r$	-	-	M	-	-	φ	x	0	0	0	$\dot{x}_0$	Момент M приложен к водилу
17	m	$3m$	-	-	-	-	-	P	-	0	b	x	ξ	0	ξ_0	0	0	1 – материальная точка
18	$2m$	$2m$	m	m	$3m$	-	-	-	M	f	-	x	ξ	0	0	0	0	
19	$2m$	$2m$	$3m$	m	-	-	$r\sqrt{2}$	-	-	f	-	x	ξ	0	0	$\dot{x}_0$	0	
20	$2m$	$3m$	m	$3m$	-	-	-	-	$M_1; M_2$	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	Момент M_1 приложен к водилу
21	$2m$	$2m$	$3m$	$2m$	m	-	$r\sqrt{2}$	-	-	-	-	x	ξ	0	0	$\dot{x}_0$	0	
22	m	$3m$	$2m$	m	-	-	-	-	$M_1; M_2$	-	-	φ_1	φ_2	0	0	0	0	Момент M_1 приложен к водилу
23	$2m$	m	m	m	$3m$	-	-	-	-	f	-	x	ξ	0	0	0	$\dot{\xi}_0$	
24	m	$3m$	m	-	-	-	-	P	-	-	b	x	ξ	0	ξ_0	0	0	1 – материальная точка
25	$2m$	$2m$	m	-	-	-	-	$P_1; P_2$	-	f	-	x_1	x_2	0	0	0	0	
26	m	$3m$	$2m$	$3m$	-	-	r	-	M	-	-	φ	ξ	0	0	0	$\dot{\xi}_0$	
27	$2m$	$2m$	$3m$	m	$2m$	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{3}$	-	M	-	-	φ	ξ	0	0	0	0	
28	m	$3m$	m	-	-	-	-	P	-	-	-	x	ξ	0	0	0	$\dot{\xi}_0$	
29	$2m$	$4m$	m	m	-	-	-	P	-	f	-	x	ξ	0	0	$\dot{x}_0$	0	
30	$3m$	$2m$	$2m$	-	-	-	-	-	$M_1; M_2$	-	-	φ_1	φ_2	0	0	$\dot{\varphi}_{10}$	0	Момент M_1 приложен к водилу







Задача 33.9: Шарик массы m , прикрепленной к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c , находится в положении равновесия в трубке на расстоянии a от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образуя с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω .



Уравнение движения вдоль оси x должно быть написано с учётом двух сил: силы упругости $\vec{F}_{уп} = -c \cdot x$ и силы инерции $\Phi_{nx} = m \omega^2 (a + x)$

Тогда уравнение относительного движения по оси x :

$$m\ddot{x} = -cx + m\omega^2(a + x) \Rightarrow \ddot{x} + x\left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) = \omega^2 a$$

1. Пусть $\frac{c}{m} > \omega^2 \Rightarrow x(t) = A \sin k_0 t + B \cos k_0 t + \frac{\omega^2}{k_0^2} a$, где $k_0^2 = \frac{c}{m} - \omega^2$

Используя начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, получим

$$A = 0, B = -\frac{\omega^2}{k_0^2} a, \text{ т.е. } x(t) = \frac{\omega^2}{k_0^2} a (1 - \cos k_0 t) = 2 \frac{\omega^2 a}{k_0^2} \sin^2 \frac{k_0 t}{2}.$$

2. Пусть $\frac{c}{m} < \omega^2$, следовательно, обозначая $k_1^2 = \omega^2 - \frac{c}{m}$, получим:

$$\ddot{x} - k_1^2 x = \omega^2 a \Rightarrow x(t) = A \exp\{k_1 t\} + B \exp\{-k_1 t\} - \frac{\omega^2 a}{2k_1^2}$$

Используя начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, получим:

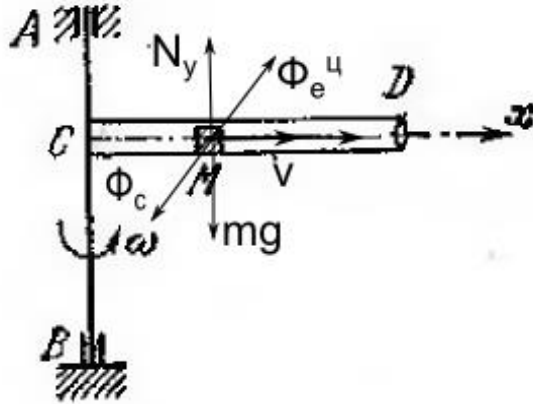
$$0 = A + B - \frac{\omega^2 a}{k_1^2}; 0 = (A - B)k_1 \Rightarrow A = B, A = \frac{\omega^2 a}{2k_1^2} = B,$$

$$\text{Т.е. } x(t) = \frac{\omega^2 a}{k_1^2} \left(\frac{\exp\{k_1 t\} + \exp\{-k_1 t\}}{2} - 1 \right)$$

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{\omega^2}{k_0^2} a (1 - \cos k_0 t) = 2 \frac{\omega^2 a}{k_0^2} \sin^2 \frac{k_0 t}{2}.$$

$$x(t)=\frac{\omega^2a}{k_1^2}\left(\frac{\exp\{k_1t\}+\exp\{-k_1t\}}{2}-1\right).$$

Задача 33.10: Горизонтальная труба CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω . Внутри трубки находится тело M . Определить скорость v тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент $v = 0$, $x = x_0$, длина трубки равна L . Трением пренебречь.



$$mw = -m w_e = m \omega^2 x$$

$$w = \omega^2 x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \omega^2 x$$

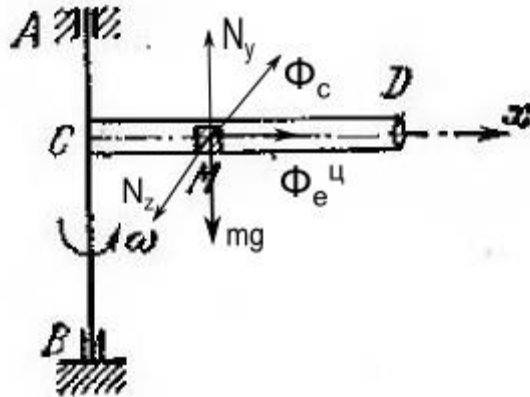
$$\int_0^v v dv = \omega^2 \int_{x_0}^L x dx$$

$$\frac{v^2}{2} = \omega^2 \left(\frac{L^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right)$$

$$v = \omega \sqrt{L^2 - x_0^2}$$

Ответ: $v = \omega \sqrt{L^2 - x_0^2}$

Задача 33.12: В условиях задачи 33.10 составить дифференциальное уравнение движения тела в трубке, если коэффициент трения скольжения между телом и трубкой равен f .



$$F_{\text{тр}} = f \cdot N, \text{ где } \bar{N} = \sqrt{\bar{N}_1^2 + \bar{N}_2^2}, \text{ поэтому}$$

$$F_{\text{тр}} = f \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \omega_{\text{пер}}^2 \cdot x m \pm f \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$y: m \cdot 0 = N_1 - P$$

$$z: m \cdot 0 = -N_2 + F_{\text{кор}}^{\text{ин}}$$

$$N_1 = mg$$

$$N_2 = -2m \cdot \omega_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}}$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x \pm f \sqrt{m^2 g^2 + 4m^2 \omega^2 \dot{x}^2}$$

Сократим всё уравнение на массу

$$\ddot{x} = \omega^2 x \pm f \sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2}$$

Ответ: $\ddot{x} = \omega^2 x \pm f \sqrt{g^2 + 4\omega^2 \dot{x}^2}$, верхнему знаку соответствует $\dot{x} < 0$, нижнему $\dot{x} > 0$.

Задача 33.13: Кольцо движется по гладкому стержню AB , который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец A , делая один оборот в секунду; длина стержня 1 м ; в момент $t = 0$ кольцо находилось на расстоянии 60 см от конца A и имело скорость равную нулю. Определить момент t_1 , когда кольцо сойдёт со стержня.

Применяя результат, полученный в задаче 33.11:

$$T = \frac{1}{\omega} \ln \left(\frac{L}{X_0} + \sqrt{\frac{L^2}{X_0^2} - 1} \right);$$

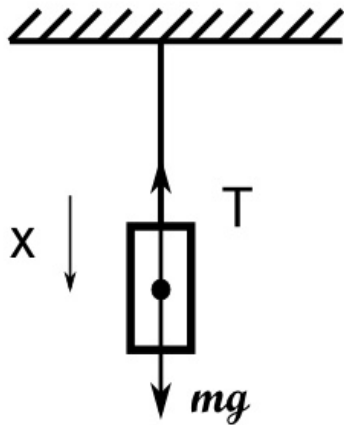
где $\omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ с}^{-1}$, $L = 1\text{ м}$, $X_0 = 0.6\text{ м}$.

Получим:

$$T = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{0.6} + \sqrt{\frac{1}{0.36} - 1} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{10}{6} + \sqrt{\frac{100}{36} - 1} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln 3 = 0.175\text{ с}$$

Ответ: $T = \frac{1}{2\pi} \ln 3 = 0.175\text{ с}$

Задача 26.1: В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280кг. В первые 10 с он проходит 35м. Найти натяжение каната на котором висит лифт.



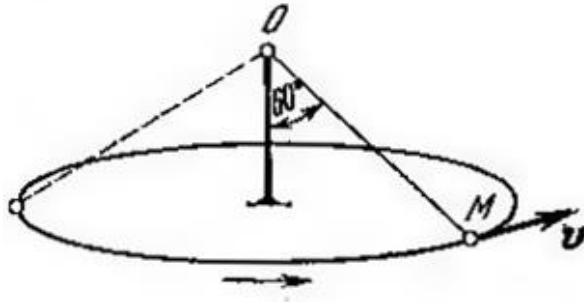
Пройденный путь $H = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, но $v_0 = 0$ т.е. $H = \frac{at^2}{2}$ отсюда $a = \frac{2H}{t^2}$
 $a = \frac{2 \cdot 35}{10^2} = 0,7 \text{ м/с}^2$

ускорение движения лифта

Сила действующая на лифт $F = mg$, $F = F_H + ma$
 $F_H = F - ma = mg - ma = m(g - a)$

$$F_H = 280 \cdot (9,8 - 0,7) = 2548 \text{ Н}$$

Задача 26.9: Груз M массы $0,102$ подвешенный на нити длины 30см в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60 . Определить скорость v груза и натяжение T нити



$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{G}$$

$$ma_\tau = 0, a_\tau = \ddot{S} \rightarrow \ddot{S} = 0, \text{отсюда, } v = \dot{S} = \text{const}$$

$$ma_n = T \sin \alpha, a_n = \frac{v^2}{R}; R = l \sin \alpha$$

$$\frac{mv^2}{R} = T \sin \alpha; \frac{mv^2}{l \sin \alpha} = T \sin \alpha$$

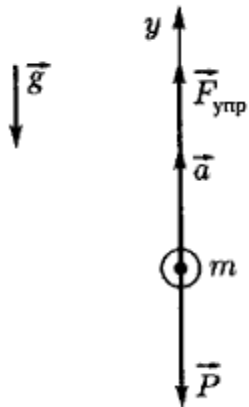
$$v = \sqrt{\frac{Tl}{m}} \sin \alpha$$

$$0 = T \sin \alpha \rightarrow T = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \alpha}$$

$$v = \frac{0,102 \cdot 9,81}{0,5} = 2,0$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,3}{0,102}} \cdot 0,86 = 2,1 \text{ м/с}$$

Задача 26.11: В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50Н, при ускоренном -51 Н. Найти ускорение кабины.



Уравнение динамики на ось y :

$$ma = F_{упр} - P$$

Если $a=0$ (равномерное движение), то

$$0 = F_{упр} - P \rightarrow P = F_{упр} = 50H$$

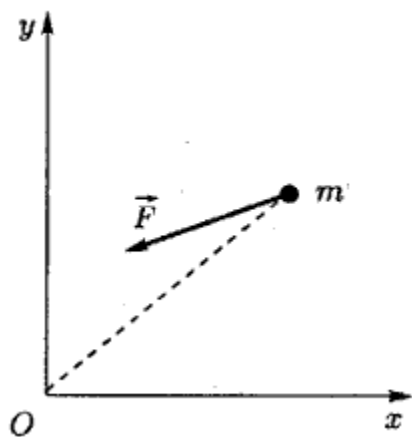
Тогда

$$a = \frac{F_{упр} - P}{m} = g \frac{F_{упр} - P}{P} = g \frac{51 - 50}{50} = 9.8 \cdot \frac{1}{50} = 0,196 м / с^2$$

Задача 26.16: Движение материальной точки массы 0,2 кг выражается уравнениями

$$x = 3 \cos \pi t \text{ см,}$$

$y = 4 \sin \pi t$ см. Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от её координат.



$$m\ddot{x} = F_x$$

$$m\ddot{y} = F_y \rightarrow F_x = -m \cdot 3(2\pi)^2 \cos 2\pi t = -0,0789x,$$

$$F_y = -m \cdot 4\pi^2 \sin \pi t = -0,0197y$$

Задача 26.17: Шарик, масса которого равна 100г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением $x = 4,9t - 2,45(1 - e^{-2t})$

Где x - в метрах, t - в секундах, ось Ox направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха R и выразить её как функцию скорости шарика

Определим скорость и ускорение

$$v = \dot{x} = 4,9 - 4,9e^{-2t} = 4,9(1 - e^{-2t}) \text{ м / с}$$

$$a = \ddot{x} = \dot{v} = 9,8e^{-2t} \text{ м / с}^2$$

По 2 закону Ньютона

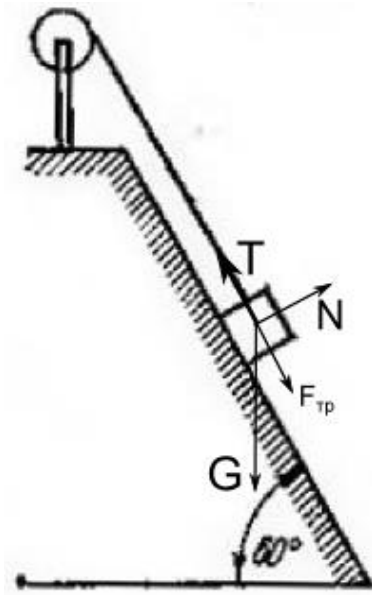
$$\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a} \text{ и в проекции на ось } X$$

$$ma = F - R; R = F - ma = mg - ma$$

$$R = m(g - a)$$

$$R = 0,1(9,8 - 9,8e^{-2t}) = 0,98(1 - e^{-2t}) = 0,2$$

Задача 26.26: Груз массы $M=600$ кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60° с горизонтом. Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен $0,2$. Ворот радиуса $0,2$ м вращается по закону $\varphi = 0,4t^3$. Найти натяжение троса, как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.



Уравнение движения груза в проекциях на декартовы оси Oxy согласно 2-му закону Ньютона

$$\begin{cases} M\ddot{x} = T - P \sin 60 - F_{тр} \\ 0 = N - P \cos 60 \end{cases}$$

Следовательно, сила трения

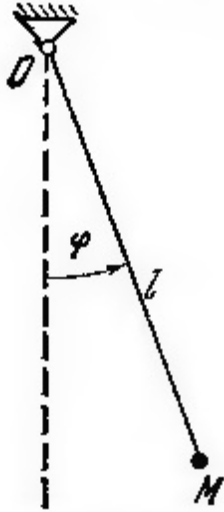
$$F_{тр} = fN = fP \cos 60$$

Из условия задачи следует, что $x = r\varphi \rightarrow \ddot{x} = r\ddot{\varphi}$

Следовательно, натяжение троса

$$\begin{aligned} T &= M\ddot{x} + P \sin 60 + F_{тр} = Mr\ddot{\varphi} + P \sin 60 + fP \cos 60 = \\ &= Mr \cdot 2,4t + Mg \sin 60 + fMg \cos 60 = (288t + 5680)H \\ T(t = 2) &= 6256H \end{aligned}$$

Задача 26.28: Груз M веса 10 Н подвешен к тросу длины $l=2\text{ м}$ и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin 2\pi t$ где φ - угол отклонения троса от вертикали в радианах, t - время в секундах. Определить натяжения T_1 и T_2 троса в верхнем и нижнем положении груза



$$ma_n = T - P \cos \varphi, a_n = \omega^2 l$$

$$T = ma_n + P \cos \varphi = \frac{P}{g} l \frac{\pi^4}{9} \cos^2 2\pi t + P \cos \varphi$$

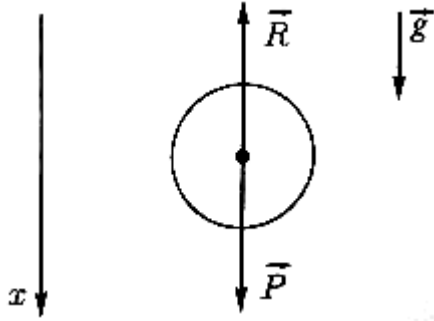
$$T_{\min} = T, \text{ когда } \varphi = \frac{\pi}{6}; \sin 2\pi t = 1; \cos 2\pi t = 0$$

$$T_{\min} = P \cos \varphi = P \cos \frac{\pi}{6} = 8,66\text{ Н}$$

$$T_{\max} = T, \text{ когда } \varphi = 0; \sin 2\pi t = 1; \cos 2\pi t = 1$$

$$T_{\max} = \frac{P}{g} l \frac{\pi^4}{9} + P \cos \varphi = 32,1\text{ Н}$$

Задача 27.9: Найти наибольшую скорость падения шара массы 10 кг и радиуса $r=8\text{ см}$, принимая, что сопротивление воздуха равно $R=k\sigma v^2$, где v - скорость движения, σ - площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения, и k - численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение $0,24 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$



Уравнение движения центра шара: $m\ddot{x} = P - R$, где $P=mg$, $R=k\sigma v^2 = k\pi r^2 v^2$

Следовательно,

$$\ddot{x} = g - \frac{k\pi r^2}{m} v^2, \dot{v} = g - \frac{k\pi r^2}{m} v^2$$

$$v_{\max} \text{ при } \dot{v} = 0:$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{gm}{k\pi r^2}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 10}{0,24 \cdot \pi \cdot 0,08^2}} = 142,5 \text{ м/с}$$

Задача 27.16: На какую высоту H и за какое время T поднимается тело веса p , брошенное вертикально вверх со скоростью v_0 , если сопротивление воздуха может быть выражено формулой $k^2 pv^2$, где v - величина скорости тела?

$$m\ddot{x} = -mg - k^2 pv^2$$

$$\ddot{x} = -g - k^2 pv^2$$

$$\ddot{x} = -g(1 + k^2 \dot{x}^2)$$

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -g(1 + k^2 v^2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 + k^2 v^2)$$

$$\frac{d(kv)}{k(1 + k^2 v^2)} = -g dt \rightarrow \frac{1}{k} \operatorname{arctg} kv = -gt + C_1$$

$$v(0) = v_0 \rightarrow e_1 = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} kv_0$$

$$t = T; v = 0 \rightarrow e_1 = \frac{1}{k} (0 - \operatorname{arctg} kv_0)$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{kg} \operatorname{arctg} kv_0$$

$$\frac{dx}{dt} = -g(1 + k^2 v^2)$$

$$\frac{v dv}{1 + k^2 v^2} = -g dx \rightarrow \ln |1 + k^2 v^2| = -2gxk^2 + C_2$$

$$C_2 = \frac{1}{2k^2} \ln(1 + k^2 v_0^2)$$

$$\frac{1}{2k^2} \ln\left(\frac{1 + k^2 v_0^2}{1 + k^2 v^2}\right) = -gx \rightarrow \frac{1}{2k^2 g} \ln\left(\frac{1 + k^2 v_0^2}{1 + k^2 v^2}\right)$$

Задача 27.17: Тело массы 2кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости v м/с равно $0,4v$ Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения

$$m\ddot{x} = -mg - 0,4\dot{x}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{5}(5g + v_x)$$

$$\frac{dv_x}{5g + v_x} = -\frac{dt}{5}$$

$$\ln(5g + v_x) = -\frac{t}{5} + C_1$$

$$t = 0, C_1 = \ln(5g + v_0)$$

$$\ln\left(\frac{5g + v_x}{5g + v_0}\right) = -\frac{t}{5}$$

$$\ln\frac{5g}{5g + v_0} = -\frac{t}{5}$$

$$t = -5\ln\frac{5g}{5g + v_0} = -5\ln\frac{50}{50 + 20} = 1,7c$$

Задача 10.11: Найти уравнение траектории движения точки, получающегося при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разной частоты:

$$1) x = a \sin 2\omega t, y = a \sin \omega t;$$

$$2) x = a \cos 2\omega t, y = a \cos \omega t.$$

$$\text{Ответ: } 1) x^2 a^2 = 4y^2 (a^2 - y^2);$$

$$2) 2y^2 - ax - a^2 = 0, \text{ причем } |x| \leq a, |y| \leq a.$$

Решение: 1) Воспользуемся соотношением $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, тогда

$$x = 2a \sin \omega t \cos \omega t \quad (1)$$

$$y = a \sin \omega t \quad (2)$$

Возведем (1) в квадрат и выразим из полученного равенства $\cos^2 \omega t$:

$$\cos^2 \omega t = \frac{x^2}{4a^2 \sin^2 \omega t}$$

Возведем (2) в квадрат и выразим из полученного $\sin^2 \omega t$:

$$\sin^2 \omega t = \frac{y^2}{a^2}.$$

Сложим последние два выражения:

$$1 = \frac{x^2}{4a^2 \sin^2 \omega t} + \frac{y^2}{a^2};$$

$$1 = \frac{x^2 + 4y^2 \sin^2 \omega t}{4a^2 \sin^2 \omega t}.$$

Учтем, что $y = a \sin \omega t$ и $\sin^2 \omega t = \frac{y^2}{a^2}$, тогда

$$x^2 + \frac{4y^2 y^2}{a^2} = \frac{4a^2 y^2}{a^2},$$

Окончательно имеем

$$x^2 a^2 = 4y^2 (a^2 - y^2).$$

2) Воспользуемся соотношением $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$, тогда

$$x = a \cos^2 \omega t - a \sin^2 \omega t, \quad (1)$$

$$y = a \cos \omega t. \quad (2)$$

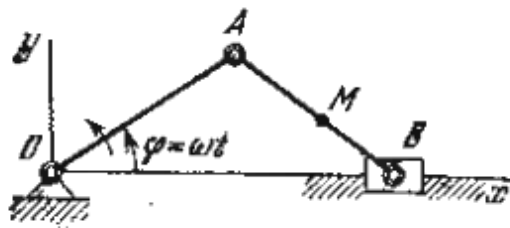
Выражая из (2) $\cos \omega t$ и подставляя в (1), получим

$$\frac{y^2 - a + y^2}{a} = x.$$

Окончательно имеем

$$2y^2 - ax - a = 0.$$

Задача 11.4: Кривошип ОА вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти скорость середины М шатуна кривошипно-ползунного механизма и скорость ползуна В в зависимости от времени, если $OA=AB=a$



$$x_A = a \cos \varphi_1 \quad x'_A = -a \sin \varphi_1$$

$$y_A = a \sin \varphi_1 \Rightarrow y'_A = a \cos \varphi_1$$

$$v_A = \sqrt{x_A'^2 + y_A'^2}$$

$$x_B = x_A + l_{AB} \cos \varphi_2 \quad x'_B = x'_A - l_{AB} \sin \varphi_2 \varphi'_2$$

$$y_B = y_A + l_{AB} \sin \varphi_2 \Rightarrow 0 = y'_A - l_{AB} \cos \varphi_2 \varphi'_2$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{-y_A}{l_{AB}} = -\sin \varphi_1 \Rightarrow \cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}$$

$$\varphi'_2 = -\frac{y'_A}{l_{AB} \cos \varphi_2} = -\frac{a \cos \varphi_1}{a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}} = -\frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}}$$

$$x'_B = x'_A + l_{AB} \sin \varphi_1 \cdot \left(-\frac{\cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}}\right) = -a \sin \varphi_1 - \frac{a \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1}}$$

$$v_B = x'_B \cdot \omega_1, \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_1} = \cos \varphi_1$$

$$x'_B = -2a \sin \varphi_1, \varphi_1 = \omega_1 t$$

$$v_B = |x'_B \cdot \omega_1| = 2a \omega_1 \sin \omega t$$

$$x'_M = x'_A - \frac{a}{2} \sin \varphi_2 \varphi'_2 = -\frac{3a}{2} \sin \varphi_1$$

$$y'_M = y'_A + \frac{a}{2} \cos \varphi_2 \varphi'_2 = \frac{a}{2} \cos \varphi_1$$

$$v_M = \omega_1 \sqrt{x_M'^2 + y_M'^2} = \frac{a}{2} \omega_1 \sqrt{9 \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1} = \frac{a}{2} \omega_1 \sqrt{8 \sin^2 \varphi_1 + 1}$$

Ответ: $v_M = \frac{a}{2} \omega_1 \sqrt{8 \sin^2 \varphi_1 + 1}, v_B = 2a \omega_1 \sin \omega t$

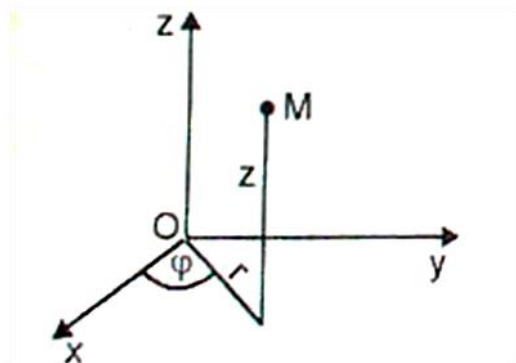
Задача 11.14: Уравнения движения точки М в цилиндрической системе координат имеют вид

$$r = a,$$

$$\varphi = kt,$$

$$z = vt$$

Найти проекции скорости точки М на оси цилиндрической системы координат, уравнения движения точки М₁, описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки М₁.



В качестве обобщенных (криволинейных) координат возьмем параметры:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z \quad (1)$$

Для нахождения скорости точки в ортогональных криволинейных координатах необходимо прежде вычислить коэффициенты Ламе

$$H_{qi}^2 = \left(\frac{dx}{dq_i}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq_i}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq_i}\right)^2, \quad (2)$$

$$\text{где } x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad q_3 = z \quad (3)$$

Подставив (3) в (2) и учитывая (1), получим

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1 \quad (4)$$

Тогда проекции скорости на оси криволинейной системы координат определяются по формуле

$$v_{qi} = H_{qi} \cdot \dot{q}_i, \quad (i=1, 2, 3) \quad (5)$$

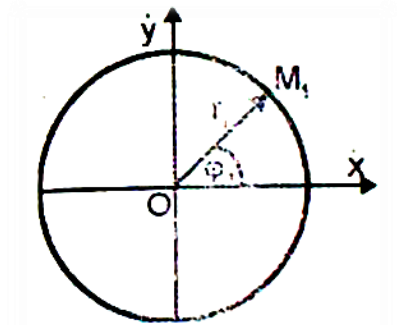
Учитывая (1) и (4) из (5) получим

$$v_r = \dot{r} = 0, \quad v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot k, \quad v_z = \dot{z} = v$$

$$\text{или } v_r = 0, \quad v_\varphi = a \cdot k, \quad v_z = v$$

Чтобы найти годограф скорости, продифференцируем (3)

$$v_x = \dot{x} = -a \cdot k \cdot \sin kt, \quad v_y = \dot{y} = a \cdot k \cdot \cos kt, \quad v_z = \dot{z} = v$$



Исключая время t

$$r_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = ak, \quad z_1 = \dot{z} = v$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\dot{x}}{r_1} = -\sin kt$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt$$

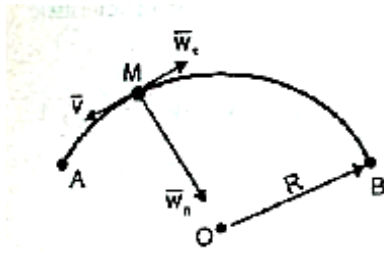
$$v_{\varphi 1} = r_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = a \cdot k^2, \quad v_{r1} = r_1 = 0, \quad v_{z1} = \dot{z}_1 = 0$$

$$\text{ОТВЕТ: } v_r = 0, \quad v_\varphi = a \cdot k, \quad v_z = v$$

$$r_1 = ak, \quad z_1 = v, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt$$

$$v_{\varphi 1} = a \cdot k^2, \quad v_{r1} = 0, \quad v_{z1} = 0$$

Задача 12.11: Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 20\text{ см}$. Закон её движения по траектории: $s = 20\sin \pi t$ (t в секундах, s - в сантиметрах). Найти величину и направление скорости, касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент $t = 5\text{ с}$. Построить также графики скорости, касательного и нормального ускорений.



Для решения задачи используем формулы, определяющие скорость и ускорение точки при естественном способе задания движения

$$v = \frac{ds}{dt} = 20\pi \cos \pi t$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = -20\pi^2 \sin \pi t$$

$$w_n = \frac{v^2}{R} = 20\pi^2 (\cos \pi t)^2$$

При $t = 5\text{ с}$ находим

$$v = -20\pi \frac{\text{см}}{\text{с}}, w_\tau = 0, w_n = 20\pi^2 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$W = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = 20\pi^2 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Ответ: Скорость равна по величине $20\pi \text{ см/с}$ и направлена в сторону, противоположную положительному направлению отсчёта дуги s ; $w_t = 0, w = w_n = 20\pi^2 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$.

Задача 12.15: Движение точки задано уравнениями $x = a(e^{kt} + e^{-kt})$, $y = a(e^{kt} - e^{-kt})$ где a и k - заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки как функции радиуса-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Траекторию движения точки найдем если исключим параметр (t) из заданных законов движения

Уединив множители, содержание экс, возведя обе части уравнений в квадраты и вычтя одно из другого получим

$$\frac{x^2}{a^2} = (e^{kt} + e^{-kt})^2$$

—

$$\frac{y^2}{a^2} = (e^{kt} - e^{-kt})^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 4$$

$$x^2 - y^2 = 4a^2 \text{ гипербола}$$

Определение скорости

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ak(e^{kt} - e^{-kt})$$

$$v_y = ak(e^{kt} + e^{-kt})$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2 k^2 (e^{kt} - e^{-kt})^2 + a^2 k^2 (e^{kt} + e^{-kt})^2}$$

Т.к. $a^2 k^2 (e^{kt} - e^{-kt})^2 = y^2$, а $a^2 k^2 (e^{kt} + e^{-kt})^2 = x^2$ то скорость

v как функция радиуса вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ будет

$$v = \sqrt{k^2 y^2 + k^2 x^2} = k \sqrt{y^2 + x^2} = kr$$

$$v = kr$$

Определение ускорения

$$W_x = \frac{dv_x}{dt} = ak^2(e^{kt} + e^{-kt})$$

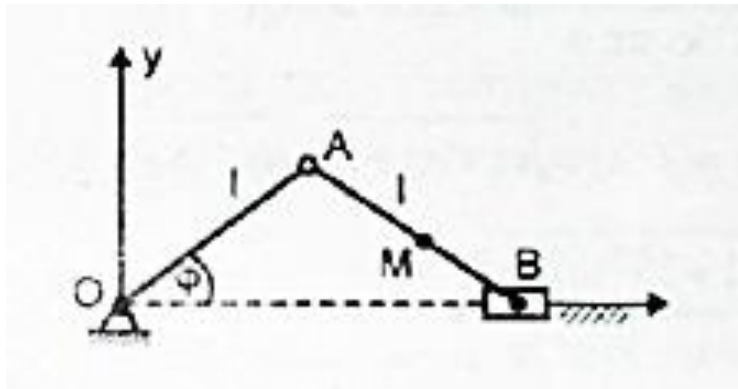
$$W_y = \frac{dv_y}{dt} = ak^2(e^{kt} - e^{-kt})$$

$$W = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{a^2 k^4 (e^{kt} + e^{-kt})^2 + a^2 k^4 (e^{kt} - e^{-kt})^2} =$$

$$k^2 \sqrt{a^2 (e^{kt} + e^{-kt})^2 + a^2 (e^{kt} - e^{-kt})^2} = k^2 \sqrt{x^2 + y^2} = k^2 r$$

$$W = k^2 r$$

Задача 12.18: Найти траекторию точки М шатуна кривошипно-ползунного механизма, если $r = l = 60$ см, $MB = \frac{1}{3}l$, $\varphi = 4\pi t$ (t- в секундах), а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$



$$x = r \cos \varphi + \frac{2}{3} l \cos \varphi =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cos \varphi = 100 \cos(4\pi t)$$

$$y = \frac{1}{3} l \sin \varphi = 20 \sin(4\pi t)$$

$$\frac{x}{100} = \cos(4\pi t)$$

$$\frac{y}{20} = \sin(4\pi t)$$

$$\frac{x^2}{100^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1$$

$$\omega^n = \sqrt{\omega^2 - (\omega^r)^2} = 1600\pi^2 \text{ см} / \text{с}^2$$

$$X = -400\pi \sin(4\pi t) \rightarrow X(0) = 0$$

$$y = 80\pi \cos(4\pi t) \rightarrow y(0) = 80\pi \text{ см} / \text{с}$$

$$v = 80\pi \sqrt{25 \sin^2 4\pi t + \cos^2 4\pi t} \rightarrow v(0) = 80\pi \text{ см} / \text{с}$$

$$X = -1600\pi^2 \cos(4\pi t) \rightarrow X(0) = -1600\pi^2 \text{ см} / \text{с}^2$$

$$y = -320\pi^2 \sin(4\pi t) \rightarrow y(0) = 0$$

$$\omega = 320\pi^2 \sqrt{[5 - \cos(4\pi t)]^2 + [\sin(4\pi t)]^2}$$

$$\omega(0) = 1600\pi^2 \text{ см} / \text{с}$$

$$\omega^r = \frac{dv}{dt} = \frac{7680\pi^2 \cos(4\pi t) \sin(4\pi t)}{\sqrt{(\cos^2(4\pi t)) + 25 \sin^2(4\pi t)}} \rightarrow \omega^r(0) = 0$$

Задача 12.25: Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям $x = 2 \cos 4t$, $y = 2 \sin 4t$, $z = 2t$ причем за единицу длины взят метр. Определить радиус кривизны ρ траектории

$$v_x = -8 \sin 4t$$

$$v_y = 8 \cos 4t$$

$$v_z =$$

$$v = \sqrt{8^2 + 4} = \sqrt{68} =$$

$$\sqrt{34} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{17} \text{ м/с}$$

$$\omega^\tau = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\omega_x = -32 \cos 4t$$

$$\omega_y = -32 \sin 4t \rightarrow \omega = 32 \text{ м/с}^2$$

$$\omega_z = 0$$

$$\omega^n = 32 \text{ м/с}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{\omega^n} = \frac{68}{32} = 2 \frac{4}{32} = 2 \frac{1}{8} \text{ м}$$

Задача 12.27: Движение точки задано уравнениями

$$x = 2t, y = t^2 \text{ (t-в секундах, x и y в сантиметрах)}$$

Определить величины и направления скорости и ускорения точки в момент времени $t=1$ с

$$y = \frac{x^2}{4}$$

$$t = 1$$

$$x = 2$$

$$y = 1$$

$$v_x = 2$$

$$v_y = 2t$$

$$v = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

$$v(1) = 2\sqrt{2} \text{ см / с}$$

$$\cos(\vec{v} \wedge OX) = \frac{v_x}{v} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{v} \wedge OX = \frac{\pi}{4}$$

$$v_x = 0$$

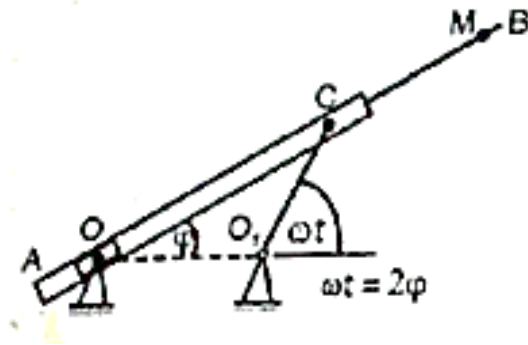
$$\omega_y = 2$$

$$\omega = 2 \text{ см / с}^2 \parallel Oy$$

Задача 12.29: Кривошип O_1C длиной $a/2$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O_1 .

В точке C с кривошипом шарнирно связана линейка AB , проходящая все время через качающуюся муфту O , находящуюся на расстоянии $a/2$ от оси вращения O_1 .

Приняв точку O за полюс, найти в полярных координатах уравнение движения точки M линейки, отстоящей от шарнира C на расстоянии a , её траектории, скорость и ускорение (в начальный момент угол $\varphi = \angle COO = 0$)



$$r = OM = OC + CM = OC + a$$

$$\frac{OC}{\sin(\pi - 2\varphi)} = \frac{a}{2 \sin \varphi} \rightarrow OC = \frac{a \sin \pi 2\varphi}{2 \sin \varphi} =$$

$$= \frac{a \sin 2\varphi}{2 \sin \varphi} = \frac{2a \sin \varphi \cos \varphi}{2 \sin \varphi} = a \cos \varphi$$

$$r = a \cos \varphi + a = a(\cos \varphi + 1) = a(1 + \cos \frac{\omega t}{2})$$

$$\varphi = \frac{\omega t}{2}$$

$$v_r = \dot{r} = -a \frac{\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} = -\frac{a\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2}$$

$$\dot{\varphi} = r\ddot{\varphi} = \frac{\omega}{2} a(1 + \cos \frac{\omega t}{2}) = \frac{a\omega}{2} (1 + \cos \frac{\omega t}{2})$$

$$\omega_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{a\omega^2}{4} \cos \frac{\omega t}{2} - a(1 + \cos \frac{\omega t}{2}) \frac{\omega^2}{4} =$$

$$= -\frac{a\omega^2}{4} (\cos \frac{\omega t}{2} + 1 + \cos \frac{\omega t}{2}) = -\frac{a\omega^2}{4} (1 + 2 \cos \frac{\omega t}{2})$$

$$\omega_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = a(1 + \cos \frac{\omega t}{2}) \frac{\omega}{2} + 2 \frac{\omega}{2} [-\frac{a\omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2}] =$$

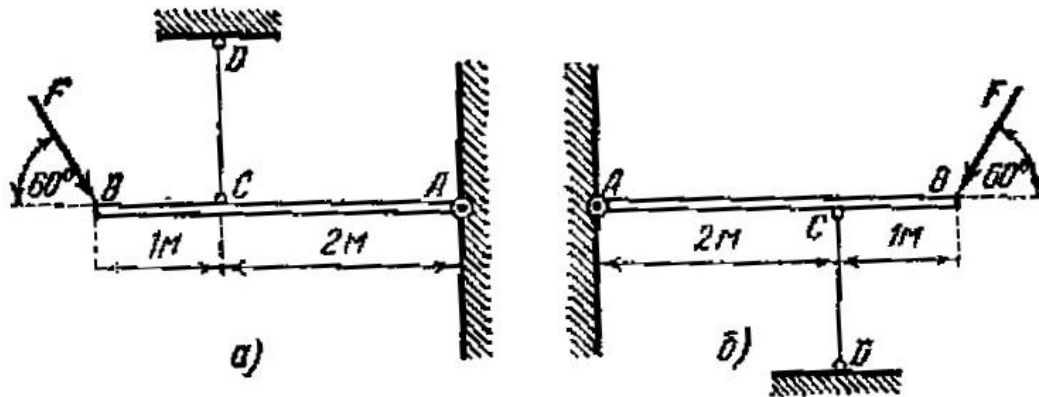
$$= -\frac{\omega^2 a}{2} \sin \frac{\omega t}{2}$$

$$\omega = \frac{\omega^2 a}{4} \sqrt{(1 + 2 \cos \frac{\omega t}{2})^2 + 4 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} =$$

$$= \frac{\omega^2 a}{4} \sqrt{5 + 4 \cos \frac{\omega t}{2}}$$

$$v = \frac{a\omega}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\omega t}{2} + (1 + \cos \frac{\omega t}{2})^2} = \frac{\omega a}{2} \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\omega t}{2}} = a\omega \cos \frac{\omega t}{4}$$

Задача 2.31: На рисунках изображены балки AB , удерживаемые в горизонтальном положении вертикальными стержнями CD . На концах балок действуют силы $F=30$ кН под углом 60° к горизонту. Взяв размеры с рисунков, определять усилия S в стержнях CD и давления Q балок на стену, если крепления в A , C и D шарнирные. Весом стержней и балок пренебречь.



Ответ: а) $S=39$ кН, $Q=19,8$ кН; б) $S=39$, $Q=19,8$ кН.

Решение: а) $\sum X = 0 \quad X_A - F \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$

$$\sum Y = 0 \quad Y_A + Y_D - F \sin 60^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad -F \sin 30^\circ \cdot 3 + 2Y_D = 0 \quad (3)$$

$$\text{Из (3)} \Rightarrow Y_D = \frac{3F \sin 30^\circ}{2} = \frac{3 \cdot 30 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{45}{2} \sqrt{3} = 39 \text{ кН}$$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow Y_A = F \sin 60^\circ - Y_D = 30 \cdot 0,5\sqrt{3} - 39 = -13 \text{ кН (направлена вниз)}$$

$$\text{Из (1)} \Rightarrow X_A = F \cos 60^\circ = 30 \cdot 0,5 = 15 \text{ кН}$$

$$Q = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{15^2 + 13^2} = 19,8 \text{ кН.}$$

б) $\sum X = 0 \quad X_A - F \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$

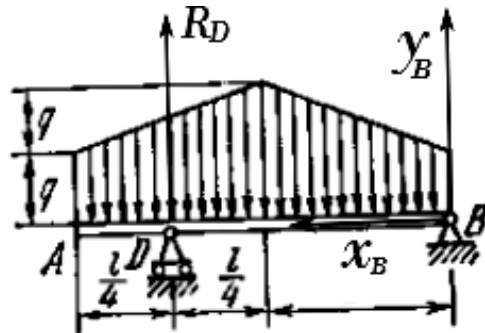
$$\sum Y = 0 \quad Y_A + Y_D - F \sin 60^\circ = 0 \quad (2) \text{ — уравнения идентичны, т.е.}$$

$$\sum M_A = 0 \quad -F \sin 30^\circ \cdot 3 + 2Y_D = 0 \quad (3)$$

$$Y_D = 39 \text{ кН;}$$

$$Q = 19,8 \text{ кН.}$$

Задача 3.18: Балка АВ длины l м несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна q Н/м на концах А и В балки и $2q$ Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и В.



Запишем условия равновесия

$$\sum F_x = 0 \quad -X_B = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad Y_B - q \cdot l - q \frac{l}{2} + R_D = 0$$

$$\sum M_D = 0 \quad Y_B \cdot \frac{3}{4} \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - q \frac{l}{4} \cdot \frac{5l}{12} - q \frac{l}{4} \cdot \frac{1}{12} l = 0$$

Из уравнения моментов найдем Y_B

$$Y_B \cdot \frac{3}{4} l = q \frac{l^2}{48} \cdot 18$$

$$Y_B = ql \cdot 0.5 \text{ Н}$$

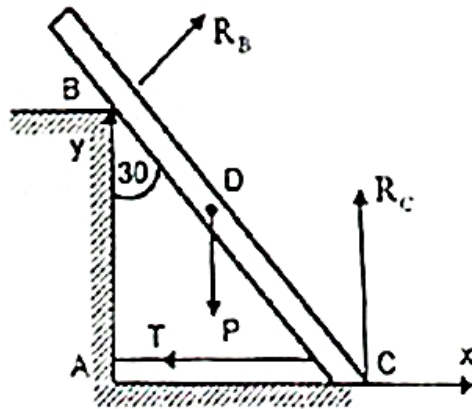
Из уравнения для $\sum F_y$ найдем R_D

$$R_D = \frac{3}{2} ql - Y_B$$

$$R_D = ql \text{ Н}$$

Ответ: $R_D = ql \text{ Н}$, $Y_B = ql \cdot 0.5 \text{ Н}$

Задача 4.7: Однородная балка AB веса 600 Н и длины 4 м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой B – на столб высоты 3 м , образуя с вертикалью угол 30° . Балка удерживается в таком положении веревкой AC , протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки T и реакции R_B столба и R_C пола.



Ответ: $T=150\text{ Н}$, $R_B=173\text{ Н}$, $R_C=513\text{ Н}$.

Решение:

$$\sum X = 0 \quad R_B \cos 30^\circ - T = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = 0 \quad R_B \sin 60^\circ - Q + R_C = 0 \quad (2)$$

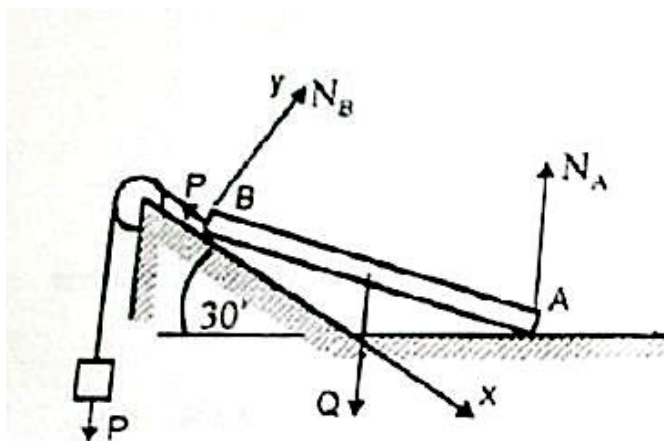
$$\sum M_C = 0 \quad 2Q \cos 60^\circ - \frac{6}{\sqrt{3}} R_B = 0 \quad (3)$$

$$\text{Из (3)} \Rightarrow R_B = \frac{2Q\sqrt{3}\cos 60^\circ}{6} = 173\text{ Н}$$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow R_C = Q - R_B \sin 60^\circ = 513\text{ Н}$$

$$\text{Из (1)} \Rightarrow T = R_B \sin 30^\circ = 150\text{ Н}.$$

Задача 4.10: Однородный стержень АВ веса 100 Н опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим — на гладкую плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту. У конца В стержень поддерживается веревкой, перекинутой через блок С и несущей груз Р; часть веревки ВС параллельна наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, определить груз Р и силы давления N_A и N_B на пол и на наклонную плоскость.



Найдем условия равновесия

$$\sum X = 0 \quad -P \cdot \cos 30 + R_B \cdot \sin 30 = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad P \cdot \cos 60 + R_B \cdot \cos 30 - Q + R_A = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad -Q \frac{l}{2} \cdot \cos 15 + R_A \cdot l \cdot \cos 15 = 0$$

Выразим из последнего уравнения реакцию опоры R_A

$$R_A = \frac{Q}{2}$$

$$R_A = \frac{100}{2} = 50 \text{ Н}$$

$$R_B = \frac{P \cdot \cos 30}{\sin 30}$$

$$R_B = \frac{P \cdot 2\sqrt{3}}{2} = P\sqrt{3} \text{ Н}$$

Подставляя оба значения в уравнение для $\sum Y$

$$P \cdot \cos 60 + P\sqrt{3} \cdot \cos 30 - Q + R_A = 0 \text{ или}$$

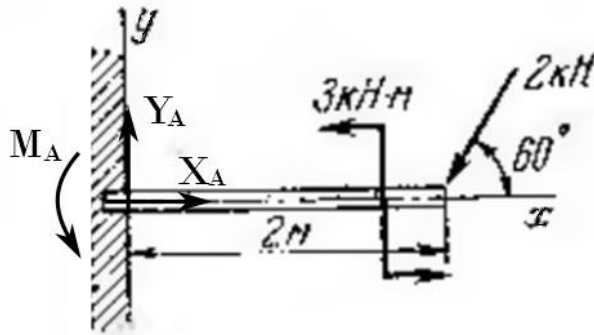
$$P(0.5 + 1.5) - 100 + 50 = 0, \text{ откуда}$$

$$2P = 50 \text{ и } P = 25 \text{ Н}$$

$$\text{Тогда } R_B = 25\sqrt{3} \approx 43.3 \text{ Н}$$

$$\text{Ответ: } R_B = 43.3 \text{ Н, } R_A = 50 \text{ Н, } P = 25 \text{ Н}$$

Задача 4.27: Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.



Найдем условия равновесия

$$\sum F_x = 0 \quad X_A - P \cdot \cos 60 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad Y_A - P \cdot \sin 60 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad M_A + M - 2P \cdot \sin 60 = 0$$

Из уравнения для $\sum F_x$ найдем X_A

$$X_A = P \cdot \cos 60 = 2 \cos 60 = 1 \text{ кН}$$

Из уравнения для $\sum F_y$ найдем Y_A

$$Y_A = P \cdot \sin 60 = 2 \sin 60 \approx 1.73 \text{ кН}$$

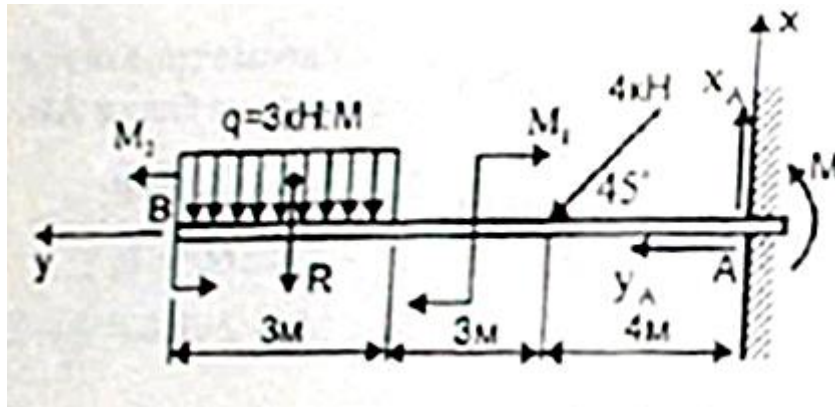
Из уравнения для $\sum M_A$ найдем M_A

$$M_A = 2P \cdot \sin 60 - M$$

$$M_A = 4 \cdot \sin 60 - 3 \approx 0.47 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Ответ: $X = 1 \text{ кН}$, $Y = 1.73 \text{ кН}$, $M_A = 0.47 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Задача 4.29: Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределённой нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.



Запишем условия равновесия

$$\sum F_x = X - Q - F \cdot \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = Y + F \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum M_R = M_R - M + Q \cdot 8.5 + F \cdot \sin 45^\circ \cdot 4 + M_2 = 0$$

Из второго условия равновесия получим, что

$$Y = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} = -2.8 \text{ кН}$$

Из первого условия получаем, что

$$X = Q + F \cdot \sin 45^\circ = 9 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 11.8 \text{ кН}$$

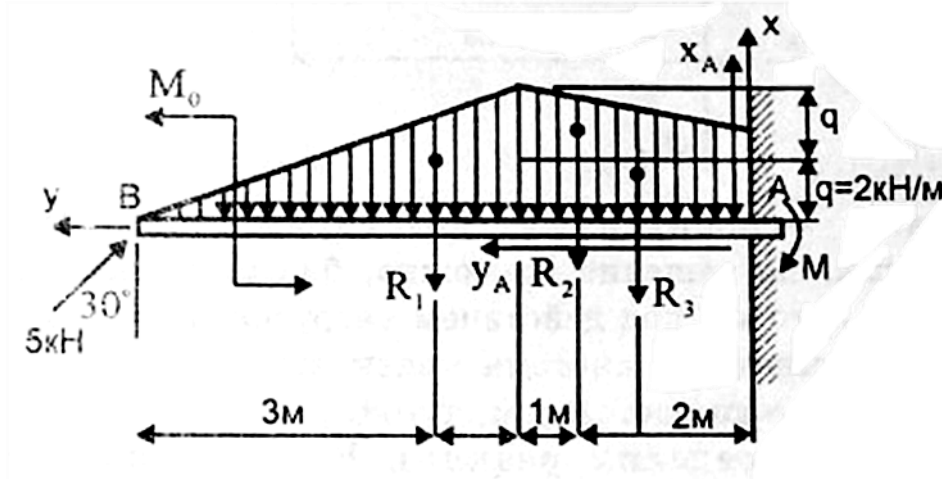
Из третьего условия равновесия получаем, что

$$M_R = M_1 - 8.5 \cdot Q - 4 \cdot F \cdot \sin 45^\circ - M_2$$

$$M_R = -2 + 3 - 8.5 \cdot 9 - 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 - 73.5 - 11.3 = -86.8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Ответ: $X = 11.8 \text{ кН}$, $Y = -2.8 \text{ кН}$, $M = -86.8 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Задача 4.31: Определить реакцию заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы, пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника и трапеции.



$$M_0 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}, R_1 = 4.5 \cdot 2 = 9 \text{ кН}, R_2 = 3 \text{ кН}, R_3 = 6 \text{ кН}$$

Рассматривается равновесие балки АВ

$$Y_A - 5 \sin 30^\circ = 0$$

$$X_A + 5 \cos 30^\circ - R_1 - R_2 - R_3 = 0$$

$$-5 \cos 30^\circ \cdot 7.5 + M_0 + 4.5 R_1 + 2 R_2 + 1.5 R_3 - M = 0$$

решая эту систему уравнений, получим

$$Y_A = 2.5 \text{ кН}$$

$$X_A = 9 + 3 + 6 - 5 \cos 30^\circ$$

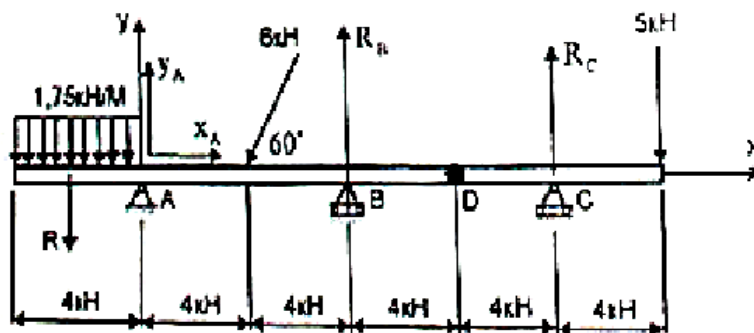
$$X_A = 13.7 \text{ кН}$$

$$M = -5 \cos 30^\circ \cdot 7.5 + M_0 + 4.5 R_1 + 2 R_2 + 1.5 R_3$$

$$M = 27 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Ответ: $X_A = 13.7 \text{ кН}$, $Y_A = 2.5 \text{ кН}$, $M = 27 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Задача 4.34: Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.



Рассмотрим первую часть составной балки; раскладывая реакции в шарнире D на составляющим

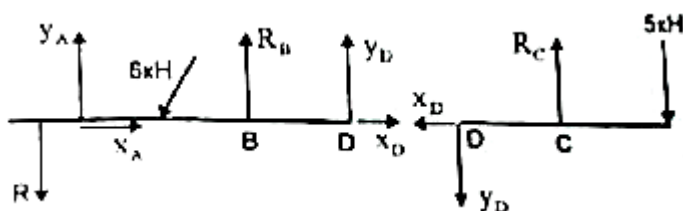
Запишем уравнения равновесия

$$\sum F_x = -X_D = 0$$

$$\sum F_y = Y_D + R_C - P = 0$$

$$\sum M_C = -P \cdot 4 - Y_D \cdot 4 = 0$$

$$X_D = 0$$



Из уравнения для $\sum M_C$ найдем Y_D

$$Y_D = -\frac{4 \cdot P}{4}$$

$$Y_D = -5 \text{ кН}$$

Из уравнения для $\sum F_y$ найдем R_C

$$R_C = P - Y_D$$

$$R_C = 10 \text{ кН}$$

Рассмотрим вторую часть составной балки, подставляя найденные компоненты реакции X_D и Y_D шарнира D

Запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_x = X_A + P \cdot \cos 45 + X_D = 0$$

$$\sum F_y = Y_A - P \cdot \sin 45 + R_B - q \cdot 5 - Y_D = 0$$

$$\sum M_A = -P \cdot 8 \cdot \sin 45 + R_B \cdot 10 - q \cdot 5 \cdot 12.5 - Y_D \cdot 15 = 0$$

Из уравнения для $\sum F_x$ найдем X_A

$$X_A = P \cdot \cos 60 - X_D$$

$$X_A = 6 \cdot \cos 60 - 0 = 3 \text{ кН}$$

Из уравнения для $\sum M_A$ найдем R_B

$$R_B = \frac{Y_D \cdot 12 + P \cdot 4 \cdot \sin 60 - q \cdot 4 \cdot 2}{8}$$

$$R_B = \frac{(-5) \cdot 12 + 6 \cdot 4 \cdot \sin 60 - 1.75 \cdot 4 \cdot 2}{8} \approx -6.6 \text{ кН}$$

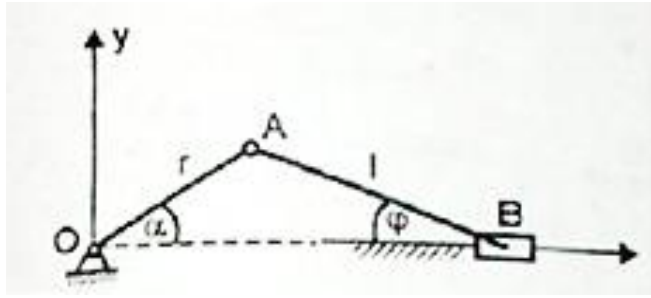
Из уравнения для $\sum F_Y$ найдем Y_A

$$Y_A = 4 \cdot q - R_B + P \cdot \sin 60 + Y_D$$

$$Y_A = 4 \cdot 1.75 - (-6.6) + 6 \cdot \sin 60 + (-5) \approx 13.8 \text{ кН}$$

Ответ: $X_A = 3 \text{ кН}$, $Y_A = 13.8 \text{ кН}$, $R_B = -6.6 \text{ кН}$, $R_C = 10 \text{ кН}$, $X_D = 0$, $Y_D = -5 \text{ кН}$.

Задача 14.12: Определить закон движения, скорость и ускорение ползуна B кривошипно-ползунного механизма, если кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . Длина кривошипа $OA = r$, длина шатуна $AB = l$.



Ось Ox направлена по направляющей ползуна. Начало отсчета – в центре O кривошипа. Отношение $\frac{r}{l} = \lambda$ следует считать весьма малым ($\lambda \ll 1$); $\alpha = \omega_0 t$.

$$\alpha = \omega t$$

$$x = r \cdot \cos(\omega t) + l \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{\sin \varphi}{r} = \frac{\sin \alpha}{l}$$

$$\sin \varphi = \frac{r}{l} \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \cdot \sin \alpha \right)^2} \approx 1 - \frac{r^2}{2 \cdot l^2} \cdot (\sin \alpha)^2 = l - \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$$

Тогда

$$x = r \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2 \cdot \omega t \right) + l - \frac{\lambda}{4} \cdot r$$

$$v_x = \dot{x} = -r \cdot \omega \cdot \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2 \cdot \omega t \right)$$

$$w_x = \ddot{x} = -r \cdot \omega^2 \cdot (\cos \omega t + \lambda \cdot \cos 2 \cdot \omega t)$$

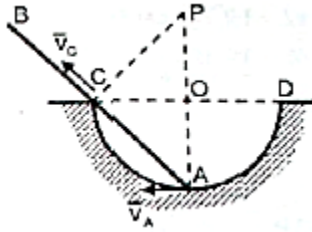
Ответ:

$$x = r \cdot \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2 \cdot \omega t \right) + l - \frac{\lambda}{4} \cdot r$$

$$v_x = -r \cdot \omega \cdot \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2 \cdot \omega t \right)$$

$$w_x = -r \cdot \omega^2 \cdot (\cos \omega t + \lambda \cdot \cos 2 \cdot \omega t)$$

Задача 16.10: Прямая AB движется в плоскости рисунка, причем конец ее A все время находится на полуокружности CAD , а сама прямая все время проходит через неподвижную точку C диаметра CD . Определить скорость v_C точки прямой, совпадающей с точкой C , в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен CD , если известно, что скорость точки A в этот момент 4 м/с .



Ответ: $v_C = 2,83 \text{ м/с}$.

Решение:

Покажем направления скоростей: $v_A \perp OA$, т.к. направлена по касательной к радиусу,

$v_A \parallel BA$ - направлена вдоль стержня.

Тогда, определяя положение МЦС (точка P) как пересечение перпендикуляров к скоростям v_A и v_C , можно найти скорость точки C :

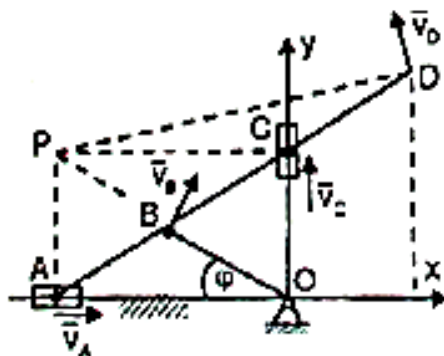
$$\frac{v_A}{AP} = \frac{v_C}{CP} \Rightarrow v_C = \frac{v_A}{AP} CP.$$

$AP = 2 \cdot OA = 2R$, где R -радиус окружности.

$$CP = R\sqrt{2}.$$

$$v_C = \frac{v_A}{AP} CP = \frac{v_A R\sqrt{2}}{2R} = \frac{v_A \sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2,83 \text{ м/с}.$$

Задача 16.14: Стержень OB вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega=2\text{с}^{-1}$ и приводит в движение стержень AD , точки A и C которого движутся по осям: A — по горизонтальной Ox , C — по вертикальной Oy . Определить скорость точки D стержня при $\varphi=45^\circ$ и найти уравнение траектории этой точки, если $AB=OB=BC=CD=12$ см.



Ответ: $v_D = 53,66 \text{ см/с}$, $\left(\frac{x}{12}\right)^2 + \left(\frac{y}{36}\right)^2 = 1$.

Решение:

Введем обозначения: $AD=b$, $AC=l$, тогда для любой точки (в том числе и для точки D) можно записать:

$$\begin{cases} x = (b-l) \cdot \cos \varphi; \\ y = b \sin \varphi. \end{cases}$$

Если исключить из системы параметр φ , то получим уравнение траектории точки D :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(b-l)^2} = \cos^2 \varphi; \\ \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \varphi. \end{cases}$$

Складывая полученные уравнения системы, имеем:

$$\frac{x^2}{(b-l)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Выразив b и l через численные значения задачи, получим:

$$\frac{x^2}{(3 \cdot AB - 2 \cdot AB)^2} + \frac{y^2}{(3AB)^2} = 1;$$

$$\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{36^2} = 1 \text{ - эллипс.}$$

Т.к. угол ABO – прямой, то $\vec{v}_B$ направлен по AD и величина $v_B = \omega \cdot OB = 2 \cdot 12 = 24$ см/с.

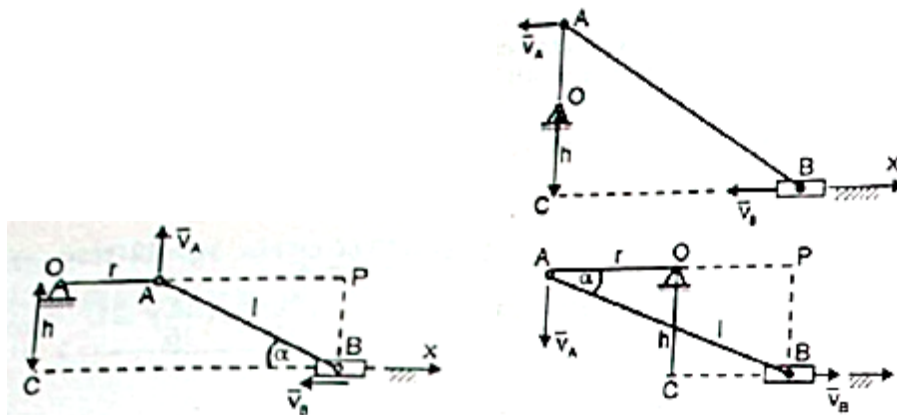
P – МЦС и $BP=BC=OB$. Тогда, $\omega = \frac{v_B}{BP} = 2$ рад/с.

$CP = \sqrt{2 \cdot (OB)^2} = OB \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ см, $\angle PCD = 135^\circ$, поэтому

$$DP = \sqrt{(CP)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot CP \cdot CD \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{12^2 (2 + 1 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})} = 12\sqrt{5}$$

Тогда, $v_D = \omega \cdot DP = 2 \cdot 12\sqrt{5} = 53,66$ см/с.

Задача 16.16: Найти скорость ползуна B нецентрального кривошипно-ползунного механизма при двух горизонтальных и двух вертикальных положениях кривошипа, вращающегося вокруг вала O с угловой скоростью $\omega = 1,5$ рад/с, если $OA=40$ см, $AB=200$ см, $OC=20$ см.



Ответ: $v_1 = v_3 = 6,03$ см/с, $v_2 = v_4 = 60$ см/с.

Решение:

Первое положение механизма:

$$v_A = \omega \cdot r = 40 \cdot 1,5 = 60 \text{ см/с};$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{PB}, \text{ где } P - \text{мгновенный центр скоростей (1)}$$

$$AP = \sqrt{l^2 - h^2} = 199 \text{ см.}$$

$$\text{Из (1)} \Rightarrow v_B = \frac{60 \cdot 20}{199} = 6,03 \text{ см/с.}$$

Второе положение механизма:

$$\vec{v}_A \uparrow \uparrow \vec{v}_B \Rightarrow v_A = v_B = 60 \text{ см/с.}$$

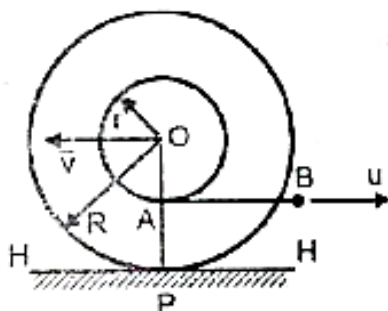
Третье положение механизма:

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} \Rightarrow v_B = 6,03 \text{ см/с.}$$

Четвертое положение механизма:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B \Rightarrow v_B = 60 \text{ см/с.}$$

Задача 16.29: Катушка радиуса R катится по горизонтальной плоскости HH без скольжения. На средней цилиндрической части катушки радиуса r намотана нить, конец которой B обладает при этом движении скоростью u по горизонтальному направлению. Определить скорость v перемещения оси катушки.



Ответ: $v = u \frac{R}{R - r}$.

Решение: Покажем направления скоростей.

Т.к. нить нерастяжимая, $v_A = v_B = u$.

Колесо катится по плоскости без скольжения. Поэтому положение МЦС определится в точке контакта колеса с плоскостью – точка P .

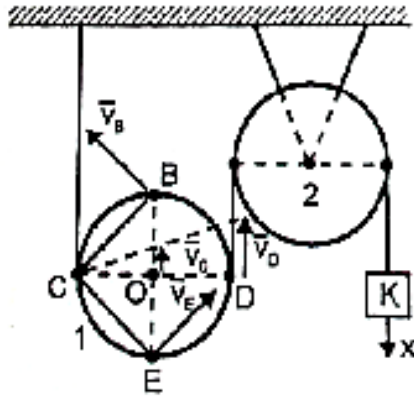
Угловая скорость вращения колеса вокруг МЦС:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{u}{R - r}.$$

Тогда, скорость движения оси катушки v :

$$v = \omega \cdot OP = \omega \cdot R = u \frac{R}{R - r}.$$

Задача 16.33: Подвижный блок 1 и неподвижный блок 2 соединены нерастяжимой нитью. Груз K, прикрепленный к концу этой нити, опускается по вертикали вниз по закону $x=2t^2$ м. Определить скорости точек C, D, B и E, лежащих на ободе подвижного блока, в момент $t=1$ с в положении, указанном на рисунке, если радиус подвижного блока 1 равен 0,2 м, а $CD \perp BE$. Найти также угловую скорость блока 1.



Ответ: $v_C = 0$, $v_0 = 2$ м/с, $v_B = v_E = 2\sqrt{2}$ м/с, $\omega = 10$ рад/с.

Решение:

Точка C – мгновенный центр скоростей, тогда $v_C = 0$.

$$v_K = v_D = \dot{x} = 4t = 4 \text{ м/с},$$

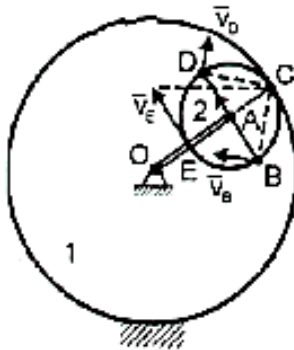
$$\omega = \frac{v_D}{2r} = \frac{4}{0,4} = 10 \text{ рад/с}.$$

Точка B – мгновенный центр вращения шатуна AB.

$$v_B = v_E = \omega \cdot r \sqrt{2} = 10 \cdot 0,2 \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ м/с},$$

$$v_0 = \omega \cdot r = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ м/с}.$$

Задача 16.37: Кривошип $OA=20\text{см}$ вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярно плоскости рисунка, с угловой скоростью 2рад/с . На его конец A насажена шестеренка 2 радиуса 10 см , находящаяся во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 1, соосным с кривошипом OA . Определить скорости точек B, C, D и E , лежащих на ободе шестеренки 2, если BD перпендикулярно OC



$$v_A = AO\omega_{OA} = 40\text{см/с}$$

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AC} = \frac{40}{10} = 4\text{см/с}$$

$$v_E = EC\omega_2 = 20 \cdot 4 = 80\text{см/с}$$

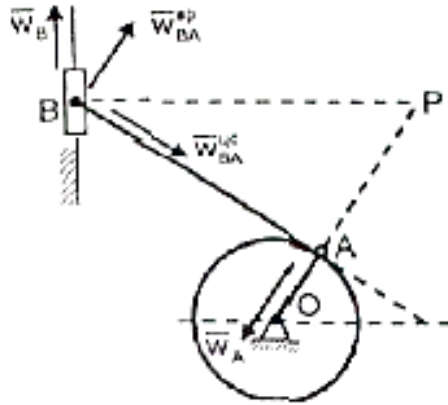
$$v_D = v_B = \omega_2 DC = \omega_2 BC = \omega_2 10\sqrt{2} =$$

$$= 4 \cdot 10\sqrt{2} = 40\sqrt{2}\text{см/с}$$

$$v_C = 0$$

Т.к. т.С- мгновенный центр скоростей

Задача 18.11: Кривошип ОА длины 20 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10 \text{ рад/с}$ и приводит в движение шатун АВ длины 100 см; ползун В движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна В в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$



$$\frac{v_A}{AP_{AB}} = AO \cdot \omega_0 = 200 \text{ см/с}$$

$$\frac{AO \cdot \omega_0}{AB} = \omega_{AB}$$

$$\frac{20 \cdot 10}{100} = \omega_{AB} = 2 \text{ рад/с}$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 200\sqrt{2} \text{ см/с}$$

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA} = \omega_A^u + \omega_{BA}^u + \omega_{BA}^{6p}$$

$$0 = -AO \cdot \omega_0^2 \cos \alpha + AB \cdot \omega_{AB}^2 \sin \alpha + AB \varepsilon_{AB} \cos \alpha$$

$$\omega_B = -AO \omega_0^2 \sin \alpha - AB \cdot \omega_{AB}^2 \cos \alpha + AB \varepsilon_{AB} \sin \alpha$$

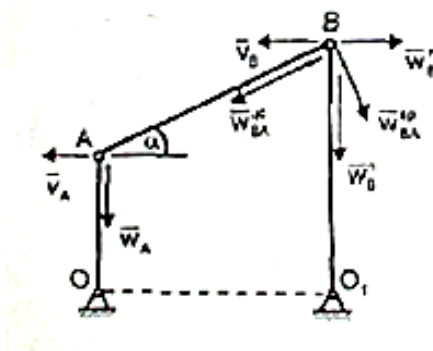
$$\varepsilon_{AB} = \frac{-AB \omega_{AB}^2 + AO \omega_0^2}{AB} = \frac{-100 \cdot 4 + 20 \cdot 100}{100} =$$

$$= 20 - 4 = 16 \text{ рад/с}^2$$

$$\omega_B = 20 \cdot 100 \frac{\sqrt{2}}{2} - 100 \cdot 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 100 \cdot 16 \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 50\sqrt{2}(-20 - 4 + 16) = -400\sqrt{2} = -565.68$$

Задача 18.13: Стержень OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, а также ускорение шарнира B в положении, указанном на рисунке, если $AB=2OA=2a$



$$\alpha = 30$$

$$\omega_{AB} = 0$$

$$v_B = v_A = \omega \cdot a$$

$$\omega_{BA}^{uc} = 0$$

$$\omega_B^{\tau} + \omega_B^n = \omega_A^{\tau} + \omega_{BA}^{ep}$$

$$\omega_B^n = v_B^2 / BO_1 = \omega^2 a / 2$$

$$\omega_A = \omega^2 a, \omega_B^{\tau} = dv_B / dt$$

$$w_{BA}^{ep} = \varepsilon_{AB} \cdot AB = \varepsilon_{AB} \cdot 2a$$

Проектируя на BO_1 , получим

$$\omega^2 a / 2 = \omega^2 a + \varepsilon_{AB} \cdot 2a \cdot \cos 30$$

Откуда

$$\varepsilon_{AB} = -\frac{\omega^2 \sqrt{3}}{6}$$

Проекция на перпендикуляр к BO_1 дает

$$w_B^{\tau} = w_{BA}^{ep} \cdot \sin 30 = -\frac{\omega^2 a \sqrt{3}}{6}$$

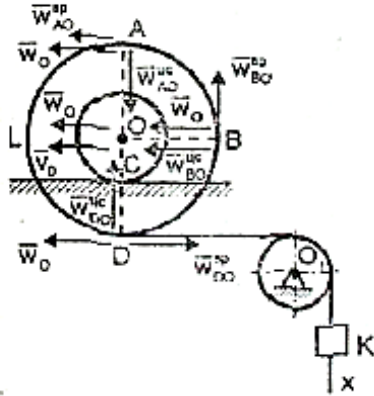
$$w_B = \sqrt{(w_B^{\tau})^2 + (w_B^n)^2} = \frac{\omega^2 a \sqrt{3}}{3}$$

Задача 18.26 Груз К, связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой L, опускается вертикально вниз по закону $x = t^2$ м. При этом катушка L катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить ускорения точек А, В и D лежащих на ободе катушки, её угловую скорость и угловое ускорение в момент

$$AD \perp OB$$

времени $t = 0.5$ с в положении, указанном на рисунке $OD = 2$

$$OC = 0.2 \text{ м}$$



$$v_D = v_K = \dot{x} = 2t = 2 \cdot 0.5 = 1 \text{ м/с}$$

$$a_K = \ddot{x} = 2 \text{ м/с}^2$$

$$\omega = \frac{v_D}{R} = 10$$

$$\varepsilon = \frac{a_D^T}{R} = 20$$

$$a_0 = \varepsilon \cdot CO = 20 \cdot 0.1 = 2 \text{ м/с}^2$$

$$a_{DO}^n = a_{BO}^n = a_{BO}^n = \omega^2 \cdot OB = 10^2 \cdot 0.2 = 20 \text{ м/с}^2$$

$$a_{DO}^T = a_{AO}^T = a_{BO}^T = \varepsilon \cdot OB = 20 \cdot 0.2 = 4 \text{ м/с}^2$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_0 + \vec{a}_{AO} + \vec{a}_{AO}$$

$$a_{Dx} = -a_0 - a_{AO}^T = -2 - 4 = -6 \text{ м/с}^2$$

$$a_{Dy} = -a_{AO}^n = -20 \text{ м/с}^2$$

$$a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2} = 20.88 \text{ м/с}^2$$

аналогично

$$a_{Bx} = -a_0 - a_{BO}^n = -2 - 20 = -22 \text{ м/с}^2$$

$$a_{By} = a_{BO}^T = 4 \text{ м/с}^2$$

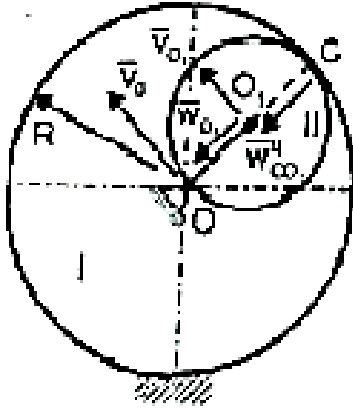
$$a_B = 22.36 \text{ м/с}^2$$

$$a_{Dx} = -a_0 + a_{DO}^T = -2 + 4 = 2 \text{ м/с}^2$$

$$a_{Dy} = a_{DO}^n = 20 \text{ м/с}^2$$

$$a_D = 20.1 \text{ м/с}^2$$

Задача 18.29: Найти положение мгновенного центра ускорений и скорость v_k точки фигуры, совпадающей с ним в данный момент, а также ускорение ω_c точки фигуры, с которой в данный момент совпадает мгновенный центр скоростей, если шестеренка I радиуса r катится внутри неподвижного колеса 2 радиуса $R=2r$ и кривошип OO_1 , приводящий в движение бегающую шестеренку, имеет постоянную угловую скорость ω_0



Точка “С” – мгновенный центр скоростей, тогда угловая скорость колеса 1 будет

$$\omega = \frac{\omega_0 r}{r} = \omega_0 \text{ т.к. } \omega = \text{const}, \text{ то } \varepsilon = 0 \text{ тогда } tgM = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega_0^2} = 0$$

Ускорение точки O_1 будет $a_{01} = \frac{v_{01}^2}{r} = \omega_0^2 r$ и направлено от точки “ O_1 ” к “О”

Т.к. $M=0$ то отложим от точки O_1 отрезок равный $\frac{a_{01}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega_0^4}} = \frac{\omega_0^2 r}{\sqrt{\omega_0^4}} = r$

Т.е. точка “О” будет мгновенным центром ускорений

Скорость этой точки будет $v_0 = 2r\omega_0$

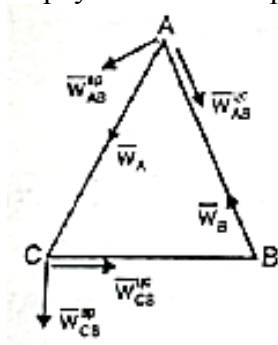
Ускорение точки С (мгновенный центр скоростей) определены уравнением

$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{a}_{co}^i + a_{co}^n$$

$$\text{т.к. } \vec{a}_{co}^i = \varepsilon \cdot CO = 0$$

$$\text{то } a_{co}^n = 2r\omega_0^2$$

Задача 18.38: Равносторонний треугольник ABC движется в плоскости рисунка. Ускорение вершин A и B в данный момент времени равны 16 см/с^2 и направлены по сторонам треугольника. Определить ускорение третьей вершины C треугольника.



Определим положение мгновенного центра ускорений, для этого найдем величины угловой скорости ω и углового ускорения ε .

Выберем за полюс точку B, тогда

$$\vec{w}_A = \vec{w}_B + \vec{w}_{AB}^{sp} + \vec{w}_{AB}^{oc}$$

Проекция на AB:

$$-w_A \cos 60 = w_B - w_{AB}^{oc}$$

$$w_{AB}^{oc} = w_B + w_A \cos 60 = 16 + 8 = 24$$

$$w_{AB}^{oc} = \omega^2 \cdot AB,$$

т.к. $AB = a$

$$\omega = \sqrt{\frac{w_{AB}^{oc}}{a}} = \sqrt{\frac{24}{a}} \text{ рад/с}$$

Проекция на перпендикуляр к AB:

$$w_A \cos 30 = w_{AB}^{sp}$$

$$w_{AB}^{sp} = \frac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ см/с}$$

$$w_{AB}^{sp} = \varepsilon \cdot AB$$

$$\varepsilon = \frac{w_{AB}^{sp}}{AB} = \frac{8\sqrt{3}}{a} \text{ рад/с}^2$$

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{8\sqrt{3} \cdot a}{24 \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Откладывая под углом $\alpha = 30^\circ$ к ускорениям w_A и w_B прямые, найдем точку их пересечения.

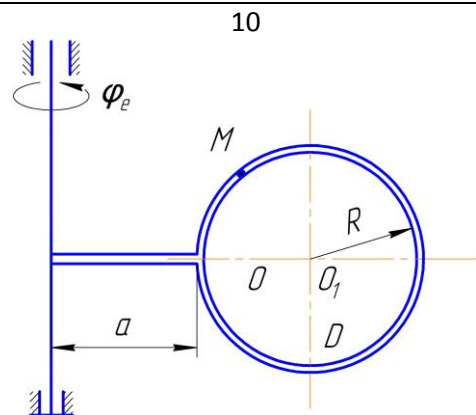
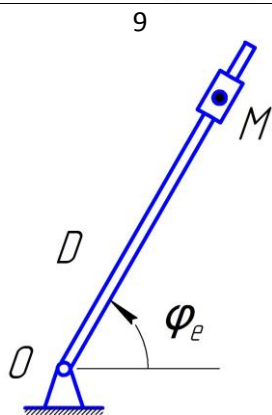
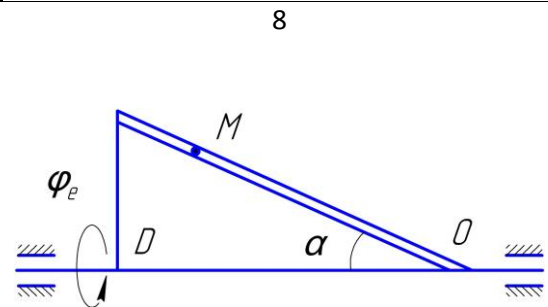
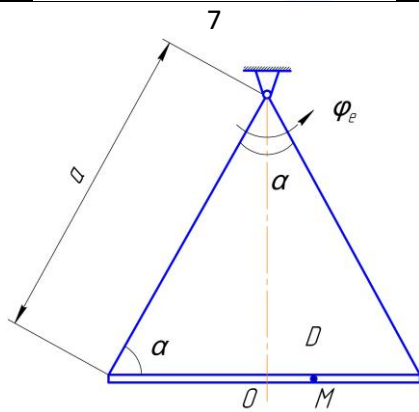
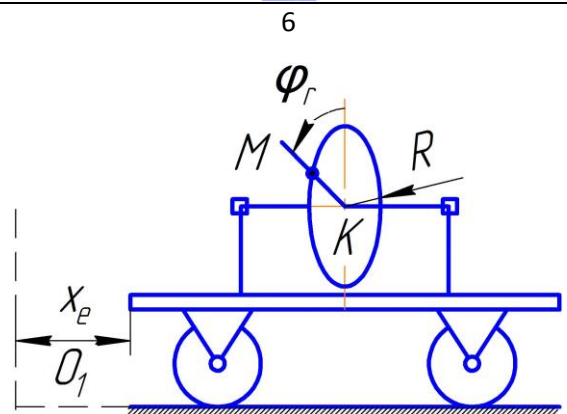
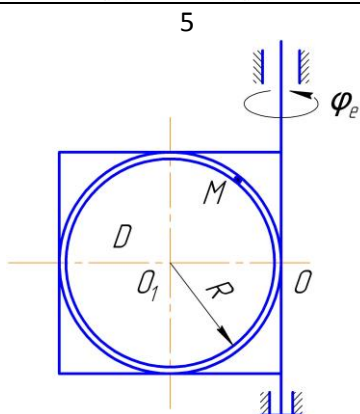
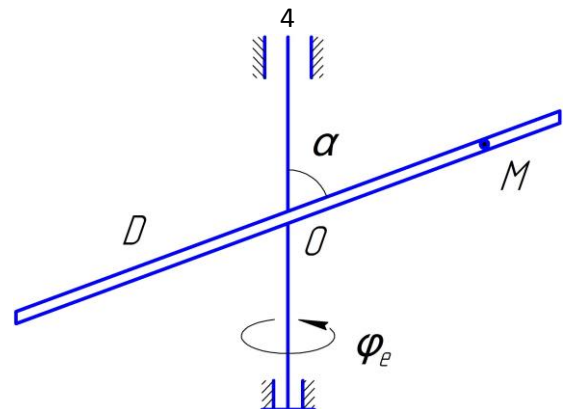
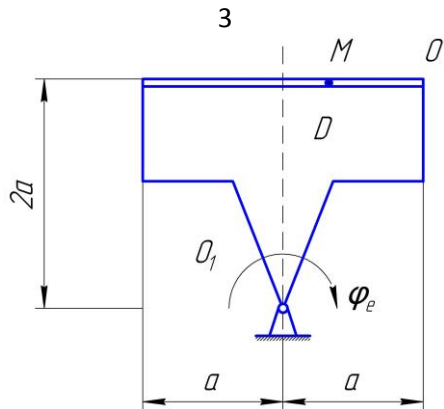
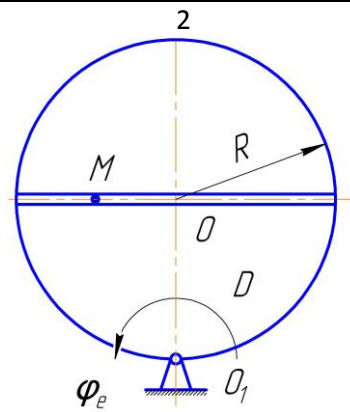
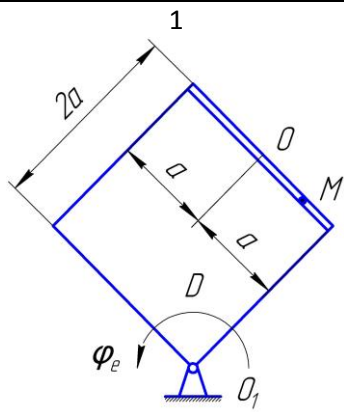
Это будет мгновенный центр ускорений – точка Q.

поскольку треугольник ABC – равносторонний, точка Q совпадает с центром треугольника и $AQ=BQ=CQ$, поэтому

$$w_c = CQ \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} = w_A = 16 \text{ см/с}^2$$

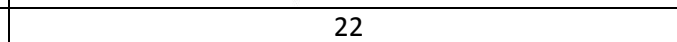
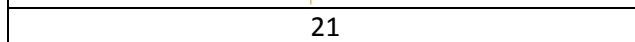
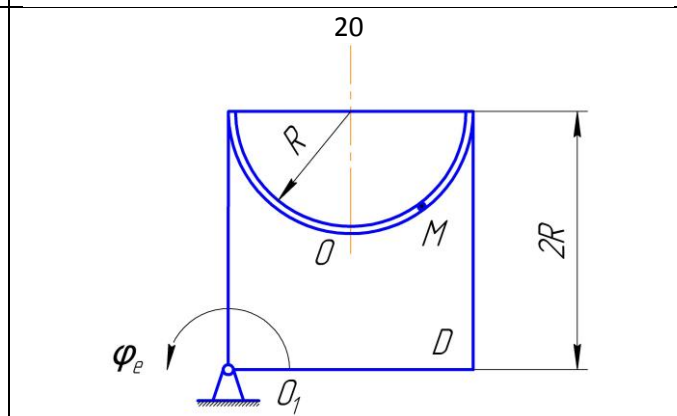
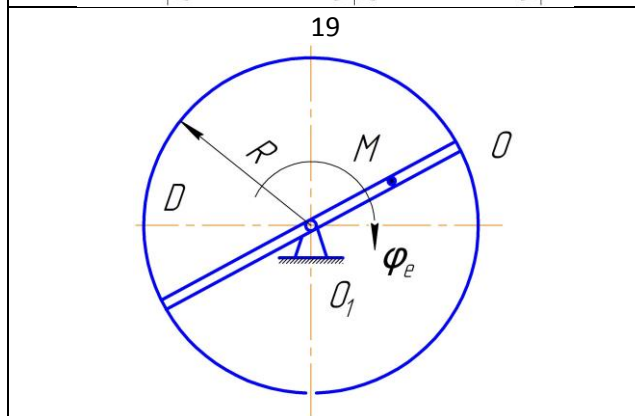
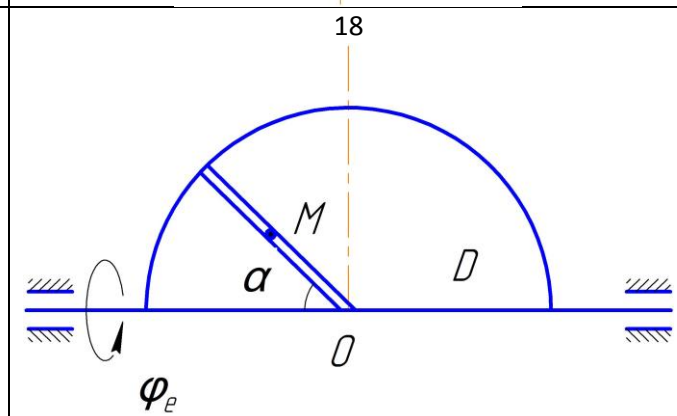
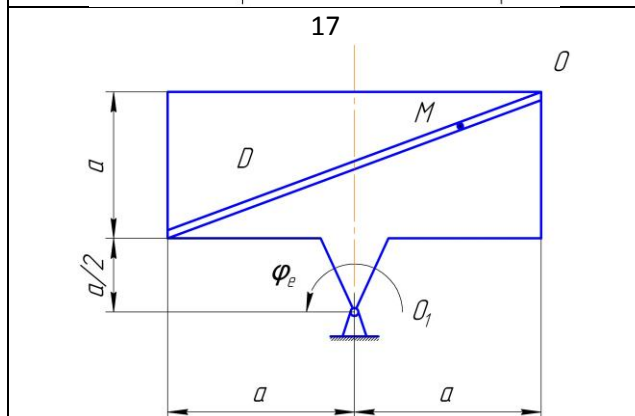
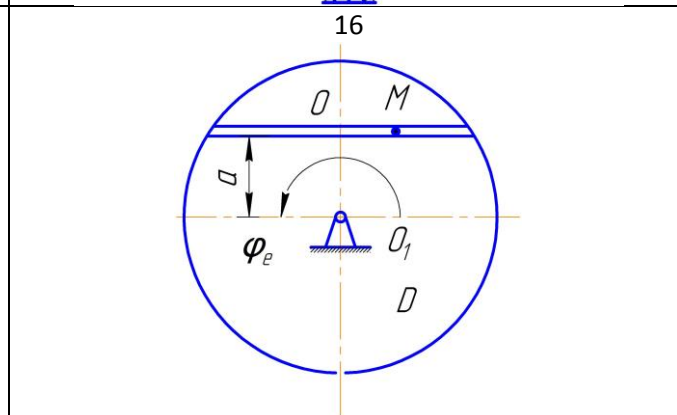
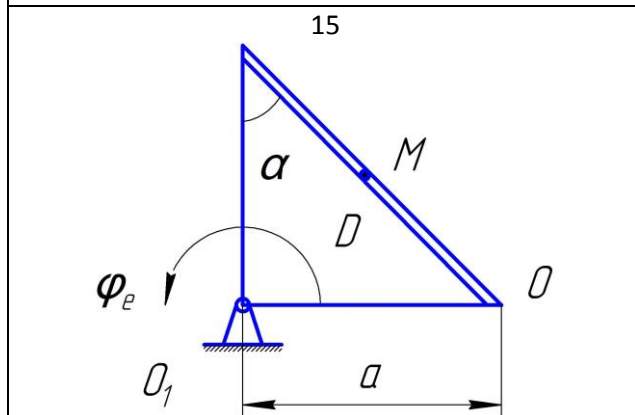
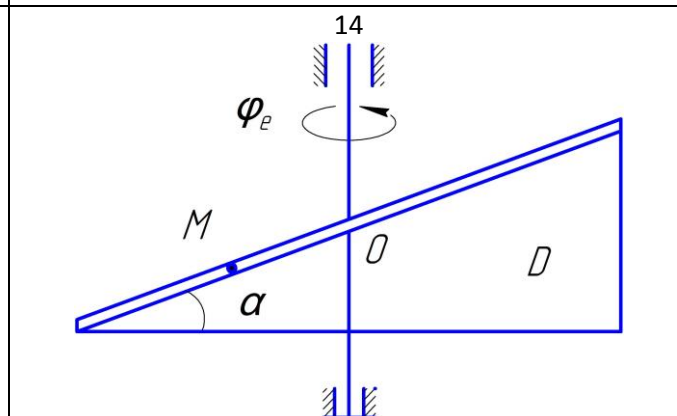
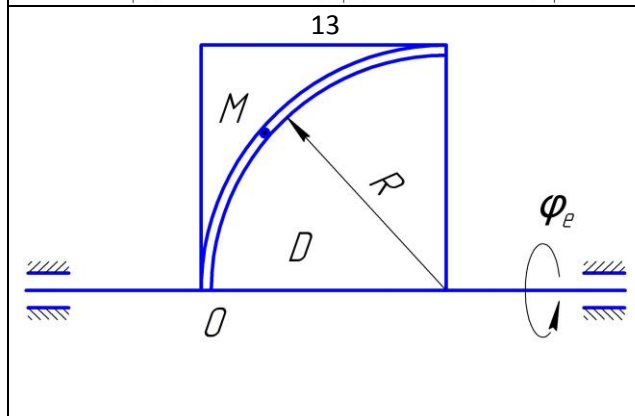
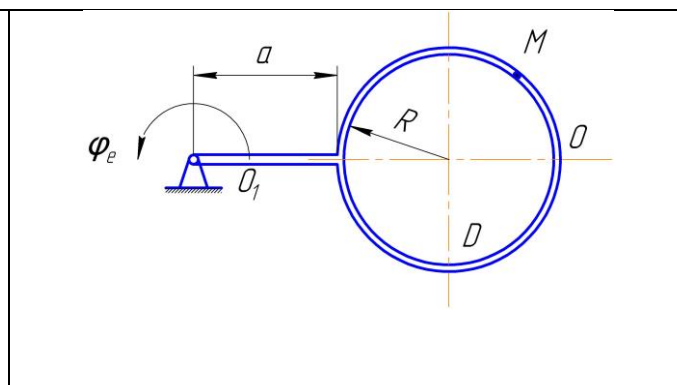
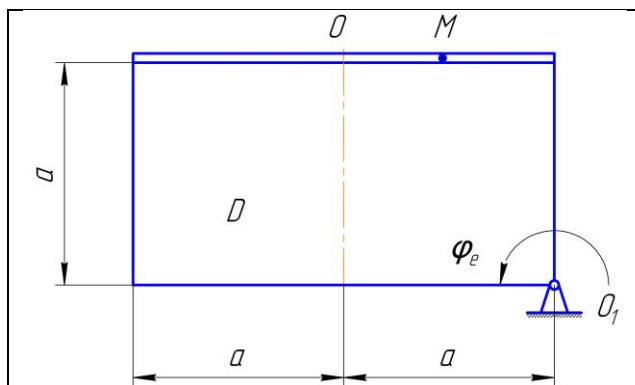
Направление w_c можно определить, откладывая угол α от мгновенного радиуса CQ в сторону, противоположную вращению. Поэтому w_c направлено от C к B.

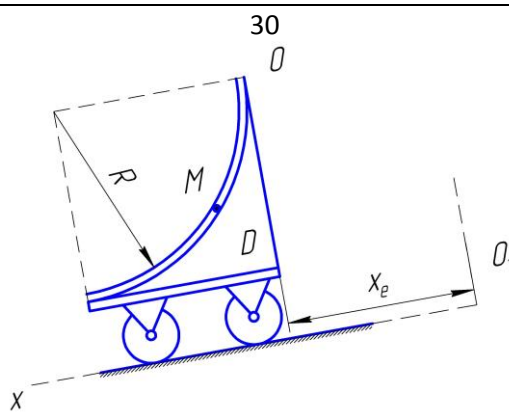
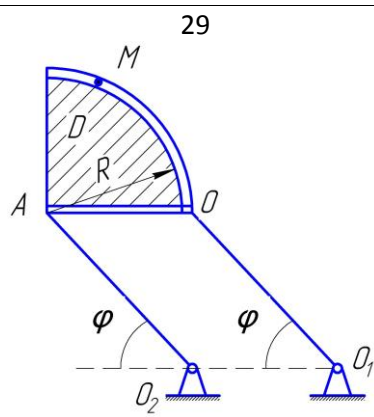
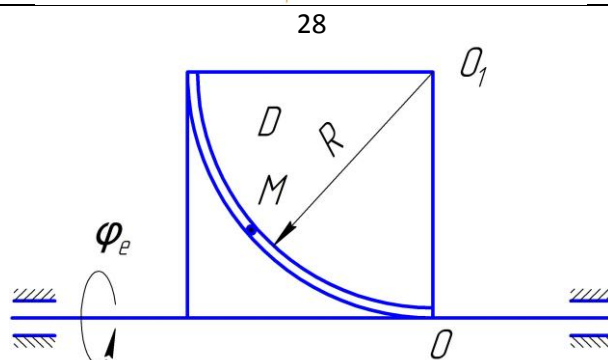
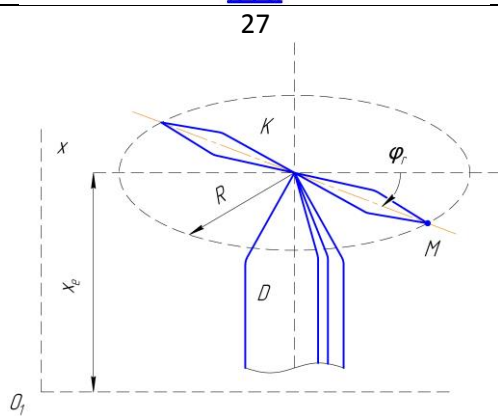
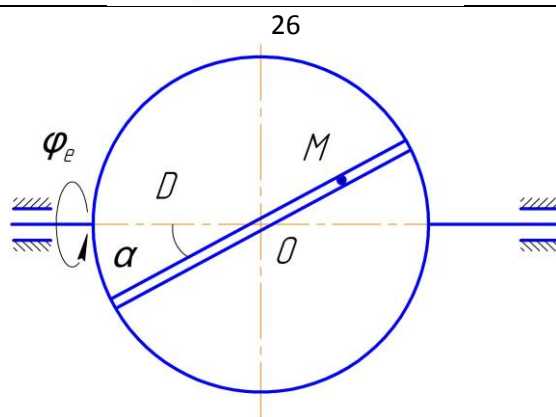
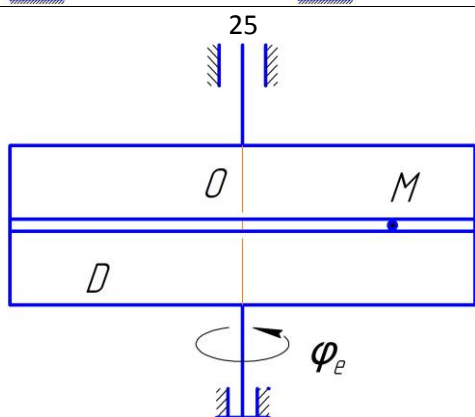
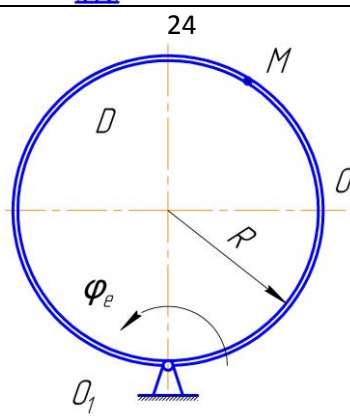
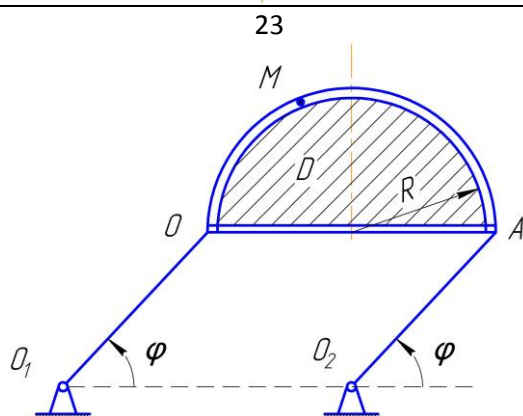
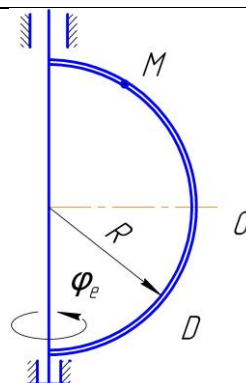
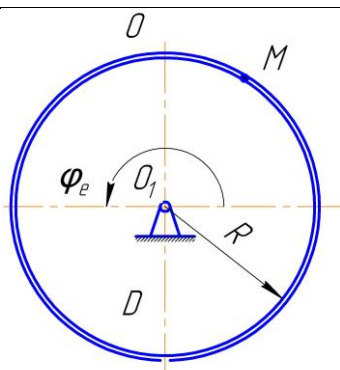
Ответ: $w_c = 16 \text{ см/с}^2$



11

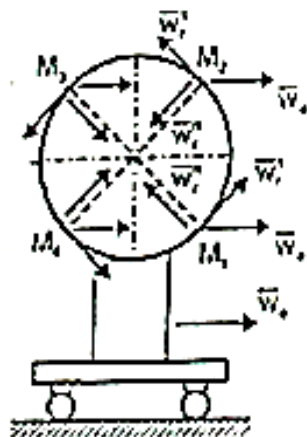
12





Задача 23.8: Тележка, на которой установлен мотор, движется по горизонтали

вправо с постоянным ускорением $w = 0.4 \text{ м/с}^2$. Мотор вращается по закону $\varphi = \frac{1}{2}t^2$. Определить абсолютное ускорение в момент $t=1$ с четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 ротора, отстоящих от оси ротора на расстоянии $l = 0.2\sqrt{2} \text{ м}$ и занимающих в этот момент положение, указанное на рисунке.



$$OM_1 = OM_2 = OM_3 = OM_4 = l = 0.2\sqrt{2}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = t \text{ с}^{-1}$$

$$v = \omega l = 0.2t$$

Используем теорему о сложении ускорений:

$$\bar{w} = \bar{w}_0 + \bar{w}_n + \bar{w}_\tau \quad (1)$$

$$w_n = \omega^2 \cdot l = 0.2\sqrt{2} \text{ м/с}^2$$

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0.2\sqrt{2} \text{ м/с}^2$$

1 положение: Спроектируем (1) на ось x и y , получим

$$w_x = w_0 - w_n \cos 45^\circ + w_\tau \cos 45^\circ$$

$$w_y = w_n \sin 45^\circ + w_\tau \sin 45^\circ$$

$$w_x = 0.4 - 0.2\sqrt{2} \cos 45^\circ + 0.2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 0.4 \text{ м/с}^2$$

$$w_y = 0.2\sqrt{2} \sin 45^\circ + 0.2\sqrt{2} \sin 45^\circ = 0.4 \text{ м/с}^2$$

$$w_1 = \sqrt{w_{1x}^2 + w_{1y}^2} = 0.4\sqrt{2} \text{ м/с}^2$$

2 положение: Сумма векторов будет равна нулю

$$w_x = w_0 - w_n \cos 45^\circ - w_\tau \cos 45^\circ$$

$$w_x = 0.4 - 0.2\sqrt{2} \cos 45^\circ - 0.2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 0$$

$$w_y = w_\tau \cos 45^\circ - w_n \cos 45^\circ = 0$$

$$w_2 = \sqrt{w_{2x}^2 + w_{2y}^2} = 0$$

3 положение: Спроектируем (1) на ось x и y , получим

$$w_x = w_0 - w_n \cos 45^\circ + w_\tau \cos 45^\circ$$

$$w_y = w_n \sin 45^\circ + w_\tau \sin 45^\circ$$

$$w_x = 0.4 - 0.2\sqrt{2}\cos 45 + 0.2\sqrt{2}\cos 45 = 0.4 \text{ м/с}^2$$

$$w_y = 0.2\sqrt{2}\sin 45 + 0.2\sqrt{2}\sin 45 = 0.4 \text{ м/с}^2$$

$$w_3 = \sqrt{w_{1x}^2 + w_{1y}^2} = 0.4\sqrt{2} \text{ м/с}^2$$

4 положение:

$$w_x = w_0 + w_n \cos 45 + w_\tau \cos 45$$

$$w_y = w_n \cos 45 - w_\tau \cos 45$$

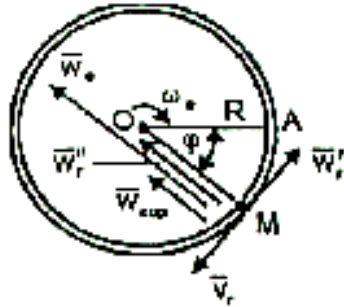
$$w_x = 0.4 + 0.2\sqrt{2}\cos 45 + 0.2\sqrt{2}\cos 45 = 0.8 \text{ м/с}^2$$

$$w_y = 0.2\sqrt{2}\sin 45 - 0.2\sqrt{2}\sin 45 = 0$$

$$w_4 = \sqrt{w_{1x}^2 + w_{1y}^2} = 0.8 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $w_1 = w_3 = 0.4\sqrt{2} \text{ м/с}^2$, $w_2 = 0$, $w_4 = 0.8 \text{ м/с}^2$

Задача 23.13: Круглая трубка радиуса $R=1$ м вращается вокруг горизонтальной оси O по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью $\omega=1$ рад/с. В трубке около ее точки A колеблется шарик M , причем так, что угол $\varphi=\sin \pi t$. Определить абсолютные ускорения шарика: касательное w_τ и нормальное w_n в момент $t=2\frac{1}{6}$ с.



Ответ: $w_\tau = -4,93$ м/с², $w_n = 13,84$ м/с².

Решение:

$$v_r = \dot{S}_r = R\pi \cos \pi t,$$

$$w_r = \ddot{S}_r = -R\pi^2 \sin \pi t,$$

$$t = 2\frac{1}{6} \text{ с},$$

$$v_r = 2,72 \text{ м/с},$$

$$w_r = -4,93 \text{ м/с}^2,$$

$$w_e^n = \omega_e^2 \cdot R = 1^2 \cdot 1 = 1 \text{ м/с}^2,$$

$$w_e^\tau = 0, \text{ т.к. } \varepsilon_e = 0,$$

$$w_c = 2v_r\omega_e = 2 \cdot 2,72 \cdot 1 = 5,44 \text{ м/с}^2,$$

$$w_r^n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{2,72^2}{1} = 7,4 \text{ м/с}^2,$$

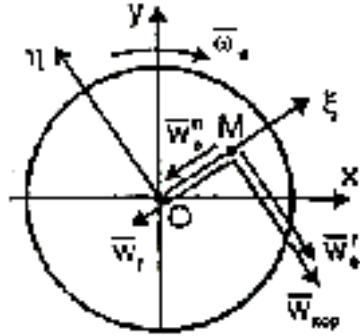
$$\vec{w} = \vec{w}_r^n + \vec{w}_e^n + \vec{w}_c + \vec{w}_r,$$

$$w = \sqrt{(w_c + w_r^n + w_e^n)^2 + w_r^2} = \sqrt{(5,44 + 7,4 + 1)^2 + 4,93^2} = 14,69 \text{ м/с}^2,$$

$$\text{Таким образом, } w_n = w_c + w_r^n + w_e^n = 5,44 + 7,4 + 1 = 13,84 \text{ м/с}^2,$$

$$w^\tau = w_r = -4,93 \text{ м/с}^2.$$

Задача 23.14: Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска, по часовой стрелке равноускоренно с угловым ускорением 1 рад/с^2 ; в момент $t=0$ угловая скорость его равна нулю. По одному из диаметров диска колеблется точка M так, что ее координата $\xi = \sin \pi t$ м, причем t — в секундах. Определить в момент $t = 1\frac{2}{3}$ с проекции абсолютного ускорения точки M на оси ξ, η , связанные с диском.



Ответ: $w_\xi = 10,95 \text{ м/с}^2$, $w_\eta = -4,37 \text{ м/с}^2$.

Решение:

$$\omega_0 = 0,$$

$$\xi = \sin \pi t,$$

$$v_r = \dot{\xi} = \pi \cos \pi t,$$

$$w_r = \ddot{\xi} = -\pi^2 \sin \pi t.$$

В момент времени $t = 1\frac{2}{3}$:

$$\xi = \sin \frac{5\pi}{3} = -0,866 \text{ м.}$$

Относительная скорость:

$$v_r = \pi \cos \frac{5\pi}{3} = 1,57 \text{ м/с.}$$

Относительное ускорение:

$$w_r = -\pi^2 \sin \frac{5\pi}{3} = -8,538 \text{ м/с}^2.$$

$$\omega = \varepsilon t - t = \frac{5}{3} \text{ рад/с.}$$

Переносные нормальное и тангенциальное ускорения:

$$w_e^n = \omega^2 \cdot \xi = \frac{25}{9} \cdot 0,866 = 2,405 \text{ м/с}^2,$$

$$w_e^\tau = \varepsilon \cdot \xi = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ м/с}^2.$$

Кориолисово ускорение:

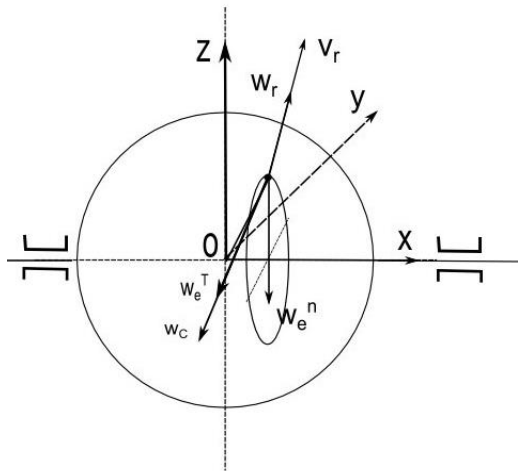
$$w_c = 2\omega_e \cdot v_r = 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 1,57 = 5,23 \text{ м/с}^2,$$

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e^n + \vec{w}_e^\tau + \vec{w}_c$$

$$w_\eta = w_e^\tau - w_c = 0,866 - 5,23 = -4,364 \text{ м/с}^2,$$

$$w_\xi = w_r + w_e^n = 8,538 + 2,405 = 10,943 \text{ м/с}^2.$$

Задача 23.27: По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с в направлении от центра диска к его ободу движется точка М по закону $OM = 4t^2$ см. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60° . Определить величину абсолютного ускорения точки М в момент $t=1$ с.



Относительное движение:

Скорость точки М в относительном движении

$$v_r = \frac{d(OM)}{dt} = 8t$$

при $t = 1$ с, $v_{r1} = 8$ см/с

Переносное движение:

т.к. переносное движение является вращательным, то ускорение состоит из w_e^n и

w_e^τ

при $t = 1$, $\omega = 2$ с⁻¹

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ с}^{-2}$$

$$w_e^n = \omega^2 \cdot OM \cdot \sin 60$$

$$w_e^n = 8\sqrt{3} \text{ см/с}^2$$

$$w_e^\tau = \varepsilon \cdot OM \cdot \sin 60$$

$$w_e^\tau = 4\sqrt{3} \text{ см/с}^2$$

Кориолисово ускорение

$$w_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$$

$$w_c = 2\omega \cdot v_{r1} \cdot \sin 60 = 16\sqrt{3} \text{ см/с}^2$$

Найдем проекции абсолютного ускорения на оси координат

$$w_x = w_r \cdot \cos 60 = 8 \cdot 0.5 = 4 \text{ см/с}^2$$

$$w_y = w_e^\tau + w_c = 4\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ см/с}^2$$

$$w_z = w_r \cdot \sin 60 - w_e^n = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} - 8\sqrt{3} = -4\sqrt{3} \text{ см/с}^2$$

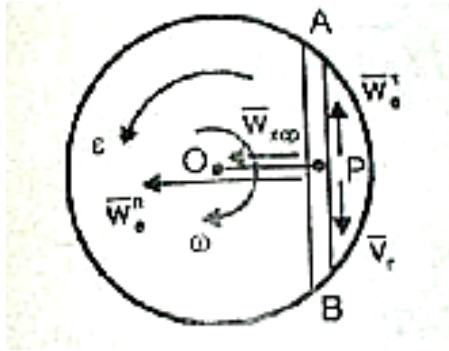
Абсолютное ускорение

$$w_M = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

$$w_M = \sqrt{16 + 400 \cdot 3 + 16 \cdot 3} = 35.56 \text{ см/с}^2$$

Ответ: $w_M = 35.56 \text{ см/с}^2$

Задача 23.36: Шарик P движется со скоростью $1,2 \frac{M}{C}$ от A до B по хорде AB диска, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Найти абсолютное ускорение шарика, когда он находится на кратчайшем расстоянии от центра диска, равном 30см . В этот момент угловая скорость диска равна $3 \frac{rad}{C}$, угловое замедление равно $8 \frac{rad}{C^2}$.



$$\bar{w} = \bar{w}_e^n + \bar{w}_e^\tau + \bar{w}_{kop}$$

$$\bar{w}_e^n = OP \cdot \omega_e^2 = 30 \cdot 9 = 270 \frac{CM}{C^2} = 2,7 \frac{M}{C^2}$$

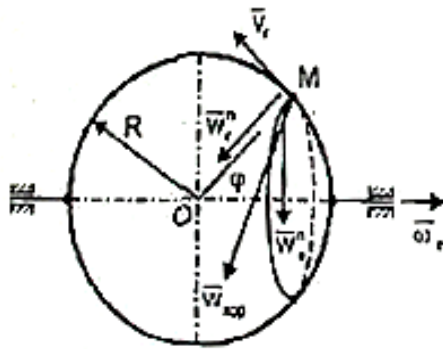
$$\bar{w}_e^\tau = OP \cdot \epsilon_e = 30 \cdot 8 = 240 \frac{CM}{C^2} = 2,4 \frac{M}{C^2}$$

$$\bar{w}_{kop} = 2 \cdot \omega_e \cdot w_r = 2 \cdot 3 \cdot 1,2 = 7,2 \frac{M}{C^2}$$

$$W = \sqrt{(w_e^n + w_{kop})^2 + (w_e^\tau)^2} = 10,18 \frac{CM}{C^2}$$

Ответ: $W = 10,18 \frac{CM}{C^2}$

Задача 23.41: По ободу диска радиуса R , вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω , движется с постоянной по модулю скоростью v точка M . Найдём абсолютное ускорение точки M как функцию угла φ , составленного радиус-вектором точки с осью вращения диска.



$$\vec{W}_A = \vec{w}_r^n + \vec{w}_e^n + \vec{w}_{\text{кор}}$$

$$w_r^n = \frac{v^2}{R}$$

$$w_e^n = \omega^2 \cdot R \cdot \sin \varphi$$

$$w_{\text{кор}} = 2\omega \cdot v \cdot \cos \varphi$$

$$w_x = w_r^n \cdot \cos \varphi = \frac{v^2 \cdot \cos \varphi}{R}$$

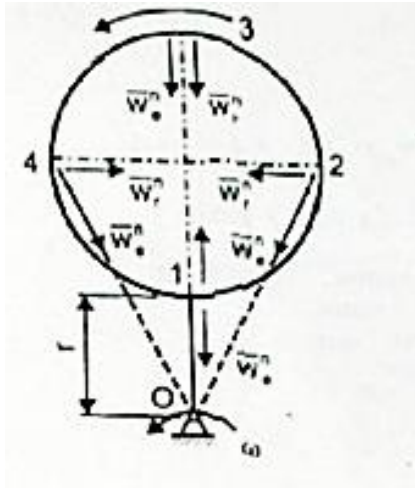
$$w_y = w_r^n \cdot \sin \varphi + w_e^n = \left(\frac{v^2}{R} + \omega^2 R \right) \cdot \sin \varphi$$

$$w_z = w_{\text{кор}} = 2\omega \cdot v \cdot \cos \varphi$$

$$W_A = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \omega^4 \cdot R^2 \cdot (\sin \varphi)^2 + 2\omega^2 \cdot v^2 (1 + (\cos \varphi)^2)}$$

$$\text{ОТВЕТ: } W_A = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \omega^4 \cdot R^2 \cdot (\sin \varphi)^2 + 2\omega^2 \cdot v^2 (1 + (\cos \varphi)^2)}$$

Задача 23.47: Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом АВ, и притом так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки с постоянной относительной скоростью u . Вал АВ вращается по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от А к В. Угловая скорость вала ω постоянна. Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках 1, 2, 3 и 4.



$$\bar{w} = \bar{w}_e^n + \bar{w}_c + \bar{w}_r^n$$

$$\bar{w}_e^n = r\omega^2$$

$$w_c = 0$$

$$w_r^n = \frac{u^2}{r}$$

$$w = r\omega^2 - \frac{u^2}{r}$$

$$2) w_c : 2u\omega$$

$$w_r^n = u^2 / r$$

$$w_e^n = 2\omega^2 r$$

$$\bar{w}_c \perp \bar{w}_r^n \perp \bar{w}_e^n$$

$$w = \sqrt{w_c^2 + w_r^{n2} + w_e^{n2}} = \sqrt{4u^2\omega^2 + u^2 / r^2 + 4\omega^4 r^2} =$$

$$= \frac{u^2}{r} + 2\omega^2 r$$

$$3) w_c = 0 \quad w_r^n = \frac{u^2}{r} \quad w_e^n = 3r\omega^2$$

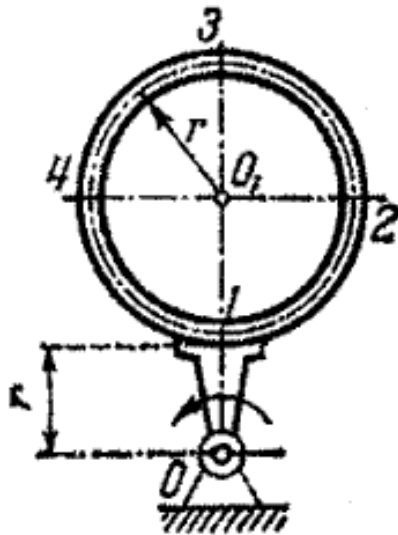
$$w = w_r^n + w_e^n = \frac{u^2}{r} + 3r\omega^2$$

$$w_n = 2\omega n \quad w_r^n = \frac{u^2}{r} \quad w_e^n = 2\omega^2 r$$

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_k^2 + (w_r^n)^2 + (w_e^n)^2} = \sqrt{4u^2\omega^2 + \frac{u^4}{r^2} + 4\omega^4 r^2} = \\ &= \frac{u^2}{r} + 2\omega^2 r \end{aligned}$$

Задача 23.48: По условиям предыдущей задачи(23.47), измененным лишь в том отношении, что плоскость оси кольца теперь перпендикулярна оси угла АВ, определить те же величины в двух случаях:

- 1) переносное и относительно движение одного направления
- 2) составляющие движения противоположны по направлению



1)

$$W_{a1} = W_{a1y} = W_{nep} - W_{отн} - W_k = \omega^2 r - \frac{u^2}{r} - 2u\omega;$$

$$W_{a3} = W_{a3y} = W_{nep3} + W_{отн} + W_k = 3\omega^2 r + \frac{u^2}{r} + 2u\omega$$

$$W_{a2x} = -W_{a4x} = W_{nep2} \frac{r}{\sqrt{(2r)^2 + r^2}} + W_{отн} + W_k = \omega^2 r + \frac{u^2}{r} + 2u\omega$$

$$W_{a2y} = W_{a4y} = W_{nep2} \frac{2r}{r\sqrt{5}} = 2\omega^2 r$$

$$W_{a2} = W_{a4} = \sqrt{W_{a2x}^2 + W_{a2y}^2} = \sqrt{\left(\frac{u^2}{r} + 2\omega u + \omega^2 r\right)^2 + 4\omega^4 r^2}$$

2)

$$W_{a1} = W_{a1y} = W_{nep1} - W_{omh} + W_k = \omega^2 r - \frac{u^2}{r} + 2u\omega;$$

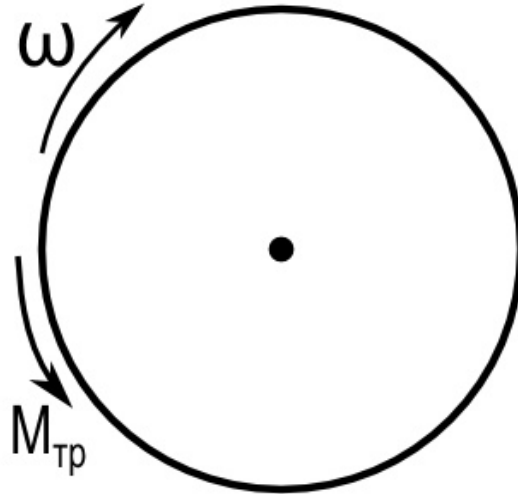
$$W_{a3} = W_{a3y} = W_{nep3} + W_{omh} - W_k = 3\omega^2 r + \frac{u^2}{r} - 2u\omega$$

$$W_{a2x} = -W_{a4x} = W_{nep2} \frac{r}{\sqrt{(2r)^2 + r^2}} + W_{omh} - W_k = \omega^2 r + \frac{u^2}{r} - 2u\omega$$

$$W_{a2y} = W_{a4y} = W_{nep2} \frac{2r}{r\sqrt{5}} = 2\omega^2 r$$

$$W_{a2} = W_{a4} = \sqrt{W_{a2x}^2 + W_{a2y}^2} = \sqrt{\left(\frac{u^2}{r} - 2\omega u + \omega^2 r\right)^2 + 4\omega^4 r^2}$$

Задача 37.5: Для определения момента трения в цапфах на вал насажен маховик массы 500кг ; радиус инерции маховика $\rho = 1,5\text{ м}$. Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая $n = 240 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$; предоставленный самому себе, он остановился через 10 мин. Определить момент трения, считая его постоянным.



Дифференциальное уравнение вращения

$$J \frac{d\omega}{dt} = -M_{\text{тр}} \quad (1)$$

Где $J = m \rho^2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $\omega = \frac{\pi n}{30}$

$M_{\text{тр}} = \text{const}$, тогда (1) будет иметь вид

$m \rho^2 \frac{d\omega}{dt}$ разделяя переменные и учитывая начальные условия, получим

$$\int_{\frac{\pi n}{30}}^0 d\omega = -\frac{M_{\text{тр}}}{m \rho^2} \int_0^{600} dt \text{ откуда } -\frac{\pi n}{30} = -\frac{M_{\text{тр}} \cdot 600}{m \rho^2} \text{ отсюда}$$

$$M_{\text{тр}} = \frac{\pi n m \rho^2}{30 \cdot 600} = \frac{\pi \cdot 240 \cdot 500 \cdot 1.5^2}{30 \cdot 600} = \frac{40\pi \cdot 1.5^2}{6} = 47.1 \text{ Нм}$$

Ответ: 47,1 Нм

Задача 37.7: Твёрдое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным M : при этом возникает момент сил сопротивления M_1 , пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твёрдого тела: $M_1 = \alpha \omega^2$. Найти закон изменения угловой скорости; момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения равен J .

Согласно теореме об изменении главного момента количества движения тела имеем дифференциальное уравнение вращательного движения относительно его неподвижной оси:

$J \cdot \frac{d\omega}{dt} = M - \alpha \omega^2$, где M - вращающий момент, $M_1 = \alpha \omega^2$ - момент сил сопротивления.

Для интегрирования уравнения разделим переменные

$$\frac{J d\omega}{\alpha \left(\frac{M}{\alpha} - \omega^2 \right)} = dt.$$

Получим:

$$\frac{J}{\alpha} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{M}} \ln \left| \frac{\sqrt{M/\alpha} + \omega}{\sqrt{M/\alpha} - \omega} \right|_0^\omega = t_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{J}{2\sqrt{\alpha M}} \left[-\ln 1 + \ln \left(\frac{\sqrt{M/\alpha} + \omega}{\sqrt{M/\alpha} - \omega} \right) \right] = t \Rightarrow \ln \left(\frac{\sqrt{M/\alpha} + \omega}{\sqrt{M/\alpha} - \omega} \right) = \frac{2\sqrt{\alpha} t}{J\sqrt{M}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \cdot \frac{e^{\frac{2\sqrt{\alpha M}}{J} t} - 1}{e^{\frac{2\sqrt{\alpha M}}{J} t} + 1}$$

Ответ: $\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \cdot \frac{e^{\frac{2\sqrt{\alpha M}}{J} t} - 1}{e^{\frac{2\sqrt{\alpha M}}{J} t} + 1}$

Задача 37.9: Шарик A , находящийся в сосуде с жидкостью и прикрепленный к концу стержня AB длины l , приводится во вращение вокруг вертикальной оси O_1O_2 с начальной угловой скоростью ω_0 . Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha m \omega$, где m - масса шарика, α - коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов n , которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебречь.

Дифференциальное уравнение движения шарика массы m

$$J \frac{d\omega}{dt} = -R \cdot l, \text{ где } J = m l^2, R = \alpha m \omega$$

$$\text{Тогда } m l^2 \frac{d\omega}{dt} = -\alpha m \omega l \text{ или } \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\alpha}{l} \omega.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$d\omega = -\frac{\alpha}{l} \omega dt \text{ или } \int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{l} \int_0^T dt \quad (1)$$

Тогда

$$\ln \frac{\omega_0}{\omega_0/2} = -\frac{\alpha}{l} T, \ln \frac{\omega_0}{\omega_0/2} - \ln \omega_0 = -\frac{\alpha}{l} T \text{ или } \ln \frac{\omega_0}{\omega_0/2} = -\frac{\alpha}{l} T$$

$$\text{Откуда } \ln 1 - \ln 2 = -\frac{\alpha}{l} T$$

$$\text{т.к. } \ln 1 = 0,$$

то будем иметь

$$-\ln 2 = -\frac{\alpha}{l} T,$$

откуда

$$T = \frac{l \cdot \ln 2}{\alpha}$$

Если уравнение (1) проинтегрировать в текущих переменных, то получим

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{l} \int_0^t dt, \text{ то}$$

$$\ln \omega - \ln \omega_0 = -\frac{\alpha}{l}t \text{ или } \ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{l}t, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = e^{-\frac{\alpha}{l}t} \text{ и } \omega = \omega_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{l}t},$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t}$$

$$\text{Откуда } \int_0^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{l}t} dt, \text{ откуда } \varphi = \omega_0 \left(-\frac{l}{\alpha} l^{-\frac{\alpha}{l}t} \right)^{\frac{1}{2} \ln 2} = \omega_0 \left(-\frac{l}{\alpha} e^{-\ln 2} + \frac{l}{\alpha} \right),$$

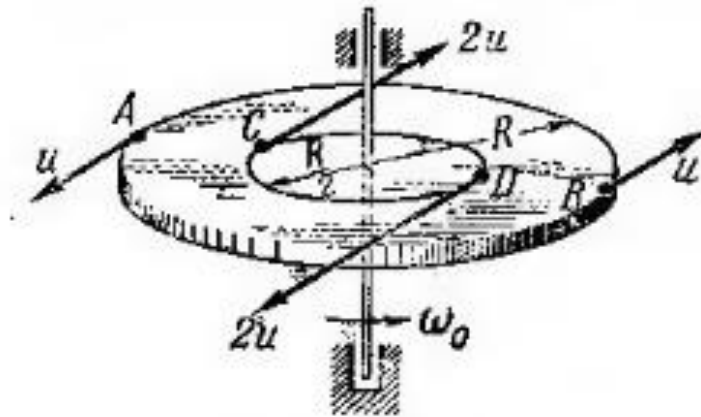
$$\text{откуда } \varphi = \frac{\omega_0 l}{\alpha} (1 - \ln 2) = \frac{\omega_0 l}{2\alpha}; \text{ тогда}$$

$$n = \frac{\varphi}{9\pi} = \frac{l \omega_0}{4\pi\alpha}$$

$$\text{Ответ: } T = \frac{l \cdot \ln 2}{\alpha}$$

$$n = \frac{l \omega_0}{4\pi\alpha}$$

Задача 37.53: Круглая горизонтальная платформа вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс, с постоянной угловой скоростью ω_0 ; при этом на платформе стоят четыре человека одинаковой массы: два — на краю платформы, а два — на расстояниях от оси вращения, равных половине радиуса платформы. Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной линейной скоростью u , а люди, стоящие на расстоянии половины радиуса от оси вращения, будут двигаться в противоположную сторону с относительной линейной скоростью $2u$? Людей считать точечными массами, а платформу — круглым однородным диском.



Ответ: Платформа будет вращаться с той же угловой скоростью.

Решение:

Пусть ω_0 - начальная угловая скорость платформы.

До движения людей кинетический момент:

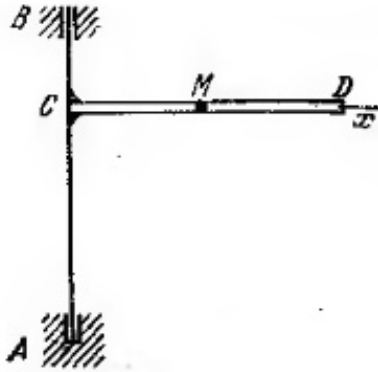
$$K_0 = J\omega_0 + 2m\omega_0 R^2 + 2m\omega_0 \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Пусть ω - угловая скорость при указанном в задаче движении людей, тогда:

$$K = J\omega + 2mR(\omega R + u) + 2m\frac{R}{2}\left(\omega\frac{R}{2} - 2u\right) = J\omega + 2m\omega R^2 + 2m\omega\left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Но так как $K = K_0$, то получим $\omega = \omega_0$.

Задача 37.56: Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB . Внутри трубки на расстоянии $MC=a$ от оси находится шарик M . В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0 . Определить угловую скорость ω трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J , L — ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы m .



Решение:

Воспользуемся теоремой об изменении главного момента количеств движения системы (трубка CD , вал AB , шарик M) относительно неподвижной оси Az . Т.к. все силы либо пересекают ось Az , либо ей параллельны, то

$$\frac{dK_{Az}}{dt} = 0.$$

Следовательно, $K_{Az} = \text{const}$.

Имеет место закон сохранения главного момента количеств движения системы в проекции на ось Az . Выпишем выражение для K_{Az} , выбрав положительным направление по дуговой стрелке угловой скорости ω :

$$K_{Az} = K_{Az}^{\text{трубки}} + K_{Az}^{(M)},$$

$$K_{Az}^{\text{трубки}} = J\omega,$$

$$\begin{aligned} K_{Az}^{(M)} &= \text{Pr}_{Az} [CM \times m(\vec{v}_e + \vec{v}_r)] = \text{Pr}_{Az} CM \times m\vec{v}_e + \text{Pr}_{Az} CM \times m\vec{v}_r = \\ &= CM \cdot m \cdot \omega \cdot CM + 0 = m\omega \cdot x^2, \end{aligned}$$

$$\text{Т.к. } CM \times m\vec{v}_r = \vec{0}, \quad CM = x.$$

Поэтому

$$K_{Az} = J\omega + m\omega \cdot x^2 = \omega(J + mx^2).$$

Т.к. $K_{Az} = \text{const}$, то приравняем значение этой величины в начальный момент, когда $x=a$, и в конечный момент, когда $x=L$:

$$\omega_0(J + ma^2) = \omega_1(J + mL^2).$$

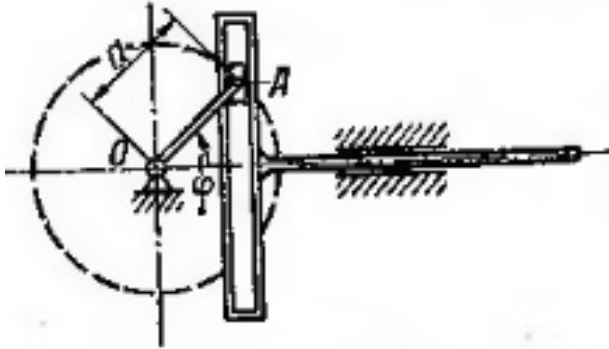
Поэтому угловая скорость трубки в момент вылета из нее шарика равна

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{J + ma^2}{J + mL^2}.$$

Угловая скорость уменьшается при увеличении момент инерции системы относительно оси Az .

$$Om\epsilon em: \omega = \frac{J + ma^2}{J + mL^2} \omega_0.$$

Задача 38.3: Вычислить кинетическую энергию кулисного механизма, если момент инерции кривошипа OA относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости рисунка, равен J_0 ; длина кривошипа равна a , масса кулисы равна m , массой камня A пренебречь. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω . При каких положениях механизма кинетическая энергия достигает наибольшего и наименьшего значений?



Решение:

$$T = T_1 + T_3,$$

$$T_1 = \frac{J_0 \omega^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_3^2}{2}.$$

$$v_A = \omega \cdot a,$$

$$\vec{v}_{A3} = \vec{v}_A + \vec{v}_{A3A}, \text{ где } \vec{v}_{A3} \text{ — горизонтальная, а } \vec{v}_{A3A} \text{ — вертикальная составляющие}$$

скорости. Тогда, $v_3 = v_{A3} = v_A \sin \varphi = \omega a \sin \varphi$ и

$$T_3 = \frac{m_3 \omega^2 a^2 \sin^2 \varphi}{2}.$$

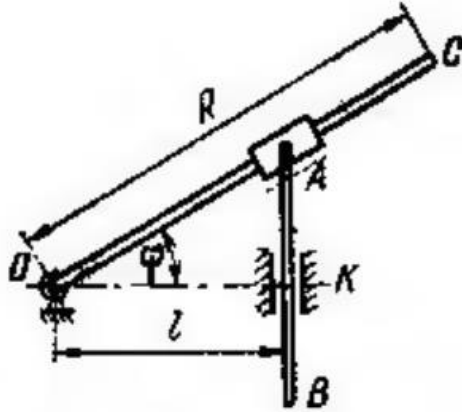
$$T_1 = \frac{\omega^2}{2} (J_0 + m a^2 \sin^2 \varphi), \text{ откуда}$$

$$T_{\max} \rightarrow \sin \varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ; 270^\circ;$$

$$T_{\min} \rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0; 180^\circ.$$

$$\text{Ответ: } T = \frac{1}{2} (J_0 + m a^2 \sin^2 \varphi) \omega^2.$$

Задача 38.9: В кулиском механизме при качании рычага OC вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A , перемещаясь вдоль рычага OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в вертикальных направляющих K . Рычаг OC длины R считать однородным стержнем с массой m_1 , масса ползуна равна m_2 , масса стержня AB равна m_3 , $OK=l$. Выразить кинетическую энергию механизма в функции от угловой скорости и угла поворота рычага OC . Ползун считать точечной массой.



Решение:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{Ox} \omega^2 = \frac{1}{6} m R^2 \omega^2;$$

$$J_{Ox} = \frac{m R^2}{3};$$

$$\begin{cases} v_e = \frac{\omega \cdot l}{\cos \varphi} \Rightarrow v = \frac{\omega \cdot l}{\cos^2 \varphi}; \\ v_e = v \cos \varphi \end{cases}$$

$$T_2 = \frac{m_2 v^2}{2} = \frac{m_2 \omega^2 l^2}{2 \cos^4 \varphi};$$

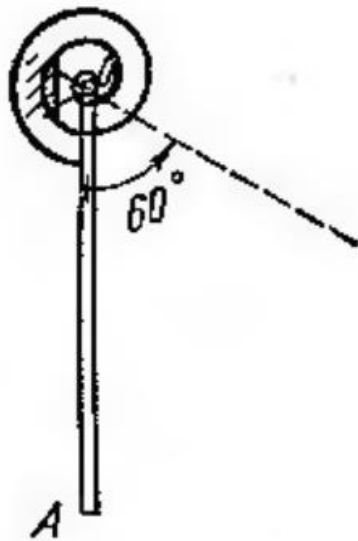
$$T_3 = \frac{m_3 v^2}{2} = \frac{m_3 \omega^2 l^2}{2 \cos^4 \varphi};$$

$$T = \frac{\omega^2}{6 \cos^4 \varphi} [m_1 R^2 \cos^4 \varphi + 3 l^2 (m_2 + m_3)].$$

$$\text{Ответ: } T = \frac{\omega^2}{6 \cos^4 \varphi} [m_1 R^2 \cos^4 \varphi + 3 l^2 (m_2 + m_3)].$$

Задача 38.15: Однородный стержень OA длины l и массы M может вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси O , проходящей через его конец перпендикулярно плоскости рисунка. Спиральная пружина, коэффициент упругости которой равен c , одним концом скреплена с неподвижной осью O , а другим — со стержнем. Стержень находится в покое в вертикальном положении, причем пружина при этом не деформирована. Какую скорость надо сообщить концу A стержня для того, чтобы он отклонился от вертикали на угол, равный 60° ?

Решение:



$$T - T_0 = \sum A^e;$$

$$T = 0;$$

$$T_0 = \frac{J_0 \omega^2}{2} = \frac{ml^2}{3} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot l^2} = \frac{mv^2}{6};$$

$$A_{mg} = -mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4} \right) = -\frac{mgl}{4};$$

$$A_{M_{\text{уп}}} = -\frac{c\varphi^2}{2} = -\frac{c \cdot \frac{\pi^2}{9}}{2} = -\frac{c\pi^2}{18};$$

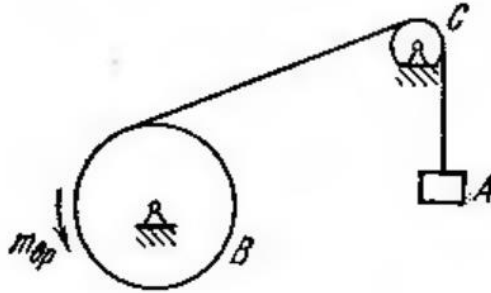
тогда

$$-\frac{mv^2}{6} = -\frac{mgl}{4} - \frac{c\pi^2}{18};$$

$$v = \sqrt{\frac{(9Mgl + 2\pi^2 c)}{6M}}.$$

Ответ: $v = \sqrt{\frac{(9Mgl + 2\pi^2 c)}{6M}}.$

Задача 38.24: На рисунке изображен подъемный механизм лебедки. Груз А массы M_1 поднимается посредством троса, переброшенного через блок С и навитого на барабан В радиуса r и массы M_2 . К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $m_{\varphi} = a\varphi^2$, где a — постоянный коэффициент. Определить скорость груза А в момент, когда он поднимается на высоту h . Массу барабана В считать равномерно распределенной по его ободу. Блок С — сплошной диск массы M_3 . Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



Чтобы найти скорость, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$dT = \sum dA_i$$

Найдем кинетическую энергию

$$T = T_A + T_C + T_B$$

$$T_A = \frac{M_1 v^2}{2}$$

$$T_C = \frac{I_3 \omega_3^2}{2} = \frac{M_3 r_3^2}{4} \left(\frac{v}{r_3} \right)^2 = \frac{M_3 v^2}{4}$$

$$I_3 = \frac{M_3 r_3^2}{2}$$

$$\omega_3 = \frac{v}{r_3}$$

$$T_B = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} = \frac{M_2 v^2}{4}$$

$$T = v^2 \left(\frac{M_1}{2} + \frac{M_3}{4} + \frac{M_2}{4} \right) = v^2 \left(\frac{2M_1 + M_3 + M_2}{4} \right)$$

Найдем работу

$$A = A_A + A_C + A_B$$

$$A_A = -M_1 gh$$

$$A_C = 0$$

$$A_B = \int_0^\varphi M_{\varphi} d\varphi = \int_0^\varphi a\varphi^2 d\varphi = \frac{a\varphi^3}{3r^3}$$

$$\varphi = \frac{h}{r}$$

$$A = -M_1 gh + \frac{ah^3}{3r^3}$$

$$v^2 \left(\frac{2M_1 + M_2 + M_3}{4} \right) = -M_1 gh + \frac{ah^3}{3r^3}$$

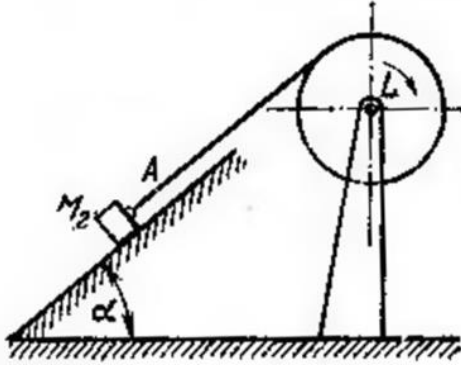
$$v^2 \cdot 3r^3 (2M_1 + M_2 + M_3) = 4ah^3 - 12r^3 M_1 gh$$

$$v = \sqrt{\frac{4h(ah^2 - 3r^3 M_1 g)}{3r^3 (2M_1 + M_2 + M_3)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{4h(ah^2 - 3r^3 M_1 g)}{3r^3 (2M_1 + M_2 + M_3)}}$$

Ответ:

Задача 38.38: Постоянный вращающий момент L приложен к барабану ворота радиуса r и массы M_1 . К концу A намотанного на барабан троса привязан груз массы M_2 , который поднимается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан ворота, повернувшись на угол φ ? Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f . Массой троса пренебречь, барабан считать однородным круглым цилиндром. В начальный момент система была в покое.



Чтобы найти угловую скорость, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_i$$

Найдем кинетическую энергию

$$T_0 = 0$$

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_2 = \frac{M_2 v_2^2}{2} = \frac{M_2 R^2 \omega^2}{2}$$

$$T_1 = \frac{I_{cl} \omega^2}{2} = \frac{M_1 \omega^2 \frac{R^2}{2}}{2} = \frac{M_1 R^2 \omega^2}{4}$$

$$T = \frac{\omega^2 R^2}{2} \left(M_2 + \frac{M_1}{2} \right)$$

Найдем работу

$$A = A_1 + A_2 + A_{mp}$$

$$A_1 = L\varphi$$

$$A_{2+mp} = -M_2 g (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha) \varphi R$$

$$A = (L - M_2 g R (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)) \varphi$$

Подставим найденные значения в формулу $T - T_0 = \sum A_i$, получим

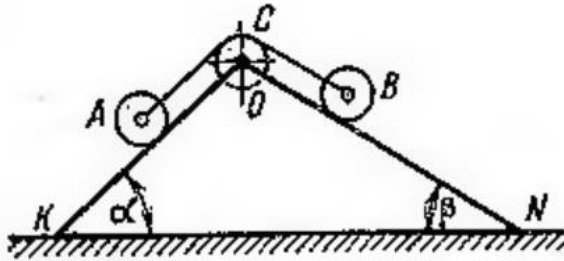
$$\frac{\omega^2 R^2}{2} \left(M_2 + \frac{M_1}{2} \right) = (L - M_2 g R (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)) \varphi$$

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L - M_2 g R (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)}{2M_2 + M_1}} \varphi$$

$$\omega = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L - M_2 g R (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)}{2M_2 + M_1}} \varphi$$

Ответ:

Задача 38.43: Колесо А скатывается без скольжения по наклонной плоскости ОК, поднимая посредством нерастяжимого троса колесо В, которое катится без скольжения по наклонной плоскости ON. Трос переброшен через блок С, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси О. Найти скорость оси колеса А при ее перемещении параллельно линии ОК на расстояние s. В начальный момент система была в покое. Оба колеса и блок считать однородными дисками одинаковой массы и радиуса. Массой троса пренебречь. Коэффициент трения качения равен f_k , радиусы колес равны r.



$$v_A = v_B$$

$$\omega_A = \omega_B = \frac{v_A}{r} = \omega_C$$

Чтобы найти скорость груза А, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$T - T_0 = \sum A_i$$

Найдем кинетическую энергию

$$T_0 = 0$$

$$T = T_A + T_B + T_C$$

$$T_A = T_B = \frac{mv_A^2}{2} + \frac{I_C \omega^2}{2} = \frac{3}{4}mv_A^2$$

$$T_C = \frac{I_C \omega^2}{2} = \frac{\frac{mr^2}{2} \cdot \frac{v_A^2}{r^2}}{2} = \frac{mv_A^2}{4}$$

$$T = \frac{7}{4}mv_A^2$$

Найдем работу

$$\sum A_i = msg \sin \alpha - mg \sin \beta \cdot s - mg f_k \frac{s}{r} \cos \alpha - mg f_k \frac{s}{r} \cos \beta$$

Подставим найденные значения в формулу $T - T_0 = \sum A_i$, получим

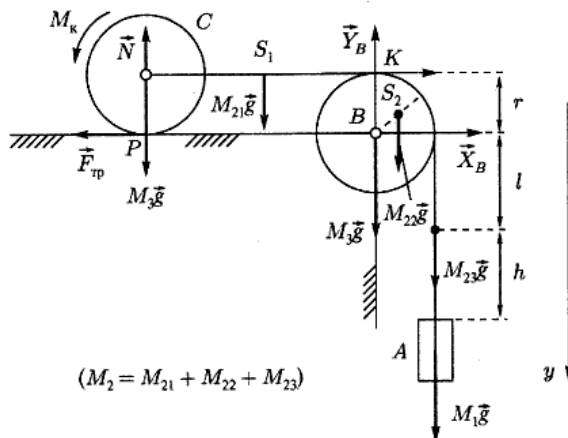
$$\frac{7}{4}mv_A^2 = msg \left(\sin \alpha - \sin \beta - \frac{f_k}{r} (\cos \alpha + \cos \beta) \right)$$

$$v_A = 2 \sqrt{\frac{1}{7} sg \left(\sin \alpha - \sin \beta - \frac{f_k}{r} (\cos \alpha + \cos \beta) \right)}$$

$$\text{Ответ: } v_A = 2 \sqrt{\frac{1}{7} sg \left(\sin \alpha - \sin \beta - \frac{f_k}{r} (\cos \alpha + \cos \beta) \right)}$$

Задача 38.47: Груз А массы M_1 подвешен к однородному нерастяжимому канату длины L и массы M_2 . Канат переброшен через блок В, вращающийся вокруг оси О, перпендикулярной плоскости рисунка. Второй конец каната прикреплен к оси катка С, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости.

Блок В и каток С — однородные круглые диски радиуса r и массы M_3 каждый. Коэффициент трения качения катка С о горизонтальную плоскость равен f_k . В начальный момент, когда система находилась в покое, с блока В свисала часть каната длины l . Определить скорость груза А в зависимости от его вертикального перемещения h .



Воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме:

$$dT = \sum_k dA_k^{(e)} + \sum_k dA_k^{(i)}$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_A + T_B + T_C + T_{\text{каната}}$$

$$T = \frac{M_1 v^2}{2} + \frac{M_3 r^2}{2 \cdot 2} \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \frac{M_3 v^2}{2} + \frac{M_3 r^2}{2 \cdot 2} \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \frac{M_2 v^2}{2} = \frac{v^2}{2} (M_1 + M_2 + 2M_3)$$

В вычислениях учли отсутствие скольжения катка С (точка касания Р — мгновенный центр скоростей катка).

Дифференциал кинетической энергии

$$dT = (M_1 + M_2 + 2M_3) v dv$$

Суммарная элементарная работа внутренних и внешних сил сводится к работе силы тяжести груза А:

$$dA(M_1 \vec{g}) = M_1 g dy$$

работе силы тяжести каната:

$$dA(M_2 \vec{g}) = \frac{M_2}{L} (l + r + y) g dy$$

и работе момента трения качения катка С:

$$dA(M_k) = -M_k d\varphi = -f_k N(y) \frac{dy}{r}$$

В результате уравнение принимает вид

$$(M_1 + M_2 + 2M_3) v dv = M_1 g dy + \frac{M_2}{L} (l + r + y) g dy - f_k N(y) \frac{dy}{r} \quad (1)$$

Для определения нормальной реакции катка $N(y)$ воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента всей системы относительно оси вращения блока В:

$$\frac{d}{dt} (K_{Bz}^{(A)} + K_{Bz}^{(B)} + K_{Bz}^{(C)} + K_{Bz}^{(\text{каната})}) = \sum_k M_{Bz} (\vec{F}_k^{(e)})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} \left[M_1 vr + \frac{M_3 r^2}{2} \cdot \frac{v}{r} + \left(M_3 vr + \frac{M_3 r^2}{2} \cdot \frac{v}{r} \right) + M_2 vr \right] = M_1 gr + M_{23} gr + M_{22} g \cdot BS_2 \cos \frac{\pi}{4} - M_{21} g S_1 K - 2M_3 g S_1 K + 2N S_1 K - M_k$$

Здесь масса горизонтального участка каната

$$M_{21} = \frac{M_2}{L} \left(L - l - y - \frac{\pi r}{2} \right)$$

масса участка каната, облегающего блок В,

$$M_{22} = \frac{M_2}{L} \frac{\pi r}{2}$$

масса вертикального участка каната

$$M_{23} = \frac{M_2}{L} (l + y)$$

Центр масс горизонтального участка каната – точка S_1 , причем

$$S_1 K = \frac{1}{2} \left(L - l - y - \frac{\pi r}{2} \right)$$

Центр масс каната, облегающего блок В – точка S_2 , такая, что

$$BS_2 = \frac{r \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}r}{\pi}$$

После преобразования, из полученного уравнения выразим $N(y)$:

$$N(y) = \frac{\dot{v}ar - M_1 gr - \frac{M_2}{L} gbr + \frac{M_2}{L} g \frac{c^2}{2} + M_3 gc}{c - f_k}$$

где

$$a = M_1 + M_2 + 3M_3$$

$$b = l + y + r$$

$$c = L - l - y - \frac{\pi r}{2}$$

Подставим $N(y)$ в уравнение (1):

$$avdv = M_1 g dy + \frac{M_2}{L} b g dy - \frac{f_k}{r} \frac{\dot{v}ar}{c - f_k} dy + \frac{f_k}{r} \frac{M_1 gr}{c - f_k} dy + \frac{f_k}{r} \frac{M_2 gbr}{L(c - f_k)} dy - \frac{f_k}{r} \frac{M_2 gc^2}{L(c - f_k)^2} dy - \frac{f_k}{r} \frac{M_3 gc}{c - f_k} dy$$

Разделим левую и правую части на dt и сократим все слагаемые на v . Далее после несложных преобразований и умножения левой и правой частей на $(c - f_k)$, получим:

$$\dot{v}ac = M_1 gc + \frac{M_2 g f_k}{L} \left(-\frac{c^2}{2r} + \frac{bc}{f_k} \right) - M_3 g \frac{f_k c}{r}$$

Сокращаем на c , расписываем выражения a , b и c , группируем члены. В результате получаем:

$$\dot{v}(M_1 + M_2 + 2M_3) = g \left[M_1 + \frac{M_2}{2L} (2l + 2r) - \frac{M_2 f_k}{r} \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{4L} \right) - M_3 \frac{f_k}{r} + M_2 \frac{f_k}{r} \left(\frac{1}{2L} + \frac{r}{L f_k} \right) y \right]$$

Так как

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dy}{dy} = v \frac{dv}{dy}$$

то разделяем переменные в дифференциальном уравнении и берем интеграл:

$$(M_1 + M_2 + 2M_3) \cdot \int_0^h v dv = \int_0^h g \left[M_1 + \frac{M_2}{2L} (2l + 2r) - \frac{M_2 f_k}{r} \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{4L} \right) - M_3 \frac{f_k}{r} + M_2 \frac{f_k}{r} \left(\frac{1}{2L} + \frac{r}{L f_k} \right) y \right] dy$$

Из полученного выражения получаем величину скорости груза А при его опускании на высоту h

$$v = \left\{ \frac{2gh}{M_1 + M_2 + 2M_3} \left\{ M_1 + \frac{M_2}{2L} (2l + 2r + h) - \frac{f_k}{r} \left[M_3 + M_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{4L} - \frac{h}{4L} \right) \right] \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Ответ:
$$v = \left\{ \frac{2gh}{M_1 + M_2 + 2M_3} \left\{ M_1 + \frac{M_2}{2L} (2l + 2r + h) - \frac{f_k}{r} \left[M_3 + M_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2L} - \frac{\pi r}{4L} - \frac{h}{4L} \right) \right] \right\} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Задача 13.5: Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5с он совершает 12,5 оборота. Какова его угловая скорость по истечению этих 5с?

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = 2\pi n$$

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{4\pi n}{t^2}$$

$$\omega = \varepsilon t = \frac{4\pi n t}{t^2} = \frac{4\pi n}{t} = \frac{4\pi 12.5}{5} = 10\pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$$

Ответ: $\omega = 10\pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$

Задача 13.6: Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10мин после начала движения оно имеет угловую скорость, равную $4\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10мин ?

$$\omega = \beta t \Rightarrow \beta = \frac{\omega}{t}$$

$$\varphi = \frac{\beta t^2}{2} = \frac{\omega t}{2}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t}{4\pi}$$

$$N = \frac{4\pi \cdot 600}{4\pi} = 600$$

Ответ: колесо сделает 600 оборотов.

Задача 13.8: С момента выключения мотора пропеллер самолёта, вращавшийся с угловой скоростью, равной $40\pi\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

Уравнения равнозамедленного движения имеют вид:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \varepsilon t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases}$$

При остановке пропеллера $\omega = 0$ и, считая $\varphi_0 = 0$, уравнение можно записать в виде

$$\begin{cases} \omega_0 = \varepsilon t \\ \varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим t и подставим во второе

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon}$$

$$\varphi = \omega_0 \frac{\omega_0}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon}\right)^2}{2} = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{2\varphi}$$

По условиям задачи

$$\omega_0 = 40\pi$$

$$\varphi = 2\pi \cdot 80$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{(40\pi)^2}{2 \cdot 2\pi \cdot 80} = 5\pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)$$

$$t = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{40\pi}{5\pi} = 8\text{с}$$

Ответ: $t = 8\text{с}$

Задача 13.12: Определить скорость v и ускорение w точки, находящейся на поверхности Земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси; широта Ленинграда 60° , радиус Земли 6370 км .

$$NM = \frac{R}{2}$$

$$v_M = \omega \cdot NM = 0.00007272 \cdot 3185000 = 232 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$w = w^n = \frac{v^2}{p} = \frac{(232)^2}{3185000} = 0.0169 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$v = 232 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ:

$$w = 0.0169 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Задача 13.13: Маховое колесо радиуса 0,5м вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна $2\frac{м}{с}$. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

$$v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

$$\varphi = \omega t$$

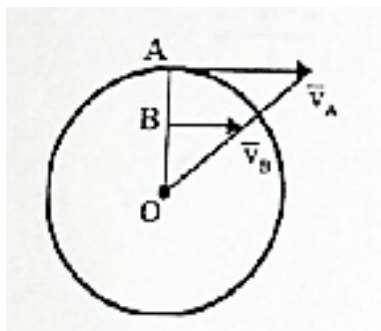
$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{vt}{2\pi R}$$

$$n = \frac{2 \cdot 60}{2 \cdot 3.14 \cdot 0.5} = 38.2 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

Ответ:

$$n = 38.2 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$$

Задача 13.14: Точка А шкива, лежащая на его ободу, движется со скоростью $50 \frac{\text{см}}{\text{с}}$, а некоторая точка В, взятая на одном радиусе с точкой А, движется со скоростью $10 \frac{\text{см}}{\text{с}}$; расстояние $AB = 20\text{см}$. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.



$$\omega = \frac{v_A}{0.5d} = \frac{v_B}{0.5d - 20} \text{ или}$$

$$0.5d v_B = 0.5d v_A - 20 v_A$$

Подставляя численные значения

$$0.5 \cdot 10d = 0.5 \cdot 50d - 20 \cdot 50$$

$$5d = 25d - 1000$$

$$1000 = 20d$$

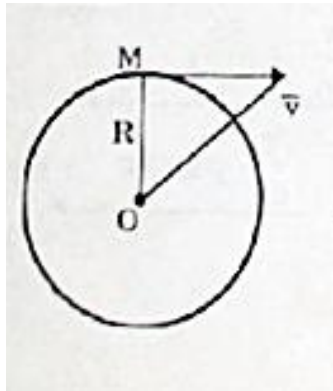
$$d = \frac{1000}{20} = 50\text{см}$$

Угловая скорость вращения шкива

$$\omega = \frac{v_A}{0.5 \cdot 50} = \frac{50}{25} = 2 \text{ с}^{-1}$$

Ответ: $\omega = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, d = 50\text{см}$

Задача 13.15: Маховое колесо радиуса $R = 2\text{ м}$ вращается равноускоренно из состояния покоя; через $t = 10\text{ с}$ точки, лежащей на ободе, обладают линейной скоростью $v = 100 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти скорость, нормальное и касательное ускорение точек обода колеса для момента $t = 15\text{ с}$.



$$\omega = \varepsilon t + \omega_0$$

$$\omega_0 = 0 \Rightarrow \omega = \varepsilon t$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$\frac{v}{R} = \varepsilon t$$

$$\varepsilon = \frac{v}{Rt} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{const}$$

$$\omega = \varepsilon t = 5 \cdot 15 = 75 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

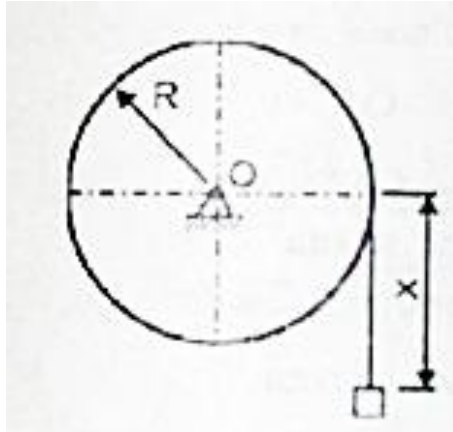
$$v = \omega R = 75 \cdot 2 = 150 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$w_N = \frac{v^2}{R} = \frac{150^2}{2} = 11250 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$w_\tau = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\text{Ответ: } v = 150 \frac{\text{м}}{\text{с}}, w_N = 11250 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, w_\tau = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Задача 13.18: Вал радиуса $R=10\text{см}$ приводится во вращение гирей P , привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x=100t^2$, где x - расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t - время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t .



$$x = 100t^2$$

$$\dot{x} = 200t \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

$$\ddot{x} = 200 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$\omega = \frac{\dot{x}}{R} = \frac{200t}{10} = 20t \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$\varepsilon = \frac{\ddot{x}}{R} = 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$w = \sqrt{(w_N)^2 + (w_T)^2}$$

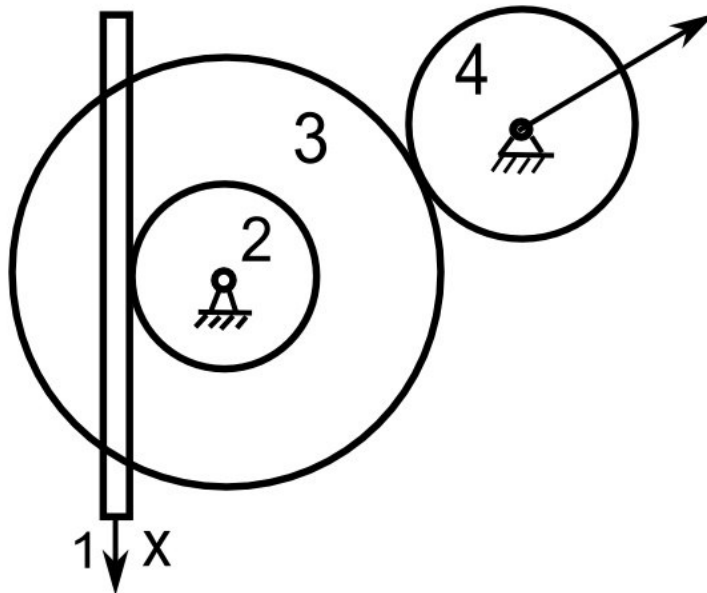
$$w_N = \omega^2 R = 400t^2 \cdot 10 = 4000t^2$$

$$w_T = \varepsilon R = 20 \cdot 10 = 200 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$W = \sqrt{16000000t^4 + 40000} = 200\sqrt{1 + 400t^4} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

$$\text{Ответ: } \omega = 20t \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \varepsilon = 20 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}, W = 200\sqrt{1 + 400t^4} \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Задача 14.4: В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного шрифта 1 передаётся шестерне 2, на оси которой укреплено зубчатое колесо 3, сцепляющееся с шестерней 4, несущей стрелку. Определить угловую скорость стрелки, если движение шрифта задано уравнением $x = a \cdot \sin kt$ и радиусы зубчатых колёс соответственно равны r_2, r_3, r_4 .



$$\dot{x} = ak \cdot \cos(kt)$$

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{r_2} = \frac{ak \cdot \cos(kt)}{r_2}$$

$$\omega_2 \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4$$

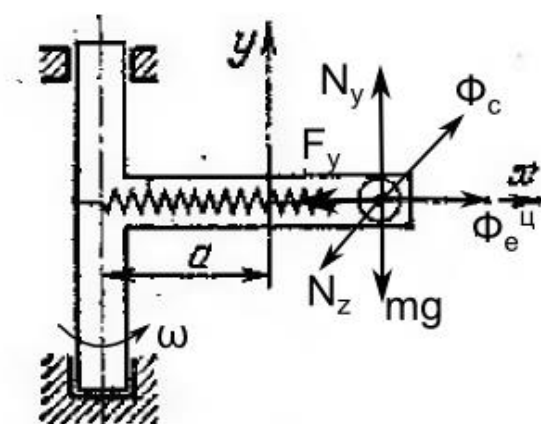
Откуда

$$\omega_4 = \frac{\omega_2 \cdot r_3}{r_4} = \frac{ak \cdot \cos(kt)}{r_2} \cdot \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_3}{r_2 \cdot r_4} \cdot ak \cdot \cos(kt)$$

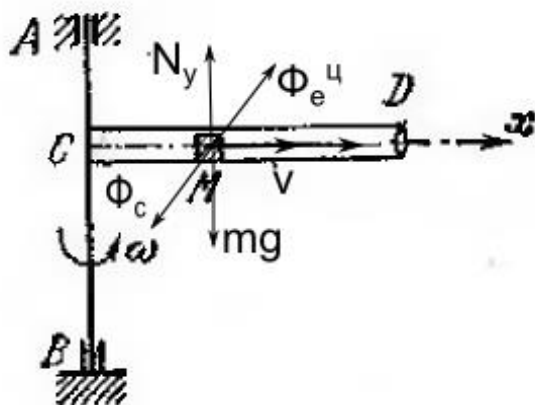
Ответ:
$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_2 \cdot r_4} ak \cdot \cos(kt)$$

Динамика относительного движения

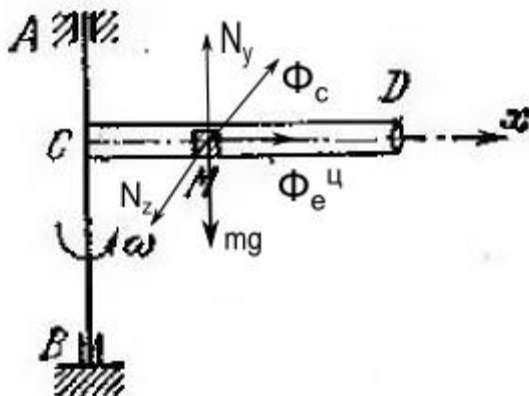
Задача 33.9: Шарик массы m , прикреплённый к концу горизонтальной пружины, коэффициент жесткости которой c , находится в положении равновесия в трубке на расстоянии a от вертикальной оси. Определить относительное движение шарика, если трубка, образуя с осью прямой угол, начинает вращаться вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω .



Задача 33.10: Горизонтальная труба CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω . Внутри трубки находится тело M . Определить скорость v тела относительно трубки в момент его вылета, если в начальный момент $v = 0$, $x = x_0$, длина трубки равна L . Трением пренебречь.



Задача 33.12: В условиях задачи 33.10 составить дифференциальное уравнение движения тела в трубке, если коэффициент трения скольжения между телом и трубкой равен f .

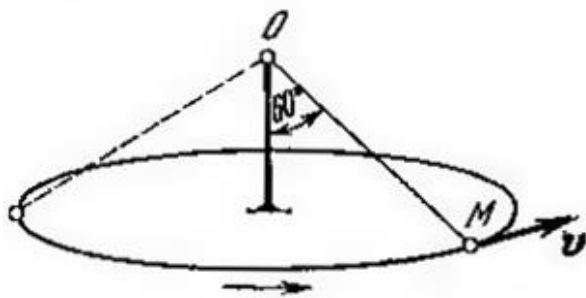


Задача 33.13: Кольцо движется по гладкому стержню AB , который равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец A , делая один оборот в секунду; длина стержня 1 м ; в момент $t = 0$ кольцо находилось на расстоянии 60 см от конца A и имело скорость равную нулю. Определить момент t_1 , когда кольцо сойдёт со стержня.

Динамика точки

Задача 26.1: В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280кг. В первые 10 с он проходит 35м. Найти натяжение каната на котором висит лифт.

Задача 26.9: Груз M массы 0,102 подвешенный на нити длины 30см в неподвижной точке O , представляет собой конический маятник, т.е. описывает окружность в горизонтальной плоскости, причем нить составляет с вертикалью угол 60. Определить скорость v груза и натяжение T нити



Задача 26.11: В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50Н, при ускоренном -51 Н. Найти ускорение кабины.

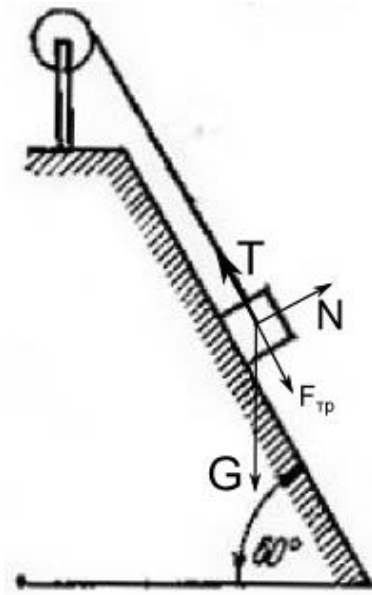
Задача 26.16: Движение материальной точки массы 0,2 кг выражается уравнениями

$$x = 3 \cos \pi t \text{ см,}$$

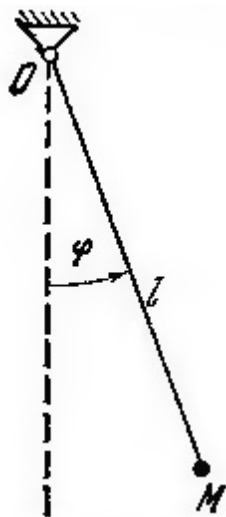
$y = 4 \sin \pi t$ см. Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от её координат.

Задача 26.17: Шарик, масса которого равна 100г, падает под действием силы тяжести и при этом испытывает сопротивление воздуха. Движение шарика выражается уравнением $x = 4,9t - 2,45(1 - e^{-2t})$, где x - в метрах, t - в секундах, ось Ox направлена по вертикали вниз. Определить силу сопротивления воздуха R и выразить её как функцию скорости шарика. Определим скорость и ускорение.

Задача 26.26: Груз массы $M=600$ кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60° с горизонтом. Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен $0,2$. Ворот радиуса $0,2$ м вращается по закону $\varphi = 0,4t^3$. Найти натяжение троса, как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.



Задача 26.28: Груз M веса 10 Н подвешен к тросу длины $l=2$ м и совершает вместе с тросом колебания согласно уравнению $\varphi = \frac{\pi}{6} \sin 2\pi t$ где φ - угол отклонения троса от вертикали в радианах, t - время в секундах. Определить натяжения T_1 и T_2 троса в верхнем и нижнем положении груза



Задача 27.9: Найти наибольшую скорость падения шара массы 10 кг и радиуса $r=8\text{ см}$, принимая, что сопротивление воздуха равно $R=k\sigma v^2$, где v - скорость движения, σ - площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению его движения, и k - численный коэффициент, зависящий от формы тела и имеющий для шара значение $0,24 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{м}^4$

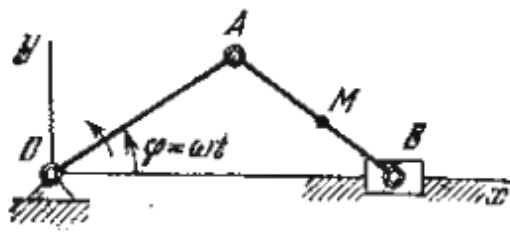
Задача 27.16: На какую высоту H и за какое время T поднимается тело веса P , брошенное вертикально вверх со скоростью v_0 , если сопротивление воздуха может быть выражено формулой $k^2 P v^2$, где v - величина скорости тела?

Задача 27.17: Тело массы 2 кг, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 м/с, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости v м/с равно $0,4v$ Н. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения

Кинематика точки

Задача 10.11: Найти уравнение траектории движения точки, получающегося при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разной частоты:

Задача 11.4: Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти скорость середины M шатуна кривошипно-ползунного механизма и скорость ползуна B в зависимости от времени, если $OA=AB=a$



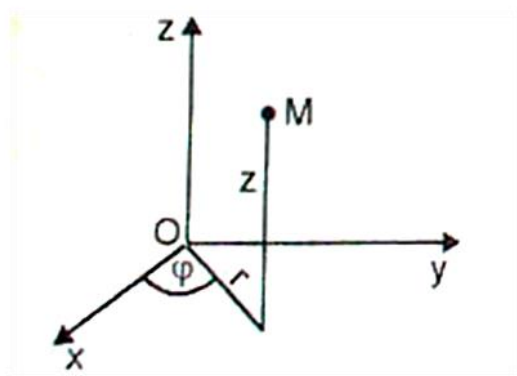
Задача 11.14: Уравнения движения точки M в цилиндрической системе координат имеют вид

$$r = a,$$

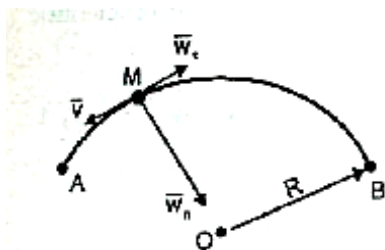
$$\varphi = kt,$$

$$z = vt$$

Найти проекции скорости точки M на оси цилиндрической системы координат, уравнения движения точки M_1 , описывающей годограф скорости, и проекции скорости точки M_1 .

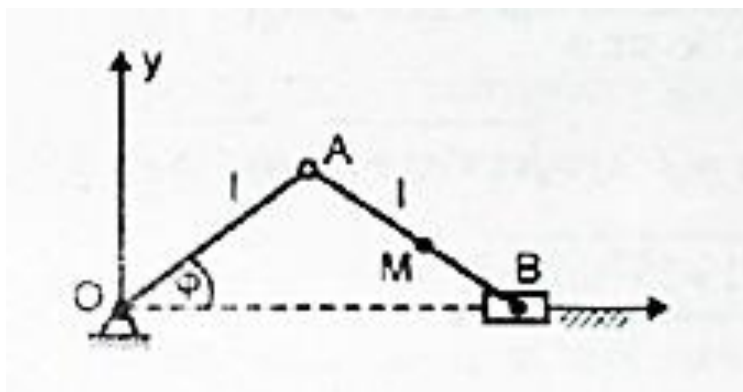


Задача 12.11: Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 20 \text{ см}$. Закон её движения по траектории: $s = 20 \sin \pi t$ (t в секундах, s - в сантиметрах). Найти величину и направление скорости, касательное, нормальное и полное ускорения точки в момент $t = 5 \text{ с}$. Построить также графики скорости, касательного и нормального ускорений.



Задача 12.15: Движение точки задано уравнениями $x = a(e^{kt} + e^{-kt})$, $y = a(e^{kt} - e^{-kt})$ где a и k - заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки как функции радиуса-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Задача 12.18: Найти траекторию точки M шатуна кривошипно-ползунного механизма, если $r = l = 60 \text{ см}$, $MB = \frac{1}{3}l$, $\varphi = 4\pi t$ (t - в секундах), а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$



Задача 12.25: Точка движется по винтовой линии согласно уравнениям $x = 2 \cos 4t$, $y = 2 \sin 4t$, $z = 2t$ причем за единицу длины взят метр. Определить радиус кривизны ρ траектории

Задача 12.27: Движение точки задано уравнениями

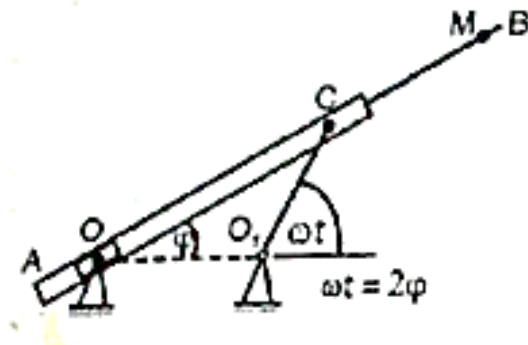
$$x = 2t, y = t^2 \text{ (t-в секундах, x и y в сантиметрах)}$$

Определить величины и направления скорости и ускорения точки в момент времени $t=1\text{с}$

Задача 12.29: Кривошип O_1C $a/2$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O_1 .

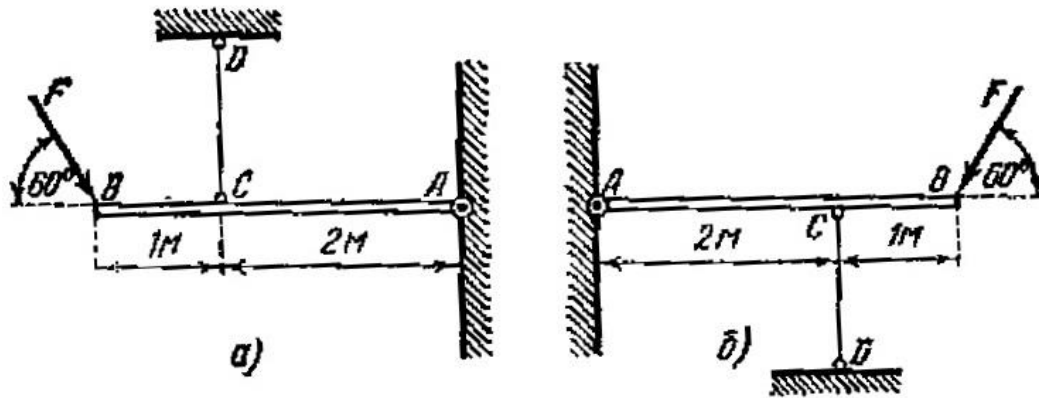
В точке C с кривошипом шарнирно связана линейка AB , проходящая все время через качающуюся муфту O , находящуюся на расстоянии $a/2$ от оси вращения O_1

Приняв точку O за полюс, найти в полярных координатах уравнение движения точки M линейки, отстоящей от шарнира C на расстоянии a , её траектории, скорость и ускорение (в начальный момент угол $\varphi = \angle COO = 0$)

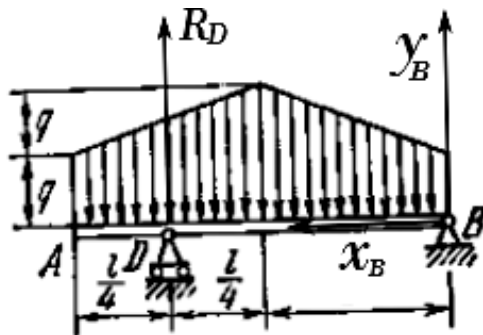


Плоская статика

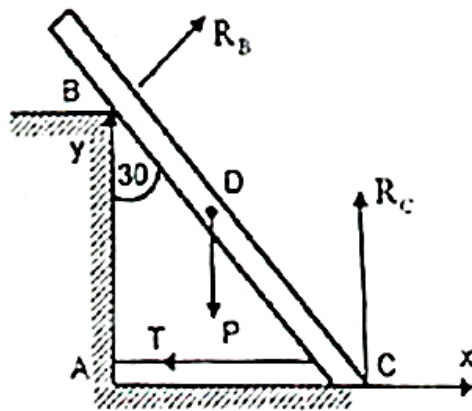
Задача 2.31: На рисунках изображены балки AB , удерживаемые в горизонтальном положении вертикальными стержнями CD . На концах балок действуют силы $F=30$ кН под углом 60° к горизонту. Взяв размеры с рисунков, определять усилия S в стержнях CD и давления Q балок на стену, если крепления в A , C и D шарнирные. Весом стержней и балок пренебречь.



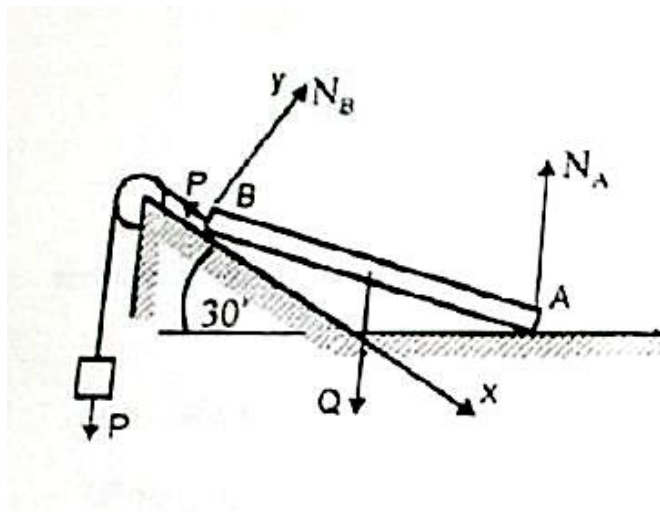
Задача 3.18: Балка AB длины l м несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна q Н/м на концах A и B балки и $2q$ Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и B .



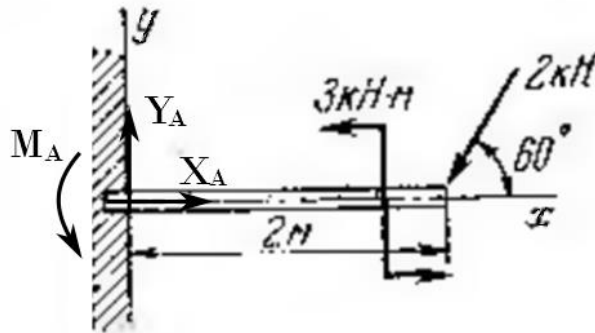
Задача 4.7: Однородная балка AB веса 600 Н и длины 4 м опирается одним концом на гладкий пол, а промежуточной точкой B — на столб высоты 3 м , образуя с вертикалью угол 30° . Балка удерживается в таком положении веревкой AC , протянутой по полу. Пренебрегая трением, определить натяжение веревки T и реакции R_B столба и R_C пола.



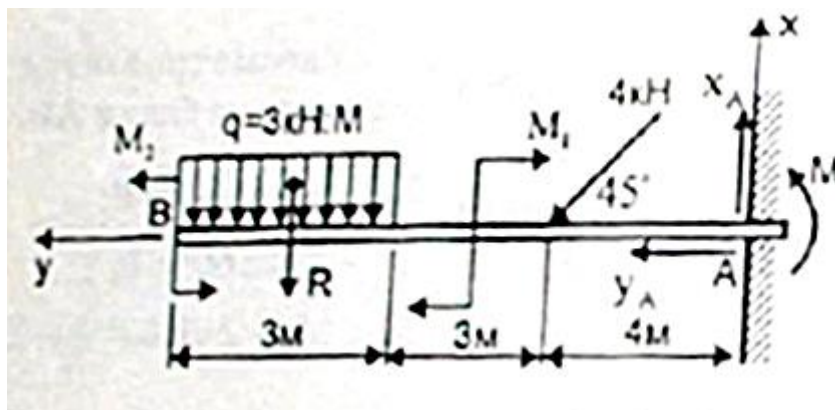
Задача 4.10: Однородный стержень AB веса 100 Н опирается одним концом на гладкий горизонтальный пол, другим — на гладкую плоскость, наклоненную под углом 30° к горизонту. У конца B стержень поддерживается веревкой, перекинутой через блок C и несущей груз P ; часть веревки BC параллельна наклонной плоскости. Пренебрегая трением на блоке, определить груз P и силы давления N_A и N_B на пол и на наклонную плоскость.



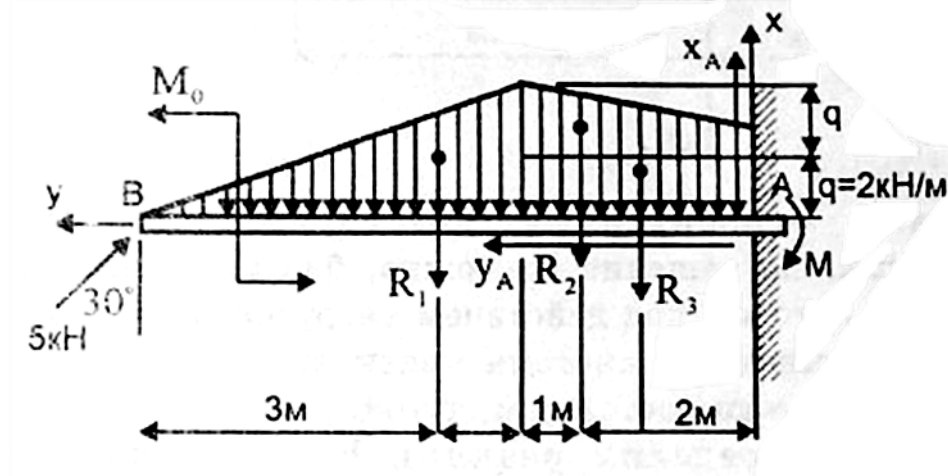
Задача 4.27: Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил.



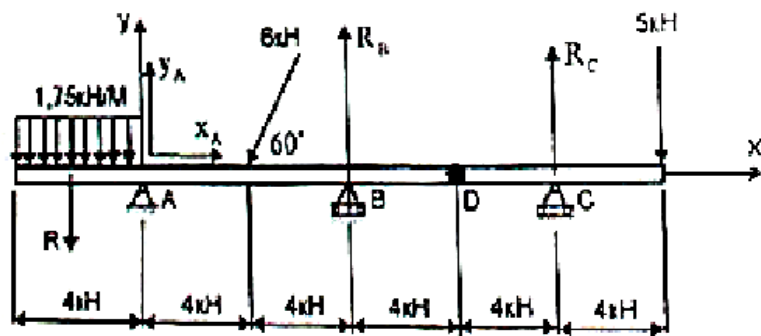
Задача 4.29: Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием равномерно распределённой нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.



Задача 4.31: Определить реакцию заделки консольной балки, изображенной на рисунке и находящейся под действием сосредоточенной силы, пары сил и распределенной нагрузки, изменяющейся по закону треугольника и трапеции.

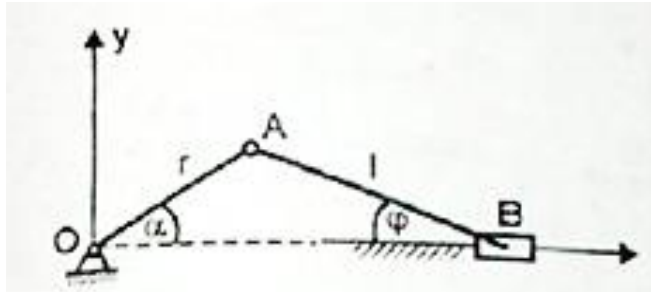


Задача 4.34: Определить реакции опор A, B, C и шарнира D составной балки, изображенной на рисунке вместе с нагрузкой.

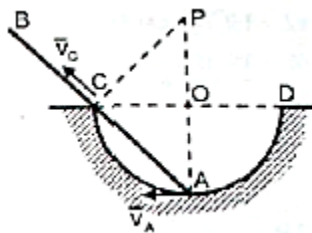


Плоское движение

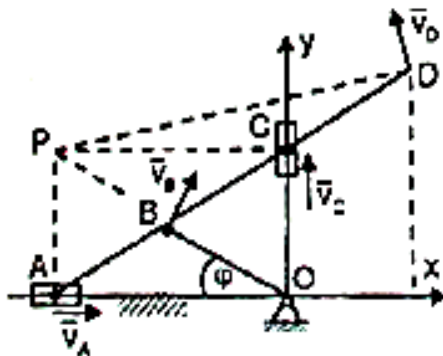
Задача 14.12: Определить закон движения, скорость и ускорение ползуна B кривошипно-ползунного механизма, если кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . Длина кривошипа $OA = r$, длина шатуна $AB = l$.



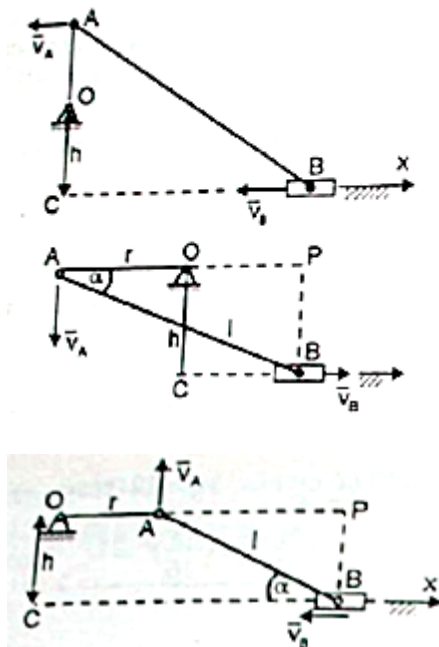
Задача 16.10: Прямая AB движется в плоскости рисунка, причем конец ее A все время находится на полуокружности CAD , а сама прямая все время проходит через неподвижную точку C диаметра CD . Определить скорость v_C точки прямой, совпадающей с точкой C , в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен CD , если известно, что скорость точки A в этот момент 4 м/с .



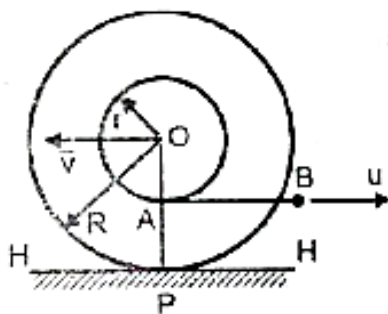
Задача 16.14: Стержень OB вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ и приводит в движение стержень AD , точки A и C которого движутся по осям: A — по горизонтальной Ox , C — по вертикальной Oy . Определить скорость точки D стержня при $\varphi = 45^\circ$ и найти уравнение траектории этой точки, если $AB = OB = BC = CD = 12 \text{ см}$.



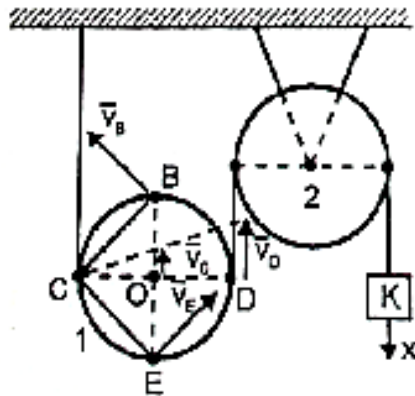
Задача 16.16: Найти скорость ползуна B нецентрального кривошипного механизма при двух горизонтальных и двух вертикальных положениях кривошипа, вращающегося вокруг вала O с угловой скоростью $\omega = 1,5$ рад/с, если $OA=40$ см, $AB=200$ см, $OC=20$ см.



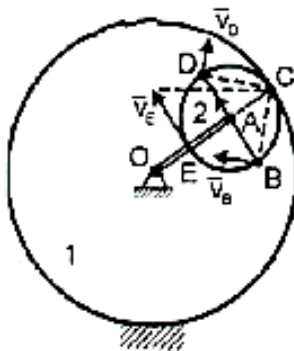
Задача 16.29: Катушка радиуса R катится по горизонтальной плоскости HH без скольжения. На средней цилиндрической части катушки радиуса r намотана нить, конец которой B обладает при этом движении скоростью u по горизонтальному направлению. Определить скорость U перемещения оси катушки.



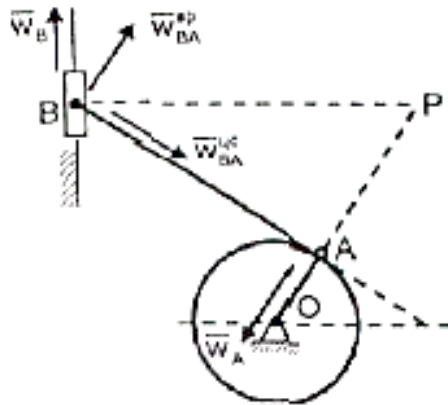
Задача 16.33: Подвижный блок 1 и неподвижный блок 2 соединены нерастяжимой нитью. Груз K , прикрепленный к концу этой нити, опускается по вертикали вниз по закону $x=2t^2$ м. Определить скорости точек C , D , B и E , лежащих на ободе подвижного блока, в момент $t=1$ с в положении, указанном на рисунке, если радиус подвижного блока 1 равен 0,2 м, а $CD \perp BE$. Найти также угловую скорость блока 1.



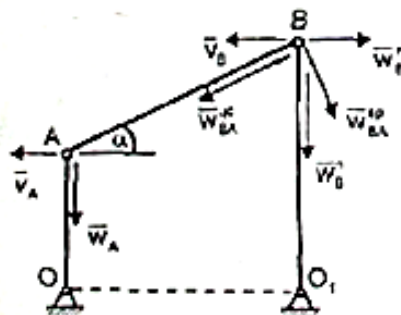
Задача 16.37: Кривошип $OA=20$ см вращается вокруг неподвижной оси O , перпендикулярно плоскости рисунка, с угловой скоростью 2 рад/с. На его конец A насажена шестеренка 2 радиуса 10 см, находящаяся во внутреннем зацеплении с неподвижным колесом 1, соосным с кривошипом OA . Определить скорости точек B, C, D и E , лежащих на ободе шестеренки 2, если BD перпендикулярно OC .



Задача 18.11: Кривошип ОА длины 20 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10 \text{ рад/с}$ и приводит в движение шатун АВ длины 100 см; ползун В движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна В в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 45^\circ$



Задача 18.13: Стержень ОА шарнирного четырехзвенника ОАВО₁ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . Определить угловую скорость, угловое ускорение стержня АВ, а также ускорение шарнира В в положении, указанном на рисунке, если $AB = 2OA = 2a$

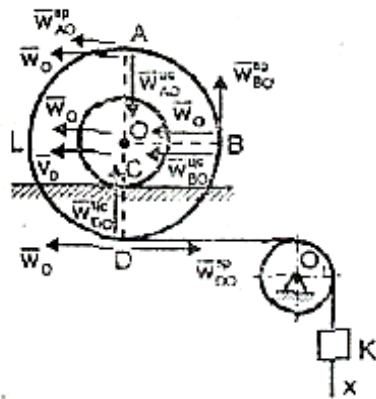


Задача 18.26 Груз K , связанный посредством нерастяжимой нити с катушкой L , опускается вертикально вниз по закону $x = t^2$ м. При этом катушка L катится без скольжения по неподвижному горизонтальному рельсу. Определить ускорения точек A , B и D лежащих на ободе катушки, её угловую скорость и угловое ускорение в момент

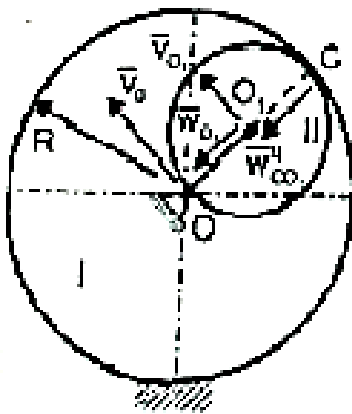
$$AD \perp OB$$

времени $t = 0.5$ с в положении, указанном на рисунке $OD = 2$

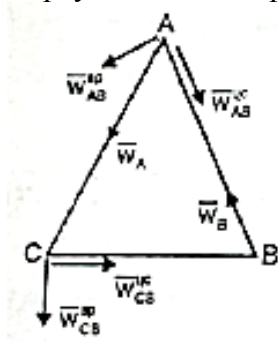
$$OC = 0.2 \text{ м}$$



Задача 18.29: Найти положение мгновенного центра ускорений и скорость v_k точки фигуры, совпадающей с ним в данный момент, а также ускорение ω_c точки фигуры, с которой в данный момент совпадает мгновенный центр скоростей, если шестеренка I радиуса r катится внутри неподвижного колеса 2 радиуса $R = 2r$ и кривошип OO_1 , приводящий в движение бегающую шестеренку, имеет постоянную угловую скорость ω_0

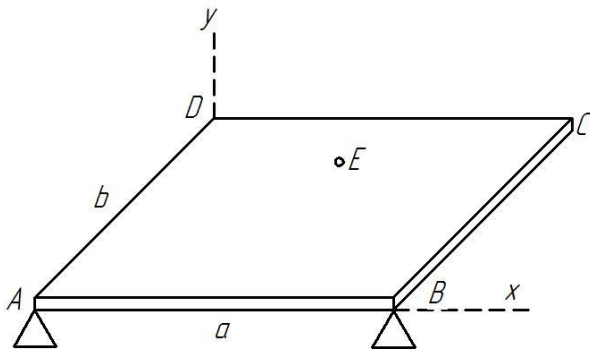


Задача 18.38: Равносторонний треугольник ABC движется в плоскости рисунка. Ускорение вершин A и B в данный момент времени равны 16 см/с^2 и направлены по сторонам треугольника. Определить ускорение третьей вершины C треугольника.

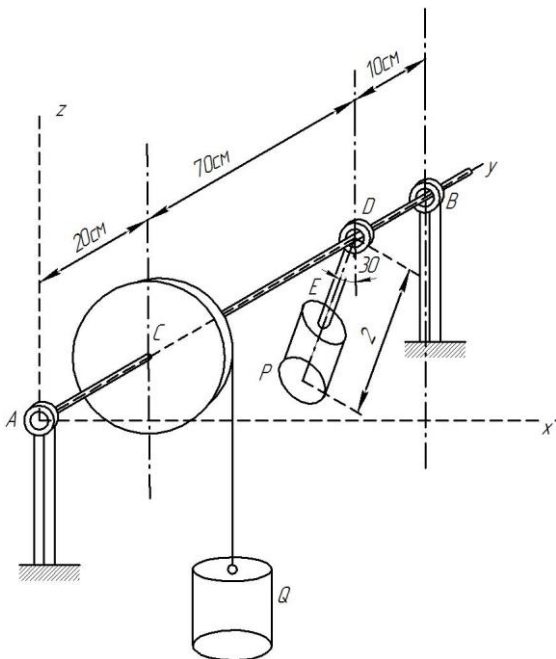


Пространственная статика

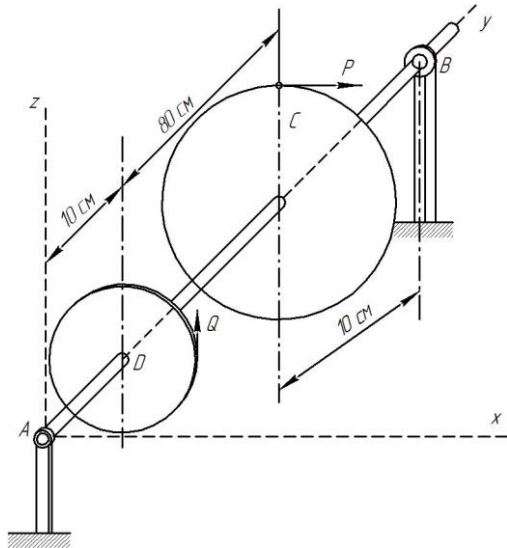
1) Однородная прямоугольная пластинка $ABCD$, опираясь на три точечные опоры, две из которых расположены в вершинах прямоугольника A и B , а третья – в некоторой точке E , удерживается в горизонтальном положении. Вес пластинки равен P . Давление на опоры в точках A и B соответственно равны $P/4$ и $P/5$. Найти давление N_E на опору в точке E и координаты этой точки, если длины сторон пластинки равны a и b .



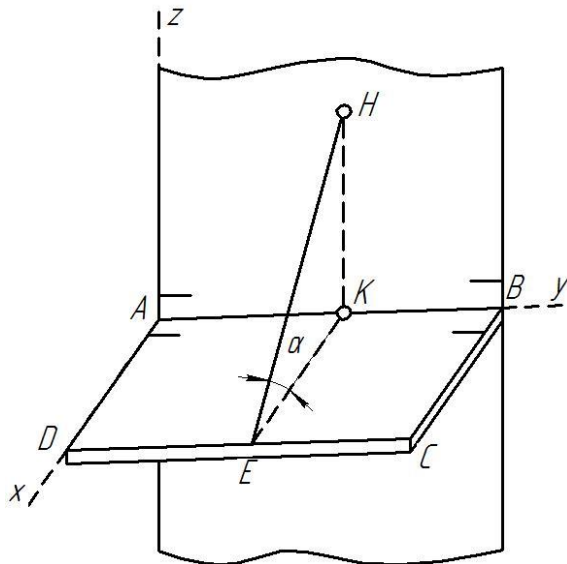
2) На горизонтальный вал, лежащий в подшипниках A и B , действуют: с одной стороны вес тела $Q = 250$ Н, привязанного к шкиву C радиуса 20 см посредством троса, а с другой стороны вес тела $P = 1$ кН, надетого на стержень DE , неизменно скрепленный с валом AB под прямым углом. Даны расстояния: $AC = 20$ см, $CD = 70$ см, $BD = 10$ см. В положении равновесия стержень DE отклонен от вертикали на угол 30° . Определить расстояние l центра тяжести тела P от оси вала AB и реакции подшипников A и B .



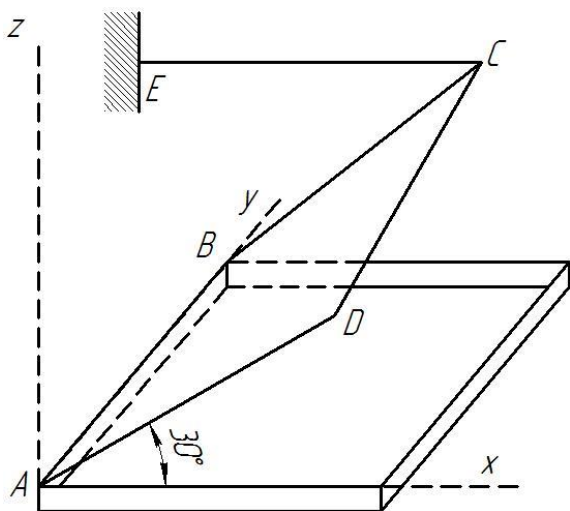
3) На горизонтальный вал АВ насажены зубчатое колесо С радиуса 1 м и шестерня D радиуса 10 см. Другие размеры указаны на рисунке. К колесу С по направлению касательной приложена горизонтальная сила $P=100$ Н, а к шестерне D, также по касательной, приложена вертикальная сила Q. Определить силу Q и реакции подшипников А и В в положении равновесия.



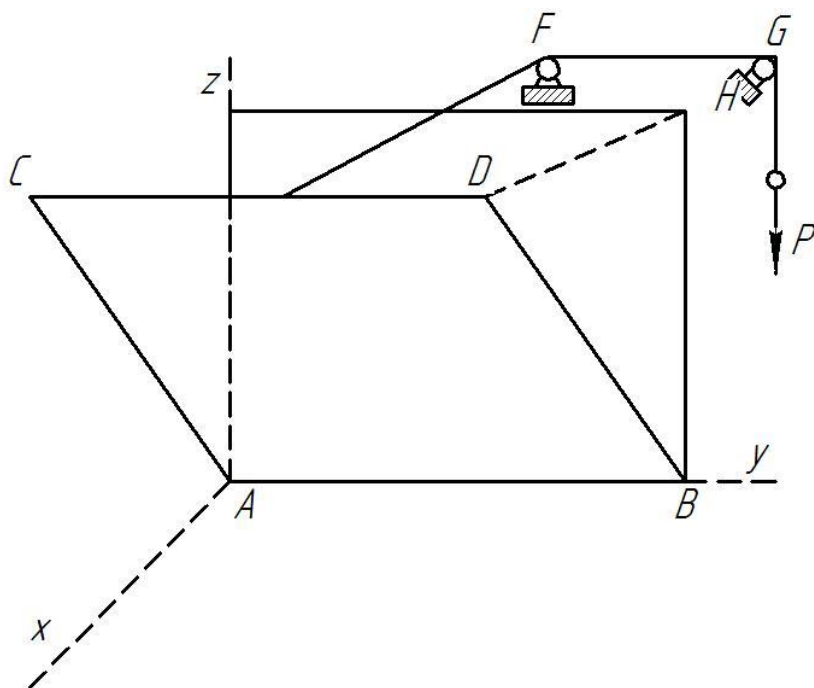
4) Прямоугольная однородная полка ABCD веса G удерживается в горизонтальном положении тросом EH, составляющим с плоскостью полки угол α . Определить натяжение T троса (весом его пренебречь) и реакции петель А и В, если $AK = KB = DE = EC$ и HK перпендикулярно AB.



5) Однородная прямоугольная крышка $ABCD$ ящика может вращаться вокруг горизонтальной оси AB на петлях в точках A и B . Горизонтальная веревка CE , параллельная Ax , удерживает крышку под углом $DAx = 30^\circ$. Определить реакции в петлях, если вес крышки 20 Н.

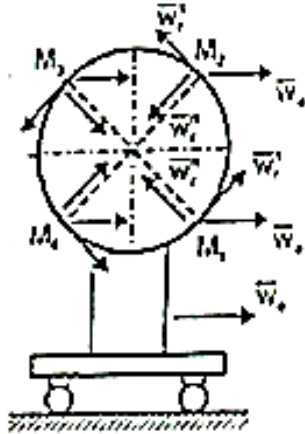


6) Фрамуга $ABDC$ веса $Q = 100$ Н открыта на угол $\alpha = 60^\circ$. Дано $BD = BH$; $CE = ED$; веревка EF параллельна прямой DH . Определить усилие P , необходимое для удержания фрамуги в равновесии, и реакции петель A и B .

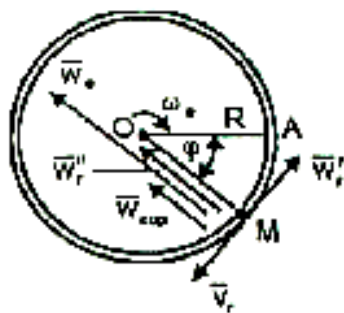


Сложное движение точки

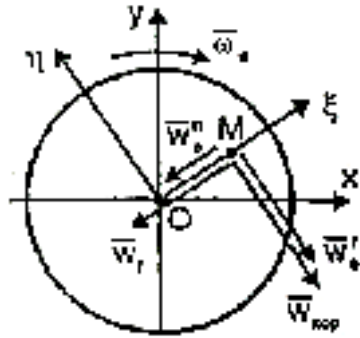
Задача 23.8: Тележка, на которой установлен мотор, движется по горизонтали вправо с постоянным ускорением $w = 0.4 \text{ м/с}^2$. Мотор вращается по закону $\varphi = \frac{1}{2}t^2$. Определить абсолютное ускорение в момент $t=1$ с четырех точек M_1, M_2, M_3, M_4 ротора, отстоящих от оси ротора на расстоянии $l = 0.2\sqrt{2} \text{ м}$ и занимающих в этот момент положение, указанное на рисунке.



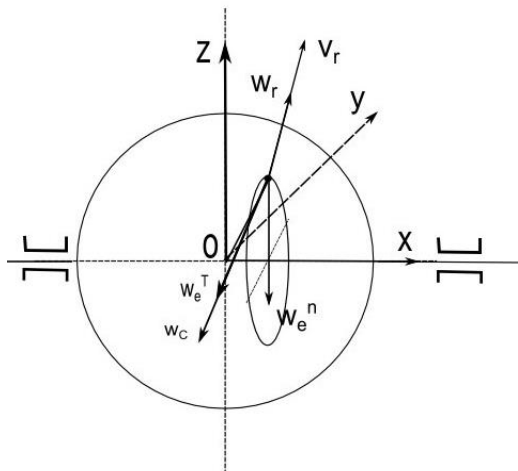
Задача 23.13: Круглая трубка радиуса $R=1 \text{ м}$ вращается вокруг горизонтальной оси O по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью $\omega=1 \text{ рад/с}$. В трубке около ее точки A колеблется шарик M , причем так, что угол $\varphi = \sin \pi t$. Определить абсолютные ускорения шарика: касательное w_τ и нормальное w_n в момент $t = 2\frac{1}{6} \text{ с}$.



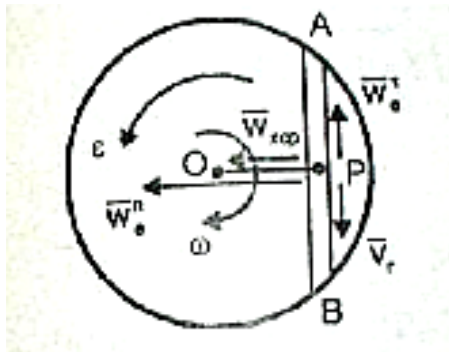
Задача 23.14: Диск вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска, по часовой стрелке равноускоренно с угловым ускорением 1 рад/с^2 ; в момент $t=0$ угловая скорость его равна нулю. По одному из диаметров диска колеблется точка M так, что ее координата $\xi = \sin \pi t$ м, причем t — в секундах. Определить в момент $t = 1\frac{2}{3}$ с проекции абсолютного ускорения точки M на оси ξ, η , связанные с диском.



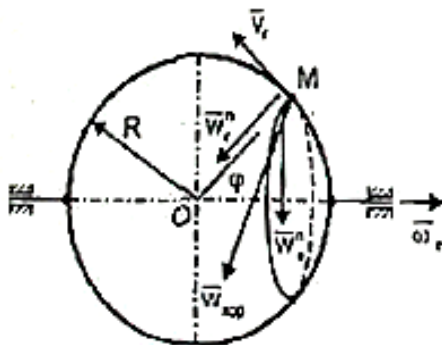
Задача 23.27: По радиусу диска, вращающегося вокруг оси O_1O_2 с угловой скоростью $\omega = 2t$ рад/с в направлении от центра диска к его ободу движется точка M по закону $OM = 4t^2$ см. Радиус OM составляет с осью O_1O_2 угол 60° . Определить величину абсолютного ускорения точки M в момент $t=1$ с.



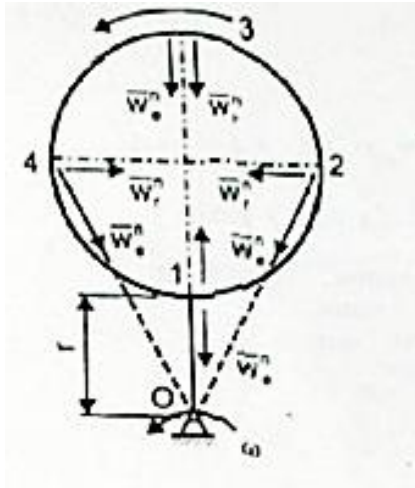
Задача 23.36: Шарик P движется со скоростью $1,2 \frac{m}{c}$ от A до B по хорде AB диска, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Найти абсолютное ускорение шарика, когда он находится на кратчайшем расстоянии от центра диска, равном 30см . В этот момент угловая скорость диска равна $3 \frac{rad}{c}$, угловое замедление равно $8 \frac{rad}{c^2}$.



Задача 23.41: По ободу диска радиуса R , вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω , движется с постоянной по модулю скоростью v точка M . Найдём абсолютное ускорение точки M как функцию угла φ , составленного радиус-вектором точки с осью вращения диска.

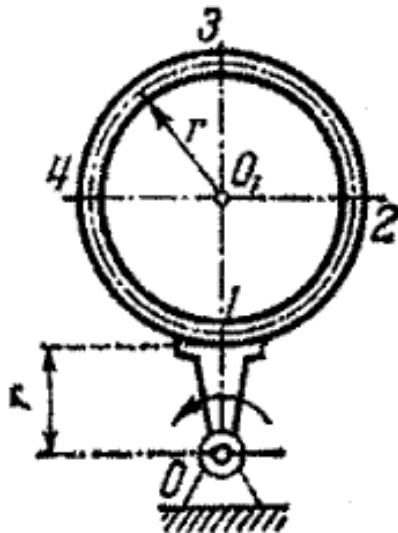


Задача 23.47: Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом АВ, и притом так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в нем в направлении стрелки с постоянной относительной скоростью u . Вал АВ вращается по направлению движения стрелки часов, если смотреть по оси вращения от А к В. Угловая скорость вала ω постоянна. Определить величины абсолютных ускорений частиц жидкости, расположенных в точках 1,2,3 и 4.



Задача 23.48: По условиям предыдущей задачи(23.47), измененным лишь в том отношении, что плоскость оси кольца теперь перпендикулярна оси угла АВ, определить те же величины в двух случаях:

- 1) переносное и относительно движение одного направления
- 2) составляющие движения противоположны по направлению



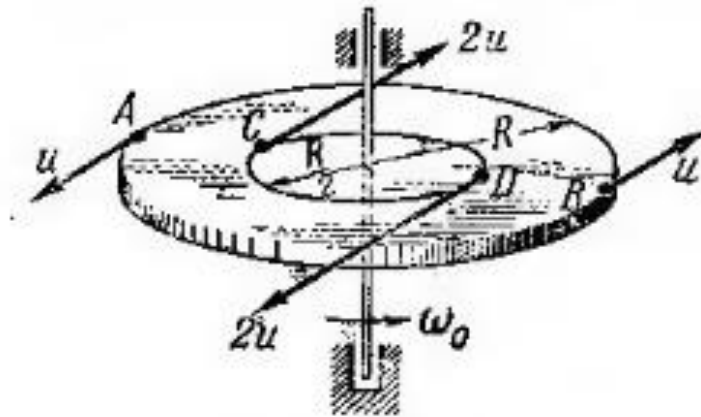
Теорема об изменении кинетического момента

Задача 37.5: Для определения момента трения в цапфах на вал насажен маховик массы 500кг ; радиус инерции маховика $p = 1,5\text{м}$. Маховику сообщена угловая скорость, соответствующая $n = 240 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$; предоставленный самому себе, он остановился через 10 мин. Определить момент трения, считая его постоянным.

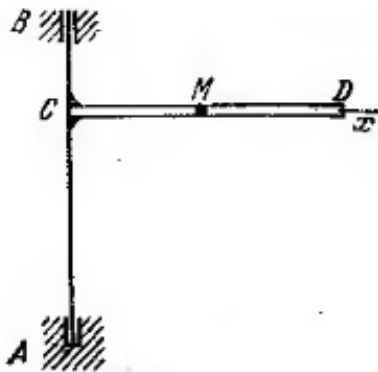
Задача 37.7: Твёрдое тело, находившееся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной вертикальной оси постоянным моментом, равным M : при этом возникает момент сил сопротивления M_1 , пропорциональный квадрату угловой скорости вращения твёрдого тела: $M_1 = \alpha \omega^2$. Найти закон изменения угловой скорости; момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения равен J .

Задача 37.9: Шарик A , находящийся в сосуде с жидкостью и прикреплённый к концу стержня AB длины l , приводится во вращение вокруг вертикальной оси O_1O_2 с начальной угловой скоростью ω_0 . Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha m \omega$, где m - масса шарика, α - коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов n , которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебречь.

Задача 37.53: Круглая горизонтальная платформа вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс, с постоянной угловой скоростью ω_0 ; при этом на платформе стоят четыре человека одинаковой массы: два — на краю платформы, а два — на расстояниях от оси вращения, равных половине радиуса платформы. Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной линейной скоростью u , а люди, стоящие на расстоянии половины радиуса от оси вращения, будут двигаться в противоположную сторону с относительной линейной скоростью $2u$? Людей считать точечными массами, а платформу — круглым однородным диском.

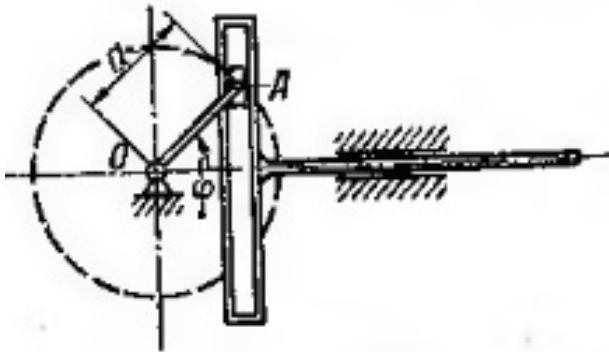


Задача 37.56: Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB . Внутри трубки на расстоянии $MC=a$ от оси находится шарик M . В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0 . Определить угловую скорость ω трубки в момент, когда шарик вылетит из трубки. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен J , L — ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы m .

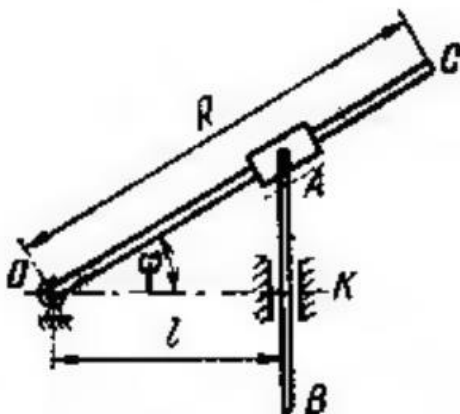


Теорема об изменении кинетической энергии

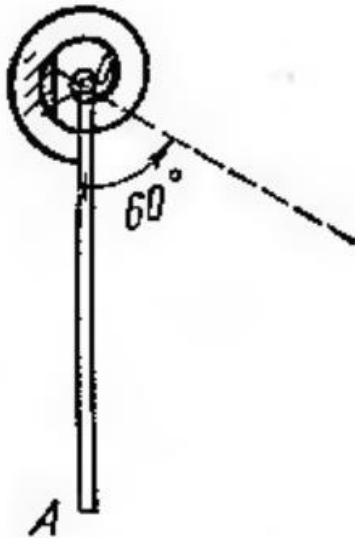
Задача 38.3: Вычислить кинетическую энергию кулисного механизма, если момент инерции кривошипа OA относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости рисунка, равен J_0 ; длина кривошипа равна a , масса кулисы равна m , массой камня A пренебречь. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω . При каких положениях механизма кинетическая энергия достигает наибольшего и наименьшего значений?



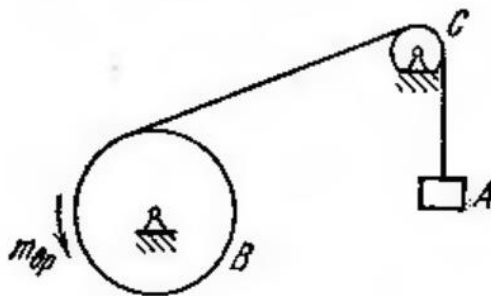
Задача 38.9: В кулисном механизме при качании рычага OC вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рисунка, ползун A , перемещаясь вдоль рычага OC , приводит в движение стержень AB , движущийся в вертикальных направляющих K . Рычаг OC длины R считать однородным стержнем с массой m_1 , масса ползуна равна m_2 , масса стержня AB равна m_3 , $OK=l$. Выразить кинетическую энергию механизма в функции от угловой скорости и угла поворота рычага OC . Ползун считать точечной массой.



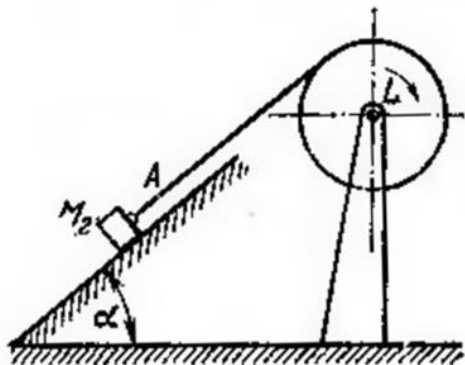
Задача 38.15: Однородный стержень OA длины l и массы M может вращаться вокруг горизонтальной неподвижной оси O , проходящей через его конец перпендикулярно плоскости рисунка. Спиральная пружина, коэффициент упругости которой равен c , одним концом скреплена с неподвижной осью O , а другим — со стержнем. Стержень находится в покое в вертикальном положении, причем пружина при этом не деформирована. Какую скорость надо сообщить концу A стержня для того, чтобы он отклонился от вертикали на угол, равный 60° ?



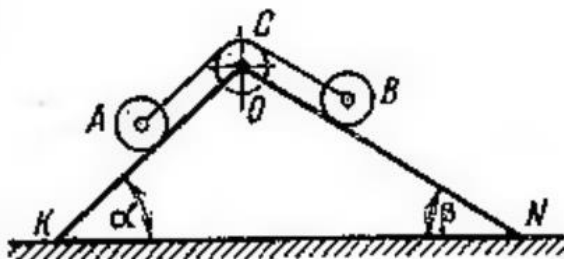
Задача 38.24: На рисунке изображен подъемный механизм лебедки. Груз A массы M_1 поднимается посредством троса, переброшенного через блок C и навитого на барабан B радиуса r и массы M_2 . К барабану приложен вращающий момент, который с момента включения пропорционален квадрату угла поворота φ барабана: $m_{вр} = a\varphi^2$, где a — постоянный коэффициент. Определить скорость груза A в момент, когда он поднимается на высоту h . Массу барабана B считать равномерно распределенной по его ободу. Блок C — сплошной диск массы M_3 . Массой троса пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.



Задача 38.38: Постоянный вращающий момент L приложен к барабану ворота радиуса r и массы M_1 . К концу A намотанного на барабан троса привязан груз массы M_2 , который поднимается по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан ворота, повернувшись на угол φ ? Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f . Массой троса пренебречь, барабан считать однородным круглым цилиндром. В начальный момент система была в покое.

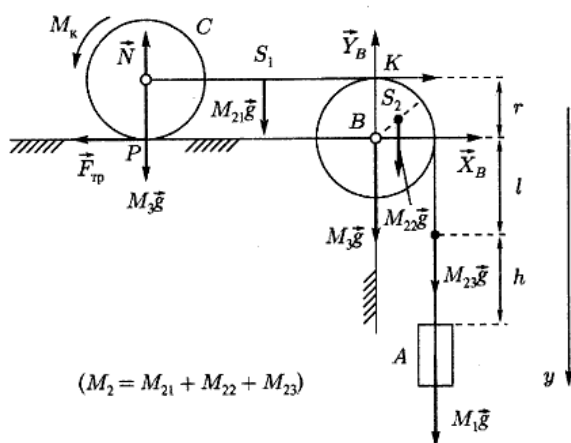


Задача 38.43: Колесо A скатывается без скольжения по наклонной плоскости OK , поднимая посредством нерастяжимого троса колесо B , которое катится без скольжения по наклонной плоскости ON . Трос переброшен через блок C , вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O . Найти скорость оси колеса A при ее перемещении параллельно линии OK на расстояние s . В начальный момент система была в покое. Оба колеса и блок считать однородными дисками одинаковой массы и радиуса. Массой троса пренебречь. Коэффициент трения качения равен f_k , радиусы колес равны r .



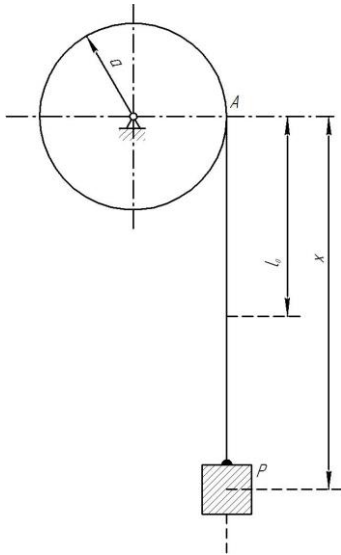
Задача 38.47: Груз А массы M_1 подвешен к однородному нерастяжимому канату длины L и массы M_2 . Канат переброшен через блок В, вращающийся вокруг оси О, перпендикулярной плоскости рисунка. Второй конец каната прикреплен к оси катка С, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости.

Блок В и каток С — однородные круглые диски радиуса r и массы M_3 каждый. Коэффициент трения качения катка С о горизонтальную плоскость равен f_k . В начальный момент, когда система находилась в покое, с блока В свисала часть каната длины l . Определить скорость груза А в зависимости от его вертикального перемещения h .

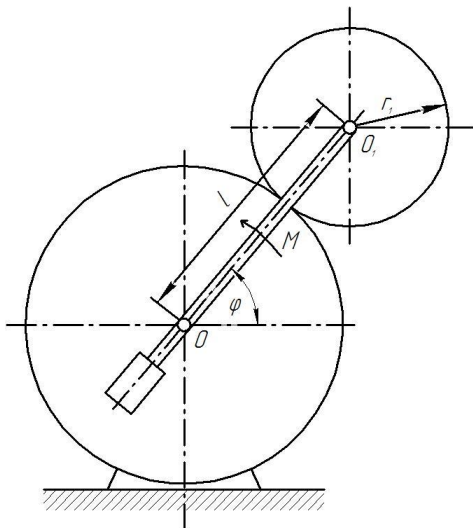


Уравнения Лагранжа II рода

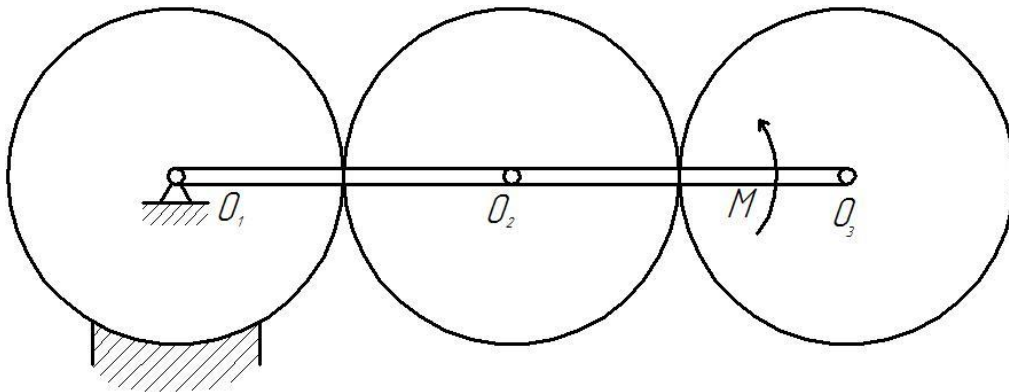
1) Определить движение груза массы m , висящего на однородном тросе массы m_1 , и длины l , трос накручен на барабан радиуса a и массы m_2 , ось вращения горизонтальна; трением пренебречь, массу барабана считать равномерно распределенной по его ободу. В начальный момент $t = 0$ система находилась в покое, длина свисавшей части троса l_0 . Размерами барабана по сравнению с длиной свешивающейся части троса пренебречь.



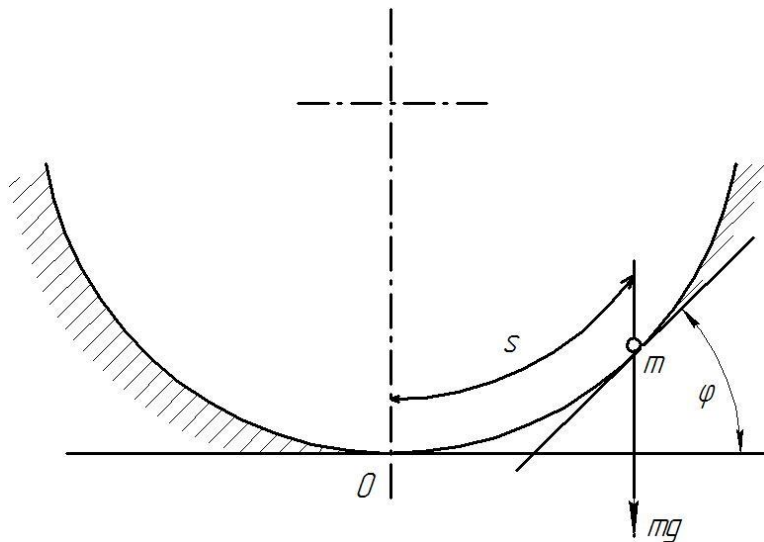
2) В эпициклическом механизме бегающая шестеренка радиуса r_1 насажена на кривошип с противовесом, вращающийся вокруг оси неподвижной шестеренки под действием приложенного момента M . Определить угловое ускорение вращения кривошипа и окружное усилие S в точке касания шестеренок, если расстояние между осями шестеренок равно l , момент инерции кривошипа с противовесом относительно оси вращения кривошипа равен J_0 , масса бегающей шестеренки m_1 , момент инерции шестеренки относительно ее оси J_1 ; трением пренебречь, центр масс шестеренки и кривошипа с противовесом находится на оси вращения кривошипа.



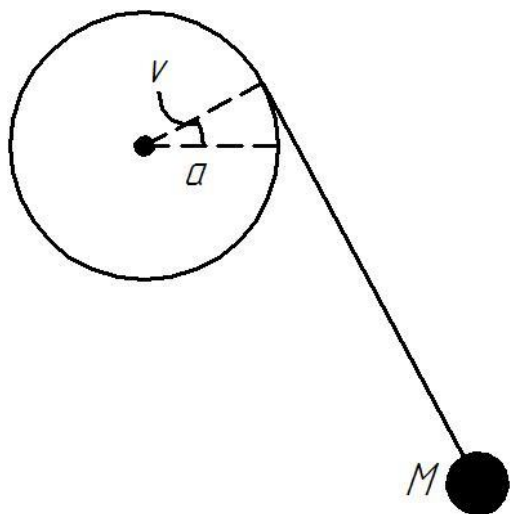
3) В планетарном механизме колесо с осью O_1 неподвижно; к рукоятке O_1O_3 приложен вращающий момент M ; механизм расположен в горизонтальной плоскости. Определить угловое ускорение рукоятки, считая колеса однородными дисками с одинаковыми массами m , и радиусами r и пренебрегая массой рукоятки.



4) Материальная точка массы m движется под влиянием силы тяжести по циклоидальной направляющей, заданной уравнением $s = 4a \sin \varphi$, где s – дуга, отсчитываемая от точки O , а φ – угол касательной к циклоиде с горизонтальной осью. Определить движение точки.



5) Составить уравнение движения маятника, состоящего из материальной точки M массы m , подвешенной на нити, накрученной на неподвижный цилиндр радиуса a . Длина свисающей в положении равновесия части нити равна l . Массой нити пренебречь.



Вращательное движение

Задача 13.5: Вал начинает вращаться равноускоренно из состояния покоя; в первые 5с он совершает 12,5 оборота. Какова его угловая скорость по истечению этих 5с ?

Задача 13.6: Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10мин после начала движения оно имеет угловую скорость, равную $4\pi \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10мин ?

Задача 13.8: С момента выключения мотора пропеллер самолёта, вращавшийся с угловой скоростью, равной $40\pi \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$, сделал до остановки 80 оборотов. Сколько времени прошло с момента выключения мотора до остановки, если считать вращение пропеллера равнозамедленным?

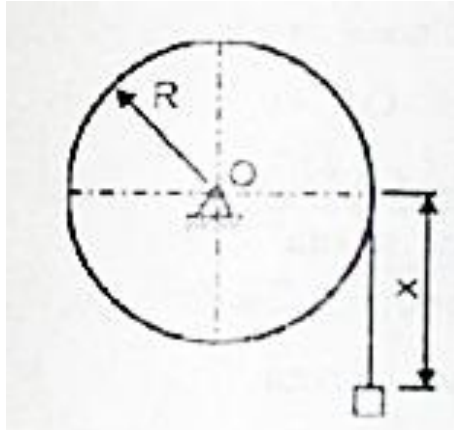
Задача 13.12: Определить скорость v и ускорение w точки, находящейся на поверхности Земли в Ленинграде, принимая во внимание только вращение Земли вокруг своей оси; широта Ленинграда 60° , радиус Земли 6370км .

Задача 13.13: Маховое колесо радиуса $0,5\text{м}$ вращается равномерно вокруг своей оси; скорость точек, лежащих на его ободе, равна $2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Сколько оборотов в минуту делает колесо?

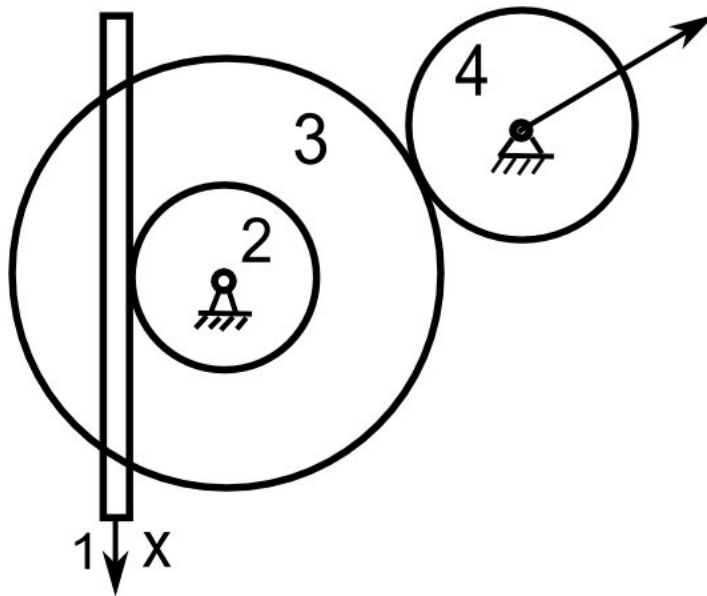
Задача 13.14: Точка A шкива, лежащая на его ободе, движется со скоростью $50 \frac{\text{см}}{\text{с}}$, а некоторая точка B , взятая на одном радиусе с точкой A , движется со скоростью $10 \frac{\text{см}}{\text{с}}$; расстояние $AB = 20\text{см}$. Определить угловую скорость ω и диаметр шкива.

Задача 13.15: Маховое колесо радиуса $R = 2\text{м}$ вращается равноускоренно из состояния покоя; через $t = 10\text{с}$ точки, лежащей на ободе, обладают линейной скоростью $v = 100 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти скорость, нормальное и касательное ускорение точек обода колеса для момента $t = 15\text{с}$.

Задача 13.18: Вал радиуса $R=10\text{см}$ приводится во вращение гирей P , привешенной к нему на нити. Движение гири выражается уравнением $x=100t^2$, где x - расстояние гири от места схода нити с поверхности вала, выраженное в сантиметрах, t - время в секундах. Определить угловую скорость ω и угловое ускорение ε вала, а также полное ускорение w точки на поверхности вала в момент t .



Задача 14.4: В механизме стрелочного индикатора движение от рейки мерительного шрифта 1 передаётся шестерне 2, на оси которой укреплено зубчатое колесо 3, сцепляющееся с шестерней 4, несущей стрелку. Определить угловую скорость стрелки, если движение шрифта задано уравнением $x = a \cdot \sin kt$ и радиусы зубчатых колёс соответственно равны r_2, r_3, r_4 .



Динамика точки

1. Точка массой $m = 4$ кг движется по горизонтальной прямой с ускорением $a = 0.3t$. Определить модуль силы, действующей на точку в направлении ее движения в момент времени $t = 3$ с.
 - ☐ 3.6
 - ☐ 1.2
 - ☐ 4
 - ☐ 1.8
2. Материальная точка массой 1.4 кг движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 + 6t + 3$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке.
 - ☐ 17.2
 - ☐ 16.8
 - ☐ 8.57
 - ☐ 8.4
3. Материальная точка массой $m = 10$ кг движется по оси Ox согласно уравнению $x = 5 \sin 0.2t$. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку в момент времени $t = 7$ с.
 - ☐ 3.63
 - ☐ 1.97
 - ☐ 0.98
 - ☐ 1.8
4. Материальная точка массой $m = 18$ кг движется по окружности радиуса $R = 8$ м согласно уравнению $s = e^{0.3t}$. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на касательную к траектории в момент времени $t = 10$ с.
 - ☐ 12.4
 - ☐ 16.3
 - ☐ 42.4
 - ☐ 32.5
5. Материальная точка массой $m = 20$ кг движется по окружности радиуса $R = 6$ м согласно уравнению $s = \ln t$. Определить проекцию равнодействующей сил, приложенных к точке, на нормаль к траектории в момент времени $t = 0.5$ с.
 - ☐ 12.4
 - ☐ 16.3
 - ☐ 13.3
 - ☐ 26.7
6. Тело движется вниз по гладкой плоскости, которая наполнена под углом $\alpha = 25^\circ$ к горизонту. Определить ускорение тела.
 - ☐ 4.15
 - ☐ 3.55
 - ☐ 5.65
 - ☐ 6.45

7. Материальная точка массой $m = 50$ кг из состояния покоя движется по гладкой горизонтальной направляющей под действием силы $F = 50$ Н, вектор которой образует постоянный угол $\alpha = 20^\circ$ с направляющей. Определить путь, пройденный точкой за время $t = 20$ с.

- ☐ 188
- ☐ 143
- ☐ 344
- ☐ 256

8. Материальная точка движется из состояния покоя вниз по гладкой плоскости, которая наклонена под углом 10° к горизонту. Определить, за какое время точка пройдет путь 30 м.

- ☐ 5.93
- ☐ 6.57
- ☐ 8.24
- ☐ 7.42

9. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется по горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = 5\cos 0.5 t$. Определить скорость точки в момент $t = 4$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.

- ☐ 4.55
- ☐ 3.44
- ☐ 6.42
- ☐ 2.25

10. Точка массой m движется по оси Ox под действием силы $F_x = 6 m \sin 2 t$. В начальный момент времени скорость точки $v_{0x} = 3$ м/с. Определить постоянную интегрирования в уравнении скорости.

- ☐ 4
- ☐ 3
- ☐ 6
- ☐ 8

11. Материальная точка $m = 10$ кг движется по криволинейной траектории под действием силы $F = 0.4t$. Определить касательное ускорение точки в момент времени $t = 40$ с, когда угол между силой и вектором скорости равен 30° .

- ☐ 2.45
- ☐ 1.39
- ☐ 5.44
- ☐ 4.76

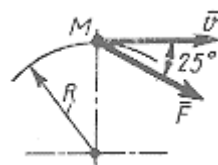
12. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы $\vec{F} = 15\vec{\tau} + 0,3t\vec{n}$. Определить массу точки, если в момент времени $t = 20$ с её ускорение $w = 0.6$ м/с².

- ☐ 26.9
- ☐ 23.8
- ☐ 38.3
- ☐ 43.3

13. Материальная точка $m = 4$ кг движется по криволинейной траектории под действием силы $\vec{F} = 0,4t\vec{\tau} + 3\vec{n}$. Определить модуль ускорения точки в момент $t = 10$ с.

- ☐ 1.25
- ☐ 3.42
- ☐ 2.33
- ☐ 6.34

14. Материальная точка M массой $m = 1.6$ кг движется из состояния покоя в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 12$ м под действием силы $F = 0.2t$. Определить скорость точки в момент времени $t = 18$ с, если сила образует постоянный угол 25° с вектором скорости.

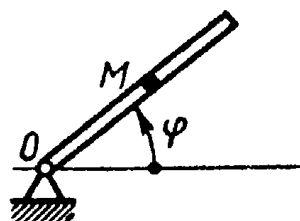


- ☐ 3.38
- ☐ 5.76
- ☐ 2.55
- ☐ 6.67

15. Материальная точка массой $m = 12$ кг движется из состояния покоя по направляющей радиуса R , расположенной в горизонтальной плоскости. Определить скорость точки в момент $t = 4$ с после начала движения, если на нее действует сила $F = 22$ Н, которая образует постоянный угол 40° с касательной к траектории точки.

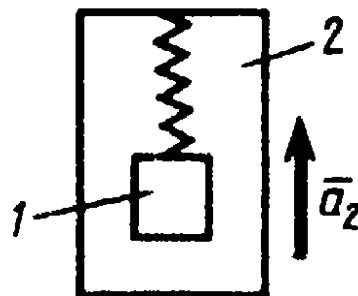
- ☐ 4.42
- ☐ 7.56
- ☐ 3.23
- ☐ 5.62

16. Трубка вращается вокруг оси O по закону $\varphi = t^2$. В трубке движется шарик M массой $m_1 = 0,1$ кг по закону $OM = 0,2t^3$. Определить модуль кориолисовой силы инерции шарика в момент времени $t = 1$ с.



- ☐ 9.9
- ☐ 0.24
- ☐ 0.69
- ☐ 0.581

17. Кабина 2 лифта движется вверх с ускорением $a_2 = 0,5g$. Определить силу натяжения пружины, если подвешенный груз 1 весом 100 Н находится в состоянии относительного покоя.

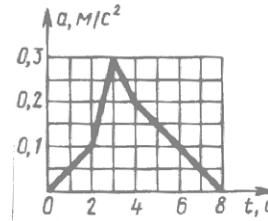


- ☐ 10
- ☐ 200
- ☐ 100
- ☐ 150

Динамика точки

1. Ускорение точки массой $m = 27$ кг по прямой задано графиком функции $a = a(t)$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке в момент времени $t = 5$ с.

- ☐ 3.6
- ☐ 8.1
- ☐ 4.05
- ☐ 0.15

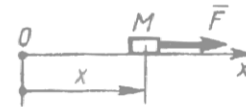


2. Определить модуль равнодействующей сил, действующих на материальную точку массой $m = 3$ кг в момент времени $t = 6$ с, если она движется по оси Ox согласно уравнению $x = 0.04t^3$.

- ☐ 3.62
- ☐ 8.14
- ☐ 3.08
- ☐ 4.32

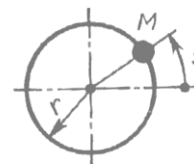
3. Тело M массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x = 10 \sin 2t$ под действием силы $\vec{F}$. Найти наибольшее значение этой силы.

- ☐ 40
- ☐ 2
- ☐ 80
- ☐ 20



4. Материальная точка M массой 1.2 кг движется по окружности радиуса $r = 0.6$ м согласно уравнению $s = 2.4t$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к материальной точке.

- ☐ 11.5
- ☐ 14.1
- ☐ 10.7
- ☐ 16.4

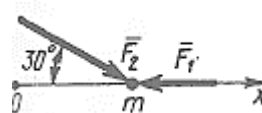


5. Материальная точка массой $m = 14$ кг движется по окружности радиуса $R = 7$ м с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 0.5$ м/с². Определить модуль равнодействующей сил, действующих на точку, в момент времени $t = 4$ с, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.

- ☐ 12.4
- ☐ 16.3
- ☐ 10.6
- ☐ 5.31

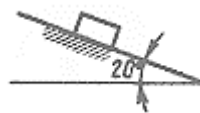
6. Материальная точка массой $m = 5$ кг движется под действием сил $F_1 = 3$ Н и $F_2 = 10$ Н. Определить проекцию ускорения точки на ось Ox .

- 2.43
- 3.11
- 1.13
- 4.45



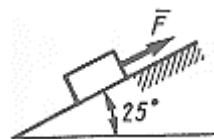
7. По наклонной плоскости из состояния покоя начинает скользить тело массой $m = 1$ кг. Определить максимальную скорость тела, если сила сопротивления движению $R = 0,08v$.

- 41.9
- 34.5
- 55.3
- 70.5



8. Тело массой $m = 200$ кг из состояния покоя движется вверх по гладкой наклонной плоскости под действием силы $F = 1$ кН. Определить время, за которое тело переместится расстояние 8 м.

- 3.76
- 4.33
- 5.79
- 8.31



9. Тело массой 1 кг падает по вертикали, сила сопротивления воздуха $R = 0.03v$. Определить максимальную скорость падения тела.

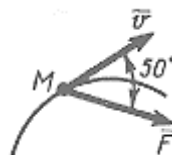
- 327
- 412
- 234
- 536

10. Материальная точка массой $m = 7$ кг из состояния покоя движется по оси Ox под действием силы $F_x = 7e^t$. Определить скорость точки в момент времени $t = 2$ с.

- 7.43
- 6.39
- 5.45
- 8.34

11. Материальная точка M массой $m = 6$ кг перемещается в горизонтальной плоскости по криволинейной траектории под действием силы $F = 8$ Н. Определить касательное ускорение точки.

- 0.532
- 0.742
- 0.433
- 0.857



12. Материальная точка движется по криволинейной траектории под действием силы $\vec{F} = 9\vec{\tau} + 8\vec{n}$. Определить массу точки, если ее ускорение $w = 0.5$ м/с².

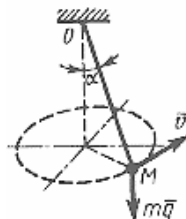
- 20.1
- 23.3
- 25.6
- 24.1

13. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется в плоскости Oxy под действием силы, проекции которой $F_x = 2\sin 0,5\pi t$ и $F_y = 5\cos \pi t$. Определить модуль ускорения точки в момент времени $t = 1$ с.

- ☐ 4.23
- ☐ 5.44
- ☐ 2.69
- ☐ 3.66

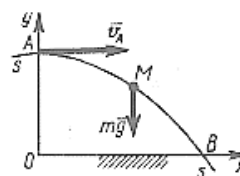
14. Определить скорость точки M конического маятника, который при длине нити $OM=1$ м описывает конус с углом при вершине $\alpha = 45^\circ$.

- ☐ 4.76
- ☐ 2.63
- ☐ 3.44
- ☐ 5.64



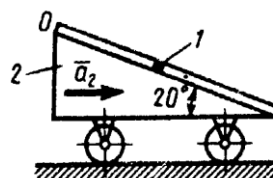
15. Материальная точка M движется по направлению $s-s$ в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Определить скорость точки в положении B , если в положении A её скорость $v_A = 30$ м/с, а высота $OA = 600$ м.

- ☐ 124
- ☐ 135
- ☐ 113
- ☐ 155



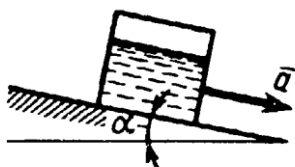
16. Шарик 1 массой m_1 движется из состояния относительного покоя в точке O по гладкому цилиндрическому каналу тела 2. Тело 2 движется по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением $a_2 = 3,5$ м/с². Определить скорость относительного движения шарика в момент $t = 5$ с.

- ☐ 1.676
- ☐ 0.033
- ☐ 0.331
- ☐ 0.825



17. С каким ускорением a должен двигаться сосуд, наполненный водой, чтобы свободная поверхность воды стала параллельной наклонной плоскости, если угол наклона плоскости $\alpha = 20^\circ$.

- ☐ 3.36
- ☐ 2
- ☐ 10
- ☐ 4.2



Кинематика точки

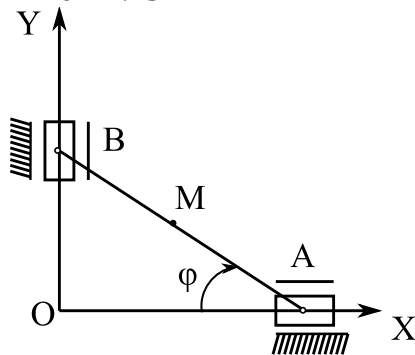
1. Заданы уравнения движения точки $x = 1 + 2 \sin(0,1t)$, $y = 3t$. Определить координату точки x в момент времени, когда ее координата $y = 12$ м.
 - ☐ 1.78
 - ☐ 3.14
 - ☐ 17.8
 - ☐ 0
2. Для точки A заданы уравнения движения $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$. Определить угол между осью Ox и радиусом-вектором $\overline{OA}$ точки в момент времени $t = 1,5$ с.
 - ☐ 1
 - ☐ 3.04
 - ☐ 0.76
 - ☐ 1.52
3. Дано уравнение движения точки $\vec{r} = t^2 \vec{i} + 2t \vec{j} + 3\vec{k}$. Определить модуль скорости точки в момент времени $t = 2$ с.
 - ☐ 4.47
 - ☐ 2.235
 - ☐ 8.94
 - ☐ 0
4. Дано уравнение движения точки $x = 2 \sin \pi t$. Определить скорости в ближайший после начала движения момент времени t , когда координата $x = 0,5$ м.
 - ☐ 2.72
 - ☐ 1.36
 - ☐ 0
 - ☐ 0.5
5. Скорость автомобиля равномерно увеличивается в течение 12 с от нуля до 60 км/ч. Определить ускорение автомобиля.
 - ☐ 4.17
 - ☐ -1.39
 - ☐ 1.39
 - ☐ 0
6. Точка начинает движение из состояния покоя и движется по прямой с постоянным ускорением $w = 0,2 \text{ м/с}^2$. Определить путь, который точка пройдет за промежуток времени от $t_1 = 4$ с до $t_2 = 10$ с.
 - ☐ 8.4
 - ☐ 1.2
 - ☐ 16.8
 - ☐ 4.2

7. Ускорение точки $\vec{w} = 0,5t\vec{i} + 0,2t^2\vec{j}$. Определить модуль ускорения в момент времени $t = 2c$.

- ☐ 12.8
- ☐ -1.28
- ☐ 0.64
- ☐ 1.28

8. Положение линейки AB определяется углом $\varphi = 0,2t$. Определить в $см/с^2$ проекцию ускорения точки M на ось Oy в момент времени $t = 3c$, если расстояние $AM = 50см$.

- ☐ 10
- ☐ 2.26
- ☐ -1.13
- ☐ 1.13



9. Даны уравнения движения точки: $x = 0,3t^2$, $y = 2t^2$, где x и y в $см$. Определить, в какой момент времени t ускорение точки равно $7см/с^2$.

- ☐ 3.19
- ☐ 6.38
- ☐ 1.5
- ☐ 9.57

10. Точка движется по прямой Ox с ускорением $w_x = 0,7t$. Определить координату x точки в момент времени $t = 5c$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$ и координата $x_0 = 0$.

- ☐ 29.2
- ☐ 7.3
- ☐ 14.6
- ☐ 9.6

11. Точка движется по траектории согласно уравнению $s = 15 + 4\sin \pi t$. Указать ближайший после начала движения момент времени t_1 , при котором $s_1 = 17м$.

- ☐ 0.167
- ☐ 0.501
- ☐ 1.002
- ☐ 3.582

12. Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$. Определить криволинейную координату точки в момент времени $t = 5\text{с}$, если при $t_0 = 0$ $s_0 = 0$ и точка движется в положительном направлении координаты s .

- ☐ 10
- ☐ 15
- ☐ 20
- ☐ 25

13. Точка движется по окружности согласно уравнению $s = t^3 + 2t^2 + 3t$. Определить криволинейную координату точки в момент времени, когда касательное ускорение $w_\tau = 16\text{м/с}^2$.

- ☐ 11
- ☐ 22
- ☐ 33
- ☐ 44

14. Проекция ускорения точки во время движения определяются выражениями $w_x = 0,8t$, $w_y = 0,8\text{м/с}^2$. Найти касательное ускорение в момент времени $t = 2\text{с}$, если при $t_0 = 0$ скорость точки $v_0 = 0$.

- ☐ 0.85
- ☐ 1.34
- ☐ 1.70
- ☐ 2.56

15. Точка движется с постоянной скоростью $v = 30\text{см/с}$ по дуге окружности радиуса $r = 2\text{м}$. Определить нормальное ускорение точки в см/с^2 .

- ☐ 1.5
- ☐ 2.5
- ☐ 3.5
- ☐ 4.5

16. Электровоз движется по дуге окружности радиуса $R = 300\text{м}$. Определить максимальную скорость электровоза в км/ч , при которой нормальное ускорение не превышало бы 1м/с^2 .

- ☐ 31.2
- ☐ 62.4
- ☐ 15.6
- ☐ 124.8

17. Центрифуга для тренировки пилотов устроена так, что в центре кабины с человеком находится на расстоянии $r = 5\text{м}$ от оси вращения. Определить скорость центра кабины в случае, когда ее нормальное ускорение $w_n = 5g$.

- ☐ 15.7
- ☐ 7.85
- ☐ 31.4
- ☐ 9.8

18. Точка движется по окружности радиуса $R=7\text{ м}$ согласно уравнению $s=0,7t^2$. Определить координату точки в момент времени, когда ее нормальное ускорение $w_n=3\text{ м/с}^2$.
- ☐ 2.50
 - ☐ 5.0
 - ☐ 7.50
 - ☐ 10.0
19. Даны нормальное $w_n=2,5\text{ м/с}^2$ и касательное $w_\tau=1,5\text{ м/с}^2$ ускорения точки. Определить полное ускорение точки.
- ☐ 2.92
 - ☐ 5.84
 - ☐ -5.84
 - ☐ 9.8
20. Задано уравнение движения точки по криволинейной траектории: $s=0,2t^2+0,3t$. Определить полное ускорение в момент времени $t=3\text{ с}$, если в это момент радиус кривизны траектории $\rho=1,5\text{ м}$.
- ☐ 1.55
 - ☐ 2.6
 - ☐ 6.3
 - ☐ 7.1
21. Определить скорость точки в момент времени, когда радиус кривизны траектории $\rho=5\text{ м}$, касательное ускорение $w_\tau=2\text{ м/с}^2$, а $\text{tg}\beta=3$, где β – угол между векторами скорости и ускорения точки.
- ☐ 2.74
 - ☐ 3.86
 - ☐ 5.48
 - ☐ 10.4
22. Точка движется по криволинейной траектории с касательным ускорением $w_\tau=2\text{ м/с}^2$. Определить угол в градусах между векторами скорости и полного ускорения точки в момент времени $t=2\text{ с}$, когда радиус кривизны траектории $\rho=4\text{ м}$, если при $t_0=0$ скорость точки $v_0=0$.
- ☐ 90
 - ☐ 45
 - ☐ 23.5
 - ☐ 63.4
23. Определить модуль скорости, если его вектор в этот момент времени образует угол 45° с полярным радиусом, а радиальная скорость $\dot{r}=2\text{ м/с}$.
- ☐ 2.83
 - ☐ 15
 - ☐ 28.3
 - ☐ 1.5
24. Точка движется в плоскости. Дано уравнение полярного радиуса $r=\sin\pi t$. Определить полярный угол φ в момент времени, когда $r=1\text{ м}$, если $d\varphi/dt=0.4\text{ рад/с}$. При $t_0=0, \varphi_0=0$
- ☐ 0.1
 - ☐ 0.15

- 0.2
- 0.25

Кинематика точки

1. Задано уравнение движения точки $\vec{r} = 3t\vec{i} + 4t\vec{j}$. Определить координату в момент времени, когда $r = 5\text{ м}$.

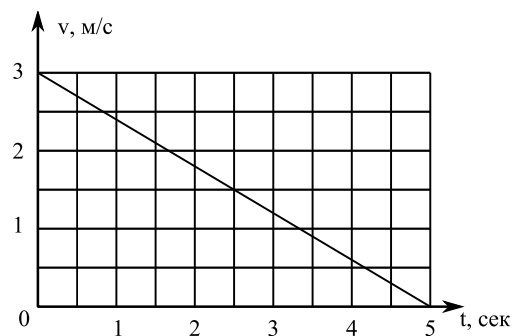
- ☐ 2
- ☐ 4
- ☐ 8
- ☐ 10

2. Для точки A заданы уравнения движения $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$. Определить угол между осью Ox и радиусом-вектором $\overline{OA}$ точки в момент времени $t = 1,5\text{ с}$.

- ☐ 1
- ☐ 3.04
- ☐ 0.76
- ☐ 1.52

3. Дан график скорости движения точки $v = f(t)$. Определить пройденный путь в момент времени $t = 5\text{ с}$.

- ☐ 10
- ☐ 15
- ☐ 7.5
- ☐ 5

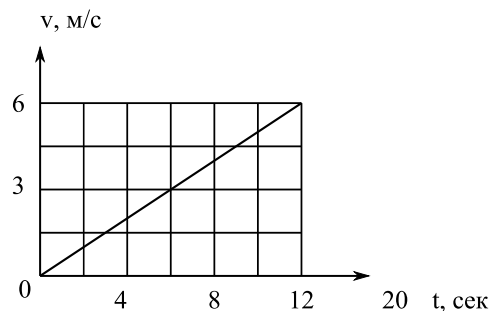


4. Проекция скорости точки $v_x = 2\cos \pi t$. Определить координату x точки в момент времени $t = 1\text{ с}$, если при $t_0 = 0$ координата $x_0 = 0$.

- ☐ 6.28
- ☐ 3.14
- ☐ 1
- ☐ 0

5. Дан график скорости $v = f(t)$ прямолинейного движения точки. Определить ускорение точки в момент времени $t = 12\text{ с}$.

- ☐ 0.5
- ☐ 2
- ☐ 72
- ☐ 6

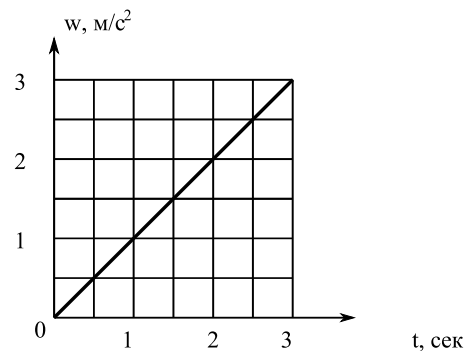


6. Скорость автомобиля 90 км/ч . Определить путь торможения до остановки, если среднее замедление автомобиля равно 3 м/с .

- ☐ 52
- ☐ 180
- ☐ 104
- ☐ 30

7. Дан график ускорения $w = f(t)$ прямолинейно движущейся точки. Определить скорость точки в момент времени $t = 2 \text{ с}$, если при $t_0 = 0$ скорость $v_0 = 0$.

- ☐ 2
- ☐ 4
- ☐ 6
- ☐ 8



8. Движение точки задано уравнениями $dx/dt = 0,3t^2$ и $y = 0,2t^3$. Определить ускорение в момент времени $t = 7 \text{ с}$.

- ☐ 9.39
- ☐ -9.39
- ☐ 0
- ☐ -4.695

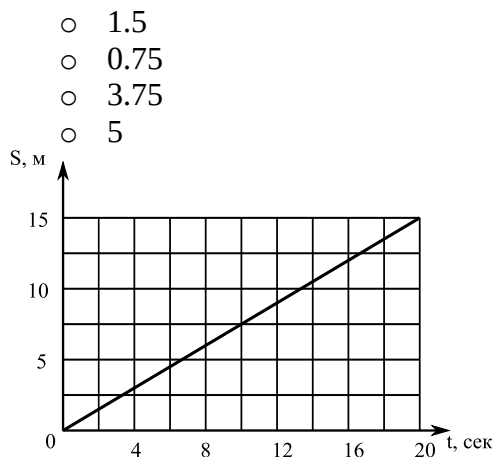
9. Положение точки на плоскости определяется ее радиус-вектором $\vec{r} = 0,3t^2\vec{i} + 0,1t^3\vec{j}$. Определить модуль ускорения точки в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

- ☐ 1.34
- ☐ 2.68
- ☐ 0.67
- ☐ 0

10. Точка движется прямолинейно с ускорением $w = 0,2t$. Определить момент времени t , когда скорость точки будет равна 2 м/с , если при $t_0 = 0$ скоростью $v_0 = 0$.

- ☐ 4.47
- ☐ 8.94
- ☐ 10.6
- ☐ 5.8

11. Дан график перемещения точки $s = s(t)$. Определить скорость точки.

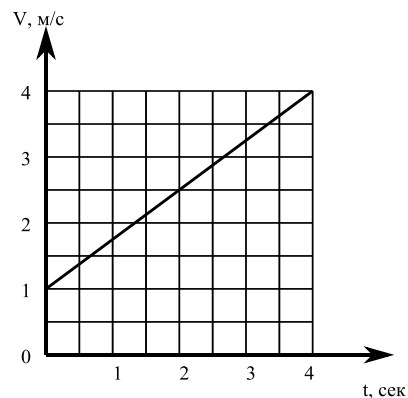


12. Задан закон движения точки в прямоугольной системе координат: $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 5t$. Определить криволинейную координату точки в момент времени $t = 10\text{с}$, если при $t_0 = 0$ $s_0 = 14\text{м}$ и точка движется в положительном направлении координаты s .

- ☐ 37.8
☐ 18.9
☐ 9.45
☐ 75.6

13. Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки. Определить касательное ускорение точки.

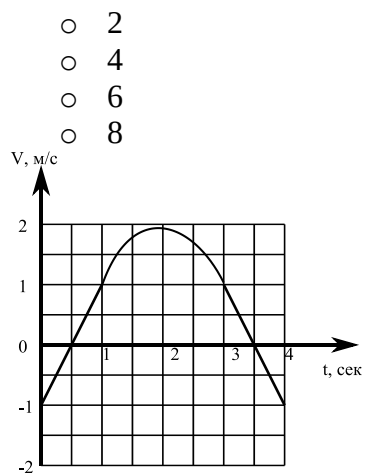
- ☐ 1.5
☐ 1
☐ 0.75
☐ 0.25



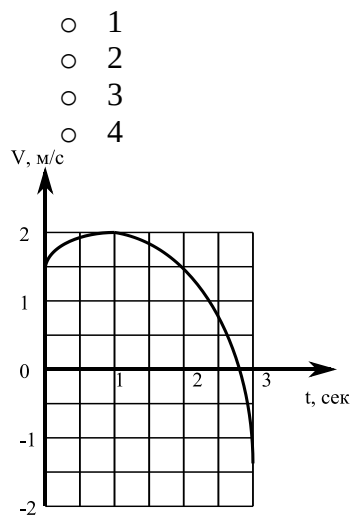
14. Ускорение точки в декартовых координатах задано выражением $\vec{w} = 0,1t\vec{i} + 0,9\vec{j}$. Определить касательное ускорение точки в момент времени $t = 10\text{с}$, если при $t_0 = 0$ скорость точки $v_0 = 0$.

- ☐ 1.27
☐ 2.54
☐ 3.81
☐ 7.62

15. Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки по окружности радиуса R . Найти время в интервале от 0 до 4с, при котором нормальное ускорение точки будет максимальным.

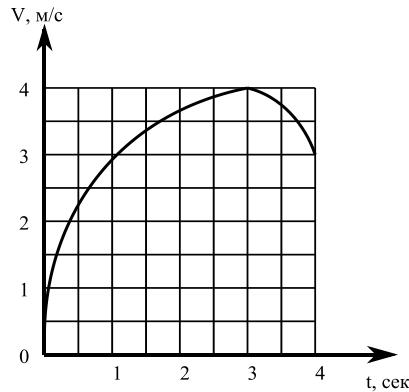


16. Дан график изменения криволинейной координаты $s = s(t)$ движения точки по окружности радиуса R . Найти момент времени t , когда нормальное ускорение точки $w_n = 0$.



17. Дан график скорости $v = v(t)$ движения точки по окружности радиуса 6 м . Определить нормальное ускорение точки в момент времени $t = 3\text{ с}$.

- ☐ 10.68
- ☐ 5.34
- ☐ 2.67
- ☐ 1.38



18. Точка движется по окружности, радиус которой $r = 20\text{ м}$, со скоростью $v = e^t$. Определить момент времени, когда нормальное ускорение точки $w_n = 3\text{ м/с}^2$.

- ☐ 1
- ☐ 2.05
- ☐ 4.1
- ☐ 5.5

19. Определить модуль ускорения точки, если его вектор $\vec{w} = 2,5\vec{n} + 3,5\vec{\tau}$, где $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ - орты естественного триэдра.

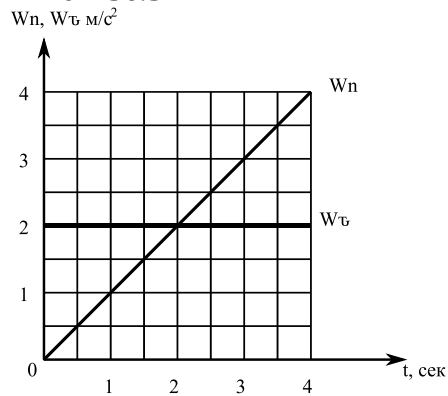
- ☐ 2.15
- ☐ 4.30
- ☐ 8.6
- ☐ -8.6

20. Точка движется по окружности, радиус которой $r = 50\text{ м}$, со скоростью $v = 2t$. Определить модуль полного ускорения в момент времени $t = 5\text{ с}$.

- ☐ 1.41
- ☐ 2.83
- ☐ 5.67
- ☐ 7.23

21. Даны графики ускорения $w_\tau = w_\tau(t)$ и $w_n = w_n(t)$. Определить, какой угол в градусах образует полное ускорение с направлением скорости в момент времени $t = 3\text{с}$.

- ☐ 14.5
- ☐ 28.2
- ☐ 46.8
- ☐ 56.3



22. По окружности радиуса $r=1\text{м}$ движется точка согласно уравнению $s=0,1t^2$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t=2\text{с}$.

- ☐ 1.87
- ☐ 2.97
- ☐ -4.53
- ☐ 7.52

23. Трансверсальная скорость точки равна 3м/с . Определить радиальную скорость, если вектор полной скорости образует угол в 30 градусов с полярным радиусом.

- ☐ 52
- ☐ 5.2
- ☐ 0.52
- ☐ 10

24. Точка движется в плоскости. Уравнение полярного угла $\varphi=0.3t$, определить полярный радиус r в момент времени, когда полярный угол достигнет 3 рад, если $dr/dt=0.4\text{ м/с}$. При $t_0=0, r_0=0$

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

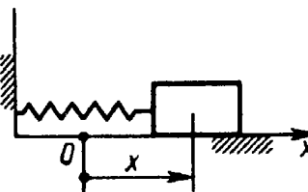
Теорема об изменении кинетической энергии

1. Материальная точка массой $m=1\text{ кг}$ движется по окружности со скоростью $v=1\text{ м/с}$. Определить кинетическую энергию этой точки.

- ☐ 2
- ☐ 0.5
- ☐ 1
- ☐ 1.5

2. Груз массой 1 кг совершает свободные колебания согласно закону $x=0,1\sin 10t$. Коэффициент жесткости пружины $c=100\text{ Н/м}$. Определить полную механическую энергию груза при $x=0,05\text{ м}$, если при $x=0$ потенциальная энергия равна нулю.

- ☐ 2.6
- ☐ 0.74
- ☐ 0.5
- ☐ 0.125



3. Какую работу совершают действующие на материальную точку силы, если ее кинетическая энергия уменьшается с 50 до 25 Дж?

- ☐ -15
- ☐ 10
- ☐ -25
- ☐ 5

4. По горизонтальной плоскости движется массой $m=2\text{ кг}$, которому была сообщена начальная скорость $v_0=4\text{ м/с}$. До остановки тело прошло путь, равный 16 м. Определить модуль силы трения скольжения $\overline{F}_{тр}$ между телом и плоскостью.

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 4



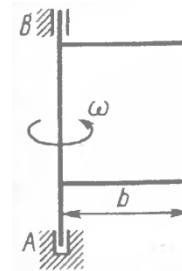
5. Тело массой $m=100\text{ кг}$ начинает движение из состояния покоя по горизонтальной шероховатой плоскости под действием постоянной силы $\overline{F}$. Пройдя путь, равный 5 м, скорость тела становится равной 5 м/с. Определить модуль силы $\overline{F}$, если сила трения скольжения $F_{тр}=20\text{ Н}$.

- ☐ 120
- ☐ 270
- ☐ 330
- ☐ 400



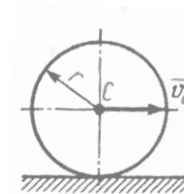
6. Однородная прямоугольная пластина массой $m = 18$ кг вращается вокруг оси АВ с угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с. Определить кинетическую энергию пластины, если длина $b = 1$ м.

- ☐ 4.8
- ☐ 48
- ☐ 5.4
- ☐ 54



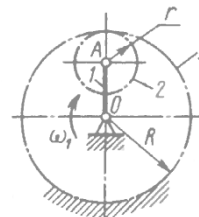
7. Лист массой $m = 2$ кг радиуса $r = 1$ м катится по плоскости, его момент инерции относительно оси, проходящей через центр С перпендикулярно плоскости рисунка, $I_C = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Определить кинетическую энергию диска в момент времени, когда скорость его центра $v_C = 1$ м/с.

- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 0.5



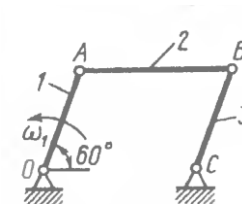
8. Кривошип 1, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с, приводит в движение колесо 2 массой 1 кг, которое можно считать однородным диском. Момент инерции кривошипа относительно оси вращения $I = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Определить кинетическую энергию механизма, если радиус $R = 3r = 0.6$ м.

- ☐ 7
- ☐ 15
- ☐ 6
- ☐ 17



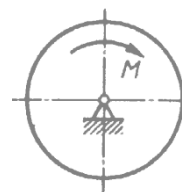
9. Кривошип 1 шарнирного параллелограмма длиной $OA = 0.4$ м вращается равномерно вокруг оси О с угловой скоростью $\omega_1 = 10$ рад/с. Моменты инерции кривошипов 1 и 3 относительно их осей вращения равны $0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, масса шатуна 2 равна 5 кг. Определить кинетическую энергию механизма.

- ☐ 5
- ☐ 10
- ☐ 25
- ☐ 50



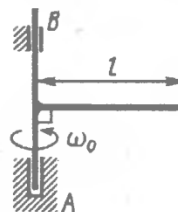
10. К ротору, момент инерции которого относительно оси вращения равен $3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, применен постоянный момент пары сил $M = 9 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определить угловое ускорение ротора.

- ☐ 3
- ☐ 27
- ☐ 9
- ☐ 81



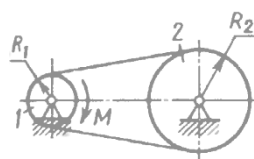
11. К валу АВ жестко прикреплен горизонтальный однородный стержень длиной $l = 2$ м и массой $m = 12$ кг. Вал сообщена угловая скорость $\omega_0 = 2$ рад/с. Предоставленный самому себе, он остановился, сделав 20 оборотов. Определить момент трения в подшипниках, считая его постоянным.

- ☐ 2.55
- ☐ 0.255
- ☐ 25.5
- ☐ 24



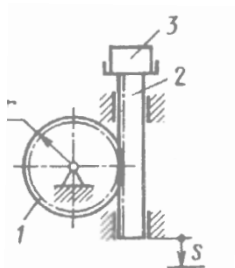
12. Ременная передача начинает движение из состояния покоя под действием постоянного момента пары сил $M = 2.5$ Н*м. моменты инерции шкивов относительно их осей вращения $I_2 = 2I_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Определить угловую скорость шкива 1 после трех оборотов, если радиусы шариков $R_2 = 2R_1$.

- ☐ 1.12
- ☐ 11.2
- ☐ 112
- ☐ 0.112



13. Момент инерции зубчатого колеса 1 относительно оси вращения равен $0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Общая масса рейки 2 и груза 3 равна 100 кг. Определить скорость рейки при ее перемещении на расстояние $s = 0.2$ м, если вначале система находилась в покое. Радиус колеса $r = 0.1$ м.

- ☐ 1.89
- ☐ 18.9
- ☐ 20.
- ☐ 20.8



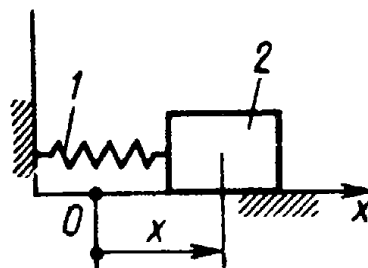
Теорема об изменении кинетической энергии

1. Прямолинейное движение материальной точки массой $m = 4 \text{ кг}$ задано уравнением $s = 4t + 2t^2$. Определить кинетическую энергию этой точки в момент времени $t = 2 \text{ с}$.

- ☐ 28
- ☐ 84
- ☐ 288
- ☐ 146

2. Груз 2 совершает свободные колебания согласно закону $x = 0,1 \sin 10t$. Жесткость пружины 1 равна 100 Н/м . Определить потенциальную энергию груза при $x = 0,05 \text{ м}$, если при $x = 0$ его потенциальная энергия равна нулю.

- ☐ 2.6
- ☐ 0.74
- ☐ 0.05
- ☐ 0.125

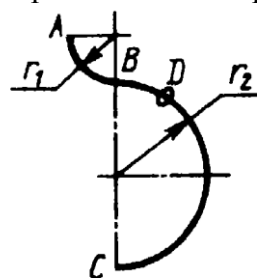


3. Свободное падение материальной точки массой m начинается из состояния покоя. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить путь, пройденный точкой к моменту времени, когда она имеет скорость 3 м/с .

- ☐ 0.333
- ☐ 0.459
- ☐ 0.666
- ☐ 0.001

4. По проволоке ABC, расположенной в вертикальной плоскости и изогнутой в виде дуг окружностей радиусов $r_1 = 1 \text{ м}$, $r_2 = 2 \text{ м}$, может скользить без трения кольцо D массой m . Определить скорость кольца в точке C, если его скорость в точке A равна нулю.

- ☐ 2.24
- ☐ 12
- ☐ 9.9
- ☐ 5.6

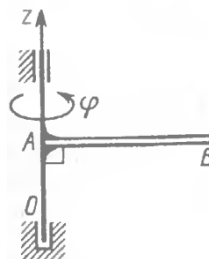


5. Хоккеист, находясь на расстоянии 10 м от ворот, клюшкой сообщает шайбе, лежащей на льду, скорость 8 м/с . Шайба скользит по поверхности льда, влетает в ворота со скоростью 7.7 м/с . Определить коэффициент трения скольжения между шайбой и поверхностью льда.

- ☐ $1,3 \cdot 10^{-2}$;
- ☐ $3,7 \cdot 10^{-2}$;
- ☐ $6,2 \cdot 10^{-2}$;
- ☐ $2,4 \cdot 10^{-2}$;

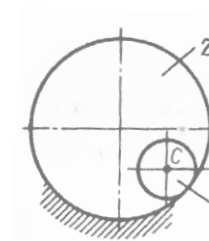
6. Однородный стержень, масса которого $m = 3$ кг и длина $AB = 1$ м, вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 2t^3$. Определить кинетическую энергию стержня в момент времени $t = 1$ с.

- ☐ 9
- ☐ 6
- ☐ 5
- ☐ 18



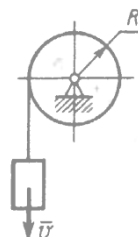
7. Однородный цилиндр 1 массой $m = 16$ кг катится без скольжения по внутренней цилиндрической поверхности 2. Определить кинетическую энергию цилиндра в момент времени, когда скорость его центра масс C равна 2 м/с.

- ☐ 48
- ☐ 4.8
- ☐ 32
- ☐ 3.2



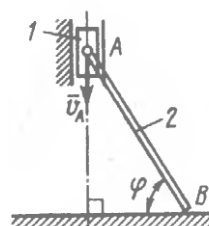
8. Груз массой $m = 4$ кг, опускаясь вниз, приводит с помощью нити во вращение цилиндр радиуса $R = 0.4$ м. Момент инерции цилиндра относительно оси вращения $I = 0.2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Определить кинетическую энергию системы тел в момент времени, когда скорость груза $v = 2$ м/с.

- ☐ 1.05
- ☐ 105
- ☐ 10.5
- ☐ 10.25



9. Ползун 1 массой 2 кг соединен шарниром с однородным стержнем 2 длиной $AB = 1$ м и массой 6 кг. Конец B стержня скользит по горизонтальной плоскости. Определить кинетическую энергию системы тел, когда скорость $v_A = 1$ м/с и угол $\varphi = 60^\circ$.

- ☐ 6
- ☐ 12
- ☐ 5
- ☐ 8

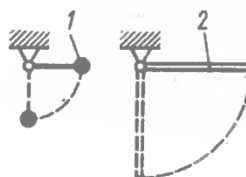


10. Ротору массой $m = 314$ кг и радиусом инерции относительно оси вращения, равным 1 м , сообщена угловая скорость $\omega_0 = 10$ рад/с. Предоставленный самому себе, он остановился, сделав 100 оборотов. Определить момент трения в подшипниках, считая его постоянным.

- ☐ 25
- ☐ 50
- ☐ 2.5
- ☐ 5

11. Математический маятник 1 массой m и длиной l и однородный стержень 2 массой m и длиной $2l$ отпускают без начальной скорости из заданных на рисунке положений. Укажите номер тела, скорость центра масс которого будет больше в нижнем положении.

- ☐ 2
- ☐ 4
- ☐ 1
- ☐ 0.5



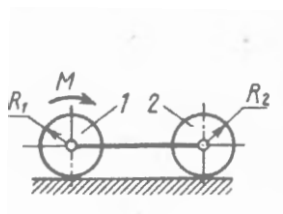
12. Одинаковые зубчатые колеса 1 и 2 массой 2 кг каждый приводятся в движение из состояния покоя постоянным моментом пары сил $M = 1\text{ Н}\cdot\text{м}$. Определить угловую скорость колес после двух оборотов, если радиус инерции каждого из колес относительно оси вращения равен 0.2 м.

- ☐ 1.25
- ☐ 12.5
- ☐ 8.5
- ☐ 8



13. Однородные цилиндрические катки 1 и 2 массой 20 кг каждый приводятся в движение из состояния покоя постоянным моментом пары сил $M = 0.2\text{ Н}\cdot\text{м}$. Определить скорость осей катков при их перемещении на расстояние 3 м, если радиусы $R_1 = R_2 = 0.2$ м.

- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 4
- ☐ 0.4



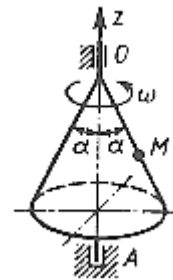
Теорема об изменении кинетического момента

1. Материальная точка массой $m = 0.5$ кг движется по Оу согласно уравнению $y = 5t^2$. Определить момент количества движения этой точки относительно центра О в момент времени $t = 2$ с.

- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ 2
- ☐ 3

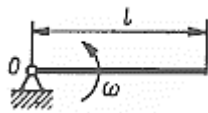
2. Конус вращается равномерно вокруг оси Az с угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с. По образующей конуса движется материальная точка М массой 1 кг. Определить момент количества движения материальной точки относительно оси Oz в положении, когда расстояние $OM = 1$ м, если угол $\alpha = 30^\circ$.

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4



3. Однородный стержень длиной $l = 1$ м и массой $m = 6$ кг вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Определить кинетический момент стержня относительно центра О.

- ☐ 30
- ☐ 50
- ☐ 60
- ☐ 20



4. Материальная точка массой $m=0,5\text{ кг}$ движется по закону $\vec{r} = 2\vec{i} + (4t^2 + 5)\vec{j}$. Определить момент равнодействующей всех приложенных к этой точке сил относительно начала координат.

- ☐ 8
- ☐ 3
- ☐ 5
- ☐ 1

5. Материальная точка массой $m=1\text{ кг}$ движется по закону $x=2t, y=t^3, z=t^4$. Определить момент равнодействующей всех приложенных к этой точке сил относительно оси Oх в момент времени $t=1\text{ с}$.

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 6
- ☐ 11

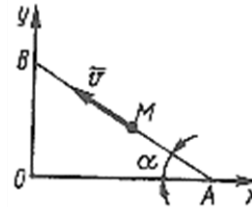
6. Тело вращается вокруг вертикальной оси Oz под действием двух пар сил с моментами $\vec{M}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{M}_2 = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$. Момент инерции тела относительно оси Oz равен $3\text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t=2\text{ с}$, если в начальный момент тело не вращалось.

- ☐ 6
- ☐ 1
- ☐ 5
- ☐ 4

Теорема об изменении кинетического момента

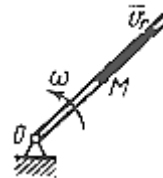
1. Материальная точка M массой $m = 0.5$ кг движется со скоростью $v = 2$ м/с по прямой AB . Определить момент количества движения точки относительно начала координат, если расстояние $OA = 1$ м и угол $\alpha = 30^\circ$.

- ☐ 0.8
- ☐ 1.5
- ☐ 3.3
- ☐ 0.5



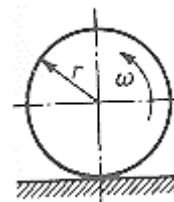
2. Трубка равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. По трубке движется шарик массой $m = 1$ кг. Определить момент количества движения шарика относительно оси вращения трубки, когда расстояние $OM = 0.5$ м и скорость шарика относительно трубки $v_r = 2$ м/с.

- ☐ 4.5
- ☐ 3.5
- ☐ 2.5
- ☐ 6.5



3. Тонкостенная труба массой $m = 10$ кг катится по горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с. Определить кинетический момент цилиндра относительно мгновенной оси вращения, если радиус $r = 10$ см.

- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 4
- ☐ 5



4. Материальная точка массой $m = 0.5$ кг движется в плоскости согласно уравнениям $x = 2t$, $y = 4t^2$. Определить момент равнодействующей всех приложенных к этой точке сил относительно начала координат в момент времени $t = 1$ с.

- ☐ 6
- ☐ 8
- ☐ 9
- ☐ 5

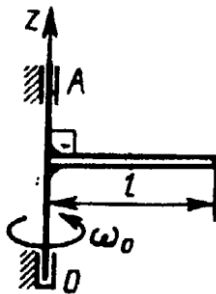
5. Вал 1, момент инерции которого относительно оси вращения $I_1 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 40 \text{ рад/с}$, вал 2 находится в покое. Найти угловую скорость валов после их сцепления, если момент инерции вала 2 относительно оси вращения равен $I_2 = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 8
- ☐ 9



6. Однородный стержень массой $m = 3 \text{ кг}$ и длиной $l = 1 \text{ м}$ вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\omega_0 = 24 \text{ рад/с}$. К валу OA прикладывается постоянный момент сил торможения. Определить модуль этого момента, если стержень останавливается через 4 с после начала торможения.

- ☐ 3
- ☐ 6
- ☐ 2
- ☐ 9



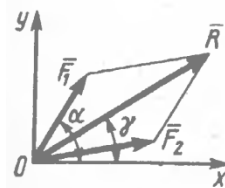
Плоская статика

1. Определить модуль равнодействующей двух равных по модулю сходящихся сил $F_1 = F_2 = 5H$, образующих между собой угол $\alpha = 45^\circ$.

- ☐ 0.2
- ☐ 0.13
- ☐ 9.24
- ☐ 2

2. Равнодействующая $R = 10\text{ Н}$ двух сходящихся сил образует с осью Ox угол $\gamma = 30^\circ$. Сила $F_1 = 5H$ образует с этой же осью Ox угол $\alpha = 60^\circ$. Определить модуль силы $\vec{F}_2$.

- ☐ 19.5
- ☐ 6.64
- ☐ 44.1
- ☐ 2



3. Для плоской системы сходящихся сил (Н): $\vec{F}_1 = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{F}_2 = 5\vec{j}$ и $\vec{F}_3 = 2\vec{i}$, определить модуль равнодействующей силы.

- ☐ 9.28
- ☐ 3.22
- ☐ 7.35
- ☐ 6.12

4. Определить, находится ли плоская система трех сходящихся сил в равновесии, если известны проекции сил на оси координат: $F_{1x} = 10H$; $F_{1y} = 2H$; $F_{2x} = -4H$; $F_{2y} = 3H$; $F_{3x} = -6H$; $F_{3y} = -5H$.

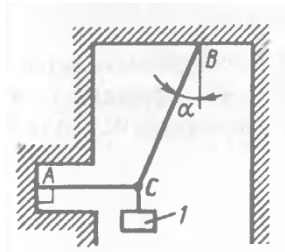
- ☐ Нет
- ☐ Да

5. Силы $F_1 = F_2 = 10H$ и $\vec{F}_3$ находятся в равновесии. Линии действия сил между собой образуют углы по 120° . Определить модуль силы $\vec{F}_3$.

- ☐ 10
- ☐ 14.14
- ☐ 9.24
- ☐ 17.32

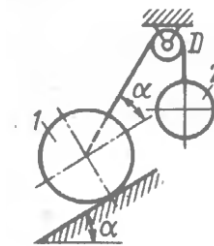
6. Груз 1 весом 2 Н удерживается в равновесии двумя веревками AC и BC, расположенными в вертикальной плоскости. Определить натяжение веревки BC, если угол $\alpha = 30^\circ$.

- ☐ 10
- ☐ 2.31
- ☐ 48.3
- ☐ 17.32



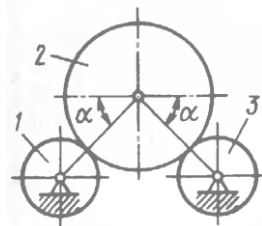
7. Шар 1 весом 16 Н и шар 2 связаны нитью, перекинутой через блок D, и удерживаются в равновесии. Определить вес шара 2, если угол $\alpha = 30^\circ$.

- ☐ 16
- ☐ 8.76
- ☐ 9.24
- ☐ 10.33



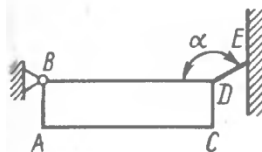
8. Однородный шар 2 весом 36 Н опирается на ролики 1 и 3. Определить давление шара на ролик 1, если угол $\alpha = 45^\circ$.

- ☐ 18
- ☐ 25.5
- ☐ -18
- ☐ 10.5



9. Горизонтальный брус весом 200 Н удерживается в равновесии с помощью шарнира В и веревки DE, образующий угол $\alpha = 150^\circ$ со стороной BD. Определить реакцию шарнира В, если известно соотношение линейных размеров $4 AB = AC$.

- ☐ 129.9
- ☐ 100
- ☐ 200
- ☐ 70.1

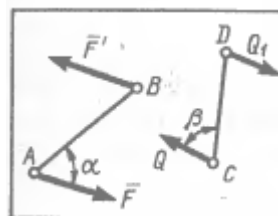


10. Определить момент силы относительно начала координат, если сила задана проекциями $F_x = F_y = 210$ Н и известны координаты точки приложения силы $x = y = 0.1$ м.

- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ 0
- ☐ 5

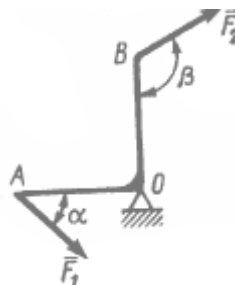
11. На плиту в ее плоскости действует две пары сил. Определить сумму моментов этих пар, если сила $F = 8$ Н, $Q = 5$ Н, расстояния $AB = 0.25$ м, $CD = 0.20$ м, углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$.

- ☐ 0.792
- ☐ 0.453
- ☐ 0.533
- ☐ 0.842



12. На рычаг с неподвижной осью O действует силы $F_1 = 4 \text{ Н}$ и $\overline{F_2}$. Определить модуль силы $\overline{F_2}$, необходимой для того, чтобы удержать рычаг в равновесии, если углы $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 120^\circ$, длины $AO = 0.5 \text{ м}$, $BO = 0.6 \text{ м}$.

- ☐ 3.34
- ☐ 2.72
- ☐ 3.54
- ☐ 5.44

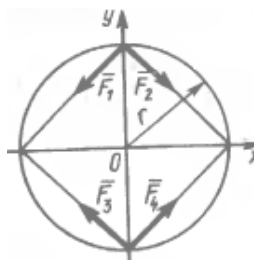


13. Определить главный вектор плоской системы сил, если заданы его проекции на координатные оси $R_x = 300 \text{ Н}$, $R_y = 400 \text{ Н}$.

- ☐ 500
- ☐ 400
- ☐ 300
- ☐ 600

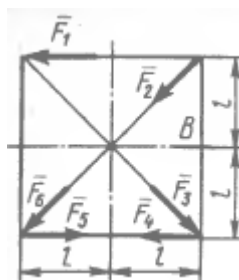
14. Заданы силы $F_1 = F_2 = F_3 = 12 \text{ Н}$, $F_4 = 14 \text{ Н}$. Определить главный момент заданной плоской системы сил относительно точки O , если радиус $r = 0.2 \text{ м}$.

- ☐ 0.344
- ☐ 0.533
- ☐ 1.486
- ☐ 0.283



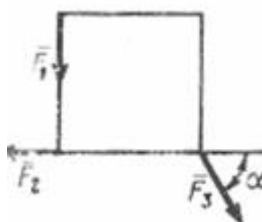
15. К вершинам квадрата приложены шесть сил по 4 Н каждая. Определить главный момент заданной плоской системы сил относительно точки B , если расстояние $l = 0.4 \text{ м}$.

- ☐ 6.44
- ☐ 3.32
- ☐ 4.99
- ☐ 7.63



16. При каком значении угла α равнодействующая системы сил будет направлена вертикально, если силы $F_1 = 3.46 \text{ Н}$, $F_2 = 2 \text{ Н}$, $F_3 = 4 \text{ Н}$?

- ☐ 60.0
- ☐ 50.0
- ☐ 70.0
- ☐ 40.0

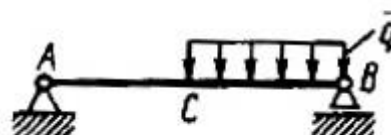


17. На закрепленную балку действует плоская система параллельных сил. Сколько независимых уравнений равновесия балки можно составить.

- ☐ 3
- ☐ 6
- ☐ 1
- ☐ 2

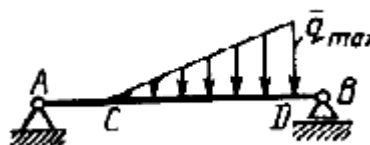
18. На однородную балку АВ, вес которой $G = 20$ кН, действует распределенная нагрузка интенсивностью $q = 0.5$ кН/м. Определить в кН реакцию опоры А, если длины $AB = 6$ м, $AC = BC$.

- ☐ 11.3
- ☐ 5.6
- ☐ 10.4
- ☐ 4.9



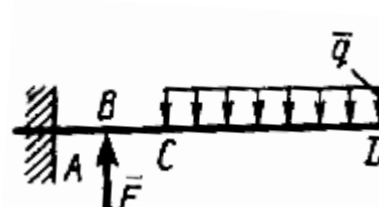
19. Какой должна быть интенсивность $q_{\max}$ распределенной нагрузки, для того чтобы реакция опоры В равнялась 200 Н, если размеры $AC = 2$ м, $CD = 3$ м, $DB = 1$ м?

- ☐ 160
- ☐ 200
- ☐ 145
- ☐ 300



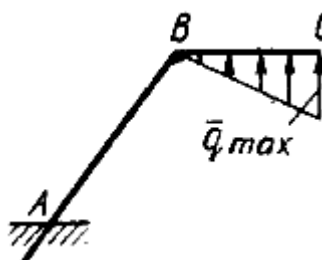
20. Определить вертикальную силу F , при которой момент в заделке А равен 240 Н · м, если интенсивность распределенной нагрузки $q = 40$ Н/м, а размеры $CD = 3$ м, $AB = BC = 1$ м.

- ☐ 60
- ☐ 120
- ☐ 180
- ☐ 75



21. Определить интенсивность $q_{\max}$ распределенной нагрузки, при которой вертикальная составляющая реакции заделки А равна 60 Н, если длина участка $BC = 3$ м.

- ☐ 40
- ☐ 35
- ☐ 70
- ☐ 100

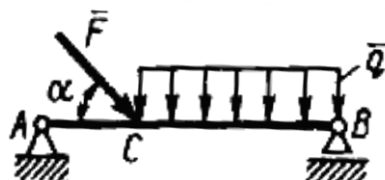


22. На закрепленную балку действуют произвольная плоская система сил. Сколько независимых уравнений равновесия балки можно составить?

- ☐ 2
- ☐ 6
- ☐ 3
- ☐ 1

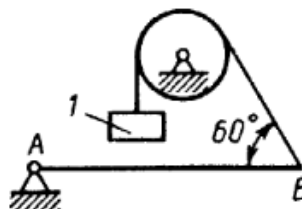
23. На балку АВ действует распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2 \text{ Н/м}$ и сила $F = 6 \text{ Н}$. Определить реакцию опоры В, если длина $AC = 1/3$, угол $\alpha = 45^\circ$.

- ☐ 3.1
- ☐ 5
- ☐ 6.4
- ☐ 4.08



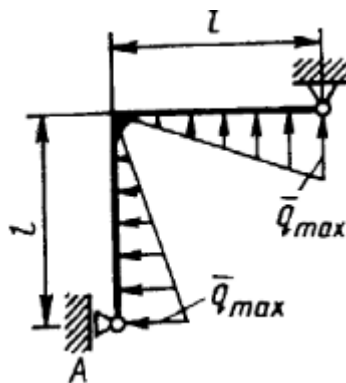
24. Определить вес груза 1, необходимый для удержания однородной балки АВ в равновесии в горизонтальном положении, если ее вес равен 346 Н.

- ☐ 346
- ☐ 200
- ☐ 165
- ☐ 328



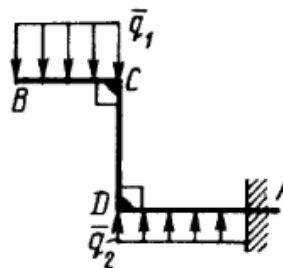
25. На раму действует распределенная нагрузка интенсивностью $q_{\max} = 20 \text{ Н/м}$. Определить реакцию опоры А, если размер $l = 0.3 \text{ м}$.

- ☐ 3.0
- ☐ 4.0
- ☐ 5.9
- ☐ 1.87



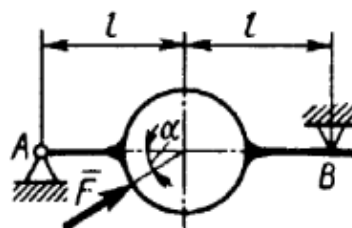
26. На изогнутую балку АВ, заделанную в стену, действуют распределенные нагрузки интенсивностью $q_1 = 5 \text{ Н/м}$ и $q_2 = 3 \text{ Н/м}$. Определить момент заделки, если длины $BC = 3 \text{ м}$, $AD = 5 \text{ м}$.

- ☐ - 60
- ☐ 25
- ☐ 60
- ☐ 54



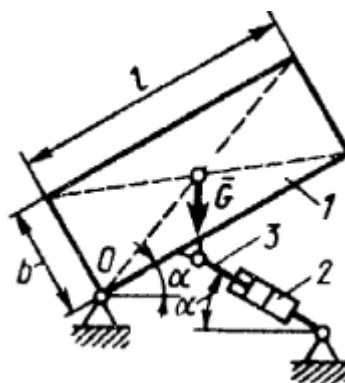
27. Стержень АВ жестко связан с диском. Определить в кН реакцию опоры В, если сила $F = 24$ кН, угол $\alpha = 30^\circ$.

- ☐ 4
- ☐ 6
- ☐ 3.1
- ☐ 8



28. Кузов 1 весом $G = 10$ кН удерживается в равновесии силовым гидроцилиндром 2. Определить в кН силу, действующую на шток 3 гидроцилиндра, если расстояние $l = 3$ м, $b = 1.2$ м. $AO = 1$ м и угол $\alpha = 30^\circ$.

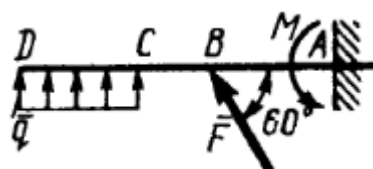
- ☐ 11.5
- ☐ 15.45
- ☐ 12
- ☐ 10



29. Определить интенсивность q распределенной нагрузки, при которой момент в заделке А равен 546 Н·м, если сила $F = 173$ Н, момент пары сил $M = 42$ Н·м, размеры

$AB = CD = 2$ м, $BC = 1$ м.

- ☐ 24.6
- ☐ 43
- ☐ 33.33
- ☐ 36



30. Определить силу F в кН, при которой момент в заделке А равен 56 кН·м, если расстояние $AB = 5.66$ м.

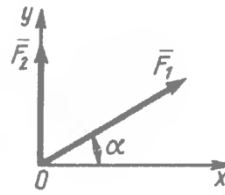
- ☐ 14
- ☐ 20
- ☐ 17.3
- ☐ 24



Плоская статика

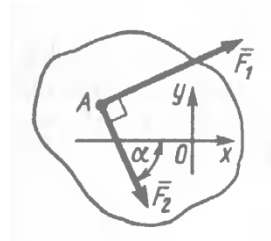
1. Определить угол в градусах между равнодействующей двух сил $F_1 = 10\text{H}$ и $F_2 = 8\text{H}$ и осью Ox , если угол $\alpha = 30^\circ$

- ☐ 0.2
- ☐ 56.3
- ☐ 9.24
- ☐ 2



2. На твердое тело в точке А действуют силы $F_1 = 6\text{H}$ и $F_2 = 3\text{H}$, линии действия которых находятся в плоскости Oxy . Определить сумму проекций этих сил на ось Ox , если угол $\alpha = 60^\circ$.

- ☐ 19.5
- ☐ 6.64
- ☐ 44.1
- ☐ 0.402



3. Равнодействующая сходящихся сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равна по модулю $R = 8\text{H}$ и образует с горизонтальной осью Ox угол $\alpha = 30^\circ$. Вектор силы $\vec{F}_1$ направлен по оси Ox , а вектор силы $\vec{F}_2$ образует с этой осью угол $\beta = 60^\circ$. Определить модуль силы $\vec{F}_1$.

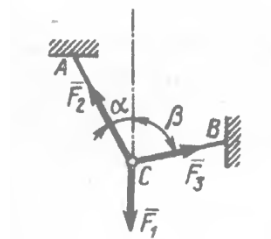
- ☐ 4.62
- ☐ 9.28
- ☐ 3.22
- ☐ 7.35

4. Равнодействующая плоской системы сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$ равна нулю. Определить модуль силы $\vec{F}_1$, если известны проекции трех других сил на оси координат: $F_{2x} = 4\text{H}, F_{2y} = 7\text{H}, F_{3x} = -5\text{H}, F_{3y} = -5\text{H}, F_{4x} = -2\text{H}, F_{4y} = 0\text{H}$.

- ☐ 4.62
- ☐ 3.61
- ☐ 3.22
- ☐ 7.35

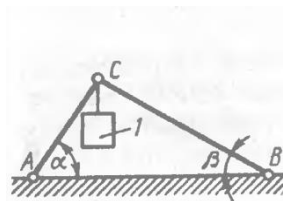
5. Определить модуль силы $\vec{F}_3$ натяжения троса BC , если известно, что натяжение троса AC равно $F_2 = 15\text{H}$. В положении равновесия углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 75^\circ$.

- ☐ 10
- ☐ 14.14
- ☐ 7.76
- ☐ 17.32



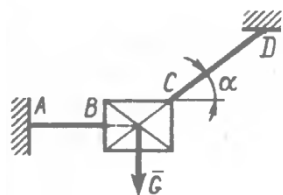
6. Два невесомых стержня АС и ВС соединены в точке С и шарнирно прикреплены к полу. К шарниру С подвешен груз 1. Определить реакцию стержня ВС, если усилие в стержне АС равно 43 Н, а углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$

- 10
- -24.8
- 48.3
- 17.32



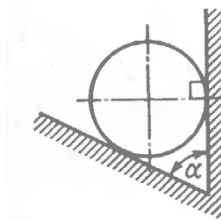
7. Пластина весом $G=8$ Н удерживается в равновесии двумя канатами АВ и CD, расположенными в вертикальной плоскости. Определить натяжение каната CD, если угол $\alpha = 30^\circ$.

- 16
- 8.76
- 9.24
- 10.33



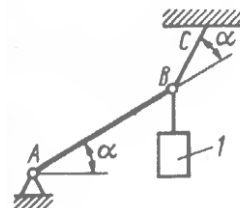
8. Однородный шар весом 40 Н опирается на две плоскости, пересекающиеся под углом $\alpha = 60^\circ$. Определить давление шара на наклонную плоскость.

- 18
- 25.5
- -18
- 10.5



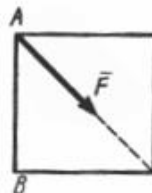
9. Один конец стержня АВ закреплен шарнирно в точке А. К другому концу В привязан груз 1 весом 50 Н. Стержень удерживается в равновесии веревкой ВС. Определить реакцию веревки ВС если угол $\alpha = 30^\circ$

- 28.9
- 86.6
- 50
- 70.1



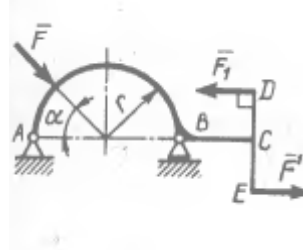
10. К вершине А квадратной пластины, длины сторон которой равны 0.2 м, приложена сила $F = 150$ Н. Определить момент этой силы относительно точки В.

- -23.4
- -11.6
- -12.3
- -21.2



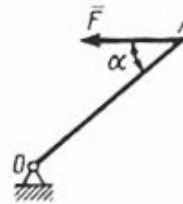
11. На арку ABC действует пара сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ и сила $F = 2$ Н. Определить сумму их моментов точки В, если сила $F_1 = 3$ Н, радиус $r = 1$ м, плечо $DE = 1.2$ м, угол $\alpha = 45^\circ$.

- 4.03
- 3.42
- 6.33
- 5.01



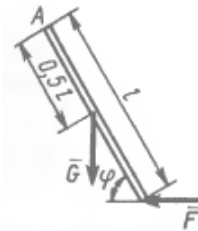
12. Однородный стержень OA, находящийся в вертикальной плоскости, шарнирно закреплен в точке O. Определить модуль горизонтальной силы $\vec{F}$, при которой стержень находится в равновесии, если угол $\alpha = 45^\circ$, вес стержня 5 Н.

- 2.3
- 1.5
- 4.5
- 2.5



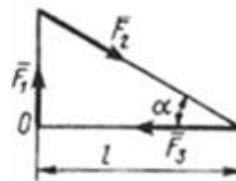
13. Определить главный момент системы двух сил относительно точки A, если силы $G = 1$ Н, $F = 5$ Н, расстояние $l = 0.2$ м, угол $\varphi = 60^\circ$.

- -0.745
- -0.916
- -0.866
- -0.694



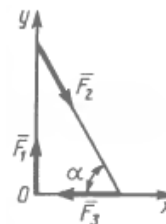
14. К вершинам прямоугольного треугольника приложены три силы. Определить значение угла α в градусах, при котором главный момент данной системы сил $M_o = -2$ кН · м, если сила $F_2 = 4$ кН, расстояние $l = 1$ м.

- 40.0
- 30.0
- 50.0
- 60.0



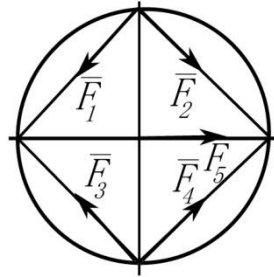
15. К вершинам прямоугольного треугольника приложены силы $F_1 = 12$ Н, $F_2 = 4$ Н, $F_3 = 2$ Н. Определить значение угла α в градусах, при котором главный вектор данной системы сил параллелен оси Oy.

- 60.0
- 70.0
- 50.0
- 80.0



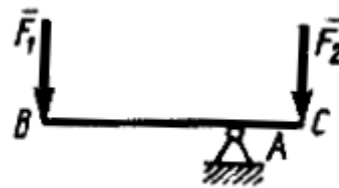
16. Задана плоская система сил $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 4 \text{ Н}$, $F_5 = 5 \text{ Н}$. Определить модуль главного вектора этой системы сил.

- 5.0
- 6.0
- 4.0
- 7.0



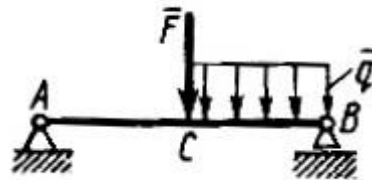
17. На брус ВС, закрепленный в шарнире А, действуют вертикальные силы $F_1 = 4 \text{ кН}$ и $\bar{F}_2$. Определить силу F_2 в кН, необходимую для того, чтобы брус в положении равновесия был горизонтальным, если расстояние $AC = 2 \text{ м}$, $AB = 6 \text{ м}$.

- 12.0
- 5.46
- 11
- 8.35



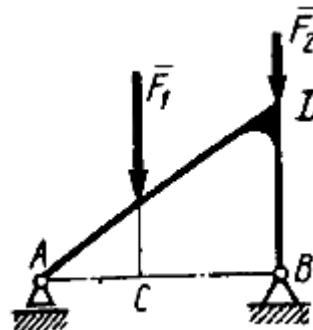
18. На балку АВ действуют силы $F = 9 \text{ Н}$ и распределенная нагрузка интенсивностью $q = 3 \text{ кН/м}$. Определить реакцию опоры В, если длины $AB = 5 \text{ м}$, $BC = 2 \text{ м}$.

- 10.2
- 8.1
- 12.3
- 4



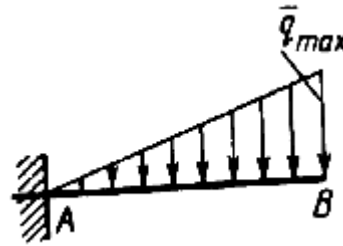
19. На раму ADB действуют вертикальные силы $F_1 = 9 \text{ кН}$ и $F_2 = 4 \text{ кН}$. Определить в кН реакцию опоры В, если расстояния $AC = 2.5 \text{ м}$, $AB = 6 \text{ м}$.

- 6.25
- 8
- 9.15
- 7.75



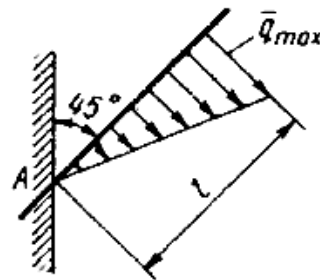
20. Определить момент в заделке А, если интенсивность распределенной нагрузки $q_{\max} = 100 \text{ Н/м}$, а длина бруса АВ равна 3 м.

- 260
- 300
- 75
- 150



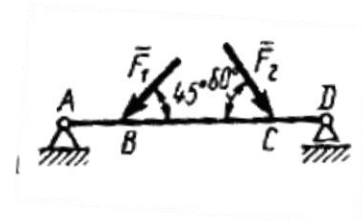
21. При каком значении расстояния l реакция в заделке $R_A = 10 \text{ Н}$, если интенсивность распределенной нагрузки $q_{\max} = 10 \text{ Н/м}$?

- 3.1
- 5
- 4.45
- 2



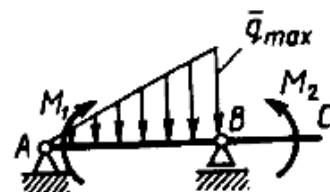
22. Определить реакцию опоры D, если силы $F_1 = 84.6 \text{ Н}$, $F_2 = 208 \text{ Н}$, размеры $AB = 1 \text{ м}$, $BC = 3 \text{ м}$, $CD = 2 \text{ м}$.

- 234
- 145
- 130
- 95



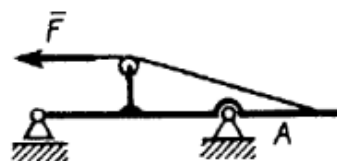
23. На балку AC действуют распределенная нагрузка интенсивностью $q_{\max} = 2.5 \text{ Н/м}$ и пары сил с моментами $M_1 = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и $M_2 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Определить реакцию опоры B, если длина $AB = 4 \text{ м}$, $BC = 0.5 \text{ м}$.

- 2
- 4.73
- 3
- 3.83



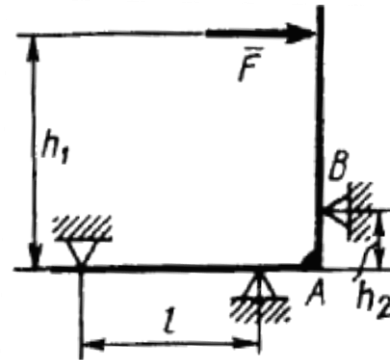
24. Определить в кН горизонтальную составляющую реакции неподвижного шарнира А балки. Если натяжение троса $F = 35 \text{ кН}$.

- 35.0
- 47.7
- 31.4
- 25.0



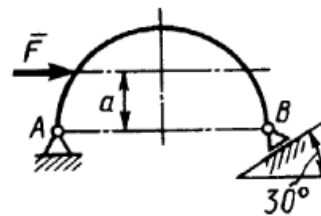
25. На угольник действует горизонтальная сила F . На каком расстоянии h_2 надо поместить опору В, для того чтобы реакции опор А и В были одинаковы, если размеры $l = 0.3$ м, $h_1 = 0.4$ м.

- 0.10
- 2.56
- 0.14
- 3



26. Определить горизонтальную силу F , при которой реакция опоры В арки АВ равна 200 Н, если размеры $a = 1$ м, $AB = 4$ м.

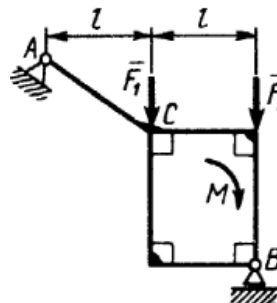
- 465
- 573
- 693
- 350



27. Стержень АС жестко связан с рамой. Определить в кН реакцию опоры В, если силы

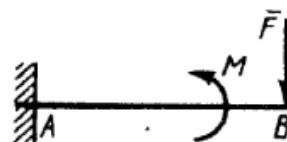
$F_1 = F_2 = 20$ кН, момент пары сил $M = 80$ кН·м, расстояние $l = 2$ м.

- 50
- 35
- 46.6
- 32



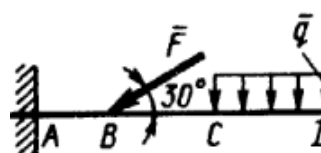
28. На консольную балку АВ, заделанную в стену, действует сила $F = 4$ Н и пара сил с моментом $M = 2$ Н·м. Определить момент в заделке, если длина $AB = 4$ м.

- 14
- 16
- 21
- 17



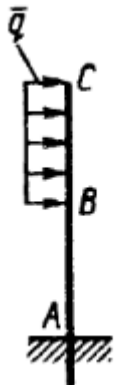
29. Определить силу F , при которой момент в заделке А равен 3700 Н·м, если интенсивность распределенной нагрузки $q = 200$ Н/м, размеры $AB = BC = 2$ м, $CD = 3$ м.

- 400
- 325
- 238
- 436



30. Определить интенсивность q распределенной нагрузки, при которой момент в заделке A равен $480 \text{ Н} \cdot \text{м}$, если размеры $AB = 3 \text{ м}$, $BC = 2 \text{ м}$.

- ☐ 60
- ☐ 45
- ☐ 56
- ☐ 73



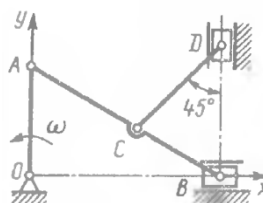
Плоское движение

1. Диск радиуса $R = 50$ см катится по плоскости. Определить расстояние от геометрического центра диска до мгновенного центра скоростей.

- ☐ 5
- ☐ 0.05
- ☐ 0.5
- ☐ 25

2. Для данного положения механизма определить расстояние от точки D до мгновенного центра скоростей звена CD, длина которого $CD = 0.6$ м.

- ☐ 0.424
- ☐ 0.624.
- ☐ 0.136
- ☐ 0.3

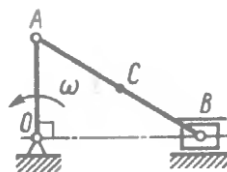


3. Скорость центра катящегося по плоскости колеса радиуса 0.5 м равна 5 м/с. Определить скорость точки соприкосновения с плоскостью.

- ☐ 0.25
- ☐ 10
- ☐ 0
- ☐ 2.5

4. Для данного положения механизма определить скорость точки C –середины шатуна A.B, если угловая скорость $\omega = 1$ рад/с; длины звеньев $OA = 0.3$ м; $AB = 0.5$ м.

- ☐ 0.3
- ☐ 0.5
- ☐ 1
- ☐ 0.6



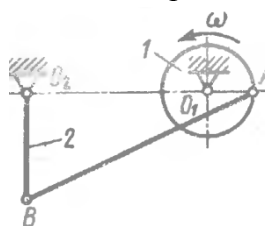
5. Частота вращения коленчатого вала двигателя 4200 об/мин. Определить скорость движения поршня B, если в данный момент времени мгновенный центр скоростей P шатуна AB находится на расстояниях $AP = 0.18$ м, $BP = 0.1$ м; длина кривошипа $OA = 0.04$ м.

- ☐ 0.0072
- ☐ 9.77
- ☐ 30.24
- ☐ 0.3032



6. В механизме шкив 1 радиуса $r = 0.1$ м шарнирно соединен со стержнем 2 длиной 0.25 м с помощью штанги АВ. Для данного положения механизма определить угловую скорость штанги, если частота вращения шкива 1 равна 120 об/мин, а расстояние $O_1O_2 = 0.45$ м.

- ☐ 2.8
- ☐ 2.28
- ☐ 5.8
- ☐ 6.04

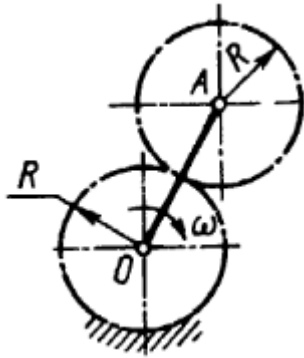


7. Центр катящегося по плоскости колеса радиуса 0.5 м движется согласно уравнению $s = 2t$. Определить ускорение точки соприкосновения колеса с плоскостью

- ☐ 8
- ☐ 10
- ☐ 6
- ☐ -4

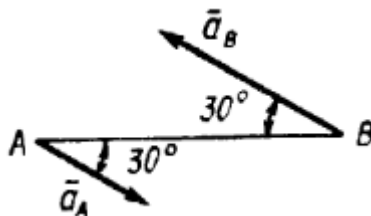
8. Кривошип планетарного механизма вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. Определить ускорение точки, являющейся мгновенным центром скоростей подвижного колеса, если радиус $R = 0.1$ м

- ☐ 0.9
- ☐ 0.2
- ☐ 1.32
- ☐ 2.11



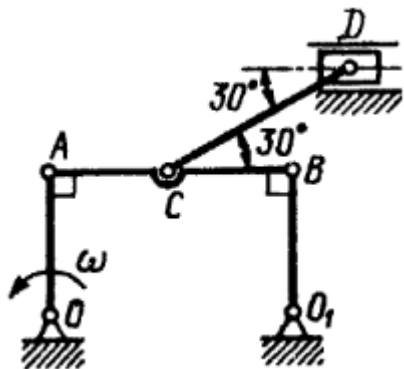
9. Стержень длиной $AB = 40$ см движется в плоскости чертежа. В некоторый момент времени точки A и B стержня имеют ускорения $w_A = 2 \text{ м/с}^2$ и $w_B = 6 \text{ м/с}^2$. Определить угловое ускорение стержня.

- ☐ 15
- ☐ 10
- ☐ 6
- ☐ 24



10. Кривошип OA шарнирного параллелограмма $OABO_1$ равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 4$ рад/с. Определить угловое ускорение шатуна CD в данном положении механизма, если длины звеньев $OA = 20$ см, $CD = 30$ см.

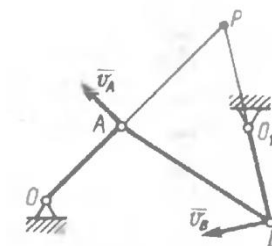
- 12.3
- 8
- 14
- 25



Плоское движение

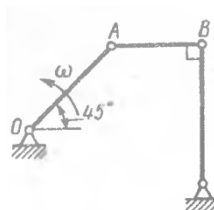
1. В данном положении механизма точка Р является мгновенным центром скоростей звена АВ. Определить расстояние ВР, если скорости точек А и В равны соответственно $v_A = 10$ м/с, $v_B = 15$ м/с, а расстояние АР=60 см.

- ☐ 0.9
- ☐ 90
- ☐ 9
- ☐ 30



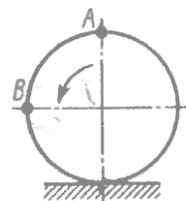
2. Для изображенного положения механизма определить расстояние от точки А до мгновенного центра скоростей стержня АВ, если кривошип ОА вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с, а длина АВ=0.6м

- ☐ 8.49
- ☐ 0.849
- ☐ 6
- ☐ 0.649



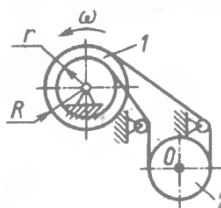
3. Определить скорость точки В колеса, если точка А колеса имеет скорость 2 м/с.

- ☐ 1.41
- ☐ 14.1
- ☐ 0.41
- ☐ 1



4. Барабан 1 лебедки вращается с угловой скоростью, соответствующей $n = 30$ об/мин. Определить скорость центра О поднимаемой трубы 2, если радиусы $R=0.3$ м, $r = 0.2$ м.

- ☐ 0.215
- ☐ 0.785
- ☐ 0.525
- ☐ 0.475



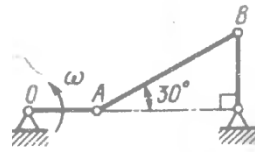
5. Кривошип ОА длиной 0.5 м и шатун АВ длиной 1.57 м в данный момент времени находятся на одной прямой. Определить угловую скорость шатуна, если кривошип вращается с угловой скоростью $\omega = 120\pi$

- ☐ 120
- ☐ 60
- ☐ 30
- ☐ 0



6. Определить для показанного на рисунке положения шарнирного четырехзвенника угловую скорость звена АВ, длина которого 0.2 м, если точка А имеет скорость 1 м/с.

- ☐ 0.1
- ☐ 1
- ☐ 5
- ☐ 5.77



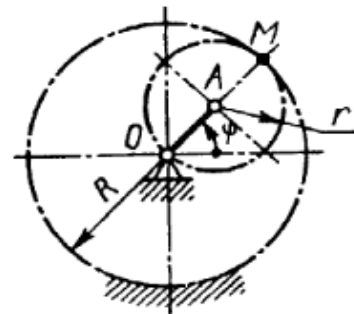
7. Стержень АВ длиной 2 м находится в плоскопараллельном движении. Найти ускорение точки В, если ускорение А равно 1 м/с^2 , угловая скорость стержня $\omega = 1 \text{ рад/с}$, угловое ускорение $\varepsilon = 0$.

- ☐ 6.44
- ☐ 7
- ☐ 3
- ☐ 9



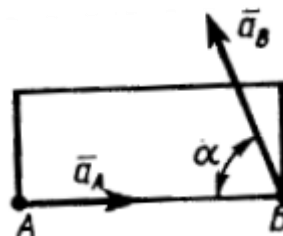
8. Кривошип ОА вращается согласно закону $\varphi = 0,5t$. Определить ускорение точки М подвижного колеса, если радиус $R = 2r = 0.2 \text{ м}$.

- ☐ 0.05
- ☐ 1.23
- ☐ 0.01
- ☐ 2.05



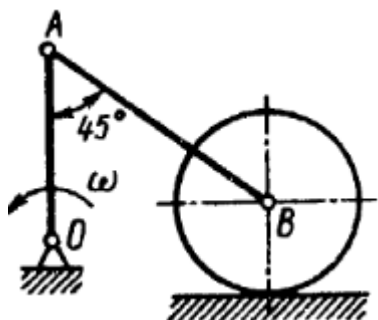
9. Тело находится в плоскопараллельном движении. Найти его угловую скорость, если ускорение точки А равно 1 м/с^2 , ускорение точки В равно 6 м/с^2 , расстояние $AB = 1 \text{ м}$, угол $\alpha = 60^\circ$.

- ☐ 2
- ☐ 5
- ☐ 1
- ☐ 9



10. Определить угловое ускорение шатуна АВ кривошипно-ползунного механизма в данном положении, если кривошип ОА вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с, а длины звеньев $OA = 0.3$ м, $AB = 0.45$ м.

- ☐ 45.6
- ☐ 78.3
- ☐ 94.3
- ☐ 29.43



Вращательное движение

1. При равномерном вращении маховик делает 4 оборота в секунду. За сколько секунд маховик повернется на угол $\varphi = 24\pi$

- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 6

2. Угловое ускорение тела изменяется согласно закону $\varepsilon = 3t^2$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 2$ с, если при $t_0 = 0$ угловая скорость $\omega_0 = 2$ рад/с.

- ☐ 10
- ☐ 5
- ☐ 16
- ☐ 24

3. Тело, вращаясь вокруг неподвижной оси, совершает колебательные движения согласно закону $\varphi = \sin 0,5\pi t$. Определить угловое ускорение тела в момент времени $t = 1$ с.

- ☐ 3
- ☐ -2.47
- ☐ 4.67
- ☐ -5.89

4. Скорость точки тела на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения изменяется по закону $v = 4t^2$. Определить угловое ускорение данного тела в момент времени $t = 2$ с.

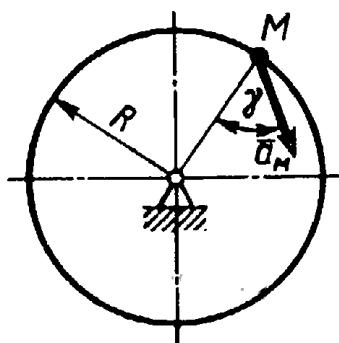
- ☐ 80
- ☐ 120
- ☐ 64
- ☐ 12.8

5. Маховик вращается с постоянной частотой вращения, равной 90 об/мин. Определить ускорение точки маховика на расстоянии 0.043 м от оси вращения.

- ☐ 0.043
- ☐ 5.32
- ☐ 3.82
- ☐ 45

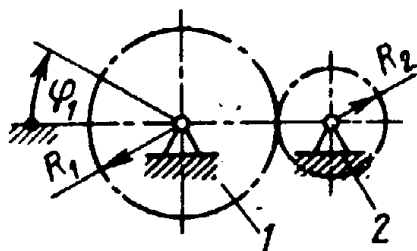
6. Ускорение точки М диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 4 м/с^2 . Определить угловую скорость этого диска, если его радиус $R = 0,5\text{ м}$, а угол $\gamma = 60^\circ$.

- ☐ 2
- ☐ 1
- ☐ 4.6
- ☐ 3



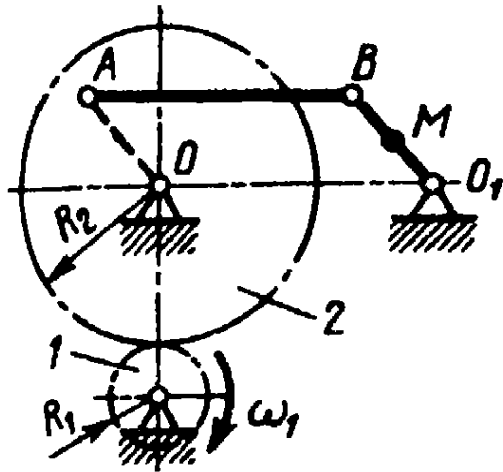
7. Колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1 = 20t$. Определить число оборотов, совершенных колесом 2 за время $t = 3,14\text{ с}$, если радиусы колес $R_1 = 0,8\text{ м}$. $R_2 = 0,5\text{ м}$.

- ☐ 16
- ☐ 7
- ☐ 1
- ☐ 0.4



8. Зубчатое колесо 1 вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 6 \text{ рад/с}$. Определить ускорение точки М, если радиусы колес $R_1 = 0,3 \text{ м}$, $R_2 = 0,9 \text{ м}$, расстояние $O_1M = 0,3 \text{ м}$. $OA = O_1B$ и $AB \parallel O_1O$.

- ☐ 1.2
- ☐ 2
- ☐ 65
- ☐ 0.3



Вращательное движение

1. Угловая скорость тела изменяется согласно закону $\omega = -8t$. Определить угол наклона тела в момент времени $t = 3$ с, если при $t_0 = 0$ угол поворота $\varphi_0 = 5$ рад.

- ☐ -60
- ☐ 30
- ☐ 45
- ☐ -31

2. Угловое ускорение изменяется согласно закону $\varepsilon = 2t$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 4$ с, если при $t_0 = 0$ угловая скорость равна нулю.

- ☐ 16
- ☐ 20
- ☐ 25
- ☐ 8

3. Тело, вращаясь вокруг неподвижной оси, совершает колебательные движения согласно закону $\varphi = 0,5\pi \sin 2\pi t$. Определить угловую скорость тела в момент времени $t = 0,125$ с.

- ☐ -3.43
- ☐ 6
- ☐ -5
- ☐ 6.98

4. Угловая скорость балансира механических часов изменяется по закону $\omega = \pi \sin 4\pi t$. Определить в см/с скорость точки балансира на расстоянии $h = 6$ мм от оси вращения в момент времени $t = 0,125$ с.

- ☐ 1.88
- ☐ 3.33
- ☐ 3.14
- ☐ 6.28

5. Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 2t^2$. Определить нормальное ускорение точки тела на расстоянии $r = 0,2$ м от оси вращения в момент времени $t = 2$ с.

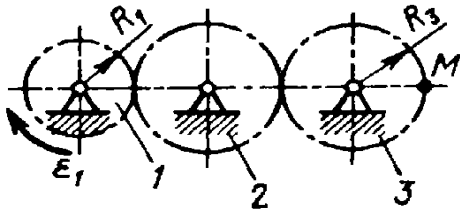
- ☐ 5.66
- ☐ 3.24
- ☐ 12.8
- ☐ 16.28

6. Маховое колесо в данный момент времени вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 20\pi$, а его точка на расстоянии от оси вращения 5 см имеет ускорение $\alpha = 8\pi$. Определить нормальное ускорение указанной точки.

- ☐ 52
- ☐ 24.9
- ☐ 31.9
- ☐ 5.7

7. Зубчатое колесо 1 вращается равнопеременно с угловым ускорением $\varepsilon_1 = 4 \text{ рад/с}^2$. Определить скорость точки М в момент времени $t = 2 \text{ с}$, если радиусы зубчатых колес $R_1 = 0,4 \text{ м}$, $R_3 = 0,5 \text{ м}$. Движение начинается из состояния покоя.

- ☐ 4.2
- ☐ 7.2
- ☐ 1.2
- ☐ 3.2



8. Зубчатое колесо 1 вращается согласно закону $\varphi_1 = 2t^3$. Определить скорость точки В в момент времени $t = 2 \text{ с}$, если радиусы колес $R_1 = 0,3 \text{ м}$, $R_2 = 0,9 \text{ м}$, длина кривошипа $O_1B = OA = 0,6 \text{ м}$, расстояние $OO_1 = AB$.

- ☐ 26
- ☐ 12
- ☐ 2
- ☐ 4.8

