МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ
В ТАБЛИЧНОМ РЕДАКТОРЕ MS EXCEL

Электронные методические указания

к лабораторным работам

САМАРА 2012

УДК 621.73 (075.3)

Авторы-составители: **Ерисов Ярослав Александрович,**
Шляпугин Алексей Геннадьевич,
Осиновская Ирина Васильевна,

Рецензент: канд. техн. наук, доцент Почекуев Е.Н.

Численные методы в табличном редакторе MS Excel [Электронный ресурс]: электрон. метод. указ. к лабораторным работам / Минобрнауки России, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева (нац. исслед. ун-т); авт.-сост.: Ерисов Я.А., Шляпугин А.Г., Осиновская И.В. - Электрон. текстовые и граф. дан. (1,54 Мбайт). - Самара, 2012. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

В методических указаниях к лабораторным работам приведены основные приемы работы в табличном редакторе *MS Excel*; численные методы вычисления определенных интегралов, заданных аналитическим выражением и таблицей значений; численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Предназначены для бакалавров инженерно-технологического факультета, обучающихся по направлению 150700.62 «Машиностроение» по дисциплине «Прикладные компьютерные программы» в 4 семестре.

Подготовлены на кафедре обработки металлов давлением

© Самарский государственный
аэрокосмический университет, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТОВ В ТАБЛИЧНОМ РЕДАКТОРЕ EXCEL 4

Ввод и редактирование данных 4

Ввод математических выражений 8

Автозаполнение ячеек 15

Построение графиков 17

Задания для самостоятельной работы 20

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ 29

Общие сведения 29

Метод прямоугольников 30

Циклические ссылки в *Excel* 34

Метод трапеций 37

Метод Симпсона 39

Интегрирование таблично заданной функции 43

Задания для самостоятельной работы 45

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 53

Общие сведения 53

Метод Эйлера 55

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка 58

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка 60

Задания для самостоятельной работы 63

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1.
ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТОВ В ТАБЛИЧНОМ РЕДАКТОРЕ EXCEL

Цель работы: знакомство с основными инструментами табличного редактора *Excel*; математические и тригонометрические функции *Excel*; построение графиков функций в *Excel*.

Ввод и редактирование данных

Окно *Excel 2010*, изображенное на рисунке 1.1, имеет типичный для приложения *Windows* вид. Нижняя строка основной панели – строка формул.

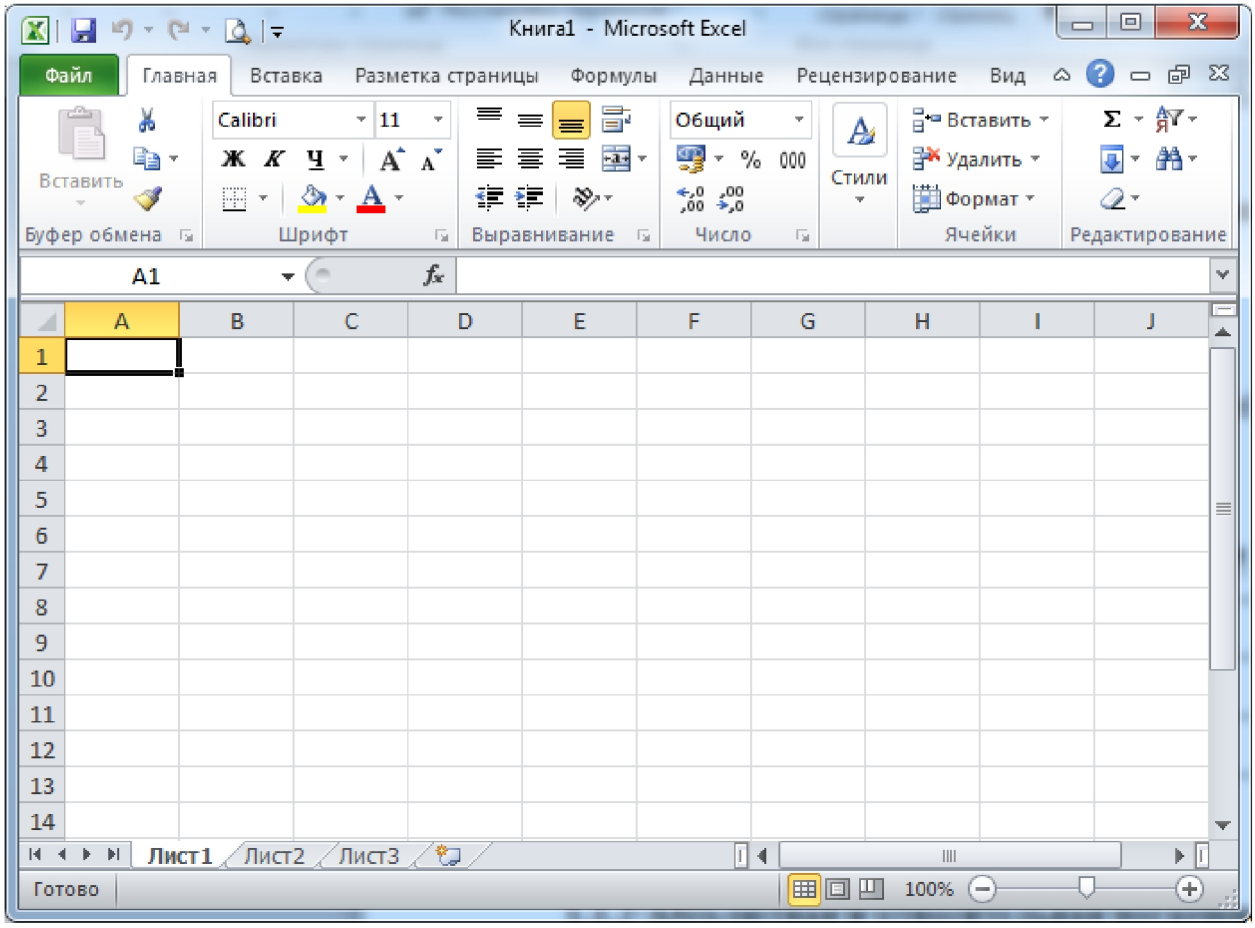


Рисунок 1.1 – Окно Excel 2010

Рабочий лист *Excel*, как видно из рисунка 1.1, разлинован в виде таблицы. Строки в ней пронумерованы цифрами – имена (заголовки) строк. Столбцы обозначены буквами – имена (заголовки) столбцов. Ячейки (клетки) таблицы – области ввода данных и получения результатов. Имена (адреса) ячеек задаются по имени столбца и строки, например, A1, B12, F7 и т.п. Бук-

вы, входящие в имена ячеек, можно набирать строчные, они автоматически переводятся в прописные.

Ячейка таблицы *Excel*, граница которой выделена, а в правом нижнем углу находится маркер заполнения ■ (▭), называется активной (выделенной) и содержит курсор ввода. В таблице, показанной на рисунке 1.1, активной является ячейка A1. Активной можно сделать любую ячейку таблицы, достаточно установить на ней курсор мыши в форме знака ✚ и щелкнуть левой клавишей мыши (ЛКМ).

Совокупность двух и более ячеек листа *Excel* называют диапазоном. Его имя образуется или перечислением имен ячеек, разделенных точкой с запятой или, если области ячеек образуют прямоугольник – простой диапазон (массив), то указанием через двоеточие сначала имени левой верхней ячейки диапазона, затем правой нижней, например, B2:F7.

Массив можно выделить, «протаскивая» курсор мыши в форме знака ✚ от левой верхней до правой нижней ячеек диапазона с нажатой ЛКМ. Выделенный массив ограничен жирной прямоугольной рамкой, все ячейки внутри которой, за исключением левой верхней, подсвечены голубым цветом. На рисунке 1.2 показан выделенный массив-диапазон B2:F7.

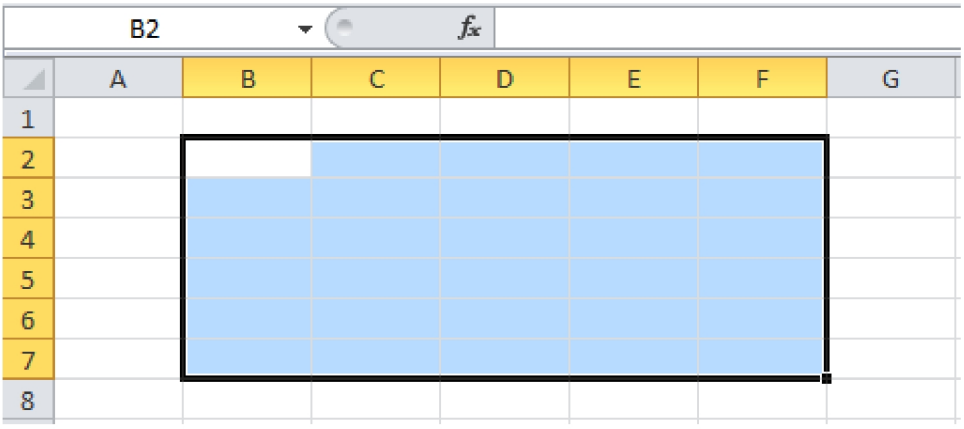
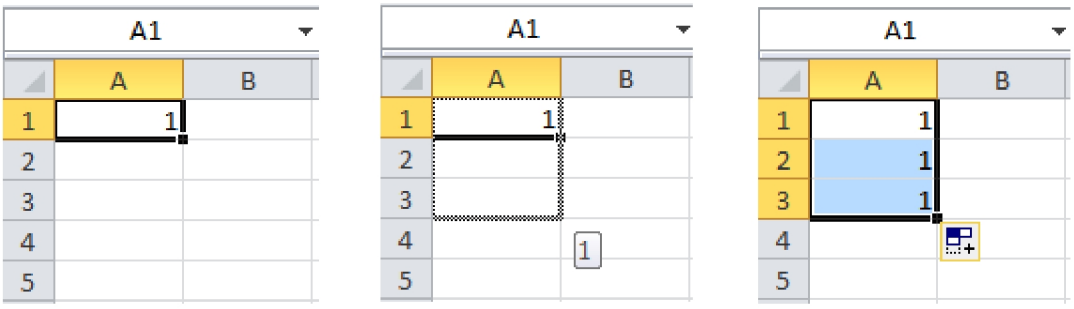


Рисунок 1.2 – Выделенный массив-диапазон

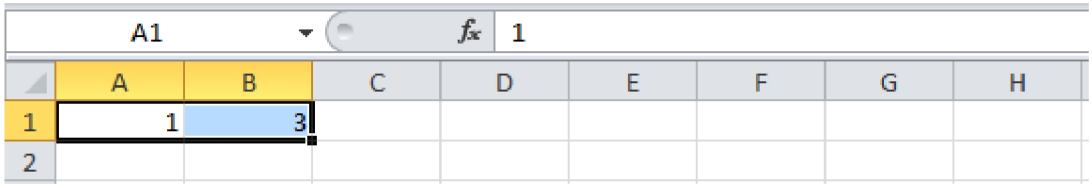
Маркер заполнения ■ позволяет «мгновенно» копировать содержимое ячейки в ячейки диапазона, смежного с ней. Например, пусть в ячейку A1 введено число 1 и ячейка A1 выделена (рисунок 1.3, а). Подведите курсор мыши в форме знака ✥ к маркеру заполнения ■, при этом он примет вид +. Теперь надо щелкнуть ЛКМ и, не отпуская кнопки, перемещать +, двигая мышью, в нужном направлении на необходимое число ячеек (рисунок 1.3, б). После того как ЛКМ будет отпущена, во всех ячейках выделенного диапазона появится значение 1. В частности перемещение маркера заполнения в форме знака + на две ячейки вниз приводит таблицу *Excel*, показанную на рисунке 1.3, а, к виду на рисунке 1.3, в. Такой метод копирования называют методом «протаскивания» маркера заполнения.



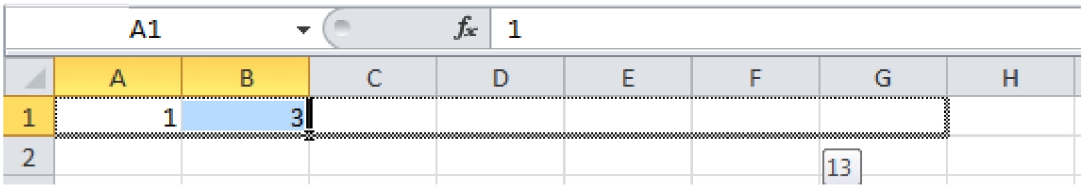
а б в

Рисунок 1.3 – Копирование «протаскиванием»

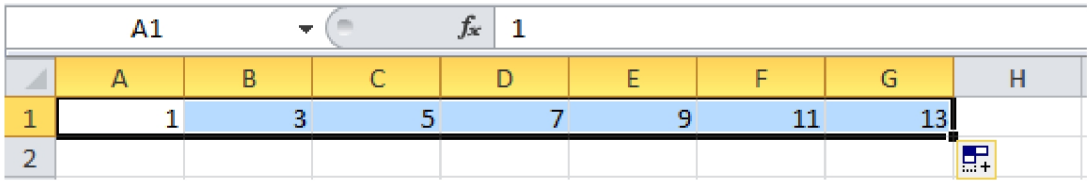
Кроме того, с помощью маркера заполнения можно не только копировать, но и заполнять строки (столбцы) равноотстоящими значениями. Введем в ячейку A1 число 1, а в B1 – 3 (рисунок 1.4, а). Выделим обе ячейки, «возьмем» мышкой маркер заполнения и «протащим» его по первой строке, захватив ячейку G1 (рисунок 1.4, б). В результате получим конечную последовательность с шагом 2 – арифметическую прогрессию (рисунок 1.4, в).



а



б



в

Рисунок 1.4 – Автозаполнение при помощи маркера заполнения

В приложении *Excel* команда «Вырезать» (щелчок ЛКМ по кнопке , расположенной на панели инструментов, или комбинация клавиш Ctrl + x) только копирует содержимое активной ячейки в буфер обмена, окружая ее, чтобы пользователь не забыл, что скопировал, движущейся границей (рисунок 1.5). Такую границу называют «живой», она удаляется нажатием клавиши *Esc*. По команде «Вставить» (кнопка или комбинация клавиш Ctrl + Ins), когда выделена некоторая другая ячейка, в нее копируется содержимое буфера обмена, после чего «живая» граница и содержимое ограниченное ей удаляются. Движущаяся граница появляется и после команды «Копировать» (кнопка или комбинация клавиш Ctrl + c).

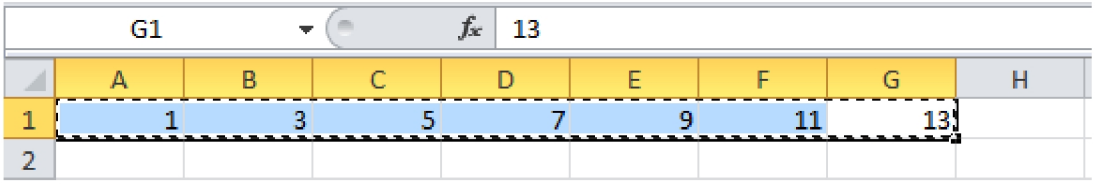


Рисунок 1.5 – «Живая» граница

Ввод математических выражений

В *Excel* оператор вывода результата = ставится перед вычисляемым выражением. Начинающиеся с него выражения называются формулами.

Вычисления проводятся с помощью арифметических операторов, операторов сравнения, адресных операторов, встроенных функций и инструментов *Excel*.

Арифметические операторы:

сложение +;

вычитание –;

унарный минус –;

умножение *;

деление /;

возведение в степень ^;

процент %.

Порядок убывания приоритета приведенных арифметических операторов: унарный минус; процент, возведение в степень, умножение и деление, сложение и вычитание. Операторы одной ступени выполняются слева направо. Например, результатом формулы = – 3^2 будет 9, т.к. унарный минус выполняется первым.

Операторы сравнения:

равно =;

больше >;

меньше <;

больше или равно >=;

меньше или равно <=;

не равно <>.

Например, результатом формулы = 5 > 3 будет ИСТИНА.

Встроенные математические и тригонометрические функции:

COS – косинус числа;

SIN – синус числа;

TAN – тангенс числа;

ACOS – арккосинус числа;

ASIN – арксинус числа;

ATAN – арктангенс числа;

ГРАДУСЫ – преобразует радианы в градусы;

РАДИАНЫ – преобразует градусы в радианы;

ПИ – число π (3,14…);

LN – натуральный логарифм числа;

LOG – логарифм числа по заданному основанию;

LOG10 – десятичный логарифм;

EXP – число *e* (2,73…), возведенное в указанную степень;

СТЕПЕНЬ – возведение в степень;

КОРЕНЬ – возвращает положительное значение квадратного корня;

ABS – модуль (абсолютная величина) числа;

ФАКТР – факториал числа;

ЦЕЛОЕ – округляет число до ближайшего меньшего целого;

ОКРУГЛТ – возвращает число, округленное с требуемой точностью;

ОКРУГЛ – округляет число до указанного количества десятичных разрядов;

ПРОИЗВЕД – произведение аргументов $\prod_i x_i$;

СУММ – суммирует аргументы $\sum_i x_i$;

СУММПРОИЗВ – сумма произведений соответствующих элементов 2-х и более массивов $\sum_i x_i y_i$;

СУММКВ – сумма квадратов аргументов $\sum_i x_i^2$;

СУММРАЗНКВ – сумма разностей квадратов соответствующих значений в двух массивах $\sum_i \left(x_i^2 - y_i^2 \right)$;

СУММСУММКВ – сумма сумм квадратов соответствующих значений в двух массивах $\sum_i \left(x_i^2 + y_i^2 \right)$;

СУММРАЗНКВ – сумма квадратов разностей соответствующих значений в двух массивах $\sum_i \left(x_i - y_i \right)^2$;

МОПРЕД – определитель матрицы массива;

МОБР – обратная матрица массива;

МУМНОЖ – произведение матриц двух массивов;

В *Excel* встроена библиотека важнейших функций, которая значительно упрощает работу: «Мастер функций» вызывается щелчком ЛКМ по кнопке ***fx*** строки формул.

В ячейке вывода результата может появиться сообщение с сокращенным указанием причины, по которой вывод результата невозможен:

#ПУСТО! – пустое множество;

#ДЕЛ/0! – недопустимое деление на ноль;

#ЗНАЧ! – по заданным данным вычисления невозможны;

#ССЫЛ! – неверная ссылка;

#ИМЯ? – имена ячеек заданы неверно;

#ЧИСЛО! – итерационный процесс не сходится;

#Н/Д – неопределенные данные;

- число знаков результата больше ширины ячейки (ошибка устраняется увеличением ширины ячейки).

Ввод в ячейку аналитически заданной функции $y = f\left(x\right)$ начинается со знака =. После него вводится аналитическое выражение заданной функции, в котором аргумент x заменяется именем какой-либо ячейки, отличной от ячейки ввода. Остается нажать кнопку  , расположенную с строке формул, или клавишу Enter, что завершает ввод функции. Автоматически в ячейке ввода появляется значение функции, вычисленное при том значении независимой переменной, которое находится в ячейке, отведенной под независи-

мую переменную (по умолчанию 0). Введенная формула остается только в строке формул, где она редактируется, при необходимости, обычным образом – вносятся изменения, нажимается кнопка  .

Пример 1. Расчет электросопротивления

В данном упражнении создадим рабочий лист *Excel* для вычисления сопротивления 4-х резисторов, подключенных параллельно.

Эффективное сопротивление R_e 4-х резисторов с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 и R_4 находится из следующего выражения:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Выполните следующие действия:

1) введите текст и значения, соответствующие ячейкам A1:A10 и B1:B3, изображенным на рисунке 1.6;

	A	B
1	Расчет электросопротивления	
2		
3	Сопротивление	1/R
4	5	0,2
5	10	0,1
6	15	0,066666667
7	25	0,04
8		
9	1/Re	0,406666667
10	Re	2,459016393

Рисунок 1.6 – Пример 1

2) в ячейку B4 введите формулу = 1/A4;

3) «протаскиванием» скопируйте эту формулу в ячейки B5:B7;

4) в ячейке B9 рассчитаем значение $1/R_e$: = B4 + B5 + B6 + B7;

5) в ячейку B10 введите формулу для R_e : = 1/B9;

6) проверьте правильность расчетов на значениях 2, 2, 4 и 4, т.к. $1/R_e$ будет равно $1/2+1/2+1/4+1/4$ или $3/2$, то величина эффективного сопротивления равна $0,666667$;

7) выполните проверку на еще нескольких наборах сопротивлений, обратите внимание, что если ввести 0, например, в A7, то *Excel* сообщит об ошибке #ДЕЛ/0! в B7.

При вводе функции имена независимых переменных (ячеек, в которых они находятся) не обязательно набирать с клавиатуры, они вставляются в окно формул щелчками ЛКМ по самим ячейкам.

Пример 2. Расчет значения аналитически заданной функции

Пусть надо ввести следующую функцию:

$$y=\left(\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}+tg\cos\pi x\right)\left|e^{\frac{x-1}{10,5}}\right|$$

1) оставляем ячейку A1 за переменной x;

2) в ячейку B1 введите аналитическое выражение функции, заменяя x на A1:

=(LN(A1+1)^(3/2)+TAN(COS(ПИ()*A1)))*ABS(EXP((A1-1)/10,5))

3) для проверки в ячейку A1 введите значение x равное 2, результат в ячейке B1 должен быть 2,979592.

Пример 3. Использование оператора ЕСЛИ

В данном упражнении создадим лист для определения корней квадратного уравнения, записанного в виде:

$$ax^2+bx+c=0$$

Для решения воспользуемся известным выражением:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Величина $b^2 - 4ac$, называемая дискриминантом, определяет количество (0, 1 или 2) действительных корней уравнения.

После введения всех данных лист должен выглядеть так, как представлено на рисунке 1.7.

	A	B	C	D	E
1	Решение квадратного уравнения				
2	a	b	c	Дискриминант	
3	1	5	6		1
4					
5	Число корней		2		
6	Корень 1	-2	Корень 2	-3	

а

	A	B	C	D	E
1	Решение квадратного уравнения				
2	a	b	c	Дискриминант	
3	2	4	2		0
4					
5	Число корней		1		
6	Двукратн	-1			

б

	A	B	C	D	E
1	Решение квадратного уравнения				
2	a	b	c	Дискриминант	
3	3	1	1		-11
4					
5	Число корней		0		
6					

в

Рисунок 1.7 – Решение квадратного уравнения

1) на новом листе введите значения соответствующие ячейкам A1:C3 рисунка 7, а.

2) в ячейку E2 введите текст «Дискриминант», а в ячейку E3 формулу:

= B3^2 – 4*A3*C3

3) временно пропустите значения ячеек A5, C5, A6 и C6, в ячейки B6 и D6 введите формулы для нахождения корней уравнения:

B6: = (– B3 + КОРЕНЬ(E3))/(2*A3)

D6: = (– B3 – КОРЕНЬ(E3))/(2*A3)

4) протестируйте получившийся лист, вводя коэффициенты квадратного уравнения, чьи корни Вы знаете;

Что произойдет, если величина дискриминанта отрицательная? В ячейках B6 и D6 отобразится ошибка #ЗНАЧ!, т.к. невозможно вычислить квадратный корень отрицательного числа без использования комплексных чисел.

Улучшим работу созданного листа при помощи оператора условия ЕСЛИ.

5) в соответствии с рисунком 7 в ячейку A5 введите текст;

6) в ячейку C5 введите формулу:

= ЕСЛИ(E3 < 0; 0; ЕСЛИ(E3 = 0; 1; 2))

Функция ЕСЛИ(<Условие>; <Значение 1>;<Значение 2>) возвращает <Значение 1>, если <Условие> выполняется, и <Значение 2>, если нет. Т.е. формула, введенная в ячейку C5, возвращает 0, когда дискриминант отрицательный, 1 – когда дискриминант равен 0, и 2 – в остальных случаях.

7) в ячейку A6 введите формулу:

= ЕСЛИ(C5 > 0; ЕСЛИ(C5 = 1; “Двукратный корень”; “Корень1”); “ ”)

Таким образом, если корень один (C5 > 0 и C5 = 1), то выводится текст «Двукратный корень», если два корня (C5 > 0 и C5 = 2), то выводится «Корень 1». Если действительных корней нет (C5 = 0) – ячейка остается пустой.

8) нам нужно, чтобы формула в ячейке B6 возвращала корень, когда дискриминант имеет нулевое или положительное значение, и пустую ячейку в остальных случаях. Для этого измените текущую формулу в ячейке B6 на:

= ЕСЛИ(E3 > = 0; (– B3 + КОРЕНЬ(E3))/(2*A3); “ ”)

9) в ячейку C6 введите формулу:

= ЕСЛИ(C5 = 2; “Корень 2”; “ ”)

которая выводит текст «Корень 2», только если решение имеет два корня (C5 = 2);

10) измените формулу в ячейке D6 на:

= ЕСЛИ(E3 > 0; (– B3 – КОРЕНЬ(E3))/(2*A3); “ ”)

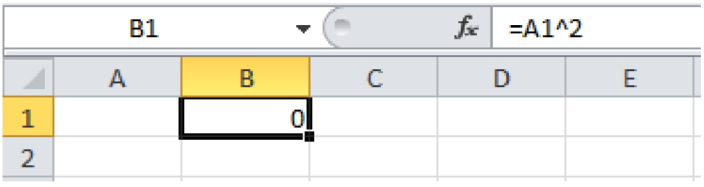
т.е. она будет отображать значение второго корня только когда дискриминант строго больше нуля.

11) протестируйте созданный лист, вводя различные коэффициенты квадратного уравнения, при этом следите за тем как изменяются ячейки листа.

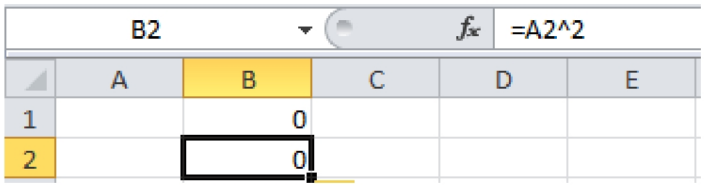
Автозаполнение ячеек

Основная особенность приложения *Excel* проявляется при копировании формул, содержащих имена ячеек, которое не является в *Excel* копированием в прямом смысле этого слова.

Например, пусть в ячейку B1 введена формула = A1^2 (рисунок 1.8, а). Копирование содержимого ячейки B1 в ячейку B2 приведет к тому, что в ней окажется не исходная формула = A1^2, а выражение = A2^2 (рисунок 1.8, б). Таким образом, в ячейках B1 и B2 оказались разные формулы. Нетрудно догадаться, что в ячейке B3 будет = A3^2, если скопировать в нее содержимое ячейки B1. Если же провести копирование ячейки B1 в D1, то в ней появится формула = C1^2. Т.е. при копировании формула корректируется, причем функция не меняется.



а



б

Рисунок 1.8 – Автозаполнение ячеек

Если необходимо, чтобы при копировании формула не изменялась, то перед символами, образующими имена ячеек, входящих в формулу, ставятся

знаки $, например, $A$1. В этом случае ссылки на ячейки называются абсолютными. Если же необходимо, чтобы при копировании формулы, содержащей имя ячейки, не изменялось только имя строки или столбца, то знак $ ставится только перед именем строки или столбца соответственно (A$1 или $A1).

Пример 4. Табулирование функции

Составим таблицу значений функции:

$$y = a(2x+1)^2$$

на орезке [0, 1] с шагом $h = 0{,}1$.

	A	B	C
1	Табулирование функции		
2			
3	a	3	
4			
5	x	y	
6	0	3	
7	0,1	4,32	
8	0,2	5,88	
9	0,3	7,68	
10	0,4	9,72	
11	0,5	12	
12	0,6	14,52	
13	0,7	17,28	
14	0,8	20,28	
15	0,9	23,52	
16	1	27	

Рисунок 1.9 – Табулирование функции

1) введите в ячейки A1:B5 текст и значения (рисунок 1.9);

2) в ячейку A6 введите начальное значение 0, а в A7 – значение, увеличенное на шаг, т.е. 0,1;

3) выделите ячейки A5:A6;

4) «возьмите» мышкой (щелчок ЛКМ, кнопку не отпускать) маркер заполнения рамки выделенного диапазона ■, когда он примет вид +, и пере-

мещайте его вниз, пока не появится цифра 1. Отпуская ЛКМ, получаем в диапазоне A5:A16 значения независимой переменной;

5) в ячейке B5 введите формулу:

= $B$3*(2*A5+1)^2

6) методом «протаскивания» копируем введенную формулу в остальные ячейки диапазона B6:B16, при этом при копировании ссылка на ячейку B3, содержащую значение константы *a*, меняться не будет, т.к. использовалась абсолютная ссылка.

Построение графиков

Пошаговый графический редактор *Excel*, называемый «Мастер диаграмм», запускается командой Вставка → Диаграммы или кнопкой  . Построение выполняется по выделенному диапазону данных. В частности график функции $y = f(x)$ строится по таблице значений функции, тип диаграммы – точечная.

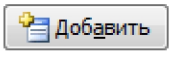
Пример 5. Построение графика функции

Построим график функции:

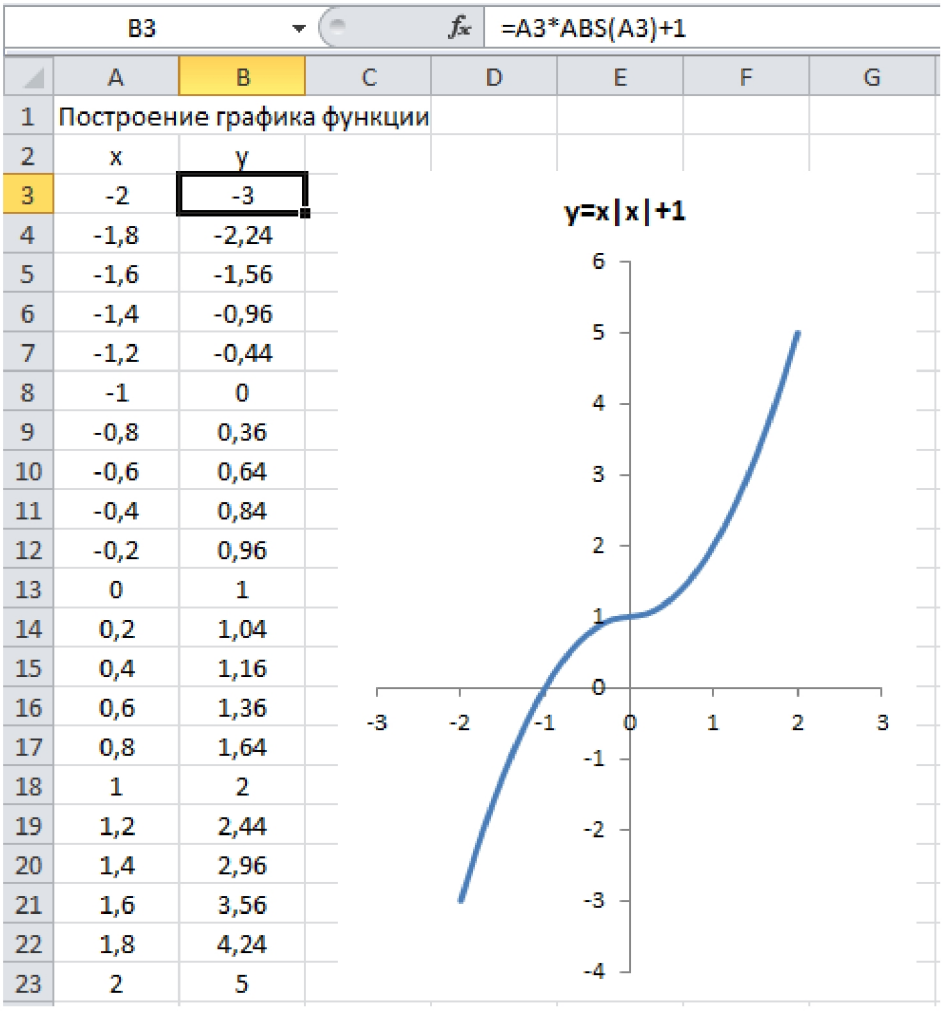
$$y = x|x| + 1$$

1) задайте, подобно тому, как это делалось в примере 4, вертикальную таблицу значений данной функции на отрезке [-2, 2] с шагом 0,2 (рисунок 1.10);

2) командой Вставка → Диаграммы откройте диалоговое окно «Вставка диаграммы», в нем выберите тип диаграммы – Точечная, вид диаграммы – Точечная с гладкими кривыми (рисунок 1.11). Нажмите ОК, при этом на листе появится пустое поле созданной диаграммы;

3) укажем данные для построения графика, для этого щелчком ЛКМ выделите диаграмму и выполните команду Конструктор → Выбрать данные. Откроется окно «Выбор источника данных», в котором нажмите на кнопку 

(рисунок 1.12);



	A	B
1	Построение графика функции	
2	x	y
3	-2	-3
4	-1,8	-2,24
5	-1,6	-1,56
6	-1,4	-0,96
7	-1,2	-0,44
8	-1	0
9	-0,8	0,36
10	-0,6	0,64
11	-0,4	0,84
12	-0,2	0,96
13	0	1
14	0,2	1,04
15	0,4	1,16
16	0,6	1,36
17	0,8	1,64
18	1	2
19	1,2	2,44
20	1,4	2,96
21	1,6	3,56
22	1,8	4,24
23	2	5

Рисунок 1.10 – Построение графика функции

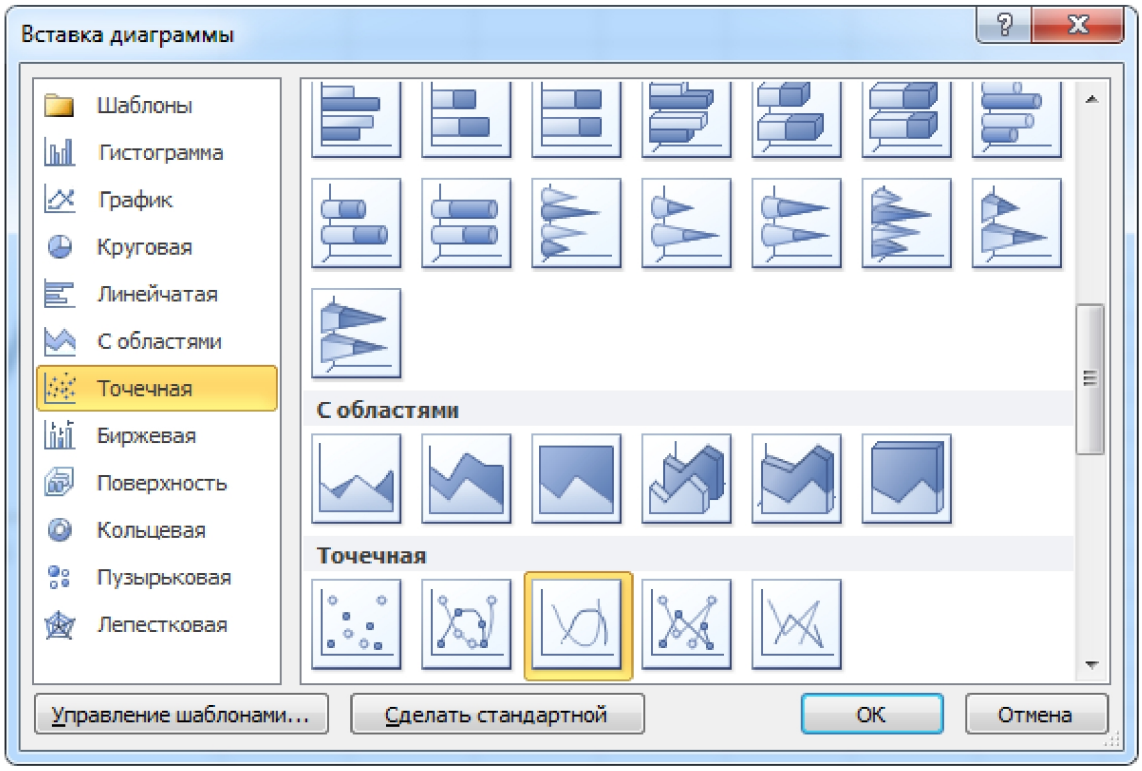


Рисунок 1.11 – Окно «Вставка диаграммы»

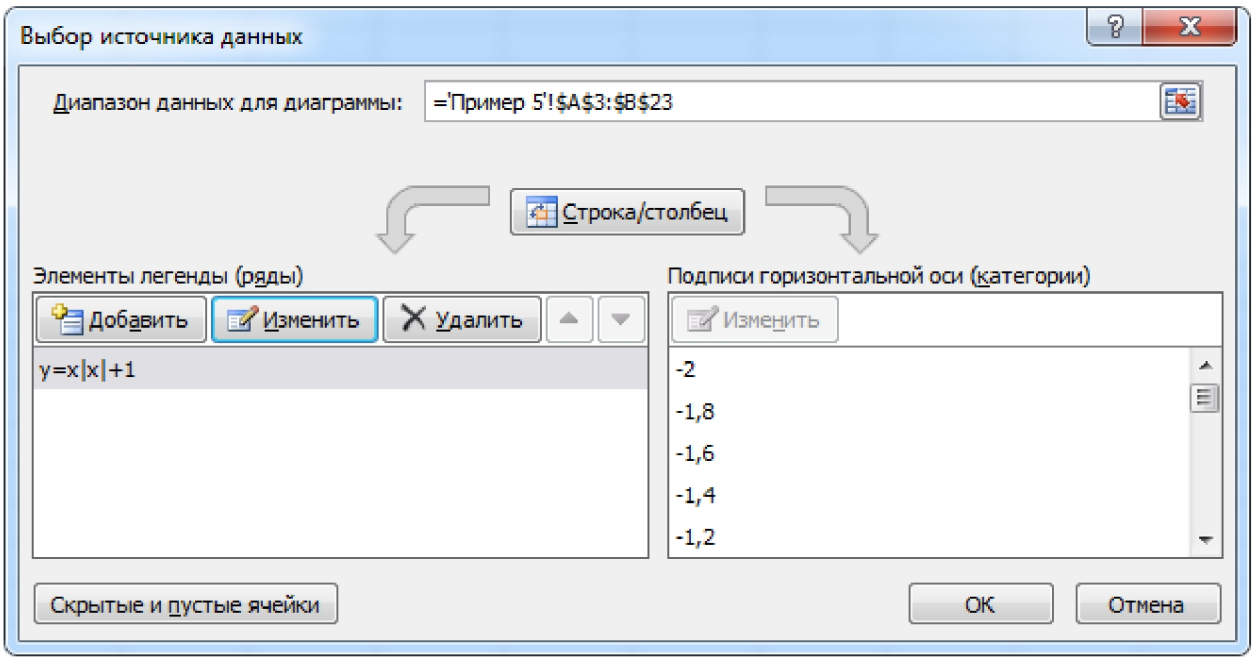
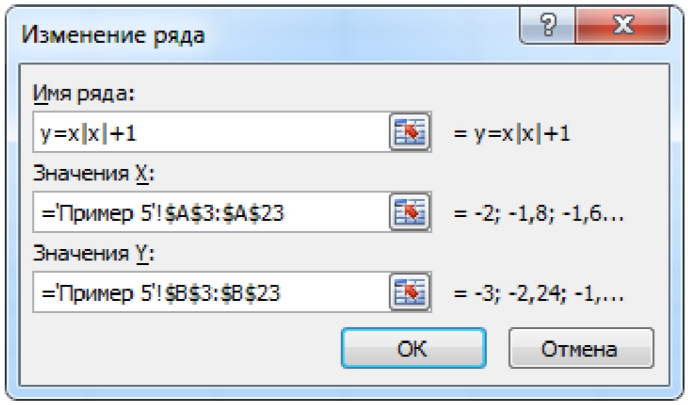
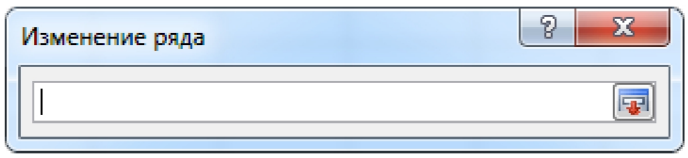


Рисунок 1.12 – Окно «Выбор источника данных»

4) в открывшемся окне «Изменение ряда» в поле «Имя ряда» введите текст $y = x|x| + 1$ (рисунок 1.13, а). Для заполнения поля «Значения X» нажмите на расположенную рядом с ним кнопку, а затем ЛКМ выделите диапазон значений x, т.е. ячейки A3:A23. Закройте появившееся окно «Изменение ряда», нажав на кнопку (рисунок 1.13, б);



а



б

Рисунок 1.13 – Окна «Изменение ряда»

5) аналогичным образом заполните поле «Значения Y», используйте диапазон B3:B23. Закройте окна «Изменение ряда» и «Выбор источника данных», нажав ОК;

6) выполните команды Макет → Легенда → Нет (убирает название ряда данных с диаграммы) и Макет → Сетка → Горизонтальные линии сетки по основной оси → Нет (убирает горизонтальные линии сетки); окончательный результат изображен на рисунке 1.10.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Ввод математических выражений

Рассчитать значение функции $y = f(x)$ для произвольного значения переменной x. Функцию выберите из таблицы 1.1 в соответствии с номером варианта.

Таблица 1.1 – Задание 1

№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$
1	$\sqrt{e^{2,2x}} - \left\lvert \sin\frac{\pi x}{x+2/3} \right\rvert + 1,7$	6	$\left(\sqrt{1+x^2} + \frac{\lvert \ln^3 x \rvert}{1,6+x^4} \right) \sin 7x$
2	$\sqrt{\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^{4-x}}} + \ln\lvert x - 20,5 \rvert$	7	$\frac{\sqrt{\frac{1}{5} + \sqrt[5]{e^x}}}{\lvert \ln x^2 - 1,3 \rvert}$
3	$\left(\frac{1}{7} + \ln\sqrt{x} \right) e^{\sqrt{x-2}}$	8	$1,8 + \ln\left\lvert 4\frac{2}{7} - tg \sin\frac{5x}{3} \right\rvert$
4	$\frac{\sqrt{x}\sin\frac{x^2}{2} - 1,3}{\sqrt[5]{x} + e^{3x} + \lvert \cos x \rvert}$	9	$\frac{\lvert \sin\sqrt{10,5x} \rvert}{\sqrt[3]{x^2 - 0,143}} + 2\pi x$
5	$\sqrt{e^{\lvert \sin x \rvert}} + 2\ln 3x - \frac{1}{9}$	10	$1,1e^x + \left\lvert \cos\sqrt{\pi x} \right\rvert - \frac{4}{9}$

№	$y=f(x)$	№	$y=f(x)$
11	$\frac{\ln\left(\sqrt{\lvert x-2\rvert}+1,2\right)}{2+e^{x}}+\sqrt[3]{\frac{2}{x}}$	21	$\frac{\sin(0,5\pi x)+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{\lvert\cos(\pi x)+1\rvert e^{\sqrt{x}}}}$
12	$\frac{1}{3}\sqrt{\lvert\sin x\rvert}\cdot\sqrt[3]{e^{0,12x}}$	22	$\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln^{2}\lvert 0,2+\sin x\rvert\cdot\sqrt[3]{x^{2}}$
13	$\frac{\sqrt[5]{e^{1/3-x}}}{\sqrt{x^{2}+x^{4}+\ln\lvert x-3,4\rvert}}$	23	$\frac{\ln\sqrt{e^{0,1x}+x}}{x+\sqrt[3]{10,7}+arctgx}+\frac{2}{5}$
14	$\sqrt{\sin^{3}\frac{x}{2}}+\sqrt[3]{e^{1,3x}+e^{-1,3x}}$	24	$\frac{1}{3}\sqrt[7]{e^{6,3+\sqrt{x}}}\left\lvert\cos\frac{2x}{3}-x\right\rvert$
15	$\frac{\lvert x\ln x-4/7\rvert\sqrt{x}}{\sqrt[5]{e^{4x-1,1}}}$	25	$\frac{\lvert x-\pi\rvert e^{3/x}}{\ln\left(1,7\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}\right)}$
16	$\sqrt{e^{2x}\sqrt{x}-\frac{x+1/3}{x}}\lvert\cos 2,5x\rvert$	26	$2e^{\sqrt{\lvert x^{2}-1,71^{2}\rvert}-\left(\frac{x-\pi}{x+\pi}\right)^{2}}$
17	$\frac{\lvert 7,2-10x\rvert}{3\sqrt{\frac{x}{9}+e^{2x}}}arctg\frac{4tg2x}{\sqrt{1,1x^{3}}}$	27	$\left(2\frac{2}{3}+\sqrt[3]{\frac{x}{2,7}}-\sqrt{e^{-3x}}\right)\lvert\sin 5x\rvert$
18	$\frac{x^{3}}{\sqrt{3}}-e^{x}\ln\left\lvert 1,37^{3}+x^{3}\right\rvert+\frac{4}{3}$	28	$\frac{\ln\left(x^{2}\right)+\pi}{e^{5/3}}-x\cdot arctg\frac{x}{\sqrt{e}}+1,4$
19	$\frac{\ln\sqrt{\pi+\lvert 2-x\rvert}}{3-1/x}+\sqrt[3]{x^{2}}\sin 1,4x$	29	$\frac{\left\lvert\ln x^{2}\right\rvert+1/3}{\sqrt{e^{x/\pi}+\sqrt[3]{x}+1,4}}$
20	$\left(\sqrt[3]{\ln^{2}x}+tg\cos\pi x\right)\left\lvert\ln\frac{x}{10,5}\right\rvert$	30	$\sqrt[3]{\pi^{2}-x^{2}+\frac{1}{e}}+tg\frac{x-1}{x}+\frac{1}{7}$

Задание 2. Табулирование функции

Составьте таблицу значений функции $y = f(x)$ для N значений переменной x, начиная с x_1, с шагом dx. Функцию выберите из таблицы 1.2 в соответствии с номером варианта.

Пример оформления рабочего листа приведен на рисунке 1.14. Для того чтобы вставить формулу, выполните команду Вставка → Объект → Microsoft Equation и нажмите ОК. Используйте элементы появившейся панели для ввода формулы.

	A	B	C	D
1	Табулирование функции			
2		$y = \begin{cases} -8A^3 / (x^2 + 4A^2), & x \le 0 \\ 2A\sqrt{1 - x^2/A^2} - 4A, & x > 0 \end{cases}$		
3				
4				
5				
6				
7				
8	A	x1	dx	N
9	2	=-7*A9	=2*A9/5	5
10				
11	x	y		
12	=B9	=ЕСЛИ(A12<=0;-8*$A$9^3/(A12^2+4*$A$9^2);2*$A$9*КОРЕНЬ(1-A12^2/$A$9^2)-4*$A$9)		
13	=A12+$C$9	=ЕСЛИ(A13<=0;-8*$A$9^3/(A13^2+4*$A$9^2);2*$A$9*КОРЕНЬ(1-A13^2/$A$9^2)-4*$A$9)		
14	=A13+$C$9	=ЕСЛИ(A14<=0;-8*$A$9^3/(A14^2+4*$A$9^2);2*$A$9*КОРЕНЬ(1-A14^2/$A$9^2)-4*$A$9)		
15	=A14+$C$9	=ЕСЛИ(A15<=0;-8*$A$9^3/(A15^2+4*$A$9^2);2*$A$9*КОРЕНЬ(1-A15^2/$A$9^2)-4*$A$9)		
16	=A15+$C$9	=ЕСЛИ(A16<=0;-8*$A$9^3/(A16^2+4*$A$9^2);2*$A$9*КОРЕНЬ(1-A16^2/$A$9^2)-4*$A$9)		

Рисунок 1.14 – Пример оформления задания 2

Таблица 1.2 – Задание 2

№	$y = f(x)$	A	x_1	dx	N
1	$Y = \begin{cases} \frac{A}{2}\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right), \text{при } x \le 0 \\ 4A^3 / \left(x^2 + 4A^2\right), \text{ при } x > 0 \end{cases}$	1	-2A	A/5	10
2	$Y = \begin{cases} -\sqrt{\left(\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}, \text{ при } x < A \\ \ln x, \text{ при } x \ge A \end{cases}$	1.5	0	A/4	15

№	$y = f(x)$	A	x_1	dx	N
3	$Y = \begin{cases} A\cos\left(x^2/2\right), \text{ при x} < 0 \\ A/2\left(e^{x/A} + e^{-x/A}\right), \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	2	-2.5A	A/5	20
4	$Y = \begin{cases} A - 8A^3/\left(x^2 + 4A^2\right), \text{ при x} \leq 0 \\ -A\sqrt{\left(1 - x^2\right)/\left(4A^2\right)}, \text{ при x} > 0 \end{cases}$	1	0	A/4	10
5	$Y = \begin{cases} -\sqrt{2A\left(-3A - x\right)}, \text{ при x} \leq \text{-3A} \\ A\sin\left(x + 3A\right), \text{ при x} > -3A \end{cases}$	2	-2A	A/5	15
6	$Y = \begin{cases} -A\sqrt{\left(1 - x^2\right)/\left(4A^2\right)}, \text{ при x} < 0 \\ A/2\left(e^{x/A} + e^{-x/A}\right), \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	0.8	-A	A/4	20
7	$Y = \begin{cases} -\sqrt{\left(\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}, \text{ при x} < 0 \\ A + \sqrt{x^3/\left(2A - x\right)}, \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	1.5	-6A	3A/10	10
8	$Y = \begin{cases} -\sqrt{A^2 - \left(x - A\right)^2}, \text{ при x} < 2\text{A} \\ A\left(1 - e^{A-x}\right), \text{ при x} \geq 2\text{A} \end{cases}$	1	0	A/4	15
9	$Y = \begin{cases} -\left(\text{x} + 3\text{A}\right)^2, \text{ при x} \leq -6A \\ A\cos\left(x + 3A\right) - 3A, \text{ при x} > \text{-}6A \end{cases}$	0.7	-10A	A/2	20

№	$y = f(x)$	A	x_1	dx	N
10	$Y = \begin{cases} 2A\sqrt{1 - x^2/A^2}, \text{при x} < 0 \\ A/2\cos(x) + 3A/2, \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	1.5	-A	3A/10	10
11	$Y = \begin{cases} A\cos(x+1) + A, \text{ при x} \leq -1 \\ A(x+2)^{3/2}, \text{ при x} > -1 \end{cases}$	2	-5A	2A/5	15
12	$Y = \begin{cases} 2A - A/2\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right), \text{ при x} \leq 0 \\ A + \sqrt{x^3/(2A - x)}, \text{при x} > 0 \end{cases}$	1.2	-2A	A/4	20
13	$Y = \begin{cases} A - \sqrt{A^2 - \left(x - A^2\right)}, \text{ при x} < A \\ A(x - A)^{3/2}, \text{при x} \geq A \end{cases}$	1	-6A	2A/5	10
14	$Y = \begin{cases} -A\ln\left(-x - A^2\right), \text{ при x} < -2A \\ \sqrt{A^2 - (x + A)^2}, \text{ при x} \geq -2A \end{cases}$	1.5	-4A	A/5	15
15	$Y = \begin{cases} A - Ae^{x-8A}, \text{ при x} < 8A \\ \sqrt{2Ax - 16A^2}, \text{при x} \geq 8A \end{cases}$	2	0	4A/5	20
16	$Y = \begin{cases} \sqrt{\left(\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{(x + A)^2}\right)^3}, \text{ при x} < 0 \\ -\sqrt{x^3/(2A - x)}, \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	1	-A	A/4	10

№	$y = f(x)$	A	x_1	dx	N
17	$Y = \begin{cases} \sqrt[3]{3}A\left(1-\sqrt{-x^3}\right), \text{ при x} < 0 \\ \sqrt{\sqrt{16A^4+4A^2x^2-x^2}-A^2}, \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	1.5	-2A	A/5	15
18	$Y = \begin{cases} -\sqrt{\sqrt{16A^4+4A^2(x+A)^2-(x+A)^2}-A}, \text{ при x} < 0 \\ \sqrt{A^2-(x+A)^2}-2A, \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	2	-2.2A	A/5	20
19	$Y = \begin{cases} \sqrt{16A^2-(x-4A)^2}, \text{ при x} < 4\text{A} \\ 8A^3 \Big/ \left((x-4A)^2+4A^2\right), \text{ при x} \geq 4\text{A} \end{cases}$	1	0	A/2	10
20	$Y = \begin{cases} \sqrt{A^2-(x-A)^2}-A, \text{ при x} < 2\text{A} \\ -2A-Ae^{-(x-2A)}, \text{ при x} \geq 2\text{A} \end{cases}$	2	0	3A/10	15
21	$Y = \begin{cases} -Ae^{x-3A}, \text{ при x} < 3\text{A} \\ -A-A\ln(x-3A), \text{ при x} \geq 3\text{A} \end{cases}$	0.8	-4A	2A/5	20
22	$Y = \begin{cases} \sqrt{\left(\sqrt[3]{4A^2}-\sqrt[3]{(x+2A)^2}\right)^3}, \text{ при x} < 0 \\ -\sqrt{\left(\sqrt[3]{4A^2}-\sqrt[3]{(x+2A)^2}\right)^3}, \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	1.5	0	A/5	10
23	$Y = \begin{cases} \sqrt{\sqrt{16A^4+4A^2x^2-x^2}-A^2}, \text{ при x} < 0 \\ A\sqrt{3}+\sqrt{\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{(x-A)^2}\right)^3}, \text{ при x} \geq 0 \end{cases}$	1	-2.2A	A/5	15

№	$y = f(x)$	A	x_1	dx	N
24	$Y = \begin{cases} \sqrt{A^2 - (x+A)^2}, \text{ при x} \le 0 \\ 2A\sqrt{1 - x^2/(4A)^2}, \text{ при x} > 0 \end{cases}$	1.5	-2A	A/5	20
25	$Y = \begin{cases} 8A^3/(x^2 + 4A^2), \text{ при x} \le 0 \\ A\left(e^{x/A} + e^{-x/A}\right), \text{ при x} > 0 \end{cases}$	0.7	-2A	A/5	10
26	$Y = \begin{cases} Ae^{(x+3A)/A} + e^{-(x+3A)/A}, \text{ при x} < \text{-3A} \\ A + A\cos(x+3A), \text{ при x} \ge \text{-3A} \end{cases}$	2	-8A	2A/5	15
27	$Y = \begin{cases} A - 8A/(x^2 + 4A^2), \text{ при x} < 0 \\ \sqrt{\left(\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{(x-A)^2}\right)^3}, \text{ при x} \ge 0 \end{cases}$	1.2	-4A	3A/10	20
28	$Y = \begin{cases} 2A - A/\left(2\left(e^{(x-2A)/A} + e^{-(x-2A)/A}\right)\right), \text{ при x} < 2A \\ A + \sqrt{Ax^3}, \text{ при x} \ge 2\text{A} \end{cases}$	1	-2A	3A/10	10
29	$Y = \begin{cases} \sqrt{\left(\sqrt[3]{4A^2} - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}, \text{ при x} \le 0 \\ A + \sqrt{\left(\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{(x-A)^2}\right)^3}, \text{ при x} > 0 \end{cases}$	1.5	-2A	A/5	15
30	$Y = \begin{cases} -8A^3/(x^2 + 4A^2), \text{ при x} \le 0 \\ 2A\sqrt{1 - x^2/A^2} - 4A, \text{ при x} > 0 \end{cases}$	2	-7A	2A/5	20

Задание 3. Построение графика функции

Постройте график функции $y = f(x)$ (отрезок и шаг построения выберите самостоятельно). Функцию выберите из таблицы 1.3 в соответствии с номером варианта.

Таблица 1.3 – Задание 3

№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$
1	$x^2 + \sin x$	13	$6x^2 - 5x + 1$
2	$2x^2 + 13$	14	$\cos \pi x$
3	$x^2 \cos 2x$	15	$(x-2)^3$
4	$7x - x^2 - 10$	16	$x^2 - 2x$
5	$\sqrt{4-3x}$	17	$\cos \frac{1}{x}$
6	$\cos^2 x - \sin^2 x$	18	$x^3 - 4x^2$
7	$-e^x - 1$	19	$x^3 + 1$
8	$\frac{x^2}{x-2}$	20	$2 \cos x \sin x$
9	$4x - x^2$	21	$\sqrt[3]{x+2x}$
10	$\cos \pi x + 1$	22	$\sqrt{4-3x-x^2}$
11	$\ln(x+6)$	23	$3x - x\lvert x \rvert$
12	$3 \ln x$	24	$x^2 - 4x + 2$

№	$y = f(x)$	№	$y = f(x)$
25	$2\arcsin x + 4$	28	$2arctg\dfrac{x}{3}$
26	$\log_3(x+2)$	29	$\dfrac{\sin x}{x}$
27	e^{x^2-6}	30	$2tg\dfrac{\pi x}{x+1}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Цель работы: знакомство с основными методами численного интегрирования; интегрирование таблично заданных функций; циклические ссылки в *Excel*; вычисление определенных интегралов численными методами в *Excel*.

Общие сведения

Многие инженерные задачи физики, геометрии и многих других областей человеческой деятельности приводят к необходимости вычислять определенный интеграл вида:

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad (2.1)$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$.

Численные методы обычно применяются при взятии неберущихся интегралов от достаточно сложных функций, которые предварительно табулируются, или при интегрировании графически или таблично заданных функций, что в экономических и технических приложениях встречается значительно чаще.

При вычислении интеграла следует помнить, каков геометрический смысл определенного интеграла. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезком оси абсцисс, прямой $x = a$ и прямой $x = b$ (рисунок 2.1). Таким образом, вычисление интеграла равносильно вычислению площади криволинейной трапеции.

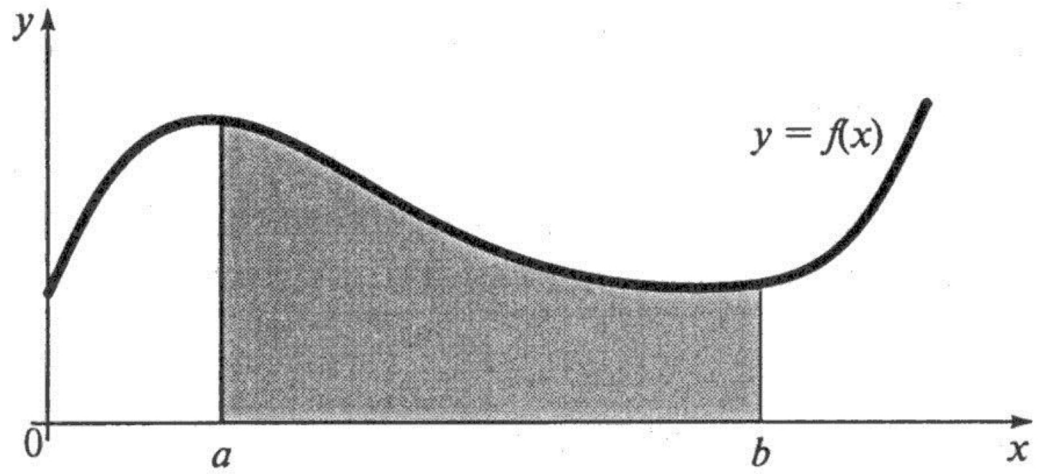


Рисунок 2.1 – Геометрический смысл интеграла

Все численные методы строятся на том, что подынтегральная функция приближенно заменяется более простой (горизонтальной или наклонной прямой, параболой 2-го, 3-го или более высокого порядка), от которой интеграл легко берется. В результате получаются формулы интегрирования, называемые *квадратурными*.

Чем меньше интервалы, на которых производят замену, тем точнее вычисляется интеграл. Поэтому исходный отрезок $[a,b]$ для повышения точности делят на несколько равных или неравных интервалов, на каждом из которых применяют формулу интегрирования, а затем складывают результаты.

К простейшим методам можно отнести методы прямоугольников (левых и правых) и трапеций. В первом случае подынтегральная функция заменяется горизонтальной прямой ($y = c_0$) со значением ординаты, т.е. значения функции соответственно слева или справа участка, во втором случае – наклонной прямой ($y = c_1 x + c_0$).

Метод прямоугольников

Разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей, т.е. на n элементарных отрезков. Длина каждого элементарного отрезка $h = \dfrac{b-a}{n}$. Точками деления будут: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, …, $x_{n-1} = a + (n-1)h$, $x_n = b$. Эти числа будем называть узлами. Вычислим значения функции $f(x)$ в узлах, обозна-

чим их y_0, y_1, y_2, …, y_{n-1}, y_n, т.е. $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, …, $y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(x_n)$. Числа y_0, y_1, y_2, …, y_{n-1}, y_n являются ординатами точек графика функции, соответствующих абсциссам x_0, x_1, x_2, …, x_{n-1}, x_n (рисунок 2.2).

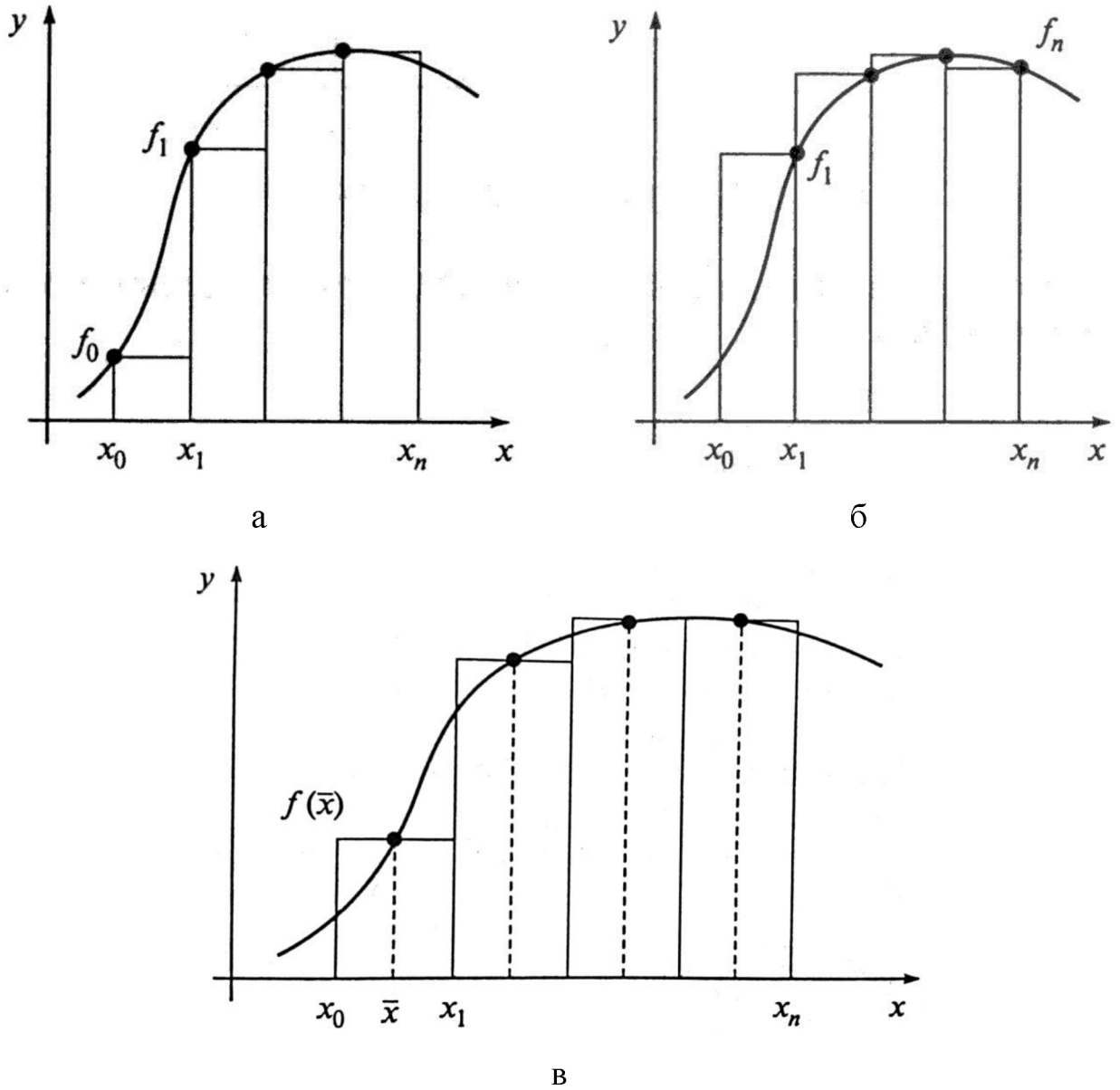


Рисунок 2.2 – Метод левых (а), правых (б) и средних (в) прямоугольников

Из рисунка 2.2 видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из n прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы n элементарных прямоугольников:

формула левых прямоугольников (рисунок 2, а):

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \qquad (2.2)$$

формула правых прямоугольников (рисунок 2, б):

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n\right) \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \qquad (2.3)$$

формула средних прямоугольников (рисунок 2, в):

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \qquad (2.4)$$

Метод прямоугольников не нашел широкого практического применения в силу значительных погрешностей, что видно из рисунка 2.2.

Пример 1. Метод средних прямоугольников

Вычислим по методу средних прямоугольников определенный интеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

с шагом разбиения $h = 0{,}1$.

1) заполните ячейки A1:B6 как показано на рисунке 2.3;

2) в ячейку A7 введите формулу для расчета середины первого отрезка ($\overline{x}_1 = a + h/2$):

= B2 + B4/2

3) выполните команду Главная → Заполнить → Прогрессия и в открывшемся окне «Прогрессия» установите: расположение по столбцам, шаг – 0,1, предельное значение – 0,95 (рисунок 2.4). После нажатия кнопки ОК *Excel* автоматически заполнит диапазон ячеек A8:A16 членами арифметической прогрессии с заданными параметрами (обратите внимание, что перед выполнением команды ячейка A7, содержащая первый член прогрессии, должна быть выделена);

	A	B	C	D
1	Метод средних прямоугольников			
2	a	0		
3	b	1		
4	h	0,1		
5				
6	x	y		
7	0,05	1,000062		
8	0,15	1,001686		
9	0,25	1,007782		
10	0,35	1,021213		
11	0,45	1,044569		
12	0,55	1,079988		
13	0,65	1,128993		
14	0,75	1,192424		
15	0,85	1,270482		
16	0,95	1,362855		
17	Сумма	11,11006		
18	Интеграл	1,111006		

Рисунок 2.3 – Пример 1

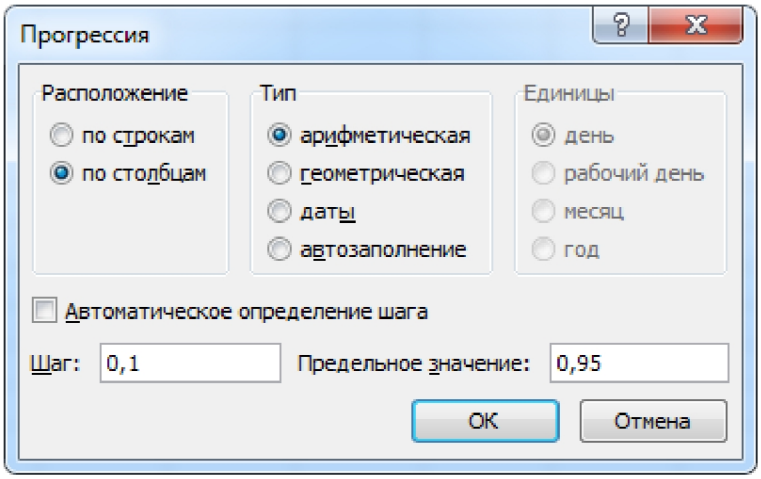


Рисунок 2.4 – Окно «Прогрессия»

4) в ячейку B7 введите формулу подынтегральной функции, заменяя x на A7:

= КОРЕНЬ (1 + A7^3)

5) методом «протаскивания» маркера заполнения скопируйте введенную формулу (ячейку B7) в ячейки диапазона B8:B16, получится таблица значений функции в серединах отрезков;

6) выделите диапазон B7:B16 и вычислите сумму значений функции, нажав на кнопку Σ (вкладка Главная панели инструментов *Excel*). Результат суммирования отобразится в ячейке B17;

7) для получения окончательного ответа необходимо результат суммирования умножить на шаг разбиения h, для этого в ячейку B18 введите следующую формулу:

= B4*B17

Циклические ссылки в *Excel*

Если в ячейку *Excel* введена формула, содержащая ссылку на эту же самую ячейку (может быть и не напрямую, а опосредовано – через цепочку других ссылок), то говорят, что имеет место *циклическая ссылка*. На практике к циклическим ссылкам прибегают, когда речь идет о реализации итерационного процесса, вычислениях по рекуррентным соотношениям. В обычном режиме *Excel* обнаруживает цикл и выдает сообщение о возникшей ситуации (рисунок 2.5), требуя ее устранения. *Excel* не может провести вычисления, т.к. циклические ссылки порождают бесконечное количество вычислений. Есть два выхода из этой ситуации: устранить циклические ссылки или допустить вычисления по формулам с циклическими ссылками (в последнем случае число повторений цикла должно быть конечным).

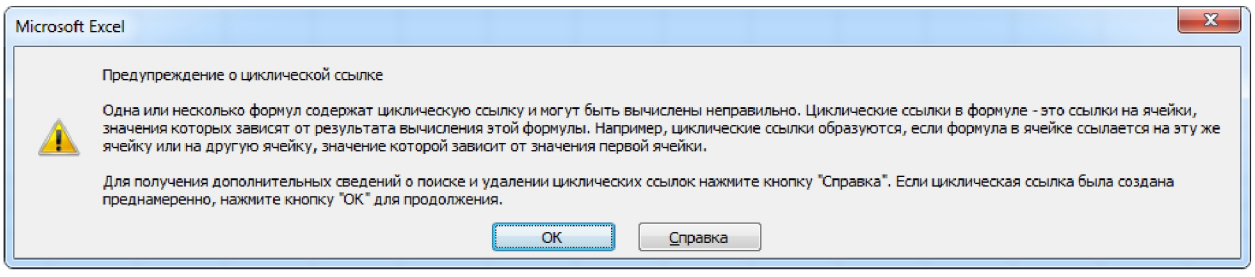


Рисунок 2.5 – Предупреждение о создании циклической ссылки

Для того, чтобы перейти в режим циклических вычислений, необходимо закрыть окно предупреждения, нажав кнопку ОК (рисунок 2.5). Чтобы вернуться в обычный режим, необходимо перезапустить *Excel*.

Параметры циклических вычислений устанавливаются на вкладке «Формулы» диалогового окна «Параметры *Excel*» (рисунок 2.6), вызываемого командой Файл → Параметры.

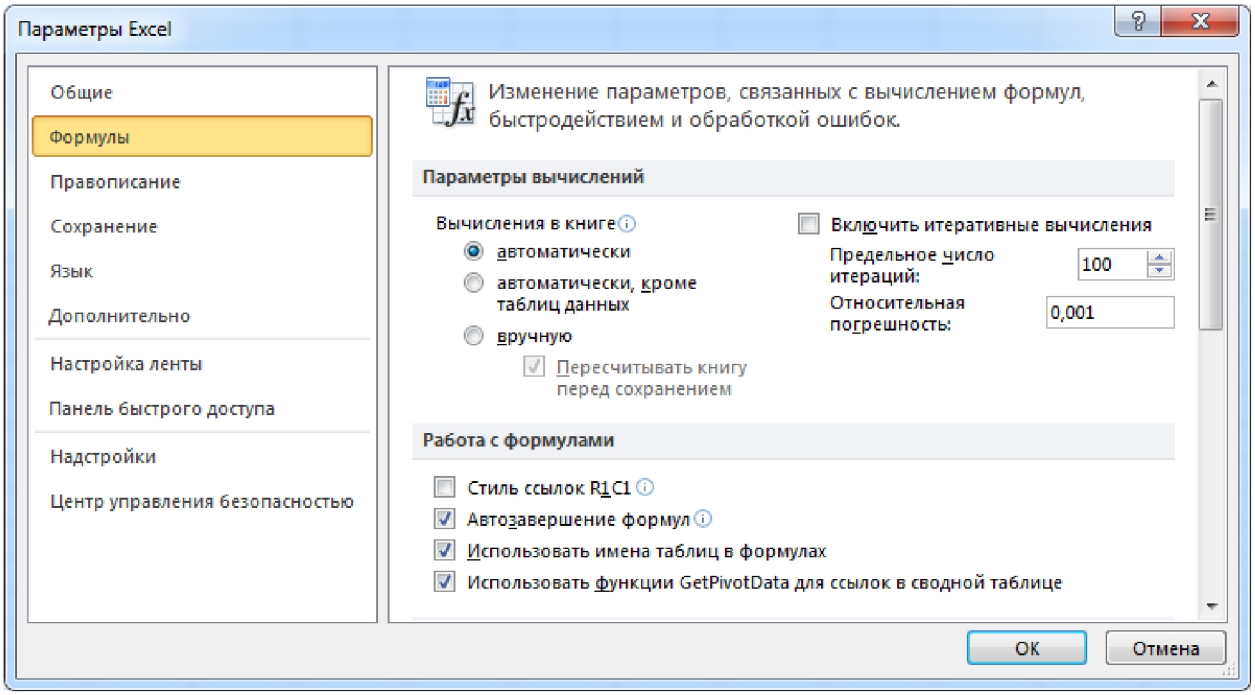


Рисунок 2.6 – Окно «Параметры *Excel*»

Напротив обязательного параметра «Включить итеративные вычисления» ставится галочка. Если установленные по умолчанию значения параметров «Предельное число итераций» и «Относительная погрешность» пользователя не устраивают, то он может задать другие. Нажатие ОК запускает вычисления.

Вычисления останавливаются по достижении заданной предельной итерации или, если абсолютная величина разности результатов оказывается меньше, чем заданная в поле «Относительная погрешность». Для перезапуска итераций, например, после изменения параметров, необходимо нажать на клавишу F9.

Пример 2. Использование циклических вычислений

Вычисли интеграл из примера 1, но методом левых прямоугольников и с помощью циклических ссылок *Excel*. Шаг и количество разбиений возьмем равными 0,001 и 1000 соответственно.

	A	B	C	D
1	Метод левых прямоугольников			
2	a	0		
3	b	1		
4	h	0,001		
5				
6	x	1		
7	y	1,413154		
8	Сумма	1111,241		
9	Интеграл	1,111241		

Рисунок 2.7 – Пример 2

1) заполните ячейки A1:A9 и B2:B4 как показано на рисунке 2.7;

2) в ячейку B6 введите рекуррентную формулу для расчета узлов ($x' = x + a + h$), при этом появится сообщение о циклической ссылке (рисунок 5), которое закройте нажав ОК:

= B6 + B2 + B4

3) в ячейку B7 введите формулу для вычисления ординат узлов:

= КОРЕНЬ (1 + (B6 – B4)^3)

4) в ячейки B8 будет производится суммирование значений функции:

= B8 + B7

5) для получения окончательного ответа необходимо результат суммирования умножить на шаг разбиения h, для этого в ячейку B9 введите следующую формулу:

= B8*B4

6) выполните команду Файл → Параметры, в появившемся окне «Параметры *Excel*» перейдите на вкладку «Формулы» и поставьте галочку в поле «Включить итеративные вычисления», установите значение «Предельное число итераций», равное 1000 (рисунок 2.6);

7) после нажатия клавиши ОК запуститься процесс циклических вычислений.

Метод трапеций

На рисунке 2.8 приведен пример вычисления интеграла методом трапеций. По сравнению с методом прямоугольников метод трапеций более точный, т.к. трапеция точнее заменяет соответствующую криволинейную трапецию, чем прямоугольник.

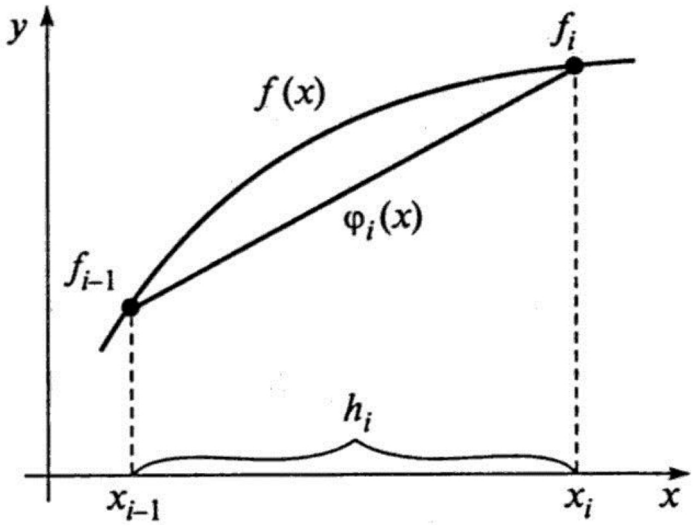


Рисунок 2.8 – Метод трапеций

Формула трапеций имеет следующий вид:

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0+2y_1+2y_2+\ldots+2y_{n-1}+y_n\right) \approx h\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \quad (2.5)$$

Эта формула означает, что площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из n трапеций (рисунок 2.8), при этом кривая заменяется вписанной в нее ломанной.

Пример 3. Метод трапеций

Вычислим определенный интеграл

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx$$

методом трапеций и сравним полученный результат с аналитическим решением (π). Количество разбиений n примем равным 10. Окончательный результат представлен на рисунке 2.9.

	A	B	C
1	Метод трапеций		
2			
3	a	0	
4	b	3,141592654	
5	n	10	
6	h	0,314159265	
7			
8	x	y	Площадь
9	0	0	0,015249377
10	0,314159265	0,097080552	0,073261457
11	0,628318531	0,369316366	0,177782244
12	0,942477796	0,762480554	0,307501197
13	1,256637061	1,195132866	0,434471142
14	1,570796327	1,570796327	0,528336657
15	1,884955592	1,792699299	0,561060266
16	2,199114858	1,779121292	0,511512036
17	2,513274123	1,477265464	0,369292713
18	2,827433388	0,873724967	0,137244397
19	3,141592654	3,84892E-16	
20		Численное	3,115711487
21		Аналитическое	3,141592654
22		Погрешность	-0,82%

Рисунок 2.9 – Пример 3

1) ячейки A1:A6 заполните, как показано на рисунке 2.9;

2) в ячейки B3:B6 введите следующие формулы и значения:

B3 (нижний предел интегрирования): 0

B4 (верхний предел интегрирования): = ПИ()

B5 (количество отрезков): 10

B6 (шаг разбиения): = (B4 – B3)/B5

3) введите текст в строку 8 как на рисунке 2.9;

4) в ячейки A9:A10 введите следующие формулы:

A9 (значение $x_0 = a$): = B3

A10 (значение $x_1 = x_0 + h$): = A9 + $B$6

5) методом «протаскивания» маркера заполнения скопируйте ячейку A10 в диапазон ячеек A11:A19 (всего должно получиться 11 значений x);

6) в ячейку B9 введите формулу для расчета подынтегральной функции:

= A9*SIN(A9)

и методом «протаскивания» маркера заполнения скопируйте ячейку B9 в диапазон ячеек B10:B19;

7) в ячейке C9 рассчитайте площадь первой трапеции ($h\frac{x_0 + x_1}{2}$):

= $B$6*(B9 + B10)/2

и скопируйте ячейку C9 в диапазон ячеек C10:C18 (таким образом, рассчитаем площадь 10 трапеций);

8) ячейки B20:B22 заполните, как показано на рисунке 2.9, а в ячейки C20:C22 введите следующие формулы:

C20 (результат по методу трапеций): = СУММ(C9:C18)

C21 (аналитическое решение): = ПИ()

C22 (погрешность): = (C20 – C21)/C21

Если все было сделано верно, то численное интегрирование методом трапеции даст приближенное значение 3,115711, что на 0,82% меньше точного аналитического решения.

Метод Симпсона

Этот метод базируется на замене подынтегральной функции квадратичной параболой, которая строится уже не по двум (как прямая в методе трапеций), а по трем точкам на каждом участке (рисунок 2.10). По этим трем точкам (крайние точки участка и средняя точка) строится интерполяционная функция – полином второго порядка, который аналитически интегрируется.

При работе с этим методом обязательно разбивают весь интервал интегрирования $[a,b]$ на четное число участков $2n$ равной длины $h = \frac{b-a}{2n}$. Обозначим точки разбиения $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, …, $x_i = a + ih$, …, $x_{2n} = b$. Значение функции f в точках x_i обозначим y_i, т.е. $y_i = f(x_i)$. Тогда, согласно методу Симпсона:

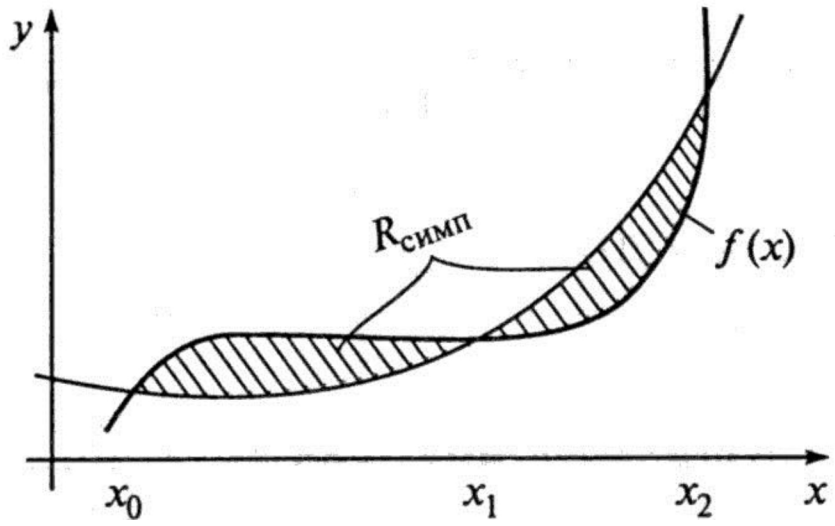


Рисунок 2.10 – Метод Симпсона

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right) \approx$$
$$\approx \frac{h}{3}\sum_{i=0,2,4,\ldots}^{2n-2}\left(f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})\right) \qquad (2.6)$$

По сравнению с методами прямоугольников и трапеций метод Симпсона более точный, что наглядно видно из рисунка 2.10 (подынтегральная функция почти совпадает с параболой).

Пример 4. Метод Симпсона

Вычислим методом Симпсона определенный интеграл

$$\int_0^2 e^{x^2} dx,$$

который не имеет аналитического решения. В справочнике для данного интеграла на отрезке $[0,2]$ приводится приближенное значение 16,452627. Количество разбиений n примем равным 20, тогда для метода Симпсона понадобится 21 пара значений x и y. Окончательный результат представлен на рисунке 2.11.

	A	B	C	D
1	Метод Симпсона			
2				
3	a	0		
4	b	2		
5	n	20		
6	h	0,1		
7				
8	#	x	y	Площадь
9	1	0	1	6,081011443
10	2	0,1	1,010050167	
11	3	0,2	1,040810774	6,59101878
12	4	0,3	1,094174284	
13	5	0,4	1,173510871	7,742941952
14	6	0,5	1,284025417	
15	7	0,6	1,433329415	9,859075174
16	8	0,7	1,63231622	
17	9	0,8	1,896480879	13,60639465
18	10	0,9	2,247907987	
19	11	1	2,718281828	20,35291626
20	12	1,1	3,353484653	
21	13	1,2	4,220695817	32,9979457
22	14	1,3	5,419480705	
23	15	1,4	7,099327065	57,98608773
24	16	1,5	9,487735836	
25	17	1,6	12,93581732	110,4427775
26	18	1,7	17,9933096	
27	19	1,8	25,53372175	227,996083
28	20	1,9	36,96605281	
29	21	2	54,59815003	
30			Численное	16,45520841
31			Аналитическое	16,452627
32			Погрешность	0,02%

Рисунок 2.11 – Пример 4

1) ячейки A1:A6 заполните, как показано на рисунке 2.11;
2) в ячейки B3:B6 введите следующие формулы и значения:

B3 (нижний предел интегрирования): 0

B4 (верхний предел интегрирования): 2

B5 (количество отрезков): 20

B6 (шаг разбиения): = (B4 – B3)/B5

3) введите текст в строку 8 как на рисунке 2.11;

4) числа в ячейках A9:A29 не играют существенной роли, но помогают понять сущность метода. Введите в ячейку A9 цифру 1 и нажмите Enter. Щелчком ЛКМ выделите ячейку A9, затем подведите курсор мыши к маркеру заполнения ■, и когда он примет вид +, щелкните ЛКМ и одновременно нажмите клавишу Ctrl. Теперь, не отпуская кнопок, перемещайте курсор мыши + вниз, так чтобы диапазон заполнился ячеек A10:A29.

5) в ячейки B9:B10 введите следующие формулы:

B9 (значение $x_0 = a$): = B3

B10 (значение $x_1 = x_0 + h$): = B9 + $B$6

6) методом «протаскивания» маркера заполнения скопируйте ячейку B10 в диапазон ячеек B11:B29 (всего должно получиться 21 значение x);

7) в ячейку C9 введите формулу для расчета подынтегральной функции:

= EXP(B9^2)

и методом «протаскивания» маркера заполнения скопируйте ячейку C9 в диапазон ячеек C10:C29;

8) в ячейке D9 введите формулу для вычисления первого слагаемого суммирования ($y_0 + 4y_1 + y_2$):

= C9 + 4*C10 + C11

9) теперь необходимо скопировать данную формулу в соответствующие ячейки диапазона D11:D27. Для этого выделите ячейки D9:D10 и методом «протаскивания» скопируйте их в диапазон ячеек D11:D27;

10) ячейки C30:C32 заполните, как показано на рисунке 2.11, а в ячейки D30:D32 введите следующие формулы:

D30 (результат по методу Симпсона): = СУММ(D9:D27)*B6/3

D31 (аналитическое решение): 16,452627

D32 (погрешность): = (D30 – D31)/D31

Интегрирование таблично заданной функции

Часто необходимо проинтегрировать таблично заданную функцию, т.е. когда аналитическое выражение функции неизвестно. В данном случае можно воспользоваться любым из приведенных выше методов, однако для метода Симпсона необходимо нечетное количество точек.

Выше было показано, что увеличение количества точек численного интегрирования значительно увеличивает точность вычислений. Однако, с табличными данными уменьшить шаг разбиения нельзя, т.к. невозможно увеличить количество табличных значений.

Для повышения точности интегрирования таблично заданной функции (отрезки должны быть равной длины) применяется метод Ромберга, который заключается в том, что количество табличных значений уменьшают, удваивая ширину отрезка, т.е. пропуская каждое второе значение в таблице. Очевидно, что результат, полученный по усеченным значениям, будет менее точным, однако, его можно использовать для уточнения решения, полученного по полному набору данных. Окончательное значение интеграла определяют по следующей формуле:

$$I = I_h + \frac{I_h - I_{2h}}{2^m - 1}, \tag{2.7}$$

где I – уточненное значение интеграла;

I_h – значение интеграла при шаге разбиения h;

I_{2h} – значение интеграла при шаге разбиения $2h$;

m – равно 2 для метода трапеций и 4 для метода Симпсона.

Пример 5. Интегрирование таблично заданной функции

Используя метод трапеций и Ромберга, вычислим интеграл таблично заданной функции. Окончательный результат и таблица значений функции изображены на рисунке 2.12.

	A	B	C	D	E	F
1	Таблично заданная функция					
2						
3	x	y	h = 0,2	h = 0,4		
4	1,8	6,050	6,050	6,050		
5	2,0	7,389	14,778			
6	2,2	9,025	18,05	18,05		
7	2,4	11,023	22,046			
8	2,6	13,464	26,928	26,928		
9	2,8	16,445	32,89			
10	3,0	20,086	40,172	40,172		
11	3,2	24,533	49,066			
12	3,4	29,964	29,964	29,964	Метод Ромберга	Аналитическое
13	Метод трапеций		23,9944	24,2328	23,9149	23,9144
14	Погрешность		0,3345%	1,3314%	0,0022%	0,0000%

Рисунок 2.12 – Пример 5

1) ячейки A1:D3 заполните, как показано на рисунке 2.12;

2) в ячейки A4:B12 введите набор экспериментальных точек, который необходимо проинтегрировать;

3) заполните ячейки A13:A14 и E12:F12, как показано на рисунке 2.12;

4) в ячейках C4:C13 выполним расчет для шага $h = 0,2$:

C4 (y_0): = B4

C5 ($2y_1$): = 2*B5

(скопируйте формулу из ячейки C5 в диапазон C6:C11)

C12 (y_n): = B12

C13 ($\frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$): = 0,2/2*СУММ(C4:C12)

5) в ячейках D4:D13 выполним расчет для шага $h = 0,4$:

D4 (y_0): = B4

D5: пропускаем, т.к. удваиваем ширину участков

D6 ($2y_1$): = 2*B6

(скопируйте формулу из ячейки D6 в ячейки D8 и D10)

D12 (y_n): = B12

D13 ($\frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$): = 0,4/2*СУММ(D4:D12)

6) в ячейку E13 введите формулу Ромберга (при $m = 2$):

$$= C13 + (C13 - B13)/3$$

7) табличные данные соответствуют функции $y = e^x$, тогда точное значение интеграла $\int_{1,8}^{3,4} e^x dx = 23,9144$, что и введем в ячейку F13;

8) в строке 14 определим погрешность вычислений, в ячейку C14 введите формулу:

$$= (C13 - \$F\$13)/\$F\$13$$

и методом «протаскивания» скопируйте ячейку C14 в диапазон ячеек D14:F14.

Очевидно, что метод Ромберга позволяет значительно уменьшить погрешность вычислений за счет двойного просчета.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Интегрирование аналитически заданной функции

Вычислить определенный интеграл и построить графическую зависимость результата численного интегрирования от количества разбиений ($n = 50, 100, 200$). Функцию и метод выберите из таблицы 2.1 в соответствии с номером варианта.

Для вычисления гиперболического синуса sh и косинуса ch в *Excel* используйте функцию SINH и COSH соответственно.

Задание 2. Интегрирование таблично заданной функции

Вычислить определенный интеграл таблично заданной функции. Функцию и метод выберите из таблицы 2.2 в соответствии с номером варианта.

Таблица 2.1 – Задание 1

№	Интеграл	Метод	№	Интеграл	Метод
1	$\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$	Средних прямоугольников	7	$\int_0^1 \cos\left(xe^{-3x}\right)dx$	Правых прямоугольников
2	$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3}dx$	Трапеций	8	$\int_1^2 x^{-1}\ln(1+x)dx$	Трапеций
3	$\int_0^1 \left(e^x-1\right)^2 e^x dx$	Симпсона	9	$\int_1^2 x^{-1}e^x dx$	Симпсона
4	$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}dx$	Левых прямоугольников	10	$\int_1^2 \mathrm{sh}\left(x^2\right)dx$	Средних прямоугольников
5	$\int_2^5 \frac{\cos^2 x}{\ln x}dx$	Трапеций	11	$\int_0^1 \cos\left(x^2+x\right)dx$	Трапеций
6	$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$	Симпсона	12	$\int_0^{\pi/3} x\sin\left(x^3\right)dx$	Симпсона

№	Интеграл	Метод	№	Интеграл	Метод
13	$\int_0^{\pi} \sin\left(\cos\left(2x+1\right)\right)dx$	Левых прямоугольников	20	$\int_{0,1}^{2} \frac{\cos\left(x^2\right)}{x+x^3}dx$	Трапеций
14	$\int_0^{\pi/4} \ln\left(1+\cos x\right)dx$	Трапеций	21	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$	Симпсона
15	$\int_0^{\pi/3} \ln\left(1+\sqrt{\sin x}\right)dx$	Симпсона	22	$\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$	Левых прямоугольников
16	$\int_{0,1}^{2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$	Правых прямоугольников	23	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	Трапеций
17	$\int_0^{\pi/4} x^3\cos\left(x^2\right)dx$	Трапеций	24	$\int_0^{\pi/4} \sin\left(4x\right)dx$	Симпсона
18	$\int_0^1 \mathrm{ch}\left(x^2\right)dx$	Симпсона	25	$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$	Правых прямоугольников
19	$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x}e^{-x}dx$	Средних прямоугольников	26	$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$	Трапеций

№	Интеграл	Метод	№	Интеграл	Метод
27	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$	Симпсона	34	$\int_0^{\pi} \cos\left(\sin\left(x+1\right)\right)dx$	Правых прямоугольников
28	$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$	Средних прямоугольников	35	$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$	Трапеций
29	$\int_0^5 \sqrt{\frac{x}{10-x}}dx$	Трапеций	36	$\int_0^1 \sin\left(x+x^3\right)dx$	Симпсона
30	$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 x dx$	Симпсона	37	$\int_0^{\pi} \cos\left(2\sin\left(3x\right)\right)dx$	Средних прямоугольников
31	$\int_0^{\pi/3} \ln\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$	Левых прямоугольников	38	$\int_{0,1}^2 \frac{\cos x}{\sqrt{x+1}}dx$	Трапеций
32	$\int_0^{\pi/4} \left(x+x^3\right)\cos\left(x^2\right)dx$	Трапеций	39	$\int_0^1 \cos\left(x^3\right)dx$	Симпсона
33	$\int_0^{\pi} x^2 e^{-2x}dx$	Симпсона	40	$\int_1^2 \sin\left(x^3\right)dx$	Левых прямоугольников

№	Интеграл	Метод	№	Интеграл	Метод
41	$\int_0^{\pi} \sin(3\cos x)\,dx$	Трапеций	42	$\int_0^{1} \cos\left(x + x^3\right)dx$	Симпсона

Таблица 2.2 – Задание 2

№	Метод	Таблица значений									
1	Трапеций/Ромберга	x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
2	Симпсона										
3	Левых/правых прямоугольников	$f(x)$	0	0,32	0,64	0,92	1,12	1,22	1,20	1,05	0,79
4	Трапеций/Ромберга	x	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
5	Симпсона										
6	Левых/правых прямоугольников	$f(x)$	1,17	1,02	0,90	0,63	0,59	0,63	0,66	0,79	1,20

№	Метод	Таблица значений									
7	Трапеций/Ромберга	x	5,7	5,8	5,9	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5
8	Симпсона										
9	Левых/правых прямоугольников	$f(x)$	26,28	19,77	10,76	0,00	-11,5	-22,6	-32,1	-38,9	-42,25
10	Трапеций/Ромберга	x	1,0	1,05	1,1	1,15	1,2	1,25	1,3	1,35	1,4
11	Симпсона										
12	Левых/правых прямоугольников	$f(x)$	1,61	1,63	1,65	1,67	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78
13	Трапеций/Ромберга	x	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
14	Симпсона										
15	Левых/правых прямоугольников	$f(x)$	-1,33	-0,98	-0,53	0,0	0,54	1,05	1,47	1,75	1,87

№	Метод	Таблица значений								
16	Трапеций/Ромберга	x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
17	Симпсона										
18	Левых/правых прямоугольников	$f(x)$	0,250	0,251	0,252	0,256	0,260	0,267	0,275	0,285	0,298
19	Трапеций/Ромберга	x	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8
20	Симпсона										
21	Левых/правых прямоугольников	$f(x)$	0,0	-5,2	-10,3	-14,9	-18,4	-20,3	-20,1	-17,8	-13,5
22	Трапеций/Ромберга	x	8,05	8,45	8,85	9,25	9,65	10,05	10,45	10,85	11,25
23	Симпсона										
24	Левых/правых прямоугольников	$f(x)$	0,66	0,79	1,20	1,45	1,65	2,05	2,26	2,62	3,00

№	Метод	Таблица значений									
25	Трапеций/Ромберга	x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
26	Симпсона	$f(x)$	0,79	0,43	0	-0,45	-0,87	-1,23	-1,47	-1,58	-1,53
27	Левых/правых прямоугольников										
28	Трапеций/Ромберга	x	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
29	Симпсона	$f(x)$	1,88	1,90	1,93	1,95	1,98	2,00	2,03	2,05	2,08
30	Левых/правых прямоугольников										
31	Трапеций/Ромберга	x	4,9	5,0	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7
32	Симпсона	$f(x)$	-7,42	0	8,04	15,89	22,72	27,73	30,25	29,82	26,28
33	Левых/правых прямоугольников										

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: знакомство с основными численными методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка; задача Коши; решение дифференциальных уравнений численными методами в *Excel*.

Общие сведения

Дифференциальное уравнение – это уравнение, в котором неизвестной величиной является некоторая функция. При этом в самом уравнении участвует не только неизвестная функция, но и различные производные от нее. Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком уравнения*.

Дифференциальные уравнения очень часто встречаются при построении моделей динамики объектов исследования. Они описывают, как правило, изменение параметров объекта во времени (хотя могут быть и другие случаи). Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых участвовали координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени.

Рассмотрим несколько простых примеров:

1. На тело массой m, падающее вертикально вниз с некоторой высоты, действует две противоположно направленные силы: сила тяжести mg и сила сопротивления воздуха $-kV^2$, которая пропорционально скорости тела V. Для того чтобы определить зависимость скорости тела V от времени t необходимо записать 2-ой закон Ньютона и решить дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kV^2 \qquad (3.1)$$

2. Груз массой m, колеблющийся на пружине жесткостью k, совершает возвратно-поступательное движение. Если в системе нет потерь энергии, то период колебаний пружинного маятника можно определить, решив дифференциальное уравнение 2-го порядка, также полученное из 2-го закона Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \tag{3.2}$$

где x – перемещение груза относительно точки равновесия.

Различают *обыкновенные дифференциальные уравнения* (ОДУ) и *дифференциальные уравнения в частных производных* (ДУЧП), которые, в отличие от первых, содержат неизвестные функции от нескольких переменных и их частные производные.

Результатом решения дифференциальных уравнений являются функции, а не числа, как при решении конечных уравнений, вследствие чего методы решения их более трудоемки. При этом, хотя уравнения (3.1) и (3.2), и имеют аналитическое решение, существует целый ряд задач, которые решаются только численными методами. Поэтому владение такими методами решения дифференциальных уравнений обязательно при моделировании и очень важно для получения правильного результата.

При использовании численных методов решения дифференциальных уравнений $dy/dx = f(x,y)$ или $y' = f(x,y)$ представляется в табличном виде, т.е. получается совокупность значений y_i и x_i. Решение носит шаговый характер, т.е. по одной или по нескольким точкам (x,y) за один шаг находят следующую точку, затем следующую и т.д. Разница между двумя соседними значениями аргумента $h = x_{i+1} - x_i$ называется *шагом*. Заметим, что величина шага существенно влияет на точность и скорость решения.

Таким образом, задача сводится к разложению искомого решения $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестности текущей точки и усечения его. Количество оставленных членов ряда определяет порядок и, следовательно, точность ме-

тода. По полученному разложению, зная значение y_i в точке разложения x_i и производную $f(x_i, y_i)$, находят значение функции через шаг h: $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$.

Наибольшее распространение имеют задачи Коши, в которых заданы начальные условия, т.е. при $x_0 = a$ $y(x_0) = y_0$ или $y(a) = y_a$. Имея их, легко начинать процесс решения, т.е. найти y_1 при x_1, y_2 при x_2 и т.д.

Рассмотрим численные методы решения задачи Коши на примере уравнения 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), a \le x \le b \\ y(a) = y_a \end{cases} \tag{3.3}$$

Метод Эйлера

Метод Эйлера является одним из самых простых методов решения дифференциальных уравнений 1-го порядка $y' = f(x, y)$. Он в основном используется как учебный, т.к. в практических расчетах он дает значительную погрешность.

Заменяя производную в первом выражении системы (3.3) разностным уравнением, запишем следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), i = 0, 1, ..., N-1 \\ y_0 = y_a \end{cases} \tag{3.4}$$

из первого уравнения которой получим выражение для последовательных значений y_i:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{3.5}$$

Метод Эйлера имеет очень простую геометрическую интерпретацию. Искомая интегральная кривая $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ заменяется ломаной (рисунок 3.1), наклон которой на каждом элементарном участке $[x_i, x_{i+1}]$ определяется наклоном касательной к интегральной кривой в точке (x_i, y_i).

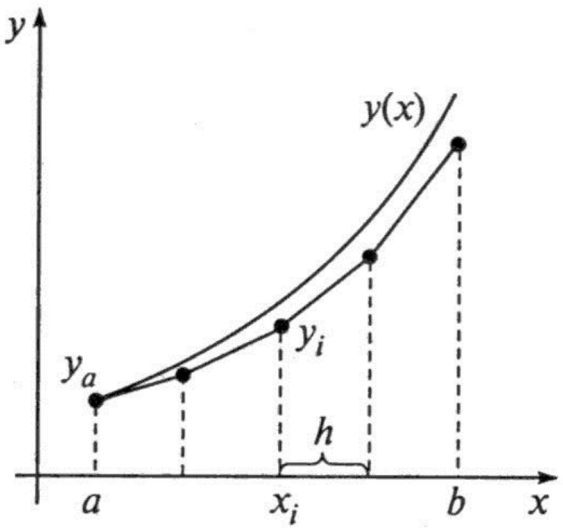


Рисунок 3.1 – Геометрический смысл метода Эйлера

Пример 1. Метод Эйлера

Найдем методом Эйлера приближенное решение обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

с начальный условием $y(0)=1$ и сравним его с аналитическим решением, результатом которого является функция $y = e^{x^2/2}$. Искомую интегральную кривую будем искать на отрезке $[0; 0,5]$. Окончательный результат изображен на рисунке 3.2.

1) ячейки A1:E4 заполните, как показано на рисунке 3.2;

2) используя автозаполнение, введите в ячейки A5:B10 значения с рисунка 3.2;

3) в ячейку C5 введите значение 1, т.е. начальное условие $y(0)=1$ и соответственно первый член y_i правой части уравнения (3.5) при $i=0$;

4) в ячейку D5 введите формулу второго члена $hf(x_i, y_i)$ правой части уравнения (3.5) при $i=0$ и шаге $h=0,1$:

= 0,1*(B5*C5)

и методом «протаскивания» скопируйте ячейку D5 в диапазон ячеек D6:D10;

	A	B	C	D	E
1	Метод Эйлера				
2	ОДУ y' = xy при y(0) = 1				
3	h = 0,1				
4	i	x	y	h*f(x,y)	exp(x^2/2)
5	0	0,00	1,0000	0,0000	1,0000
6	1	0,10	1,0000	0,0100	1,0050
7	2	0,20	1,0100	0,0202	1,0202
8	3	0,30	1,0302	0,0309	1,0460
9	4	0,40	1,0611	0,0424	1,0833
10	5	0,50	1,1036	0,0552	1,1331
11	h = 0,05				
12	i	x	y	h*f(x,y)	exp(x^2/2)
13	0	0,00	1,0000	0,0000	1,0000
14	1	0,05	1,0000	0,0025	1,0013
15	2	0,10	1,0025	0,0050	1,0050
16	3	0,15	1,0075	0,0076	1,0113
17	4	0,20	1,0151	0,0102	1,0202
18	5	0,25	1,0252	0,0128	1,0317
19	6	0,30	1,0380	0,0156	1,0460
20	7	0,35	1,0536	0,0184	1,0632
21	8	0,40	1,0720	0,0214	1,0833
22	9	0,45	1,0935	0,0246	1,1066
23	10	0,50	1,1181	0,0280	1,1331

Рисунок 3.2 – Пример 1

5) в ячейке E5 рассчитаем точное значение искомой функции $y = e^{x^2/2}$:

= EXP(B5^2/2)

и методом «протаскивания» скопируйте ячейку E5 в диапазон ячеек E6:E10;

6) в ячейке C6 рассчитаем по формуле (3.5) значение функции y_{i+1} через шаг h:

= C5 + D5

и методом «протаскивания» скопируйте ячейку C6 в диапазон ячеек C7:C10;

Очевидно, что решение, полученное численным методом (столбец C) имеет значительную погрешность по сравнению с точным аналитическим решением (столбец E). Более точный результат можно получить, уменьшив шаг.

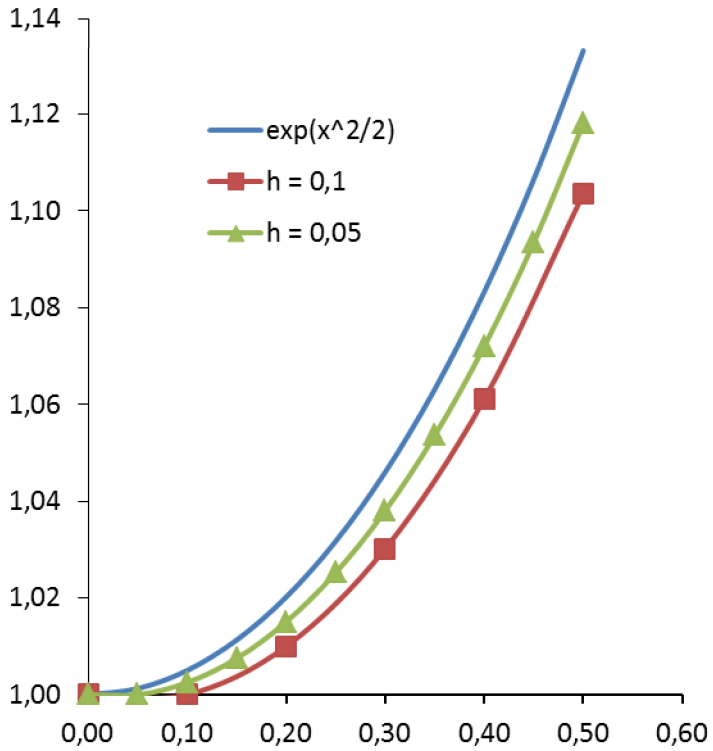


Рисунок 3.3 – Влияние шага на точность метода Эйлера

7) действуя аналогичным образом, вычислите искомую интегральную кривую, но с шагом $h = 0,05$ (рисунок 3.2);

8) постройте графики искомой функции на отрезке $[0; 0,5]$, вычисленной аналитически и методом Эйлера с шагом 0,1 и 0,05 (рисунок 3.3).

Из рисунка 3.3 видно, что погрешность численного решения увеличивается при удалении от точки начального условия. При этом уменьшение шага расчета значительно увеличивает точность решения.

Метод Рунге-Кутта 2-го порядка

Существует целая группа методов Рунге-Кутта различного порядка и соответственно различной точности. Однако, все они более точны, чем описанный выше метод Эйлера, который является методом 1-го порядка.

В случае метода Рунге-Кутта 2-го порядка для расчета одного значения функции необходимо два раза вычислять правую часть дифференциального уравнения, а не один, как в методе Эйлера. Вычислительный алгоритм записывается следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + k_2}{2} \tag{3.6а}$$

$$k_1 = hf\left(x_i, y_i\right) \tag{3.6б}$$

$$k_2 = hf\left(x_i + h, y_i + k_1\right) \tag{3.6в}$$

Геометрически это означает, что определяется направление интегральной кривой в исходной точке $\left(x_i, y_i\right)$ и во вспомогательной $\left(x_i + h, y_i + k_1\right)$, а в качестве окончательного выбирается среднее из этих направлений (рисунок 3.4).

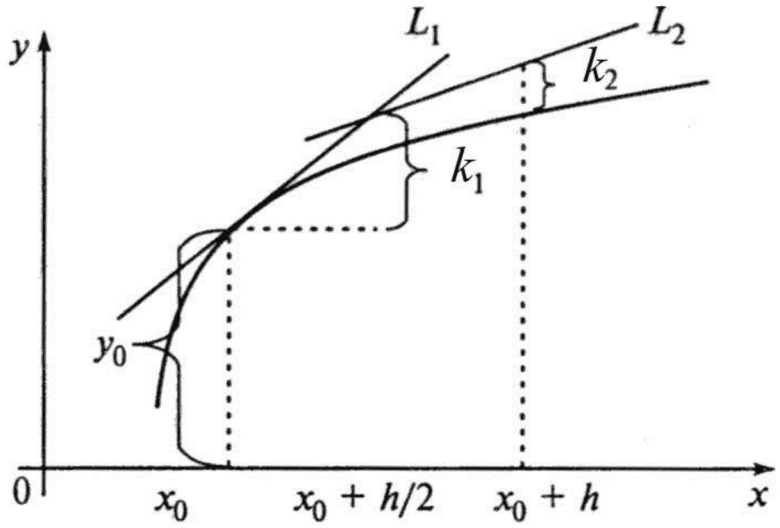


Рисунок 3.4 – Геометрический смысл метода Рунге-Кутта 2-го порядка

Пример 2. Метод Рунге-Кутта 2-го порядка

Найдем методом Рунге-Кутта 2-го порядка приближенное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

с начальный условием $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 0,5]$. Окончательный результат изображен на рисунке 3.5.

1) ячейки A1:F5 заполните, как показано на рисунке 3.4;

2) используя автозаполнение, введите в ячейки A6:B11 значения с рисунка 3.4;

	A	B	C	D	E	F
1	Метод Рунге-Кутта 2-го порядка					
2	ОДУ y' = xy при y(0) = 1					
3						
4	h =	0,1				
5	i	x	y	k1	k2	Погрешность
6	0	0	1,0000	0,0000	0,0100	0,00000000%
7	1	0,1	1,0050	0,0101	0,0203	-0,00124584%
8	2	0,2	1,0202	0,0204	0,0312	-0,00253284%
9	3	0,3	1,0460	0,0314	0,0431	-0,00400752%
10	4	0,4	1,0832	0,0433	0,0563	-0,00591053%
11	5	0,5	1,1331	0,0567	0,0714	-0,00857378%

Рисунок 3.5 – Пример 2

3) в ячейку C6 введите значение 1, т.е. начальное условие $y(0)=1$ и соответственно первый член y_i правой части уравнения (3.6а) при $i=0$;

4) в ячейки D6:E6 введите формулы (3.6б-3.6в) для вычисления параметров k:

D6 (k_1): = $B$4*(B6*C6)

E6 (k_2): = $B$4*((B6 + $B$4)*(C6 + D6))

5) в ячейке F6 рассчитаем погрешность метода с учетом того, что искомая функция $y=e^{x^2/2}$:

= C6/EXP(B6^2/2) – 1

6) методом «протаскивания» скопируйте ячейки D6:F6 в диапазон ячеек D7:F11;

9) в ячейке C7 рассчитаем по формуле (3.6а) значение функции y_{i+1} через шаг h:

= C6 + (D6 + E6)/2

и методом «протаскивания» скопируйте ячейку C7 в диапазон ячеек C8:C11.

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

Наиболее часто в вычислительной практике используется метод Рунге-Кутта 4-го порядка. В этом методе величины y_{i+1} вычисляются по следующим формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \tag{3.7а}$$

$$k_1 = hf\left(x_i, y_i\right) \tag{3.7б}$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \tag{3.7в}$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \tag{3.7г}$$

$$k_4 = hf\left(x_i + h, y_i + k_3\right) \tag{3.7д}$$

Геометрически результатом численного решения методом Рунге-Кутта 4-го порядка является ломаная линия, наклон которой определяется, как среднее взвешенное угловых коэффициентов k_1, k_2, k_3 и k_4 касательных, проведенных к интегральной кривой в точках x_i, $x_i + \frac{h}{2}$ и $x_i + h$ соответственно.

Пример 3. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

Найдем методом Рунге-Кутта 4-го порядка приближенное решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

с начальный условием $y(0) = 1$ на отрезке $[0; 0{,}5]$. Окончательный результат изображен на рисунке 3.6.

1) ячейки A1:H5 заполните, как показано на рисунке 3.6;

2) используя автозаполнение, введите в ячейки A6:B11 значения с рисунка 3.6;

3) в ячейку C6 введите значение 1, т.е. начальное условие $y(0) = 1$ и соответственно первый член y_i правой части уравнения (3.7а) при $i = 0$;

4) в ячейки D6:G6 введите формулы (3.7б-3.7д) для вычисления параметров k:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Метод Рунге-Кутта 4-го порядка							
2	ОДУ y' = xy при y(0) = 1							
3								
4	h =	0,1						
5	i	x	y	k1	k2	k3	k4	Погрешность
6	0	0	1,0000	0,0000	0,0050	0,0050	0,0101	0,00000000%
7	1	0,1	1,0050	0,0101	0,0152	0,0152	0,0204	0,00000000%
8	2	0,2	1,0202	0,0204	0,0258	0,0258	0,0314	-0,00000003%
9	3	0,3	1,0460	0,0314	0,0372	0,0373	0,0433	-0,00000010%
10	4	0,4	1,0833	0,0433	0,0497	0,0499	0,0567	-0,00000026%
11	5	0,5	1,1331	0,0567	0,0639	0,0641	0,0718	-0,00000061%

Рисунок 3.6 – Пример 3

D6 (k_1): = $B$4*(B6*C6)

E6 (k_2): = $B$4*((B6 + $B$4/2)*(C6 + D6/2))

F6 (k_3): = $B$4*((B6 + $B$4/2)*(C6 + E6/2))

G6 (k_4): = $B$4*((B6 + $B$4)*(C6 + F6))

5) в ячейке H6 рассчитаем погрешность метода с учетом того, что искомая функция $y = e^{x^2/2}$:

= C6/EXP(B6^2/2) – 1

6) методом «протаскивания» скопируйте ячейки D6:H6 в диапазон ячеек D7:H11;

10) в ячейке C7 рассчитаем по формуле (3.7а) значение функции y_{i+1} через шаг h:

= C6 + (D6 + 2*E6 + 2*F6 + G6)/6

и методом «протаскивания» скопируйте ячейку C7 в диапазон ячеек C8:C11.

Из рисунков 3.5 и 3.6 видно, что при одинаковом шаге расчета метод Рунге-Кутта 4-го порядка дает значительно меньшую ошибку, чем методы более низких порядков.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Решить задачу Коши методами Эйлера и Рунге-Кутта на отрезке $[0,1;1,1]$ с шагом $h=0,1$ при начальном условии $y(0,1)=0,25$.

Четные варианты: $\frac{dy}{dx}=a\left(x^2+\sin(bx)\right)+cy$

Нечетные варианты: $\frac{dy}{dx}=a\left(x^2+\cos(bx)\right)+cy$

Коэффициенты a, b, c и метод выберите из таблицы 3.1 в соответствии с номером варианта.

Таблица 3.1 – Задание 1

№	a	b	c	Метод
1	0,133	2	0,872	Эйлера
2	0,215	1,5	1,283	Рунге-Кутта 2-го порядка
3	0,158	0,8	1,164	Рунге-Кутта 4-го порядка
4	0,173	0,7	0,754	Эйлера
5	0,221	1,2	0,452	Рунге-Кутта 2-го порядка
6	0,163	0,4	0,635	Рунге-Кутта 4-го порядка
7	0,133	2	0,872	Эйлера
8	0,145	0,5	0,842	Рунге-Кутта 2-го порядка
9	0,213	1,8	0,368	Рунге-Кутта 4-го порядка
10	0,127	0,6	0,573	Эйлера
11	0,232	1,6	1,453	Рунге-Кутта 2-го порядка
12	0,417	0,8	0,972	Рунге-Кутта 4-го порядка
13	0,324	1,5	0,612	Эйлера

№	a	b	c	Метод
14	0,258	0,5	1,278	Рунге-Кутта 2-го порядка
15	0,317	1,1	0,283	Рунге-Кутта 4-го порядка
16	0,166	1,3	0,461	Эйлера
17	0,186	0,7	0,457	Рунге-Кутта 2-го порядка
18	0,215	0,4	0,254	Рунге-Кутта 4-го порядка
19	0,188	0,1	0,536	Эйлера
20	0,193	1,9	0,248	Рунге-Кутта 2-го порядка
21	0,291	0,3	1,354	Рунге-Кутта 4-го порядка
22	0,311	1,7	0,279	Эйлера
23	0,353	1,3	1,216	Рунге-Кутта 2-го порядка
24	0,415	0,4	0,354	Рунге-Кутта 4-го порядка
25	0,233	0,2	0,427	Эйлера
26	0,355	1,2	0,388	Рунге-Кутта 2-го порядка

Задание 2

Найти приближенное решение задачи Коши $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(0) = 0$ на отрезке $[0; 1]$ с шагом $h = 0,05$, используя методы Эйлера и Рунге-Кутта. Уравнение и метод выберите из таблицы 3.2 в соответствии с номером варианта.

Таблица 3.2 – Задание 2

№	$f(x,y)$	Метод	№	$f(x,y)$	Метод
1	$\cos(x+y)+\frac{3}{2}(x-y)$	Рунге-Кутта 4-го порядка	8	$\frac{\cos y}{1,25+x}-0,1y^2$	Эйлера
2	$0,6\sin x-1,2y^2+1$	Эйлера	9	$1+0,6y\sin x-1,5y^2$	Рунге-Кутта 2-го порядка
3	$1-\sin(y+2x)+\frac{0,5y}{2+x}$	Рунге-Кутта 2-го порядка	10	$\cos(1,5x+y)+1,5(x-y)$	Рунге-Кутта 4-го порядка
4	$\cos(2x+y)+\frac{3}{2}(x-y)$	Рунге-Кутта 4-го порядка	11	$0,2e^{-xy}+0,3(x^2+y)$	Эйлера
5	$\frac{\cos y}{1+x}-\frac{y^2}{2}$	Эйлера	12	$y\cos^2\left(y-\frac{x}{2}\right)+0,1x^2$	Рунге-Кутта 2-го порядка
6	$1-\frac{0,1x}{y+2}-\sin(2x+y)$	Рунге-Кутта 2-го порядка	13	$\frac{\sin y}{1,5+x}+0,1y^2$	Рунге-Кутта 4-го порядка

7	$\left(0,8-y^2\right)\cos x+0,4y$	Рунге-Кутта 4-го порядка	14	$\left(0,7-y^2\right)\cos x+0,3y$	Эйлера
№	$f\left(x,y\right)$	Метод	№	$f\left(x,y\right)$	Метод
15	$1+\frac{1}{5}y\sin x-y^2$	Рунге-Кутта 2-го порядка	21	$1+\left(1,2-x\right)\sin y-y\left(1+x\right)$	Рунге-Кутта 2-го порядка
16	$1+\left(0,7-x\right)\sin x-1,2xy$	Рунге-Кутта 4-го порядка	22	$\left(0,9-y^2\right)\cos x+0,5xy$	Рунге-Кутта 4-го порядка
17	$0,8e^{-\left(0,8+xy\right)}+0,6x^2y$	Эйлера	23	$1+0,8y\sin^2 x-1,75y^2$	Эйлера
18	$\sin\left(1,75x+y\right)+1,2\left(x-y\right)$	Рунге-Кутта 2-го порядка	24	$0,4e^{-\left(0,4+xy\right)}+0,4\left(x+y\right)$	Рунге-Кутта 2-го порядка
19	$1-\cos\left(2x+y\right)+\frac{0,5y^2}{2+x}$	Рунге-Кутта 4-го порядка	25	$\left(1-x\right)\sin\left(2y\right)-\left(0,6+x\right)y$	Рунге-Кутта 4-го порядка
20	$\frac{\cos^2 y}{1,25-x^2}-0,3y$	Эйлера	26	$\cos\left(x+y+xy\right)-1,3x$	Эйлера