УДК 681.3

А.Н.Вахрушев, В.Н.Гаврилов, С.Б.Данилов

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПРОВЕРКИ НЕПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Проверка непересечения геометрических тел - одна из самых распространенных и трудоемких операций при решении задач машинной графики, автоматизированного конструирования и геометрического проектирования.

Разработанные алгоритмы проверки непересечения [1,2,3,4] основаны на проверке систем аналитических неравенств или логических тождест[в]. Оценка производительности известных алгоритмов [4] показывает, что их универсальность относительно формы геометрических тел требует больших затрат машинного времени.

Наиболее универсален алгоритм [2], проверяющий выполнение неравенства, являющегося условием непересечения

$$\min(\Phi^{(1)}(x,y,z) \wedge_\alpha \Phi^{(2)}(x,y,z)) > 0, \qquad (1)$$

где $\Phi^{(1)}(x,y,z), \Phi^{(2)}(x,y,z)$ - R-функции [5], описывающие геометрические тела; $\wedge_\alpha$ - операция R-конъюнкции [5].

Алгоритмическая реализация условия по формуле (1) для тел произвольной формы связана со значительными трудностями. Достаточно просто реализуются алгоритмы для тел, которые можно представить как объединение выпуклых фрагментов

$$\Phi(x,y,z) = \bigvee_{i=1}^{K_\Phi}{}_\alpha \left[\bigwedge_{j=1}^{K_{\Pi i}}{}_\alpha f_{ij}(x,y,z) \right], \qquad (2)$$

где $f_{ij}(x,y,z)=0$ - уравнения поверхностей тела.

В этом случае проверка условия из формулы (1) проводится для каждой пары фрагментов, принадлежащих разным телам.

Выпуклость проверяемых на непересечение тел (или их фрагментов) позволяет применять методы численной оптимизации (покоординатный, градиентный или наискорейший спуски), но именно их применение и определяет низкую производительность алгоритмов в целом.

Поиск способов повышения быстродействия проверочных процедур привел к разработке альтернативного алгоритма проверки непересечения выпуклых тел.

Пусть даны два выпуклых непересекающихся тела, описанных R -функциями $\Phi^{(1)}(x,y,z)$ и $\Phi^{(2)}(x,y,z)$, и точка T_0 на поверхности первого тела. Спроецируем точку T_0 на поверхность второго тела (под проецированием точки на поверхность будем понимать поиск точки, ближайшей к исходной точке и лежащей на поверхности). В результате получим точку T_1. Спроецировав эту точку на поверхность первого тела, получим точку T_2.

Исходя из сути операции проецирования, расстояние $R(T_1 T_2)$ является кратчайшим между точкой T_1 и первым телом. Следовательно, $R(T_1 \times T_2) \leqslant R(T_0 T_1)$. Если продолжать процесс проецирования, будут найдены точки T_n и T_{n+1} на поверхности тел. Расстояние между этими точками $R(T_n T_{n+1})$ представляет собой величину минимального зазора между телами. Процесс поиска ближайших точек тел завершается при выполнении условия

$$\varepsilon = \frac{R(T_{n-1} T_n) - R(T_n T_{n+1})}{R(T_n T_{n+1})} \leqslant \varepsilon_{min}, \tag{3}$$

где ε_{min} - заданная величина.

Для пересекающихся тел описанный процесс приводит к отысканию одной из точек области пересечения тел. В этом случае $R(T_n T_{n+1}) \leqslant 0$, что и определяет окончание расчета (для точки, принадлежащей телу, расстояние до поверхности тела считается отрицательным).

Таким образом, предлагаемый алгоритм вместо поиска точки, минимизирующей R -функцию в области пересечения тел, определяет минимальное расстояние со знаком между поверхностями тел. В такой трактовке задача проверки непересечения тел сводится к задаче проецирования точки на поверхность выпуклого тела.

Рассмотрим алгоритм проецирования точки для случая, когда выпуклое тело является многогранником.

Пусть $\{\bar{e}_i\}$ - множество единичных векторов, нормальных к плоскостям многогранника и направленных внутрь. Произвольной точке T_0 можно поставить в соответствие множество $\{R_i\}$ расстояний со знаком от точки T_0 до плоскостей многогранника:

$$R_i = \bar{r}_i \cdot \bar{e}_i, \tag{4}$$

где r_i - вектор, проецирующий точку T_0 на плоскость.

Тогда условие принадлежности точки T_0 многограннику после ее перемещения на вектор $\bar{r}_n$ имеет вид:

$$\bar{r}_n \cdot \bar{e}_i - R_i \geqslant 0, \quad i = 1, K_n , \tag{5}$$

где K_n - количество плоскостей многогранника.

Задача проецирования точки на поверхность многогранника ставится как задача поиска вектора проецирования $\bar{r}_n$, удовлетворяющего системе (5) при условии

$$|\bar{r}_n| = \min_j \{|r_{n_j}|\}. \tag{6}$$

Для решения поставленной задачи заменяем систему из K_n линейных неравенств (5) и условия (6) системой из K'_n линейных уравнений типа:

$$\bar{r}_n \cdot \bar{e}_i - R_i = 0, \quad i \leqslant K_n , \quad K'_n \leqslant K_n , \quad K'_n \leqslant 3. \tag{7}$$

Физически такая замена означает определение плоскостей, на поверхности которых будет лежать точка T_0 после проецирования ее на многогранник. Выбор указанных плоскостей производится на основании следующих двух утверждений, вытекающих из свойств выпуклых тел и многогранников.

I. Из множества плоскостей, опорных к выпуклому телу, наибольшему расстоянию со знаком R_n от заданной точки T_0 соответствует плоскость, которая проходит через проекцию точки T_0 на тело и перпендикулярна вектору проецирования $\bar{r}_n$

$$R_n = \bar{r} \cdot \bar{e}_n = \max_i \{\bar{r}_{ni} \cdot \bar{e}_{ni}\}. \tag{8}$$

2. Если проекция точки T_0 на многогранник (точка T_n) совпадает с одной из его вершин V_i , то из множества опорных плоскостей, проведенных через ребра многогранника, плоскость, имеющая наибольшее расстояние со знаком R от точки T_0 , содержит вершину V_i . Грань, соответствующая $R = \max_i \{R_i\}$, необязательно проходит через точку T_n .

Поиск вектора проецирования точки на многогранник в общем случае выполняется в три этапа.

На п е р в о м э т а п е предполагаем, что точка проецируется на грань (K'_n = I). Такой гранью должна быть плоскость n_1, для которой $R_{n_1} = \max_i \{R_i\}$. Приняв $\bar{r}_n = R_{n_1} \bar{e}_{n_1}$, проверяем справедливость системы неравенств (5). Если хотя бы одно из неравенств неверно, необходимо продолжать поиск вектора проецирования.

На втором этапе предполагаем, что точка проецируется на ребро многогранника (K'_n = 2). Из множества пар плоскостей отбираем те, для которых справедлива система неравенств

$$\left.\begin{aligned} & R_i > 0 \quad \text{или} \quad R_j > 0, \\ & R_i \alpha < R_j, \\ & R_j \alpha < R_i, \\ & i = 1, K_n;\ j = 1, K_n;\ i \neq j, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\quad \alpha = \bar{e}_i \bar{e}_j$. $\qquad$ (10)

Выполнение условий (9) означает, что точка T_0 расположена снаружи телесного угла, образованного плоскостями i и j , и проецируется на его ребро. Из отобранных пар плоскостей выбираем единственную пару n_1 и n_2 , для которой вектор проецирования на ребро $\bar{r}_n$ удовлетворяет требованию:

$$|\bar{r}_n| = \max_{ij} \{|r_{n_{ij}}|\},$$

где

$$\left.\begin{aligned} & \bar{r}_{n_{ij}} = K_1 R_i \bar{e}_i + K_2 R_j \bar{e}_j, \\ & K_1 = \frac{R_i - R_j \alpha}{1 - \alpha^2}, \\ & K_2 = \frac{R_j - R_i \alpha}{1 - \alpha^2}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Если для выбранного вектора $\bar{r}_n$ не все неравенства системы (5) верны, точка T_0 проецируется в вершину ребра, образованного плоскостями n_1 и n_2 (K'_n = 3).

На третьем этапе выбираем плоскость n_3 , для которой $\Delta_{n_3} = \max\{R_i - \bar{r}_n \bar{e}_i\}$. Окончательное значение вектора проецирования вычисляем по формуле

$$\bar{r}_n = K_1 R_{n_1} \bar{e}_{n_1} + K_2 R_{n_2} \bar{e}_{n_2} + K_3 R_{n_3} \bar{e}_{n_3}, \tag{12}$$

где

$$K_1 = (R_{n_1} D_1 - R_{n_2} D_{12} - R_{n_3} D_{13}) / D,$$

$$K_2=(R_{n_2}D_2-R_{n_3}D_{23}-R_{n_1}D_{12})/D,$$

$$K_3=(R_{n_3}D_3-R_{n_1}D_{13}-R_{n_2}D_{23})/D.$$

Здесь

$$D_1=1-\alpha_{23}^2,$$

$$D_2=1-\alpha_{13}^2,$$

$$D_3=1-\alpha_{12}^2,$$

$$D_{12}=\alpha_{12}-\alpha_{23}\alpha_{13},$$

$$D_{13}=\alpha_{13}-\alpha_{12}\alpha_{23},$$

$$D_{23}=\alpha_{23}-\alpha_{12}\alpha_{13},$$

$$D=1-\alpha_{12}^2-\alpha_{23}^2-\alpha_{13}^2+2\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{13},$$

$$\alpha_{ij}=\bar{e}_{ni}\,\bar{e}_{nj}.$$

Описанный алгоритм обеспечивает решение задачи проецирования точки на произвольный выпуклый многогранник. Если в образовании тела участвуют поверхности второго и выше порядков, то проецирование точки на оболочку тела производится в следующей последовательности: формируем касательную к телу многогранную область, плоскости которой перпендикулярны местным нормалям, опущенным на поверхности тела из точки T_0 ; решаем задачу проецирования точки на многогранную область; если проекция точки T_0 (точка T_n) не принадлежит оболочке тела, многогранная область формируется заново и процесс проецирования повторяется из точки T_n .

Перечисленные операции выполняются до тех пор, пока точка не будет принадлежать оболочке тела.

Описанный алгоритм реализован на ЭВМ СМ-2. В таблице приведены результаты проверки непересечения простейших геометрических тел в различной их комбинации.

Большое количество операций проецирования в варианте 6 объясняется малым углом между ближайшими поверхностями тел, что замедляет сходимость процесса.

На время проверки влияет также выбор точки, из которой начинается процесс последовательного проецирования на поверхности тел. В приведенных расчетах в качестве такой точки принималась середина общей области прямоугольных габаритных областей тел. В вариантах I,2 такой выбор позволил ограничиться минимальным числом операций проецирования.

Таблица

№ варианта	Типы геометрических тел	Время проверки, с	Количество произведенных операций
I	Два шара	0,03	3
2	Два параллелепипеда	0,09	3
3	Конус и шар	0,I8	I2
4	Конус и параллелепипед	0,II	4
5	Конус и цилиндр со скрещенными осями	0,I9	I0
6	Два конуса малой конусности с параллельными осями	0,60	3I

Сравнивая время проверки в варианте 2 с данными из работы [4], можно отметить значительное преимущество в быстродействии описанного алгоритма.

Библиографический список

I. Рвачев В.Л., Стоян Ю.Г. К задаче распознавания непересечения геометрических фигур специального вида//Кибернетика, I965. № 6.С.85-94.

2. Рвачев В.Л., Стоян Ю.Г. Алгоритмы построения неравенств, которым удовлетворяют параметры размещения непересекающихся тел//Кибернетика. I966. № 5. С. 82-92.

3. Василюк С.Н., Стоян Ю.Г. К вопросу аналитического построения условий взаимного непересечения плоских фигур//Вычислительная техника в машиностроении. I97I. Март. С. 46-56.

4. Гаврилов В.Н. О выборе алгоритма определения пересечения в задаче оптимального размещения геометрических объектов//Исследование операций и аналитическое проектирование в технике:Сб.научн.тр./Казан. авиац.ин-т. Казань, I978. С.54-58.

5. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, I967. 2I2 с.