(5) (которые уже не будут равны нулю), будет одинаковый. Отсюда получены упрощенные уравнения:

а) Для случая околозвукового течения газа

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2} - h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} + \Theta\left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h\,\partial \Theta}\right)^2\right\} = 0. \tag{6}$$

Переход к физической плоскости

$$(k-1)^{\frac{1}{3}}\tau^* x = \frac{\partial \Phi}{\partial h}; \quad \tau^* \bar{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}; \tag{7}$$

б) Для случая гиперзвукового течения газа:

$$\left[(k-1)\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2}\right]\times\left[\frac{\partial \psi}{\partial \Theta} - \Theta\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}\right] + (k-1)\,h\Theta\,\times$$
$$\times\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon\,\partial \Theta}\right)^2\right] = 0 \tag{8}$$

Здесь переход к физической плоскости будет следующий:

$$\tau_m x = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}; \quad \tau_m y = \Theta\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}. \tag{9}$$

Выведенное уравнение (6) имеет частные решения:

$$\Phi = h^m f_1(\omega); \quad \omega = h^3/\Theta^2. \tag{10}$$

Уравнение (7) имеет частные решения

$$\psi = \varepsilon^{\rho} f_2(\lambda); \quad \lambda = \frac{\varepsilon^2}{\Theta}; \tag{11}$$

m, ρ — производные параметры.

Относительно функций f_1 и f_2 получены дифференциальные уравнения второго порядка, которые легко сводятся к уравнениям первого порядка. Уравнения (6), (7), а также их частные решения (10), (11) могут быть особенно полезны при качественном анализе течений газа указанного типа.

О. Ф. Меньших

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассматривается пространственное нестационарное потенциальное изэнтропическое движение совершенного газа. Система уравнений газовой динамики сводится к одному уравнению относительно так называемой производящей функции, связанной с потенциалом скоростей формулой

$$\Phi = -\varphi + xu. \tag{1}$$

В качестве независимых переменных выбраны u, t, y, z. Тогда из (1) с учетом интеграла Лагранжа-Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} + i = 0 \tag{2}$$

следуют формулы

$$x = \frac{\partial \Phi}{\partial u}; \quad v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad w = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad i = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} -$$
$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right\}, \tag{3}$$

где t — время, x, y, z — декартовы координаты, i — энтальпия, u, v, w — компоненты вектора скорости, φ — потенциал скоростей.

Используя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial i}{\partial t} + u\frac{\partial i}{\partial x} + v\frac{\partial i}{\partial y} + w\frac{\partial i}{\partial z} + (k-1)\, i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \qquad (14)$$

и формулу (3) легко получим уравнение относительно Φ:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial t}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial t} - u^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial y}\right)^2\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial z}\right)^2\right] + 2\frac{\partial\Phi}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial t}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\,\partial t} - u\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial y}\right] +$$
$$+ 2\frac{\partial\Phi}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial t}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t} - u\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial z}\right] +$$
$$+ 2\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial z}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial y}\right] +$$
$$+ (k-1)\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\right]\times$$
$$\times\left[1 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right\} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\,\partial z}\right)^2\right] = 0. \qquad (4)$$

Найдены некоторые частные решения уравнения (4),
Полагая

$$\Phi = \Phi_0(u) + \Phi_1(u)\,t + \Phi_2(u)\,y + \Phi_3(u)\,z, \qquad (5)$$

получим случай движения газа типа простой волны. Общее решение может быть записано в виде

$$x = \Phi_0' + \left[u + \Phi_2\Phi_2' + \Phi_3\Phi_3' \pm \sqrt{1 + (\Phi_2')^2 + (\Phi_3')}\sqrt{(K-1)}\times\right.$$
$$\left.\times\left\{c_1 \pm \frac{\sqrt{(K-1)}}{2}\int\sqrt{1 + (\Phi_2')^2 + (\Phi_3')^2}du\right\}\right]t + \Phi_2' y - \Phi_3' z;$$
$$v = -\Phi_2;\quad w = -\Phi_3;$$
$$a^2 = (K-1)\,i = (K-1)\left\{c_1 \pm \frac{\sqrt{(K-1)}}{2}\int\sqrt{1 + (\Phi_2')^2 + (\Phi_3')^2}du\right\}^2, \qquad (6)$$

где Φ_0, Φ_2, Φ_3 — произвольные функции, C — постоянная, a — скорость звука.

Впервые подобное общее решение в более сложном виде получено Н. Н. Яненко. Показано, что рассматриваемое движение газа может быть только сверхзвуковым. В случае одномерного движения с плоскими волнами из (6) следует известное решение Римана

$$x = \Phi_0' + (u \pm a)\,t. \qquad (7)$$

Полагая $\Phi_3 = 0$, получим обобщенные движения газа типа Прандтля-Майера, в случае $\Phi_0 = \Phi_1 = \Phi_2 = 0$ из (6) следует классическое решение Прандтля-Майера об обтекании тупого угла сверхзвуковым потоком. Из групповых свойств уравнения (4) следует, что в случае осесимметричного и плоского движения газа она имеет частные решения вида:

$$\Phi = u^2 tF(h);\quad h = \frac{y}{ut}. \qquad (8)$$

Частные решения (8) являются коническими.

Получено уравнение относительно F и проведено его исследование на фазовой плоскости.