

**Об алгебрах Ли, задаваемых касательными направлениями
к однородным проективным многообразиям**

А.О. Завадский

МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

zavadskiao@gmail.com

Доклад основан на работе [1].

Пусть $X \subset \mathbb{P}^m$ — вложенное комплексное проективное многообразие. Рассмотрим соответствующее ему аффинное коническое многообразие $\hat{X} \subset \mathbb{C}^{m+1}$. Мы исследуем алгебру Ли $\mathfrak{L}$, которая порождается векторным пространством $\mathbb{C}^{m+1}$ и задана определяющими соотношениями вида

$$[\xi, \eta] = 0 \quad \forall \xi \in \hat{X}^{\text{reg}}, \eta \in \mathcal{T}_\xi \hat{X},$$

где $\mathcal{T}_\xi \hat{X}$ — касательное пространство к $\hat{X}$ в точке ξ . Алгебры такого вида интересны тем, что они возникают в связи с исследованиями многообразий минимальных рациональных касательных, определенных Д. Хваном и Н. Моком [2, 3]. В некоторых случаях такие алгебры изоморфны алгебрам символов фильтрованных систем распределений на многообразиях Фано, порожденными конусами над многообразиями минимальных рациональных касательных в точках общего положения.

Мы исследуем алгебры Ли, которые задаются касательными направлениями к однородным многообразиям. Более точно, пусть R — неприводимое представление полупростой комплексной группы Ли G в пространстве V с младшим весом Λ , v_Λ — младший вектор представления, $\hat{X} = R(G)v_\Lambda \cup \{0\}$ — замыкание орбиты младшего вектора. Тогда $\hat{X}$ — коническое аффинное алгебраическое многообразие, а его проективизация X — однородное проективное многообразие, вложенное в пространство $\mathbb{P}(V)$.

Неприводимые представления полупростых алгебр Ли естественным образом содержатся внутри алгебр Каца–Мули. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}$ — алгебра Каца–Мули, построенная по обобщенной матрице Картана $\tilde{A}$. Выделим некоторую вершину диаграммы Дынкина этой алгебры и предположим, что диаграмма без этой вершины имеет конечный тип. Пусть e_i, f_i, h_i — система канонических образующих алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, где e_0, f_0, h_0 соответствуют выделенной вершине. Зададим $\mathbb{Z}$ -градуировку $\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathfrak{g}}_k$ на алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$, присвоив элементу e_0 степень 1, элементу f_0 степень -1 , а остальным образующим и всем элементам подалгебры Картана — степень 0. Тогда слагаемое $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ — редуктивная алгебра Ли, полупростую часть которой обозначим через $\mathfrak{g}$, а слагаемое $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ в $\mathbb{Z}$ -градуировке является неприводимым $\mathfrak{g}$ -модулем. Представление $\mathfrak{g}$ в $\tilde{\mathfrak{g}}_1$ интегрируется до

представления полупростой группы Ли G . Этой конструкцией можно получить любое неприводимое представление полупростой группы Ли.

Можно показать, что при этом алгебра $\mathfrak{L}$, соответствующая орбите младшего вектора представления G в $\tilde{\mathfrak{g}}_1$, является факторалгеброй подалгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_2 \oplus \dots \subset \tilde{\mathfrak{g}}$.

Таким образом, задача описания алгебр, задаваемых касательными направлениями, сводится к вычислениям в алгебрах Каца-Муди. Кроме того, алгебры, задаваемые касательными направлениями к таким многообразиям, удастся описать в терминах образующих и соотношений. В тех случаях, когда соответствующая алгебра Каца-Муди конечного или аффинного типа, мы можем полностью описать структуру алгебры, задаваемой касательными направлениями.

Список литературы

- [1] А.О. Завадский. Об алгебрах Ли, задаваемых касательными направлениями к однородным проективным многообразиям. Мат. заметки **114** (2023), no. 5, 1037–1052.
- [2] J.-M. Hwang. Geometry of minimal rational curves on Fano manifolds. School on Vanishing Theorems and Effective Results in Algebraic Geometry (Trieste, 2000), ICTP Lect. Notes, **6**, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2001, 335–393.
- [3] J.-M. Hwang, N. Mok. Deformation rigidity of the rational homogeneous space associated to a long simple root. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **35:2** (2002), 173–184.