

которых мала по сравнению с массой самого тела. Намотка нити осуществлена в плоскости, перпендикулярной продольной оси тела и отстоящей на некотором расстоянии z_0 от точки O (неподвижная точка), в направлении, противоположном вращению тела.

Такая система применяется на практике для гашения угловой скорости закрутки космического аппарата после отделения от орбитальной станции перед входом в атмосферу (рис. 1). В настоящее время проведено исследование поведения таких систем для плоского случая движения [1,2]. В процессе движения системы может возникнуть значительное изменение ориентации твердого тела в пространстве вследствие потери устойчивости нутационного движения.

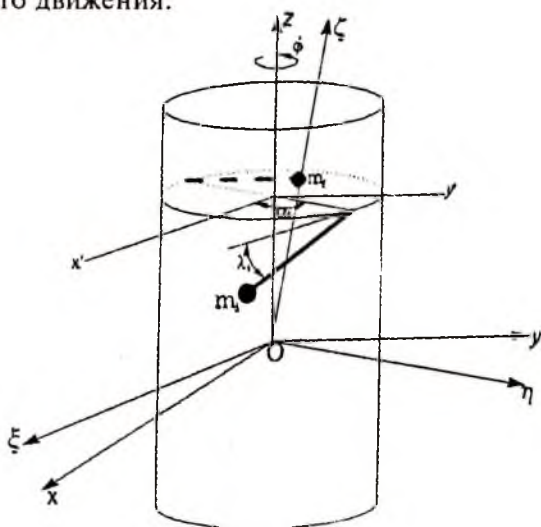


Рис. 1

Ставится задача построения математической модели пространственного движения твердого тела совместно с грузами. Движение рассматривается в потенциальном поле силы тяжести.

Нити являются невесомыми, нерастяжимыми и натянутыми на всем участке движения.

Для получения дифференциальных уравнений движения системы воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа (T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия системы), q — вектор обобщенных координат.

Рассматриваемая система имеет семь степеней свободы: три степени свободы имеет твердое тело и по две — каждый грузик. За обобщенные координаты для твердого тела примем три угла Эйлера: угол прецессии ϕ , угол нутации θ и угол собственного вращения φ . В качестве обобщенных координат для грузиков выберем следующие два угла (см. рис.1): α_i , характеризующие положение точки касания нити и твердого тела и λ_i , характеризующий отклонение нити в местной вертикальной плоскости ($i = 1, 2$). Такой выбор обобщенных координат для грузиков удобен тем, что получаем простое выражение для связи

$$l_i = R \alpha_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где R — радиус твердого тела в плоскости намотки нитей; l_i — длина.

Вектор обобщенных координат имеет вид

$$q = (\theta, \phi, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) \quad (3)$$

Далее заметим, что система "тело-грузики" имеет два первых интеграла движения: интеграл энергии $E = T + \Pi$ и интеграл проекции кинетического момента на ось ζ K_ζ .

$$E = T + \Pi = const,$$

$$K_\zeta = \frac{\partial t}{\partial \phi} = const. \quad (4)$$

Выражение для потенциальной энергии Π можно записать следующим образом:

$$\Pi = 2 m g z_0 \cos \theta - m g R (\alpha_1 \sin \lambda_1 + \alpha_2 \sin \lambda_2) \cos \theta. \quad (5)$$

Кинетическую энергию системы T представим как сумму двух слагаемых: кинетической энергии твердого тела $T_{\text{тв.т.}}$ и кинетической энергии грузиков $T_{\text{гр.}}$. Выражение для кинетической энергии осесимметричного твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки $T_{\text{тв.т.}}$, имеет вид

$$T_{\text{тв.т.}} = \frac{1}{2} \left[J (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + J_z (\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + 2 \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta) \right], \quad (6)$$

где J , J_z — поперечный и продольный моменты инерции твердого тела соответственно.

Сложнее дело обстоит с кинетической энергией грузиков $T_{\text{гр.}}$.

$$T_{\text{гр.}} = T_{\text{гр.1}} + T_{\text{гр.2}} = \frac{1}{2} m [V_1^2 + V_2^2], \quad (7)$$

где V_i — модуль скорости i -го грузика ($i = 1, 2$).

Необходимо выразить линейные скорости грузиков V_1 и V_2 через обобщенные координаты и скорости. Для этого запишем сначала выражения для радиус-векторов грузиков через обобщенные координаты в связанной с телом системе координат $O x y z$:

$$\bar{r}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} x_i &= R \cos \alpha_i + R \alpha_i \cos \lambda_i \sin \alpha_i, \\ y_i &= R \sin \alpha_i - R \alpha_i \cos \lambda_i \cos \alpha_i, \\ z_i &= z_0 - R \alpha_i \sin \lambda_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь, продифференцировав по времени выражение (8), по известному правилу локальной производной получим следующие выражения для проекций линейных скоростей грузиков:

$$\begin{aligned}
V_{ix} &= R(\dot{\alpha}_i + \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta)(\alpha_i \cos \lambda_i \cos \alpha_i - \sin \alpha_i) - \\
&\quad - R \alpha_i \sin \lambda_i (\dot{\lambda}_i \sin \alpha_i + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + \\
&\quad + z_0 (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi) + R \dot{\alpha}_i \sin \alpha_i \cos \lambda_i, \\
V_{iy} &= R(\dot{\alpha}_i + \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \cos \theta)(\alpha_i \cos \lambda_i \sin \alpha_i + \cos \alpha_i) + \\
&\quad + R \alpha_i \sin \lambda_i (\dot{\lambda}_i \cos \alpha_i + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) - \\
&\quad - z_0 (\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi) - R \dot{\alpha}_i \cos \alpha_i \cos \lambda_i, \\
V_{iz} &= -R \dot{\alpha}_i \sin \lambda_i - R \dot{\varphi} \sin \theta \cos(\alpha_i + \varphi) + R \dot{\theta} \sin(\alpha_i + \varphi) - \\
&\quad - R \alpha_i \cos \lambda_i (\dot{\lambda}_i + \dot{\varphi} \sin \theta \sin(\alpha_i + \varphi) + \dot{\theta} \cos(\alpha_i + \varphi)), \quad (i=1,2).
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставив данные выражения в формулу для кинетической энергии грузиков (7), можно записать выражение для кинетической энергии системы, которое будет иметь весьма громоздкий вид (всего 407 членов). Из-за большой размерности задачи для получения уравнений движения целесообразно воспользоваться языком аналитических вычислений REDUCE /3/.

Обработав соответствующим образом результаты вычислений, запишем систему из семи дифференциальных уравнений второго порядка, которая будет описывать пространственное движение твердого тела совместно с грузиками

$$A \ddot{q} = F, \tag{11}$$

где A -квадратная матрица размером 7×7 , F -вектор правых частей уравнений.

Каждый элемент матрицы A и вектора F в уравнении (11) имеет достаточно громоздкий вид (20-50 членов). Линеаризуем далее полученную систему по углу нутации θ и углам λ_1 и λ_2 ($\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, $\sin \lambda_i \approx \lambda_i$, $\cos \lambda_i \approx 1$, ($i=1,2$)).

Так как угол прецессии φ является циклической координатой, то можно понизить порядок системы уравнений движения твердого тела с грузиками на единицу. Действительно, воспользовавшись интегралом проекции кинетического момента на вер-

тикальную ось $O \zeta$ (см. выражение (4)), получим выражение для угловой скорости прецессии $\dot{\varphi}$, а затем, продифференцировав его по времени, запишем выражение для второй производной угла прецессии в виде

$$\ddot{\varphi} = f(\ddot{\theta}, \ddot{\varphi}, \ddot{\alpha}_1, \ddot{\lambda}_1, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\alpha}_1, \dot{\lambda}_1, \theta, \varphi, \alpha_1, \lambda_1), \quad i=1,2 \quad (12)$$

Подставив данное выражение в (11), получим следующую систему шести дифференциальных уравнений пространственного движения твердого тела с грузиками в матрично-векторном виде:

$$\ddot{q}_1 = A_1^{-1} \cdot F_1, \quad (13)$$

где A_1 - квадратная матрица размером 6×6 ; $q_1 = (\theta, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2)$;

F_1 - вектор правых частей уравнений.

На рис.2. представлены результаты численного моделирования пространственного движения системы "тело-грузики" на ПЭВМ. Видно, что движение грузиков относительно твердого тела сильно влияет на изменение угла нутации θ (в частности, прослеживается зависимость закона изменения угла нутации от расположения плоскости намотки нитей относительно центра масс).

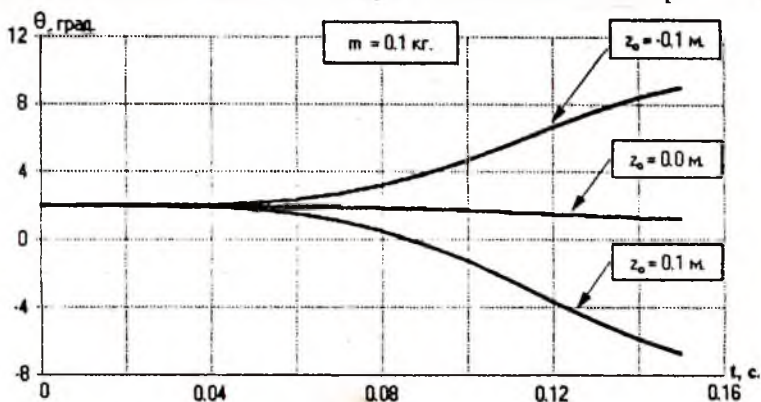


Рис. 2

В заключение отметим, что основная задача - гашение угловой скорости собственного вращения твердого тела - успешно

выполняется. Однако поведение самого твердого тела показывает, что в процессе размотки нитей с грузами возможна потеря устойчивости движения тела по углу нутации θ . Варьируя такие параметры, как длина намотанной на тело нити L (в наших расчетах предполагалось, что нить намотана на тело ровно на пол-оборота, то есть $L_i = \pi R, i = 1, 2$) и масса грузиков m , можно добиться гашения угловой скорости собственного вращения тела до любой необходимой величины. Но, сравнивая результаты моделирования пространственного движения с результатами, полученными для плоского случая, необходимо отметить, что для одного и того же значения массы грузика конечное значение скорости закрутки тела, полученное по плоской модели, будет существенно отличаться от полученного по пространственной.

Библиографический список

1. Иванов А. П. О движении связки тел с переменной длиной фала // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы / Перм. ун-т. Пермь, 1991. - С. 26—36.
2. Колесников К. С., Козлов В. И., Кокушкин В. В. Динамика разделения ступеней летательного аппарата. М.: Машиностроение, 1977. — 223 с.
3. Еднерал В. Ф., Крюков А. П., Родионов А. Я. Язык аналитических вычислений REDUCE. М.: МГУ, 1983, Ч. 1; 1986, Ч. 2.

УДК 539.3

В. А. Барвинок, Б. А. Горлач, Н. А. Ефимов (С а м а р а)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ШТАМПОВКИ ЛИСТОВЫХ ДЕТАЛЕЙ ПОЛИУРЕТАНОМ В ОТКРЫТОМ ОБЪЕМЕ

Рассмотрена математическая модель процесса штамповки листовых деталей полиуретаном в открытом объеме. Приведены результаты сравнения теоретических расчетов с экспериментом, позволяющие судить о высокой точности модели.

Математическое моделирование систем и явлений. Самара, 1995
