A_1 и A_2 соответственно для диэлектрического пространства и проводящего сплюснутого сфероида.

Таким образом решено векторное уравнение Гельмгольца в сфероидальной системе координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арфкен Г. Математические методы в физике. М., «Автоматиздат», 1970.
2. Морс Г. П., Фешбах Х. Методы теоретической физики, М., ИЛ, 1960.

В. А. КОЛДОРКИНА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КУБА

Дифференциальные свойства решения задач теории упругости рассматривались в работах [1], [2]. Существенно новым в поставленной нами задаче является наличие вершин — точек пересечения линий стыка граничных поверхностей.

Исследуем напряженное состояние куба (или параллелепипеда) в окрестности его вершин.

Пусть начало координат находится в вершине 0 куба G. Ребра куба $0A$, $0B$, $0C$ примыкают к 0, S_1, S_2, S_3 — грани, пересекающиеся в 0. Будем считать, что ось x_1 направлена по диагонали, проходящей через 0 внутрь G. Рассмотрим систему уравнений Ламе:

$$(\lambda+\mu)\ \operatorname{grad}\Theta+\mu\Delta\bar{u}=\bar{f};$$
$$\bar{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3);\quad x=(x_1,\ x_2,\ x_3); \tag{1}$$
$$\Theta(u)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i};\ f\in L_2(G);\ u\in w_2^1(G).$$

Пусть заданы граничные условия вида

$$u/_{\Gamma}=0.$$

Достаточно изучить случай, когда $\bar{u}=0$ вне некоторой окрестности вершины 0, так как в противном случае мы можем умножить u на $\sigma(x_1)$ (бесконечно дифференцируемую функцию, равную 1 при $x_1<\frac{h}{4}$ и 0 при $x_1>\frac{h}{2}$, где h — длина ребра куба) и рассмотреть вместо $\bar{u}$ вектор $\overline{\sigma u}$, который удовлетворяет системе (1) с другой правой частью.

Изучение неоднородных граничных условий не является более сложной задачей, так как неоднородность в граничных условиях после замены $u = u_1 + v$, где $u_1/_{\Gamma} = \overline{u}/_{\Gamma}$ пропадает.

Укажем необходимые и достаточные условия принадлежности решения поставленной задачи пространству $w_2^2(G)$. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема. Если $f \in L_2(G)$ и $\lambda < \frac{3}{2}\mu$, то $\overline{u} \in w_2^2(G)$.

Доказательство. Заметим, что если замкнутая подобласть G' области G не имеет общих точек с ребрами, то $\overline{u} \in w_2^2(G')$ [3]. Зафиксируем $\alpha > 0$ и положим $\overline{u} = \overline{v}(x_1 + \alpha)$.

Подставив это выражение в систему (1), получим:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta(v)}{\partial x_1} + \frac{\lambda+\mu}{x_1+\alpha}\Theta(v) + (\lambda+\mu)\frac{1}{x_1+\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} +$$

$$+\mu\Delta v_1 + \mu\frac{2}{x_1+\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{f_1}{x_1+\alpha};$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_2}\Theta(v) + \frac{\lambda+\mu}{x_1+\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \mu\Delta v_2 + \frac{2\mu}{x_1+\alpha}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{f_2}{x_1+\alpha};$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\Theta(v) + \frac{\lambda+\mu}{x_1+\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \mu\Delta v_3 + \frac{2\mu}{x_1+\alpha}\frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{f_3}{x_1+\alpha}. \tag{2}$$

Умножим i-ое уравнение системы (2) на v_i и проинтегрируем произведение по кубу G. Проведя интегрирование по частям и просуммировав полученные выражения по i от 1 до 3, получим:

$$-\iiint\limits_G(\lambda+\mu)\Theta^2(v)\,dx + \iiint\limits_G\frac{\lambda+\mu}{2(x_1+\alpha)^2}v_1^2\,dx +$$

$$+\iiint\limits_G\frac{\lambda+\mu}{x_1+\alpha}v_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)dx + \iiint\limits_G\frac{\lambda+\mu}{2(x_1+\alpha)^2}v_1^2\,dx -$$

$$-\mu\iiint\limits_G\sum_{i=1}^{3}\mathrm{grad}^2 v_i\,dx + \iiint\limits_G\frac{\mu v_1^2}{(x_1+\alpha)^2}dx + \iiint\limits_G\frac{\lambda+\mu}{x_1+\alpha}v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}dx +$$

$$+\iiint\limits_G\frac{\mu}{(x_1+\alpha)^2}v_2^2\,dx + \iiint\limits_G\frac{\lambda+\mu}{x_1+\alpha}v_3\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \iiint\limits_G\frac{\mu}{(x_1+\alpha)^2}v_3^2\,dx =$$

$$= \iiint\limits_G\sum_{i=1}^{3}\frac{f_i}{x_1+\alpha}v_i\,dx. \tag{3}$$

Отметим, что мы не вправе формально применять формулу Остроградского-Гаусса для вывода соотношения (3), так как мы не можем пока утверждать, что v имеет две непрерывные производные в замыкании G. Однако несложное рассуждение приводит к результату (3) и в нашем случае.

Поскольку $v \in w_2^1(G)$, $v/_\Gamma = 0$, мы можем выбрать последовательность v_n, сходящуюся к v в w_2^1 и такую, что v_n бесконечно-гладки и обращаются в нуль в граничной полоске. Надо умножить i-ое уравнение системы (2) на v_{in}, проинтегрировать произведение по частям (теперь это возможно, ибо $v_{in} \in c^\infty$) и перейти к пределу. Мы сразу выписали результат — соотношения (3). Очевидные преобразования упрощают это выражение:

$$\iiint_G (\lambda+\mu)\,\Theta^2(v)\,dx - \iiint_G \frac{\lambda+2\mu}{(x_1+\alpha)^2}\,v_1^2\,dx - \iiint_G \frac{\mu}{(x_1+\alpha)^2}(v_2^2+v_3^2)\,dx +$$

$$+\mu\iiint_G \sum_{i=1}^{3} \operatorname{grad}^2 v_i\,dx = -\iiint_G \sum_{i=1}^{3} \frac{f_i\,v_i}{x_1+\alpha}\,dx. \tag{4}$$

Из уравнения (4) следует неравенство:

$$\mu\iiint_G \sum_{i=1}^{3} \operatorname{grad}^2 v_i\,dx \leqslant \iiint_G \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{f_i\,v_i}{x_1+\alpha}\right| dx + \iiint_G \frac{\lambda+2\mu}{(x_1+\alpha)^2}\,v_1^2\,dx +$$

$$+\iiint_G \frac{\mu}{(x_1+\alpha)^2}(v_2^2+v_3^2)\,dx. \tag{5}$$

Покажем, что

$$\iiint_G \frac{v^2}{(x_1+\alpha)^2}\,dx \leqslant \frac{18}{7\pi^2}\iiint_G \operatorname{grad}^2 v\,dx. \tag{6}$$

Для этого продолжим v нулем вне G (продолженная функция попрежнему будет из w_2^1). Обозначим через G_α бесконечный трехгранный угол с вершиной в точке $(-\alpha, 0, 0)$ и с ребрами, параллельными $0A$, $0B$, $0C$ соответственно.

Зафиксируем $\beta > 0$ и проведем сечение области G_α плоскостью $x_1 = \beta$. В сечении $G_{\alpha\beta}$ мы получим равносторонний треугольник со стороной $(\beta+\alpha)\sqrt{6}$. Он вкладывается всегда в прямоугольник со сторонами:

$$(\beta+\alpha)\sqrt{6};\quad \frac{(\beta+\alpha)\sqrt{6}\,\sqrt{3}}{2} = \frac{3(\beta+\alpha)\sqrt{2}}{2}.$$

Первое собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа в таком прямоугольнике равно

$$\frac{\pi^2}{(\beta+\alpha)^2\,6} + \frac{4\pi^2}{18(\beta+\alpha)^2} = \frac{7\pi^2}{18(\beta+\alpha)^2}.$$

Это означает, что (вариационный принцип)

$$\iint_{G_{\alpha\beta}} \frac{v^2}{(x_1+\alpha)^2}\,dx_2\,dx_3 \leqslant \frac{18}{7\pi^2}\iint_{G_{\alpha\beta}} (v_{x_2}^2 + v_{x_3}^2)\,dx_2\,dx_3.$$

Интегрируя это неравенство по x_1, получаем требуемое неравенство. Оценивая правую часть неравенства (5) с помощью уравнения (6), получаем

$$\left[\mu-(\lambda+2\mu)\frac{18}{7\pi^2}\right]\iiint\limits_G\sum_{i=1}^{3}\operatorname{grad}^2 v_i\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\iiint\limits_G\sum_{i=1}^{3}\frac{v_i^2}{(x_1+a)^2}\,dx+\frac{1}{2\varepsilon}\iiint\limits_G\sum_{i=1}^{3}f_i^2\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{18\varepsilon}{7\pi^2 2}\iiint\limits_G\sum_{i=1}^{3}\operatorname{grad}^2 v_i\,dx+\frac{1}{2\varepsilon}\iiint\limits_G\sum_{i=1}^{3}f_i^2\,dx$$

для любого $\varepsilon>0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{3}\iiint\limits_G\operatorname{grad}^2 v_i\,dx\leqslant c\iiint\limits_G\sum_{i=1}^{3}f_i^2\,dx. \tag{7}$$

Неравенство (6) приводит нас к следующему неравенству:

$$\iint\limits_G\sum_{i=1}^{3}\frac{u_i^2}{x_1^4}\,dx\leqslant c\iint\limits_G\sum_{i=1}^{3}f_i^2\,dx, \tag{8}$$

из которого получим заключение теоремы.

Обозначим через G_n пересечение трехгранного угла $OABC$ и слоя $^1/_{2^n}\leqslant x_1\leqslant{}^1/_{2^{n-1}}$, где n — целое. Справедливо неравенство:

$$\|u\|^2_{w_2^2(G_n)}\leqslant c_n\|u\|^2_{w_2^1(G_n\cup G_{n-1}\cup G_{n+1})}+c_n'\|Lu\|^2_{L_2(G_n\cup G_{n-1}\cup G_{n+1})}, \tag{9}$$

где Lu — результат подстановки вектора v в левую часть системы (1). Это неравенство — результат исследований решения в окрестности ребра. Сделаем в системе (1) замену

$$\frac{1}{2^n}x_1'=x_1.$$

Применяя к преобразованной системе неравенство (9), имеем:

$$\|u\|^2_{w_2^2(G_1)}\leqslant c_1\|u\|^2_{w_2^1(G_0\cup G_1\cup G_2)}+c_1'2^{-4n}\|f\|^2_{L_2(G_0\cup G_1\cup G_2)},$$

В этом неравенстве нормы должны вычисляться в переменных x'. Если перейти здесь к исходным переменным, то из последнего неравенства следует:

$$\|u\|^2_{w_2^2(G_{n+1})}\leqslant 2^{4n}c_1\|u\|^2_{L_2(G_n\cup G_{n+1}\cup G_{n+2})}+$$

$$+c_1'\|f\|^2_{L_2(G_n\cup G_{n+1}\cup G_{n+2})}+2^{2n}c_1''\|\operatorname{grad}u\|^2_{L_2(G_n\cup G_{n+1}\cup G_{n+2})},$$

что эквивалентно следующему неравенству:

$$\| u\|^2_{w^2_2(G_{n+1})} \leqslant A_1 \iiint\limits_{G_n \cup G_{n+1} \cup G_{n+2}} \frac{|u|^2}{x_1^4}\, dx + A_2 \iiint\limits_{G_n \cup G_{n+1} \cup G_{n+2}} |f|^2\, dx + A_3 \iiint\limits_{G_n \cup G_{n+1} \cup G_{n+2}} \frac{|\operatorname{grad} u|^2}{x_1^2}\, dx.$$

Суммируя эти неравенства по всем n, мы в силу неравенства (8) приходим к конечности $\| u \|_{w^2_2(G)}$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И. О некоторых смешанных задачах теории упругости для полуполосы. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.». М., «Наука», 1972, с. 135—144.

2. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, т. 31, вып. 1, 1967, с. 178—186.

3. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., ИЛ, 1962.