Производя суммирование в равенстве (2.4), аналогично приведенному в работе [5], условие асимптотической устойчивости решений уравнения (1.1) получим в виде

$$\frac{1}{k_1^2-k_2^2}\left[\frac{m_1(n_1 \operatorname{sh} k_1\tau+l_1 \operatorname{ch} k_1\tau)}{(c_1+ak_1^2)^2-b_1 k_1^2+n_1 \operatorname{ch} k_1\tau+l_1 \operatorname{sh} k_1\tau}-\right.$$

$$\left.-\frac{m_2(n_2 \operatorname{sh} k_2\tau+l_2 \operatorname{ch} k_2\tau)}{(c_1+ak_2^2)-b_1^2 k_2^2+n_2 \operatorname{ch} k_2\tau+l_2 \operatorname{sh} k_2\tau}\right]-$$

$$-\frac{a(ab_0+b_1)}{(c_1-ac_0)^2+(b_0c_0+c_1)(b_0a+b_1)}<0,$$

где

$$m_i=\frac{(c_1-ac_0)^2-k_i^2(b_1-ab_0)^2}{2(1-a^2)k_i\left[(ak_i^2+c_1)^2-b_1^2k_i^2\right]};$$

$$n_i=ak_i^4+k_i^2(c_0a+c_1-b_1b_0)+c_0c_1;$$

$$l_i=k_i\left[k_i^2(b_0a-b_1)+c_1b_0-b_1c_0\right];$$

$$k_{1,2}=\sqrt{\frac{1}{2(1-a^2)}\left[2ac_1+b_0^2-c_0-\right.}$$

$$\left.-b_1^2\pm\sqrt{(2ac_1+b_0^2-2c_0-b_1^2)^2-4(c_0^2-c_1^2)(1-a^2)}\right]^{\frac{1}{2}},\quad i=1,2.$$

Построение области асимптотической устойчивости решений уравнения (1.1) может быть произведено с помощью ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. Изв. АН СССР, 1942, № 3, ДАН СССР, 1953, № 6.

2. Мейман Н. Н., Чеботарев Н. Г. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды ин-та им. Стеклова, т. 26, 1949.

3. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. «Мир», 1967.

4. Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени. ПММ, т. 26, вып. 1, 1962.

5. Маркушин Е. М. Оптимальные системы автоматического регулирования с запаздыванием по времени. Изд-во Саратовского университета, 1971.

Е. М. МАРКУШИН, Л. П. СТУКАЛИН

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении задач аналитического конструирования регуляторов требуется изучать поведение решений систем разностных уравнений.

Экспоненциальные разложения, введенные С. Н. Шимановым в работах [1], [2], могут быть использованы для исследования устойчивости систем данного вида.

1. Предварительные замечания

Пусть движение некоторой материальной системы описывается уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} a_{si}\, x_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{si}^{k}\, x_i(t-\tau_k) = 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где a_{si}, b_{si}^{k}, τ_k — постоянные; $\tau_k > 0$.

Система (1.1) может быть заменена эквивалентной ей счетной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \lambda_j u_j(t), \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{1.2}$$

где λ_j — собственное значение квазиполинома

$$\Delta(\lambda) = \left| a + \sum_{k=1}^{n} b^k e^{-\lambda\tau_k} \right| = 0, \tag{1.3}$$

в котором a и b^k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — матрицы

$$a = \{a_{si}\},\ b^k = \{b_{si}^k\},\ (s, i = 1, 2, \ldots, n).$$

Входящие в уравнения (1.2) переменные $u_j(t)$ являются линейными функционалами

$$u_j(t) = (x(t+\vartheta),\ y_j'(\vartheta)), \tag{1.4}$$

в которых $y_j'(t) = \{y_{js}'\}$ — собственное решение системы, сопряженной с системой (1.1), соответствующее собственному значению λ_j квазиполинома (1.3). Скалярное произведение (1.4) определено равенством

$$x(\vartheta),\ y(\vartheta)) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{si}^{k} \int_{-\tau_k}^{0} x_i(\vartheta)\, y_s(\vartheta+\tau_k)\, d\vartheta, \tag{1.5}$$

где $\{y_s(t)\}$, $(s = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольное решение сопряженной системы.

При этом решение $x(t+\vartheta) = \{x_i(t+\vartheta)\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1.1) может быть представлено в виде ряда [3]:

$$x(t+\vartheta) = \sum_{j=1}^{n} x_j'(\vartheta)\, u_j(t), \tag{1.6}$$

где $x_j'(t)$ — собственное решение системы (1.1), соответствующее собственному значению λ_j.

2. Об устойчивости системы разностных уравнений

При исследовании решений системы (1.1) можно воспользоваться методами теории устойчивости и построить соответствующие квадратичные формы для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2). Равенство (1.5) для функционалов (1.4) и разложение (1.6) позволяют сформулировать следующую теорему:

Теорема.

Если решения системы (1.1) асимптотически устойчивы, то для любого наперед заданного квадратичного функционала

$$W = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\tau_k}^{0} \int_{-\tau_l}^{0} B_{si}^{kl}(\rho, \sigma)\, x_s(t+\rho)\, x_i(t+\sigma)\, d\rho d\sigma, \quad (2.1)$$

являющегося квадратичной формой для системы (1.2), в соответствии с равенством (1.6) может быть найден знакоопределенный квадратичный функционал

$$V = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\tau_k}^{0} \int_{-\tau_l}^{0} B_{si}^{kl}(\rho, \sigma)\, x_s(t+\rho)\, x_i(t+\sigma)\, d\rho d\sigma \quad (2.2)$$

со знаком, противоположным знаку функционала.

Аналогичным образом могут быть получены и некоторые другие результаты, известные из теории устойчивости.

Приведенный метод опирается на теорию квадратичных функционалов Н. Н. Красовского и является наиболее общим при исследовании устойчивости как дифференциально-разностных, так и разностных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шиманов С. Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени. ПММ, т. XXIV, вып. 1, 1960.

2. Маркушин Е. М., Шиманов С. Н. Приближенное решение задачи аналитического конструирования регулятора для систем с запаздыванием. «Автоматика и телемеханика», 1968, № 3.

3. Маркушин Е. М. Оптимальные системы автоматического регулирования с запаздыванием по времени. Изд-во Саратовского университета, 1971.

В. Е. ШАТЕРНИКОВ

РЕШЕНИЕ ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В СФЕРОИДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

При решении ряда практических задач электромагнитного контроля очень часто возникает необходимость в определении