УДК 62-505

А.А.Соловьев

К СИНТЕЗУ РЕГУЛЯТОРА,МИНИМИЗИРУЮЩЕГО ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Характерной особенностью конструкций летательных аппаратов (ЛА), имеющих относительно большое удлинение, является их малая динамическая жесткость (ДЖ). Это ведет к возникновению в полете аэроупругих колебаний значительной амплитуды. При этом увеличивается динамические нагрузки и напряжения в конструкции ЛА.

Известно, что один из способов повышения ДЖ конструкции является увеличение демпфирования упругих колебаний. Однако демпфирование упругих колебаний, обусловленное в основном внутренним конструкционным трением, мало, а создание демпферов упругих колебаний или искусственное повышение конструкционного трения пока представляют трудноразрешимую задачу. Конечно, увеличивая конструкционную жесткость, можно в какой-то мере уменьшить отрицательное влияние упругости на динамику конструкции, но сколько-нибудь значительное увеличение ДЖ невозможно без существенного ухудшения весовых, а следовательно и технических характеристик ЛА. Поэтому пока не будут созданы конструкционные материалы с более совершенными жесткостными и демпфирующими свойствами, этот путь также не является приемлемым.

В связи с этим представляется весьма важным и перспективным привлечение регуляторов (систем управления), работающих по принципу обратной связи, для повышения ДЖ и уменьшения динамических нагрузок на конструкцию ЛА. Заметим, что это направление получило в последние годы большое развитие и ему посвящено значительное число работ [I] - [3].

В данной работе ставится задача синтеза регулятора, минимизирующего динамические нагрузки на конструкцию упругого ЛА и, следовательно, напряжения в сечениях конструкции ЛА. Для решения этой задачи используются методы аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) для систем с распределенными параметрами (СРП) [4]. Выбор метода решения задачи обусловлен тем, что упругие ЛА, динамика конструкций которых описываются уравнениями в частных производных, относятся к СРП.

Известно, что первой фазой синтеза регулятора является построение или выбор подходящей динамической модели (ДМ) объекта, которым предстоит управлять. Здесь, как и в большинстве работ по динамике упругих ЛА, в качестве ДМ принимается свободный тонкостенный стержень. Тогда уравнение изгибных колебаний ЛА будет описываться [5]:

$$m(x)\dot{\varphi}_2(x,t) + \left[B(x)\varphi_1''(x,t)\right]'' = 0, \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$\left[B\varphi_1''(x,t)\right]'_{x=0,\ell} = 0; \quad \left[B\varphi_1''(x,t)\right]_{x=0,\ell} = 0, \qquad (2)$$

где $B(x), m(x), (0 \leq x \leq \ell)$ – соответственно изгибная жесткость и погонная масса конструкции;

ℓ – длина конструкции;

t – время;

$\varphi_1(x,t)$, $\varphi_2(x,t) = \dot{\varphi}_1(x,t)$ – отклонение и скорость отклонения точек сечения x упругой оси конструкции от равновесного положения;

$()''$, $(\dot{})$ – частные производные второго порядка по x и первого порядка по t.

Для определения внутренних усилий в сечении конструкции можно использовать или метод перегрузок или метод перемещений. Согласно методу перегрузок изгибающий момент

$$M_{изг}(x,t) = -\int_0^x\int_0^x m(x)\dot{\varphi}_2(x,t)\,dx\,dx; \qquad (3)$$

по методу перемещений –

$$M_{изг}(x,t) = B(x)\varphi_1''(x,t). \qquad (4)$$

альное нормальное напряжение в сечении x

$$\sigma_1(x,t) = M_{изг}(x,t)/w(x), \qquad (5)$$

$w(x)$ момент сопротивления сечения x конструкции ЛА.

Как видно из этой формулы, одним из способов снижения динамических напряжений $\sigma_1(x,t)$ является минимизация изгибающих моментов.

Введя вектор-функцию $\varphi(x,t)$, столбец R_x и оператор L_x:

$$\varphi(x,t)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x,t)\\ \varphi_2(x,t)\end{vmatrix}; \qquad R_x=\begin{vmatrix}0\\ \delta(x-x_u)\end{vmatrix}; \tag{6}$$

$$L_x=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -[B(\ )'']''/m & 0\end{vmatrix},$$

уравнение возмущенного движения упругого ЛА можно записать

$$\dot{\varphi}(x,t)=L_x\varphi+R_x u, \tag{7}$$

где $\delta(x-x_u)$ - импульсивная функция первого рода;

u - сосредоточенная управляющая сила, приложенная в сечении $0\leqslant x_u\leqslant \ell$.

Заметим, что ввиду малости влияния аэродинамических сил и внутреннего трения они в уравнении (7) не учитываются.

Сформулируем задачу. Заданы начальные условия $\varphi_j(x,0)=\varphi_{j0}(x),(j=1,2)$. Требуется синтезировать управление

$$U_0=U_0[\varphi_1(x,t),\ \varphi_2(x,t)], \tag{8}$$

которое переводит систему (7) из заданного начального напряженного состояния $B\varphi_j''(x,0)\neq 0$ в конечное ненапряженное состояние $B\varphi_j''(x,\infty)=0$ и при этом минимизирует функционал

$$J=\int_0^\infty W\,dt;$$

$$W=\int_0^\ell\int_0^{\ell}\varphi''^{T}(\xi,t)B(\xi)\,w(\xi,x)\,B(x)\varphi''(x,t)\,dx\,d\xi+cU^2 \tag{9}$$

или

$$W=\int_0^\ell\int_0^\ell\tilde{\sigma}^T(\xi,t)W(\xi)\,w(\xi,x)\,W(x)\tilde{\sigma}(x,t)\,dx\,d\xi+cU^2; \tag{10}$$

$$\tilde{\sigma}(x,t)=\begin{vmatrix}\sigma_1(x,t)\\ \sigma_2(x,t)\end{vmatrix}; \quad \sigma_2(x,t)=\sigma_1(x,t),$$

где $w(\varphi,x)$ – диагональная матрица, элементы которой $w_{jj}(\varphi,x)$ заданные весовые функции;

$c>0$ – заданное число;

$''(\;)$ – частная производная второго порядка по $0\leq\varphi\leq\ell$;

$(\;)^T$ – символ транспонирования.

Интересно отметить, что в частных случаях, если

$$w(\varphi,x)=1/W(\varphi)W(x) \quad \text{или} \quad w(\varphi,x)=\delta(\varphi-x)/W(\varphi)W(x),$$

функционал (I0) соответственно запишется:

$$W=\int_0^\ell\int_0^\ell \tilde{\sigma}^T(\varphi,t)\tilde{\sigma}(x,t)\,d\varphi\,dx+cU^2 \tag{II}$$

или

$$W=\int_0^\ell \tilde{\sigma}^2(x,t)\,dx+cU^2. \tag{I2}$$

Необходимо отметить, что при упругих колебаниях конструкции в ее сечениях всегда возникают динамические напряжения, вызванные перегрузками, т.е. они взаимосвязаны. Поэтому, от задачи минимизации динамических напряжений можно перейти к эквивалентной задаче минимизации деформаций и скоростей деформаций.

Действительно, интегрируя последовательно по частям по x и φ функционал (9) и назначив с учетом (2) граничные условия

$$\begin{gathered}\left[B(\varphi)w(\varphi,x)B(x)\right]=0=\left[B(\varphi)w(\varphi,x)B(x)\right]';\; x=0,\ell;\; \varphi\in[0,\ell];\\ \left[B(\varphi)w(\varphi,x)B(x)\right]''=0={}'\left[B(\varphi)w(\varphi,x)B(x)\right]''\;\varphi=0,\ell;\; x\in[0,\ell],\end{gathered} \tag{I3}$$

и введя обозначение

$$''\left[B(\varphi)\omega(\varphi,x)B(x)\right]''=m(\varphi)\varkappa(\varphi,x)m(x), \tag{I4}$$

вместо функционала (9), получим:

$$w=\int_0^\ell\int_0^\ell \varphi^T(\varphi,t)m(\varphi)\varkappa(\varphi,x)m(x)\varphi(x,t)\,dx\,d\varphi+cU^2, \tag{I5}$$

где $\varkappa(\varphi,x)$ – диагональная матрица с элементами $\varkappa_{jj}(\varphi,x)$.

Таким образом, преобразовав функционал (9) к эквивалентному функционалу (I5), от задачи синтеза регулятора, минимизирующего изгибающий момент можно перейти к эквивалентной задаче синтеза регулятора, минимизирующего отклонения $\varphi_1(x,t)$ и скорости отклонения $\varphi_2(x,t)$ упругой оси конструкции от равновесного положения.

Если для решения эквивалентной задачи использовать метод динамического программирования, то оптимальный функционал

$$V=\int_0^{\ell}\int_0^{\ell}\varphi^T(\xi,t)V(\xi,x)\varphi(x,t)\,d\xi\,dx, \qquad (16)$$

где $V(\xi,x)$ – квадратная матрица, элементы которой $V_{ij}(\xi,x)$ $(i,j=1,2)$ искомые весовые функции и управление (8) определяются из системы функциональных уравнений [4]:

$$\min_u\left[\frac{dV}{dt}+W\right]=\left[\frac{dV}{dt}+W\right]_{u_0}=0, \qquad (17)$$

причем, производная dV/dt функционала V определяется в силу системы (7).

Из первого уравнения системы (17) получим

$$U_0=\frac{1}{C}\int_0^{\ell}R_x^T V(\xi_u,x)\varphi(x,t)\,dx, \qquad (18)$$

подставив которое во второе уравнение системы (17), получим уравнение

$$L_x^* V+VL_\xi^{*T}+x-\frac{1}{c}V(\xi_1,x_u)RR^TV(\xi_u,x)=0 \qquad (19)$$

и граничные условия

$$\left[S_xV(\xi,x)\right]^{\xi\in(0,\ell)}_{x=0,\ell}=0=\left[V(\xi,x)S_\xi^T\right]^{x\in(0,\ell)}_{\xi=0,\ell}; \qquad (20)$$

$$L_x^*=\begin{vmatrix}0 & -\left[B(\bar m)''\right]''\\ 1 & 0\end{vmatrix},\quad R=\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix};$$

$$S_x=\begin{vmatrix}0 & \left\{+B(\bar m)''-\left[B(\bar m)''\right]'\right\}\\ 0 & 0\end{vmatrix},$$

где L_ξ^*, S_ξ получаются из L_x и S_x заменой в них x на ξ.

Получить точное решение задачи (19) – (20) практически не удастся. Поэтому рассмотрим ее приближенное решение.

Пусть нам известны собственные значения λ_n и функции $f_n(x)$ краевой задачи

$$[B(x) f_n''(x)]'' + \lambda_n^2 m(x) f_n(x) = 0 \qquad (21)$$

$$(n = -1, 0, 1, \ldots, K < \infty)$$

при граничных условиях

$$[B f_n''(x)]_{x=0,\ell} = 0 = [B(x) f_n''(x)]'_{x} = 0, \ell . \qquad (22)$$

Здесь $f_{-1}(x) = 1$; $f_0 = x - x_0$; $\lambda_{-1} = \lambda_0 = 0$, где x_0 - координата центра тяжести ЛА, характеризуют движение упругого ЛА как твердого тела, $f_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots, K < \infty)$- формы собственных колебаний неоднородного стержня, которым схематизируется конструкция ЛА. Известно, что $f_n[x]$ образуют полную по отношению к непрерывным на $[0, \ell]$ функциям систему, ортогональных между собой с весом $m(x)$, т.е.

$$\int_0^\ell m(x) f_n(x) f_m(x)\, dx = \delta_{mn} N_n , \qquad (23)$$

где δ_{mn} - символ Кронекера;

N_n - приведенная масса стержня при колебаниях по n -му тону.

Тогда функции $\varphi_j(x,t)$, $V_{ij}(\xi, x)$, $x_{jj}(\xi, x)$ представим в виде

$$\varphi_j(x,t) = \sum_{n=-1}^{K} q_j^n(t) f_n(x) / M_n ; \qquad (24)$$

$$V_{ij}(\xi, x) = \sum_{m,n=-1}^{K} f_m(\xi) m(\xi) V_{ij}^{mn} m(x) f_n(x) / M_m M_n ;$$

$$x_{jj}(\xi, x) = \sum_{m,n=-1}^{K} f_m(\xi) x_{jj}^{mn} f_n(x) / M_m, M_n ,$$

где V_{ij}^{mn}, x_{jj}^{mn} - коэффициенты разложений;

$q_j^n(t)$ - обобщенная фазовая координата ЛА.

Здесь необходимо сделать одно замечание, касающееся полноты системы функций $f_n(x)$. Так как мы ограничимся рассмотрением только упругих колебаний ЛА, то из полной системы $f_n(x)$ необходимо исключить функции $f_{-1}(x)$, $f_0(x)$. Тогда выражения (24) не будут иметь места. Однако это можно обойти, если предположить начальные условия удовлетворяющими

$$\varphi_{j0}(x)=\sum_{n=1}^{k} f_n(x) q_j^n(0)/M_n ,$$

т.е. $q_{-1}^j(0)=q_0^j(0)=0$. Тогда из полной системы можно изъять функции $f_{-1}(x)$, $f_0(x)$ и обращаться с полученной системой как с полной (по отношению к возбуждаемым упругим колебаниям). Кроме того, ограничимся рассмотрением в (24) только k членов разложения, что будет означать учет только k тонов колебаний конструкции ЛА.

Сформировав из элементов (24) матрицы $v(\xi,x)$, $w(\xi,x)$ подставив их в уравнение (I9), которые умножим на $f_z(\xi) f_s(x)$ $(z,S=1,2,\dots,k)$ и проинтегрируем по x и ξ от 0 до ℓ. Тогда с учетом условий (2I)-(23) получим следующее нелинейное матричное уравнение для определения искомых коэффициентов V_{ij}^{mn}:

$$\sum_{z=1}^{k} \ell^{mz} V^{zn} + \sum_{S=1}^{k} V^{mS} \ell^{Sn} + x^{mn} - \frac{1}{c}\sum_{z,S=1}^{k} V^{mz} K_z K_S V^{Sn} = \tag{25}$$

$$=0,\ (m,n=1,2,\dots,k),$$

где ℓ^{zn}, x^{mn}, V^{zn} - квадратные матрицы, элементы которых ℓ_{ij}^{mn}, x_{ij}^{zn}, V_{ij}^{zn}; K_z - матрица-столбец;

$$\ell^{zn}=\begin{vmatrix} 0 & \delta_{mn} N_n \\ \delta_{mn}\lambda_n^2 & 0 \end{vmatrix}; \quad K_z=\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что для решения уравнения (25) можно использовать известные методы, приведенные, например, в [2].

Тогда оптимальное управление (I8) можно записать

$$U_0=-\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=1}^{k}\frac{V_{2j}^{mn}}{N_n} f_n^{1}(x_u) q_n^j(t). \tag{26}$$

Известно, что функции $f_n(n)(n=1,2)$ образуют полную по отношению к непрерывным на $[0,\ell]$ функциям систему, ортогональных между собой с весом $B(x)$, т.е.

$$-\int_0^{\ell} B(x) f_m''(x) f_n''(x)\,dx=\delta_{mn} N_n .$$

Тогда функцию $\omega_{jj}(\xi,x)$ можно представить в виде

$$\omega_{jj}(\xi,x)=\sum_{m,n=1}^{k} f_m(\xi)\,\omega_{jj}^{mn} f_n''(x)/M_m M_n ,$$

где ω_{jj}^{mn} – коэффициенты разложений. Можно показать, что в этом случае граничные условия (20) совпадают с естественными граничными условиями (2), и из (I4) следует, что коэффициенты ω_{jj}^{mn}, x_{jj}^{mn} связаны между собой соотношением

$$x_{jj}^{mn} = \lambda_m^2 w_{jj}^{mn} \lambda_n^2 .$$

Как видно из (26) для формирования оптимального управления U_0 необходимо определить фазовые координаты ЛА $q_n^j(t)$ $(n = 1,2,...,K)$ $j=1,2$ что, вообще говоря, представляет трудную задачу и имеет самостоятельный интерес.

Литература

I. Меркулов В.И., Селезов И.Т. САУ – как средство увеличения динамической жесткости упругой конструкции. – В кн.: Теория автоматического управления, Киев, вып. I, 1967.

2. Соловьев А.А., Сиразетдинов Т.К. К задаче синтеза регулятора, минимизирующего напряжения в элементах упругой конструкции. Труды КАИ, 1972, вып. 147.

3. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М., "Мир", 1975.

4. Сиразетдинов Т.К. К аналитическому конструированию регуляторов в процессах с распределенными параметрами. – "Автоматика и телемеханика", 1965, № 9.

5. Гладкий В.Ф. Динамика конструкции летательных аппаратов. М., "Наука", 1969.