КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
им. С. П. КОРОЛЕВА
Аэромеханика и системы управления
Труды, выпуск 35, 1971 г.

Л. И. КУДРЯШЕВ, А. А. ГУСАКОВА, А. А. ГУСАКОВ

ТЕПЛООБМЕН СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В ОБЛАСТИ МАЛЫХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА С УЧЕТОМ ТЕПЛОВОЙ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ

Задача в такой постановке возникла в связи с оценкой эффективности работы теплообменников типа «газосвязь», получивших в последнее время применение в промышленности.

Если поле скоростей известно, то сопряженную задачу о теплообмене при постоянстве теплофизических характеристик потока и материала можно свести к следующей системе:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}_\infty\left(v_\xi\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} + \frac{v_\Theta}{\xi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\Theta}\right) = \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right); && (a)\\
&-\frac{d\vartheta_w}{d\,\mathrm{Fo}} = 6A\,\mathrm{Nu}_k\,\vartheta_w; && (b)\\
&\mathrm{Fo} = 0;\quad \vartheta = 0;\quad \vartheta_w = 1; && (c)\\
&\xi = 1,\quad v_\xi = v_\Theta = 0;\quad \vartheta_w = \vartheta_w(\mathrm{Fo}); && (d)\\
&\xi \to \infty\ v_\xi = 0;\quad v_\Theta = \frac{3}{2}v_\infty\sin\Theta;\quad \vartheta = 0, && (e)
\end{aligned}\right| , \qquad (1)$$

где

$$\vartheta = \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0};\quad \vartheta_w = \frac{T_\infty - T_w}{T_\infty - T_0};\quad \xi = \frac{r}{R};\quad \mathrm{Pe}_\infty = \frac{v_\infty R}{a};$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{a\tau}{R^2};\quad \mathrm{Nu}_k = \frac{\alpha\cdot R}{\lambda};\quad A = \frac{c_p\gamma}{c_p'\gamma'};\quad a = \frac{\gamma}{c_p\gamma};$$

ξ и Θ — безразмерные сферические координаты; R — радиус частицы; τ — время; v_ξ и v_Θ — сферические проекции скорости, отнесенные к величине скорости v_∞ невозмущенного потока; T, T_∞, $T_п$,

T_0 — температура соответственно в произвольной точке, в невозмущенном потоке, на поверхности частицы, на поверхности частицы в начальный момент времени; c_p, η, a — теплофизические характеристики.

Здесь величины с индексом «штрих» отнесены к материалу частицы.

Поскольку начальный период развития процесса теплообмена практически очень мал, то основное внимание обратим на квазистационарный период. При введении области влияния Δ в уравнении (1а) можно положить $v_\xi = 0$. Учитывая также предложение Л. С. Лейбензона об осредняющем факторе [1], заменим (1а) следующим приближенным:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}_\infty \frac{\bar{v}_\Theta}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \Theta} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right), \tag{2}$$

где

$$\bar{v}_\Theta = \int_0^1 v_\Theta \, d\eta. \tag{3}$$

Здесь $\eta = \frac{y}{\Delta}$; y — радиальная координата, отсчитываемая от поверхности частицы.

Учитывая, что

$$ds = \xi \, d\Theta,$$

перепишем (2) в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}_\infty \bar{v}_\Theta \frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right). \tag{4}$$

При помощи введения

$$u = \vartheta \xi \tag{5}$$

уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}_\infty \bar{v}_\Theta \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \tag{6}$$

или, переходя к естественной системе координат, т. е. располагая начало координат на поверхности сферы, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Pe}_\infty \bar{v}_\Theta \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{7}$$

Решение (7) будем искать в виде:

$$u = u_1 + u_2, \tag{8}$$

$$u_1 = u_1(\mathrm{Fo}, \eta); \quad u_2 = u_2(\Theta, \eta). \tag{9}$$

Подстановка (8) в (7) при учете (9) приводит к двум дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2}; && (a) \\ &\mathrm{Pe}_\infty \bar{v}_\Theta \frac{\partial u_2}{\partial \Theta} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2}. && (b), \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнение (10b) при введении области влияния интегрируется при следующих граничных условиях:

$$\mathrm{Fo} > 0 \begin{cases} \eta = 0, \quad u_2 = u_w = \vartheta_w(\mathrm{Fo}); & (a) \\ \eta = 1, \quad u_2 = 0; \quad \dfrac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 & (b) \end{cases} \tag{11}$$

В соответствии с этим для уравнения (10a) граничные условия имеют вид:

$$0 \leqslant \Theta \leqslant \pi \begin{cases} \eta = 0, \quad u_1 = 0; & (a) \\ \eta = 1, \quad u_1 = 0. & (b) \end{cases} \tag{12}$$

Приняв закон распределения скоростей в области влияния в виде

$$v_\Theta = \frac{3}{2} \sin\Theta (2\eta - \eta^2) \tag{13}$$

и внося это выражение в (3), находим

$$\bar{v}_\Theta = \sin\Theta. \tag{14}$$

Граничным условиям (11) удовлетворяет полином

$$u_2 = v_w (1 - 2\eta + \eta^2). \tag{15}$$

Интегрирование (10b) приводит к соотношению

$$\frac{d}{d\Theta}\left(\Delta_1 \int_0^1 \bar{v}_\Theta u_2 \, d\eta\right) = -\frac{1}{\Delta_1 \mathrm{Pe}_\infty} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \mu}\right)_{\eta=0} \tag{16}$$

Внося в (16) значения v_Θ и v_2 по (14) и (15), приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{d\Theta}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}}\right)^2 + 2\operatorname{ctg}\Theta\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}}\right)^2 - \frac{2}{\sin\Theta} = 0, \tag{17}$$

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{R}; \quad \Delta_{1,0} = \frac{\Delta_0}{R} = \sqrt{\frac{6}{\mathrm{Pe}_\infty}}. \tag{18}$$

Интегрирование (17) приводит к следующему результату:

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\Theta}(c - 2\cos\Theta). \tag{19}$$

При $\Theta = 0$ $\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}} = 1$, следовательно, $c = 2$.

Поэтому

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}} = \frac{\sqrt{2(1 - \cos\Theta)}}{\sin\Theta}. \tag{20}$$

Среднее значение толщины области теплового влияния, отнесенной к поверхности сферы, будет

$$\left(\frac{\overline{\Delta}_1}{\Delta_{1,0}}\right) = \frac{\int\limits_0^{\pi} R^2 \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_{1,0}}\right) \sin\Theta\, d\Theta}{\int\limits_0^{\pi} R^2 \sin\Theta\, d\Theta} = 2 \tag{21}$$

или

$$\overline{\Delta}_1 = \sqrt{\frac{24}{\mathrm{Pe}_\infty}}\,. \tag{22}$$

Поскольку область теплового влияния $\overline{\Delta}_1$ определена, то приближенное интегрирование (10*а*) может быть получено из обобщенного интегрального соотношения Л. С. Лейбензона

$$\frac{d}{d\,\mathrm{Fo}}\left(\overline{\Delta}_1^2 \int\limits_0^1 u_1\, d\eta\right) = \frac{1}{\overline{\Delta}_1}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=1} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}\right]. \tag{23}$$

Граничным условиям (12) удовлетворяет полином

$$u_1 = f(\eta - \eta^2), \text{ где } f = f\,(\mathrm{Fo}) \tag{24}$$

Внося (24) в (23), получим

$$\frac{dc}{d\,\mathrm{Fo}} = -\frac{12f}{\overline{\Delta}_1^2}\,. \tag{25}$$

Интегрирование дает

$$f = c_0 \exp\left(-\frac{12\mathrm{Fo}}{\overline{\Delta}_1^2}\right) = c_0 \exp\left(-\frac{\mathrm{Fo}\,\mathrm{Pe}_\infty}{2}\right). \tag{26}$$

Подставляя (26) в (24), имеем

$$u_1 = c_0(\eta - \eta^2)\exp\left(-\frac{\mathrm{Fo}\,\mathrm{Pe}_\infty}{2}\right). \tag{27}$$

Внося (15) и (27) в (8), получим

$$u = \vartheta_w(1 - 2\eta + \eta^2) + c_0(\eta - \eta^2)\exp\left(-\frac{\mathrm{Fo}\,\mathrm{Pe}_\infty}{2}\right). \tag{28}$$

При $\mathrm{Fo} = 0$, $\vartheta = 0$, следовательно, и $u = 0$. Поэтому отыскание произвольной постоянной интегрирования «c_0» можно найти из условия минимума функционала:

$$\delta \int\limits_0^1 [(1 - 2\eta + \eta^2) + c_0(\eta - \eta^2)]^2\, d\eta = 0. \tag{29}$$

$$c_0 = -\frac{\int\limits_0^1 (1 - 2\eta + \eta^2)(\eta - \eta^2)\, d\eta}{\int\limits_0^1 (\eta - \eta^2)\, d\eta} = -\frac{3}{2}\,. \tag{30}$$

С учетом этого приближенное решение (7) можем записать:

$$u = \vartheta_w(1-2\eta+\eta^2) - \frac{3}{2}(\eta-\eta^2)\exp\left(-\frac{\mathrm{Fo\,Pe}_\infty}{2}\right), \qquad (31)$$

или, учитывая (5),

$$\vartheta = \frac{\vartheta_w}{\xi}(1-2\eta+\eta^2) - \frac{3}{2}\,\frac{1}{\xi}(\eta-\eta^2)\exp\left(-\frac{\mathrm{Fo\,Pe}_\infty}{2}\right). \qquad (32)$$

Коэффициент теплообмена находим из уравнения:

$$\mathrm{Nu}_k = -\frac{1}{\vartheta_w}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right)_{\xi=1} = -\frac{1}{\vartheta_w}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} =$$

$$= 1 + \frac{2}{\Delta_1}\left[1 + \frac{3}{4}\exp\left(-\frac{\mathrm{Fo\,Pe}_\infty}{2}\right)\right].$$

Осредняя это выражение по поверхности сферы и учитывая при этом (18) и (20), получим

$$\overline{\mathrm{Nu}}_k = 1 + 0{,}384\mathrm{Pe}_\infty^{0{,}5}\left[1 + \frac{3}{4}\,\frac{1}{\vartheta_w}\exp\left(-\frac{\mathrm{Fo\,Pe}_\infty}{2}\right)\right],$$

или

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{k,\,D} = 2 + 0{,}543\mathrm{Pe}_{D,\infty}^{0{,}5}\left[1 + \frac{3}{4}\,\frac{1}{\vartheta_w}\exp(-\mathrm{Fo}_Q\,\mathrm{Pe}_{D,\infty})\right], \qquad (33)$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{k,D} = \frac{\alpha_k D}{\lambda};\quad \mathrm{Pe}_{D,\infty} = \frac{v_\infty D}{a};\quad \mathrm{Fo}_D = \frac{a\tau}{D^2}.$$

При $\mathrm{Fo}\to\infty$ (33) переходит в расчетное уравнение для коэффициента теплообмена в условиях стационарного режима

$$(\overline{\mathrm{Nu}}_{k,\,D})_\infty = 2 + 0{,}543\mathrm{Pe}_{D,\infty}^{0{,}5}. \qquad (34)$$

Для воздуха в широкой области изменения температур число $\mathrm{Pr}\approx 0{,}722$. Следовательно, из (34), имеем

$$(\overline{\mathrm{Nu}}_{k,\,D})_\infty = 2 + 0{,}461\mathrm{Re}_{D,\infty}^{0{,}5}, \qquad (35)$$

в то время, как на основании опытных исследований Рэнц и Маршал [1] предложили для области изменения чисел $0 < \mathrm{Re}_{D,\infty} < 200$ следующее уравнение:

$$(\overline{\mathrm{Nu}}_{k,\,D})_\infty = 2 + 0{,}6\mathrm{Re}_{D,\infty}^{0{,}5}\,\mathrm{Pr}^{1/3}. \qquad (36)$$

Внося сюда значение $\mathrm{Pr} = 0{,}722$, получим

$$(\overline{\mathrm{Nu}}_{k,\,D})_\infty = 2 + 0{,}537\mathrm{Re}_{D,\infty}^{0{,}5}. \qquad (37)$$

Сопоставление опытного уравнения (37) и теоретического (35) указывает на то, что максимальное расхождение не превышает 11,3%. Следовательно, теоретическое решение по принятой схеме приводит к вполне удовлетворительному результату.

Уравнение (33) с учетом (34) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\overline{\mathrm{Nu}}_{k,D}-2}{(\overline{\mathrm{Nu}}_{k,D})_{\infty}-2}=1+\frac{3}{4}\frac{1}{\vartheta_w}\exp(-\mathrm{Fo}_D\,\mathrm{Pe}_{D,\infty}) \tag{38}$$

или

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{k,D}=2+\left[(\overline{\mathrm{Nu}}_{k,D})_{\infty}-2\right]\left[1+\frac{3}{4}\frac{1}{\vartheta_w}\exp(-\mathrm{Fo}_D\,\mathrm{Pe}_{D,\infty})\right]. \tag{39}$$

Внося (39) в (1*b*), приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно ϑ_w:

$$-\frac{d\vartheta_w}{d\mathrm{Fo}_D}=\frac{3}{4}A\left\{2+\underline{\overline{K}}\left[1+\frac{3}{4}\frac{1}{\vartheta_w}\exp(-\mathrm{Fo}_D\,\mathrm{Po}_{D,\infty})\right]\right\}, \tag{40}$$

$$\underline{\overline{K}}=(\overline{\mathrm{Nu}}_{k,D})_{\infty}-2. \tag{41}$$

Интегрируя это уравнение и учитывая второе условие (1*c*), получим

$$\vartheta_w=\exp\left[-\frac{3}{2}A\left(1+\frac{\overline{K}}{2}\right)\mathrm{Fo}_D\right]\times$$

$$\times\left\{1-\frac{\frac{9}{4}A\underline{\overline{K}}}{\frac{3}{2}A\left(1+\frac{\overline{K}}{2}\right)-\mathrm{Pe}_{D,\infty}}\left[1-\exp\left\{-\left[\mathrm{Pe}_{D,\infty}-\frac{3}{2}A\left(1+\frac{\overline{K}}{2}\right)\right]\mathrm{Fo}_D\right\}\right]\right\}. \tag{42}$$

Внося (42) в (38), получаем окончательное решение задачи о теплообмене в условиях тепловой нестационарности. Если же учесть, что для газового потока A является весьма малой величиной, то уравнение (42) можно заменить приближенным

$$\vartheta_w\approx\exp\left[-\frac{3}{2}A\left(1+\frac{\overline{K}}{2}\right)\mathrm{Fo}_D\right]. \tag{43}$$

Тогда, внося (43) в (38), будем иметь

$$\frac{\overline{\mathrm{Nu}}_{k,D}-2}{(\overline{\mathrm{Nu}}_{k,D})_{\infty}-2}=1+\frac{3}{4}\exp\left\{-\left[\mathrm{Pe}_{D,\infty}-\frac{3}{2}A\left(1+\frac{\overline{K}}{2}\right)\right]\mathrm{Fo}_D\right\}. \tag{44}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Лейбензон. Собрание трудов. т. IV, стр. 66, 1966.
2. Г. Гребер, С. Эрк и У. Григуль. Основы учения о теплообмене. Перевод с нем. ИИЛ, 1958.