КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА
Труды, выпуск XXXIX, 1968 г.
Вопросы прочности элементов авиационных конструкций

В. П. ИВАНОВ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛОПАТОЧНОГО ВЕНЦА, НЕСУЩЕГО ЛОПАТКИ С ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНОЙ СВЯЗАННОСТЬЮ

При решении задачи о свободных колебаниях лопаточных венцов возникают трудности в удовлетворении граничных условий для диска и лопаток, обладающих изгибно-крутильной связанностью. Это нашло свое отражение в соответствующей литературе*, где в целях упрощения задачи делаются допущения, которые не всегда оправданы. Причина этого недоразумения кроется в том, что в известных нам работах упускается из вида независимость линейных и угловых смещений периферийной части диска. Независимость этих смещений допускает возможность относительного сдвига (в окружном направлении) волн линейных и угловых смещений, что дает возможность корректно решить поставленную задачу.

Ниже приводится это решение.

Динамические характеристики лопатки зададим в виде матрицы динамических жесткостей, которая устанавливает связь между амплитудами усилий и перемещений в сечении лопатки, примыкающем к диску

$$\left\| \begin{matrix} Q_z^л \\ M_y^л \\ M_x^л \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \overset{\circ}{c}_{11} & \overset{\circ}{c}_{12} & \overset{\circ}{c}_{13} \\ \overset{\circ}{c}_{21} & \overset{\circ}{c}_{22} & \overset{\circ}{c}_{23} \\ \overset{\circ}{c}_{31} & \overset{\circ}{c}_{32} & \overset{\circ}{c}_{33} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} q_z^л \\ \beta_y^л \\ \beta_x^л \end{matrix} \right\| \qquad (1)$$

Здесь $Q_z^л$ — амплитуда гармонического усилия, действующего в направлении оси z (фиг. 1).

* См., например, (1) и др.

$M_y^л$, $M_x^л$ — амплитуды гармонических моментов относительно осей y и x.

$q_z^л$ — амплитуда линейного смещения в направлении оси z.

$\beta_y^л$ и $\beta_x^л$ — амплитуды угловых смещений относительно осей y и x.

$\overset{\circ}{C}_{rt}$ — элементы матрицы динамических жесткостей лопатки; предполагаются известными в диапазоне частот представляющем интерес ($r=1, 2, 3$; $t=1, 2, 3$).

Система координат и направление положительных усилий и смещений указаны на рисунке.

Матрица динамических жесткостей лопатки в данном случае имеет третий порядок, поскольку в дальнейшем будем предполагать диск недеформируемым в своей плоскости. Она симметрична, т. е. $\overset{\circ}{C}_{12} = \overset{\circ}{C}_{21}$, $\overset{\circ}{C}_{13} = \overset{\circ}{C}_{31}$, $\overset{\circ}{C}_{23} = \overset{\circ}{C}_{32}$.

При свободных колебаниях упругих тел, обладающих циклической симметрией, на любой из собственных форм по окружности тела укладывается целое число волн амплитуд перемещений и внутренних усилий. Они распределяются по дискретному гармоническому закону [2]. Число форм колебаний, имеющих различное число волн, зависит от порядка симметрии s (в данном случае s — число лопаток). При четном s число волн может быть $m=0, 1, 2,\dots \frac{s}{2}$, а при нечетном s $m=0, 1, 2,\dots \frac{s-1}{2}$.

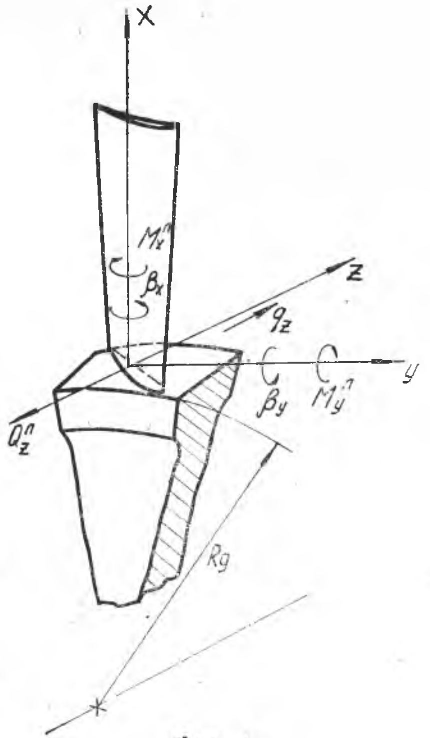
Тогда, используя комплексную запись, при свободных колебаниях по любой одной из собственных форм, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} Q_z^л &= \widetilde{Q}_z^л e^{i\frac{2\pi}{s}mk}; & q_z^л &= \widetilde{q}_z^л e^{i\frac{2\pi}{s}mk};\\ M_y^л &= \widetilde{M}_y^л e^{i\frac{2\pi}{s}mk}; & \beta_y^л &= \widetilde{\beta}_y^л e^{i\frac{2\pi}{s}mk};\\ M_x^л &= \widetilde{M}_x^л e^{i\frac{2\pi}{s}mk}; & \beta_x^л &= \widetilde{\beta}_x^л e^{i\frac{2\pi}{s}mk}; \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Здесь $Q_z^л$, $M_y^л$, $M_x^л$, $q_z^л$, $\beta_y^л$, $\beta_x^л$ — амплитуды волн усилий и смещений, которые, вообще говоря, могут быть комплексными,
m — число волн,
κ — номер лопатки ($0, 1, 2,\dots s-1$).
Используя (1) и (2), получим

$$\begin{Vmatrix} \widetilde{Q}_z^л \\ \widetilde{M}_y^л \\ \widetilde{M}_x^л \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \overset{\circ}{c}_{11} & \overset{\circ}{c}_{12} & \overset{\circ}{c}_{13} \\ \overset{\circ}{c}_{21} & \overset{\circ}{c}_{2} & \overset{\circ}{c}_{23} \\ \overset{\circ}{c}_{31} & \overset{\circ}{c}_{32} & \overset{\circ}{c}_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \widetilde{q}_z^л \\ \widetilde{\beta}_y^л \\ \widetilde{\beta}_x^л \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

В этом выражении квадратная матрица является матрицей волновых динамических жесткостей лопаточной части венца, устанавливающей связь между комплексными амплитудами волн усилий и перемещений в сечении, по которому осуществляется сочленение диска и лопаток. В рассматриваемом случае, когда предполагается, что связи между лопатками отсутствуют, эта матрица совпадает с матрицей динамических жесткостей изолированной лопатки.



Фиг. 1.

Стало обычным приемом, упрощающим без существенных погрешностей построение решений, замена системы дискретных усилий, действующих на диск со стороны лопаток эквивалентной распределенной динамической нагрузкой. В соответствии с этим

$$\left\| \begin{matrix} \overline{Q}_z^л \\ \overline{M}_y^л \\ \overline{M}_x^л \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \tilde{q}_z^л \\ \tilde{\beta}_y^л \\ \tilde{\beta}_x^л \end{matrix} \right\| \qquad (4)$$

где $\overline{Q}_z^л = \dfrac{\tilde{Q}_z^л \cdot s}{2\pi R_\partial}$, $\overline{M}_y^л = \dfrac{\tilde{M}_y^л \cdot s}{2\pi \cdot R_\partial}$,

$$\overline{M}_x^л = \frac{\tilde{M}_x^л \cdot s}{2\pi \cdot R_\partial} \quad \text{и}$$

$$c_{rt} = \frac{\overset{\circ}{c}_{rt}\, s}{2\pi R_\partial} \qquad (r = 1,\ 2,\ 3; \quad t = 1,\ 2,\ 3),$$

R_∂ — радиус диска.

Остановимся на динамических характеристиках диска. В рассматриваемом случае они могут быть заданы в виде

$$\left\| \begin{matrix} \overline{N}_z^\partial \\ \overline{M}_y^\partial \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} d_{11}^m & d_{12}^m \\ d_{21}^m & b_{22}^m \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \tilde{q}_z^\partial \\ \tilde{\beta}_y^\partial \end{matrix} \right\|. \qquad (5)$$

Здесь $\overline{N}_z^\partial$ — обобщенная (по Кирхгоффу), комплексная амплитуда погонной перерезывающей силы,

$\overline{M}_y^\partial$ — комплексная амплитуда погонного момента,

q_z^∂, β_y^∂ — комплексные амплитуды линейных и угловых смещений периферийной части диска.

В выражении (5) квадратная симметричная матрица является матрицей волновых динамических жесткостей диска, определяемой в месте предполагаемого стыка его с лопатками. Элементы этой матрицы определяются обычным путем (см., например, [1]), Они зависят от геометрии диска, условий закрепления его центральной части, частоты колебаний и числа волн деформации m.

Определим амплитуду обобщенной перерезывающей силы, воздействующей на диск со стороны лопаток:

$$N_z^л = Q_z^л - \frac{\partial M_x^л}{R_\partial \, \partial\varphi}.$$

Имея в виду, что

$$N_z^л = \overline{N}_z^л \, e^{im\varphi};$$

$$Q_z^л = \overline{Q}_z^л \, e^{im\varphi};$$

$$M_x^л = \overline{M}_x^л \, e^{im\varphi},$$

получаем:

$$\overline{N}_z^л = \overline{Q}_z^л - \frac{im}{R_\partial} \overline{M}_x^л, \tag{6}$$

Далее найдем

$$\beta_x^л = \frac{1}{R_\partial} \frac{\partial q_z^л}{\partial\varphi}.$$

Полагая

$$\beta_x^л = \breve{\beta}_x^л \cdot e^{im\varphi}$$

$$q_z^л = \breve{q}_z^л \, e^{im\varphi},$$

будем иметь:

$$\breve{\beta}_x^л = \frac{im}{R_\partial} \breve{q}_z^л \tag{7}$$

Тогда выражение (4) примет вид

$$\left\| \begin{matrix} \overline{N}_z^л \\ \overline{M}_y^л \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} c_{11} + \frac{m^2}{R_\partial} c_{33}, & c_{12} - \frac{im}{R_\partial} c_{32} \\ c_{21} + \frac{im}{R_\partial} c_{23} & c_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \breve{q}_z^л \\ \breve{\beta}_y^л \end{matrix} \right\| \tag{8}$$

Здесь принято во внимание, что

$$c_{31} = c_{13}$$

Квадратная матрица в выражении (8) является матрицей волновых динамических жесткостей лопаточной части, которая образована из (4) с учетом предстоящего стыка с диском.

Суммируя (5) и (8) и учитывая, что после стыковки диска с лопатками $q_z^\partial = q_z^л = q_z$ и $\beta_y^\partial = \beta_y^л = \beta_y$,

получим

$$\left\| \begin{matrix} \overline{N}_z \\ \overline{M}_y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} d_{11}^m + c_{11} + \frac{m^2}{R_\partial} c_{33} & d_{12}^m + c_{12} - \frac{im}{R_\partial} c_{32} \\ d_{21}^m + c_{21} + \frac{im}{R_\partial} c_{23} & d_{22}^m + c_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \breve{q}_z \\ \breve{\beta}_y \end{matrix} \right\|. \tag{9}$$

В этом выражении квадратная матрица является матрицей волновых динамических жесткостей системы «лопатки—диск», определенной на радиусе стыка диска с лопатками. Как видно, эта матрица в отличие от обычных матриц динамических жесткостей, которые всегда симметричны, является самосопряженной (эрмитовой). Лишь в частном случае, когда изгибно-крутильная связанность у лопаток отсутствует, т. е. когда $c_{32}=c_{23}=0$, она симметрична. К этому частному случаю обычно сводят задачу во всех известных нам работах, где рассматриваются колебания лопаточных венцов.

Когда лопаточный венец совершает свободные колебания, внешние усилия отсутствуют. Полагая $\bar{N}_z = 0$ и $\bar{M}_y = 0$ из (9), приравняв определитель матрицы волновых динамических жесткостей нулю, получим уравнение частот

$$\begin{vmatrix} d_{11}^m + c_{11} + \frac{m^2}{R_\partial} c_{33} & d_{12}^m + c_{12} - \frac{im}{R_\partial} c_{32} \\ d_{21}^m + c_{21} + \frac{im}{R_\partial} c_{23} & d_{22}^m + c_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

или

$$\left(d_{11}^m + c_{11} + \frac{m^2}{R_\partial} c_{33} \right) \left(d_{22}^m + c_{22} \right) - \left(d_{12}^m + c_{12} \right)^2 - \frac{m^2}{R_\partial^2} c_{32}^2 = 0. \tag{10a}$$

Для получения полного спектра собственных частот это уравнение должно быть разрешено для всех m, допускаемых порядком симметрии s. Когда изгибно-крутильная связанность у лопаток отсутствует, т. е. $c_{32}=0$, выражение (10 а) примет известный вид.

Найдя из (10а) собственные частоты, и тем самым определив для каждой из собственных частот конкретные значения d_{11}^m, c_{11}, d_{12}^m, c_{12} и c_{32} с помощью (9) можно получить форму колебаний. Для этого, положив $\bar{N}_z$ и $\bar{M}_y = 0$ и имея в виду, что $\tilde{q}_z = q_z^* + iq_z^{**}$ и $\tilde{\beta}_y = \beta_y^* + i\beta_y^{**}$, получим

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & b \\ 0 & a_{11} & b & a_{12} \\ a_{12} & b & a_{22} & 0 \\ b & a_{12} & 0 & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} q_z^* \\ q_z^{**} \\ \beta_y^* \\ \beta_y^{**} \end{Vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Здесь обозначено

$$a_{11} = d_{11}^m + c_{11} + \frac{m^2}{R_\partial} c_{33},$$

$$a_{12} = d_{12}^m + c_{12};$$

$$a_{22} = d_{22}^m + c_{22};$$

$$b = \frac{m}{R_\partial} c_{32}.$$

Полученная однородная система уравнений позволяет определить соотношение абсолютных амплитуд волн линейных и угловых смещений, а также относительный сдвиг этих волн в окружном направлении.

Уравнения (10) и (11) дают решение поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дондошанский. Расчет колебаний упругих систем. Машиностроение, 1965.

2. В. П. Иванов. О некоторых вибрационных свойствах упругих систем, обладающих циклической симметрией. Труды Куйбышевского авиационного института, «Вопросы прочности элементов авиационных конструкций», выпуск XXIX, Куйбышев, 1967.