

Л. М. Савельев,

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНЕ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА

Принятые обозначения

ξ, η, ζ — декартовы координаты, отнесенные к радиусу отверстия;
 ρ, θ — полярные координаты ($\xi = \rho \cos \theta, \eta = \rho \sin \theta$);
 $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \tau_{\xi\eta}$ ($\sigma_\rho, \sigma_\theta, \tau_{\rho\theta}$) — компоненты тензора напряжений в декартовых (полярных) координатах;
 $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta, \varepsilon_{\xi\eta}$ ($\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\zeta, \varepsilon_{\rho\theta}$) — компоненты деформации в декартовых (полярных) координатах;
 $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_\xi + \varepsilon_\eta + \varepsilon_\zeta}{3}$ — среднее удлинение;
 ε_i — интенсивность деформаций;
 σ_i — интенсивность напряжений;
 E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона;
 ∇^2 — оператор Лапласа.

Учет пластических деформаций при определении напряжений около отверстий в плоской пластине представляет собой сложную задачу. В настоящее время удовлетворительные решения этой задачи имеются лишь для случаев, когда пластическая область полностью охватывает контур отверстия [1]. Для случая, когда пластическая зона частично охватывает контур круглого отверстия, наиболее обширный числовой материал получен, видимо, в работе И. И. Фаерберга [2], в которой использован приближенный метод расчета концентрации напряжений, предложенный С. П. Тимошенко. Основной недостаток этого метода заключается в том, что он игнорирует радиальные σ_ρ и касательные $\tau_{\rho\theta}$ напряжения, возникающие в пластине. В случае упруго-пластических деформаций такое упрощение приводит к ошибочным результатам даже с качественной стороны. Отдельные результаты получены также в работе [3].

В данной статье предлагается численный метод решения этой задачи, основанный на строгом использовании всех уравнений

плоской задачи теории малых упруго-пластических деформаций.

Выпишем уравнения равновесия и совместности деформаций для плоской задачи при отсутствии объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{\eta}}{\partial \eta} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\eta}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (2)$$

Считая объемную деформацию упругой, связь между напряжениями и деформациями примем в виде [4]:

$$T = 3KD_0 + 2G(1+\gamma)D'. \quad (3)$$

Здесь

T — тензор напряжений;

D_0, D' — шаровой тензор и девиатор деформаций;

K, G — объемный модуль и модуль сдвига;

$\gamma = \gamma(\varepsilon_i)$ — функция интенсивности деформаций ε_i , которую можно определить из опыта на одноосное растяжение [4] и связать с функцией А. А. Ильюшина ω [5] соотношением

$$\gamma = -\frac{3\omega}{2(1+\mu')}, \quad (4)$$

$$\mu' = \mu + \frac{1-2\mu}{2} \omega, \quad (5)$$

где μ' — коэффициент поперечного сужения при упруго-пластической деформации [6]. Таким образом, гипотеза о несжимаемости материала здесь не привлекается.

Для плоского напряженного состояния, положив $\sigma_z = 0$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, на основании (3) и (4) получим

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu'}{1+\mu'}(\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta}), \quad (6)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1-2\mu'}{3(1-\mu')}(\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta}), \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{E(1-\omega)}{1-\mu'^2}(\varepsilon_{\xi} + \mu'\varepsilon_{\eta}) \\ \sigma_{\eta} &= \frac{E(1-\omega)}{1-\mu'^2}(\varepsilon_{\eta} + \mu'\varepsilon_{\xi}) \\ \tau_{\xi\eta} &= \frac{E(1-\omega)}{2(1+\mu')} \varepsilon_{\xi\eta} \end{aligned} \right\}. \quad (8)$$

Разрешая уравнения (8) относительно деформаций, получим

$$\varepsilon_{\xi} = \varepsilon_{\xi}^0 + \varepsilon_{\xi}^*, \quad \varepsilon_{\eta} = \varepsilon_{\eta}^0 + \varepsilon_{\eta}^*, \quad \varepsilon_{\xi\eta} = \varepsilon_{\xi\eta}^0 + \varepsilon_{\xi\eta}^*, \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi}^0 &= \frac{1}{E}(\sigma_{\xi} - \mu\sigma_{\eta}), \quad \varepsilon_{\eta}^0 = \frac{1}{E}(\sigma_{\eta} - \mu\sigma_{\xi}) \\ \varepsilon_{\xi\eta}^0 &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\xi\eta} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\xi}^* &= \frac{\omega}{E(1-\omega)} \left(\sigma_{\xi} - \frac{1}{2} \sigma_{\eta} \right), \quad \varepsilon_{\eta}^* = \frac{\omega}{E(1-\omega)} \left(\sigma_{\eta} - \frac{1}{2} \sigma_{\xi} \right) \\ \varepsilon_{\xi\eta}^* &= \frac{3\omega}{E(1-\omega)} \tau_{\xi\eta} \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Свяжем компоненты напряжения с функцией Φ :

$$\sigma_{\xi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}, \quad \sigma_{\eta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}, \quad \tau_{\xi\eta} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (12)$$

Тогда уравнения равновесия (1) тождественно удовлетворяются. Подстановка же (9)–(12), в (2) приводит к разрешающему уравнению задачи:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = -E \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi}^*}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\eta}^*}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi\eta}^*}{\partial \xi \partial \eta} \right). \quad (13)$$

Положим

$$E \varepsilon_{\xi}^* = \frac{\bar{X} + \bar{Y}}{2}, \quad E \varepsilon_{\eta}^* = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{2}, \quad E \varepsilon_{\xi\eta}^* = -\bar{Z}, \quad (14)$$

где, согласно (11),

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\omega}{2(1-\omega)} (\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}), \quad \bar{Y} = \frac{3\omega}{2(1-\omega)} (\sigma_{\xi} - \sigma_{\eta}) \\ \bar{Z} &= -\frac{3\omega}{1-\omega} \tau_{\xi\eta} \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в уравнение (13), получим окончательно

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2} \nabla^2 (\bar{X} - \bar{Y}) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \xi} \right). \quad (16)$$

Интенсивности напряжений и деформаций в случае плоского напряженного состояния определяются формулами

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\eta}^2 - \sigma_{\xi} \sigma_{\eta} + 3\tau_{\xi\eta}^2}, \quad (17)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\mu')} \sqrt{(\varepsilon_{\xi} - \varepsilon_{\eta})^2 + (\varepsilon_{\xi} + \varepsilon_{\eta})^2 + 3\varepsilon_{\xi\eta}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{\xi\eta}^2}. \quad (18)$$

Подстановка (6) и (9)–(11) в (18) дает

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{E(1-\omega)}. \quad (19)$$

Эта формула справедлива при любых значениях μ' .

Решение задачи сводится, таким образом, к интегрированию уравнения (16) с учетом зависимостей (15), (17), (19) и граничных условий. В полярных координатах уравнение (16) примет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\Omega, \quad (20)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2} \nabla^2 (X - Y) - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial Y}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \frac{Z}{\rho^2} \right). \quad (21)$$

Функции X , Y и Z определяются по формулам (15), где следует заменить индексы ξ и η соответственно на ρ и θ . Аналогично следует поступить и с выражением (17) для σ_i .

Напряжения σ_ρ , σ_θ и $\tau_{\rho\theta}$ вычисляются через функцию Φ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для решения уравнения (20) используем метод последовательных приближений, полагая в k -том приближении

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi^{(k)} = -\Omega^{(k)}. \quad (23)$$

Правая часть уравнения (23) вычисляется по формуле (21), в которой принимается

$$X^{(k)} = \frac{\omega^{(k-1)}}{2[1 - \omega^{(k-1)}]} [\sigma_\rho^{(k-1)} + \sigma_\theta^{(k-1)}]. \quad (24)$$

Аналогично определяются $Y^{(k)}$ и $Z^{(k)}$. Напряжения $\sigma_\rho^{(k-1)}$, $\sigma_\theta^{(k-1)}$ и $\tau_{\rho\theta}^{(k-1)}$ вычисляются по формулам (22) через функцию $\Phi^{(k-1)}$. По этим напряжениям находится $\sigma_i^{(k-1)}$, а затем интенсивность деформации

$$\varepsilon_i^{(k-1)} = \frac{\sigma_i^{(k-1)}}{E[1 - \omega^{(k-1)}]}. \quad (25)$$

Далее, в зависимости от $\varepsilon_i^{(k-1)}$, по заданной диаграмме растяжения определяется $\omega^{(k)}$.

В качестве нулевого приближения принимается решение соответствующей «упругой» задачи. По результатам нулевого приближения определяется функция пластичности ω как в первом, так и во втором приближениях. В последующих приближениях в формулах типа (24) используется функция $\omega^{(k-1)}$, а не $\omega^{(k)}$, (которая к этому моменту может быть вычислена). Благодаря такому приему при переходе к $(k+1)$ -ому приближению правая часть уравнения (23) линейным образом определяется через $\Phi^{(k)}$, что позволяет обосновать применение методов сложной итерации [8] для улучшения сходимости процесса приближений.

Выведем расчетные формулы для k -того приближения. В дальнейшем изложении индекс « k » условно опущен.

Решение уравнения (23) будем искать в виде тригонометрического ряда. Для случая двойной симметрии (относительно осей ξ и η) имеем

$$\Phi(\rho, \theta) = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \varphi_n(\rho) \cos n\theta. \quad (26)$$

Правую часть уравнения (23) также разложим в ряд Фурье:

$$\Omega(\rho, \theta) = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \alpha_n \Omega_n(\rho) \cos n\theta. \quad (27)$$

Здесь

$$\Omega_n(\rho) = \frac{1}{2} \left(X_n'' + \frac{1}{\rho} X_n' - \frac{n^2}{\rho^2} X_n \right) - \frac{1}{2} \left(Y_n'' + \frac{3}{\rho} Y_n' + \frac{n^2}{\rho^2} Y_n \right) + n \left(\frac{1}{\rho} Z_n' + \frac{1}{\rho^2} Z_n \right), \quad (28)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \text{ при } n = 0, \alpha_n = 1 \text{ при } n > 0,$$

$X_n(\rho)$, $Y_n(\rho)$ и $Z_n(\rho)$ — коэффициенты Фурье функций $X(\rho, \theta)$, $Y(\rho, \theta)$ и $Z(\rho, \theta)$. Штрихом обозначено дифференцирование по ρ .

Для $\varphi_n(\rho)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L_n L_n \varphi_n(\rho) = -\alpha_n \Omega_n(\rho), \quad (29)$$

где

$$L_n(*) = \frac{d^2(*)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d(*)}{d\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} (*).$$

Можно показать, что

$$L_n(*) = \rho^{-(n+1)} \frac{d}{d\rho} \rho^{2n+1} \frac{d}{d\rho} \rho^{-n} (*). \quad (30)$$

Тогда

$$\varphi_n(\rho) = \bar{\varphi}_n(\rho) - \varphi_n^*(\rho), \quad (31)$$

где

$$\bar{\varphi}_0(\rho) = A_0 \rho^2 + B_0 \ln \rho + C_0 \rho^2 \ln \rho + D_0, \quad (32)$$

$$\bar{\varphi}_n(\rho) = A_n \rho^{-n} + B_n \rho^{-n+2} + C_n \rho^n + D_n \rho^{n+2} \quad (n \geq 2), \quad (33)$$

$$\varphi_n^*(\rho) = \alpha_n \rho^n \int_{\rho_0}^{\rho} \rho_2^{-(2n+1)} \int_{\rho_0}^{\rho_2} \psi_n \rho_1^{n+1} d\rho_1 d\rho_2, \quad (34)$$

$$\psi_n(\rho) = \frac{X_n - Y_n}{2} - \rho^n \int_{\rho_0}^{\rho} \left[\frac{Y_n - nZ_n}{\rho_2^{n+1}} + \frac{n(n-1)}{\rho_2^{2n+1}} \int_{\rho_0}^{\rho_2} \rho_1^{n-1} (Y_n + Z_n) d\rho_1 \right] d\rho_2. \quad (35)$$

Здесь $\rho_0 \geq 1$ — некоторое, вообще говоря, произвольное число. Используя формулы (22), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} (\bar{\sigma}_{\rho n} - \sigma_{\rho n}^*) \cos n\theta \\ \sigma_\theta &= \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} (\bar{\sigma}_{\theta n} - \sigma_{\theta n}^*) \cos n\theta \\ \tau_{\rho\theta} &= \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} (\bar{\tau}_{\rho\theta n} - \tau_{\rho\theta n}^*) \sin n\theta \end{aligned} \right\}, \quad (36)$$

где $\bar{\sigma}_{\rho n}$, $\bar{\sigma}_{\theta n}$ и $\bar{\tau}_{\rho\theta n}$ определяются через $\bar{\varphi}_n$ и содержат постоянные интегрирования, а

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho n}^* &= \frac{n(n-1)}{\rho^2} \varphi_n^* - \rho^{-(n+2)} \int_{\rho_0}^{\rho} \psi_n \rho^{n+1} d\rho \\ \sigma_{\theta n}^* &= -\sigma_{\rho n}^* - \psi_n \\ \tau_{\rho\theta n}^* &= -\frac{n(n-1)}{\rho^2} \varphi_n^* - n\rho^{-(n+2)} \int_{\rho_0}^{\rho} \psi_n \rho^{n+1} d\rho \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

По мере удаления от края отверстия напряжения должны оставаться конечными. Поэтому, взяв ρ_0 достаточно большим, следует положить равными нулю все постоянные при возрастающих функциях в формулах для напряжений, т. е.

$$C_0 = 0, \quad D_2 = 0, \quad C_n = D_n = 0 \quad (n > 2).$$

Если зона пластичности не ограничена, то в качестве ρ_0 следует взять радиус окружности, ограничивающей зону влияния отверстия на напряженное состояние. В случае же конечной зоны пластичности при выборе ρ_0 следует иметь в виду, что функции (37) отличны от нуля только в той части пластины, где $\omega \neq 0$.

В случае растяжения пластины вдоль оси ξ (контур отверстия предполагается свободным от напряжений) имеем:

$$\text{при } \rho = 1 \quad \sigma_{\rho} = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = 0;$$

$$\text{при } \rho \rightarrow \infty \quad \sigma_{\rho} = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta} = -\frac{p}{2} \sin 2\theta,$$

откуда находим

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{p}{4}, \quad B_0 = \frac{p}{2} + \sigma_{\rho 0}^* (\rho = 1), \quad C_2 = \frac{p}{4}, \\ A_n &= \delta_n \frac{p}{4} + \frac{1}{2(n+1)} \left[\sigma_{\rho n}^* - \frac{n+2}{n} \tau_{\rho\theta n}^* \right]_{\rho=1}, \\ B_n &= -\delta_n \frac{p}{2} - \frac{1}{2(n-1)} \left[\sigma_{\rho n}^* - \tau_{\rho\theta n}^* \right]_{\rho=1}, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\delta_n = 1$ при $n=2$; $\delta_n = 0$ при $n > 2$.

Для численных расчетов по приведенным формулам использовалась аппроксимация диаграммы растяжения двумя прямыми сопрягающей их кривой (фиг. 1). При этом для функции пластичности можно получить следующие формулы [7]:

$$\text{при } 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_1 \quad \omega = 0,$$

$$\text{при } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_2 \quad \omega = a - \frac{b}{E_{\theta i}} + \frac{c}{E_{\theta i}} \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_2} \right)^d,$$

$$\text{при } \varepsilon_i \geq \varepsilon_2 \quad \omega = a - \frac{b}{E_{\theta i}},$$

где

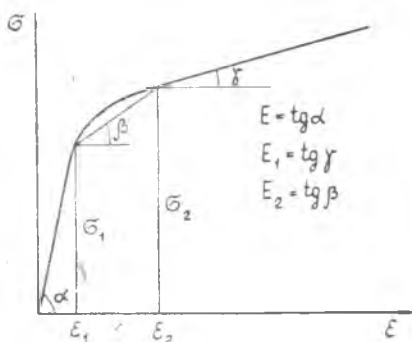
$$a = 1 - \frac{E_1}{E}, \quad b = \sigma_2 - E_1 \varepsilon_2,$$

$$c = \frac{(E_2 - E_1) \varepsilon_2}{\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^{d-1}}, \quad d = \frac{E - E_1}{E_2 - E_1}.$$

Числовые расчеты выполнены на ЭВМ «Урал-2» для следующих параметров материала:

$$E = 6,8 \cdot 10^5 \text{ дан/см}^2; \quad E_1 = 1 \cdot 10^4 \text{ дан/см}^2; \quad \sigma_1 = 1300 \text{ дан/см}^2;$$

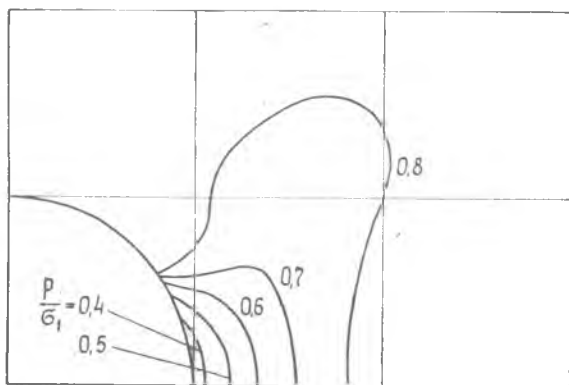
$$\sigma_2 = 1750 \text{ дан/см}^2; \quad E \varepsilon_2 = 4080 \text{ дан/см}^2.$$



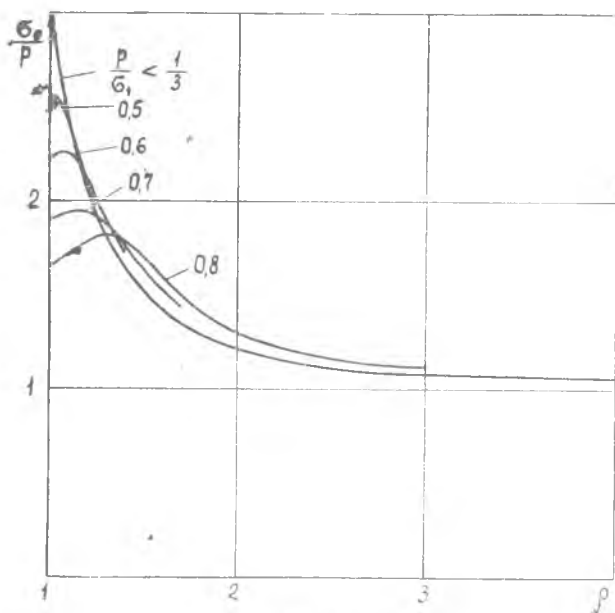
Фиг. 1.

Расчеты проводились с удержанием $4 \div 5$ членов рядов (26) и (27) ($n_{\max} = 6 \div 8$). Процесс простых итераций сходится при $p < 0,6\sigma_1$. Для $p \geq 0,6\sigma_1$ использовался один из вариантов метода подобных итераций [8]. Результаты k -того приближения уточнялись введением функции множителя $\beta^{(k)}(p)$ с таким расчетом, чтобы получилось совпадение $\Phi^{(k)}(p, \theta)$ и $\Phi^{(k+1)}(p, \theta)$ на линии $\theta = \frac{\pi}{2}$.

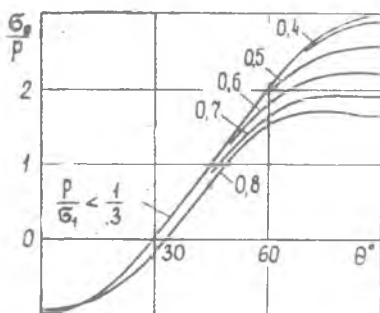
Результаты вычислений представлены на фиг. 2—4. Распространение зоны пластичности с ростом p показано на фиг. 2. Размеры и форма зон пластичности резко отличаются от результатов работы [2], особенно при больших значениях p . Качественное отличие имеется и в распределении напряжения σ_θ в сечении $\theta = \frac{\pi}{2}$, которое дано на фиг. 3. Максимальное значение σ_θ смещается от



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

края отверстия, но интенсивность напряжений, как показывают расчеты, имеет наибольшее значение у края отверстия. На фиг. 4 показано распределение σ_θ по контуру отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Савин. Распределение напряжений около отверстий «Наукова думка», Киев, 1968.
2. И. И. Фаерберг. Растяжение пластинки с круговым отверстием за пределом упругости. Труды ЦАГИ, № 615, 1947.

3. Р. Ю. Керимов. Развитие пластических зон возле кругового отверстия при одноосном растяжении пластинки, «Прикладная механика», т. 1, в. 9, 1965.
4. Г. Каудерер. Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961.
5. А. А. Ильюшин. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
6. Н. Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., 1968.
7. И. С. Ахмедьянов. Малые упруго-пластические деформации сферической оболочки при осесимметричном нагружении. Труды КуАИ, вып. XXXIX 1968.
8. И. С. Биргер. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Оборонгиз, 1956.