

расположению. Конструктивно анизотропная же модель приводит к пластине переменной толщины, обратный переход от которой к дискретно-подкрепленной пластине носит весьма грубый характер. Точное же воспроизведение сложного рельефа оптимальной пластины лишено практического смысла.

Таким образом, дискретно-континуальная модель и в области оптимального проектирования летательных аппаратов создает реальные предпосылки для важных практических результатов, не достигнутых на основе непрерывных моделей.

УДК 621.438.534.12

Г. С. Писаренко

О ВОЗМОЖНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ТУРБИННЫХ ЛОПАТОК С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

При оценке динамической напряженности элементов конструкции, которая нужна для прогнозирования их надежности и долговечности, кроме собственной частоты требуется знать и амплитудно-частотную характеристику колебательной системы. Для этого необходимы характеристики демпфирования колебаний, обусловленные потерями энергии на несовершенную упругость материала, потерями на трение в сочленениях конструкции, потерями на трение о внешнюю подвижную или неподвижную среду, а также возникающим при этом вихреобразованием.

Примем, что диссипация энергии является малой, составляющей менее 10% от амплитудного значения потенциальной энергии деформации (или энергии колебаний системы), а потому члены дифференциального уравнения, отражающие учет энергетических потерь указанного порядка, могут быть введены с множителем в виде малого параметра ϵ .

Рассмотрим простейший случай поперечных колебаний тонкого консольного стержня постоянного сечения. Уравнение равновесия элемента стержня при его поступательном перемещении запишется в виде

$$q_i dx + \partial Q = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим простейший случай поперечных колебаний тонкого консольного стержня постоянного сечения, уравнение равновесия элемента которого запишется в виде

$$q_i dx - \partial Q = 0,$$

$$\text{где } q_i = \rho F \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}; \quad (2)$$

q_i — интенсивность сил инерции массы элемента стержня, направленная параллельно прогибу ω ; F — площадь поперечного сечения стержня; ρ — плотность материала.

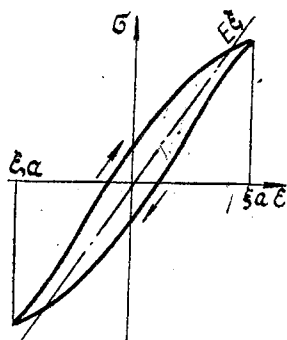


Рис. 1. Схема петли гистерезиса

При этом предположим, что силы, характеризующие рассеяние энергии, включены в величину перерезывающей силы Q .

Потери при диссипации энергии могут быть условно представлены петлями гистерезиса, площадями которых характеризуется часть потерянной энергии от потенциальной энергии в каждом единичном объеме материала с данной амплитудой циклической деформации.

Предположим, что все петли гистерезиса (рис. 1) имеют одинаковую форму, описываемую ра-

нее предложенными нами уравнениями [1]:

$$\vec{\sigma} = E \left[\xi \pm \frac{3}{8} \delta \left(\xi_a \mp \xi - \frac{\xi^2}{\xi_a} \right) \right], \quad (3)$$

где σ — напряжение; ξ_a , ξ — соответственно амплитудное и текущее значение относительной деформации; δ — декремент колебаний, зависящий от тех или иных факторов.

В нашем случае, когда декремент колебаний вследствие рассеяния энергии в материале зависит от амплитуды деформации

$$\delta_m = \delta_m(\xi_a),$$

конструкционное рассеяние энергии пропорционально максимальной деформации (напряжения) у корня лопатки

$$\delta_k = \alpha (\xi_a)_{\max},$$

а аэродинамическое рассеяние энергии — линейной функцией скорости перемещения сечения лопасти

$$\delta_a = \beta \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{\max},$$

можем уравнение (3) записать в виде

$$\vec{\sigma} = E \left[\xi \pm \frac{3}{8} (\delta_m \mp \delta_k + \delta_a) (\xi_a \mp 2\xi - \frac{\xi^2}{\xi_a}) \right],$$

или сокращенно

$$\vec{\sigma} = \sigma_y \pm \sigma_s, \quad (4)$$

где σ_y — «упругое» напряжение; σ_s — некоторое эквивалентное напряжение «сопротивления», обусловленное диссипацией энергии в колебательной системе.

На основании формулы (4) изгибающий момент в сечении может быть записан в виде

$$\vec{M} = M_y \pm \vec{M}_s,$$

$$\text{где } M_y = \int_F \sigma_y y \, dF = EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2};$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_s &= \int_F \sigma_s y \, dF = \pm E \int \frac{3}{8} \left[\delta \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} y \right)_a + \alpha \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} y \right)_{a, x=0} + \right. \\ &\quad \left. + \beta \frac{\partial \omega}{\partial t} \right] \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} y \right)_a \pm 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} y - \frac{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} y \right)^2}{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} y \right)_a} \right] y \, dF = \\ &= \pm \vec{\Phi} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega}{\partial t}, \alpha, \beta \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Выражение производной поперечной силы Q по x можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (M_y \pm \vec{M}_s) = \\ &= EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \pm \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{\Phi} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega}{\partial t}, \alpha, \beta \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда с учетом (2) и (6) уравнение (1) может быть представлено в виде

$$EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \pm \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overleftrightarrow{\Phi} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega}{\partial t}, \alpha, \beta \right) = 0, \quad (7)$$

где EI — жесткость поперечного сечения стержня при изгибе.

Дифференциальное уравнение вынужденных поперечных колебаний лопатки в поле центробежных сил с учетом рассеяния энергии можно записать, воспользовавшись ранее выведенным нами уравнением (2) и (7) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \right] - \rho \omega^2 \left[\frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \int (r_0 + \xi) F(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} (r + x) F(x) \right] - \rho \omega^2 F(x) \omega(x, t) + \rho F(x) \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} \mp \\ & \pm \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \left(\frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2}, \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t}, \alpha, \beta \right) - q_0 \cos pt = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где ω — угловая скорость вращения ротора; r_0 — наружный радиус турбинного диска; $F(x)$ — площадь поперечного сечения лопатки; $I(x)$ — минимальный момент инерции; ω — прогиб оси лопатки; $q_0 = \varepsilon q$ — моногармоническая равномерно-распределенная по длине лопатки возмущающая сила того же порядка малости, что и рассеяние энергии; ρ — частота возбуждения.

Поскольку найти точное решение этого уравнения непосредственным его интегрированием не представляется возможным, то применяется приближенный метод нелинейной механики, основанный на асимптотическом разложении по степеням малого параметра ε .

Следуя этому методу, будем искать функцию прогиба $\omega(x, t)$, квадрат частоты колебаний ρ^2 и величину сдвига фазы между усилием и деформацией ψ в виде следующих разложений по степеням малого параметра ε :

$$\omega(x, t) = u \varphi(x) \cos(pt + \psi) + \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \dots \quad (9)$$

$$\rho^2 = \omega_c^2 + \varepsilon \Delta_1 + \varepsilon^2 \Delta_2 + \dots \quad (10)$$

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots \quad (11)$$

Подставляя разложения в уравнение (8) и обозначая $\tau = pt + \psi$, а также сгруппировав члены, содержащие одинаковые степени малого параметра, и приравняв нулю множители при его степенях выше первой, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right] - \rho \omega^2 \left[\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \int_x (r_0 + \xi) F(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{d\varphi}{dx} (r_0 + x) F(x) - (\omega^2 + \omega_c) \varphi F(x) \right] = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right] - \rho \omega^2 \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \int_x (r_0 - \xi) F(\xi) d\xi - \right. \\ \left. - (r_0 + x) F(x) \frac{\partial U_1}{\partial x} \right] - \rho \omega^2 F(x) U_1 - \rho F(x) \Delta_1 \varphi U \cos \tau + \\ + \rho \omega^2 F'(x) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} \pm \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\Phi \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau, \omega_c U \varphi, \alpha, \beta \right) - \right. \\ \left. - \varepsilon q \cos(\tau - \psi_0) \right] = 0; \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \right] - \rho \omega^2 \left[\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \int_x (r_0 + \xi) F(\xi) d\xi - \right. \\ \left. - (r_0 + x) F(x) \frac{\partial U_2}{\partial x} - \rho \omega^2 F(x) U_2 - \rho F(x) \Delta_2 U \varphi \cos \tau + \right. \\ \left. + \rho \omega^2 F(x) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\Psi}(x, \tau, \omega_c, \alpha, \beta) - q \varphi \sin(\tau - \psi_0) \right] = 0,$$

где $\tilde{\Psi}(x, \tau, \omega_c, \alpha, \beta)$ — член, учитывающий рассеяние энергии во втором приближении.

Нетрудно видеть, что уравнение (9), называемое уравнением нулевого приближения, представляет собой не что иное, как невозмущенное уравнение незатухающих колебаний, которое можно получить из уравнения (8), положив $\varepsilon = 0$, т. е. полагая, что источники поглощения и подвода энергии в колебательной системе отсутствуют.

Для решения задачи в первом приближении с учетом демпфирования колебаний необходимо найти решение уравнения первого приближения (13), исходя при этом из предварительного решения уравнения нулевого приближения (12).

При решении уравнения (12) целесообразно иметь в явном виде выражение момента инерции $I(x)$ и площадь поперечного сечения $F(x)$ как функции x .

Изменения минимального момента инерции лопатки и площади ее поперечного сечения с достаточной степенью приближения могут быть представлены следующими квадратическими параболическими кривыми:

$$F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2; \quad (15)$$

$$I(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2. \quad (16)$$

Тогда интеграл, входящий в уравнение (12), может быть представлен следующим образом:

$$\int_x (r_0 + \xi) (b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2) d\xi = r - b_0 r_0 x - \left(\frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} r_0\right) x^2 - \left(\frac{b_2}{3} r_0 - \frac{b_1}{3}\right) x^3 - \frac{b_2}{4} x^4, \quad (17)$$

где

$$r = \frac{b^2}{3} r_0 l^3 + \frac{b_1}{2} r_0 l^2 + b_0 r_0 l + \frac{b_2}{4} l^4 + \frac{b_1}{3} l^3 + \frac{b_2}{2} l^2. \quad (18)$$

Подставляя выражения (17) и (18) в уравнение (12) и учитывая при этом выражения (15) и (16), а также имея в виду, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right] = E \left[I(x) \frac{d^4 \varphi}{dx^4} + 2 \frac{dI(x)}{dx} \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + \frac{d^2 I(x)}{dx^2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right],$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} & E (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + E (2 a_1 + 4 a_2 x) \frac{d^3 \varphi}{dx^3} + \\ & + \left\{ 2 E a_2 - \rho \omega^2 \left[r - b_0 r_0 x - \left(\frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} r_0 \right) x^2 - \left(\frac{b_2}{3} - \frac{b_1}{3} r_0 \right) x^3 - \frac{b_2}{4} x^4 \right] \right\} \frac{d^4 \varphi}{dx^4} + \\ & + \rho \omega^2 \{ b_0 r_0 + (b_0 + b_1 r_0) x + (b_1 + b_2 r_0) x^2 + \\ & + (b_2 + b_1 x + b_2 x^2) \} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \rho (\omega^2 + \omega_c r) (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \varphi = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

В связи с невозможностью найти решения дифференциального уравнения (19) в замкнутом виде попытаемся искать приближенное его решение в виде следующего степенного бесконечного ряда:

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n, \quad (20)$$

где $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ — некоторые постоянные коэффициенты, подлежащие определению, исходя из граничных условий.

Подставляя выражение функции $\varphi(x)$, а также ее производные в дифференциальное уравнение (19), затем, приравняв в полученном уравнении коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x , мы получим систему уравнений, содержащих неизвестные коэффициенты $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$.

Выражая коэффициенты A_n , начиная с $n = 4$, через A_0, A_1, A_2 и A_3 , а также учитывая при этом первые два граничные условия

$$\left. \begin{aligned} (\omega(x, t))_{x=0} &= 0; & \left(\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} \right)_{x=l} &= 0; & \left(\frac{\partial^3 \omega(x, t)}{\partial x^3} \right)_{x=l} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

согласно которым $A_0 = A_1 = 0$, найдем все коэффициенты A_n , начиная с $n = 4$, выраженные через A_2 и A_3 . Осуществляя соответствующие выкладки по известному методу [2], получим решение уравнения (20):

$$\varphi(x) = A_2 f_1(x, \omega_c^2) + A_3 f_2(x, \omega_c^2).$$

Зная выражение $\varphi(x)$ и используя остальные два граничные условия (21), можно определить круговую частоту собственных колебаний лопатки.

Не останавливаясь на детальном рассмотрении определения собственной частоты колебаний, займемся выводом расчетных формул, необходимых для построения кривой резонанса в случае учета рассеяния энергии в рассматриваемой колебательной системе.

Для уточнения полученного решения задачи в нулевом приближении, рассмотрим уравнение (13), члены которого являются величиной порядка малого параметра в первой степени ϵ , т. е. решим задачу в первом приближении с учетом рассеяния энергии в материале.

Решая уравнение (13), найдем Δ_1 и $\sin \psi_0$, а, следовательно, в соответствии с разложениями (10) и (11), определим частоту колебаний и величину сдвига фаз, обусловленную рассеянием энергии в материале, в хвостовом соединении и обтекающим потоком.

Для определения интересующих нас величин Δ_1 и $\sin \psi_0$ помножим уравнение (13) один раз на $\varphi(x) \sin \tau dx d\tau$, а второй раз на $\varphi(x) \cos \tau dx d\tau$ и каждое из полученных уравнений, проинтегрировав по всей длине стержня за один цикл колебаний, приравняем нулю:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \rho \omega \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \int_0^l (r_0 + \xi) F(\xi) d\xi - (r_0 + x) \times \right. \right. \right. \\ & \times F(x) \frac{\partial U_1}{\partial x} \left. \right] - \rho \omega^2 F(x) U_1 - \rho F(x) \Delta_1 U \varphi \cos \tau + \rho F(x) \omega_c^2 \times \\ & \times \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\tilde{\Phi} \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau, \omega_c U \varphi, \alpha, \beta \right) \right] - q \cos(\tau - \psi_0) \right\} \times \\ & \times \cos \tau dx d\tau = 0; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \rho \omega \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \int_x^l (r_0 + \xi) F(\xi) d\xi - (r_0 + x) \times \right. \right. \right. \\ \times F(x) \frac{\partial U_1}{\partial x} \left. \right] - \rho \omega^2 F(x) U_1 - \rho F(x) \Delta_1 U \varphi \cos \tau + \rho F(x) \omega_c^2 \times \\ \times \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\vec{\Phi} \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau, \omega_c U \varphi, \alpha, \beta \right) \right] - q \cos(\tau - \psi_0) \left. \right\} \times \\ \times \sin \tau dx d\tau = 0. \quad (23)$$

Интегрируя эти уравнения по частям по x и τ , с учетом граничных условий (21), а также имея в виду, что $U_1(x, \tau)$ не содержит главной гармоники, можно доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right] - \rho \omega^2 \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \int_0^l (r_0 + \xi) F(\xi) d\xi - \right. \right. \\ \left. \left. - (r_0 + x) F(x) \frac{\partial U_1}{\partial x} - \rho \omega^2 F(x) U_1 \right] \varphi \cos \tau dx d\tau = 0; \quad (24)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \right] - \rho \omega^2 \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \int_0^e (r_0 + \xi) F(\xi) d\xi - \right. \right. \\ \left. \left. - (r_0 + x) F(x) \frac{\partial U_1}{\partial x} - \rho \omega^2 F(x) U_1 \right] \varphi \sin \tau dx d\tau = 0. \quad (25)$$

Тогда на основании (22) и (23) получим

$$\int_0^{2\pi} \int_0^e \left\{ -\rho \omega_c^2 F(x) \Delta_1 U \varphi \cos \tau \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\vec{\Phi} \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau, \omega_c U \varphi, \alpha, \beta \right) \right] - \right. \\ \left. - q \cos(\tau - \psi_0) \right\} \varphi \sin \tau dx d\tau;$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^e \left\{ -\rho \omega_c^2 F(x) \Delta_1 U \varphi \cos \tau \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\vec{\Phi} \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau, \omega_c U \varphi, \alpha, \beta \right) \right] - \right. \\ \left. - q \cos(\tau - \psi_0) \right\} \varphi \cos \tau dx d\tau = 0.$$

Интегрируя члены этих уравнений, записанные в явном виде, и решая первое относительно $\sin \psi_0$, а второе — относительно Δ_1 , соответственно будем иметь:

$$\sin \psi_0 = \left[\pi q \int_0^e U \varphi^2 dx \right]^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^e \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\vec{\Phi} \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau, \omega_c U \varphi, \alpha, \beta \right) \times \right. \\ \times \sin \tau dx d\tau \left. \right]; \quad (26)$$

$$\Delta_1 = \left[\pi p \int_0^{\theta} F(x) U \varphi^2 dx \right] \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta} \pm \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\vec{\Phi} \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \cos \tau, \omega_c U \varphi, \alpha, \beta \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \tau dx d\tau \right]. \quad (27)$$

Для представления правых частей последних формул в явном виде, необходимо иметь выражения функционала $\vec{\Phi}$, учитывающего рассеяния энергии в рассматриваемой колебательной системе. В соответствии с (9) выражение $\vec{\Phi}$, согласно уравнению (5), в первом приближении может быть представлено в виде

$$\vec{\Phi} = \pm \frac{3}{8} \left[- \int_{F(x)} \left[c_1 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y \right)_a + c_2 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y \right)_a^2 + c_3 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y \right)_a^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y \right)_a + \beta U \varphi \omega_c \right] \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)_a (1 \pm 2 \cos \tau - \cos^2 \tau) \right] y dy dz, \quad (28)$$

где в выражении дэкремента, характеризующего гистерезисные потери в материале

$$\delta \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y \right)_a = c_1 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y \right)_a + c_2 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y \right)_a^2 + c_3 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} y \right)_a^3;$$

c_1 , c_2 и c_3 — параметры, получаемые из опыта, по кривым зависимости истинного дэкремента от амплитуды относительной деформации $\delta = j(\xi_a)$. Учитывая сложность контура профиля лопатки, изменяющегося по длине, при конкретных расчетах с использованием вычислительной техники является целесообразным определить для трех—четырёх сечений лопатки по длине значения интегралов, входящих в выражения (28)

$$I_1 = \int_F y^2 dy dz; \quad I_2 = \int_F y^3 dy dz; \quad I_3 = \int_F y^4 dy dz; \quad I_4 = \int_F y dy dz.$$

Затем по полученным значениям построить графики $I_1 = f_1(x)$; $I_2 = f_2(x)$; $I_3 = f_3(x)$ и $I_4 = f_4(x)$ и аппроксимировать их по полиномам типа

$$I = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3,$$

где k_i — коэффициенты, определяемые из указанных графиков.

Тогда выражение (28) может быть записано в виде

$$\vec{\Phi} = \pm \frac{3}{8} E \left[c_1 I_2 U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + c_2 I_3 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 + c_3 I_4 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^3 + \right. \\ \left. + \alpha I_2 U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \beta I, \omega_c U \varphi \right] (1 \pm 2 \cos \tau - \cos^2 \tau). \quad (29)$$

Подставляя выражение (29) в уравнения (26) и (27) и, производя интегрирование по τ , соответственно будем иметь

$$\sin \psi_0 = \left[\pi q \int_0^l U \varphi^2 dx \right]^{-1} \int_0^l E \frac{d^2}{dx^2} \left[c_1 I_2 U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + c_2 I_3 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 + c_3 I_4 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^3 + \alpha I_2 U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \beta \omega_c I, U \varphi \right] dx; \quad (30)$$

$$\Delta_1 = \left[U \rho \int_0^e F(x) \varphi^2 dx \right]^{-1} \left[-\frac{3}{4} E \int_0^e \frac{d^2}{dx^2} \left[c_1 I_2 U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + c_2 I_3 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 + c_3 I_4 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^3 + \alpha I_2 U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \beta \omega_c I, U \varphi \right] dx. \right] \quad (31)$$

В соответствии с уравнением (10) частота в первом приближении с учетом диссипации энергии будет

$$p^2 = \omega_c^2 + \varepsilon_{\Delta_1},$$

или

$$\left(\frac{p}{\omega_c} \right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_{\Delta_1}}{\omega_c^2}.$$

Подставляя в последнее выражение формулу (31), будем иметь:

$$\left(\frac{p}{\omega_c} \right)^2 = 1 - \left[\pi p \omega_c^2 U \int_0^e F(x) \varphi^2 dx \right]^{-1} \left[\frac{3}{4} E \int_0^e \frac{d^2}{dx^2} \left[c_1 I_2 U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + c_2 I_3 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 + c_3 I_4 \left(U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^3 + \alpha I_2 U \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \beta \omega_c I, U \varphi \right] dx. \right] \quad (32)$$

Пользуясь формулами (30) и (32), можно построить амплитудно-частотную резонансную кривую колебаний лопатки в поле центробежных сил при известном значении амплитуды возмущающей равномерно распределенной нагрузки и при известных, полученных из опыта, характеристиках демпфирования, отраженных в этих формулах параметрами c_1, c_2, c_3, α и β .

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г. С. О новом подходе к описанию контура петли гистерезиса в теории механических колебаний. — Проблемы прочности, 1971, № 6.
2. Писаренко Г. С. Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. — Киев: Наукова думка, 1970.