стоянного и переменного электрического напряжения, силы постоянного и переменного тока, электрического сопротивления постоянному току, электрической емкости. В данной работе речь идет о поверке исключительно цифровых мультиметров, в дальнейшем для упрощения назовем их просто мультиметры.

На сегодняшний день рынок переполнен предложениями по автоматизации процесса поверки. Предложения в основном отличаются типами автоматизируемых средств измерений, а объединяет все – высокая цена.

Актуальность данной работы обусловлена тем, что существующие на рынке предложения имеют слишком высокую цену или охватывают не все необходимые виды измерений. Отсюда возникает актуальность проблемы автоматизации рабочего места. Стоит отметить, что данное автоматизированное рабочее место по поверке цифровых мультиметров также может быть организовано в других метрологических центрах.

М.А. Верхотуров, Г.Н. Верхотурова, К.В. Данилов

# УПАКОВКА *3D*-ОБЪЕКТОВ В ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ КОНТЕЙНЕР НА БАЗЕ “*NO FIT POLYHEDRON*” В ОБЪЕКТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОКСЕЛЬНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

## 1. Введение

Анализ этапов жизненного цикла сложных изделий в различных отраслях промышленности показывает, что многие из них связаны с решением оптимизационных задач размещения. Нахождение оптимального или близкого к нему решения позволяет существенно сократить расход различных ресурсов и понизить себестоимость продукции. Такие задачи являются важными с точки зрения экономии ресурсов, но сложными для принятия решений.

Многие исследователи в мире занимаются изучением класса проблем раскроя-упаковки, наиболее сложной из которых, является задача оптимизации размещения трехмерных объектов сложных форм в заданную область (контейнер). Анализ опубликованных работ и обзорных статей в этой области [1] показал, что из 158 работ за период 1980-2011гг. задаче нерегулярного размещения сложных трехмерных объектов было посвящено только 3 статьи, что составляет примерно 1.9% всех работ. Содержание этих статей, а также других работ, которые не попали в вышеуказанный обзор, позволяет сделать вывод, что исследование способов повышения эффективности получаемых решений (затраченного на процесс решения времени и их качество) продолжает быть актуальным.

## 2. Постановка задачи

Пусть имеется набор трехмерных геометрических объектов (ГО) $T=\{T_1,T_2,...,T_n\}$: $T_i \subset \mathbf{R}^3, i=\overline{1,n}$, каждый из которых задан в собственной системе координат.

Область размещения $Q \subset \mathbf{R}^3$ представляет собой прямоугольный параллелепипед с переменной высотой $H$, фиксированными длиной $L$ и шириной $W$.

Пусть $T_i(\bar{u}_i)$ геометрический объект $T_i$, смещенный на вектор $\bar{u}_i(x_i, y_i, z_i)$ (возможность поворотов в данной работе не рассматривается).

В результирующей карте/схеме размещения должны выполняться следующие условия:

- условия непересечения объектов между собой:

$$T_i(\bar{u}_i) \cap T_j(\bar{u}_j) = \varnothing, \forall i = \overline{1,n}, \forall j = \overline{1,n}, i \neq j, \qquad (1)$$

- условия нахождения геометрических объектов в области размещения:

$$T_i(\bar{u}_i) \cap Q = T_i(\bar{u}_i), \forall i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Условия (1) и (2) связывают параметры размещения $U = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n) \in R^{3n}$ объектов множества $T$ в области $Q$ и являются для них ограничениями.

Обозначим высоту $H$ области $Q$ как $Z(T(U))$, необходимую для размещения геометрических объектов множества $T = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$ с векторами смещения $U = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ соответственно.

Требуется найти такое множество векторов смещения $U$, чтобы $Z(T(U)) \to \min$, при этом выполнялись условия взаимного расположения объектов между собой и с областью размещения (1), (2).

В данной постановке эта проблема является сложной задачей оптимизационного геометрического моделирования в пространстве высокой размерности с невыпуклой и несвязной областью допустимых решений и, с точки зрения комбинаторной сложности, принадлежат к классу NP-трудных. В ней, кроме оптимизационной составляющей, особое место занимает геометрическая, заключающаяся в необходимости соблюдения в результирующем решении условий непересечения упаковываемых объектов между собой и условий их нахождения в исходной области размещения.

## 3. Подходы к решению задачи

При решении *3D* задач нерегулярного размещения геометрических объектов сложных форм широко распространенными являются методы нахождения рациональных (допустимых) укладок близких к оптимальным. Они отличаются тем, что, как правило, на каждом элементарном шаге решения оперируют отдельными геометрическими объектами (принцип пообъектного размещения), т.е. производят некоторые геометрические преобразования каждого из них.

Процесс нахождения решения в этом случае состоит из выполнения следующих процедур (называемых «*encoding*», «*decoding*», «*evaluating*» [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]):

Оптимизационная процедура – операции с приоритетным списком:

- формирование последовательности размещаемых объектов;
- изменение последовательности размещенных объектов.

Геометрическая процедура – операции с объектами, соответствующими номерам в приоритетном списке:

- представление объектов в соответствующем виде (полигональном, воксельном и т.д.);
- моделирование движения объектов;
- выбор, согласно некоторому критерию, точки размещения;
- занесение объекта в область (изменение области размещения).

Взаимодействие этих процедур чаще всего реализуется по следующему алгоритму:

*Цикл по формированию приоритетных списков:*

1. *Формирование последовательности размещаемых объектов (приоритетный список).*
2. *Цикл по элементам приоритетного списка:*
   - *2.1. моделирование движения объектов;*
   - *2.2. выбор, согласно некоторому критерию, точки размещения;*
   - *2.3. занесение объекта в область (изменение области).*
3. *Определение значения целевой функции.*

Условием выхода из внешнего цикла является заданное число итераций, время работы или достижение значения целевой функции заданного предела.

Существует большое количество разнообразных мета/эвристических методов, применяемых для решения задач нерегулярного размещения объектов и используемых для реализации оптимизационной процедуры.

Одним из наиболее применяемых методов реализации геометрической процедуры является подход, основанный на моделировании движения объектов в области размещения с учетом их взаимного непересечения. Он базируется на понятии *No-Fit-Polyhedron* (*NFP*) [2].

*No-Fit-Polyhedron* $G_{12}$ или $G(T_1(0), T_2(u_2))$ подвижного объекта $T_2(u_2)$ относительно зафиксированного $T_1(0)$ называется такое множество положений центра объекта $T_2$, при котором он плотно расположен относительно объекта $T_1$.

*NFP* $G_{12}$ подвижного объекта $T_2(u_2)$ относительно зафиксированного $T_1(0)$ может быть определен через операции Минковского следующим образом:

$G_{12} = T_1(0) \oplus -(T_2(u_2))$, где

$A \oplus B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ – сумма Минковского множеств $A$ и $B$.

## 3.1. Варианты использования *NFP* размещаемого объекта относительно размещенных объектов и внешности области размещения

Существует несколько вариантов схемы использования NFP размещаемого объекта при упаковке: предварительная; интегральная и динамическая. В данной работе была реализована «динамическая» схема использования NFP.

## 3.2. Подходы к построению *NFP*

### 3.2.1. В объектном пространстве

Будем считать, что имеется набор многогранных объектов $T = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$: $T_i \subset R^3, i = \overline{1,n}$, каждый из которых задан в собственной системе координат. $F_i = \{F_i^f\}$ – множество полигонов, $E_i = \{E_i^e\}$ – множество ребер, $V_i = \{V_i^v\}$ – множество вершин, определяющих многогранный объект $T_i$.

Условия непересечения границ двух произвольных многогранных объектов $T_i$ и $T_j$ можно сформулировать следующим образом: границы многогранных объектов $T_i$ и $T_j$ не пересекаются, если не существует ребра $E_i^e$ многогранного объекта $T_i$, которое пересекает грань $F_j^f$ объекта $T_j$.

$$\begin{cases} \nexists E_i^e, F_j^f : E_i^e \bigcap F_j^f \in F_j^f, \forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, i \neq j \\ \nexists V_i^v, T_j : V_i^v \in T_j, \forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}, i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

Параметрическое уравнение ребра

$$E_i^e = \{e_a, e_b\}: \ e_a + (e_b - e_a)t, t \in [0,1] \quad (5)$$

Параметрическое уравнение полигона

$$F_j^f = \{p_0, p_1, ..., p_m\}: \ p_0 + (p_1 - p_0)w + (p_2 - p_0)v, \ w \in R, v \in R \quad (6)$$

Приравняем уравнения (5) и (6), найдем неизвестные,
если $t \in [0, 1]$, то $E_i^e \bigcap F_j^f = I = e_a + (e_b - e_a)t$ .

Ребро $E_i^e$ пересекает полигон $F_j^f$ в точке $I$, если $I$ принадлежит $F_j^f$ .

Пусть $\phi_k$ – угол между лучами $Ip_{k-1}$ и $Ip_k$ : $\phi_k = \arccos\left(\frac{Ip_{k-1} \cdot Ip_k}{|Ip_{k-1}| \cdot |Ip_k|}\right)$

(**Ошибка! Источник ссылки не найден.**7)

Если сумма $\sum_{k=0}^{m} \phi_k > 0$, то $I$ не является внутренней точкой полигона $F_j^f$, иначе является, и границы многогранных объектов $T_i$ и $T_j$ пересекаются.

Пусть границы многогранных объектов Ti и Tj не пересекаются. Для определения их взаимного расположения из любой вершины $E_i^e \in T_i$ проведем луч l в произвольном направлении. Если количество точек пересечения луча l и полигонов $F_j^f \in T_j$ число четное, то Ti находится снаружи многогранного объекта Tj ($T_i \bigcap T_j = \varnothing$), иначе Ti находится внутри объекта Tj ($T_i \bigcap T_j = T_i$).

***Определение точек занесения***

При размещении многогранного объекта $T_m \in T = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, $1 \leq m \leq n$, когда уже размещены первые (m – 1) объекты, допустимые параметры размещения будут находиться в области $R^3 \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} G_{i,m} \setminus G_{Qm}$.

Таким образом, точки локальных экстремумов будут принадлежать множеству вершин вогнутости границы объединения $NFP$ $\bigcup_{i=1}^{m-1} G_{i,m} \bigcup G_{Qm}$ . Множество таких вершин может быть найдено в результате объединения точек следующих типов:

1.Вершины вогнутости каждого *NFP* множества $\bigcup_{i=1}^{m-1} G_{i,m} \bigcup G_{Qm}$.

2.Точки пересечения ребер вогнутости каждого *NFP* множества $\bigcup_{i=1}^{m-1} G_{i,m} \bigcup G_{Qm}$ и граней каждого другого *NFP* множества $\bigcup_{i=1}^{m-1} G_{i,m} \bigcup G_{Qm}$.

3.Точки пересечения трех граней всевозможных троек *NFP* множества $\bigcup_{i=1}^{m-1} G_{i,m} \bigcup G_{Qm}$.

Для размещения очередного объекта среди множества точек, описанных выше трех случаев, следует выбрать ту, которая имеет минимальную координату по оси Oz и является допустимой.

### 3.2.2. На базе воксельного представления информации

Дальнейшее упрощение базовых операций, с учетом необходимости повышения их надежности, возможно с переходом к логическим операциям.

Возможны различные варианты реализации построения трехмерного *NFP* на базе дискретно-логического представления информации и цепного кодирования, зависящие от следующих характеристик:

- связность границ объектов (6-ти, 18-ти и 26-ти связные для *3D* объектов);
- касание границ объектов и области упаковки («плотное» и «неплотное»);
- выбор направления движения объектов.

Поверхности трехмерных объектов описываются последовательностью элементарных векторов, ориентированных по 6, 18 или 26 направлениям в зависимости от выбранного принципа кодирования.

6-тисвязное кодирование является самым простым для описания поверхностей трехмерных объектов и надежным при построении *NFP*.

Необходимо отметить, что дискретно-логическое способ представления информации позволяет строить *NFP* с различной точностью *R*, который напрямую связан с размером дискретной сетки, т.е. размером «вокселя».

В данной работе для построения *NFP* было использовано дискретно-логическое представление объектов в виде 6-связных кодов и «неплотное» касание границ объектов и области упаковки.

***Выбор направления движения объектов при построении NFP***

Для решения этой задачи в работе предложен и разработан подход, основанный на алгоритмах «заполнения сплошных областей с затравочным вокселем» и «поиска в глубину».

## 4. Результаты вычислительного эксперимента

Для проверки качества разработанных в работе методов и алгоритмов на примере задач из литературы и практики проведен вычислительный эксперимент, а также произведено сравнение решений с результатами, полученными другими методами.

Для оценки эффективности разработанного подхода были использованы наборы входных данных из статей Стояна Ю.Г.[3] и Ягудина Р.Р.[4].

Примеры №1-3. Задан набор из 20, 30, 40 многогранников соответственно, по 2 каждого типа. Основание области упаковки имеет ширину 30 и длину 35. Сравнение производилось по параметру «плотность упаковки» C[%].

Практически во всех примерах плотность упаковки наилучшая у метода «Первый подходящий с упорядочиванием + ЛП» и «*GRASP* с ЛП» из [4]. Плотность упаковки объектов, полученная с помощью воксельного подхода, несколько ниже, т.к. была использована простейшая реализация процедуры оптимизации, однако при определенных параметрах точности он позволяет упаковать объекты быстрее.

В процессе вычислительного эксперимента были получены результаты, позволяющие сделать следующие выводы.

Основными преимуществами применения дискретно - логического представления информации и цепного кодирования являются:

– корректность решаемой (в рамках этого представления) поставленной задачи - небольшие изменения в исходных данных не влекут за собой изменения результатов решения основной задачи размещения;

– быстрота и надежность выполнения базовых логических операций;

– возможность манипулирования точностью получаемых результатов - в зависимости от выбираемого допуска аппроксимации (шага дискретно-логической сетки) можно получать грубые (для начальных шагов решения) и точные результаты (для окончательного решения). При количестве граней каждого из объектов в несколько тысяч, надежность вычислений с «плавающей запятой» резко падает, в то время как надежность использования воксельного представления от количества граней никак не зависит.

## 5. Заключение

В работе рассмотрен подход к решению задачи упаковки сложных трёхмерных объектов в параллелепипедный контейнер, основанный на построении *NFP* с использованием как объектного пространства (операции над вещественными числами), так и воксельное представление (логические операции), позволяющие получать различные по времени и точности вычисления результаты. При реализации *NFP* в объектном пространстве, в случае решения примеров с общим количеством граней, превышающим несколько десятков тысяч, алгоритм иногда работает ненадежно (происходит зацикливание). При использовании же воксельного представления плотность упаковки при уменьшении шага дискретной сетки приближается к общедоступным результатам, а время упаковки фактически не зависит от точности аппроксимации объектов полигонами, что оказывает значительное влияние на результат упаковки объектов в объектном пространстве.

**Литература**

1. Bortfeldt, A.; Wäscher, G. (2013): Constraints in container loading - A state-of-the-art review. In: European Journal of Operational Research 229, 1-20.
2. Jens Egeblad, Benny K. Nielsen, Allan Odgaard. Fast neighborhood search for two and three-dimensional nesting problems. European Journal of Operational Research 183 (2007) 1249–1266.
3. Stoyan Yu., Gil M., Scheithauer G., Pankratov A. Packing non-convex polytopes into a parallelepiped. TU Dresden, 2004.-32c.- (Preprint MATH-NM-06-2004)
4. Ягудин Р.Р. Решение задачи оптимизации упаковки многогранников в параллелепипедную область на основе построения годографа вектор-функции плотного размещения // Научно-технические ведомости. Санкт-петербургский государственный политехнический университет. Системный анализ и управление, 5 (157), г.Санкт-Петербург, 2012 – С.58-63.

Г.С. Воронков

## СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ В СИСТЕМАХ С ОРТОГОНАЛЬНЫМ ЧАСТОТНЫМ МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЕМ

(Уфимский государственный авиационный технический университет)

Одним из основных направление развития современных систем беспроводной связи является увеличение скорости передачи в эфире [1,2]. Однако, наряду с этим, большое внимание также уделяется энергоэффективности систем [3]. При этом повышение скорости передачи данных требует увеличения мощности передатчиков для повышения отношения сигнал-шум, что негативно сказывается на энергоэффективности. В то же время, известны и активно применяются в различных системах передачи так называемые дифференциальные методы [4]. Дифференциальный метод позволяет передать в канал связи не сигнал, а разность между сигналом и его предсказанным значением, генерируемым экстраполятором. Это позволяет уменьшить динамический диапазон передаваемого сигнала, уменьшив тем самым канальную скорость, не потеряв при этом в объёме принятой информации. Можно говорить, что речь идёт о способе сжатия информации. Суть дифференциального метода проиллюстрирована на рисунке 1.

В многоканальной системе использование дифференциального метода требует либо установки экстраполятора в каждый из каналов, либо координирования экстраполяторов. Обобщённую структуру системы с использованием OFDM и дифференциальной обработки приведена на рисунке 2.

В приведённой схеме предложены два способа обработки, условно можно их обозначить как «преобразование по входу» и «преобразование по выходу». Следует дополнительно отметить, что для систем с OFDM координирование