

И.В.Белоконов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

В динамике полета при решении траекторных задач часто требуется определить точность или вероятность выполнения поставленной цели, например, попадание в определенную область фазовых координат. При этом следует учитывать случайный характер атмосферных возмущений, начальных условий движения, неточность определения аэродинамических характеристик и т.д.

В силу сложности математической модели описываемого движения вероятностные характеристики процесса можно найти с достаточной степенью точности, используя метод статистических испытаний [1]. Однако это требует больших затрат машинного времени.

В то же время применение приближенных методов исследования (например, метода интегрирования корреляционной системы дифференциальных уравнений, полученной упрощением точной модели) не дает требуемой точности решения.

* В настоящей работе предлагается определять вероятностные характеристики в задачах динамики полета с помощью метода коррелированных процессов, предложенного В.И.Пугачевым [2].

Основная особенность этого метода состоит в использовании информации от исследования приближенного аналитического решения наряду с частичным применением метода Монте-Карло. Чем точнее упрощенная модель, тем существеннее выигрыш от применения этого метода по сравнению с чисто статистическими испытаниями.

Алгоритм метода (рис. I) рассмотрим на примере задачи определения положения центра масс тела в некоторый момент времени при действии случайных факторов. Будут определяться мате-

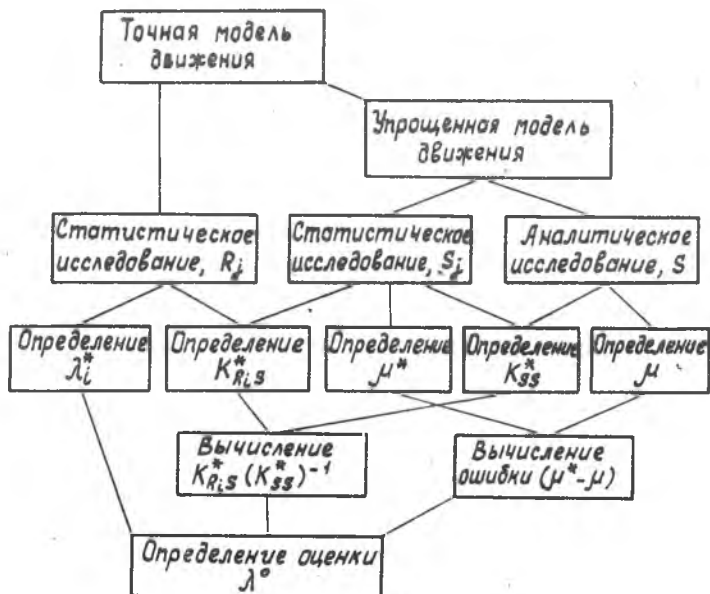


Рис. I

матические ожидания и дисперсии фазовых координат как наиболее важные вероятностные характеристики процесса.

Движение центра масс тела в пространстве описывается следующей стохастической системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_x &= -\frac{1}{\tau} (V_x V_y + V_z^2 \operatorname{tg} \varphi) + g_x + a_x, & \dot{\tau} &= V_y, \\
 \dot{V}_y &= \frac{1}{\tau} (V_x^2 + V_z^2) + g_y + a_y, & \dot{\varphi} &= \frac{1}{\tau} V_x, \\
 \dot{V}_z &= \frac{1}{\tau} V_z (V_x \operatorname{tg} \varphi - V_y) + a_z, & \dot{\lambda} &= \frac{V_z}{\tau \cos \varphi} - \omega_z,
 \end{aligned} \quad (I)$$

где τ , φ , λ - координаты положения центра масс относительно инерциальной системы отсчета, помещенной в центр Земли;

$V_x, V_y, V_z, g_x, g_y, g_z, a_x, a_y, a_z$ - проекции скорости, ускорения притяжения, ускорения от аэродинамических сил на оси земной системы координат; ω_z - угловая скорость вращения Земли.

Начальные условия движения $V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}, \tau_0, \varphi_0, \lambda_0$ являются независимыми случайными величинами, а параметры атмосферы и аэродинамические характеристики рассматриваются как некоррелированные случайные функции фазовых координат.

В динамике полета наиболее простым и эффективным способом построения аналитического решения является метод линеаризации движения относительно некоторой опорной траектории. Недостаток его, заключающийся в том, что истинное движение может значительно отличаться от модельного вследствие существенности возмущающих ускорений, для метода коррелированных процессов особой роли не играет.

Рассмотрим в качестве опорного движение в плоскости

$$\begin{aligned} V_x &= 0, & \tau &= \tau_0, \\ V_y &= 0, & \dot{\nu} &= 0, \\ V_z &= V_0 = \sqrt{\frac{K}{\tau_0}}, & u &= u_0 + \sqrt{\frac{K}{\tau_0^3}} t, \\ g_x &= 0, & g_y &= -\frac{K}{\tau_0^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где K - гравитационный параметр, τ_0 - начальный радиус-вектор, u - полярный угол и $\dot{\nu}$ - угловое отклонение от плоскости движения.

Линеаризируя систему (I) относительно опорного движения (2) и вычисляя a_x, a_y, a_z как соответствующие невозмущенному процессу, получаем систему уравнений в приращениях

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V}_x &= -\varepsilon^2 \tau_0 \Delta \dot{\nu}, & \Delta \dot{z} &= \Delta V_y, \\ \Delta \dot{V}_y &= a_y + 2\varepsilon \Delta V_z + \varepsilon^2 \Delta \tau, & \Delta \dot{\nu} &= \frac{1}{\tau_0} \Delta V_x, \\ \Delta \dot{V}_z &= -\varepsilon \Delta V_y, & \Delta \dot{u} &= \frac{1}{\tau_0} (\Delta V_z - \varepsilon \Delta \tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon = \sqrt{\frac{K}{\gamma_0}}$, $a_y = c_{x_1} \frac{S}{m} \rho(\gamma_0) \frac{V_0^2}{2}$; $\rho(\gamma_0)$ - плотность атмосферы, соответствующая γ_0 ; c_{x_1} , S , m - коэффициент сопротивления, площадь мишени и масса тела.

Если ввести вектор-строку $\Psi = [\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z, \Delta \gamma, \Delta \nu, \Delta u]$, тогда решение системы (3) в матричном виде запишется так:

$$\Psi = \xi A, \quad (4)$$

где $\xi = [\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z, \Delta \gamma, \Delta \nu, \Delta u, \rho c_{x_1}]$ - вектор-строка случайных величин, A - матрица коэффициентов.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon t & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon \gamma_0} \sin \varepsilon t & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon t & -\sin \varepsilon t & \frac{1}{\varepsilon} \sin \varepsilon t & 0 & -\frac{2}{\gamma_0 \varepsilon} (1 - \cos \varepsilon t) \\ 0 & 2 \sin \varepsilon t & -1 + 2 \cos \varepsilon t & \frac{2}{3} (1 - \cos \varepsilon t) & 0 & \frac{1}{\gamma_0} (-3t + \frac{4 \sin \varepsilon t}{\varepsilon}) \\ 0 & \varepsilon \sin \varepsilon t & \varepsilon (\cos \varepsilon t - 1) & 2 - \cos \varepsilon t & 0 & -\frac{\varepsilon}{\gamma_0} (3t - \frac{2 \sin \varepsilon t}{\varepsilon}) \\ -\varepsilon \gamma_0 \sin \varepsilon t & 0 & 0 & 0 & \cos \varepsilon t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} (1 - \cos \varepsilon t) & \frac{\varepsilon}{2} (t - \frac{2 \sin \varepsilon t}{\varepsilon}) - \frac{\varepsilon}{3} (t - \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon}) & 0 & 0 & \frac{\varepsilon}{2 \gamma_0} (\frac{3}{2} t^2 - \frac{4 \cos \varepsilon t}{\varepsilon^2}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$e = \frac{V_0^2 S}{m}$$

Аналитические соотношения для вероятностных характеристик упрощенной системы получаются, если применить к обеим частям (4) операции математического ожидания и дисперсии.

Тогда, вводя обозначения

$$M(\Psi) = [M(\Delta V_x) M(\Delta V_y) M(\Delta V_z) M(\Delta \gamma) M(\Delta \nu) M(\Delta u)],$$

$$M(\xi) = [M(\Delta V_x) M(\Delta V_y) M(\Delta V_z) M(\Delta \gamma_0) M(\Delta \nu_0) M(\Delta u_0) M(\rho) M(c_{x_1})],$$

$$D(\Psi) = [D(\Delta V_x) D(\Delta V_y) D(\Delta V_z) D(\Delta \gamma) D(\Delta \nu) D(\Delta u)],$$

$$D(\xi) = [D(\Delta V_x) D(\Delta V_y) D(\Delta V_z) D(\Delta \gamma_0) D(\Delta \nu_0) D(\Delta u_0) D(\rho) M^2(c_{x_1}) + D(c_{x_1}) M^2(\rho) + D(\rho) D(c_{x_1})],$$

$$M(\Psi) = M(\xi) A, \quad (6)$$

$$D(\Psi) = D(\xi) B, \quad (7)$$

где $B[a_{ij}^2]_{7 \times 6}$ - матрица, элементы которой представляют собой квадраты соответствующих элементов матрицы A .

Получив решения (6), (7) для упрощенной системы, можно применить метод коррелированных процессов.

Обозначим через λ искомый вектор-столбец вероятностных характеристик исходной системы, а через μ - вектор-столбец вероятностных характеристик упрощенной системы:^{*}

$$\lambda^T = M(R^T) = \{M(x), D(x)\}, \quad \mu^T = M(S^T) = \{M(\psi), D(\psi)\},$$

$$R^T = \{x, [x - M(x)]^2\}, \quad S^T = \{\psi, [\psi - M(\psi)]^2\}, \quad x = \{V_x, V_y, V_z, \tau, \varphi, \lambda\}.$$

Пусть с исходной и упрощенной системами в одинаковых условиях проводятся N независимых между собой экспериментов. Тогда статистические значения λ^* и μ^* будут

$$\lambda^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j, \quad \mu^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j. \quad (8)$$

В принятых выше обозначениях задача заключается в определении оценки λ^0 вектора λ по известным значениям векторов λ^*, μ^*, μ [2].

Выражение для λ^0 строится в классе линейных оценок, т.е.

$$\lambda^0 = C\lambda^* + D\mu^* + E\mu.$$

Матрицы C, D, E размерности $I_2 \times I_2$ определяются из условия несмещенности компонент вектора λ^0 и минимума ее дисперсии.

Отсюда получается следующая зависимость для i -ого компонента вектора λ^0 :

$$\lambda_i^0 = \lambda_i^* - K_{R_i S}^* (K_{SS}^*)^{-1} (\mu^* - \mu). \quad (9)$$

Здесь $K_{R_i S}^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (R_{ij} - \lambda_i^*)(S_j - \mu)^T$ - корреляционная матрица компонента R_i и вектора S , $K_{SS}^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (S_j - \mu)(S_j - \mu)^T$ - автокорреляционная матрица вектора S , вычисленная по тем же N экспериментам, $(\mu^* - \mu)$ - статистическая ошибка в определении вектора μ , $K_{R_i S}^* (K_{SS}^*)^{-1} (\mu^* - \mu)$ - значение этой ошибки, пересчитанное для величины λ_i^* с учетом корреляционной связи λ_i^* и μ^* .

Приведем приближенную оценку выигрыша от применения метода коррелированных процессов по сравнению с чистым методом статистических испытаний [2].

^{*}) Вектор-столбец расположен горизонтально и для выделения заключен в фигурные скобки.

Если фиксируется точность получения оценки каждой вероятностной характеристики (дисперсия D_i), то выигрыш в числе экспериментов составит

$$\xi = \frac{\max(K_{R_i R_i} / D_i)}{\max[K_{R_i R_i} (1 - \tau_{R_i S} \tau_{S R_i}) / D_i]} \quad (10)$$

При одном и том же числе испытаний выигрыш в точности по дисперсии оценки вероятностной характеристики определяется соотношением

$$\eta_i = \frac{1}{1 - \tau_{R_i S} \tau_{S R_i}} \quad (11)$$

Здесь $\tau_{R_i S} = \sqrt{K_{R_i R_i}^{-1}} K_{R_i S} \sqrt{K_{S S}^{-1}}$ - коэффициент корреляции, а $\tau_{R_i S} \tau_{S R_i}$ - квадрат множественного коэффициента корреляции случайной величины R_i и вектора S .

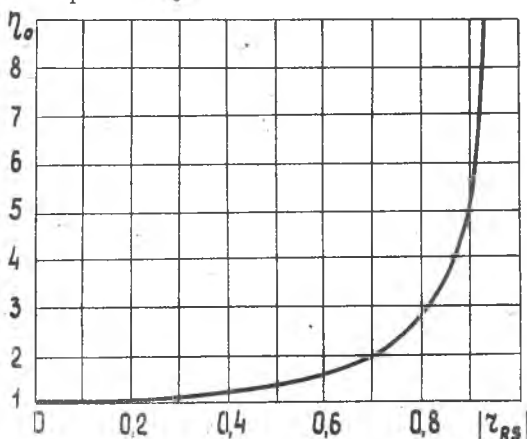


Рис. 2

На рис. 2 показана зависимость выигрыша η от модуля коэффициента корреляции τ_{RS} . Анализируя ее, можно сделать вывод, что выигрыш будет тем значительнее, чем больше значения $|\tau_{RS}|$, т.е. чем сильнее упрощенная система отражает истинный характер исследуемого движения.

Л и т е р а т у р а

1. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний. Физматгиз, 1961.
2. Пугачев В.Н. Известия АН СССР, "Техническая кибернетика", № 5, 1971.